НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.07.362

На правах рукописи

Джураев Абубакир Мухтарович

УДК 517.9

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Бишкек – 2009

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.07.362

На правах рукописи

Джураев Абубакир Мухтарович

УДК 517.9

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Бишкек – 2009

Работа выполнена на кафедре «Математическое моделирование и статистика» Ошского государственного университета

Научный консультант:	академик НАН КР, член-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор Иманалиев М.И.
Официальные оппоненты:	академик НАН РК, доктор физико-математических наук, профессор Кальменов Т.Ш. доктор физико-математических наук, профессор Асанов А. доктор физико-математических наук, профессор Кангужин Б.Е.
Ведущая организация:	Институт математики и информационных технологий АН РУз, Узбекистан, 700143, г. Ташкент, ул. Ф. Ходжаева, 29

Защита состоится 8 июня 2009 г. в 14.00 часов на заседании Диссертационного совета Д 01.07.362 по защите диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук в Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чүй, 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чүй, 265-а.

Автореферат разослан «____»_______________2009 г.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу: Кыргызская Республика, 720071, Бишкек-71, проспект Чүй, 265–а, Институт теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики, Диссертационный совет Д 01.07.362

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 01.07.362,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

<u>**Актуальность темы.**</u> Во многих работах были получены достаточные условия для асимптотической устойчивости или (реже) неустойчивости решений сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений и систем. Для практики желательно, чтобы для некоторых классов уравнений были найдены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости, которые реально можно проверить для конкретных уравнений. Однако, поскольку ранее не формулировались в общем виде требования на то, что является исходными данными в таких условиях, их проверка может быть еще затруднительной, чем непосредственное решение уравнения или системы.

Рассмотрим более общий вид операторно - дифференциального уравнения, как было предложено в работах М.И. Иманалиева, П.С. Панкова, Г.М. Кененбаевой

$$F(\varepsilon, y^{(n)}(.), y^{(n-1)}(.), \dots , y(.), x) = 0,\ 0 < \varepsilon << 1, \quad (1)$$

Соответствующее невозмущенное уравнение имеет вид

$$F(0, y^{(n)}(.), y^{(n-1)}(.), \dots , y(.), x) = 0. \quad (2)$$

А.Н. Тихоновым были получены результаты для систем сингулярно-возмущенных уравнений (1). В работах А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова получены асимптотические разложения для сингулярно - возмущенных уравнений в частных производных.

Однако эти отдельные результаты не давали путь для исследования других случаев. Поэтому М.И. Иманалиев разработал свой метод асимптотических разложений. Им, его учениками и другими были получены ряд лучших результатов, включая начальный скачок и другие.

Также С.А. Ломов предложил свой метод регуляризации, при помощи которого он сингулярно-возмущенную задачу свел к регулярно-возмущенной.

В упомянутых работах накладывались существенные ограничения на решения вырожденного уравнения (2). В связи с этим в работе М.И. Иманалиева, П.С. Панкова был предложен метод исследования (2) как точечного множества (без производных, когда это удается). Таким образом, были получены явления всплеска, вращающегося и удаляющегося пограничных слоев.

В работах М.И. Иманалиева, П.С. Панкова, Г.М. Кененбаевой был предложен алгоритм, которой автоматически, путем проверки для заданных функций некоторых неравенств, определяет асимптотические решения систем уравнений определенного вида.

Однако и в этих работах алгоритм определяет только достаточные условия. Если ни для каких испытываемых прямоугольников разбиения не выполняется неравенство, то алгоритм конкретного результата не дает.

Цель работы сформулировать в общем виде требования для устойчивости решений систем сингулярное возмущенных уравнений, развить теорию асимптотических методов так, чтобы можно было получить конкретные условия для различных классов уравнений и найти такие необходимые и достаточные условия, для некоторых классов уравнений, которые могут быть записаны в алгоритмической форме.

Методы исследования. В работе основными методами исследования являются метод С.А.Ломова и алгоритмический подход к задачам с аналитическими функциями.

Научная новизна работы.

1. Введены понятия квадратично - аналитических и локально - монотонных функций.
2. Получен критерий локальной устойчивости аналитических решений начальной задачи для систем двух сингулярно - возмущенных обыкновенных уравнений.
3. Доказана теорема существования единственного ограниченного решения краевой задачи для сингулярно-возмущенных уравнений с кратным спектром.
4. Показано применение метода регуляризации для сингулярно - возмущенных уравнений с кратным чисто мнимым спектром.
5. Определены регуляризующие функции для решения систем сингулярно - возмущенных уравнений с кратным чисто мнимым спектром.
6. Сингулярно - возмущенные задачи с кратным спектром с помощью метода регуляризации сведены к регулярно-возмущенным уравнениям.
7. Разработан метод асимптотического интегрирования для сингулярно - возмущенных задач с кратным чисто мнимым спектром.
8. Доказана теорема об оценке остаточного члена асимптотического решения сингулярно - возмущенной задачи с кратным чисто мнимым спектром.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы носят теоретический характер. Разработанный критерий устойчивости решения систем сингулярно - возмущенных уравнений и методика применения метода регуляризации могут быть применены для решения интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром и определения устойчивости решений систем сингулярно - возмущенных уравнений.

На защиту выносятся следующие:

Основные положения.

1. Определение локальной устойчивости решений систем сингулярно - возмущенных уравнений путем выделения первого ненулевого слагаемого в аналитической функции.
2. Определение квадратично - аналитических и локально - монотонных функций.

3. Применение понятий о квадратично - аналитических и локально - монотонных функциях для установления критерия локальной устойчивости.
4. Доказательство теоремы существования единственного ограниченного решения краевой задачи для сингулярно-возмущенных уравнений с кратным спектром.
5. Определение регуляризующих функций для решения систем сингулярно - возмущенных уравнений.
6. Сведение сингулярно - возмущенных уравнений к регулярно-возмущенным уравнениям.
7. Доказательство теорем о нормальной и об однозначной разрешимости итерационных задач.
8. Применение условий ортогональности для выделения ограниченных решений итерационных задач.
9. Доказательство теоремы об оценке остаточного члена регуляризованного ряда.

Апробация результатов. Материалы работы докладывались на международных и региональных конференциях и симпозиумах:

- Республиканская научно - методическая конференция “Проблемы повышения эффективности самостоятельной работы студентов”, Пржевальск, 1990;
- Всесоюзная научная конференция “Асимптотические методы теории сингулярно - возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач”, Бишкек, 1991;
- Республиканская научная конференция “Дифференциальные уравнения и их приложения”, Ош, 1993;
- Научно – практическая конференция Иссык-Кульского государственного университета, Каракол, 1993;
- Международная научно - практическая конференция “Современные методы и средства информационных технологий”, Ош,1995;
- Международная научно - практическая конференция, Кызыл - Кия, 1997;
- First Turkish world mathematics symposium, Elazig, Firat University, Turkia, 1999;
- Международная научно – практическая конференция “Проблемы непрерывного образования в условиях обновления общества”, Ош, 1999;
- Международная научная конференция “Проблемы математики и информатики в XXI веке”, Бишкек, 2000;
- Международная научная конференция, Алматы, Казахстан, 2000;
- Международная научная конференция “Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике”, Бишкек, 2001;
- Международная научная конференция “Наука и образование”, Белово, 2004;

- Международная конференция "Наука и будущее: идеи, которые изменят мир", Москва, 2004;
- Всероссийская научная конференция "Математическое моделирование и краевые задачи", Самара, 2004;
- Международная научно-техническая конференция "Наука и образование", Мурманск, 2004;
- International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, Cluj-Napoca, Romania, 2004;
- Международная научная конференция «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики», Алматы, Казахстан, 2005;
- II международная научная конференция «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», Бишкек, 2006;
- International Conference on «Spectral Theory and Global Analysis», Oldenburg, Germany, 2006;
- International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006;
- Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий», Алматы, Казахстан, 2006;
- 3rd International Conference on 21st Century Mathematics, Lahore, Pakistan, 2007,
- International conference the theory of functions and computing methods, Astana, 2007

на научных семинарах Института математики НАН Кыргызской Республики, Института фундаментальных и прикладных исследований ОшГУ, кафедры математического анализа ИГУ, кафедры прикладной математики Ош ТУ, кафедры прикладной математики и информатики КУУ, кафедр прикладной и компьютерной математики и математического моделирования и статистики ОшГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в главе 2 монографии [16], статьях [1], [5-6], [8-15], [17-46], [49], [52] и тезисах докладов [2-4], [7], [47-48], [50-51]. В [12-14] М.И. Иманалиеву принадлежит постановка проблемы, а соискателю – разработка метода и получение конкретных результатов. В [38], [47] соискателю принадлежит постановка задачи и разработка метода, а А. Жораеву - вывод математических результатов и в [47] К. Кокоеву проверка результатов. В [27] соискателю принадлежит постановка проблемы и разработка схемы метода, а М. Джураеву - получение конкретного результата по этому методу. В [9], [22] соискателю принадлежит постановка проблемы, а С.К. Атабаеву - вывод конкретных результатов. В [11], [17], [19], [23], [33], [36], [41]соискателю принадлежит постановка задачи, а С.Д. Туратову вывод результатов. В [21], [24] соискателю принадлежит постановка проблемы и разработка схемы метода, а У.А. Аблакимову - получение конкретных результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения, списка использованных источников, содержащего 129 наименований и приложений. Объем текста 170 страниц.

