2008-398

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.07.362

На правах рукописи

УДК 517.986.64

Абдылдаева Эльмира Файзулдаевна

Применение интегро-дифференциальных уравнений к решению задач интегральной геометрии в критических случаях

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек-2008

Работа выполнена в Институте математики НАН Кыргызской Республики

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Асанов А.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Омуров Т.Д.**

кандидат физико-математических наук, доцент **Ишмахаметов К.И.**

Ведущая организация Кыргызский Государственный технический университет им.И.Раззакова, 720044, г.Бишкек, пр.Мира-66.

Защита состоится «23» сентября 2008 г. в 16⁰⁰ часов на заседании Диссертационного Совета Д01.07.362 по защите диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук в Институте математики НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан «22» августа 2008г

Ученый секретарь Диссертационного совета,
д.ф.-м.н., с.н.с. Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Многие задачи геофизики, гравиметрии, геодезии, томографии, химии, техники и медицины приводятся к задачам интегральной геометрии. Задачами интегральной геометрии называются задачи восстановления функции через известные значения интегралов от нее и весовых функций, заданных на семействе кривых или поверхностей.

Задачи интегральной геометрии рассматривались в начале двадцатого века с введением Радоном преобразования, которое ставит в соответствие функции ее интегралы по всевозможным гиперплоскостям и решением обратную задачу с семействами всевозможных гиперплоскостей в n–мерном пространстве. Р.Курантом решена задача интегральной геометрии для семейств сфер произвольного радиуса, центры которых пробегают множество точек фиксированной гиперплоскости, а для семейств сфер фиксированного радиуса Ф.Йоном. Для случая задачи интегральной геометрии для геодезических римановой метрики в двумерном пространстве Р.Г.Мухометов доказал теорему единственности.

Для более сложных геометрических объектов, задачи интегральной геометрии начали изучаться после обнаружения связи между задачами интегральной геометрии и многомерными обратными задачами для дифференциальных уравнений. Впервые внимание на эту связь было обращено М.М.Лаврентьевым и В.Г.Романовым. Ими был построен ряд примеров, в которых исследование обратных задач для уравнения гиперболического типа сведено к задачам интегральной геометрии. И, наоборот, многие задачи интегральной геометрии сводятся к интегро-дифференциальным уравнениям.

Первый результат по интегральной геометрии для двухпараметрического семейства кривых, лежащих внутри единичного круга в двумерном пространстве, инвариантного относительно группы вращений, был получен В.Г.Романовым. Затем этот результат был обобщен на случай семейств эллипсов и эллипсоидов. М.М. Лаврентьев решил задачу интегральной геометрии по семейству парабол и по внутренним частям парабол с весом, задачу отыскания функции по сферическим средним, задачу интегральной геометрии по семейству многообразий, инвариантном относительно группы преобразований пространства. В наиболее общем виде инвариантные весовые функции содержат разность независимой переменной и переменной интегрирования.

Вопросы существования и единственности решения задач интегральной геометрии для семейств кривых и конусов, сводящихся к операторным уравнениям Вольтерра первого рода в шкалах банаховых пространств исследованы А.Асановым в некритических случаях (когда знаменатель в возникающем уравнении не обращается в нуль).

В вышеперечисленных работах не рассматривались задачи интегральной геометрии с неинвариантными весовыми функциями в критических случаях (когда знаменатель в возникающем уравнении обращается в нуль). Поэтому исследование вопросов существования и единственности решения задачи интегральной геометрии с неинвариантными весовыми функциями в критических случаях является актуальным вопросом в теории задач интегральной геометрии.

Цель работы определяется актуальностью темы, следовательно, ***задачами исследования*** являются:

- задачи интегральной геометрии на плоскости с неинвариантными весовыми функциями в критических случаях, при этом доказать существование и единственность решения этих задач;
- задачи интегральной геометрии в пространстве с неинвариантными весовыми функциями в критических случаях, при этом доказать существование и единственность решения указанных задач;
- многомерные задачи интегральной геометрии с неинвариантными весовыми функциями, при этом доказать существование и единственность решения этих задач.

Новизна работы определяется указанными выше задачами, которые в данной постановке ранее не исследовались.

Связь темы диссертации. Диссертация выполнялась в рамках научно-исследовательского проекта "Возмущенные дифференциальные уравнения и их приложения. Методы решения некорректных задач математической физики" Института математики НАН КР № Гос.регистрации 0000566, результаты включены в заключительный отчет 2000 г.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер. Развитые в ней методы могут быть использованы для решения других классов задач интегральной геометрии.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту. Установлены достаточные условия:

- существования и единственности решения задачи интегральной геометрии для семейств ломаных отрезков и семейств кривых на плоскости с неинвариантными весовыми функциями в критических случаях;
- существования и единственности решения задачи интегральной геометрии для семейств пространственных кривых и семейств конусов в пространстве с неинвариантными весовыми функциями в критических случаях;
- существованияя и единственности решения многомерной задачи интегральной геометрии для семейств пространственных кривых и семейств конусов с неинвариантными весовыми функциями.

Личный вклад соискателя. Постановка задач и обсуждение полученных результатов проводились при непосредственном участии научного руководителя д.ф.-м.н., профессора А.Асанова. Сами результаты получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Результаты работы докладывались и обсуждались: на семинарах лаборатории обратных задач Института математики НАН КР (2008 г.); на семинаре кафедры естественных

наук Кыргызско-турецкого университета «Манас» (2008г.); Международной научной конференции «Проблемы математики и информатики в XXI веке», (г.Бишкек,2000); IV научно-технической конференции, посвященной 5-летию Чуйского университета, (г. Бишкек,1997); Международной научно-практической конференции "Связь-2004". (Бостери).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в статьях [1-8], приведенных в конце автореферата. В совместных работах с А.Асановым [5-8] постановки задачи принадлежат ему, а результаты - автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из списка используемых обозначений и определений, введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения, списка использованных источников из 72 названий. Работа изложена на 113 страницах текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано обоснование тематики и общая характеристика работы. В общем работа состоит из трех глав. Начиная со второй главы в сформулированных теоремах введены известные постоянные $M_i, M_i', (i=\overline{0,4})$, которые определяются через нормы заданных функций и их производных, указанные в соответствующих параграфах. Поэтому для кратности записи, в теоремах эти определения не приведены, а даются только эти обозначения: $0 < M_i, M_i' = const, (i=\overline{0,4})$.

В первой главе дается краткий обзор литературы по задачам интегральной геометрии на плоскости и в пространстве, сводящихся к интегральным уравнениям, также преобразование Фурье и его свойства.

Вторая глава посвящена исследованию задач интегральной геометрии на плоскости с неинвариантными весовыми функциями в критических случаях.

В § 2.1 рассматривается задача интегральной геометрии на полосе $D=\{(\xi,\eta): \xi \in R, \eta \in [0,h], \quad h>0\} \subset R^2$ с семействами ломаных отрезков

$$\gamma(x,y)=\begin{cases}\xi = x-(y-\eta), & 0 \le \eta \le y,\\ \xi = x+(y-\eta), & 0 \le \eta \le y.\end{cases}$$

Для весовой функции $a(x,y,\xi,\eta)$ и функции $u(\xi,\eta)$ положим:

$$Au \equiv \int\limits_{\gamma(x,y)} a(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)ds = g(x,y), \quad (x,y)\in D, \tag{1}$$

где ds - элемент длины ломаной $\gamma(x,y)$.

Это уравнение можно переписать в виде:

$$\sqrt{2}\int\limits_0^y \{a(x,y,x-(y-\eta)u(x-(y-\eta),\eta)+a(x,y,(x+(y-\eta),\eta)u(x+(y-\eta),\eta)\}d\eta = g(x,y),$$

$$(x,y)\in D. \tag{2}$$

Требуется по функции $g(x,y)$ восстановить функцию $u(x,y)$.

Предположим, что функция $a(x,y,\xi,\eta)$ представима в виде

$$a(x,y,\xi,\eta)=a_0(x-\xi,y,\eta)+a_1(x,y,\xi,\eta) \tag{3}$$

и применив преобразования Фурье по переменной x, имеем:

$$\hat{A}\hat{u}=\sqrt{2}\int_0^y\{a_0(y-\eta,y,\eta)e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\hat{u}(\lambda,\eta)+a_0(\eta-y,y,\eta)e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\hat{u}(\lambda,\eta)+e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\times$$
$$\times[\hat{a}_1(\lambda,y-\eta,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)]+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}[\hat{a}_1(\lambda,\eta-y,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)]\}d\eta=\hat{g}(\lambda,y),\ (\lambda,y)\in D. \tag{4}$$

Обозначим через $L_s^p(R)$, $p\geq 1$, $s\in(b_1;b_2)$, $-\infty\leq b_1\leq b_2\leq\infty$ пространство функций $u(x)$, измеримых на R и таких, что $\|u(x)\|_{p,s}^p=\int_{-\infty}^{\infty}e^{p|s|}|u(x)|^p dx<\infty$.

