2009-44

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ

Диссертационный совет Д 05.09.381

На правах рукописи
УДК 517.946.9

КУТУНАЕВ ЖОЛЧУБЕК НАСЫРЫМБЕКОВИЧ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек-2009

Работа выполнена
в Институте автоматики и информационных технологий
Национальной Академии Наук Кыргызской Республики
и Ошском технологическом университете им. М.М.Адышева

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор, академик НАН КР Шаршеналиев Ж.Ш.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Дженалиев М.Т.

доктор физико-математических наук, профессор Асанов А.

Ведущая организация: Институт проблем информатики и управления, МО и Н Республики Казахстан, 050026 г. Алматы, ул. Богенбай батыр, 221

Защита состоится 12 июня 2009г. в 14.00 часов на заседании Диссертационного совета Д 05.09.381 при Институте автоматики и информационных технологий Национальной Академии Наук Кыргызской Республики по адресу: г.Бишкек, пр. Чуй, 265, ауд. 118.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотечно-информационном центре Института автоматики и информационных технологий НАН КР

Автореферат разослан 11 мая **2009 г.**

Решением Диссертационного совета Д 05.09.381 от15 апреля 2009 г. (протокол №1) диссертация принята к защите и разрешается печатание автореферата.

Председатель Диссертационного совета
Заслуженный деятель науки
д.т.н., профессор, академик **Шаршеналиев Ж.Ш.**

Ученый секретарь
Диссертационного совета к.т.н., с.н.с. **Замай В.Н.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Колебания – один из самых распространенных процессов в технике и природе. Исследование процессов теории колебаний необходимо как в судо- и самолетостроении, специалистам промышленности и транспорта, создателям высококачественных систем автоматического управления, радиотехнической и акустической аппаратуры и т.д. Большой вклад в изучение колебаний, физическому и математическому моделированию колебательных процессов внесли выдающиеся ученые А.Н.Крылов, Л.И.Мандельштам, Н.Д.Папалекси, Н.Н.Боголюбов, А.А.Андронов, М.А.Айзерман, И.Я.Цыпкин и др.

В Кыргызстане исследованиями колебательных процессов активно занимаются Ж.Ш.Шаршеналиев, А.Асанов, А.К.Керимбеков, К.Алымкулов, Р.Р.Рафатов и др. Колебательные процессы являются неотъемлемой частью при исследовании явлений природы, естествознания, техники, экономики, физики, задач управления, радиоэлектроники, обработки и передачи информации и т.д. Они привлекали внимание многих известных специалистов, как теоретиков, так и прикладников, в том числе инженеров. Поэтому построение математических моделей реальных физических процессов, например, таких, как поперечные колебания струны, продольные колебания стержня и пружины, крутильные колебания упругого цилиндра, продольные колебания газа в трубе, электрические колебания в проводах и т.д. является актуальной проблемой, которая приводит к проблеме исследования смешанных задач для уравнений в частных производных гиперболического типа с двумя независимыми переменными. А математические модели стационарных, то есть не меняющихся во времени процессов: стационарное тепловое поле, магнитостатика, электростатика, поле тяготения, потенциальное движение несжимаемой жидкости и т.д., – приводят к смешанным задачам для уравнений эллиптического типа [1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 18, 32, 37].

Для создания и строгого обоснования математических моделей и краевых задач для них разработан целый ряд оригинальных методов и способов: метод интегральных преобразований (Курант Р.И., 1951), метод разделения переменных и метод нагруженных интегральных уравнений (Крылов А.Н., 1932, Тихонов А.Н. и Самарский А.А., 1966), метод конечных разностей (Шарковский А.Н., 1978), вариационные методы (Кошляков Н.С., 1962), метод функций Грина, метод разложения по собственным функциям (Тихонов А.Н., 1977) и т.д. [5, 7, 8, 12, 23, 37, 38, 39]. Важность изучения краевых задач для гиперболических уравнений с производными второго порядка в граничных условиях, а также их физическая интерпретация рассматривались в книге (Лионс Ж. - Л., Мадженес Э., 1971), в которой поставлена математическая проблема об определении классов начальных функций в области и на ее границе. Частично эта проблема нашла свое решение в работе (Дженалиев М.Т., 1992).

Однако ответ на вопрос, какой именно метод применим в каждом конкретном случае, зачастую сопряжен с определенными трудностями и зависит от опыта, интуиции автора и перебора ряда способов. Для более общих смешанных задач трудно дать ответ на вопрос, применимы ли, вообще говоря, существующие методы.

Смешанные задачи, используемые в проблемах моделирования и изучаемые в науке и технике, требуют как совершенствования аналитических методов, так и создания достаточно простых математических моделей изучаемых процессов. На практике важное значение имеет разработка эффективных методов и алгоритмов численного алгоритмического моделирования. Поэтому большой интерес представляет разработка вычислительных аспектов для смешанных задач, используемых в технических системах.

Задачи математического моделирования колебательных процессов методами дифференциальных уравнений гиперболического типа, а также разработка программных комплексов для проведения вычислительных экспериментов и определили актуальность и тематику данной диссертации.

В данной работе, в частности, разработан новый аналитический алгоритм решения смешанных задач для одного класса дифференциальных уравнений [4, 31, 47, 48, 49,].

Отметим еще одну особенность настоящей работы. Как известно, в случае обыкновенных дифференциальных уравнений в приложениях важную роль играет знание общего решения данного уравнения. Частные решения могут быть получены из общего решения при соответствующем выборе произвольных постоянных, входящих в общее решение. В настоящей работе смешанные задачи для гиперболических уравнений решаются именно исходя из общих представлений решений.

Различные аспекты исследований по решению задач моделирования колебательных процессов рассматривались в работах многих ученых, в частности, Р.Беллмана, А.Г.Бутковского, Ф.Л.Черноусько, Ж.Ш.Шаршеналиева, М.Т.Дженалиева и др. Исследованию колебательных процессов, описываемых функционально – дифференциальными смешанными уравнениями, посвящены работы А.Н.Шарковского, Г.П.Пелюх, А.Турумбекова и др.

