НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 517.928

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ, КОГДА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИМЕЮТ *n*–КРАТНЫЙ ПОЛЮС

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2005

Работа выполнена на кафедре математического анализа Ошского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Каримов С.К.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Саадабаев А.С.**
кандидат физико-математических наук, с.н.с. **Байзаков А.Б.**

Ведущая организация: Ошский технологический университет имени М.М. Адышева

Защита диссертации состоится «23» 06 2005г. в 14[00] часов на заседании диссертационного совета Д 01.05.290 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата физико-математических наук в Институте математики и информационных технологий НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек – 71, проспект Чуй, 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан «20» 05 2005г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета
д.ф.-м.н., с.н.с. **Искандаров С.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие актуальные задачи теории колебаний, радиотехнического управления, квантовой механики, гидродинамики и других явлений приводятся к изучению систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старших производных. Такие системы называются сингулярно возмущенными.

В начале XX века появились первые работы, посвященные изучению линейных уравнений с малым параметром при старшей производной. Начиная с 50-х годов, начались систематические исследования таких систем.

Исследованиями занимались А.Н. Тихонов, Л.С. Понтрягин, А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, М.И. Иманалиев, В.И. Рожков, А.А. Шишкин, С.А. Ломов, А.И. Нейштадт, М. А. Шишкова, К.А. Алымкулов, С.К. Каримов, Г.М Анарбаева, К.С. Алыбаев и др.

Одним из основных результатов в теории сингулярно возмущенных уравнений является теорема А.Н. Тихонова о предельном переходе. Он сформулировал достаточные условия, при выполнении которых решение возмущенной задачи и решение невозмущенной системы асимптотически близки. Л.С. Понтрягин и его ученики значительно продвинули теорию систем с малым параметром при старшей производной.

В работах А.Б. Васильевой и ее учеников построена степенная асимптотика решения с любой степенью точности начальной задачи Коши и краевой задачи для системы с малыми параметрами при старшей производной. Здесь применен метод пограничных функций в случае выполнения определенных условий относительно правых частей системы.

М.И. Иманалиев создал асимптотический метод решения широкого класса сингулярно возмущенных систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Им получена степенная асимптотика решений начальной задачи Коши и краевых задач. М.И. Иманалиев, П.С. Панков впервые обнаружили новые явления «вращающегося пограничного слоя» в теории двумерных и «всплеска» в теории одномерных уравнений.

Первой работой, когда нарушается условия устойчивости на некотором отрезке, но выполняется предельный переход, является работа М.А. Шишковой. Вслед за этой работой появились работы В.И. Рожкова, А.А. Шишкина, А.И. Нейштадта, С.К.Каримова, Г.М. Анарбаевой, К.С. Алыбаева.

В работе С.К.Каримова обобщаются результаты работы М.А. Шишковой на более широкий класс систем. К.С. Алыбаев создал метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных задач при нарушении условия устойчивости. Для решения сингулярно возмущенных задач вводятся размеченные (строго и нестрого) множества, эти множества ограниченные и замкнутые. Случай, когда эти множества являются бесконечными или открытыми, не рассматривался. Эти множества определяются, исходя из свойств линий уровня гармонических функций. Применение линий уровня гармонических функций упрощает изучение поставленной задачи.

Как обычно, приближенное решение возмущенной задачи строится методом последовательных приближений. При этом главным является доказательство равномерной сходимости последовательных приближений и получение оценки близости решений возмущенной и невозмущенной задачи на отрезке, содержащем неустойчивый интервал.

При доказательстве равномерной сходимости последовательных приближений и получении оценки близости решений возмущенной и невозмущенной задачи при нарушении условия устойчивости возникают серьезные трудности для систем линейных неоднородных и нелинейных систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости.

В связи с этими трудностями в работах А. Рожкова и А. Шишкина ограничиваются рассмотрением линейных однородных уравнений относительно быстрых переменных. Если уравнения относительно быстрых переменных нелинейные, то, налагая определенные условия на нелинейные части уравнения, избавляются от этих трудностей. Так было сделано в работах М.А. Шишковой, С.К. Каримова и Г.М. Анарбаевой.

Связь с государственными программами. Работа по теме диссертации выполнялась в соответствии с планами научно-исследовательских работ Ошского государственного университета и по теме научно-исследо-вательского проекта № ОФГИ 031 2004, финансированного ГАНИСом при правительстве Кыргызской Республики.

Цель работы. Доказать существование решений возмущенной задачи на бесконечном промежутке и получение асимптотических оценок близости решений возмущенной и невозмущенной задачи на бесконечном промежутке, который содержит бесконечный неустойчивый интервал, т.е. доказать, что время задержки течения интегральных кривых может быть бесконечным.

Время задержки - эта длина интервала, в котором решение возмущенной задачи стремится к решению невозмущенной задачи при $\varepsilon \to 0$ (ε – малый положительный параметр), хотя при этом не имеет места условие устойчивости.

Методика исследования. В работе использованы асимптотический метод, метод полярных координат, метод последовательных приближений, метод интегрирования по частям, метод вариации произвольных постоянных Лагранжа.

