НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.07.362

На правах рукописи

УДК 517.95(043.3)

БЕЛЕКОВ КЕНЖЕБЕК ЖОЛДОШЕВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УНИФОРМИЗАЦИИ К СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

БИШКЕК – 2008

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной математики

НАН Кыргызской Республики

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Алымкулов К.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент **Иманалиев Т.М.**

кандидат физико-математических наук **Эгембердиев Ш.А.**

Ведущая организация: Казахский Национальный университет им.Аль-Фараби.

Защита состоится 06 февраля 2009 г. в 14-00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.07.362 по защите диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук при Институте Теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г.Бишкек-71, просп. Чуй 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г.Бишкек – 71, просп. Чуй 265-а.

Автореферат разослан «31» декабря 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., с.н.с. Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения можно условно подразделить на два класса. К первому классу относятся такие дифференциальные уравнения с малым параметром при старших производных, что при нулевом значении малого параметра порядок рассматриваемого уравнения понижается. Такие уравнения исследованы в трудах П.Прандтля, Г.Биркгофа, М.Нагумо, И.С.Градштейна, К.Фридрихса, В.Вазова, А.Н.Тихонова, А.Эрдейи, Н.Левинсона, М.Ван-Дайка, А.Б.Васильевой, В.Ф.Бутузова, М.Иманалиева, О'Малли, Е.Ф.Мищенко, Л.С.Понтрягина, С.А.Ломова, К.А.Касымова, А.М.Ильина, В.П.Маслова, Н.Х.Розова, П.С.Панкова, К.Какишова и других.

Общая теорема о предельном переходе в решениях таких уравнений установлена А.Н.Тихоновым. Метод асимптотического разложения решений этих уравнений в типичном случае были получены А.Б.Васильевой, Л.А.Люстерником, М.И.Вишиком и М.Иманалиевым.

Для представления равномерно точного решения этих уравнений на всем рассматриваемом отрезке разработаны:

1) Метод погранфукций, или его другое название метод Вишика-Люстерника-Иманалиева: представление решения в виде асимптотического ряда функций, зависящих от исходной и "быстрой" переменных.
2) Сращивание внешнего и внутреннего решений. Такие методы разработаны С.Каплуном, М.Ван-Дайком, Дж.Коулом, А.М.Ильином, В.Г.Мазья, С.А.Назаровым, Б.А.Пламеневским, К.Алымкуловым, Ж.К.Жээнтаевой и А.З.Зулпукаровым и др.
3) Метод усреднения Н.Н.Боголюбова и Ю.А.Митропольского.

Второй класс сингулярно-возмущенных уравнений впервые изучен английским математиком и механиком М.Дж.Лайтхиллом.

Это такие возмущенные уравнения, что при нулевом значении малого параметра порядок уравнений не понижается, однако, у них возникает особая точка (в данной работе на линии параболического вырождения). И если искать решения таких уравнений классическим методом малого параметра, то с увеличением порядка приближения по малому параметру в окрестности особой линии они перестают приближаться к точному решению, т.е. это явление аналогично "бисингулярной задаче" или "задаче с точкой поворота".

Изучению такого класса особых возмущений, кроме работ М.Дж.Лайтхилла, посвящены работы В.Вазова, И.Сибуйя, К.Ж.Такахаси, К.Комстока, П.Хабетса, Сянь-Сюе-Сена, М.Ф.Притуло, Дж.Темпла, К.Алымкулова и других.

Метод Лайтхилла (Пуанкаре-Лайтхилла-Го) ищет не только неизвестную функцию но и независимую переменную от нового независимого переменного (параметра) по целым степеням малого параметра. При этом вопрос как выбрать неизвестные коэффициенты остается открытым.

К.Алымкуловым разработан метод униформизации, который является упрощением и обобщением метода Лайтхилла и дает параметрическое представление решения уравнений лайхиллова типа, когда соответствующие невозмущенные уравнения имеют регулярные и иррегулярные особые точки.

В методе униформизации дается униформизованное дифференциальное уравнение, эквивалентное исходному, в котором нет необходимости выбора коэффициентов разложения независимой переменной и они автоматически определяются униформизованным уравнением.

Иногда, оказывается, удобным применить метод фиктивного параметра для получения равномерной асимптотики решения сингулярно-возмущенных уравнений. Отметим, что этот метод успешно применен Пенлеве для классификации уравнений второго порядка, т.е. трансцендентности Пенлеве.

Затем этот метод применялся С.Н.Бернштейном, В.А.Треногиным, П.Н.Вабищевичем, К.Алымкуловым и Ж.Толубаевым и другими для получения решений различных классов дифференциальных уравнений. Этот метод иногда называют методом продолжения по параметру.

При изучении волновых процессов вдали от источника, хотя возмущения затухают степенным образом, например, в одном из координатных направлений на плоскости, оказывается в действительности волна не затухается, а прогрессируется. Поэтому, такие явления получили названия прогрессивные волны. На это явление впервые обратил внимание Хейз.

В данной диссертационной работе это явление изучается наиболее полно для различных малых возмущений на границе возбуждающего источника, комбинированными методами: униформизации и введения фиктивного параметра, так как классический метод малого параметра не дает равномерной точной асимптотики.

<u>Цель работы.</u> Получение равномерно пригодного асимптотического разложения решений обобщенного модельного уравнения Ван-Дайка для цилиндрических волн, модельного сингулярно-возмущенного гиперболического уравнения Лайтхилла, сингулярно-возмущенного гиперболического уравнения с линией параболического вырождения.