Семейство $L_s^p(R)$, $p\geq 1$, $s\in(b_1,b_2)$ образует шкалу банаховых пространств.

Пусть выполняются следующие условия:

а) $a_0(z,y,\eta)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция по y в области $\overline{G}_1=[-h;h]\times\overline{G}$, где $G=\{(y,\eta):0<\eta<y<h\}$ и $a_0(0,y,y)\equiv 0$, $a_1(x,y,x,y)\equiv 0$, $W(y)=a'_{0,2}(0,y,y)\geq\alpha>0$ при $y\in[0;h]$;

б) существует число $b\in(0,\infty)$ такое, что для фиксированных z,y,η, где $z\in[-h;h]$, $(y,\eta)\in\overline{G}$, $\gamma_0=\left[\sup_{y\in[0,h]}\frac{1}{a'_{0,2}(0,y,y)}\|\hat{a}'_{1,3}(\lambda,0,y,y)\|_{1,b}\right]<1$ и функции $\hat{a}_1(\lambda,z,y,\eta)$, $\hat{a}'_{1,y}(\lambda,z,y,\eta)$, $\hat{a}'_{1,z}(\lambda,z,y,\eta)$, $\hat{a}''_{1,yy}(\lambda,z,y,\eta)$, $\hat{a}''_{1,yz}(\lambda,z,y,\eta)$, $\hat{a}''_{1,zz}(\lambda,z,y,\eta)$ являются элементами из $L_b^1(R)$;

в) для любого $y,\eta\in\overline{G}$ выполняются условия $|a_0(\pm(y-\eta),y,\eta)|\leq C_0(y-\eta)$, $\|\hat{a}_1(\lambda,\pm(y-\eta),y,\eta)\|_{1,b}\leq C_1(y-\eta)$, где C_0 и C_1 - постоянные числа.

Дважды дифференцируя уравнение (4) по y, и разделив на $W(y)=2a'_{0,2}(0,y,y)$ получим уравнение

$$\hat{u}(\lambda,y)+(K_0\hat{u})(\lambda,y)+\int_0^y[(K_1\hat{u})(\lambda,y,\eta)+(K_2\hat{u})(\lambda,y,\eta)+(K_3\hat{u})(\lambda,y,\eta)]d\eta=\frac{\hat{g}''_{yy}(\lambda,y)}{\sqrt{2}W(y)}, \tag{5}$$

где $(K_0\hat{u})(\lambda,y)=[W_1(\lambda,y)*\hat{u}(\lambda,y)]/W(y)$, $W_1(y)=2\hat{a}'_{1,3}(\lambda,0,y,y)$, (6)

$$(K_1\hat{u})(\lambda,y,\eta)=\frac{1}{W(y)}\left\{\left[e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_0(y-\eta,y,\eta))+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_0(\eta-y,y,\eta))\right]\hat{u}(\lambda,\eta)+\right.$$
$$\left.+e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\hat{a}_1(\lambda,y-\eta,y,\eta))*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\hat{a}_1(\lambda,\eta-y,y,\eta))*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]\right\}; \tag{7}$$

$$(K_2\hat{u})(\lambda,y,\eta)=\frac{(-4\pi i\lambda)}{W(y)}\left\{\left[e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\frac{\partial}{\partial y}(a_0(y-\eta,y,\eta))+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\frac{\partial}{\partial y}(a_0(\eta-y,y,\eta))\right]\hat{u}(\lambda,\eta)+\right.$$
$$\left.+e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\hat{a}_1(\lambda,y-\eta,y,\eta))*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\hat{a}_1(\lambda,\eta-y,y,\eta))*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]\right\}; \tag{8}$$

$$(K_3\hat{u})(\lambda,y,\eta)=\frac{(-2\pi i\lambda)^2}{W(y)}\{[e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}a_0(y-\eta,y,\eta)+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}a_0(\eta-y,y,\eta)]\hat{u}(\lambda,\eta)+$$
$$+e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}[\hat{a}_1(\lambda,y-\eta,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)]+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}[\hat{a}_1(\lambda,\eta-y,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)]\}. \tag{9}$$

Применяя обращение операторов $(I+K_0)$, из (5) получаем следующее

$$\hat{u}(\lambda,y)+(K_4\hat{u})(\lambda,y)+\int_0^y(I+K_0)^{-1}[(K_2\hat{u})(\lambda,y,\eta)+(K_3\hat{u})(\lambda,y,\eta)]d\eta=$$
$$=(I+K_0)^{-1}\hat{g}''_{yy}(\lambda,y)/\sqrt{2}W(y), \tag{10}$$

где $(K_4\hat{u})(\lambda,y)=\int_0^y(I+K_0)^{-1}(y)[(K_1\hat{u})(\lambda,y,\eta)]d\eta$. (11)

Из (5)- (9) вытекают следующие оценки

$$\|(I+K_0)^{-1}(y)(K_1\hat{u})(\lambda,y,\eta)\|_{p,s'}\leq M_0\|\hat{u}(\lambda,\eta)\|_{p,s},\quad p\geq 1, \tag{12}$$

$$\|(I+K_0)^{-1}(y)(K_2\hat{u})(\lambda,y,\eta)\|_{p,s'}\leq M_1(s-s')^{-1}\|\hat{u}(\lambda,\eta)\|_{p,s}, \tag{13}$$

$$\|(I+K_0)^{-1}(y)(K_3\hat{u})(\lambda,y,\eta)\|_{p,s'}\leq M_2(s-s')^{-2}(y-\eta)\|\hat{u}(\lambda,\eta)\|_{p,s}, \tag{14}$$

где $s,s'\in(b_1,b_2)$, $s'<s$. $M_0=\frac{1}{1-\gamma_0}\frac{1}{\alpha}\left\{\sup_{(z,y,\eta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_0(z,y,\eta)\right)+\sup_{(z,y,\eta)}\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\hat{a}_1(\lambda,z,y,\eta)\right\|_{1,|s|}\right\}$;

$$M_1=\frac{1}{1-\gamma_0}\frac{8\pi}{\alpha}\left\{\sup_{(z,y,\eta)}\left(\frac{\partial}{\partial y}(a_0(z,y,\eta)\right)+\sup_{(z,y,\eta)}\left\|\frac{\partial}{\partial y}(\hat{a}_1(\lambda,z,y,\eta)\right\|_{1,|s|}\right\};$$

$$M_2=\frac{1}{1-\gamma_0}\frac{8\pi^2}{\alpha}\left\{\sup_{(z,y,\eta)}((a_0(z,y,\eta))+\sup_{(z,y,\eta)}\|(\hat{a}_1(\lambda,z,y,\eta)\|_{1,|s|}\right\}.$$

Учитывая эти оценки, уравнение (10) сводится к виду

$$\hat{u}(\lambda,y)+\int_0^y(K_5\hat{u})(\lambda,y,\eta)d\eta=g_1(\lambda,y),\quad(\lambda,y)\in D. \tag{15}$$

где $(K_5\hat{u})(\lambda,y,\eta)=(I+K_4)^{-1}(I+K_0)^{-1}[(K_2\hat{u})(\lambda,y,\eta)+(K_3\hat{u})(\lambda,y,\eta)]$, (16)

$$g_1(\lambda,y)=(I+K_4)^{-1}(I+K_0)^{-1}\hat{g}''_{yy}(\lambda,y)/\sqrt{2}W(y). \tag{17}$$

Обозначим $B_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R)$, $p\geq 1$, $\alpha,\beta\in[-b;b]$, $\alpha<\beta$ - банахово пространство функций $u(x,y)$, которые для всякого $s\in[\alpha,\beta]$ являются такими непрерывными функциями по y, $x\in R$, $0<y<\theta(\beta-s)$, со значениями в $L_s^p(R)$, что норма

$$N_p[u]=\sup_{\substack{0<y<\theta(\beta-s)\\ \alpha\leq s<\beta}}\{\|u(x,y)\|_{p,s}(\theta(\beta-s)/y-1)\}<\infty. \tag{18}$$

Здесь θ - положительная константа.

Из (15) и (18) вытекает следующая оценка

$$\|(K_5\hat{u})(\lambda,y,\eta)\|_{p,s'}\leq(M_1(s-s')^{-1}+M_2(s-s')^{-2}(y-\eta))\|\hat{u}(\lambda,\eta)\|_{p,s},\quad p\geq 1. \tag{19}$$

В результате доказаны:

Теорема 1. Пусть выполняются условия а), б), в). $\alpha,\beta\in(-b;b)$, $\alpha<\beta$, $\hat{g}(\lambda,0)=0$, $\hat{g}'_y(\lambda,0)=0$, $\lambda\in R$, $\hat{g}'_y(\lambda,y)$, $\hat{g}''_{yy}(\lambda,y)\in B_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R)$, $p\geq 1$ и число $\theta>0$, такое, что $\gamma(\theta)=4M_1\theta+8M_2\theta^2<1$ где M_1,M_2 - известные постоянные, определяемые через нормы заданных функций и их производных, тогда в пространстве $B_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R)$ существует единственное решение уравнения (4).