Научная новизна работы. В диссертации получены следующие результаты:

1. Впервые доказывается асимптотическая близость решения возмущенной и невозмущенной задачи в промежутке, содержащем большой неустойчивый интервал;
2. Определен выбор начальной точки из устойчивого интервала, при котором для течения интегральных кривых имеет бесконечное время задержки;
3. Для случая простого полюса в области действительных чисел получены условия для асимптотической близости решения возмущенной и невозмущенной задачи в области, которая содержит большой неустойчивый интервал;
4. Для решения поставленной задачи получены асимптотические приближения на бесконечном отрезке, содержащем бесконечный неустойчивый интервал.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы являются развитием теории сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости и могут быть применены для решений различных прикладных задач, приводящихся к таким уравнениям.

Основные положения, выносимые на защиту:

- найдены условия, при которых решения сингулярно возмущенных задач асимптотически близки к решению невозмущенной системы в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют n-кратный полюс;
- найдены условия, при которых в действительном анализе можно доказать асимптотическую близость решения сингулярно возмущенных и невозмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют простой полюс;
- найдены условия, при которых течение интегральных кривых может иметь бесконечное время задержки;
- доказано, что если собственные значения имеют n-кратный полюс ($n>1$), то время задержки течения интегральных кривых может быть бесконечным.

Личный вклад автора. Постановка задачи принадлежит научному руководителю К.С. Каримову, а получение основных результатов осуществлено автором.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались: на семинарах кафедры математического анализа Ошского Государственного университета (1999-2004 гг., руководитель – д.ф.-м.н., проф. С.К.Каримов); на семинарах факультета компьютерных технологий ОшГУ, руководитель – д. ф.-м. н., проф. А.С.Сопуев; на международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 70-летию академика

М.И.Иманалиева (г. Бишкек – 2001 г.); на международной научной конференции «Современные проблемы химии и химической технологии. Актуальные вопросы естественных и гуманитарных наук», посвященной 50-летию ОшГУ и 60-летию академика Б.М. Мурзубраимова (г. Ош – 2001 г.); на международной научно-практической конференции: «Наука и образование для устойчивого горного развития», посвященной Международному году гор (г. Ош – 2002 г.); на международной научно-практической конференции «Университетское образование в современном обществе», посвященной 10-летию Ошского Государственного Университета (г. Ош – 2002 г.); на весенней сессии молодых ученых и аспирантов «Активизация творческих возможностей молодых ученых вузов юга Кыргызстана», проект «Гражданского образования» (г. Ош – 2002 г.); на международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы физики, математики и информатики», посвященной 2200-летию Кыргызской государственности и 60-летию д.ф.-м.н., профессора ОшГУ Б.А.Арапова (г. Ош – 2003 г.); на международной научно–теоретической конференции молодых ученых «Проблемы общественного развития, науки и образования», посвященной Дню независимости Республики Казахстан (г. Чымкент – 2003 г.).

Публикации. Основное содержание настоящей работы опубликовано в статьях [8-10] и в материалах конференций [1-7]. В совместных работах с А.Камбаровой [4,9] и с С.К.Каримовым [1,2,3], постановка задачи принадлежит им, а получение основных результатов осуществлено автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, состоящих из 6 параграфов, заключения, списка литературы, содержащего 48 наименований, и приложений. Объем текста 110 страниц.

Краткое содержание работы

Вводятся обозначения:

N, R, C - множества натуральных, действительных и комплексных чисел соответственно.

$S_r = \{(t_1,t_2): \delta^2 \le t_1^2 + (t_2+1)^2 < r^2, \delta^2 \le t_1^2 + (-t_2+1)^2 < r^2\}$, где $0<\delta<1/2$, $r > \sqrt{4T_0^2+1}$, T_0 – некоторое постоянное. $\Phi(S_r)$ – пространство аналитических функций в S_r. $\Phi_0(S_r)$ – пространство непрерывных функций в S_r. Запись «отрезок $[(t_1;t_2),(\tilde{t}_1;\tilde{t}_2)]$» означает прямолинейный отрезок, соединяющий точки $[(t_1;t_2),(\tilde{t}_1;\tilde{t}_2)]$; «дуга $[(t_1;t_2),(\tilde{t}_1;\tilde{t}_2)]$» будет означать гладкую кривую, соединяющую точки $(t_1;t_2),(\tilde{t}_1;\tilde{t}_2)$. Норма вектор-функции $x(t)=colon\{x_1(t),x_2(t)\}$ определена равенством $\|x(t)\| = \max_j |x_j(t)|$, $j=1,2$.

$A(t)=\{a_{jk}(t)\}$, $(j,k=1,2)$ означает 2×2 матрицу и $\|A(t)\| = \max_j \sum_{k=1}^{2} |a_{jk}(t)|$. Во всей работе $i=\sqrt{-1}$, ε - малый параметр, $0<\varepsilon<\varepsilon_0<1$. $u(t,\tau) = Re\int_\tau^t \lambda_1(s)ds$, $u(t_1,t_2) = Re\int_{t_0}^{t_1+it_2} \lambda_1(s)ds$, $u(t_1,-t_2) = Re\int_{t_0}^{t_1+it_2} \lambda_2(s)ds$. Черта над выражением означает комплексную сопряженность. Постоянные, которые встречаются в вычислениях и не играют существенную роль, обозначаются буквой c. Симметрию, по умолчанию, будем понимать относительно действительной оси.