Краткое содержание работы.

Введение посвящено обзору содержания диссертации, приводится обоснование постановки проблемы.

В первой главе сформулированы проверяемые условия и базовые операции в теории сингулярных возмущений.

Приведены известные результаты по теории сингулярных возмущений. Эти результаты изложены на примере более общего вида операторно - дифференциального уравнения, как было предложено в работах М.И. Иманалиева, П.С. Панкова, Г.М. Кененбаевой

$$F(\varepsilon, y^{(n)}(.), y^{(n-1)}(.), \ldots, y(.), x) = 0,\ 0 < \varepsilon << 1, \tag{1.1}$$

соответствующее невозмущенное уравнение имеет вид

$$F(0, y^{(n)}(.), y^{(n-1)}(.), \ldots, y(.), x) = 0. \tag{1.2}$$

Начиная с работ А.Н. Тихонова его учениками были получены результаты для систем сингулярно-возмущенных уравнений (1.1).

М.И. Иманалиев разработал свой метод асимптотических разложений. Им, его учениками и другими были получены ряд лучших результатов, включая начальный скачок и другие.

С.А. Ломов предложил свой метод регуляризации, при помощи которого он сингулярно-возмущенную задачу свел к регулярно - возмущенной.

В упомянутых работах накладывались существенные ограничения на решения вырожденного уравнения (1.2). В связи с этим в работе М.И. Иманалиева, П.С. Панкова был предложен метод исследования (1.2) как точечного множества (без производных, когда это удается). Таким образом, были получены явления всплеска, вращающегося и удаляющегося пограничных слоев.

В работах М.И. Иманалиева, П.С. Панкова, Г.М. Кененбаевой был предложен алгоритм, которой автоматически, путем проверки для заданных функций некоторых неравенств, определяет асимптотические решения систем уравнений определенного вида.

Однако в упомянутой работе алгоритм определяет только достаточные условия.

Поэтому перед нами, при изучении упомянутых работ возникли следующие задачи:

- развить теорию асимптотических методов так, чтобы можно было получить конкретные условия для различных классов уравнений;
- сформулировать в общем виде требования на коэффициенты уравнений так, чтобы можно было определить асимптотическое поведение решения уравнений;

- сформулировать в явном виде базовые операции над функциями, которые ранее подразумевались выполненными;
- найти такие необходимые и достаточные условия для некоторых классов уравнений, которые могут быть записаны в алгоритмической форме с использованием только выявленных базовых операций над заданными функциями.

В нашей работе применяются следующие основные алгоритмические операции:
- выделение первого ненулевого слагаемого в ряде Тейлора аналитической функции;
- определение знака функции на интервале (если он не меняется);
- определение нулей известной функции на отрезке;
- выделение коэффициентов разложения вектора по базису;
- получение следа и определителя матрицы по ее коэффициентам;
- получение жордановой формы матрицы;
- вычисление корней любой степени от комплексного числа;
- решение алгебраического уравнения любого порядка;
- дифференцирование и интегрирование.

В главе 2 изложено развитие теории асимптотического интегрирования систем из n сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon y'(t,\varepsilon) - A(t)y(t,\varepsilon) = h(t), \tag{2.1}$$

при $\varepsilon \to +0$ с краевым условием

$$Gy \equiv \left\{y_1(0,\varepsilon),\ldots,y_{n_0}(0,\varepsilon),y_{n_0+1}(1,\varepsilon),\ldots,y_n(1,\varepsilon)\right\} = y^0, \tag{2.2}$$

где $n_0=[n/2]$, [.] - целая часть.

Сингулярно - возмущенные однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с кратным спектром предельного оператора изучались Я. Д. Тамаркиным. Дифференциальные уравнения n-го порядка были изучены Трджинским и Территиным.

Система $x'(t, \varepsilon) = A(\tau,\varepsilon)x$, где $\tau = \varepsilon t$, в случае, когда характеристическое уравнение $\det [\lambda E - A(\tau,0)] = 0$ имеет кратные корни и матрица эквивалентна жордановой клетке, изучались в работе Н. И. Шкиля.

Регуляризованная асимптотика решения задачи Коши для системы с кратным отрицательной действительной частью спектром дифференциальных уравнений в случае предельного оператора $A(t)$ жордановой структуры получена С.А. Ломовым и А. Г. Елисеевым.

В работе (*)[1] была разработана теория асимптотического интегрирования краевой задачи для системы с кратным чисто мнимым спектром с одноклеточной жордановой матрицей в случаях, когда единственное собственное значение отлично от нуля, т.е. $\lambda(t)\neq 0$ и когда

[1] Джураев А.М. Развитие метода регуляризации для задач с кратным спектром: Автореф.дис. …канд.физ.-мат.наук.01.01.02. – Москва, 1989.- 15 с.

единственное собственное значение имеет нуль первого порядка, т.е. $\lambda(t) = ta(t),\ a(t)\neq 0$.

В этой главе изложена теория асимптотического интегрирования краевой задачи с многоклеточной жордановой матрицей, одноклеточной жордановой матрицей в случае, когда собственное значение имеет нуль любого порядка и тождественный нуль и начальной задачи для системы двух сингулярно - возмущенных дифференциальных уравнений с кратным чисто мнимым спектром.

В параграфе § 2.1 построена теория асимптотического интегрирования сингулярно - возмущенной краевой задачи с многоклеточной жордановой матрицей.

Пусть изучается краевая задача (2.1), (2.2). Пусть $A(t)$ – матрица, эквивалентная многоклеточной жордановой матрице и выполнены следующие условия:

1^0. $A(t)\in C^\infty([0,1],C^{n\times n}),\ h(t)\in C^\infty([0,1],C^n)$;

2^0. Спектр $\{\lambda_{ij}(t)\}, i=1..r, n=2r, j=1,2$ матрицы $A(t)$ при каждом $t\in[0,1]$ удовлетворяет требованиям многоклеточности ($r>1$):

$\lambda_{ij}(t)=\lambda_i(t)\neq 0,\ i=1..r, j=1,2;$

3^0. $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\equiv 0, i=1..r;$

4^0. $\lambda_i(t)\neq\lambda_k(t),\ i,k=1..r.$

5^0. Матрица $A(t)$ имеет жордановы цепочки векторов, т.е.

$\forall t\in[0,1] \qquad A(t)\varphi_{i1}(t)=\lambda_i(t)\varphi_{i1}(t),$

$A(t)\varphi_{i2}(t)=\lambda_i(t)\varphi_{i2}(t)+\varphi_{i1}(t), i=1..r.$

и ее каноническая структура не меняется на отрезке [0,1];

Производные от собственных и присоединенных векторов разложим по базису $\varphi_{ij}(t), i=1..r, j=1,2$:

$$\dot\varphi_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=1}^{2}C_{ij}^{ks}(t)\varphi_{ks}(t).$$

Потребуем, чтобы для $C_{i1}^{i2}(t)$ выполнялось условие

6^0. $\forall t\in[0,1] \qquad \operatorname{Re}\sqrt{-C_{i1}^{i2}(t)}\neq 0, i=1..r.$

Теорема 2.1. Пусть дана задача (2.1), (2.2) и выполнены условия 1^0-6^0. Тогда задача (2.1), (2.2) имеет единственное ограниченное решение $\varepsilon\to+0$.

Доказательство теоремы проведено по следующей схеме. Сделав в (2.1), (2.2) замену $y(t,\varepsilon)=K(t)q(t,\varepsilon)$, где $K(t)$ - матрица из векторов оператора $A(t)$. Тогда задачу (2.1), (2.2) можно переписать в виде

$$\varepsilon q' - \sum_{i=1}^{r}(\lambda_i(t)E_i + T_i(t) - \varepsilon K^{-1}\dot K)q = K^{-1}h(t),$$

$$G_0K(0)q(0,\varepsilon)+G_1K(0)q(1,\varepsilon)=y^0,$$

где $G_0 = diag\{\underbrace{1,...,1}_{k},\underbrace{0,...,0}_{k}\}, G_1 = diag\{\underbrace{0,...,0}_{k},\underbrace{1,...,1}_{k}\}$.

Обозначим $\sqrt{\varepsilon}=\mu$ и введем операторы

$$\Lambda(g) = diag\{g_{11}(t),...,g_{r1}(t),g_{1,2}(t),...,g_{r2}(t)\},$$

$$F_0 = G_0K(0)C(0,\mu),\ F_1 = G_1K(1)C(1,\mu),$$

где функции $g_{i,j}(t),\ i=1..r,\ j=1,2$, определяются из системы уравнений

$$g_{i,j}^2(t)) + C_{i1}^{i2}(t) = 0,\ i=1..r,\ j=1,2. \tag{2.3}$$

и матрица

$$C(t,\mu)=\{c_{11}(t,\mu),c_{21}(t,\mu),...,c_{r1}(t,\mu),c_{12}(t,\mu),c_{22}(t,\mu),...,c_{r2}(t,\mu)\},$$

состоит из векторов

$$c_{ij}(t,\mu)=\left(\overbrace{\mu^{-1}\delta_i^1,\mu^{-1}\delta_i^2,...,\mu^{-1}\delta_i^r}^{r},\overbrace{\delta_{r+i}^{r+1}g_{i,j}(t),\delta_{r+i}^{r+2}g_{i,j}(t),...,\delta_{r+i}^{n}g_{i,j}(t)}^{r}\right)^T,$$

$$i=1..r,\ j=1,2,\delta_k^s=\begin{cases}0,k\neq s\\1,k=s\end{cases},k,s=1..n.$$

Заметим, что

$$\det C(t,\mu)=2^r\mu^{-r}\prod_{i=1}^{r}\sqrt{-C_{i1}^{i2}(t)}\neq 0.$$

Сделав замену $q(t,\varepsilon)=C(t,\mu)p(t,\mu)$ переходим к задаче

$$\mu^2\dot{p}-(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(t)E_{2i}+\mu\Lambda(g)-\mu^2C^{-1}\dot{C})p=C^{-1}K^{-1}h,$$

$$F_0p(0,\mu)+F_1p(1,\mu)=0. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. При выполнены условия 1^0-6^0 задача (2.4) с помощью невырожденной при достаточно малых $\mu>0$ замены $p=Sp_1$, где $S=E+\mu S_1+\mu^2S_2$, может быть приведена к виду

$$\mu^2\dot{p}_1-(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(t)E_{2i}+\mu\Lambda_1(t)+\mu^2\Lambda_2(t)+\sum_{k=3}^{\infty}\mu^kP_k(t))p_1=h_1,$$

$$F_0S(0)p_1(0,\mu)+F_1S(1)p_1(1,\mu)=0, \tag{2.5}$$

где $\Lambda_k(t),k=1,2,$ диагональные матрицы и $h_1=C^{-1}K^{-1}h$.