<u>Методы исследования.</u> В работе применяются метод малого параметра, метод униформизации, метод фиктивного параметра, метод полной математической индукции. метод характеристик.

<u>Научная новизна работы</u>. Основные научные результаты:

1. Доказано существование решения модельного уравнения для цилиндрических волн.
2. Методами униформизации и введения фиктивного параметра построена равномерная асимптотика решения модельного уравнения для цилиндрических волн.
3. Методом униформизации построена равномерная асимптотика решения модельного уравнения Лайтхилла.
4. Методом униформизации доказано существование решения возмущенного уравнения вплоть до особой линии.

<u>Теоретическая и практическая ценность</u>. Настоящая работа, хотя и носит теоретический характер, но её результаты могут найти применение в механике жидкостей и газа, в теории нелинейных колебаний и других областях техники и науки.

<u>Личный вклад автора</u>. Постановка задач в совместных работах принадлежит научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору К.Алымкулову, а полученные результаты принадлежат автору.

<u>Основные положения, выносимые на защиту</u>:

- Доказательство существования решения модельного уравнения для цилиндрических волн;
- построение равномерной асимптотики решения модельного уравнения для цилиндрических волн;
- разработка метода униформизации для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных.

<u>Апробация работы</u>. Результаты работы регулярно докладывались и обсуждались на семинарах Института математики НАН КР (руководитель - академик НАН КР М.И.Иманалиев); на международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы физики, математики и информатики», посвященной 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Б.Арапова (Ош, 2003); на республиканской научной конференции «Проблемы прикладной математики, механики и инженерного образования», посвященной 50-летию КНТУ и 75-летию проф. Усубакунова Р., КНТУ (Бишкек, 2004); на международной научной конференции «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической», посвященной 70-летию академика НАН РК К.А.Касымова (Алматы, 2005); на международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 75-летию академика НАН КР М.И.Иманалиева (Бишкек, 2006); на межрегиональной научно-практической конференции «Актуальные проблемы истории, культуры и науки Ферганской долины», посвященной 10-летию Алабукинского гуманитарно-педагогического института Кыргызско-Узбекского университета (Ош.

2007); на международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы инженерной техники и современных технологий посвященный 45-летию ОшТУ и открытию памятника академику М.М.Адышеву» (Ош, 2008).

Публикации по теме диссертации: Опубликованы статьи [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [12], [13], [14], [15] и тезис доклада [11]. В совместных работах [1], [2], [3], [4], [5], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [14] постановка задачи принадлежит научному руководителю, получение основных результатов – автору.

Структура и объем диссертации: Диссертация состоит из введения, где дается краткое содержание работы, четырех глав, состоящих из 11 параграфов, списка использованных источников из 75 наименований, заключения и приложений. Нумерация параграфов – двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер параграфа. Нумерация теорем, формул, следствий, примеров – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер параграфа, третья – на порядковый номер в параграфе. Объем текста 113 страниц.

Краткое содержание работы:

В первой главе, состоящей из двух параграфов, дается краткий обзор литературы и результатов.

Во второй главе, состоящей из трех параграфов, методом характеристик доказано существование решения и построена равномерная асимптотика решения возмущенного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка методами униформизации и фиктивного параметра.

В § 2.1 в области $\Pi = \{(x,y): 0 \le x < \infty, 1 \le y < \infty\}$ рассмотрено новое модельное возмущенное нелинейное уравнение в частных производных первого порядка для цилиндрических волн, дополняющее соответствующее модельное уравнение Ван-Дайка, вида

$$u_y(x,y) + y^{-1}u(x,y) + u(x,y)u_x(x,y) + bu(x,y)u_x^2(x,y) = 0, \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u(x,1) = \varepsilon a(x), \qquad (2)$$

где $0 < \varepsilon << 1$ - малый параметр, b - постоянная, $0 \le x < +\infty$, $1 \le y < +\infty$, $a(x) \in C^{(\infty)}[0,\infty)$, $u_y(x,y) = \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, $u_x(x,y) = \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ - частные производные.

Это уравнение решается комбинированием метода униформизации и фиктивного параметра. Сначала преобразованием независимых переменных получается униформизирующее уравнение. При решении этого уравнения получается неравномерная асимптотика при больших значений одной независимой переменной. Чтобы получить равномерную асимптотику в униформизованное уравнение вводится фиктивный параметр, после этого получается равномерная асимптотика исходной задачи.

Для того, чтобы доказать существование решения задачи (1)-(2) применим метод характеристик. Если в качестве независимой переменной взять y, то (1)-(2) приводится к системе

$$X'(y) = U(y) + 2bU(y)P(y), \qquad (3)$$

$$p'(y) = -p(y)y^{-1} - p^2(y) - bp^3(y), \qquad (4)$$

$$U'(y) = -y^{-1}U(y) + bU(y)P^2(y), \qquad (5)$$

с начальными условиями

$$X(1) = \xi, \qquad (6)$$

$$P(1) = \varepsilon a'(\xi), \qquad (7)$$

$$U(1) = \varepsilon a(\xi), \qquad (8)$$

где ξ - параметр, $0 < \xi < +\infty$.

Доказана следующая

Теорема 1. Если $a(x) > 0$, $a'(x) > 0$, то для любого ξ и достаточно малого ε задача (3)-(8) имеет решение на $[1, +\infty)$, причем

$$P(y) = \frac{\varepsilon a'(\xi)}{y} w(\xi, y, \varepsilon), \text{ где } 0 < w(\xi, y, \varepsilon) \le 1,$$

$$0 < U(y) < \frac{\varepsilon a(\xi)}{\sqrt{y}}, \quad 0 < X(y) - \xi < 4\varepsilon a(\xi)(\sqrt{y} - 1).$$

Теорема 2. Если выполняются условия теоремы 1 и $a''(x) > 0$, то функции $X(\xi, y)$, $P(\xi, y)$, $U(\xi, y)$ удовлетворяют условию Липшица по ξ на любом ограниченном интервале переменной ξ.