Теорема 2. Если выполняются условия а), б), в), $\alpha,\beta\in(-b;b),\alpha<\beta$, $g(x,0)=0,\ g'_y(x,0)=0,\ x\in R$, $g'_y(x,y),\ g''_{yy}(x,y)\in \bar{B}^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$ и число $\theta>0$, такое, что $\gamma(\theta)=4M_1\theta+8M_2\theta^2<1$, где M_1,M_2 - известные постоянные, определяемые через нормы заданных функций и их производных, то в $\bar{B}^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$ существует единственное решение уравнения (2), где $\bar{B}^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$ - множество образов всех функций, при преобразовании Фурье приналлежащих к $B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$.

Пример. Пусть в полосе D заданы семейство ломанных $\gamma(x,y)$, функция $a(x,y,\xi,\eta)=a_0(x-\xi,y,\eta)+a_1(x,y,\xi,\eta)$,

где $a_0(x,y,\eta)=y-\eta$, $\quad a_1(x,y,\eta)=\begin{cases}(y-\eta)^2\dfrac{\sin 2\pi x}{\pi x}, & при\ x\neq 0\\ 2(y-\eta)^2, & при\ x=0\end{cases}$,

и $$g(x,y)=\frac{i}{\sqrt{\pi}}\left\{y\left(e^{-2\pi^2(x+y)^2}-e^{-2\pi^2(x-y)^2}\right)+\int_{x-y}^{x}e^{-2\pi^2\tau^2}d\tau-\int_{x}^{x+y}e^{-2\pi^2\tau^2}d\tau\right\}-$$
$$-4\sqrt{\pi}i\int_{x-y}^{x+y}(x-\tau)^2\sin 2\pi\tau\, e^{-2\pi^2\tau^2}d\tau .$$

Для этих функций и функции $u(x,y)$ положим

$$Au=\sqrt{2}\int_0^y\Big\{(y-\eta)\big(u(x-(y-\eta),\eta)+u(x+(y-\eta),\eta)\big)+(y-\eta)^2\left[\frac{\sin 2\pi(x-(y-\eta))}{\pi(x-(y-\eta))}\times\right.$$
$$\left.\times u(x-(y-\eta),\eta)+\frac{\sin 2\pi(x+(y-\eta))}{\pi(x+(y-\eta))}u(x+(y-\eta),\eta)\right]\Big\}d\eta=$$
$$=\frac{i}{\sqrt{\pi}}\left\{y\left(e^{-2\pi^2(x+y)^2}-e^{-2\pi^2(x-y)^2}\right)+\int_{x-y}^{x}e^{-2\pi^2\tau^2}d\tau-\int_{x}^{x+y}e^{-2\pi^2\tau^2}d\tau\right\}-$$
$$-4\sqrt{\pi}i\int_{x-y}^{x+y}(x-\tau)^2\sin 2\pi\tau\, e^{-2\pi^2\tau^2}d\tau . \qquad (20)$$

Требуется по заданной функции $g(x,y)$ восстановить функцию $u(x,y)$. Вычисляем преобразование Фурье по переменной x для функции $a_1(x,y,\xi,\eta)$ и $g(x,y)$:

$$\hat{a}_1(\lambda,y,\eta)=\begin{cases}(y-\eta)^2, & если\ \ \lambda\in[-1;1]\\ 0, & если\ \ \lambda\notin[-1;1]\end{cases};$$

$$\hat{g}(\lambda,y)=2\sqrt{2}\left\{\left(-\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\right)\left[\frac{y}{2\pi\lambda}\sin 2\pi\lambda y-\frac{1}{4\pi^2\lambda^2}(1-\cos 2\pi\lambda y)\right]+\right.$$
$$\left.+\left(e^{-\frac{(\lambda+1)^2}{2}}-e^{-\frac{(\lambda-1)^2}{2}}\right)\left[\frac{y^2}{\pi\lambda}\sin 2\pi\lambda y+\frac{y}{\pi^2\lambda^2}\cos 2\pi\lambda y-\frac{1}{2\pi^3\lambda^3}\sin 2\pi\lambda y\right]\right\}.$$

Напишем уравнение (4):

$$A\hat{u}=\int_0^y\Big\{(y-\eta)\cos 2\pi\lambda(y-\eta)\hat{u}(\lambda,\eta)+$$
$$+\cos 2\pi\lambda(y-\eta)\cdot\left[\begin{cases}(y-\eta)^2, & если\ \lambda\in[-1;1]\\ 0, & если\ \lambda\notin[-1;1]\end{cases}*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]\Big\}d\eta=$$
$$=\left\{\left(-\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\right)\left[\frac{y}{2\pi\lambda}\sin 2\pi\lambda y-\frac{1}{4\pi^2\lambda^2}(1-\cos 2\pi\lambda y)\right]+\right.$$
$$\left.+\left(e^{-\frac{(\lambda+1)^2}{2}}-e^{-\frac{(\lambda-1)^2}{2}}\right)\left[\frac{y^2}{\pi\lambda}\sin 2\pi\lambda y+\frac{y}{\pi^2\lambda^2}\cos 2\pi\lambda y-\frac{1}{2\pi^3\lambda^3}\sin 2\pi\lambda y\right]\right\}$$

Решением этого уравнения является $\hat{u}(\lambda,y)=-\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$. Функция $u(x,y)=-\dfrac{4\pi^2 ix}{\sqrt{2\pi}}e^{-2\pi^2x^2}$, которая является обратным преобразованием Фурье $\hat{u}(\lambda,y)$, является решением уравнения (20).

В §2.2 исследована залача интегральной геометрии с двумя неинвариантными весовыми функциями $a(x,y,\xi,\eta)$ и $K(x,y,\xi,\eta)$. Положим

$$Au\equiv\int_0^y A(y,\eta,x)u(x,y)d\eta=\int_0^y\Big\{\sqrt{2}\big(a(x,y,x-(y-\eta),\eta)u(x-(y-\eta),\eta)+a(x,y,x+(y-\eta),\eta)\times$$
$$\times u(x+(y-\eta),\eta)\big)+\int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)}K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi\Big\}d\eta=g(x,y),\quad (x,y)\in D. \qquad (21)$$

Требуется по функции $g(x,y)$ восстановить функцию $u(x,y)$.

Всюду предположим, что функция $a(x,y,\xi,\eta)$ представима в виде (3) и $K(x,y,\xi,\eta)$ представима в виде

$$K(x,y,\xi,\eta)=K_0(x-\xi,y,\eta)+K_1(x,y,\xi,\eta) \qquad (22)$$

и заменяя $\xi=x-(y-\eta)+\xi'$ во втором интеграле уравнения (21), используя преобразование Фурье получили следующее уравнение:

$$\hat{A}\hat{u}\equiv\int_0^y\Big\{\sqrt{2}\Big[\big(e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}a_0(y-\eta,y,\eta)\hat{u}(\lambda,\eta)+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}a_0(\eta-y,y,\eta)\big)\hat{u}(\lambda,\eta)+e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\times$$
$$\times[\hat{a}_1(\lambda,y-\eta,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)]+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}[\hat{a}_1(\lambda,\eta-y,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)]\Big]+\int_0^{2(y-\eta)}e^{2\pi i\lambda(\xi'-y+\eta)}\times \qquad (23)$$
$$\times\left(K_0(y-\eta-\xi',y,\eta)\hat{u}(\lambda,\eta)+\left[\hat{K}_1(\lambda,y-\eta-\xi',y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]\right)d\xi'\Big\}d\eta=\hat{g}(\lambda,y),\quad (\lambda,y)\in D.$$

Пусть выполняются следующие условия:

г) $a_0(z,y,\eta),\ K_0(z,y,\eta)$ - достаточно гладкие функции в области $\overline{G}_1$, $a_0(0,y,y)\equiv 0,\ a_1(x,y,x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in R\times[0;h]$, $W_2(y)=2\left|\sqrt{2}a'_{0,2}(0,y,y)+K_0(0,y,y)\right|\geq\alpha>0$, $y\in[0;h]$, $a_1(x,y,\xi,\eta),\ K_1(x,y,\xi,\eta)$ - достаточно гладкие функции в области $R^2\times\overline{G}$;

д) $\exists b\in(0,\infty)$ такое, что для фиксированных $z\in[-h;h],\ (y,\eta)\in\overline{G}$

$\gamma_1=\sup\limits_{y\in[0,h]}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}a'_{0,2}(0,y,y)+K_0(0,y,y)}\left\|\sqrt{2}\hat{a}'_{1,3}(\lambda,0,y,y)+\hat{K}_1(\lambda,0,y,y)\right\|_{1,b}\right]<1$, функции

$\hat{a}_1(\lambda, z, y, \eta)$, $\hat{K}_1(\lambda, z, y, \eta)$ и их частные производные до второго порядка являются элементами из $L_b^1(R)$;

е) $\forall (y, \eta \in \overline{G})$, $|a_0(\pm(y-\eta), y, \eta)| \le C_0(y-\eta)$, $\|\hat{a}_1(\lambda, \pm(y-\eta), y, \eta\|_{1,b} \le C_1(y-\eta)$.