В предлагаемой диссертационной работе исследуются решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости, когда комплексно сопряженные собственные значения матрицы коэффициентов линейной части системы имеют кратный полюс в комплексной плоскости.

Наиболее близкими к данной работе являются следующие результаты К.С. Алыбаева. Им рассмотрена задача

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=A(t)x(t,\varepsilon)+f(t, x(t,\varepsilon))+\varepsilon g(t, x(t,\varepsilon)), \qquad (1)$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon),\ \|x^0(\varepsilon)\|=O(\varepsilon), \qquad (2)$$

где $t\in\Omega_\rho$ - открытый круг радиуса $\rho > \sqrt{(t_0+T_0)/4+D^2}$, $D>0$, с центром в точке $((t_0+T_0)/2;0)$; $f(t,x)=colon\{f_1(t,x),f_2(t,x)\}$, $f_j(t,x)\in C$; $g(t,x)= = colon\{g_1(t,x),g_2(t,x)\}$, $g_j(t,x)\in C$; $j=1,2$; решение $x(t,\varepsilon)=colon\{x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon)\}$ ищется в классе $Q(\Omega_\rho)$ аналитических функций в Ω_ρ;
$A(t)=diag((t+i)^{-n-1}, (t-i)^{-n-1})$, $n=0$ или $n\in N$.

Функции $f(t,x)$, $g(t,x)$ удовлетворяют условиям:
$f(t,0)=0$; $\|f(t,x)-f(t,y)\| \le M\|x-y\| \max\{\|x\|,\|y\|\}^\beta$;
$\|g(t,x)-g(t,y)\| \le M\|x-y\|^\beta$, $M>0$ – $const$, $0<\beta$;
в области $\Delta=\{(t,x_1,x_2): t\in\Omega_\rho, |x_j|<\delta, (j=1,2), 0<\delta - const\}$.
А также требуется выполнение условий:

$$\frac{\partial A_1(t_1,t_2)}{\partial t_2} > 0, \qquad \frac{\partial A_2(t_1,t_2)}{\partial t_2} < 0, \qquad (3)$$

где $A_k(t_1,t_2) = \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t_1+it_2} \lambda_k(s)ds$, $k=1,2$.

При выполнении указанных условий для решения задачи (1)-(2) К.С. Алыбаевым получены результаты:

Для случая, когда собственные значения $\lambda_{1,2}(t)$ матрицы-функции $A(t)$ имеют простой полюс $(n=0)$

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le 2c\,\omega_{30}(t,\varepsilon),\ c=const, \qquad (4)$$

$$\omega_{30}(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon, & -\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3-4\varepsilon^{\lambda}+\varepsilon^{2\lambda}}\\ \varepsilon^{1-\lambda}, & \sqrt{3-4\varepsilon^{\lambda}+\varepsilon^{2\lambda}}\le t\le\sqrt{3}\end{cases},\quad 0<\lambda<1/2 \text{ и } t_0=-\sqrt{3}.$$

Для случая, когда собственные значения $\lambda_{1,2}(t)$ матрицы-функции $A(t)$ имеют двух-кратный полюс $(n=1)$, доказано, что

$$\|x(t,\varepsilon)\|\le 2c\,\omega_{40}(t,\varepsilon),\ c=const, \tag{5}$$

$$\omega_{40}(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon, & 2-\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3-4\varepsilon^{\lambda}+\varepsilon^{2\lambda}}+2-\varepsilon^{\lambda}\\ \varepsilon^{1-\lambda}, & \sqrt{3-4\varepsilon^{\lambda}+\varepsilon^{2\lambda}}+2-\varepsilon^{\lambda}\le t\le 2+\sqrt{3}\end{cases},\quad 0<\lambda<1/2 \quad \text{и}$$

$t_0=2-\sqrt{3}$.

Для случая, когда собственные значения $\lambda_{1,2}(t)$ матрицы-функции $A(t)$ имеют n–кратный полюс $(n>2)$, определен только путь интегрирования в одной из исследованных областей. Оценки для решения поставленной задачи не показано.

Ранее другими авторами существование решений возмущенной задачи вида (1)-(2) и оценки близости решений возмущенной и невозмущенной задачи при $\varepsilon\to 0$ на бесконечном промежутке не рассматривались.

В диссертации получены следующие оценки для решения (1)-(2):

1) для случая, когда $t_0\in(-\infty,0)$ и собственные значения $\lambda_{1,2}(t)$ матрицы-функции $A(t)$ имеют простой полюс

$$\|x(t,\varepsilon)+A^{-1}(t)f(t)\|\le c\varepsilon, \qquad \text{при } t\in[t_0,-t_0],\ c=const. \tag{6}$$

2) для случая, когда $t_0=ctg\dfrac{\pi}{2(n-1)}$ и собственные значения $\lambda_{1,2}(t)$ матрицы-функции $A(t)$ имеют n-кратный полюс $(n\ge 2)$

$$\|x(t,\varepsilon)+A^{-1}(t)f(t)\|\le c\varepsilon, \quad \text{при } t\in\left[ctg\frac{\pi}{2(n-1)},T_0\right], \tag{7}$$

где $c>0$, $T_0>1$ – постоянные числа.