В книге «Методы возмущений в механике жидкости» (Ван Дайк М.) отмечено, что уравнение (1) при $b=0$ описывает цилиндрические волны.

Методом малого параметра доказана

Теорема 3. Пусть $a(x) \in C^{(\infty)}[0,\infty)$. Тогда решение задачи (1) - (2) представимо в виде

$$u(x,y) \sim \frac{\varepsilon}{y}[a(x) + \varepsilon a_2(x)\ln y + \varepsilon^2 a_2(x)\ln^2 y + \varepsilon^3 a_4(x)\ln^3 y + \ldots], \ y \to \infty, \qquad (9)$$

которое является асимптотическим в полосе $\Pi = \{(x,y): 0 \le x < \infty, 1 \le y < e^{\frac{1}{\varepsilon}}\}$.

Применением метода униформизации, являющегося развитием метода Лайтхилла, доказана

Теорема 4. Пусть выполнено условие теоремы 3 и $a'(x) > 0$. Тогда параметрическое представление решение задачи (1) - (2) имеет вид

$$u(\xi,\eta) = \varepsilon\frac{a(\xi)}{\eta}, \quad y = \eta, \qquad (10)$$
$$x = \xi + \varepsilon\, a(\xi)\ln\eta + \varepsilon^2 O(1) + \varepsilon^3(1) + \ldots + \varepsilon^n(1) + \ldots, \qquad \eta \to \infty,$$

и является равномерно пригодным асимптотическим рядом в области Π.

Пример 1. Рассмотрим частный случай, когда b=0, т.е.

$$u_y(x,y) + y^{-1}u(x,y) + u(x,y)u_x(x,y) = 0, \qquad (11)$$

с начальным условием

$$u(x,1) = \varepsilon x, \qquad (12)$$

Точное решение уравнения (11), удовлетворяющее условию (12), имеет вид: $u(x,y) = \dfrac{\varepsilon x}{y(1+\varepsilon\ln y)}$.

Если решить методом униформизации, решение имеет следующий параметрический вид:

$$\begin{cases} u(\xi,\eta) = \varepsilon\dfrac{\xi}{\eta}, \quad y = \eta, \\ x = \xi + \varepsilon\xi\ln\eta. \end{cases}$$

В § 2.2 рассматривается уравнение

$$u_y(x,y) + (2y)^{-1}u(x,y) + u(x,y)u_x(x,y) + bu(x,y)u_x^2(x,y) = 0 \qquad (13)$$

с начальным условием (2). Методом малого параметра доказана

Теорема 5. Пусть $a(x) \in C^{(\infty)}[0,\infty)$. Тогда решение задачи (13)-(2) представимо в виде

$$u(x,y) \sim \varepsilon O\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) + \varepsilon^2 O(1) + \varepsilon^3\left(y^{\frac{1}{2}}\right) + \ldots + \varepsilon^n\left(y^{\frac{n-2}{2}}\right) + \ldots, \quad y \to \infty, \qquad (14)$$

которое является асимптотическим в полосе $\Pi_\varepsilon = \{(x,y):\ 0 \le x < +\infty,\ 1 \le y < \varepsilon^{-2}\}$.

Методами униформизации и фиктивного параметра доказана следующая

Теорема 6. Пусть выполнено условие теоремы 5 и $a'(x) > 0$. Тогда решение задачи (13)-(2) представимо в виде

$$u(\xi,\eta) = \varepsilon a(\xi)\eta^{-\frac{1}{2}}, \quad y = \eta, \qquad (15)$$
$$x = \xi + \varepsilon\left(a(\xi)\eta^{\frac{1}{2}} - a(\xi)\right) + \varepsilon v^{(0)}(\xi,\eta,1,\varepsilon) + \varepsilon^2 v^{(1)}(\xi,\eta,1,\varepsilon) + \ldots.$$

которое является равномерно пригодным асимптотическим представлением в области Π.

Пример 2. При $b = 0$ задача (13)-(2):

$$u_y(x,y) + (2y)^{-1}u(x,y) + u(x,y)u_x(x,y) = 0, \quad u(x,1) = \varepsilon a(x), \qquad (16)$$

имеет точное решение. В этом случае

$$\begin{cases} u = \varepsilon\, a(\xi)y^{-\frac{1}{2}}, \\ x = \xi + \varepsilon(2a(\xi)y^{\frac{1}{2}} - 2a(\xi)) \end{cases} \qquad (17)$$

есть параметрическое представление решения.

В § 2.3 рассматривается уравнение

$$u_y(x,y) + (my)^{-1}u(x,y) + u(x,y)u_x(x,y) + bu(x,y)u_x^2(x,y) = 0, \qquad (18)$$

с начальным условием (2), где $1 < m \in N$.

Теорема 7. Пусть $a(x) \in C^{(\infty)}[0,\infty)$. Тогда решение задачи (18) - (2) представимо в виде

$$u(x,y) \sim \varepsilon O\left(y^{-\frac{1}{m}}\right) + \varepsilon^2 O\left(y^{1-\frac{2}{m}}\right) + \ldots + \varepsilon^n\left(y^{(n-1)-\frac{n}{m}}\right) + \ldots, \quad y \to \infty, \qquad (19)$$

которое является асимптотическим в полосе $\Pi_\varepsilon = \{(x,y):\ 0 \le x < +\infty,\ 1 \le y < \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}}\}$.