Связь темы диссертации с научными программами. Исследования, представленные в диссертации, выполнены в Ошском технологическом университете в соответствии с утвержденными темами по научным проектом МО и Н КР и тематикой НИР Института автоматики НАН КР.

Цели и задачи работы. Цель исследования заключается в разработке и обосновании методов аналитического и численного моделирования, а также в создании комплекса программ для колебательных процессов в виде двух бегущих волн на основе использования отдельных функционально–дифференциальных уравнений и в их применении при решении смешанных задач для уравнений гиперболического типа (как с постоянными, так и с переменными коэффициентами) в более общей постановке.

Для достижения поставленной цели ставятся и решаются следующие математические задачи:

– выделение отдельных типов дифференциальных, функционально – дифференциальных уравнений, встречающихся при исследовании смешанных задач;

– проведение теоретического исследования этих уравнений с точки зрения построения их явных решений;

– разработка численных алгоритмов применения изучаемых функционально–дифференциальных уравнений при исследовании смешанных задач в более общей постановке;

– разработка комплекса программ и численное моделирование поведения полученных решений.

Научная новизна заключается в следующем.

– Предложен и обоснован новый алгоритм по моделированию одного класса колебаний, описываемых гиперболическими граничными задачами, основанный на применении функционально–дифференциальных уравнений.

– Разработано и проведено численное моделирование стационарных колебаний, описываемых решением краевой задачи для уравнения Лапласа, алгоритмом, предложенным в данной работе.

– Разработан комплекс программ по численному моделированию колебательных процессов, исследуемых в данной диссертации. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

– Показано, что применение функционально–дифференциальных уравнений расширяет круг явно решаемых смешанных задач, которые служат математическими моделями колебательных процессов. Для явных решений, полученных в настоящей работе при решении смешанных задач, разработаны алгоритмы их численной реализации, что показано в диссертации на конкретных примерах.

Практическая значимость полученных результатов. Теоретическая и практическая ценность полученных результатов состоит в следующем:

– Результаты работы по моделированию, исследованию и расчету колебательных процессов необходимы в научно-исследовательской работе и в Проектных организациях, а также использованы при чтении специальных курсов по соответствующим техническим и естественным специальностям.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

– Предложен и обоснован новый алгоритм по явному построению и моделированию одного класса колебаний, описываемых гиперболическими граничными задачами, основанный на применении функционально – дифференциальных уравнений.

– Получено решение краевой задачи для уравнения Лапласа алгоритмом, предложенным в данной работе.

– Разработан комплекс программ по численному моделированию колебательных процессов, исследуемых в данной диссертации, и приведены результаты вычислительных экспериментов.

Личный вклад соискателя. Постановки задач для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами в совместных работах выполнены автором вместе с Турумбековым А., а дальнейшее исследование этих задач выполнено автором диссертации самостоятельно. В совместной работе [57] Шаршеналиеву Ж.Ш. принадлежат постановка задачи и идея использования явного вида решения для управления сложными колебательными процессами.

В совместных работах [1, 2, 4, 5] Турумбекову А. принадлежат постановки задач для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и предложение о возможности применения функционально – дифференциального уравнения.

В совместных работах [1, 2, 4, 5] общая идея, формулировка постановок задач предложены автором и также автором проведены математические выкладки, найдены в явном виде общие решения некоторых уравнений гиперболического типа как с постоянными, так и с переменными коэффициентами, с новыми видами краевых условий.

Работы [3, 6 – 10,] принадлежат лично автору.

Таким образом, автору принадлежит основная часть результатов совместных работ, которые вошли в диссертационную работу.

Апробация результатов исследования. Основные результаты работы доложены и обсуждены (или представлены и опубликованы) на:

– Научной конференции ОшГУ, октябрь, 2005 г.;

– Международной научно–технической конференции КГТУ им. И.Раззакова «Инновации в образовании, науке и технике», Бишкек, 2006 г.;

– II Международной конференции Института автоматики Национальной Академии Наук Кыргызской Республики, Бишкек, 2007 г.;

– на научных семинарах кафедр «Прикладная математика» ОшГУ, КГТУ, семинаре лаб. ОЦСУ Института автоматики НАН КР, 2005 – 2008 г.г.;

– на Ученом Совете Ошского Технологического университета, 2007 г.

– В Институте математики и в Институте проблем информатики и управления МО и Н РК (Алматы) 2008 г.

Опубликованность результатов. По результатом диссертации опубликовано 10 научных статей, имеется 2 акта о внедрении результатов диссертационной работы, а также свидетельство №170 Кыргызпатента от 4 сентября 2008года, которые достаточно полно отражают содержание работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научных конференциях и научных семинарах.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 105 машинописных страницах, состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников из 64 наименований, приложения.

Диссертант выражает искреннюю признательность научному руководителю академику НАН КР, Заслуженному деятелю науки Ж.Ш.Шаршеналиеву за полезные советы и рекомендации, постоянное внимание к этой работе.

Методы исследования. В работе использованы методы математического моделирования, основанные на теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, дифференциально – разностных уравнений, разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, метод ортогонализации не ортогональных рядов и др.

Степень новизны. В работе впервые получены математические модели колебаний на основе явного вида решений, причем смешанные задачи для уравнений в частных производных рассмотрены в более общей постановке по сравнению с известными. В работе дано дальнейшее развитие применяемой в работе теории функционально – дифференциальных уравнений для построения явного вида решений.

Обоснованность и достоверность. Обоснованность и достоверность результатов следуют из: 1) обоснованности и достоверности положений из известных теорий, применяемых в данной работе; 2) многократной проверки приведенных математических преобразований; 3) приведенных иллюстративных примеров; 4) результатов вычислительных экспериментов, подтверждающих теоретические результаты данной работы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, приведены научная новизна, основные положения, выносимые на защиту, теоретическая и практическая значимость работы, приведены сведения о структуре и объеме работы.

Первая глава посвящена вопросам построения математических моделей колебательных процессов. В настоящей работе найдено общее решение отдельных уравнений и проверка осуществлена способом, основанным на простейшее идее.