Для случая, когда собственные значения матрицы-функции $A(t)$ имеют n–кратный полюс $(n\ge 2)$, доказано, что оценка (7) имеет место на отрезке $t\in\left[ctg\dfrac{\pi}{2(n-1)},T_0\right]$, а оценка (5) $(n=2)$ – на $t\in\left[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right]$, т.е. имеет место на конечном отрезке. Эти результаты диссертации улучшают указанные выше результаты.

Переходим к изложению краткого содержания настоящей работы.

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, обзор работ других авторов и приводится краткое содержание работы.

В первой главе, состоящей из трех параграфов, исследуется асимптотические поведение решений сингулярно возмущенных задач в

случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют простой и двухкратный полюс.

В § 1.1 рассматривается постановка задачи:

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=A(t)x(t,\varepsilon)+f(t), \tag{8}$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0, \tag{9}$$

где $A(t)$ - квадратная матрица-функция второго порядка, с элементами $a_{jk}(t)$, $f(t)=colon\{f_1(t),f_2(t)\}$, $a_{jk}(t)$, $f_k(t)$ – аналитические функции, т.е. $a_{jk}(t)$, $f(t)\in\Phi(S_r)$ $(j,k=1,2)$, $(j,k=1,2)$, $x^0=colon\{x_1^0,x_2^0\}$ - постоянный вектор, $t\in[t_0,T_0]$, $t_0<T_0$.

Матрица-функция $A(t)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения: $\lambda_1(t)=(t+i)^{-n}$, $\lambda_2(t)=(t-i)^{-n}$, $n\in N$.

Систему (8) можно рассматривать как возмущенную по отношению к вырожденной системе

$$A(t)\bar{x}(t)+f(t)=0. \tag{10}$$

В рассматриваемом случае собственные значения $\lambda_1(t)=\overline{\lambda_2}(t)$, тождественно не равны между собой, $\lambda_{1,2}(t)\ne 0$ при $t\in R$, поэтому вырожденная система (10) имеет единственное решение $\tilde{x}(t)=-A^{-1}(t)f(t)$.

Система (8) с заменой $x(t,\varepsilon)=y(t,\varepsilon)+g(t)$, где $g(t)=-A^{-1}(t)f(t)$, $y(t,\varepsilon)$ – новая неизвестная вектор–функция, принимает вид:

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)=A(t)y(t,\varepsilon)-\varepsilon g'(t). \tag{11}$$

Пусть для собственных значений $\lambda_{1,2}(t)$ матрицы-функции $A(t)$ имеют места неравенства $Re\lambda_{1,2}(t_0)<0$. Тогда, как известно из работы А.Б. Васильевой, что решение (8), удовлетворяющее условию $x(t_0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)$, $\|x^0(\varepsilon)\|==O(\varepsilon)$, при $t=t_0+\delta$ будет удовлетворять условию $\|x(t_0+\delta,\varepsilon)-g(t_0+\delta)\|=O(\varepsilon)$, где δ – достаточно малое положительное число, не зависящее от ε.

Поэтому начальное условие, не нарушая общности, можно предположить

$$y(t_0,\varepsilon)=y^0(\varepsilon),\ \|y^0(\varepsilon)\|=O(\varepsilon). \tag{12}$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$B_0^{-1}(t)A(t)B_0(t)=D(t)$, где $A(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\end{pmatrix}$, $D(t)=diag(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t))$,

$$B_0(t)=\begin{pmatrix}(\lambda_1(t)-a_{22}(t))/a_{21}(t) & (\lambda_2(t)-a_{22}(t))/a_{21}(t)\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$\lambda_{1,2}(t)$ – собственные значения матрицы-функции $A(t)$:

$$\lambda_{1,2}(t)=(a_{11}(t)+a_{22}(t)\pm\sqrt{(a_{11}(t)-a_{22}(t))^2+4a_{21}(t)a_{12}(t)})/2.$$

Так как по условию, матрица-функция $A(t)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения, то должно выполняться условие:

$(a_{11}(t)-a_{22}(t))^2+4a_{12}(t)a_{21}(t)<0$, отсюда $a_{12}(t)\neq 0$, $a_{12}(t)\neq 0$, $a_{12}(t)a_{21}(t)<0$, при $t\in R$;

$det\ B_0(t)=(-a_{22}(t)+\lambda_1(t)+a_{22}(t)-\lambda_2(t))/a_{21}(t)=(\lambda_1(t)-\lambda_2(t))/a_{21}(t)\neq 0.$

Это означает, что существует обратная матрица–функция $B_0^{-1}(t)$.