Заменяя в (2.5) $p_1=p_2+p_0$, где

$$(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(t)E_{2i}+\mu\Lambda_1(t)+\mu^2\Lambda_2(t)+\sum_{k=3}^{\infty}\mu^kP_k(t))p_0=h_1,$$

$F_{00}=F_0S(0)$, $F_{11}=F_1S(1)$, $p^0=F_{00}p_0(0,\mu)+F_{11}p_0(1,\mu)$ получим

$$\mu^2\dot{p}_2-(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(t)E_{2i}+\mu\Lambda_1(t)+\mu^2\Lambda_2(t)+\sum_{k=3}^{\infty}\mu^kP_k(t))p_2=\mu^2\dot{p}_0$$

$$F_{00}p_2(0,\mu)+F_{11}p_1(1,\mu)=p^0. \tag{2.6}$$

Здесь $p_0(t,\mu)$ ограниченная функция при достаточно малых $\mu>0$.

Для изучения задачи (2.6) нам понадобится следующая вспомогательная задача

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\mu^{-2}(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(t)E_{2i}+\mu\Lambda_1(t)+\mu^2\Lambda_2(t))\Phi=0,\ G_0\Phi(0,\mu)+G_1\Phi(1,\mu)=E.$$

Можно показать, что решение вспомогательной задачи запишется в виде

$$\Phi(t,\mu)=\Phi_0(t,\mu)+\Phi_1(t,\mu),$$

где $\Lambda_2(t)=diag\{g_1(t),...,g_r(t),g_{r+1}(t),...,g_n(t)\}$.

$$\Phi_0(t,\mu)=diag\begin{pmatrix}\exp\left(\frac{1}{\mu^2}\int_0^t(\lambda_1+\mu g_{1,1}+\mu^2g_1)dx\right)\\ ...\\ \exp\left(\frac{1}{\mu^2}\int_0^t(\lambda_r+\mu g_{r,1}+\mu^2g_2)dx\right)\\ 0\\ ...\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\Phi_1(t,\mu)=diag\begin{pmatrix}0\\ ...\\ 0\\ \exp\left(\frac{1}{\mu^2}\int_1^t(\lambda_1+\mu g_{1,2}+\mu^2g_{r+1})dx\right)\\ ...\\ \exp\left(\frac{1}{\mu^2}\int_1^t(\lambda_r+\mu g_{r,2}+\mu^2g_n)dx\right)\end{pmatrix},$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$p_2(t,\mu)=\Phi(t,\mu)[F_0\Phi(0,\mu)+F_1\Phi(1,\mu)]^{-1}\times$$

$$\times[F_0\Phi_1(0,\mu)+F_1\Phi_0(1,\mu)]\int_0^1\Phi^{-1}(x,\mu)[p_0-\sum_{k=3}^{\infty}\mu^{k-2}P_k(x)p_2]dx+$$

$$+\sum_{m=0}^{1}\Phi_m(t,\mu)\int_m^t\Phi^{-1}(x,\mu)[p_0-\sum_{k=3}^{\infty}\mu^{k-2}P_k(x)p_2]dx\equiv T_0p_2. \qquad (2.7)$$

Для интегрального уравнения (2.7) справедлива следующая

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия 1^0 - 6^0 и функции $g_{i,j}(t)$, $i=1..r, j=1,2$ являются корнями уравнений (2.3) тождественно по $t\in[0,1]$. Тогда задача (2.6) эквивалентна интегральному уравнению (2.7).

Существуют постоянные числа $\gamma<0$, $\gamma_m<0$, $m=0,1$ такие, что

$$\|\Phi_m(t,\mu)\|\le\exp\frac{\gamma_m t}{\mu},\|\Phi(t,\mu)\|\le\exp\frac{\gamma t}{\mu}$$

Можно показать, что справедливы оценки

$$\|[F_0\Phi_1(0,\mu)+F_1\Phi_0(1,\mu)]^{-1}\|=0(1),$$

$$\|C^{-1}(t,\mu)\|=0(1),\ \|C^{-1}(t,\mu)\dot{C}(t,\mu)\|=0(1),$$

при $\mu\to0$.

Из (2.7) получим неравенство

$$\|T_0p_2^1-T_0p_2^2\|\le\mu c_0\|p_2^1-p_2^2\|,$$

доказывающая сжимаемость оператора T_0.

Тогда при достаточно малых $\mu>0$ уравнение (2.7) имеет единственное ограниченное решение $p_2(t,\mu)$. Теорема 2.1. доказана.

Для асимптотического интегрирования краевой задачи (2.1), (2.2) при выполнении условий 1^0. - 6^0. введем дополнительные независимые переменные по формулам:

$$\tau_{i1}=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left[\lambda_i(x)+\sqrt{\varepsilon}g_{i,1}(x)\right]dx\equiv\psi_{i1}(t,\varepsilon),\ i=1..r,$$

$$\tau_{i2}=\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\left[\lambda_i(x)+\sqrt{\varepsilon}g_{i,2}(x)\right]dx\equiv\psi_{i2}(t,\varepsilon),\ i=1..r,$$

Введя обозначения $\tau=(\tau_{11},...,\tau_{r2}),\psi(t,\varepsilon)=(\psi_{11}(t,\varepsilon),...,\psi_{r2}(t,\varepsilon))$, вместо искомого решения $y(t,\ \varepsilon)$ задачи (2.1), (2.2) будем изучать новую "расширенную" функцию $u(t,\tau,\varepsilon)$ такую, что

$$u(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=\psi(t,\varepsilon)}\equiv y(t,\varepsilon).$$

Выделим две точки $M_0=M_0(0,\psi(0,\varepsilon)),M_1=M_1(1,\psi(1,\varepsilon))$ и для определения функции $u(t,\tau,\varepsilon)$ поставим следующую задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=1}^{2}\left(\lambda_k(t)+\sqrt{\varepsilon}g_{k,s}(t)\right)\frac{\partial u}{\partial\tau_{ks}}-A(t)u=h(t),$$

$$G_0u(M_0,\varepsilon)+G_1u(M_1,\varepsilon)=y^0 \qquad (2.8)$$

при $\varepsilon\to0$. Так как задача (2.8) является регулярной по ε при $\varepsilon\to0$, то естественно ее решение будем определять в виде ряда

$$u(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\varepsilon}^{\,m}\ u_m(t,\tau), \qquad (2.9)$$

с коэффициентами из пространства безрезонансных решений

$$U=\{\ u(t,\tau):u=\sum_{i,k=1}^{r}\sum_{j,s=1}^{2}u_{i,j,k,s}(t)\varphi_{ij}(t)e^{\tau_{ks}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{2}u_{i,j}(t)\varphi_{ij}(t),u_{i,j,k,s}(t),u_{i,j}(t)\in C^{\infty}([0,1],C)\ \}$$

В пространстве безрезонансных решений U зададим следующие операторы

$$L_0\equiv A(t)-\sum_{k=1}^{r}\lambda_k(t)\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\tau_{ks}},L_k\equiv\sum_{s=1}^{2}g_{k,s}(t)\frac{\partial}{\partial\tau_{ks}},k=1..r,$$

$$G_0\equiv diag\left\{\underbrace{1,...,1}_{k},\underbrace{0,...,0}_{k}\right\},G_1\equiv diag\left\{\underbrace{0,...,0}_{k},\underbrace{1,...,1}_{k}\right\},$$

$$Gu\equiv G_0u(M_0,\varepsilon)+G_1u(M_1,\varepsilon).$$

Расширенную задачу (2.8) перепишем в виде

$$L_0u=\sum_{i=1}^{r}\sqrt{\varepsilon}\ L_iu+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-h, \qquad (2.10)$$

$$Gu=y^0. \qquad (2.11)$$

Степенной ряд (2.9) подставим в задачу (2.10), (2.11) и получим следующие итерационные задачи для определения коэффициентов $u_m(t,\tau)$ ряда (2.9):

$$L_0u_0=-h(t),\qquad Gu_0=y^0, \qquad (2.12)$$

$$L_0u_1=\sum_{i=1}^{r}L_iu_0,Gu_1=0, \qquad (2.13)$$

$$L_0u_m=\sum_{i=1}^{r}L_iu_{m-1}+\frac{\partial u_{m-2}}{\partial t},Gu_m=0,\ m=2,3,.... \qquad (2.14)$$

Задачи (2.12) - (2.14) будем решать в пространстве безрезонансных решений U.