В данной работе исследуются смешанные задачи для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами в более общей постановке. А именно, в главе 1 рассматриваются для некоторых уравнений гиперболического типа с переменными коэффициентами, допускающими общее решение в виде суммы двух бегущих волн произвольной формы, следующие задачи:

Глава 1 состоит из 6 разделов.

В разделе 1.1 рассматриваются системы, которая предназначена для автоматического регулирования давления газа в трубопроводе.

Рассмотрим систему, которая предназначена для автоматического регулирования давления газа в трубопроводе. Объектом регулирования является трубопровод 1. Регулятор состоит из чувствительного элемента 2 (мембранный измеритель давления), усилителей 3 и 4 (струнная труба и пневматический двигатель) и исполнительного механизма 5 (стержень 6 с закрепленным на нем клапаном) (Рис.1.1.1). Предполагается, что трубопровод прямолинейный, а все потребители газа сосредоточены на правом его конце. Состояние объекта характеризуется тремя параметрами: ω – скорость движения газа, p – его давление и ρ – его плотность.

Изменение этих параметров во времени и по координате l, направленной вдоль трубопровода, описывается уравнениями

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\omega\frac{\partial\omega}{\partial\ell}=-\frac{1}{p}\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial\omega}{\partial\ell}+\omega\frac{\partial\rho}{\partial\ell}=0 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\rho}{\rho^0}\right)^k=\frac{p}{p^0} \qquad (3)$$

где ρ^0 и p^0 – плотность давления газа в трубопроводе, соответствующие установившемуся режиму работы системы.

После преобразования (3) получаем

$$\gamma^2T_0\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda},\quad T_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda},\quad 0<\lambda<1, \qquad (4)$$

где $$T_0=\frac{L}{\omega^0},\quad \gamma=\frac{\omega^0}{a}, \qquad (5)$$

величина T_0 представляет собой время прохождения газа по трубопроводу в установившемся режиме, а γ – отношение установившейся скорости газа к скорости звука в нем. Из (4) получаем

$$\gamma^2T_0^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2} \qquad (6)$$

Таким образом, имеем $\omega_B=G_B/(q\rho_BF)$ и, следовательно,

$$\omega_B-\omega_0=\Delta\omega_B=\left(\frac{\partial\omega_B}{\partial G_B}\right)^0\Delta G_B+\left(\frac{\partial\omega_B}{\partial\rho_B}\right)^0\Delta\rho_B=$$

$$=\frac{1}{\rho^0qF}\Delta G_B-\frac{q^0}{q(\rho^0)^2F}\Delta\rho_B=\frac{1}{\rho^0qF}\left(\frac{dG_B}{dx}\right)^0\Delta x-\frac{G^0}{(\rho^0)^2qF}\left(\frac{\partial\rho_B}{\partial p_B}\right)^0\Delta p_B,$$

где G_B обозначено значение G, соответствующее началу трубы.

Если ввести обозначения: G – ежесекундный расход газа по весу, F – площадь сечения трубопровода, q– ускорение силы тяжести, то можно записать

$$G=q\rho F\omega \qquad (7)$$

Согласно формуле (5) имеем $\omega^0=G^0/(qF\rho^0)$. Поэтому имеем граничное условие в начале трубопровода:

$$\varphi_B+\psi_B=\xi \text{ при } \lambda=0. \qquad (8)$$

Получаем граничное условие у второго конца трубопровода

$$\psi_E=kf(t)-\left(1-\frac{k}{2}\right)\varphi_E \text{ при } \lambda=1.$$

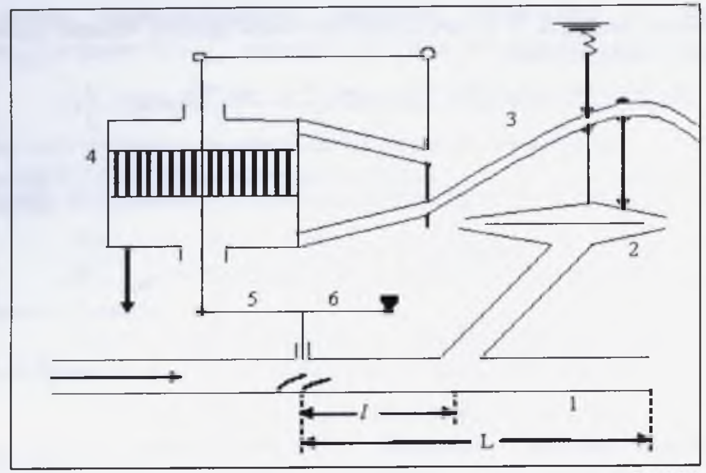

Рис.1.1.1

В разделе 1.2 исследуется математическая разностная модель двух бегущих волн, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{1}{[\varphi'(x)]^2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\left\{\frac{1}{\varphi'(x)}\left[\left(\beta_1-\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right)-\left(\beta_2+\frac{\psi'(x)-C_1\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right)\right]-\frac{\varphi''(x)}{[\varphi'(x)]^3}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+(\beta_1+\beta_2-C_1)\frac{\partial u}{\partial t}-\left[\left(\beta_1-\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right)\left(\beta_2+\frac{\psi'(x)-C_1\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right)+\frac{1}{\varphi'(x)}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right)\right]u \qquad (9)$$

допускает общее решение вида

$$u(x,t)=e^{\psi(x)+\beta_1t}f_1(\varphi(x)+t)+e^{\psi_1(x)+\beta_2t}f_2(\varphi(x)-t), \qquad (10)$$

где β_1,β_2,C_1,C_2 – произвольные постоянные, φ,ψ,f_1,f_2 – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, $\varphi'(x)\neq0$, $\psi_1(x)=\psi(x)-C\varphi(x)+C_2$.

Пример 1. Если $\psi(x)=3x,\ \varphi(x)=x,\ f_1=f_2=\sin x,\ \beta_1=\beta_2=C_1=1,\ C_2=0,$ то общее решение уравнения гиперболического типа (9) имеет вид

$$u(x,t)=e^{3x+t}\sin(x+t)+e^{2x+t}\sin(x-t).$$

В разделе 1.3 рассматривается приближенное решение в виде суммы двух бегущих волн, полученное разностным методом.