Система (11) с заменой $y(t,\varepsilon)=B_0(t)z(t,\varepsilon)$, принимает вид:

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon)=D(t)z(t,\varepsilon)+\varepsilon B(t)\,z(t,\varepsilon)+\varepsilon h(t), \tag{13}$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon)=z^0(\varepsilon),\ \|z^0(\varepsilon)\|=O(\varepsilon), \tag{14}$$

где $B(t)=-B_0^{-1}(t)B_0'(t)$, $h(t)=-B_0^{-1}(t)g'(t)$.

Задача (13)-(14) приводится к эквивалентной задаче:

$$z(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)z^0+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)(B(\tau)z(\tau,\varepsilon)+h(\tau))d\tau E(t,\tau,\varepsilon)=\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds), \tag{15}$$

в S_r справедливы неравенства: $\|h(t)\|\le b$, $\|B(t)\|\le b$,

где $b>0$ – постоянное, не зависящее от t.

Пусть

$$z(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}v(t,\varepsilon)\\ w(t,\varepsilon)\end{pmatrix},\ B(t)=\begin{pmatrix}b_{11}(t) & b_{12}(t)\\ b_{21}(t) & b_{22}(t)\end{pmatrix},\ h(t)=\begin{pmatrix}h_1(t)\\ h_2(t)\end{pmatrix},$$

$$E_j(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda_j(s)ds\right),\ j=1,2;$$

$P(v,w,t)=b_{11}(t)v+b_{12}(t)w$, $Q(v,w,t)=b_{21}(t)v+b_{22}(t)w$.

Задача (15) записывается в скалярном виде:

$$\begin{cases} v(t,\varepsilon)=v^0E_1(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)h_1(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)P(v,w,\tau)d\tau \\ w(t,\varepsilon)=w^0E_2(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)h_2(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)Q(v,w,\tau)d\tau \end{cases}, \tag{16}$$

из (14) следует: $|v^0|=|v^0(t_0,\varepsilon)|=O(\varepsilon)$; $|w^0|=|w^0(t_0,\varepsilon)|=O(\varepsilon)$.

Задача (16) решается методом последовательных приближений $v_0(t,\varepsilon)\equiv 0$, $w_0(t,\varepsilon)\equiv 0$,

$$v_1(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)E_1(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)h_1(\tau)d\tau,$$

$$w_1(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)E_2(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)h_2(\tau)d\tau,$$

$$v_m(t,\varepsilon)=v_1(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)P(v_{m-1},w_{m-1},\tau)d\tau,$$

$$w_m(t,\varepsilon)=w_1(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)Q(v_{m-1},w_{m-1},\tau)d\tau,$$

где $|b_{kj}(t)|\le c_0/2$, $(k,j=1,2)$.

Если при $t_0\le t<t^*$ имеет место неравенство $Re\lambda_{1,2}(t)<0$, то на этом отрезке имеет место заключение известной теоремы А.Н. Тихонова, т.е. последовательность $\{v_m(t,\varepsilon)\}$ имеет предел $v(t,\varepsilon)$, а последовательность $\{w_m(t,\varepsilon)\}$ имеет предел $w(t,\varepsilon)$, причем $v(t,\varepsilon)$, $w(t,\varepsilon)$ представляют собой решение задачи (16) и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}v(t,\varepsilon)=0,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}w(t,\varepsilon)=0. \tag{17}$$

А если при $t_0\le t\le T_0$ функция $u(t,\tau)$ меняет знак, то оценить последовательные приближения $\{v_m(t,\varepsilon)\}$, $\{w_m(t,\varepsilon)\}$ в действительной области не удается. Для оценки функций $v_m(t,\varepsilon)$, $w_m(t,\varepsilon)$ переменная t считается комплексной, следовательно, $v_m(t,\varepsilon)$, $w_m(t,\varepsilon)$ комплексными величинами. Затем используются известные свойства интегралов от аналитических функций.

Пусть $t=t_1+it_2$, $\tau=\tau_1+i\tau_2$, где t_1,t_2,τ_1,τ_2 - действительные переменные.

$$u(t_1,t_2)\equiv \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t_1+it_2}(s+i)^{-n}ds\le 0, u(t_1,t_2)\equiv \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t_1+it_2}(s+i)^{-n}ds\le 0.$$

Рассмотрена область точек $(t_1;t_2)$, для которых справедливы неравенства

Проведено исследование $v_m(t,\varepsilon)$, $w_m(t,\varepsilon)$ в этой области.

Имеют место неравенства:

$$|v_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le|v^0E_1(t_1,t_2,\varepsilon)|+|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)|; \tag{18}$$

$$|v_m(t_1,t_2,\varepsilon)|\le|v_1(t_1,t_2,\varepsilon)|+|J_m(t_1,t_2,\varepsilon)|; \tag{19}$$

$$|w_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le|w^0E_2(t_1,t_2,\varepsilon)|+|\tilde J_1(t_1,t_2,\varepsilon)|; \tag{20}$$

$$|w_m(t_1,t_2,\varepsilon)|\le|w_1(t_1,t_2,\varepsilon)|+|\tilde J_m(t_1,t_2,\varepsilon)|; \tag{21}$$