Пространство, сопряженное к пространству U, отождествим с пространством

$$U^*=\{\ v(t,\tau):v=\sum_{i,k=1}^{r}\sum_{j,s=1}^{2}v_{i,j,k,s}(t)\varphi_{ij}^*(t)e^{\tau_{ks}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{2}v_{i,j}(t)\varphi_{ij}^*(t),v_{i,j,k,s}(t),v_{i,j}(t)\in C^{\infty}([0,1],C)\ \}$$

где $\varphi_{11}^{*}(t),...,\varphi_{r2}^{*}(t)$ - жорданов набор векторов сопряженной матрицы $A^{*}(t)$. Введем билинейное произведение элементов $u\in U$ на элементы $v\in U^{*}$ по формуле

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i,k=1}^{r}\sum_{j,s=1}^{2} u_{i,j,k,s}(t)\overline{v_{i,j,k,s}(t)} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{2} u_{i,j}(t)\overline{v_{i,j}(t)}.$$

Сопряженный оператор имеет вид

$$L_0^{*} \equiv A^{*}(t) + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(t)\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\tau_{ks}},$$

базисными элементами ядра которого являются $v_{ks}^{*} = \varphi_{k2}^{*}(t)e^{\tau_{ks}}$, $k=1..r$, $s=1,2$.

Для задач (2.12) - (2.14) доказаны следующие теоремы о нормальной и об однозначной разрешимости.

Теорема 2.2. Пусть в пространстве U дано уравнение

$$L_0 u = f(t,\tau), \tag{2.15}$$

где L_0 – основной оператор, $f(t,\tau)\in U$ и выполнены условия 1^0 -5^0. Тогда для разрешимости уравнения (2.15) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы правая часть $f(t,\tau)$ была ортогональна (тождественно по $t\in[0,1]$) ядру сопряженного оператора L_0^{*}.

Лемма 2.3. Пусть в пространстве U дана задача

$$L_0 u_1 = 0, \tag{2.16}$$

$$G u_1 = 0, \tag{2.17}$$

пусть выполнены условия 1^0 - 6^0 и функции $g_{i,j}(t)$, $i=1..r, j=1,2$ являются корнями уравнений (2.3) тождественно по $t\in[0,1]$.
Тогда существует общее решение системы уравнений

$$L_0 u_2 = \sum_{i=1}^{r} L_i u_1,\quad L_0 u_3 = \sum_{i=1}^{r} L_i u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial t}.$$

Теорема 2.3. Пусть в пространстве U дана задача (2.16), (2.17) и выполнены условия леммы 2.3. Тогда задача (2.16) , (2.17) имеет только нулевое решение, если выполнены условия

$$\left\langle \sum_{i=1}^{r} L_i u_3 + \frac{\partial u_2}{\partial t}, v_{ks}^{*}\right\rangle \equiv 0,\ k=1..r, s=1,2,\quad G_0 u_1(M_0)=0,\quad G_1 u_1(M_1)=0.$$

На основании теорем 2.2, 2.3 последовательно решены итерационные задачи (2.12)-(2.14) и доказана теорема об оценке остаточного члена:

Теорема 2.4. Пусть для задачи (2.1), (2.2) выполнены условия 1^0-6^0 и решение задачи (2.8), (2.9) определены в виде степенного ряда (2.7) из пространства U. Тогда сужение ряда (2.7) при $\tau=\psi(t,\varepsilon)$ и $\varepsilon\to 0$ является асимптотическим рядом для решения задачи (2.1), (2.2).
В конце параграфа приведен пример.

В параграфе 2.2 изучается краевая задача (2.1), (2.2), когда матрица *A(t)* имеет тождественно кратный спектр и разрабатывается алгоритм асимптотического интегрирования краевой задачи (2.1), (2.2) при нарушении условия стабильности.

Для изучения задачи (2.1), (2.2) при достаточно малых ε потребуем выполнение следующих условий:

1^0. $A(t)\in C^{\infty}([0,1],C^{n\times n}), h(t)\in C^{\infty}([0,1],C^{n})$;

2^0. Спектр $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^{n}$ матрицы *A(t)* при каждом $t\in[0,1]$ удовлетворяет требованиям:

1) $\lambda_k(t)=\lambda(t), k=1..n$; 2) $\operatorname{Re}\lambda(t)\equiv 0$;

3^0. Матрица имеет жорданову цепочку векторов длины n, т.е.

$\forall t\in[0,1]\qquad A(t)\varphi_1(t)=\lambda(t)\varphi_1(t), A(t)\varphi_i(t)=\lambda(t)\varphi_i(t)+\varphi_{i-1}(t), i=2..n.$

4^0. Каноническая структура матрицы *A(t)*, т.е. $A(t)=\lambda(t)E+T(t)$, где *T(t)* - собственный нильпотент матрицы *A(t),* не меняется на отрезке [0,1];

Производные от собственного и присоединенных векторов разложим по базису $\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)$: $\varphi_i'(t)=\sum_{k=1}^{n}C_i^k(t)\varphi_k(t)$

и будем требовать, чтобы для $C_1^n(t)$ выполнялось условие

$$\forall t\in[0,1]\qquad \operatorname{Re}\sqrt[n]{-C_1^n(t)}\xi^k<0, k=1..n_0,\ \operatorname{Re}\sqrt[n]{-C_1^n(t)}\xi^k>0, k=n_0+1..n,$$

где ξ – первообразный корень n - ой степени из единицы.

5^0. Собственное значение $\lambda(t)$ при каждом $t\in[0,1]$ удовлетворяет требованию:

$$\lambda(t)=a(t)\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j}, a(t)\neq 0.$$

Разложим правую часть *h(t)* по базису $\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)$: $h(t)=\sum_{k=1}^{n}h_k(t)\varphi_k(t)$.

$$h_n(0)=0,$$

6^0. $\lim\limits_{t\to t_j}\dfrac{d^l}{dt^l}\sum_{k=0}^{n-s}(-1)^k\dfrac{h_{k+s}(t)}{\lambda^k(t)}=0,\quad s=1..n-1, j=0..r, l=0..k_j-1.$

7^0. $G_0\varphi_1(0)\neq 0$, $G_1\varphi_1(1)\neq 0$.

Для асимптотического интегрирования краевой задачи (2.1), (2.2), введем дополнительные независимые переменные по формулам:

$$\tau_k=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left[\lambda(x)+\sqrt[n]{\varepsilon}g_{1,k}(x)+...+\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}(x)\right]dx\equiv\psi_k(t,\varepsilon), k=1..n_0, \tag{2.18}$$

$$\tau_k=\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\left[\lambda(x)+\sqrt[n]{\varepsilon}g_{1,k}(x)+...+\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}(x)\right]dx\equiv\psi_k(t,\varepsilon), k=n_0+1..n. \tag{2.19}$$

Пусть $K_{ji}(t), j = 0..r, i = 0..k_j - 1$ базисная система полиномов Лагранжа-Сильвестра относительно многочлена

$$P(t) \equiv \lambda(t)/\alpha(t) = \prod_{j=0}^{r}(t - t_j)^{k_j}.$$

Для описания существенно особых сингулярностей, содержащихся в решении задачи (2.1), (2.2) из-за условия 5^0 введем дополнительные независимые переменные по формулам

$$\sigma_{kji} = e^{\psi_k(t,\varepsilon)}\int_0^t e^{-\psi_k(t,\varepsilon)}K_{ji}(x)dx \equiv \theta_{kji}(t,\varepsilon),$$

$$k = 1..n_0, i = 0..k_j - 1, j = 0..r,$$

$$\sigma_{kji} = e^{\psi_k(t,\varepsilon)}\int_1^t e^{-\psi_k(t,\varepsilon)}K_{ji}(x)dx \equiv \theta_{kji}(t,\varepsilon),$$

$$k = n_0 + 1..n, i = 0..k_j - 1, j = 0..r.$$

Введя обозначения

$$\tau = (\tau_1,...,\tau_n), \psi(t,\varepsilon) = (\psi_1(t,\varepsilon),...,\psi_n(t,\varepsilon)), \{\sigma_{kji}\} = \sigma, \{\theta_{kji}(t,\varepsilon)\} = \theta(t,\varepsilon),$$

вместо искомого решения $y(t,\varepsilon)$ задачи (2.1), (2.2) изучим "расширенную" функцию $u(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$ для которой

$$u(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\Big|_{\substack{\tau=\psi(t,\varepsilon)\\ \sigma=\theta(t,\varepsilon)}} \equiv y(t,\varepsilon).$$

Выделим

$$M_0 = M_0(0,\psi(0,\varepsilon),\theta(0,\varepsilon)), M_1 = M_1(1,\psi(1,\varepsilon),\theta(1,\varepsilon))$$

и для определения расширенной функции $u(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$ получаем следующую задачу

$$\varepsilon\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}K_{ji}(t)\frac{\partial u}{\partial\sigma_{kji}}\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda + \sqrt[n]{\varepsilon}g_{1,k} + ... + \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial u}{\partial\tau_k} + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\sigma_{kji}(t)\frac{\partial u}{\partial\sigma_{kji}}\right] - Au = h, \qquad (2.20)$$

$$G_0 u(M_0,\varepsilon) + G_1 u(M_1,\varepsilon) = y^0 \qquad (2.21)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Задача (2.20), (2.21) является регулярной по малому параметру ε, и ее решение определим в виде степенного ряда

$$u(t,\tau,\sigma,\varepsilon) = \sum_{s=-n_1}^{\infty}\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,s}\,u_s(t,\tau,\sigma), \qquad (2.22)$$

с коэффициентами из пространстве безрезонансых решений

$$U = \{\; u(t,\tau,\sigma) : u = \sum_{m,k=1}^{n}u_{m,k}(t)\varphi_m(t)e^{\tau_k} +$$

$$+\sum_{m,k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}u_{m,k,j,i}(t)\varphi_m\sigma_{kji} + \sum_{m=1}^{n}u_m(t)\varphi_m(t),$$

$$u_{m,k}(t), u_{m,k,j,i}(t), u_m(t) \in C^\infty([0,1],C)\;\}.$$

Теорема 2.5. Пусть для задачи (2.1), (2.2) выполнены условия 1^0-7^0 и решение задачи (2.20), (2.21) определены в виде степенного ряда (2.22) из пространства U. Тогда сужение ряда (2.22) при $\tau=\psi(t,\varepsilon)$, $\sigma=\theta(t,\varepsilon)$ и $\varepsilon \to 0$ является асимптотическим рядом для решения задачи (2.1), (2.2).