Методами униформизации и фиктивного параметра даказана

Теорема 8. Пусть выполнено условие теоремы 7 и $a'(x) > 0$. Тогда решение задачи (18)-(2) представимо в виде

$$u(\xi,\eta) = \varepsilon a(\xi)\eta^{-\frac{1}{m}}, \quad y = \eta, \qquad (20)$$
$$x = \xi + \varepsilon\left(\frac{m}{m-1}a(\xi)\eta^{1-\frac{1}{m}} - \frac{m}{m-1}a(\xi)\right) + \varepsilon v^{(0)}(\xi,\eta,1,\varepsilon) + \ldots,$$

которое является равномерно пригодным асимптотическим представлением в области Π.

Пример 3. При $b = 0$ задача (18)-(2):

$$u_y(x,y) + (my)^{-1}u(x,y) + u(x,y)u_x(x,y) = 0, \quad u(x,1) = \varepsilon a(x) \qquad (21)$$

имеет точное решение. В этом случае

$$\begin{cases} u = \varepsilon\, a(\xi)y^{-\frac{1}{m}}, \\ x = \xi + \varepsilon\left(\dfrac{m}{m-1}a(\xi)y^{1-\frac{1}{m}} - \dfrac{m}{m-1}a(\xi)\right) \end{cases} \qquad (22)$$

есть параметрическое представление решения.

В третьей главе, состоящей из трех параграфов, методом униформизации получены равномерно пригодные представления решения гиперболических модельных уравнений Лайтхилла.

В § 3.1 рассматривается уравнение

$$u_{xy}(x,y) = \varepsilon(u_x(x,y) + \alpha u_y(x,y))u_{xx}(x,y) \qquad (23)$$

с условием

$$u(x,1) = a(x)x^{-q} := \varphi(x)\,,\ u(1,y) = b(y)\,,\quad \alpha = const\,. \qquad (24)$$

Теорема 9. Пусть выполнено условие $U1$: $a(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$, $b(y) \in C^{(\infty)}[0,1]$, $a(0) \neq 0$, $D = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$. Тогда решение задачи (23)-(24) представимо в виде ряда

$$u(x,y) \sim \frac{1}{x^q}\left[a_0(x,y) + a_1(x,y)\frac{\varepsilon}{x^{q+2}} + \ldots + a_k(x,y)\left(\frac{\varepsilon}{x^{q+2}}\right)^k + \ldots\right], \qquad (25)$$

которое является асимптотическим в области $G(\varepsilon) = \{(x,y):\ x \ge \varepsilon^\beta,\ 0 \le y \le 1, (0 < \beta < \frac{1}{q+1})\}$.

Далее продолжение этого решения для значений x до нуля является трудоемкой задачей. Методом униформизации доказана

Теорема 10. Пусть выполнено условие $U1$ и $a(0) > 0$. Тогда параметрическое представление решения задачи (23)-(24) имеет вид

$$u(\xi,\eta) \sim \varphi(\xi) + \frac{1}{\xi^{q+1}}\left[a_1\frac{\varepsilon}{\xi^{q+1}} + a_2\left(\frac{\varepsilon}{\xi^{q+1}}\right)^2 + \ldots + a_k\left(\frac{\varepsilon}{\xi^{q+1}}\right)^k + \ldots\right],\ (\xi \to 0)\,, \qquad (26_1)$$

$$x(\xi,\eta) \sim \varepsilon + \varepsilon\varphi'(\xi)(1-\eta) + \frac{\varepsilon}{\xi^{q+1}}\left[b_1\frac{\varepsilon}{\xi^{q+1}} + \ldots + b_k\left(\frac{\varepsilon}{\xi^{q+1}}\right)^k + \ldots\right], (\xi \to 0) \qquad (26_2)$$

и оно является асимптотическим рядом на отрезке $[\xi_0, 1]$.

В § 3.2 рассматривается уравнение Лайтхилла (23) с условием

$$u(x,1) = a(x)\ln x\,,\ u(1,y) = b(y)\,. \qquad (27)$$

Теорема 11. Пусть $a(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$, $b(y) \in C^{(\infty)}[0,1]$ и $a_0 = a(0) \neq 0$. Тогда решение задачи (23)-(27) представимо в виде ряда

$$u(x,y) \sim a(x)\ln x + b(y) + a_1(x,y)\frac{\varepsilon}{x^2} + \ldots + a_k(x,y)\left(\frac{\varepsilon}{x^{q+2}}\right)^k + \ldots, \qquad (28)$$

которое является асимптотическим в области

$$G(\varepsilon) = \{(x,y):\ x \ge \varepsilon^\beta,\ 0 \le y \le 1, (0 < \beta < \frac{1}{2})\}.$$

Применением метода униформизации доказана

Теорема 12. Пусть выполнено условие теоремы 11 и $a_0 < 0$. Тогда параметризованное решение задачи (23)-(27) имеет вид

$$u(\xi,\eta) \sim a(\xi)\ln\xi + b(\eta) + \frac{1}{\xi}\left[a_1\frac{\varepsilon}{\xi} + a_2\left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right)^2 + \ldots + a_k\left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right)^k + \ldots\right], (\xi \to 0)\,, \qquad (29_1)$$

$$x(\xi,\eta,) \sim \xi + \frac{\varepsilon}{\xi}\left[b_0 + b_1\frac{\varepsilon}{\xi} + b_2\left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right)^2 + \ldots + b_k\left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right)^k + \ldots\right],\ (\xi \to 0)\,, \qquad (29_2)$$

и этот ряд является асимптотическим рядом на отрезке $[\varepsilon^\lambda, 1]$, $0 < \lambda < 1$.