Пример 2. Пусть в уравнении (9) выполняются равенства $\psi(x)=2x,\ \ \varphi(x)=x,\ \ \beta_1=\beta_2=C_1=1,\ \ C_2=2,\ \ f_1=f_2=x^2,$ то вычислим следующие уравнения гиперболического типа с методом конечных разностей

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}-2u=f(x,t) \qquad (11)$$

в квадрате $D=\{0\le x\le1,\ 0\le t\le1\}$, с краевыми условиями

$$u(x,t)=\varphi(x,t)=e^{x+t}(x+t)^2+e^{2x+t}(x-t)^2 \qquad (12)$$

на сторонах квадрата D. В результате получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{u_{3,2}-2u_{2,2}+u_{1,2}}{\frac{1}{9}}-\frac{u_{2,3}-2u_{2,2}+u_{2,1}}{\frac{1}{9}}+3\frac{u_{2,3}-u_{2,1}}{\frac{2}{3}}-\frac{u_{2,1}-u_{2,3}}{\frac{2}{3}}-2u_{2,2}=\frac{8}{3}e^{\frac{2}{3}},\\
&\frac{u_{3,3}-2u_{2,3}+u_{1,3}}{\frac{1}{9}}-\frac{u_{2,4}-2u_{2,3}+u_{2,2}}{\frac{1}{9}}+3\frac{u_{2,4}-u_{2,2}}{\frac{2}{3}}-\frac{u_{2,2}-u_{2,4}}{\frac{2}{3}}-2u_{2,3}=4e-\frac{22}{9}e^{\frac{5}{3}},\\
&\frac{u_{4,3}-2u_{3,3}+u_{2,3}}{\frac{1}{9}}-\frac{u_{3,4}-2u_{3,3}+u_{3,2}}{\frac{1}{9}}+3\frac{u_{3,4}-u_{3,2}}{\frac{2}{3}}-\frac{u_{3,2}-u_{3,4}}{\frac{2}{3}}-2u_{3,3}=\frac{16}{3}e^{\frac{4}{3}},\\
&\frac{u_{3,3}-2u_{3,2}+u_{3,1}}{\frac{1}{9}}-\frac{u_{1,2}-2u_{3,2}+u_{2,2}}{\frac{1}{9}}+3\frac{u_{2,3}-u_{2,1}}{\frac{2}{3}}-\frac{u_{3,1}-u_{3,3}}{\frac{2}{3}}-2u_{3,2}=4e+\frac{26}{9}e^{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}\right| \qquad (13)$$

Решив систему уравнений (13) относительно $u_{2,2}$, $u_{2,3}$, $u_{3,3}$, $u_{3,2}$, определим приближенные значения соответствующих точных значений решения $u\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $u\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $u\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $u\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Можно показать, что принцип максимума, справедливый для системы разностных уравнений, эквивалентен устойчивости разностной схемы. Но тогда так же, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, решения разностных уравнений при $h \to 0$ сходятся к точному решению краевой задачи с скоростью, определяемой порядком аппроксимации уравнения и краевых условий. Таким образом, для точного решения имеем оценку погрешности

$$\max_{i,k}\left|u_{i,k}-u(x_i,y_k)\right|=\omega(h^2),\ h\to 0. \qquad (14)$$

Оценка погрешности (14) справедлива, если точное решение дважды непрерывно дифференцируемо в области D. Для областей с угловыми точками, например, прямоугольника, вообще говоря, $u(x,t)\notin C^2[D]$. Однако, если граничная функция, т.е. $\varphi(x,y)$, удовлетворяет в углах специальным условиям согласования, то точное решение $u(x,t)\in C^2[D]$, и является верной оценка (14).

Для прямоугольной области $D=\{x_0\le x\le x_1,\ y_0\le y\le y_1\}$ такими условиями согласования могут быть:

1) достаточная гладкость $\varphi(x,y)$,

2) функция $\varphi(x,y)$ должна удовлетворять в углах прямоугольника некоторому дифференциальному уравнению.

Оценка погрешности (14) имеет в основном теоретическое значение, поскольку содержит константу «с», которую практически трудно определить:

$$\max_{i,k}\left|u_{i,k}-u(x_i,y_k)\right|=ch^2+\omega(h^2),\ h\to 0.$$

Поэтому в реальных расчетах пользуются правилом Рунге оценки погрешности, аналогичным тому, которое применяется в численном решении

обыкновенных дифференциальных уравнений. Проводятся два варианта расчетов $u_{i,k}^{h}$ с шагом h и $u_{i,k}^{h/2}$ с шагом $h/2$, тогда погрешность имеет вид

$$\max_{i,k}\left|u_{i,k}^{h/2}-u(x_i,y_i)\right|=\frac{1}{3}\max_{i,k}\left|u_{i,k}^{h/2}-u_{i,k}^{h}\right|+\omega(h^2), \qquad (15)$$

и главная часть погрешности определяется на совпадающих узлах.

В разделе 1.4 доказана следующая теорема.

Теорема 2. Уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}=\left[\frac{(Cx+D)^2}{AD-BC}\right]^2\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2},\ 0<x<\infty,\quad t>0, \qquad (16)$$

с граничным условием

$$a_1\upsilon_{tt}(0,t)+a_2\upsilon_t(0,t)+a_3\upsilon_x(0,t)+a_4\upsilon(0,t)=M\sin\omega t+N\cos\omega t \qquad (17)$$

и начальными условиями

$$v(x,0)=2(Cx+D)f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right),\ v_t(x,0)=0,\ 0<x<\infty,\ t>0, \qquad (18)$$

имеет решение в виде

$$\upsilon(x,t)=(Cx+D)\left\{\frac{M\sigma_1+N\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sin\left[\omega\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}+t\right)\right]+\frac{N\sigma_1-M\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\cos\left[\omega\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}+t\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{M\sigma_1+N\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sin\left[\omega\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}-t\right)\right]+\frac{N\sigma_1-M\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\cos\left[\omega\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}-t\right)\right]\right\}, \qquad (19)$$

где A, B, C, D – произвольные постоянные, f и g – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции, a_1, a_2, a_3, a_4 – постоянные.