Для полноты исследования изучена краевая задача (2.1), (2.2) при выполнении условий 1^0-4^0 из параграфа § 2.2. и дополнительных условий:

5^0.1. Собственное значение $\lambda(t)$ при каждом $t \in [0,1]$ удовлетворяет требованию: $\lambda(t) \equiv 0$.

(Это условие существенное, так как по условию 5^0 § 2.2. собственное значение $\lambda(t) = a(t)\prod_{j=0}^{r}(t - t_j)^{k_j}, a(t) \neq 0$, т.е. равенство к нулю собственного значения допускается только конечное число раз).

6^0.1. $h_n(t) \equiv 0$.

7^0.1. $G_0\varphi_1(0) \neq 0$, $G_1\varphi_1(1) \neq 0$.

Предположим, что векторы $\varphi_k(t) = (\varphi_{1,k}(t),...,\varphi_{n,k}(t)), k = 1..n$, такие, что $\varphi_{i,k}(t) \equiv 0,\ i < k,\ k = 1..n$.

Переходим к изучению краевой задачи (2.1), (2.2). Введем основные регуляризующие переменные по формулам

$$\tau_k = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left[\sqrt[n]{\varepsilon}g_{1,k}(x) + ... + \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}(x)\right]dx \equiv \psi_k(t,\varepsilon), k = 1..n_0,$$

$$\tau_k = \frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\left[\sqrt[n]{\varepsilon}g_{1,k}(x) + ... + \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}(x)\right]dx \equiv \psi_k(t,\varepsilon), k = n_0 + 1..n.$$

Введя обозначения $\tau = (\tau_1,...,\tau_n), \psi(t,\varepsilon) = (\psi_1(t,\varepsilon),...,\psi_n(t,\varepsilon))$, вместо искомого решения $y(t,\ \varepsilon)$ задачи (2.1), (2.2) будем изучать новую "расширенную" функцию $u(t,\tau,\varepsilon)$ такую, что

$$u(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=\psi(t,\varepsilon)} \equiv y(t,\varepsilon).$$

Выделим две точки $M_0 = M_0(0,\psi(0,\varepsilon)), M_1 = M_1(1,\psi(1,\varepsilon))$ и для определения функции $u(t,\tau,\varepsilon)$ поставим следующую задачу

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{\varepsilon}g_{1,k}+\ldots+\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}\right)\frac{\partial u}{\partial \tau_k}-Au=h, \tag{2.23}$$

$$G_0u(M_0,\varepsilon)+G_1u(M_1,\varepsilon)=y^0, \tag{2.24}$$

при $\varepsilon \to 0$. Так как задача (2.23), (2.24) является регулярной по ε при $\varepsilon\to 0$, то естественно ее решение будем определять в виде ряда

$$u(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{s=-n_1}^{\infty}\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,s}\,u_s(t,\tau), \tag{2.25}$$

с коэффициентами из пространства безрезонансных решений

$$U=\left\{\ u(t,\tau):u=\sum_{i,k=1}^{n}u_{i,k}(t)\varphi_i(t)e^{\tau_k}+\sum_{i=1}^{n}u_i(t)\varphi_i(t),u_{i,k}(t),u_i(t)\in C^{\infty}([0,1],C)\ \right\}$$

Теорема 2.6. Пусть для задачи (2.1), (2.2) выполнены условия 1^0-4^0 из § 2.2., 5^0.1-7^0.1 и решения задач (2.23), (2.24) определены в виде степенного ряда (2.25) из пространства U. Тогда сужение ряда (2.5) при $\tau=\psi(t,\varepsilon)$ и $\varepsilon\to 0$ является асимптотическим рядом для решения задачи (2.1), (2.2).

В параграфе 2.4. разработана теория асимптотического интегрирования для сингулярно - возмущенной начальной задачи с двукратным чисто мнимым спектром.

Пусть изучается система двух сингулярно - возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)-A(t)y(t,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\ h(t) \tag{2.26}$$

с начальным условием

$$y(0,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\,y^0. \tag{2.27}$$

В задаче (2.26),(2.27) правые части содержать $\sqrt{\varepsilon}$ для получения ограниченного решения задачи.

Для изучения задачи (2.26), (2.27) при достаточно малых ε потребуем выполнение следующих условий:

1^0. $A(t)\in C^{\infty}([0,a],C^{2x2})$, $h(t)\in C^{\infty}([0,a],C^2)$;

2^0. Спектр $\{\lambda_1(t),\ \lambda_2(t)\}$ матрицы $A(t)$ при каждом $t\in[0,1]$ удовлетворяет требованиям:

1) $\lambda_1(t)\equiv\lambda_2(t)=\lambda(t)$; 2) Re $\lambda(t)\equiv 0$; 3) $\lambda(t)\neq 0$.

3^0. Матрица $A(t)$ имеет жорданову цепочку векторов, т.е.

$A(t)\varphi_1(t)=\lambda(t)\varphi_1(t)$, $A(t)\varphi_2(t)=\lambda(t)\varphi_2(t)+\varphi_1(t)$.

4^0. Каноническая структура матрицы $A(t)$, т.е.

$A(t)=\lambda(t)E+T(t)$,

где $T(t)$ - собственный нильпотент матрицы $A(t)$, не меняется на отрезке $[0,1]$;

Производные от собственного и присоединенного векторов $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ разложим по базису $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$:

$$\varphi'_i(t)=\sum_{k=1}^{n}C^k_i(t)\ \varphi_k(t).$$

Из коэффициентов разложения составим “структурную” матрицу

$$B=\begin{pmatrix} C^1_1(t) & C^1_2(t) \\ C^2_1(t) & C^2_2(t) \end{pmatrix}$$

и будем требовать, чтобы для $C^2{}_1(t)$ выполнялось условие

5^0. $C^2{}_1(t)>0$.

В этом параграфе впервые изучается начальная задача (2.26), (2.27) когда одноклеточная матрица $A(t)$ имеет двукратный спектр и разрабатывается алгоритм асимптотического интегрирования начальной задачи (2.26), (2.27) в случае выполнения условий 1^0-5^0.

Для асимптотического интегрирования начальной задачи (2.26), (2.27), введем дополнительные независимые переменные по формулам:

$$\tau_k=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left[\lambda(x)+\sqrt{\varepsilon}g_k(x)\right]dx\equiv\psi_k(t,\varepsilon),\ k=1,2,$$

где функции $g_k(t)$, $k=1,2$ определяются из итерационных уравнений.

Введя обозначения

$\tau=(\tau_1,\tau_2)$, $\psi(t,\varepsilon)=(\psi_1(t,\varepsilon),\ \psi_2(t,\varepsilon))$

вместо искомого решения $y(t,\varepsilon)$ задачи (2.26), (2.27) будем изучать новую “расширенную” функцию $u(t,\tau,\varepsilon)$ такую, что $u(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)\equiv y(t,\varepsilon)$

Для определения функции $u(t,\tau,\varepsilon)$ поставим следующую задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{2}\left(\lambda+\sqrt{\varepsilon}g_k\right)\frac{\partial u}{\partial \tau_k}-Au=\sqrt{\varepsilon}h, \tag{2.28}$$

$$u(0,0,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\,y^0 \tag{2.29}$$

при $\varepsilon\to 0$. Так как задача (2.26), (2.27) является регулярной по ε при $\varepsilon\to 0$, то естественно ее решение будем определять в виде ряда

$$u(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\ \sqrt{\varepsilon}^{\,s}\,u_s(t,\tau) \tag{2.30}$$

с коэффициентами из пространства безрезонансных решений

$$U=\left\{u(t,\tau):u=\sum_{i,k=1}^{2}u_{i,k}(t)\varphi_i(t)e^{\tau_k}+\sum_{i=1}^{2}u_i(t)\varphi_i(t),u_{i,k}(t),u_i(t)\in C^{\infty}([0,1],C)\right\}$$

Теорема 2.7. Пусть для задачи (2.26), (2.27) выполнены условия 1^0-5^0 и решения задач (2.28), (2.29) определены в виде степенного ряда (2.30) из пространства U. Тогда сужение ряда (2.30) при $\tau=\psi(t,\varepsilon)$ и $\varepsilon\to 0$ является асимптотическим рядом для решения начальной задачи (2.26), (2.27).