где $$|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le\sum_j\int_{l_1^j}e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}}|h_1(\tau_1,\tau_2)|\sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2};$$

$$|J_m(t_1,t_2,\varepsilon)|\le\sum_j\int_{l_m^j}e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}}|P(v_{m-1},w_{m-1},\tau_1,\tau_2)|\sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2};$$

$$|\tilde J_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le\sum_j\int_{\tilde l_1^j}e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(\tau_1,-\tau_2)}{\varepsilon}}|h_2(\tau_1,\tau_2)|\sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2};$$

$$\left|\tilde{J}_m(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le \sum_J \int_{\tilde{l}_m^j} e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(\tau_1,-\tau_2)}{\varepsilon}} \left|Q(v_{m-1},w_{m-1},\tau_1,\tau_2)\right| \sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2}\,;$$

$l_m, \tilde{l}_m$ – пути интегрирования m–го приближения, соединяющие точки $(t_0;0)$ и $(t_1;t_2)$, $l_m^j, \tilde{l}_m^j$ – отрезки этих путей.

Подробно рассмотрен каждый случай n.

В § 1.2 доказана

Теорема 1.2.1. Пусть $t_0<0$, $B_0(t)$ – $const$, $/\ h_{1,2}^{(m)}(t)/\le cb^m$, $t\in[t_0,-t_0]$ и выполняется условие U_{11}: матрица-функция $A(t)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения: $\lambda_1(t)=(t+i)^{-1}$, $\lambda_2(t)=(t-i)^{-1}$. Тогда задача (8)-(9) имеет единственное решение и для него справедлива оценка (6).

Доказательство теоремы проведено в области действительных чисел. Не требуя выполнения условия $/\ h_{1,2}^{(m)}(t)/\le cb^m$, доказательство приведено в комплексном анализе. В комплексной плоскости определена область исследования, содержащая отрезок $t\in[t_0,-t_0]$. Путь интегрирования выбран так, чтобы получить наилучшую оценку.

Путь интегрирования L состоит: из части радиус вектора $[(\rho_0;\varphi_0),(\rho_0+\alpha;\varphi_0)]$; из дуги $[(\rho_0+\alpha;\varphi_0),(\rho_0+\alpha;\varphi_t)]$; из части радиус вектора $[(\rho_0+\alpha;\varphi_t),(\rho_t;\varphi_t)]$, $\alpha>0$ - $const$, $\tilde{L}$ - симметрично L, где $t_1=\rho_t cos\varphi_t$, $t_2+1=\rho_t sin\varphi_t$, $\tau_1=\rho cos\varphi$, $\tau_2+1=\rho sin\varphi$, $\varphi_0=arctg(1/t_0)$, $\rho_0=\sqrt{1+t_0^2}$.

Пример. Пусть матрица-функция $A(t)$ имеет вид $A(t)=\frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t\end{pmatrix}$,

$\lambda_1(t)=(t+i)^{-1}$, $\lambda_2(t)=(t-i)^{-1}$. Тогда $B_0(t)=\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

На практике проверка некоторых полученных в диссертации оценок для решения задачи (8)-(9), может вызвать серьезные затруднения. В §1.2 требуется найти оценку интеграла:

$\int_l \left(\frac{\rho_t}{\rho}\right)^{1/\varepsilon} \sqrt{d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2}$, где $L=L_1\cup L_2\cup L_3$ – соединяет точки (ρ_0,φ_0) и (ρ_t,φ_t), т.е. оценки интегралов:

$\int_{\rho_0}^{\rho_0+\alpha} \left(\frac{\rho_t}{\rho}\right)^{1/\varepsilon} d\rho$, где $\rho_0^2=1+t_0^2$, α - фиксированное число, $\alpha\in(0,1)$;

$\int_{\varphi_0}^{\varphi_t} \left(\frac{\rho_t}{\rho_0+\alpha}\right)^{1/\varepsilon} (\rho_0+\alpha)d\varphi$, где $\varphi_0=arctg(1/t_0)$, $\rho_t=\sqrt{t_1^2+(t_2+1)^2}$;

$\int_{\rho_0+\alpha}^{\rho_t} \left(\frac{\rho_t}{\rho}\right)^{1/\varepsilon} d\rho$, значения для ε, α, t_0 задаются.

Листинг программы и результаты расчета, подтверждающие оценку (6), приведены в Приложении 2 к диссертации.

В § 1.3 рассматривается задача (8)-(9).

Теорема 1.3.1. Пусть выполняется условие U_{12}: матрица-функция $A(t)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения: $\lambda_1(t)=(t+i)^{-2}$, $\lambda_2(t)=(t-i)^{-2}$; $t_0=0$. Тогда задача (8)-(9) имеет единственное решение и для него справедлива оценка: $||x(t,\varepsilon)+A^{-1}(t)f(t)||\le c\varepsilon$ при $0\le t\le T_0$, где $c>0$, $T_0>1$ – постоянные числа.

Доказательство теоремы приводится с помощью комплексного анализа. Исследование проводится в области H_α содержащей отрезок действительной оси $0\le t\le T_0$,

где $H_\alpha=\left\{(t_1;t_2): u(t_1,t_2)\le -\frac{\alpha}{1+\alpha^2},\ u(t_1,-t_2)\le -\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right\}$.