Пример 3. Найти решение задачи (16) – (18) при $a_1=a_4=0$, $A=C=D=1$, $B=0$. В данном случае для (16) – (18) имеем:

$$p_1 f'(t)+p_2 f(t)+q_1 f'(-t)+q_2 f(-t)=M\sin\omega t+N\cos\omega t.$$

Мы нашли $F(t)$ для примера 3: $F(t)=\dfrac{Ma_3+Na_2\omega}{2a_2a_3\omega^2}\sin\omega t-\dfrac{M}{2a_2\omega}\cos\omega t$.

Используя найденное $F(t)$, построим искомое решение:

$$\upsilon(x,t)=(x+1)\left\{\frac{Ma_3+Na_2\omega}{2a_2a_3\omega^2}\sin\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}+t\right)\right]-\frac{M}{2a_2\omega}\cos\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}+t\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{Ma_3+Na_2\omega}{2a_2a_3\omega^2}\sin\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}-t\right)\right]-\frac{M}{2a_2\omega}\cos\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}-t\right)\right]\right\},$$

где $p_1=a_2+a_3$, $p_2=a_3$, $q_1=a_3-a_2$, $q_2=a_3$, $\alpha=\dfrac{Ma_3+Na_2\omega}{2a_2a_3\omega^2}$, $\beta=-\dfrac{M}{2a_2\omega}$.

В разделе 1.5 исследуются уравнения с постоянными коэффициентами. Решается задача: найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(\beta_1-\beta_2-2ab+c)\frac{\partial u}{\partial x}+(\beta_1+\beta_2-c)\frac{\partial u}{\partial t}-$$
$$-(\beta_1-ab)(\beta_2+ab-c)u,\ 0<x,t<+\infty, \qquad (20)$$

при заданных граничных условиях

$$a_1 \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + a_3 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + a_4 u(0,t) = g(t), \qquad (21)$$

и начальных условиях

$$u(x,0) = \overline{u}_0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \overline{u}_1, \; 0 < t < \infty. \qquad (22)$$

Общее решение задачи (20) – (22) имеет вид

$$u(x,t) = \left[e^{bx+\beta_1 t} f_1\left(\frac{x}{a}+t\right) + \lambda e^{\left(b-\frac{c}{a}\right)x+\beta_2 t} f_1\left(\frac{x}{a}-t\right)\right] C_1 +$$
$$+\left[e^{bx+\beta_1 t} f_2\left(\frac{x}{a}+t\right) + \lambda e^{\left(b-\frac{c}{a}\right)x+\beta_2 t} f_2\left(\frac{x}{a}-t\right)\right] C_2 +$$
$$+ e^{bx+\beta_1 t} F\left(\frac{x}{a}+t\right) + \lambda e^{\left(b-\frac{c}{a}\right)x+\beta_2 t} F\left(\frac{x}{a}-t\right), \qquad (23)$$

где

$$C_1 = \frac{\frac{\overline{u}_0-(1+\lambda)F(0)}{1+\lambda}\left[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_2(0)+(1-\lambda)f_2'(0)\right] - f_2(0)\{\overline{u}_1 - [(\beta_1+\lambda\beta_2)F(0)+(1-\lambda)F'(0)]\}}{f_1(0)[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_2(0)+(1-\lambda)f_2'(0)] - f_2(0)[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_1(0)+(1-\lambda)f_1'(0)]},$$

$$C_2 = \frac{f_1(0)\{\overline{u}_1 - [(\beta_1+\lambda\beta_2)F(0)+(1-\lambda)F'(0)]\} - \frac{\overline{u}_0-(1+\lambda)F(0)}{1+\lambda}\left[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_1(0)+(1-\lambda)f_1'(0)\right]}{f_1(0)[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_2(0)+(1-\lambda)f_2'(0)] - f_2(0)[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_1(0)+(1-\lambda)f_1'(0)]}.$$

В разделе 1.6 решается смешанная задача о колебаниях полуограниченной прямой: найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\left[\left(\beta_1 - \frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}\right) - \left(\beta_2 + \frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+(\beta_1+\beta_2)\frac{\partial u}{\partial t} - \left[\left(\beta_1 - \frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\left(\beta_2 + \frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}\right) + c^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\right] u, \qquad (24)$$

$$0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \qquad (25)$$

удовлетворяющее граничному условию и начальным условиям

$$a_1\left[\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} - (\beta_1+\beta_2)\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}\right] + a_2 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + a_3 u(0,t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \qquad (26)$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \mu(x), \quad 0 < x < \infty. \qquad (27)$$

В результате получено решение задачи (24) – (27):

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi c}\psi(x) e^{\frac{1}{2}\left[(\beta_2-\beta_1)\frac{x}{c}+(\beta_2-\beta_1)t\right]} \times$$
$$\times \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{\mu(s) e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{\psi(s)} \left(\frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{\lambda} - \frac{P\cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{P_\lambda}\right)\right] \sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right) ds \right\} \sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right) d\lambda$$

где $a_i\,(i=1,2,3), c, \beta_1, \beta_2$ – постоянные числа, $\mu(x)$ – заданная функция, $\psi(x)$– произвольная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, и $\psi(x) \neq 0$ в промежутке $[0,\infty)$.

<u>**Вторая глава**</u> посвящена применению результатов главы I по исследованию колебаний полуограниченной струны к уравнению Лапласа. Глава II состоит из 3 разделов.