Глава 3 посвящена критерию локальной устойчивости аналитического решения начальной задачи для систем двух сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В параграфе 3.1. найдены необходимые и достаточные условия локальной устойчивости аналитического решения начальной задачи для систем двух сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть записаны в алгоритмической форме.

Пусть изучается сингулярно-возмущенная система двух уравнений вида (2.1) с начальным условием

$$y(0,\varepsilon)=y^0, \tag{3.1}$$

Введем дополнительные независимые переменные по формулам:

$$\tau_k=\psi_k(t,\varepsilon), \quad k=1,2,$$

Введя обозначения $\tau=(\tau_1,\tau_2), \psi(t,\varepsilon)=(\psi_1(t,\varepsilon),\psi_2(t,\varepsilon))$, вместо искомого решения $y(t, \varepsilon)$ задачи (2.1), (3.1) будем изучать новую "расширенную" функцию $u(t,\tau,\varepsilon)$ такую, что

$$u(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=\psi(t,\varepsilon)} \equiv y(t,\varepsilon)$$

и функция $u(t,\tau,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ определяется виде ряда

$$u(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{s=-1}^{\infty}\sqrt{\varepsilon}^{\,s}\,u_s(t,\tau), \tag{3.2}$$

с коэффициентами из пространства безрезонансных решений

$$U=\{\ u(t,\tau):u=\sum_{i,k=1}^{2} u_{i,k}(t)\varphi_i(t)e^{\tau_k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}u_k(t)\varphi_k(t),u_{i,k}(t),u_k(t)\in C^{\infty}([0,1],R)\ \}$$

Матрица – функция

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t)\\ a(t) & a_{22}(t)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\sum\limits_{s=0}^{\infty}a_{11s}t^s & \sum\limits_{s=0}^{\infty}a_{12s}t^s\\ \sum\limits_{s=0}^{\infty}a_{21s}t^s & \sum\limits_{s=0}^{\infty}a_{22s}t^s\end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

и вектор-функция

$$h(t)=colon\{h_1(t),h_2(t)\}\equiv colon\{\sum_{s=0}^{\infty}h_{1s}t^s,\ \sum_{s=0}^{\infty}h_{2s}t^s\}, \tag{3.4}$$

заданные функции и y^0 = colon $\{y_1^0, y_2^0\}$ - заданный постоянный вектор.
Из уравнения (2.1) полагая $\varepsilon=0$, получаем следующее невозмущенное уравнение

$$-A(t)w(t)=h(t), \quad t\in[0,T] \tag{3.5}$$

Для изучения решения задачи (2.1), (3.1) используем следующее

Определение 3.1. Решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (2.1), (3.1) называется локально устойчивым в некоторой окрестности точки $t=0$ при $\varepsilon\to 0$, если $(\exists\varepsilon_0>0)$ $(\exists t_0>0)$ $(\exists c>0)$ такие, что $(\forall\varepsilon: 0<\varepsilon<\varepsilon_0)$ $(\forall t: 0\le t\le t_0)$ справедлива оценка

$$\|y(t,\varepsilon)\|<c.$$

Потребуем выполнение условий А):

1. $A(t), h(t)$ – аналитичны в некоторой окрестности точки t=0;
2. Уравнение (3.5) относительно $w(t)$ имеет непрерывные (и тем самым аналитические) решения при [0,T].

Проведем подробный анализ для установления критерия локальной устойчивости решения задачи (2.1), (3.1). Обозначим через k_{ij} – номера первых ненулевых слагаемых в разложениях функций $a_{ij}(t)$ соответственно, через m_i – номера первых ненулевых слагаемых в разложениях функций $h_i(t)$ соответственно, через c_0 – номер первого ненулевого слагаемого в разложении след - функции $c(t)\equiv a_{11}(t)+a_{22}(t)$, через d_0 – номер первого ненулевого слагаемого в разложении определитель - функции $d(t)\equiv a_{12}(t)a_{21}(t)-a_{11}(t)a_{22}(t)$ в ряды по степеням t (если функции $a_{ij}(t)\equiv 0$, $h_i(t)\equiv 0$, $c(t)\equiv 0$, $d(t)\equiv 0$, то положим $k_{ij}\equiv\infty$, $m_i\equiv\infty$, $c_0\equiv\infty$, $d_0\equiv\infty$).

Пусть $k_0=min\,(k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22})$, $m_0=min\,(m_1, m_2)$.

Очевидны следующие утверждения 1., 2.:

1. Если $k_0=\infty$, $m_0=\infty$, то решение задачи (2.1), (3.1) имеет вид $y(t,\varepsilon)=y^0$ и оно устойчиво при $\varepsilon\to 0$;
2. Если $k_0=\infty$, $m_0<\infty$, то решение задачи (2.1), (3.1) имеет вид

$$y(t,\varepsilon)=y^0+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(colon\{h_{1,m_0},h_{2,m_0}\}s^{m_0}+colon\{h_{1,m_0+1},h_{2,m_0+1}\}s^{m_0+1}+\ldots)ds$$

и оно неустойчиво при $\varepsilon\to 0$;

Основу данной работы составляет часть 3.:

3. Если $k_0<\infty$, то рассмотрим (3.3) матрицы

$$A_m(t)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{s=0}^{m}a_{11s}t^s & \sum\limits_{s=0}^{m}a_{12s}t^s\\ \sum\limits_{s=0}^{m}a_{21s}t^s & \sum\limits_{s=0}^{m}a_{22s}t^s\end{pmatrix},\quad m=0,1,2,\ldots$$

Пусть $\lambda_i(t)$, $\lambda_{im}(t)$, $m=0,1,2,\ldots$ – собственные значения матриц $A(t), A_m(t)$, $m=0,1,2,\ldots$

Определение 3.2. Функция $\varphi(t)$ называется квадратично-аналитической по t при $t\in[0,t_0]$, $t_0>0$, если она представима в виде $\varphi(t)=\varphi_1(t)+\sqrt{(t)}\,\varphi_2(t)$, где $\varphi_i(t)$, $i=1,2$ – аналитические функции по t при $t\in[0,t_0]$.

Лемма 3.1. При выполнении условия А) $\exists t_0>0$ такая, что собственные значения $\lambda_i(t)$, $\lambda_{im}(t)$ $m=0,1,2,\ldots$ матриц $A(t), A_m(t)$, $m=0,1,2,\ldots$ являются квадратично-аналитическими функциями по t при $t\in[0,t_0]$.

Определение 3.3. Вещественнозначная функция $\varphi(t)$ называется локально-монотонной по t при $t\to+0$, если $\exists t_0>0$, что функция $\varphi(t)$ имеет определенный знак при $t\in[0,t_0]$,.

Лемма 3.2. Квадратично-аналитические функции являются локально-монотонными функциями по t при $t\to+0$.

Вопросы локальной устойчивости аналитического решения начальной задачи для систем двух сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений полностью решаются в следующих двух теоремах.

Теорема 3.1. Пусть дана задача (2.1), (3.1), выполнено условие А) и $\lambda_i(t)$, $\lambda_{im}(t), m=0,1,2,...$ - собственные значения матриц $A(t), A_m(t)$, $m=0,1,2,...$

Тогда решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (2.1), (3.1) локально устойчиво в некоторой окрестности точки $t=0$ при $\varepsilon\to 0$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $\operatorname{Re}\lambda_{10}(0)<0, \operatorname{Re}\lambda_{20}(0)<0;$

2) $\operatorname{Re}\lambda_{10}(0)<0$ и $(\exists m>0)$ $(\exists t_0>0)$, что

$\forall t\in(0,t_0) \operatorname{Re}\lambda_{2s}(t)\equiv 0, s=0..m-1, \operatorname{Re}\lambda_{2m}(t)<0;$

3) $\operatorname{Re}\lambda_{10}(0)<0$, $(\exists t_0>0)$, что $\forall t\in[0,t_0)$ $\operatorname{Re}\lambda_2(t)\equiv 0;$

4) $(\exists m,p>0)$ $(\exists t_0>0)$, что $\forall t\in(0,t_0)$

$\operatorname{Re}\lambda_{1s}(t)\equiv 0, s=0..m-1, \operatorname{Re}\lambda_{1m}(t)<0,$

$\operatorname{Re}\lambda_{2k}(t)\equiv 0, k=0..p-1, \operatorname{Re}\lambda_{2p}(t)<0$ и $\lambda_1(0)\neq\lambda_2(0);$

5) $(\exists m,p>0)$ $(\exists t_0>0)$, что $\forall t\in(0,t_0)$

$\operatorname{Re}\lambda_{1s}(t)\equiv 0, s=0..m-1, \operatorname{Re}\lambda_{1m}(t)<0,$

$\operatorname{Re}\lambda_{2k}(t)\equiv 0, k=0..p-1, \operatorname{Re}\lambda_{2p}(t)<0,$

$\lambda_1(0)=\lambda_2(0)$ и $\forall t\in[0,t_0)$ $|a_{12}(t)|+|a_{21}(t)|\equiv 0;$

6) $\operatorname{Re}\lambda_1(t)\equiv 0$ и $(\exists m>0)$ $(\exists t_0>0)$, что $\forall t\in(0,t_0)$