Область H_α делится на три части H_0, H_1, H_2 ($H_\alpha=H_0\cup H_1\cup H_2$), где

$$H_0=\left\{(t_1;t_2): u(t_1,t_2)\le -\frac{\alpha}{1+\alpha^2},\ u(t_1,-t_2)\le -\frac{\alpha}{1+\alpha^2},\ (t_2+1)\ge \alpha t_1,\ (-t_2+1)\ge \alpha t_1\right\}$$

$$H_1=\left\{(t_1;t_2): u(t_1,t_2)\le -\frac{\alpha}{1+\alpha^2},\ (-t_2+1)\le \alpha t_1\right\},$$

$$H_2=\left\{(t_1;t_2): u(t_1,-t_2)\le -\frac{\alpha}{1+\alpha^2},\quad (t_2+1)\le \alpha t_1\right\},$$

$$u(t_1,t_2)=-t_1/\left(t_1^2+(t_2+1)^2\right),\ 0<\alpha<1/T_0.$$

Для каждой части области путь интегрирования выбирается по-разному. Путь интегрирования состоит из:

1) если $(t_1;t_2)\in H_0$, то $l_1=l_1^1\cup l_1^2\cup l_1^3$, $\tilde{l}_1=\tilde{l}_1^1\cup\tilde{l}_1^2\cup\tilde{l}_1^3$, при этом $\tilde{l}_1$ симметрично l_1. При l_1^1: отрезок $\tau_2=0$, $0\le\tau_1\le\alpha$; l_1^2: верхняя часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_2)=u(\alpha,0)$, $\alpha\le\tau_1\le\alpha_1$, $\alpha_1=-(1+\alpha^2)t_1u(t_1,t_2)/\alpha$, l_1^3: отрезок прямой $(\tau_2+1)t_1=(t_2+1)\tau_1$, $t_1\le\tau_1\le\alpha_1$.

2) если $(t_1;t_2)\in H_1$, то $l_1=l_1^1\cup l_1^2\cup l_1^3$, $\tilde{l}_1=\tilde{l}_1^1\cup\tilde{l}_1^2\cup\tilde{l}_1^3\cup\tilde{l}_1^4$, Здесь l_1 та же l_1, что в H_0, определено $\tilde{l}_1$. При $\tilde{l}_1^1$: отрезок прямой $\tau_2=0$, $0\le\tau_1\le\alpha$; $\tilde{l}_1^2$: нижняя часть линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2)=u(\alpha,0)$, $\alpha\le t_1\le 1/\alpha$; $\tilde{l}_1^3$: верхняя часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_2)=u(\alpha,0)$, $\alpha\le t_1\le 1/\alpha$, $\tilde{l}_1^4$: отрезок прямой $(-\tau_2+1)t_1=(-t_2+1)\tau_1$, $t_1\le\tau_1\le\alpha_1$, где α_1 – абсцисса точки пересечения линии уровня $u(\tau_1,\tau_2)=u(\alpha,0)$ с прямой $(-\tau_2+1)t_1=(-t_2+1)\tau_1$.

3) если $(t_1;t_2)\in H_2$, то $l_1 = l_1^1 \cup l_1^2 \cup l_1^3 \cup l_1^4$, $\tilde{l}_1$ – та же $\tilde{l}_1$, что в H_0. l_1 симметрично $\tilde{l}_1$, $\tilde{l}_1$ – путь интегрирования в H_1.

В второй главе, состоящей из двух параграфов, исследуются асимптотические поведения решений сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют трехкратный и четырехкратный полюс.

В § 2.1 доказана

Теорема 2.1.1. Пусть выполняется условие U_{21}: матрица-функция $A(t)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения: $\lambda_1(t)=(t+i)^{-3}$, $\lambda_2(t)=(t-i)^{-3}$; $t_0=1$. Тогда задача (8)-(9) имеет единственное решение и для него справедлива оценка: $\|x(t,\varepsilon)+A^{-1}(t)f(t)\|\le c\varepsilon$ при $1\le t\le T_0$, где $c>0$, $T_0>1$ – постоянные числа.

Исследование проводится в области H_α, содержащей отрезок действительной оси $1\le t\le T_0$, где $H_\alpha=\{(t_1;t_2):\ u(t_1,t_2)\le u(1+\alpha,0),\ u(t_1,-t_2)\le u(1+\alpha,0)\}$.