При этих условиях доказаны:

Теорема 3. Пусть выполняются условия г), д), е), $\alpha, \beta \in (-b; b), \alpha < \beta$, $\hat{g}(\lambda, 0) = 0$, $\hat{g}'_y(\lambda, 0) = 0$, $\lambda \in R$, $\hat{g}'_y(\lambda, y), \hat{g}''_{yy}(\lambda, y) \in B_{\alpha,\beta}^{p,\theta}$, $p \ge 1$ и число $\theta > 0$ такое, что $\gamma(\theta) = M_0\theta b + 2M_1\theta + 4M_2\theta^2 < 1$, где $0 < M_i = const, (i = \overline{0,2})$, тогда в $B_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R)$ существует единственное решение уравнения (23).

Теорема 4. Если выполняются условия г), д), е), $\alpha, \beta \in (-b; b), \alpha < \beta$, $g(x, 0) = 0$, $g'_y(x, 0) = 0$, $x \in R$, $g'_y(x, y), g''_{yy}(x, y) \in \hat{B}_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R)$, $p \ge 1$, и число $\theta > 0$ такое, что $\gamma(\theta) = M_0\theta b + 2M_1\theta + 4M_2\theta^2 < 1$, где $0 < M_i = const, (i = \overline{0,2})$, то в $\hat{B}_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R)$ существует единственное решение уравнения (21).

В §2.3 исследована та же задача, что и в §2.2, при следующих условиях:

ж) $a_0(z, y, \eta)$, $K_0(z, y, \eta)$ - достаточно гладкие функции в области $\overline{G}_1$, $a_0(0, y, y) \equiv 0$, $a_1(x, y, x, y) \equiv 0$, $\sqrt{2}a'_{0,2}(0, y, y) + K_0(0, y, y) \equiv 0$, $\sqrt{2}a'_{1,2}(x, y, 0, y) + K_1(x, y, x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in R \times [0, h]$, $W_3(y) = 2\left[\sqrt{2}\left(a''_{0,11}(0, y, y) + a''_{0,22}(0, y, y)\right) + K'_{0,2}(0, y, y)\right] \ge \alpha > 0$, функции $a_1(x, y, \xi, \eta)$, $K_1(x, y, \xi, \eta)$ - достаточно гладкие функции в области $R^2 \times \overline{G}$;

з) $\exists b \in (0; \infty)$ такое, что для фиксированных z, y, η

$$\gamma_2 = \sup_{y \in [0,h]} \left[\frac{\left\| \sqrt{2}\left[\hat{a}''_{1,22}(\lambda, 0, y, y) + \hat{a}''_{1,33}(\lambda, 0, y, y)\right] + \hat{K}'_{1,3}(\lambda, 0, y, y) \right\|_{1,b}}{\sqrt{2}\left[a''_{0,11}(0, y, y) + a''_{0,22}(0, y, y)\right] + K'_{0,2}(0, y, y)} \right] < 1$$ и функции

$a_1(x, y, \xi, \eta)$, $K_1(x, y, \xi, \eta)$ и их частные производные до третьего порядка являются элементами из $L_b^1(R)$;

и) $\forall\, y, \eta \in \overline{G}$ выполняются условия

$|a_0(\pm(y-\eta), y, \eta)| \le C_0(y-\eta)^2$, $\|\hat{a}_1(\lambda, \pm(y-\eta), y, \eta)\|_{1,b} \le C_1(y-\eta)^2$,

$|K_0(\pm(y-\eta-\xi', y, \eta)| \le C_2(y-\eta-\xi')$, $\|\hat{K}_1(\lambda \pm (y-\eta-\xi', y, \eta)\|_{1,b} \le C_3(y-\eta-\xi')$,

$|a'_{0,1}(\pm(y-\eta), y, \eta)| \le C_0(y-\eta)$, $\|\hat{a}_{1,3}(\lambda, \pm(y-\eta), y, \eta\|_{1,b} \le C_3(y-\eta)$,

$|a'_{0,2}(\pm(y-\eta), y, \eta| \le C_1(y-\eta)$, $\|\hat{a}_{1,2}(\lambda, \pm(y-\eta), y, \eta\|_{1,b} \le C_2(y-\eta)$.

Установлены следующие:

Теорема 5. Пусть выполняются условия ж), з), и), $\alpha, \beta \in (-b; b), \alpha < \beta$, $\hat{g}(\lambda, 0) = 0$, $\hat{g}'_y(\lambda, 0) = 0$, $\hat{g}''_{yy}(\lambda, 0) = 0$, $\lambda \in R$, $\hat{g}'_y(\lambda, y), \hat{g}''_{yy}(\lambda, y), \hat{g}'''_{yyy}(\lambda, y) \in B_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(\theta)$, $p \ge 1$ и число $\theta > 0$ такое, что $\gamma(\theta) = 2M_0\theta b + 4M_1\theta + 8M_2\theta^2 + 16M_3\theta^3 < 1$, где $0 < M_i = const, (i = \overline{0,3})$, тогда в $B_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R)$ существует единственное решение уравнения (23).

Теорема 6. Если выполняются условия ж), з), и), $\alpha, \beta \in (-b; b), \alpha < \beta$, $g(x,0) = 0$, $g'_y(x,0) = 0$, $g''_{yy}(x,0) = 0$, $x \in R$, $g'_y(x, y), g''_{yy}(x, y), g'''_{yyy}(x, y) \in \hat{B}_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R)$, $p \ge 1$ и число $\theta > 0$ такое, что $\gamma(\theta) = 2M_0\theta b + 4M_1\theta + 8M_2\theta^2 + 16M_3\theta^3 < 1$, где $0 < M_i = const, (i = \overline{0,3})$, то в $\hat{B}_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R)$ существует единственное решение уравнения (21).

В §2.4 рассматривается задача интегральной геометрии на полосе D с семействами кривых

$$\gamma_1(x, y) = \begin{cases} \xi = x - f_1(y, \eta), & 0 \le \eta \le y, \\ \xi = x - f_2(y, \eta), & 0 \le \eta \le y, \end{cases}$$ с вершинами $(x, y) \in D$ и концами,

лежащими на оси $\eta = 0$. Положим

$$Au = \int_{\gamma(x,y)} A(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) ds = \int_0^y \Big\{ a(x, y, x - f_1(y, \eta), \eta) u(x - f_1(y, \eta), \eta) \sqrt{1 + \left(f'_{1,\eta}(y, \eta)\right)^2} +$$
$$+ a(x, y, x - f_2(y, \eta), \eta) u(x - f_2(y, \eta), \eta) \sqrt{1 + \left(f'_{2,\eta}(y, \eta)\right)^2} + \int_{x - f_2(y,\eta)}^{x - f_1(y,\eta)} K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi \Big\} d\eta =$$
$$= g(x, y), \quad (x, y) \in D. \tag{24}$$

Требуется по функции $g(x, y)$ восстановить функцию $u(x, y)$.