В разделе 2.1 рассматривается задача: найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в прямоугольнике $0 < x < l_1, 0 < y < l_2$ (Рис. 3.), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < l_1, \qquad (29)$$

$$\alpha \frac{\partial u(0,y)}{\partial x} + \beta_1 u(0,y) = 0, \quad 0 < y < l_2, \qquad (30)$$

$$\alpha \frac{\partial u(l_1,y)}{\partial x} + \beta_2 u(l_1,y) = 0, \quad 0 < y < l_2, \qquad (31)$$

и одному из следующих условий:

$$\left.\begin{array}{ll} а) & u(x,l_2) = \varphi_1(x), \\ б) & \dfrac{\partial u(x,l_2)}{\partial y} = \varphi_2(x), \\ в) & \alpha\dfrac{\partial u(x,l_2)}{\partial y} + \beta_3 u(x,l_2) = \beta_3\varphi_3(x), \end{array}\right| \; 0 < x < l_1. \qquad (32)$$

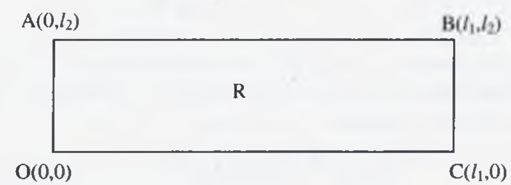

Рис.3.

Построено решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее краевым условиям (29) – (31):

$$u_{\lambda_s}(x,y) = f_{\lambda_s}(x+iy) - f_{\lambda_s}(x-iy) = A_{\lambda_s}\left\{\cos\left[\lambda_s(x+iy) - \frac{1}{2}\theta_{\lambda_s}\right] - \cos\left[\lambda_s(x-iy) - \frac{1}{2}\theta_{\lambda_s}\right]\right\} \qquad (33)$$

или, окончательно,

$$u_{\lambda_s}(x,y) = f_{\lambda_s}(x+iy) - f_{\lambda_s}(x-iy) = -2iA_{\lambda_s}\sin\left(\lambda_s(x+iy) - \frac{1}{2}\theta_{\lambda_s}\right) sh(\lambda_s y), \qquad (34)$$

где $f_{\lambda_s} = A_{\lambda_s}\cos\left(\lambda_s z - \frac{1}{2}\theta_{\lambda_s}\right)$, $A_{\lambda_s} = 2e^{\frac{i}{2}\theta_{\lambda_s}}$.

В разделе 2.2 рассматривается решение уравнения колебаний полуограниченной струны и моделирование колебаний. Рассмотрим начально – краевую задачу

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x, t < \infty, \tag{35}$$

$$a_1 u_{tt}(0,t) + a_2 u_x(0,t) + a_3 u(0,t) = 0, \qquad 0 < t < \infty, \tag{36}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 < x < \infty, \tag{37}$$

где a_1, a_2, a_3 – постоянные величины, $f(x)$ и $g(x)$ – заданные функции.

В результате получим

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\lambda x - \frac{1}{2}\theta(\lambda)\right)[A(\lambda)\sin\lambda t + B(\lambda)\cos\lambda t]d\lambda. \tag{38}$$

Рассмотрим частные случаи равенства (38). Прежде всего отметим, что если какая-нибудь функция $\psi(z)$ представима интегралом Фурье, то имеет место формула [45]:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s)\cos\beta s ds\right)\cos\beta z d\beta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s)\sin\beta s ds\right)\sin\beta z d\beta. \tag{39}$$

Если при этом функция $\psi(z)$ четная, то формула (39) примет вид

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}\psi(s)\cos\beta s ds\right)\cos\beta z d\beta. \tag{40}$$

Если же $\psi(z)$ нечетная функция, то

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}\psi(s)\sin\beta s ds\right)\sin\beta z d\beta. \tag{41}$$

1. Пусть конец $x=0$ жестко закреплен, то есть $a_1 = a_2 = 0$. В этом случае общее решение задачи (35) – (37) получаем в виде

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda}g(z)\sin\lambda t + f(z)\cos\lambda t\right]\sin\lambda z dz\right\}\sin\lambda x d\lambda. \tag{42}$$

Искомое решение задачи (35)– (37), как известно, можно построить с применением интеграла Фурье. Функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ должны определяться из начальных условий (37). Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\lambda A(\lambda)\sin\lambda x d\lambda, \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x d\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Сравнивая (43) с формулой Фурье (41) для нечетной функции, мы определяем функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$:

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi\lambda}\int_0^{\infty}g(z)\sin\lambda z dz, \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(z)\sin\lambda z dz, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

тогда $$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda}g(z)\sin\lambda t + f(z)\cos\lambda t\right]\sin\lambda z\sin\lambda x dz\right\}d\lambda,$$

или, принимая во внимание четность подынтегральной функции по λ:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda}g(z)\sin\lambda t + f(z)\cos\lambda t\right]\sin\lambda z dz\right\}\sin\lambda x d\lambda. \tag{45}$$

2. Пусть конец $x=0$ свободен, то есть $a_1, a_3 = 0$. В этом случае формула (38) примет вид

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x[A(\lambda)\sin\lambda t + B(\lambda)\cos\lambda t]d\lambda. \tag{46}$$

Функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ должны определяться из условий

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\lambda A(\lambda)\cos\lambda x d\lambda, \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}B(\lambda)\cos\lambda x d\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Сравнивая (47) с формулой Фурье (40) для четной функции, определяем функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$:

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi\lambda}\int_0^{\infty}g(z)\cos\lambda z dz, \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(z)\cos\lambda z dz. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Подставляя (48) в (46), получим решение задачи (35) – (37) в виде

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda}g(z)\sin\lambda t + f(z)\cos\lambda t\right]\cos\lambda z dz\right\}\cos\lambda x d\lambda. \tag{49}$$

Задачи, рассматриваемые в разделе 2.2, используются в работе для моделирования колебательных процессов, описываемых уравнениями гиперболического типа с постоянными и переменными коэффициентами.

В разделе 2.3 рассматривается численное моделирование решений гиперболического уравнения. В качестве примера рассмотрим следующую задачу: найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left[\frac{(Cx+D)^2}{AD-BC}\right]^{-1}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x}v + f(x,t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \tag{50}$$

Рассмотрим частные случаи уравнения (50). Пусть в (50) $A = D = 1, B = C = 0$.. то вычислим следующее уравнения гиперболического типа с методом конечных разностей,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{x}v = f(x,t), \quad D = (0 \le x \le \pi, 0 \le t \le 1), \tag{51}$$

с краевыми условиями

$$v(x,t) = \varphi(x,t) = x[\sin(x+t) + \cos(x-t)] \tag{52}$$

на сторонах прямоугольника D.