$\operatorname{Re}\lambda_{2s}(t)\equiv 0, s=0..m-1, \operatorname{Re}\lambda_{2m}(t)<0,$

$\lambda_1(0)=\lambda_2(0)$ и $\forall t\in[0,t_0)$ $|a_{12}(t)|+|a_{21}(t)|\equiv 0;$

7) $(\exists t_0>0)$, что $\forall t\in[0,t_0)$ $\operatorname{Re}\lambda_1(t)\equiv 0,$

$\operatorname{Re}\lambda_2(t)\equiv 0$ и $\lambda_1(0)\neq\lambda_2(0).$

Теорема 3.2. Пусть дана задача (2.1), (3.1) и $\lambda_i(t)$, $\lambda_{im}(t)$ - собственные значения матриц $A(t), A_m(t), m=0,1,2,...$

Тогда решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (2.1), (3.1) неустойчиво при $\varepsilon\to 0$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $\operatorname{Re}\lambda_{10}(0)>0;$

2) $(\exists m>0)$ $(\exists t_0>0)$, что $\forall t\in(0,t_0)$

$\operatorname{Re}\lambda_{1s}(t)\equiv 0, s=0..m-1, \operatorname{Re}\lambda_{1m}(t)>0$;

3) $(\exists m,p>0)$ $(\exists t_0>0)$, что $\forall t\in(0,t_0)$

$\operatorname{Re}\lambda_{1s}(t)\equiv 0, s=0..m-1, \operatorname{Re}\lambda_{1m}(t)<0,$

$\operatorname{Re}\lambda_{2k}(t)\equiv 0, k=0..p-1, \operatorname{Re}\lambda_{2p}(t)<0,$

$\lambda_1(0)=\lambda_2(0)$ и $\forall t\in(0,t_0)$ $|a_{12}(t)|+|a_{21}(t)|\neq 0;$

4) $\operatorname{Re}\lambda_1(t)\equiv 0$ и $(\exists m>0)$ $(\exists t_0>0)$, что $\forall t\in(0,t_0)$

$\operatorname{Re}\lambda_{2s}(t)\equiv 0, s=0..m-1, \operatorname{Re}\lambda_{2m}(t)<0,$

$\lambda_1(0)=\lambda_2(0), \forall t\in(0,t_0)$ $|a_{12}(t)|+|a_{21}(t)|\neq 0;$

5) $\operatorname{Re}\lambda_1(t)\equiv 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2(t)\equiv 0$

$\lambda_1(0)=\lambda_2(0)$ и $\forall t\in(0,t_0)$ $|a_{12}(t)|+|a_{21}(t)|\neq 0.$

В параграфе 3.2. показано, что необходимые и достаточные условия локальной устойчивости аналитического решения начальной задачи (2.1), (3.1) для систем двух сингулярно - возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть сформулированы с помощью элементов матриц $A(t), A_m(t)$, $m=0,1,2,...$.

Доказаны теоремы о том, что условия на собственные значения $\lambda_i(t), \lambda_{im}(t), i=1,2$, $m=0,1,2,...$ могут быть заменены на условия для элементов матриц $A(t), A_m(t)$, $m=0,1,2,...$. При доказательстве этих теорем использованы следующие следствия из теоремы Виета.

Утверждение 3.1. Пусть даны матрицы $A(t), A_m(t)$, $m=0,1,2,...$, выполнено условие А) и $\lambda_i(t)$, $\lambda_{im}(t)$ - являются собственными значениями матриц $A(t), A_m(t), m=0,1,2,...$.

Тогда справедливы следующие тождества

$$\lambda_{1k}(t)+\lambda_{2k}(t)\equiv\sum_{s=0}^{k}(a_{11s}+a_{22s})t^s, k=0,1,2,...,$$

$$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)\equiv a_{11}(t)+a_{22}(t),$$

$$\lambda_{1m}(t)\lambda_{2m}(t)\equiv\sum_{s=0}^{m}a_{11s}t^s\sum_{s=0}^{m}a_{22s}t^s-\sum_{s=0}^{m}a_{12s}t^s\sum_{s=0}^{m}a_{21s}t^s, m=0,1,2,...,$$

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\equiv a_{11}(t)a_{22}(t)-a_{12}(t)a_{21}(t).$$

Пусть изучается сингулярно - возмущенная начальная задача (2.1), (3.1). Потребуем выполнение условия А) из § 3.1. Для составления алгоритма критерия устойчивости аналитических решений систем линейных сингулярно - возмущенных уравнений сформулируем следующие две теоремы.

Теорема 3.3. Пусть дана задача (2.1), (3.1), выполнено условие А)

Тогда решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (2.1), (3.1) локально устойчиво в некоторой окрестности точки $t=0$ при $\varepsilon\to 0$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $a_{110}+a_{220}<0$ и $a_{110}a_{220}-a_{120}a_{210}>0;$

2) $a_{110}+a_{220}<0,$ $\sum_{i=0}^{s}[a_{11i}a_{22(s-i)}-a_{12i}a_{21(s-i)}]=0, s=0..m-1$ и

$a_{110}a_{22m}+a_{220}a_{11m}-a_{120}a_{21m}-a_{210}a_{12m}>0;$

3) $a_{110}+a_{220}<0$ и $d(t)\equiv 0;$

4) $a_{11j} + a_{22j} = 0, j = 0..k-1, a_{11k} + a_{22k} < 0$ и $a_{110}a_{220} - a_{120}a_{210} > 0$;

5) $a_{11j} + a_{22j} = 0, j = 0..k-1, a_{11k} + a_{22k} < 0$,

$\sum_{i=0}^{s}[a_{11i}a_{22(s-i)} - a_{12i}a_{21(s-i)}] = 0, s = 0..m-1$, $a_{110}a_{22m} + a_{220}a_{11m} - a_{120}a_{21m} - a_{210}a_{12m} > 0$ и $|a_{12}(t)| + |a_{21}(t)| \equiv 0$;

6) $a_{11j} + a_{22j} = 0, j = 0..k-1, a_{11k} + a_{22k} < 0, d(t) \equiv 0$ и $|a_{12}(t)| + |a_{21}(t)| \equiv 0$;

7) $c(t) \equiv 0$ и $a_{110}a_{220} - a_{120}a_{210} > 0$.

Теорема 3.4. Пусть дана задача (2.1), (3.1) и выполнено условие А). Тогда решение *y(t, ε)* задачи (2.1), (3.1) неустойчиво при *ε→0* тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $a_{110} + a_{220} > 0$;

2) $a_{11j} + a_{22j} = 0, j = 0..k-1, a_{11k} + a_{22k} > 0$;

3) $a_{110}a_{220} - a_{120}a_{210} < 0$;

4) $\sum_{i=0}^{s}[a_{11i}a_{22(s-i)} - a_{12i}a_{21(s-i)}] = 0, s = 0..m-1$ и

$a_{110}a_{22m} + a_{220}a_{11m} - a_{120}a_{21m} - a_{210}a_{12m} < 0$;

5) $a_{11j} + a_{22j} = 0, j = 0..k-1, a_{11k} + a_{22k} < 0$,

$\sum_{i=0}^{s}[a_{11i}a_{22(s-i)} - a_{12i}a_{21(s-i)}] = 0, s = 0..m-1$,

$a_{110}a_{22m} + a_{220}a_{11m} - a_{120}a_{21m} - a_{210}a_{12m} > 0$ и $|a_{120}| + |a_{210}| \neq 0$;

6) $a_{11j} + a_{22j} = 0, j = 0..k-1, a_{11k} + a_{22k} < 0$, $d(t) \equiv 0$ и $|a_{120}| + |a_{210}| \neq 0$;

7) $c(t) \equiv 0$, $\sum_{i=0}^{s}[a_{11i}a_{22(s-i)} - a_{12i}a_{21(s-i)}] = 0, s = 0..m-1$ и

$a_{110}a_{22m} + a_{220}a_{11m} - a_{120}a_{21m} - a_{210}a_{12m} > 0$;

8) $c(t) \equiv 0$ и $d(t) \equiv 0$.

В параграфе 3.3. показано, что необходимые и достаточные условия локальной устойчивости аналитического решения начальной задачи (2.1), (3.1) для систем двух сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть сформулированы в алгоритмической форме на основе операций над матрицами $A(t), A_m(t), m = 0,1,2,...$

В качестве приложения приведены основные идеи метода регуляризации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы надеемся, что с помощью развитой методики также можно будет алгоритмизировать другие теории динамических систем. Также с помощью разработанной теории асимптотического интегрирования краевой задачи с кратным спектром можно исследовать сингулярно - возмущенные интегро-дифференциальные уравнения.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному консультанту академику НАН Кыргызской Республики М. И. Иманалиеву за полезные обсуждения при выполнении данной работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора:

1. Джураев А.М. Краевая задача с нестабильным спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Бишкек: Илим, 1992. Вып.24. - С. 193-197.
2. Джураев А.М. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач // Тез. докл. науч.-теор. конф. Иссык-кульского гос. ун-та. - Каракол: Иссик-Кульск. гос. ун-т, 1993. - С. 4
3. Джураев А.М. Сингулярно возмущенная задача Коши с нестабильным спектром // Тез. докл. республ. науч. конф. - Ош: Ошск. гос. ун-т, 1993. – С. 43.
4. Джураев А.М. Об одной сингулярно возмущенной задаче Коши // Тез. докл. республ. науч. конф. - Ош: Ошск. гос. ун-т, 1993. – С. 44.
5. Джураев А.М. Сингулярно возмущенная задача Коши с нестабильным спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,1994. - Вып.25. - С. 7-10.
6. Джураев А.М. Регуляризующие функции, сохраняющие гладкость коэффициентов сингулярно возмущенной системы // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,1994. - Вып.25. - С. 11-12.
7. Джураев А.М. Сингулярно возмущенная краевая задача // Тез. докл. междунар. науч.-практ. конф. - Ош: Ошск. высший колледж,1995. - С. 105.
8. Джураев А.М. Об одной сингулярно возмущенной нелинейной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып.27. - С. 180-184.
9. Джураев А.М., Атабаев С.К. Сингулярно возмущенная краевая задача для системы дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып.27. - С. 185-189.