В § 3.3 рассматривается уравнение Лайтхилла (23) с условием

$$u(x,1) = a(x)e^{\frac{\beta}{x}}\,,\ u(1,y) = b(y)\,,\quad 0 < \beta = const\,. \qquad (30)$$

Доказана

Теорема 13. Пусть $a(x), b(y) \in C^{(\infty)}(D)$, $a_0 = a(0) \neq 0$, $a(1) = b(1) = 0$. Тогда решение задачи (23)-(30), полученное методом малого параметра, является асимптотическим рядом на отрезке $[x_0(\varepsilon), 1]$, т.е.

$$u(x,y) = u^{(0)}(x,y) + \ldots + \varepsilon^n u^{(n)}(x,y) + O\left(\varepsilon^{(1-\delta)(n+1)}\right),\quad \forall x \in [x_0(\varepsilon), 1],$$

где $x_n(\varepsilon) = \dfrac{1}{x_0^{(4)}(\varepsilon)}$, где $x_0^{(4)}(\varepsilon) \sim \ln\left\{\ln\varepsilon^{-\delta/\beta} / \left(\ln\varepsilon^{-\delta/\beta}\right)^{4/\beta}\right\},\ \varepsilon \to 0$.

Продолжение решения на всю область $D/\{y \neq 1\}$ методом продолжения по параметру является трудной задачей. Поэтому, равномерно пригодное разложение задачи (23)-(30) построим методом униформизации. Доказана

Теорема 14. Пусть выполнено условие теоремы 13.

Если $a_0 = a(0) > 0$, то ряды

$$u(\xi,\eta) \sim a(\xi)e^{\frac{\beta}{\xi}} + b(\eta) + O\left(\xi^{-2}e^{\frac{\beta}{\xi}}\right)\left[O\left(\varepsilon\xi^{-2}e^{\frac{\beta}{\xi}}\right) + \ldots + O\left(\varepsilon\xi^{-2}e^{\frac{\beta}{\xi}}\right)^k + \ldots\right], \qquad (31_1)$$

$$x(\xi,\eta,\varepsilon) \sim \xi + O\left(\varepsilon\xi^{-2}e^{\frac{\beta}{\xi}}\right) + O\left(\varepsilon\xi^{-2}e^{\frac{\beta}{\xi}}\right)^2 + \ldots + O\left(\varepsilon\xi^{-2}e^{\frac{\beta}{\xi}}\right)^k + \ldots,\ (\xi \to 0) \qquad (31_2)$$

являются равномерным асимптотическим представлением решения задачи (23)-(30) в области $D/\{y \neq 1\}$ и $u(0) \sim \dfrac{\lambda^3}{\varepsilon\beta(1-y)}$.

В четвертой главе, состоящей из 3 параграфов, построена равномерная асимптотика решений возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных методом униформизации.

В § 4.1 исследуется задача Коши для гиперболического возмущенного уравнения второго порядка типа Лайтхилла в случае, когда $\alpha = \frac{1}{2}$. Для соответствующего невозмущенного уравнения ось ординат является линией параболического вырождения. Методом униформизации доказано, что решение возмущенного уравнения существует вплоть до особой линии.

Рассматривается возмущенное линейное гиперболическое уравнение с линией параболического вырождения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \varepsilon\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}. \tag{32}$$

Невозмущенное ($\varepsilon = 0$) уравнение имеет вид

$$Lu^{(0)}(x,y) := u_{xx}^{(0)}(x,y) - yu_{yy}^{(0)}(x,y) - \frac{1}{2}u_y^{(0)}(x,y) = 0 \tag{33}$$

Для уравнения (33) прямая $y = 0$ является линией параболического вырождения. Уравнение (33) имеет характеристические линии:

$$x - 2y^{\frac{1}{2}} = c_1, \quad x + 2y^{\frac{1}{2}} = c_2, \tag{34}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Для уравнения (32) ставится задача: найти решение этого уравнения, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \lim_{y\to 0} y^{\frac{1}{2}}u_y(x,y) = \psi(x), \tag{35}$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ - гладкие функции, в области D, ограниченной отрезком $x \in [0,1]$ и характеристиками $x = 2y^{\frac{1}{2}}$ и $x + 2y^{\frac{1}{2}} = 1$. Доказана следующая

Теорема 15. Решение задачи (32), (35), полученное классическим методом малого параметра в виде ряда

$$u(x,y) = u^{(0)}(x,y) + \varepsilon u^{(1)}(x,y) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x,y) + \ldots + \varepsilon^k u^{(k)}(x,y) + \ldots \tag{36}$$

существует в области $D_\alpha = \left\{D : \varepsilon^\alpha \le y \le \frac{1}{16}, \quad 0 < \alpha < 1\right\}$.

В частности за δ, можно взять $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Решение задачи (33), (35) представляется в виде:

$$u^{(0)}(x,y) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(x + 2y^{\frac{1}{2}}\right) + \varphi\left(x - 2y^{\frac{1}{2}}\right)\right] + 2y^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \psi\left(x + (2t-1)2y^{\frac{1}{2}}\right)dt. \tag{37}$$

Для уравнения (33) удобно рассмотреть следующую задачу:

$$u(x,\delta) = \overline{\varphi}(x), \quad u_y(x,\delta) = \overline{\psi}(x) \qquad \left(0 < \delta < \frac{1}{16}\right), \tag{38}$$

где $\overline{\varphi}(x), \overline{\psi}(x)$ - известные гладкие функции.