Всюду предположим, что функции $a(x, y, \xi, \eta)$ и $K(x, y, \xi, \eta)$ представлены в виде (3) и (22), заменяя $\xi = x - (y - \eta) + \xi'$ во втором интеграле уравнения (21) и используя преобразования Фурье по переменной x, имеем

$$\hat{A}\hat{u} \equiv \int_0^y \Big\{ e^{-2\pi i \lambda f_1(y,\eta)} a_0(f_1(y, \eta), y, \eta) u(\lambda, \eta) \sqrt{1 + \left(f'_{1\eta}(y, \eta)\right)^2} + e^{-2\pi i \lambda f_2(y,\eta)} a_0(f_2(y, \eta), y, \eta) \times$$
$$\times u(\lambda, \eta) \sqrt{1 + \left(f'_{2\eta}(y, \eta)\right)^2} + e^{-2\pi i \lambda f_1(y,\eta)} \left[\hat{a}_1(\lambda, f_1(y, \eta), y, \eta) * \hat{u}(\lambda, \eta)\right] \sqrt{1 + \left(f'_{1\eta}(y, \eta)\right)^2} +$$
$$+ e^{-2\pi i \lambda f_2(y,\eta)} \left[\hat{a}_1(\lambda, f_2(y, \eta), y, \eta) * \hat{u}(\lambda, \eta)\right] \sqrt{1 + \left(f'_{2\eta}(y, \eta)\right)^2} + \int_0^y e^{2\pi i \lambda(\xi - f_1)} \left(K_0(f_1(y, \eta) - \xi', y, \eta\right) \times$$
$$\times \left[\hat{K}_1(\lambda, f_1(y, \eta) - \xi', y, \eta) * \hat{u}(\lambda, \eta)\right] d\xi' \Big\} d\eta = \hat{g}(\lambda, y), \quad (\lambda, y) \in D, \tag{25}$$

где $f_i(y, \eta)$, $i = 1, 2$; $\hat{K}(\lambda) * \hat{u}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}(\lambda - \mu) \hat{u}(\mu) d\mu$;

Пусть выполняются следующие условия:

к) $f_1(y, \eta)$, $f_2(y, \eta)$, $f'_{1\eta}(y, \eta)$, $f'_{2\eta}(y, \eta)$, $a_0(f_1(y, \eta), y, \eta)$, $a_0(f_2(y, \eta), y, \eta)$ - достаточно гладкие функции в области $\overline{G}$, $a_0(0, y, y) \equiv 0$, $a_1(x, y, x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in R \times [0, h]$,

$$W_4(y) = \Big[\sqrt{1 + \left(f'_{1,\eta}(y, y)\right)^2} \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(a_0(f_1(y, \eta), y, \eta)\right) \right)_{\eta = y} + \sqrt{1 + \left(f'_{2,\eta}(y, y)\right)^2} \times$$
$$\times \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(a_0(f_2(y, \eta), y, \eta)\right) \right)_{\eta = y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(f_1(y, \eta) - f_2(y, \eta)\right)_{\eta = y} K_0(0, y, y) \Big] \ge m_0 > 0, \ y \in [0, h],$$

$K_0(z, y, \eta)$ - определена в области $\overline{G}_3 = [\alpha_0; \alpha_1] \times \overline{G}$, где $\alpha_0 = \min(\min_G f_1(y, \eta), \min_G f_2(y, \eta))$, $\alpha_0 = \max(\max_G f_1(y, \eta), \max_G f_2(y, \eta))$ и достаточно гладкая функция в области $\overline{G}_3$, функции $a_1(x,y,\xi,\eta)$, $K_1(x,y,\xi,\eta)$ - достаточно гладкие функции в области $R^2\times\overline{G}$;

л) $\exists b\in(0,\infty)$ такое, что для фиксированных $z\in[\alpha_0;\alpha]$, $(y,\eta)\in\overline{G}$

$$\gamma_3=\sup_{y\in[0,h]}\{\frac{1}{W_4(y)}\|[\sqrt{1+(f'_{1\eta}(y,\eta))^2}\frac{\partial}{\partial y}(\hat{a}_1(\lambda,f_1(y,\eta),y,\eta))|_{\eta=y}+\sqrt{1+(f'_{2\eta}(y,\eta))^2}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial y}(\hat{a}_1(\lambda,f_2(y,\eta),y,\eta))|_{\eta=y}+\frac{\partial}{\partial y}[f_1(y,\eta)-f_2(y,\eta)]|_{\eta=y}\hat{K}_1(\lambda,0,y,y)]\|_{1,b}<1$$

и функции $\hat{a}_1(\lambda,z,y,\eta)$, $\hat{K}_1(\lambda,z,y,\eta)$ и их частные производные до второго порядка являются элементами из $L^1_b(R)$;

м) $\forall\, y,\eta\in\overline{G}$, $|a_0(f_1(y,\eta),y,\eta)|\le C_0(y-\eta)$, $|a_0(f_2(y,\eta),y,\eta)|\le C_1(y-\eta)$, $\|\hat{a}_1(\lambda,f_1(y,\eta),y,\eta\|_{1,b}\le C_2(y-\eta)$, $\|\hat{a}_1(\lambda,f_2(y,\eta),y,\eta\|_{1,b}\le C_3(y-\eta)$.

При этих условиях доказаны:

Теорема 7. Пусть выполняются условия к), л), м), $\alpha,\beta\in(-b;b),\alpha<\beta$, $\tilde{g}(\lambda,0)=0$, $\tilde{g}'_y(\lambda,0)=0$, $\lambda\in R$, $\tilde{g}'_y(\lambda,y)$, $\tilde{g}''_{yy}(\lambda,y)\in B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$, $p\ge1$ и число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=M_0\theta b+2M_1\theta+4M_2\theta^2<1$, где $0<M_i=const,(i=\overline{0,2})$, тогда в $B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$ существует единственное решение уравнения (25).

Теорема 8. Если выполняются условия к), л), м), $\alpha,\beta\in(-b;b),\alpha<\beta$, $g(x,0)=0$, $g'_y(x,0)=0$, $x\in R$, $g'_y(x,y)$, $g''_{yy}(x,y)\in\tilde{B}^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$, $p\ge1$ и число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=M_0\theta b+2M_1\theta+4M_2\theta^2<1$, где $0<M_i=const,(i=\overline{0,2})$, то в $\tilde{B}^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$ существует единственное решение уравнения (24).

Третья глава посвящена исследованию задач интегральной геометрии в пространстве с неинвариантными функциями в критических случаях.

В §3.1 рассматривается задача интегральной геометрии с семействами конусов.

Пусть в пространстве $\Omega=\{(\xi,\eta):\xi=(\xi_1,\xi_2)\in R^2,\eta\in[0,h]\}\subset R^3$ задано $\Delta(x,y)=(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2-(\eta-y)^2=0$, $0\le\eta\le y$ - семейство конусов, с вершиной в точке $(x,y)\in\Omega$, $x=(x_1,x_2)$ и концами, лежащими на плоскости $\eta=0$. Для весовых функций $a(x,y,\xi,\eta)$, $K(x,y,\xi,\eta)$ и функции $u(\xi,\eta)$ положим

$$Au=\iint_{s=\Delta(x,y)}a(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)ds+\iiint_{v(x,y)}K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi\,d\eta=g(x,y). \qquad (26)$$

где $v(x,y)$ - область, ограниченная поверхностью $\eta=0,(x,y)\in\Omega$.

Требуется по функции $g(x,y)$ восстановить функцию $u(x,y)$.

В уравнении (26), переходя к полярной системе координат и используя преобразование Фурье и заменяя $\eta=y-\rho$, получим следующее уравнение:

$$\hat{A}\hat{u}\equiv\int_0^y\hat{A}(y,\eta,\lambda)u(\lambda,\eta)d\eta=\int_0^y\{V(y,\eta,\lambda)\hat{u}(\lambda,\eta)+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\exp(2\pi i(y-\eta)(\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi))(y-\eta)\times$$
$$\times[\hat{a}_1(\lambda,(y-\eta)\cos\varphi,(y-\eta)\sin\varphi,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)]d\varphi+\int_0^{y-\eta}\exp(2\pi i\rho(\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi))\rho\times$$
$$\times[\hat{K}_1(\lambda,\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)]d\varphi d\rho\}d\eta=\hat{g}(\lambda,y),\quad(\lambda,y)\in\Omega. \qquad (27)$$

где $V(y,\eta,\lambda)=\int_0^{2\pi}\exp(2\pi i(y-\eta)(\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi))\sqrt{2}(y-\eta)\times$

$$\times[a_0(\lambda,(\eta-y)\cos\varphi,(\eta-y)\sin\varphi,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)]d\varphi+$$
$$+\int_0^{y-\eta}\exp(2\pi i\rho(\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi))\rho K_0(-\rho\cos\varphi,-\rho\sin\varphi,y,\eta)d\varphi d\rho.$$

$L^p_s(R^n)$, $s\in(b_1;b_2)$, $-\infty\le b_1\le b_2\le+\infty$, $p\ge1$ - линейное пространство функций $u(x)$, измеримых на R^n, и таких, что $\|u(x)\|^p_{p,s}=\int_{R^n}e^{ps|x|}|u(x)|^p dx$. Семейство пространств $L^p_s(R^n)$ образует шкалу банаховых пространств.

$C_s(R^n)$, $s\in(b_1,b_2)$ - линейное функциональное пространство функций $u(x)$- непрерывных на R^n и таких, что $\|u(x,y)\|_s=\sup_{x\in R^n}[e^{s|x|}|u(x)|]<\infty$. Семейство $C_s(R^n)$, $s\in(b_1,b_2)$ образует шкалу банаховых пространств.