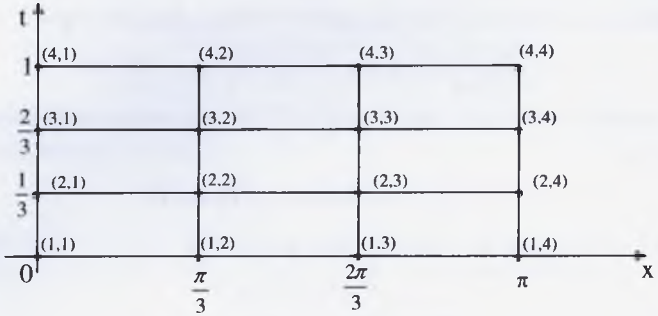

Рис. 4. Узлы сетки для (51) – (52).

Из рис. 4 видно, что для вычисления значений во внутренних точках в (51) – (52) получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{v_{3,2}-2v_{2,2}+v_{1,2}}{\frac{1}{9}}-\dfrac{v_{2,3}-2v_{2,2}+v_{2,1}}{\frac{1}{9}}+\dfrac{3}{\pi}v_{2,2}=2\sin\dfrac{\pi}{3}\left(\sin\dfrac{1}{3}+\cos\dfrac{1}{3}\right), \\ \dfrac{v_{3,3}-2v_{2,3}+v_{1,3}}{\frac{1}{9}}-\dfrac{v_{2,4}-2v_{2,3}+v_{2,2}}{\frac{1}{9}}+\dfrac{3}{2\pi}v_{2,3}=2\sin\dfrac{2\pi}{3}\left(\sin\dfrac{1}{3}+\cos\dfrac{1}{3}\right), \\ \dfrac{v_{4,3}-2v_{3,3}+v_{2,3}}{\frac{1}{9}}-\dfrac{v_{3,4}-2v_{3,3}+v_{3,2}}{\frac{1}{9}}+\dfrac{3}{2\pi}v_{3,3}=2\sin\dfrac{2\pi}{3}\left(\sin\dfrac{2}{3}+\cos\dfrac{2}{3}\right), \\ \dfrac{v_{3,3}-2v_{3,2}+v_{3,1}}{\frac{1}{9}}-\dfrac{v_{4,2}-2v_{3,2}+v_{2,2}}{\frac{1}{9}}+\dfrac{3}{\pi}v_{3,2}=2\sin\dfrac{\pi}{3}\left(\sin\dfrac{2}{3}+\cos\dfrac{2}{3}\right) \end{cases} \tag{53}$$

Решив систему уравнений (53) относительно $u_{2,2}$, $u_{2,3}$, $u_{3,3}$, $u_{3,2}$, определим приближенные значения соответствующих точных значений решения $v\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{3}\right)$, $v\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{3}\right)$, $v\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2}{3}\right)$, $v\left(\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\right)$.

В третьей главе приведены результаты по созданию комплекса программ для численного моделирования колебаний и для проведения вычислительных экспериментов. Глава III состоит из 2 разделов.

В разделе 3.1 на основании результатов раздела 1.4 показано, что решением уравнения (16) с условиями (17), (18) при $a_1=a_4=0, B=0, A=C=D=1$ является функция

$$v(x,t)=(x+1)\left\{\frac{Ma_3+Na_2\omega}{2a_2a_3\omega^2}\sin\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}+t\right)\right]-\frac{M}{2a_2\omega}\cos\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}+t\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{Ma_3+Na_2\omega}{2a_2a_3\omega^2}\sin\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}-t\right)\right]-\frac{M}{2a_2\omega}\cos\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}-t\right)\right]\right\}.$$

Графики колебаний струны изображены на рисунках (5) – (7).

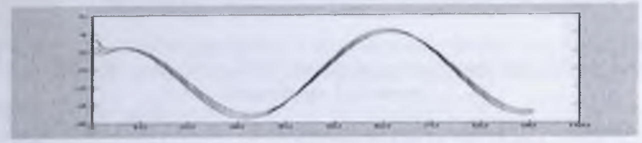

Рис. 5. Сечения по x_j поверхности $u_1(x,t)$.

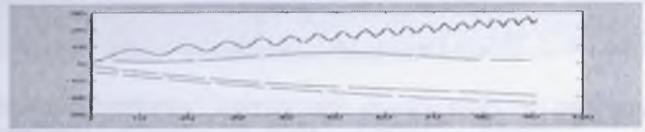

Рис. 6. Сечения по t_i поверхности $u_1(x,t)$.

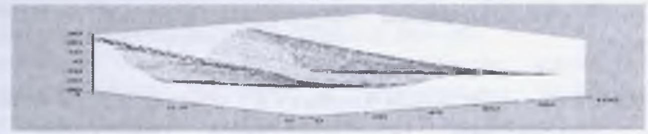

Рис. 7. Трехмерный график поверхности $u_1(x,t)$

В разделе 3.2 на основании результатов раздела 1.5 показано, что решением уравнения (20) с условиями (21), (22) является функция

$$u(x,t)=\left[e^{bx+\beta_1 t}f_1\left(\frac{x}{a}+t\right)+\lambda e^{\left(b-\frac{c}{a}\right)x+\beta_2 t}f_1\left(\frac{x}{a}-t\right)\right]C_1+$$
$$+\left[e^{bx+\beta_1 t}f_2\left(\frac{x}{a}+t\right)+\lambda e^{\left(b-\frac{c}{a}\right)x+\beta_2 t}f_2\left(\frac{x}{a}-t\right)\right]C_2+$$
$$+e^{bx+\beta_1 t}F\left(\frac{x}{a}+t\right)+\lambda e^{\left(b-\frac{c}{a}\right)x+\beta_2 t}F\left(\frac{x}{a}-t\right),$$