Решением этой задачи является функция

$$u^{(0)}(x,y) = \frac{1}{2}\left[\overline{\varphi}(x + \omega(y,\delta)) + \overline{\varphi}(x - \omega(y,\delta))\right] + \delta^{\frac{1}{2}}\omega(y,\delta)\times \\ \times\int_0^1 \overline{\psi}(x + (2t-1)\omega(y,\delta))dt, \tag{37'}$$

где $\omega(y,\delta) = 2\left(y^{\frac{1}{2}} - \delta^{\frac{1}{2}}\right)$.

Для получения решения неоднородного уравнения:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) - yu_{yy}(x,y) - \frac{1}{2}u_y(x,y) = f(x,y) \\ u(x,\delta) = 0, \quad u_y(x,\delta) = 0, \end{cases} \tag{39}$$

можно использовать принцип Дюамеля, идея которого заключается в следующем: для решения задачи (39) рассматривается следующая вспомогательная задача Дюамеля:

$$\begin{cases} v_{xx}(x,y,\tau) - yv_{yy}(x,y,\tau) - \frac{1}{2}v_y(x,y,\tau) = 0, \\ v(x,\tau,\tau) = 0, \quad v_y(x,\tau,\tau) = -\frac{1}{\tau}f(x,\tau), \end{cases} \tag{40}$$

где τ - параметр, который изменяется на отрезке $\left[\delta, \frac{1}{16}\right]$.

Решение задачи (40) в силу (38) представляется в виде:

$$v(x,y,\tau) = \tau^{-\frac{1}{2}}\omega(y,\tau)\int_0^1 f(x + (2t-1)\omega(y,\tau),\tau)dt := \Phi(x,y,\tau,f). \tag{41}$$

Решение задачи (39) записывается в виде:

$$u(x,y) = \int_\delta^y v(x,y,\tau)d\tau = \int_\delta^y \Phi(x,y,\tau,f)d\tau. \tag{42}$$

Решение задачи (32), (35) ищем в виде ряда (36).

Подставляя (36) в (32) и определяя неизвестные функции $u^{(j)}(x,y)$ $(j = 0,1,2,3,\ldots)$, получаем следующие оценки:

$$\left|u^{(n)}(x,y)\right| \le M_n\delta^{\frac{1}{2}}y^{-n} \quad (n = 1,2,3,\ldots), \tag{43}$$

при малом y. Т.о., ряд (36) мажорируется рядом

$$M_0 + \delta^{\frac{1}{2}}\left[M_1\left(\frac{\varepsilon}{y}\right) + M_2\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^2 + M_3\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^3 + \ldots + M_n\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^n + \ldots\right].$$

Этот ряд является асимптотическим при $y \ge \varepsilon^{\alpha}$, где $\alpha < 1$.

Чтобы получить параметрическое представление решения задачи (32), (35) на всей рассматриваемой области D, решаем эту задачу методом униформизации.

Доказана

Теорема 16. Параметрическое представление решения задачи (32), (35) имеет вид

$$u(x,\xi) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(x + 2\xi^{1/2}\right) + \varphi\left(x - 2\xi^{1/2}\right)\right] + 2\xi^{1/2}\int_0^1 \psi\left(x - 2(1-2t)\xi^{1/2}\right)dt, \qquad (44)$$

которое является равномерно пригодным в области D.

В § 4.2 исследуется задача Коши для гиперболического возмущенного уравнения второго порядка типа Лайтхилла, в случае, когда $1/2 < \alpha < 1$.

Рассматривается возмущенное линейное гиперболическое уравнение с линией параболического вырождения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \alpha\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \varepsilon\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}. \qquad (45)$$

Невозмущенное ($\varepsilon = 0$) уравнение имеет вид

$$Lu^{(0)}(x,y) := u_{xx}^{(0)}(x,y) - yu_{yy}^{(0)}(x,y) - \alpha u_y^{(0)}(x,y) = 0. \qquad (46)$$

Для уравнения (45) ставится задача: найти решение этого уравнения удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \lim_{y\to 0} y^{\frac{1}{2}} u_y(x,y) = \psi(x), \qquad (47)$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ - гладкие функции, в области D. Доказана следующая

Теорема 17. Решение задачи (45), (47), полученное классическим методом малого параметра в виде ряда (36), существует в области $D_\alpha = \left\{D \setminus \varepsilon^{\alpha} \le y \le 1/16, \quad 0 < \alpha < 1\right\}$.

Решение задачи (46), (47) представляется в виде:

$$u^{(0)}(x,y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 \varphi\left(x + 2y^{\frac{1}{2}}(2t-1)\right)t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int_0^1 \psi\left(x + 2y^{\frac{1}{2}}(2t-1)\right)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt. \qquad (48)$$

где $\Gamma(x)$ - гамма функция.

В дальнейшем для уравнения (46) удобно рассмотреть следующую задачу:

$$u(x,\delta) = \bar{\varphi}(x), \quad u_y(x,\delta) = \bar{\psi}(x), \quad \left(0 < \delta < 1/16\right). \qquad (49)$$

где $\bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x)$ - известные гладкие функции.

Решение этой задачи имеет вид

$$u^{(0)}(x,y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 \varphi\left(x + \omega(y,\delta)(2t-1)\right)t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt +$$

$$+ \delta^{\alpha}\eta(y,\delta)\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\int_0^1 \psi\left(x + \omega(y,\delta)(2t-1)\right)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt, \qquad (50)$$

где $\eta(y,\delta) = \frac{1}{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha} - \delta^{1-\alpha}\right)$.