Пусть выполняются следующие условия:

н) $a_0(z_1,z_2,y,\eta)$, $K_0(z_1,z_2,y,\eta)$ - достаточно гладкие функции в области $\overline{G}_2=[-h;h]^2\times\overline{G}$, $a_0(0,0,y,y)=0$, $\hat{a}_1(\lambda,0,0,y,y)=0$,

$$W_5(y)=2\pi[2\sqrt{2}(-a'_{0,1}(0,0,y,y)-a'_{0,2}(0,0,y,y)+a'_{0,3}(0,0,y,y))+K_0(0,0,y,y]>0;$$

о) $\exists b\in(0;\infty)$ такие, что для фиксированного $(z,y,\eta)\in\overline{G}_2$ функции $\hat{a}_1(\lambda,z,y,\eta)$, $\hat{K}_1(\lambda,z,y,\eta)$ и их частные производные до второго порядка являются элементами из $L^1_b(R^2)$ и

$$n_0=\sup_{y\in[0,h]}\left[\frac{2\pi}{W_5(y)}\|2\sqrt{2}(\hat{a}'_{1,1}(\lambda,0,0,y)+\hat{a}'_{1,2}(\lambda,0,0,y,y)+\hat{a}'_{1,3}(\lambda,0,0,y))+\hat{K}_1(\lambda,0,0,y)\|\right]_{1,b}<1;$$

п) $\forall\, y,\eta\in\overline{G}$, $|a_0((\eta-y)\cos\varphi,(\eta-y)\sin\varphi,y,\eta)|\le C_1(y-\eta)$,

$\|\hat{a}_1(\lambda,(\eta-y)\cos\varphi,(\eta-y)\sin\varphi,y,\eta)\|\le C_2(y-\eta)$.

Обозначим через $B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^n)$, $p\ge1,\alpha,\beta\in(-b;b)$, $\alpha<\beta$ - банахово пространство функций $u(x,y)$, которые для всякого $s\in[\alpha,\beta]$ являются такими непрерывными функциями по y, $0<y<\theta(\beta-s)$ со значениями в $L^p_s(R^n)$, что норма $N_{p,\theta}[u]=\left\{\sup_{\substack{0<y<\theta(\beta-s)\\ \alpha\le s<\beta}}\|u(x,y)\|_{p,s}(\theta(\beta-s)/y-1)\right\}<\infty$, здесь θ- положительная константа.

Обозначим через $C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^n)$, $p\ge1,\alpha,\beta\in(-b;b)$, $\alpha<\beta$ - банахово пространство функций $u(x,y)$, которые для всякого $s\in[\alpha,\beta]$ являются такими непрерывными функциями по y, $0<y<\theta(\beta-s)$ со значениями в $C_s(R^n)$, что норма $N_p[u]=\sup_{\substack{0<y<\theta(\beta-s)\\ \alpha\le s<\beta}}\|u(x,y)\|_{p,s}(\theta(\beta-s)/y-1)<\infty$, здесь θ - положительная константа.

Установлены:

Теорема 9. Пусть выполняются условия н), о), п), $\alpha,\beta\in(-b;b),\alpha<\beta$, $\hat g(\lambda,0)=0,\ \hat g'_y(\lambda,0)=0,\ \hat g''_{yy}(\lambda,0)=0,\ \lambda\in R^2$. Тогда:

1) если число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=\frac{1}{2}M_0\theta b+2M_1\theta+4M_2\theta^2+8M_3\theta^3<1$, ,

где $0<M_i=const,(i=\overline{0,3})$, $\hat g'_y(\lambda,y),\hat g''_{yy}(\lambda,y),\hat g'''_{yyy}(\lambda,y)\in C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, то в $C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$ существует единственное решение уравнения (27);

2) если число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=\frac{1}{2}M'_0\theta b+2M'_1\theta+4M'_2\theta^2+8M'_3\theta^3<1$,

где $0<M'_i=const,(i=\overline{0,3})$, $\hat g'_y(\lambda,y),\hat g''_{yy}(\lambda,y),\hat g'''_{yyy}(\lambda,y)\in B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, $p\ge1$, то в $B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$ существует единственное решение уравнения (27).

Теорема 10. Пусть выпоняются условия н), о), п), $\alpha,\beta\in(-b;b),\alpha<\beta$, $g(x,0)=0,\ g'_y(x,0)=0,\ g''_{yy}(x,0)=0,\ x\in R^2$. Тогда:

1) если число $\theta>0$ такое, что, $\gamma(\theta)=\frac{1}{2}M_0\theta b+2M_1\theta+4M_2\theta^2+8M_3\theta^3<1$,

где $0<M_i=const,(i=\overline{0,3})$, $g'_y(x,y),g''_{yy}(x,y),g'''_{yyy}(x,y)\in C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, где $u(x,y)\in \tilde C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)\leftrightarrow \hat u(\lambda,y)\in C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, то в $\tilde C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$ существует единственное решение уравнения (26);

2) если число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=\frac{1}{2}M'_0\theta b+2M'_1\theta+4M'_2\theta^2+8M'_3\theta^3<1$,

$0<M'_i=const,(i=\overline{0,3})$, $g'_y(x,y),g''_{yy}(x,y),g'''_{yyy}(x,y)\in B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$ где $u(x,y)\in \tilde B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)\leftrightarrow \hat u(x,y)\in B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, то в $\tilde B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$ существует единственное решение уравнения (26).

В §3.2 исследована задача интегральной геометрии в области Ω с семействами пространственных кривых $\gamma_2(x,y)=\begin{cases}\xi_1=x_1-\varphi_1(t,y),\\ \xi_2=x_2-\varphi_2(t,y),\\ \eta=y-t,\quad 0\le t\le y.\end{cases}$ где $x=(x_1,x_2)\in R^2$, $\varphi_1(0,y)=\varphi_2(0,y)=0$, $y\in[0,h]$.

Для весовой функции $a(x,y,\xi,\eta)$ и функции $u(\xi,\eta)$ получаем

$$Au\equiv\int_{\gamma_2(x,y)}a(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)ds=g(x,y), \tag{28}$$

где $(x,y)\in\Omega$, ds - длина дуги кривой. Предположим, что функция $a(x,y,\xi,\eta)$ представима в виде (3) и получаем :

$$\begin{aligned}Au\equiv\int_0^y&[a_0(\varphi_1(t,y),\varphi_2(t,y),y,y-t)+a_1(x,y,x_1-\varphi_1(t,y),x_2-\varphi_2(t,y),y-t)]\times\\ &\times u(\varphi_1(t,y),\varphi_2(t,y),y-t)\sqrt{1+(\varphi'_{1t}(t,y))^2+(\varphi'_{2t}(t,y))^2}\,dt=g(x,y),\quad (x,y)\in\Omega\end{aligned} \tag{29}$$

Требуется по функции $g(x,y)$ восстановить функцию $u(x,y)$.

В силу преобразования Фурье по переменной x и замены $y-t=\tau$ получим:

$$\begin{aligned}\hat A\hat u\equiv\int_0^y&e^{-2\pi i(\lambda,\varphi(y-\tau,y))}\sqrt{1+|\varphi'_t(y-\tau,y)|^2}\,[a_0(\varphi(y-\tau,y),y,\tau)\hat u(\lambda,\tau)+\\ &+[\hat a_1(\lambda,\varphi(y-\tau,y),y,\tau)*\hat u(\lambda,\tau)]d\tau=\hat g(\lambda,y),\quad(\lambda,y)\in\Omega,\end{aligned} \tag{30}$$

где $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, $[\hat a(\lambda)*\hat u(\lambda)]=\int_{R^2}a(\lambda-\mu)u(\mu)d\mu$.

Пусть выполняются следующие условия:

р) $a_0(z,y,\tau)$- достаточно гладкая функция в области $\overline{G_4}=[-m_1;m'_1]\times[-m_2;m'_2]\times\overline{G_5}$, где $m_i=\min_G\varphi_i(t,y)$, $m'_i=\max_G\varphi_i(t,y), i=1,2$, $G_5=\{(t,y):0<t<y<\eta\}$, $a_0(0,y,y)=0$, $\hat a_1(\lambda,0,y,y)=0$, $\varphi_1(t,y),\varphi_2(t,y)$ - достаточно гладкие функции в области $\overline{G_4}$ и

$W_6(y)=\sqrt{1+|\varphi'_t(0,y)|^2}\,\frac{\partial}{\partial y}(a_0(\varphi(y-\tau,y),y,\tau)_{\tau=y}\ge m_0>0$, $y\in[0,h]$;

с) $\exists b\in(0;\infty)$ такое, что для фиксированного $(z,y,\tau)\in\overline{G_4}$, функция $\hat a_1(\lambda,z,y,\tau)$ и ее частные производные до второго порядка являются элементами из $L^1_b(R^2)$ и

$$n_1=\sup_{y\in[0,h]}\left[\left\|\frac{\partial}{\partial y}(\hat a_1(\lambda,\varphi(y-\tau,y),y,\tau)_{\tau=y}\right\|_{1,b}\left(\frac{\partial}{\partial y}(a_0(\varphi(y-\tau,y),y,\tau)_{\tau=y}\right)^{-1}\right]<1;$$

т) $\forall(y,\tau\in\overline{G})$, $|a_0(\varphi(y-\tau,y),y,\tau)|\le C_0(y-\tau)$, $\|\hat a_1(\lambda,\varphi(y-\tau,y),y,\tau)\|_{1,b}\le C_1(y-\tau)$.