где $a=c=1, b=2, \lambda=\frac{1}{2}, \beta_1=\beta_2=\frac{1}{3}, f_1=\sin x, f_2=\cos x, F=x^2$,

$$C_1=\frac{\frac{\bar{u}_0-(1+\lambda)F(0)}{1+\lambda}[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_2(0)+(1-\lambda)f_2'(0)]-f_2(0)\{\bar{u}_1-[(\beta_1+\lambda\beta_2)F(0)+(1-\lambda)F'(0)]\}}{f_1(0)[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_2(0)+(1-\lambda)f_2'(0)]-f_2(0)[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_1(0)+(1-\lambda)f_1'(0)]},$$

$$C_2=\frac{f_1(0)\{\bar{u}_1-[(\beta_1+\lambda\beta_2)F(0)+(1-\lambda)F'(0)]\}-\frac{\bar{u}_0-(1+\lambda)F(0)}{1+\lambda}[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_1(0)+(1-\lambda)f_1'(0)]}{f_1(0)[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_2(0)+(1-\lambda)f_2'(0)]-f_2(0)[(\beta_1+\lambda\beta_2)f_1(0)+(1-\lambda)f_1'(0)]}.$$

Графики колебаний струны изображены на рисунках (8) – (10).

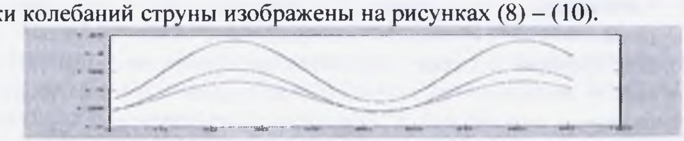

Рис. 8. Сечения по x_j поверхности $u_2(x,t)$.

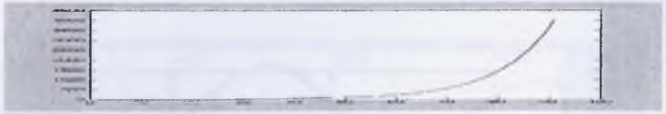

Рис. 9. Сечения по t, поверхности $u_2(x,t)$.

Рис. 10. Трехмерный график поверхности $u_2(x,t)$.

Приложение. В приложении приведены документы о принятии к использованию полученных результатов, тексты программ для компьютерного моделирования полученных решений и графические результаты.

ВЫВОДЫ

– Предложен и обоснован новый алгоритм по моделированию одного класса колебаний, описываемых гиперболическими граничными задачами, основанный на применении функционально–дифференциальных уравнений;
– Получено численное моделирование стационарных колебаний, описываемых решением краевой задачи для уравнения Лапласа, алгоритмом, предположенным в данной работе;
– Разработан комплекс программы по численному моделированию колебательных процессов, исследуемых в данной диссертации. Приведены результаты вычислительных экспериментов.
– Полученные результаты показывают, что применение функционально–дифференциальных уравнений расширяет круг решаемых смешанных задач, которые служат математическими моделями колебательных процессов. Явные решения, полученные в настоящей работе при решении смешанных задач, показывают, что алгоритмы численной реализации полученных теоретических результатов практически сводятся к приближенному вычислению сумму тригонометрических рядов, что показано в диссертации конкретными примерами.
– По результатом диссертации имеется 2 акта о внедрении результатов диссертационной работы, а также свидетельство №170 Кыргызпатента от 4 сентября 2008года, которые достаточно полно отражают содержание работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научных конференциях и научных семинарах и использовались следующие результаты диссертационной работы: 1) инженерные методы расчета внутреннего и внешнего теплообмена, колебательных процессов; 2) пакет прикладных программ, позволяющий определить распределение температурного после в любой момент времени а также разработанные алгоритмы математического моделирование и комплекс программ, составленный курс по дисциплинам «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики» для инженерных специальностей ВТУЗы.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Разработанный метод решения и полученные формулы, возникающие при решении уравнений в частных производных гиперболического типа, могут быть использованы при математическом описании различных сложных колебательных процессов в физике, технике, промышленности с целью управления этими процессами.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Шаршеналиев Ж.Ш., Турумбеков А., Кутунаев Ж.Н. Смешанная задача о колебаниях полуограниченной прямой //Институт математики, Министерство образования и науки Республики Казахстан. Математический журнал, №4, 2005. – С.86 – 96.
2. Турумбеков А., Кутунаев Ж.Н. Смешанная задача для одного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами // «Вестник» ОшГУ, № 3, 2005. – С. 114 – 119.
3. Кутунаев Ж.Н. Колебания полуограниченной прямой без учета влияния начального смещения // Материалы международной научно-технической конференции «Инновации в образовании, науке и технике». Известия КГТУ им. И.Раззакова. – Бишкек-2006. – С. 57 – 61.
4. Турумбеков А., Кутунаев Ж.Н. О восстановлении гиперболического уравнения по его общему решению // Известия КГТУ им. И. Раззакова, Бишкек. – № 8, 2006. – С. 96 – 102.
5. Турумбеков А., Кутунаев Ж.Н. Об одной смешанной задаче для уравнения Лапласа // Известия КГТУ им. И. Раззакова, Бишкек. – № 8, 2006. – С. 91 – 96.
6. Кутунаев Ж.Н. Математическое моделирование колебаний полуограниченной прямой без учета влияния начального смещения // Проблемы автоматики и управления, Бишкек-2006. – С. 88 – 92.
7. Кутунаев Ж.Н. Математическое моделирование в одной задаче колебательных процессов // Известия Национальной Академии Наук Кыргызской Республики. № 4, 2006. – С. 7 – 11.
8. Кутунаев Ж.Н. Построение решения математической модели типа бегущей волны в колебательных процессах // Проблемы управления и информатики. Доклады II Международная. конференции. Бишкек, 19 – 22 июня 2007. – С. 87 – 91.
9. Кутунаев Ж.Н. Процесс колебаний с интегро-дифференциальным граничным условием // Проблемы автоматики и управления. – Бишкек, 2007. – С. 60 – 65.
10. Кутунаев Ж.Н. Моделирование колебаний полуограниченной струны // Институт математики. Министерство образования и науки Республики Казахстан. Математический журнал, № 1, 2009.
11. Свидетельство №170 Кыргызпатента на тему «Способ расчетов динамики движения сложных колебательных процессов» от 4 сентября 2008г.