Решение задачи (45), (47) ищем в виде ряда (36).

Получаем следующие оценки :

$$\left|u^{(n)}(x,y)\right| \le M_n \delta^{\frac{1}{2}} y^{\alpha - \frac{2n+1}{2}} \quad (n = 1,2,3,\ldots), \qquad (51)$$

при малом y. Т.о., ряд (36) мажорируется рядом

$$M_0 + \delta^{\alpha} y^{\alpha-\frac{1}{2}}\left[M_1\left(\frac{\varepsilon}{y}\right) + M_2\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^2 + M_3\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^3 + \ldots + M_n\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^n + \ldots\right].$$

Этот ряд является асимптотическим при $y \ge \varepsilon^{\alpha}$, где $\alpha < 1$.

Чтобы получить решение задачи (45), (47) на всей рассматриваемой области D, решаем эту задачу методом униформизации. Доказана

Теорема 18. Параметрическое представление решения задачи (45), (47) имеет вид

$$u(x,\xi) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 \varphi\left(x + 2\xi^{\frac{1}{2}}(2t-1)\right)t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int_0^1 \psi\left(x + 2\xi^{\frac{1}{2}}(2t-1)\right)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt, \qquad (52)$$

которое является равномерно пригодным в области D.

В § 4.3 исследуется задача Коши для гиперболического возмущенного уравнения второго порядка типа Лайтхилла в случае, когда $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Рассматривается возмущенное линейное гиперболическое уравнение с линией параболического вырождения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \alpha\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \varepsilon\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}. \qquad (53)$$

Невозмущенное ($\varepsilon = 0$) уравнение имеет вид

$$Lu^{(0)}(x,y) := u_{xx}^{(0)}(x,y) - yu_{yy}^{(0)}(x,y) - \frac{1}{2}u_y^{(0)}(x,y) = 0. \qquad (54)$$

Ставится задача: найти решение уравнения (53), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\quad \lim_{y\to 0} y^{\frac{1}{2}} u_y(x,y)=\psi(x)\,, \tag{55}$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ - гладкие функции, в области D. Доказана

Теорема 19. Решение задачи (53), (55), полученное классическим методом малого параметра в виде ряда (36), существует в области $D_\alpha=\left\{D\setminus \varepsilon^\alpha \le y \le \frac{1}{16},\quad 0<\alpha<1\right\}$.

Решение задачи (54), (55) представляется в виде:

$$u^{(0)}(x,y)=\frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}\int_0^1 \varphi\left(x+2y^{\frac{1}{2}}(2t-1)\right)t^\beta(1-t)^\beta\,dt+$$

$$+\frac{4\Gamma(2\beta)y^{\frac{1}{2}}}{(2-m)\beta\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 \varphi'\left(x+2y^{\frac{1}{2}}(2t-1)\right)t^\beta(1-t)^\beta(2t-1)dt$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int_0^1 \psi\left(x+2y^{\frac{1}{2}}(2t-1)\right)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\,dt\,, \tag{56}$$

В дальнейшем для уравнения (54) удобно рассмотреть следующую задачу:

$$u(x,\delta)=\overline{\varphi}(x)\,,\quad u_y(x,\delta)=\overline{\psi}(x)\,,\qquad \left(0<\delta<\frac{1}{16}\right), \tag{57}$$

где $\overline{\varphi}(x), \overline{\psi}(x)$ - известные гладкие функции.

Решение этой задачи имеет вид

$$u^{(0)}(x,y)=\frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}\int_0^1 \varphi\left(x+\omega(y,\delta)(2t-1)\right)t^\beta(1-t)^\beta\,dt+$$

$$+\frac{2\Gamma(2\beta)\omega(y,\delta)}{(2-m)\beta\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 \varphi'\left(x+\omega(y,\delta)(2t-1)\right)t^\beta(1-t)^\beta(2t-1)dt$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\eta(y,\delta)\int_0^1 \psi\left(x+\omega(y,\delta)(2t-1)\right)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\,dt \tag{58}$$

Решение задачи (53), (55) ищем в виде ряда (36). Подставляя (36) в (53), получаем оценки

$$\left|u^{(n)}(x,y)\right|\le M_n\delta^{\frac{1}{2}}y^{\alpha\frac{2n-1}{2}}\,,\quad (n=1,2,3,\ldots) \tag{59}$$

при малом y. Т.о., ряд (36) мажорируется рядом

$$M_0+\delta^\alpha y^{\alpha\frac{1}{2}}\left[M_1\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)+M_2\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^2+M_3\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^3+\ldots+M_n\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^n+\ldots\right].$$

Этот ряд является асимптотическим при $y\ge\varepsilon^\alpha$, где $\alpha<1$.

Методом униформизации доказана следующая

Теорема 20. Параметрическое представление решение задачи (53), (55) имеет вид

$$u(x,\xi)=\frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}\int_0^1 \varphi\left(x+2\xi^{\frac{1}{2}}(2t-1)\right)t^\beta(1-t)^\beta\,dt+$$

$$+\frac{4\Gamma(2\beta)\xi^{\frac{1}{2}}}{(2-m)\beta\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 \varphi'\left(x+2\xi^{\frac{1}{2}}(2t-1)\right)t^\beta(1-t)^\beta(2t-1)dt$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int_0^1 \psi\left(x+2\xi^{\frac{1}{2}}(2t-1)\right)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\,dt\,, \tag{60}$$

которое является равномерно пригодным в области D.