При этих условиях установлены следующие:

Теорема 11. Пусть выполняются условия р), с), т), $\alpha,\beta\in(-b;b),\alpha<\beta$, $\hat g(\lambda,0)=0,\ \hat g'_y(\lambda,0)=0,\ \lambda\in R^2$. Тогда:

1) если число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=M_0(\beta-\alpha)\frac{\theta}{2}+2M_1\theta+4M_2\theta^2<1$, где $0<M_i=const,(i=\overline{0,2})$, $\hat g'_y(\lambda,y),\hat g''_{yy}(\lambda,y)\in C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, то в $C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$ существует единственное решение уравнения (30);

2) если число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=M'_0(\beta-\alpha)\frac{\theta}{2}+2M'_1\theta+4M'_2\theta^2<1$,

где $0<M'_i=const,(i=\overline{0,2})$, $\hat g'_y(\lambda,y),\hat g''_{yy}(\lambda,y)\in B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, то в $B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$ существует единственное решение уравнения (30) .

Теорема 12. Пусть выполняется условия р), с), т), $\alpha,\beta\in[0;b],\alpha<\beta$, $g(x,0)=0, g'_y(x,0)=0$, $x\in R^2$. Тогда:

1) если число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=M_0(\beta-\alpha)\frac{\theta}{2}+2M_1\theta+4M_2\theta^2<1$,

$0<M_i=const,(i=\overline{0,2})$, $g'_y(x,y)$, $g''_{yy}(x,y)\in\tilde C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, где $u(x,y)\in\tilde C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, то в $\tilde C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$ существует единственное решение уравнения (29);

2) если число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=M'_0(\beta-\alpha)\frac{\theta}{2}+2M'_1\theta+4M'_2\theta^2<1$,

где $0<M'_i=const,(i=\overline{0,2})$, $g'_y(x,y)$, $g''_{yy}(x,y)\in\tilde B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, то в $\tilde B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$

существует единственное решение уравнения (29).

В §3.3 рассмотрены многомерные задачи интегральной геометрии с семействами конусов. Пусть в пространстве Ω нам задано семейство конусов $\Delta(x,y)$.

Для $(m\times m)$ матричных функций $A(x,y,\xi,\eta)$, $K(x,y,\xi,\eta)$ и вектора-функции $u(\xi,\eta)$ положим

$$Au=\iint\limits_{S=\Delta(x,y)}A(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)ds+\iiint\limits_{v(x,y)}K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi\,d\eta=G(x,y), \qquad (31)$$

где $v(x,y)$ - область ограниченная поверхностью $\eta=0$, $(x,y)\in\Omega$.
Требуется по вектору-функции $G(x,y)$ восстановить вектор-функцию $u(x,y)$.

Предполагается, что матричные функции $A(x,y,\xi,\eta)$ и $K(x,y,\xi,\eta)$ представимы в виде

$$A(x,y,\xi,\eta)=A_0(x-\xi,y,\eta)+A_1(x,y,\xi,\eta), \qquad (32)$$

$$K(x,y,\xi,\eta)=K_0(x-\xi,y,\eta)+K_1(x,y,\xi,\eta). \qquad (33)$$

В системе (31), заменяя $\xi=x+\xi'$, переходя к полярной системе координат и используя преобразования Фурье, по переменной x обозначенные в
$\hat u(\lambda,\eta)=\int\limits_{R^2}e^{-2\pi i(\lambda,x)}u(x,\eta)dx=F[u](\lambda,\eta)$, $\hat A(\lambda,z,y,\eta)=\int\limits_{R^2}e^{-2\pi i(\lambda,x)}A(x-z,y,x,\eta)dx$, имеем:

$$\begin{aligned}\hat A\hat u&=\int_0^y\int_0^{2\pi}\exp(2\pi i(y-\eta)(\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi)(y-\eta)\sqrt{2}\{A_0((\eta-y)\cos\varphi,(\eta-y)\sin\varphi,y,\eta)\hat u(\lambda,\eta)+\\&+\left[\hat A_1(\lambda,(y-\eta)\cos\varphi,(y-\eta)\sin\varphi,y,\eta)*\hat u(\lambda,\eta)\right]\}d\varphi d\eta+\\&+\int_0^y\int_0^{y-\eta}\int_0^{2\pi}\exp(2\pi i(y-\eta)(\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi)\rho\{K_0(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,y,\eta)\hat u(\lambda,\eta)+\\&+[K_1(\lambda,\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,y,\eta)*\hat u(\lambda,\eta)]\}d\varphi d\rho d\eta=\hat G(\lambda,y),\quad(\lambda,y)\in\Omega.\end{aligned} \qquad (34)$$

Обозначим через $L^p_{s,m}(R^n)=\underbrace{L^p_s(R^n)\times\ldots\times L^p_s(R^n)}_{m\ \text{раз}}$, $s\in(-\infty;\infty)$, $p\ge1$, где $L^p_s(R^n)$-определено в §3.1. Таким образом, $u(x)=(u_1(x),\ldots,u_m(x))\in L^p_{s,m}(R^n)$ т.е. $\|u(x)\|^p_{p,s}=\int\limits_{R^n}e^{p|s|}\|u(x)\|^p dx<\infty$, где $\|u(x)\|=\left(\sum\limits_{i=1}^m u_i^2(x)\right)^{1/2}$, $i=1,\ldots,m$.

Семейство пространств $L^p_{s,m}(R^n)$ образуют шкалу банаховых пространств.

Обозначим через $C^p_{s,m}(R^n)=\underbrace{C^p_s(R^n)\times\ldots\times C^p_s(R^n)}_{m\ \text{раз}}$ - пространство вектор-функций $u(x)=(u_1(x),\ldots,u_m(x))$ непрерывных на R^n и таких, что $\|u(x)\|^p_{p,s}=\sup\limits_{x\in R^n}\left[e^{p|s|}\|u(x)\|^p\right]<\infty$. Семейство таких пространств образуют шкалу банаховых пространств.

$C^{\theta}_{\alpha,\beta,m}(R^n)$, $p\ge1$, $\alpha,\beta\in(-b;b)$, $\alpha<\beta$ - банаховое пространство вектор-функций $u(x,y)$, которые для всякого $s\in[\alpha,\beta]$ являются такими непрерывными функциями по y, $0<y<\theta(\beta-s)$ со значениями в $C^p_{s,m}(R^n)$, что норма $N_p[u]=\sup\limits_{\substack{0<y<\theta(\beta-s)\\ \alpha\le s<\beta}}\|u(x,y)\|_{p,s}(\theta(\beta-s)/y-1)<\infty$, здесь θ - положительная константа.

$B^{p,\theta}_{\alpha,\beta,m}(R^n)$, $p\ge1$, $\alpha,\beta\in(-b;b)$, $\alpha<\beta$ - банаховое пространство вектор-функций $u(x,y)$, которые для всякого $s\in[\alpha,\beta]$ являются такими непрерывными функциями по y, $0<y<\theta(\beta-s)$ со значениями в $L^p_{s,m}(R^n)$, что норма $N_p[u]=\sup\limits_{\substack{0<y<\theta(\beta-s)\\ \alpha\le s<\beta}}\|u(x,y)\|_{p,s}(\theta(\beta-s)/y-1)<\infty$, здесь θ - положительная константа.

Пусть выполняются следующие условия:

у) $A_0(z_1,z_2,y,\eta)$, $K_0(z_1,z_2,y,\eta)$ - достаточно гладкие вектор-функции в области $\overline{G}_2$ и $\det[2\pi A_0(0,0,y,y)]\ne0$, $y\in[0,h]$;

ф) $\exists b\in[0;\infty)$ такое, что для фиксированного $(z,y,\eta)\in\overline{G}_2$
$n_1=\sup\limits_{y\in[0,1]}\left\|\|A_0^{-1}(0,0,y,y)\|\|A_1'(\lambda,0,0,y,y)\|\right\|_{1,b}<1$ и функции
$\|\hat A_1'(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat A'_{1,y}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat A'_{1,z_1}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat A'_{1,z_2}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat A''_{1,yy}(\lambda,z,y,\eta)\|$,
$\|\hat A''_{1,yz_1}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat A''_{1,yz_2}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat A''_{1,z_1z_2}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat A''_{1,z_1z_1}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat A''_{1,z_2z_2}(\lambda,z,y,\eta)\|$,
$\|\hat K_1(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat K'_{1,y}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat K'_{1,z_1}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat K'_{1,z_2}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat K''_{1,yy}(\lambda,z,y,\eta)\|$,
$\|\hat K''_{1,yz_1}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat K''_{1,yz_2}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat K''_{1,z_1z_2}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat K''_{1,z_1z_1}(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat K''_{1,z_2z_1}(\lambda,z,y,\eta)\|$
являются элементами из $L^1_b(R^n)$.