10. Джураев А.М. Краевая задача в случае спектральных особенностей предельного оператора // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып.27. - С.190-194.
11. Джураев А.М., Туратов С.Д. Краевая задача с нестабильным кратным спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып.27. - С. 195-199.
12. Иманалиев М.И., Джураев А.М. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенной задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып.27. - С. 11-15.
13. Иманалиев М.И., Джураев А.М. Сингулярно возмущенная задача для нелинейного уравнения // Науч. тр. Ошск. гос. ун-та. Физ. - мат. науки. -Ош: Ош ГУ, 1999. - Вып.2.– С. 107 - 111.
14. Иманалиев М.И., Джураев А.М. О нелинейной задаче с однородным начальным условием для дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,1999. - Вып.28. - С. 3-7.
15. Dzhuraev A.M. A problem with a multiple pure imaginary spectrum // I^{st} Turkish world mathematics symposium. – Elazig: Firat University,1999. - P.124-127.
16. Джураев А.М. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач с кратным спектром. – Ош: Ошск. техн. ун-т, 1999. – 108 с.
17. Джураев А.М., Туратов С.Д. Асимптотическое интегрирование краевой задачи с помощью полиномов Лагранжа-Сильвестра // Мат-лы междунар. науч.-практ. конф.. –Ош: Ошский высший колледж, 1999. – С. 180-186.
18. Джураев А.М. Краевая задача для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с чисто мнимым спектром // Науч. тр. Ошск. гос. ун-та. Физ. - мат. науки. Ош: Ош ГУ, 1999. - Вып.2. – С. 77 - 82.
19. Джураев А.М., Туратов С.Д. Сингулярно возмущенная задача Коши для дифференциального уравнения с особыми точками // Науч. тр. Ошск. гос. ун-та. Физ. - мат. науки. Ош: Ош ГУ, 1999. - Вып.2. – С. 83 - 88.
20. Джураев А.М. Краевая задача для дифференциального уравнения с чисто мнимым спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,1999. - Вып.28. - С. 212-216.
21. Джураев А.М., Аблакимов У.А. Ряды Лорана для решений сингулярно возмущенных задач с кратным спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,1999. - Вып.28. - С. 217-222.
22. Джураев А.М., Атабаев С.К. Дифференциальные уравнения с нестабильным спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,1999. - Вып.28. - С. 223-227.

23. Джураев А.М., Туратов С.Д. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенной задачи для нелинейного дифференциального уравнения // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,1999. - Вып.28. - С. 228-232.
24. Джураев А.М., Аблакимов У.А. Асимптотика вырождающихся сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с начальным условием // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2000. - Вып.29. - С. 67-71.
25. Джураев А.М. Асимптотическое интегрирование задачи с нестабильным спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2000. - Вып.29. - С. 219-223.
26. Джураев А.М. Развитие метода регуляризации для задач с мнимым спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2000. - Вып.29. - С. 224-228.
27. Джураев А.М., Джураев М. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2000. - Вып.29. - С. 229-233.
28. Джураев А.М. Задача Коши для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с нестабильным спектром // Тр. междунар. науч. конференции. - Бишкек: Кыргызск. гос. нац. ун-т, 2000.- С. 152-155.
29. Джураев А.М. Нелинейная сингулярно возмущенная задача с кратным спектром // Вестн. Кыргызск. гос. нац. ун-та. Серия 3. Естественно-техн. науки. – 2001. - Вып. 5. - С. 189-192.
30. Джураев А.М. Теоремы разрешимости для нелинейной задачи с кратным спектром // Сб. науч. тр. Кыргызск.-Узбекск. ун-та. - Ош: КУУ,2001. - Вып.2. - С. 171-176.
31. Джураев А.М. Критерий локальной устойчивости аналитического решения начальной задачи для систем двух сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Кыргызск. гос. нац. ун-та. Серия 3. Естественно-техн. науки. – 2001. - Вып. 6. - С. 177-180.
32. Джураев А.М. Устойчивость решения сингулярно-возмущенной задачи Коши. // Науч. тр. Ошск. гос. ун-та. Физ. - мат. науки. - Ош: ОшГУ, 2001. - С. 44-46.
33. Джураев А.М., Туратов С.Д. Асимптотическое интегрирование краевой задачи для дифференциальных уравнений с кратным спектром // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2003. - Том 9. - Вып. 1. - С. 77-81.
34. Джураев А.М. О состоянии современной теории возмущений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,2003. - Вып.32. – С. 154-158.

35. Джураев А.М. Краевая задача для сингулярно – возмущенного дифференциального уравнения с нулевым кратным спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,2003. - Вып.32. – С. 159-161.
36. Джураев А.М., Туратов С.Д. Леммы о квадратично-аналитических и локально-монотонных функциях в теории локальной устойчивости аналитического решения начальной задачи // Наука и образование: Материалы V Международной научной конференции: В 4 ч. Белово: Беловский полиграфист, 2004. Ч. 4. - С. 499-501.
37. Джураев А.М. Новый признак сходимости числовых рядов // Наука и образование: Материалы V Международной научной конференции: В 4 ч. / Кемеровский государственный университет. Беловский институт (филиал). Белово: Беловский полиграфист, 2004. Ч. 4. - С. 493-495.
38. Джураев А., Жораев А. О построении решения сингулярно-возмущенного уравнения с кратным нулевым спектром // Наука и образование: Материалы V Международной научной конференции: В 4 ч. Белово: Беловский полиграфист, 2004. Ч. 4. - С. 495-499.
39. Джураев А.М. Современное состояние теории сингулярных возмущенных уравнений // Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Часть 3. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2004. - С. 79-82.
40. Джураев А.М. Алгоритм для определения асимптотического поведения решений систем дифференциальных уравнений// Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Часть 3. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2004. - С. 82-85.
41. Джураев А.М., Туратов С.Д. Краевые задачи для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с кратным спектром// Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Часть 3. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2004. - С. 85-88.
42. Джураев А.М. Об асимптотических методах для анализа математических моделей// Сборник материалов международной научно-технической конференции "Наука и образование - 2004". – Мурманск: МГТУ, 2004. - С. 234-236.
43. Джураев А.М. Алгоритм критерия устойчивости решения систем линейных сингулярно - возмущенных дифференциальных уравнений// Сборник материалов международной научно-технической конференции "Наука и образование - 2004". – Мурманск: МГТУ, 2004. - С. 236-239.
44. Джураев А.М. Новые информационные технологии в теории устойчивости решения сингулярно - возмущенных уравнений//

Вестник Ошского государственного университета. Специальный выпуск. Естественные науки. Часть 2. – Ош: ОшГУ, 2004. - С. 129-131.
45. Джураев А.М. Краевые задачи для систем сингулярно–возмущенных дифференциальных уравнений с кратным спектром// Известия Челябинского научного центра. Выпуск 1. – Челябинск: ЧелНЦ, 2005. - С. 7-12.
46. Джураев А.М. Начальная задача для систем двух сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с кратным чисто мнимым спектром // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 2 (36). - С. 34-42
47. Джураев А.М., Жораев А., Кокоев К. Краевые задачи для систем сингулярно–возмущенных дифференциальных уравнений с кратным спектром// Тезисы докладов Международной научной конференции «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики». – Алматы: КазНУ им. Аль-Фараби, 2005. - С. 72.
48. Джураев А.М., Туратов С.Д. Краевая задача для сингулярно–возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с кратным спектром с ненулевой действительной частью // II международная научная конференция «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике». – Бишкек, 2006.
49. Dzhuraev A.M. Singular-perturbed boundary-value problems with a multiple pure imaginary spectrum // International conference on Spectral Theory and Global Analysis. – Oldenburg, Germany, 2006. – P.3-5.
50. Dzhuraev A.M. A problem with a multiple spectrum // International Congress of Mathematicians. Daily News. Madrid, Spain, 2006. - P. 9.
51. Dzhuraev A.M. Singular-perturbed boundary-value problems with a multiple pure imaginary spectrum //3rd International Conference on 21st Century Mathematics. - Lahore, Pakistan, 2007. – P.23-24.
52. Dzhuraev A.M. Asymptotical methods for the analysis of the mathematical models // Proceedings of the international conference "The theory of functions and computing methods". – Astana, Kazakhstan, 2007. – P. 84-88.
53. Джураев А.М. Теория асимптотического интегрирования для начальной задачи в расширенной области устойчивости //Математика в высшей школе. – Ереван, 2007. Том 3, №1. - С. 27-36.
54. Джураев А.М. Существование и единственность решения краевой задачи для сингулярно-возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения с кратным спектром // Вестник Ошского государственного университета. Специальный выпуск. Естественные науки. Часть 2. – Ош: ОшГУ, 2008. - С. 179-182.