Выводы

1. Доказано существование решения модельного возмущенного уравнения в частных производных первого порядка для цилиндрических волн дополняющие соответствующее модельное уравнение Ван-Дайка.
2. Методами униформизации и введения фиктивного параметра построена равномерная асимптотика решения модельного уравнения для цилиндрических волн.
3. Методом униформизации построена равномерная асимптотика решения модельного уравнения Лайтхилла на всей рассматриваемой области.
4. Методом униформизации доказано существование решения задачи Коши для линейного гиперболического возмущенного уравнения второго порядка типа Лайтхилла с линией параболического вырождения, вплоть до особой линии.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Метод униформизации для модельного уравнения Лайтхилла гиперболического типа, случай логарифмическая особенность //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып.31. – С.95-99.
2. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Метод униформизации для модельного уравнения Лайтхилла гиперболического типа //Там же. Бишкек: Илим, 2002. – Вып.31. – С.100-104.
3. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Метод униформизации для модельного уравнения Лайтхилла гиперболического типа в случае экспоненциального роста искомой функции на границе области //Вестник КГУ им.И.Раззакова.- Бишкек. 2002. - №5. – С.169-173.

4. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Об одном модельном уравнении первого порядка в частных производных для цилиндрических волн //Вестник ОшГУ. Сер.физ.-мат. наук. - Ош, 2003. - Вып.6. – С.114-118.
5. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Об одном модельном уравнении первого порядка в частных производных для цилиндрических волн. Случай степенного роста //Там же. - Ош, 2003. - Вып.6. – С.119-122.
6. Белеков К.Ж. Модельное уравнение для цилиндрических волн. Случай степенного роста с показателем $1/m$ //Там же. Ош, 2003. - Вып.7. – С. 44-48.
7. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Модельное уравнение для цилиндрических волн. Случай степенного роста с показателем p/q //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып.32. – С.30-34.
8. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Возмущение гиперболического уравнения с положительной линией параболического вырождения степени половины //Республ. конф. «Проблемы прикладной матем., мех. и инженерного образования», посв. 50-летию КНТУ и 75-летию проф. Усубакунова Р. – Бишкек: КНТУ, 2004. – С.69-73.
9. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Возмущение гиперболического уравнения с положительной линией параболического вырождения степени меньше половины //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып.33. – С.134-138.
10. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Метод униформизации для гиперболического уравнения с параболическим вырождением //Вестник КазНУ им.Аль-Фараби. Сер. мат., мех., информатика. – Алматы, 2005. - №3. – С.4-8.
11. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Метод униформизации для возмущенных гиперболических уравнений с линией параболического вырождения //Тез. докл. междунар. конф. «Актуальные проблемы дифференц. уравн. и матем. физики». – Алматы, 2005. - С.34.
12. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Оценка решения линейного однородного гиперболического уравнения с линией параболического вырождения //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.35. – С.138-141.
13. Белеков К.Ж. Исследование асимптотики начальной задачи //Междунар. научн. журн. КУУ «Наука. Образование. Техника». - Ош, 2007. – С.137-139.
14. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Задача Лайтхилла для линейного сингулярно-возмущенного гиперболического уравнения с линией параболического вырождения //Известия ОшТУ. - Ош, 2008. - №1. - С.190-195.
15. Belekov K. The solution of the perturbed hyperbolic equation of the second order with degenerative line parabolic //Вестник ОшГУ. Сер. естеств. и пед. наук. – Ош, 2005. - №3. – С.99-103.

Аннотация
Белеков Кенжебек Жолдошевич
Сингулярдык козголгон жекече туундулуу дифференциалдык тендемелерге униформизация ыкмасын колдонуу

Урунттуу сөздөр: сингулярдык козголгон тендеме, өзгөчө сызык, униформизация ыкмасы, асимптотика, фиктивдүү параметр, математикалык индукция ыкмасы.

Характеристика ыкмасы менен цилиндрдик толкундун моделдүү тендемесинин чечиминин жашашы далилденген жана чечимдин бир калыптагы асимптотикасы униформизация жана фиктивдүү параметрди кийирүү ыкмалары менен тургузулган.

Кичине параметр жана униформизация ыкмалары менен Лайтхиллдин моделдүү тендемесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикасы тургузулган.

Униформизация ыкмасы менен параболалык ийрилүү кубулуусу бар сингулярдык козголгон гиперболалык тендеменин чыгарылышынын өзгөчө сызыкка чейин жашашы далилденген.

Аннотация
Белеков Кенжебек Жолдошевич
Применение метода униформизации к сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям в частных производных

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, особая линия, метод униформизации, асимптотика, фиктивный параметр, метод математической индукции.

Методом характеристик доказана существование решения модельного уравнения для цилиндрических волн и построена равномерная асимптотика методами униформизации и введения фиктивного параметра.

Методами малого параметра и униформизации построена равномерная асимптотика решение модельного уравнения Лайтхилла.

Методом униформизации доказано существование решения возмущенного гиперболического уравнения с параболическим вырождением вплоть до особой линии.

Annotation
Belekov Kenjebek Joldoshevich
Application of the uniformization method to singular perturbed partial differential equations

Key words: singular perturbed equation, singular line, the method of uniformization, asymptotic, fictitious parameter, the method of mathematical induction.

The uniform asymptotic of the solution and the existence theorem of the model cylindrical wave equation are proved by the uniformization and the fictitious parameter methods. The uniform asymptotic of the solution of the model Lighthill's equation is constructed by using of small parameter and method of uniformization.

The existence of the solution of the linear singular perturbed hyperbolic type partial equation with parabolic degeneracy line is proved by using the method of uniformization