При этих условиях доказаны:

Теорема 13. Пусть выполняются условия у), ф), $\alpha,\beta\in[-b,b]$, $\alpha<\beta$, $\hat G(\lambda,0)=0$, $\hat G'_y(\lambda,0)=0$, $\lambda\in R^2$. Тогда:

1) если число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=4M_1M_4\theta b+8M_2M_4\theta^2<1$, где $0<M_i=const,(i=\overline{0,4})$, $\|\hat G'_y(\lambda,y)\|,\|\hat G''_{yy}(\lambda,y)\|\in C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, то в $C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$ существует единственное решение уравнения (34);

2) если число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=4M_1'M_4'\theta b+8M_2'M_4'\theta^2<1$, где $0<M_i'=const,(i=\overline{0,4})$, $\|\hat G'_y(\lambda,y)\|,\|\hat G''_{yy}(\lambda,y)\|\in B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, $p\ge1$, то в $B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$ существует единственное решение уравнения (34).

Теорема 14. Пусть выполняются условия у), ф) и $\alpha,\beta\in[-b;b]$, $\alpha<\beta$. $G(x,0)=0$, $G'_y(x,0)=0$, $x\in R^2$. Тогда:

1) если число $\theta>0$ такое, что $\gamma(\theta)=4M_1M_4\theta b+8M_2M_4\theta^2<1$, $0<M_i=const,(i=\overline{0,4})$, $\|G'_y(x,y)\|,\|G''_{yy}(x,y)\|\in\tilde C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, где $u(x,y)\in\tilde C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)\leftrightarrow\hat u(\lambda,y)\in C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$, то в $\tilde C^{\theta}_{\alpha,\beta}(R^2)$ существует единственное решение уравнения (31);

2) если число $\theta > 0$ такое, что $\gamma(\theta) = 4M_1' M_4' \theta b + 8M_2' M_4' \theta^2 < 1$, $0 < M_i = const, (i = \overline{0,4})$, $\|G_y'(x,y)\|$, $\|G_{yy}''(x,y)\| \in \bar{B}_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R^2)$, $p \geq 1$, где $u(x,y) \in \bar{B}_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R^2) \leftrightarrow \hat{u}(\lambda, y) \in B_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R^2)$, то в $\bar{B}_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R^2)$. существует единственное решение уравнения (31).

В §3.4 рассмотрены многомерные задачи интегральной геометрии с семействами пространственных кривых. Пусть в пространстве Ω задано семейство $\gamma_2(x,y) = \begin{cases} \xi_1 = x_1 - \varphi_1(t,y), \\ \xi_2 = x_2 - \varphi_2(t,y), \\ \eta = y - t, \quad 0 \leq t \leq y. \end{cases}$ пространственных кривых, где $x = (x_1, x_2) \in R^2$, $\varphi_1(0,y) = \varphi_2(0,y) = 0$, $y \in [0,h]$.

Для $(m \times m)$ матричной функции $A(x,y,\xi,\eta)$ и вектор-функции $u(\xi,\eta)$ получаем
$$Au \equiv \int\limits_{\gamma_2(x,y)} A(x,y,\xi,\eta) u(\xi,\eta) ds = G(x,y),$$
где $(x,y) \in \Omega$, ds - длина дуги кривой $\gamma_2(x,y)$. Предположим, что матричная функция $A(x,y,\xi,\eta)$ представима в виде (32) и получаем
$$Au \equiv \int\limits_0^y [A_0(\varphi_1(t,y), \varphi_2(t,y), y, y-t) + A_1(x, y, x_1 - \varphi_1(t,y), x_2 - \varphi_2(t,y), y-t)] \times \tag{35}$$
$$\times u(x_1 - \varphi_1(t,y), x_2 - \varphi_2(t,y), y-t) \sqrt{1 + (\varphi_{1,t}'(t,y))^2 + (\varphi_{2,t}'(t,y))^2}\, dt = G(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$
Требуется по вектор-функции $G(x,y)$ восстановить вектор-функцию $u(x,y)$.

В системе (35) заменяя $y - t = \tau$ и используя преобразование Фурье по переменной x получаем следующую систему:
$$\hat{A}\hat{u} \equiv \int\limits_0^y \exp(-2\pi i(\lambda, \varphi(y-\tau, y)\sqrt{1 + |\varphi_t'(y-\tau, y)|^2} \{A_0(\varphi(y-\tau, y, \tau)\hat{u}(\lambda,\tau) +$$
$$+ [\hat{A}_1(\lambda, \varphi(y-\tau, y, \tau) * \hat{u}(\lambda,\tau)]\} d\tau = \hat{G}(\lambda, y), \quad (\lambda, y) \in \Omega. \tag{36}$$

Пусть выполняются следующие условия:

х) матричная функция $A_0(z,y,\tau)$ - достаточно гладкая в области $\overline{G}_4$, $\varphi_1(t,y), \varphi_2(t,y)$ - достаточно гладкие функции в области G_5 и $\det[A_0(0,y,y)] \neq 0, y \in [0,h]$;

ч) $\exists b \in [0;\infty)$ такое, что для фиксированного $(z,y,\eta) \in \overline{G}_4$, $n_2 = \sup\limits_{y \in [0,1]} \left\| \|A_0^{-1}(0,y,y)\| \cdot \|\hat{A}_1(\lambda,0,y,y)\| \right\|_{1,b} < 1$, функции $\|\hat{A}_1(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat{A}_{1,y}'(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat{A}_{1,z_1}'(\lambda,z,y,\eta)\|$, $\|\hat{A}_{1,z_2}'(\lambda,z,y,\eta)\|$ являются элементами из $L_b^1(R^n)$.

При этих условиях доказаны:

Теорема 15. Пусть выполняются условия х), ч), $\alpha, \beta \in [-b;b], \alpha < \beta$, $\hat{G}(\lambda,0) = 0$, $\lambda \in R^2$. Тогда:

1) если число $\theta > 0$ такое, что $\gamma(\theta) = M_0(\beta - \alpha)\frac{\theta}{2} + 2M_1\theta < 1$, где $0 < M_0, M_1 = const$, $\|\hat{G}_y'(\lambda,y)\| \in C_{\alpha,\beta}^{\theta}(R^2)$, то в $C_{\alpha,\beta}^{\theta}(R^2)$ существует единственное решение системы (36);

2) если число $\theta > 0$ такое, что $\gamma(\theta) = M_0'(\beta - \alpha)\frac{\theta}{2} + 2M_1'\theta < 1$, $0 < M_0', M_1' = const$, $\|\hat{G}_y'(\lambda,y)\| \in B_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R^2)$, то в $B_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R^2)$ существует единственное решение системы (36).

Теорема 16. Пусть выполняются условия х), ч), $\alpha, \beta \in [0;b], \alpha < \beta$, $G(x,0) = 0$, $x \in R^2$. Тогда:

1) если число $\theta > 0$ такое, что $\gamma(\theta) = M_0(\beta - \alpha)\frac{\theta}{2} + 2M_1\theta < 1$, $0 < M_0, M_1 = const$, $\|G_y'(x,y)\| \in \bar{C}_{\alpha,\beta}^{\theta}(R^2)$, где $u(x,y) \in \bar{C}_{\alpha,\beta}^{\theta}(R^2) \leftrightarrow \hat{u}(\lambda,y) \in C_{\alpha,\beta}^{\theta}(R^2)$, то в пространстве $\bar{C}_{\alpha,\beta}^{\theta}(R^2)$ существует единственное решение системы (35);

2) если число $\theta > 0$ такое, что $\gamma(\theta) = M_0'(\beta - \alpha)\frac{\theta}{2} + 2M_1'\theta < 1$, $0 < M_0', M_1' = const$, $\|G_y'(x,y)\| \in \bar{B}_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R^2)$, $p \geq 1$ где $u(x,y) \in \bar{B}_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R^2) \leftrightarrow \hat{u}(\lambda,y) \in B_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R^2)$, то в пространстве $\bar{B}_{\alpha,\beta}^{p,\theta}(R^2)$ существует единственное решение системы (35).

Пользуясь случаем, выражаю благодарность научному руководителю, профессору А.Асанову за постановки задач, ценные советы и постоянное внимание при проведении настоящих исследований.