$H_1=\{(t_1;t_2):\ u(t_1,t_2)\le u(1+\alpha,0),\ c_\alpha(-t_2+1)\le t_1\}$,
$H_0=\{(t_1;t_2):\ u(t_1,t_2)\le u(1+\alpha,0),\ c_\alpha(t_2+1)\ge t_1,\ u(t_1,-t_2)\le u(1+\alpha,0),\ c_\alpha(-t_2+1)\ge t_1\}$,
$H_2=\{(t_1;t_2):\ u(t_1,-t_2)\le u(1+\alpha,0),\ c_\alpha(t_2+1)\le t_1\}$,
$0<\alpha<1/6$, α - фиксированное число, $c_\alpha=\sqrt{1+\dfrac{4}{(1+\alpha)^2-1}}$,

$$u(t_1,t_2)=-\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\left(t_1^2+(t_2+1)^2\right)^2}.$$

Для каждой части области путь интегрирования выбирается по-разному. Путь интегрирования состоит из:

1) если $(t_1;t_2)\in H_0$, то $l_m=l_m^1\cup l_m^2\cup l_m^3$, $\tilde{l}_m=\tilde{l}_m^1\cup\tilde{l}_m^2\cup\tilde{l}_m^3$, при этом $\tilde{l}_m$ симметрично l_m относительно действительной оси. При l_m^1: отрезок прямой $\tau_2=0$, $1\le\tau_1\le 1+\alpha$; l_m^2: верхняя часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_1)=u(1+\alpha,0)$, $1+\alpha\le\tau_1\le t_1^*$, t_1^*- абсцисса точки пересечения линии уровня $u(\tau_1,\tau_1)=u(1+\alpha,0)$ с прямой $(\tau_2+1)t_1=(t_2+1)\tau_1$; l_m^3: отрезок прямой $(\tau_2+1)t_1=(t_2+1)\tau_1$, $t_1\le\tau_1\le t_1^*$.

2) если $(t_1;t_2)\in H_1$, то $l_m=l_m^1\cup l_m^2\cup l_m^3$, $\tilde{l}_m=\tilde{l}_m^1\cup\tilde{l}_m^2\cup\tilde{l}_m^3\cup\tilde{l}_m^4$. Здесь l_m та же l_m, что в H_0, определяется $\tilde{l}_m$. При $\tilde{l}_m^1$: отрезок прямой $\tau_2=0$, $1\le\tau\le 1+\alpha$; $\tilde{l}_m^2$: нижняя часть линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2)=u(1+\alpha,0)$, $1+\alpha\le t_1\le c_\alpha$; $\tilde{l}_m^3$: верхняя часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_2)=u(1+\alpha,0)$, $t_1^*\le\tau_1\le c_\alpha$ t_1^* – абсцисса точки

пересечения линии уровня $u(\tau_1,\tau_2)=u(1+\alpha,0)$ с прямой $(-\tau_2+1)t_1=(-t_2+1)\tau_1$; $\tilde{l}_m^4$: отрезок прямой $(-\tau_2+1)t_1=(-t_2+1)\tau_1$, $t_1\le\tau_1\le t_1^*$.

3) если $(t_1;t_2)\in H_2$, то $l_m=l_m^1\cup l_m^2\cup l_m^3\cup l_m^4$, $\tilde{l}_m$ – та же $\tilde{l}_m$, что в H_0. l_m симметрично $\tilde{l}_m$ – путь интегрирования в H_1;

В параграфе 2.2 доказана

Теорема 2.2.1. Пусть выполняется условие U_{22} : матрица-функция $A(t)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения: $\lambda_1(t)=(t+i)^{-4}$, $\lambda_2(t)=(t-i)^{-4}$, $t_0=\sqrt{3}$. Тогда задача (8)-(9) имеет единственное решение и для него справедлива оценка: $\|x(t,\varepsilon)+A^{-1}(t)f(t)\|\le c\varepsilon$ при $t\in\left[\sqrt{3},T_0\right]$, где $c>0$, $T_0>1$ – постоянные числа.

Исследование проводится в области H_α, содержащей отрезок действительной оси $t\in\left[\sqrt{3},T_0\right]$,
где $H_\alpha=\left\{(t_1;t_2): u(t_1,t_2)\le u\left(\sqrt{3}+\alpha,0\right),\ u(t_1,-t_2)\le u\left(\sqrt{3}+\alpha,0\right)\right\}$.

Область H_α, делится на три части H_0, H_1, H_2 ($H_\alpha=H_0\cup H_1\cup H_2$),
где $H_1=\left\{(t_1,t_2): u(t_1,t_2)\le u\left(\sqrt{3}+\alpha,0\right),\quad T_\alpha(-t_2+1)\le t_1\right\}$;
$H_0=\left\{(t_1,t_2): u(t_1,t_2)\le u\left(\sqrt{3}+\alpha,0\right), u(t_1,-t_2)\le u\left(\sqrt{3}+\alpha,0\right), T_\alpha(t_2+1)\ge t_1, T_\alpha(-t_2+1)\ge t_1\right\}$;
$H_2=\left\{(t_1,t_2): u(t_1,-t_2)\le u\left(\sqrt{3}+\alpha,0\right),\quad T_\alpha(t_2+1)\le t_1\right\}$;
$0<\alpha<1$, $u(T_0,0)<u\left(\sqrt{3}+a,0\right)<0$, T_α - абсцисса точки пересечения линии уровня $u(t_1,t_2)=u\left(\sqrt{3}+a,0\right)$ и $u(t_1,-t_2)=u\left(\sqrt{3}+a,0\right)$.

Путь интегрирования состоит из:

1) если $(t_1;t_2)\in H_0$, то $l_m=l_m^1\cup l_m^2\cup l_m^3$, $\tilde{l}_m=\tilde{l}_m^1\cup\tilde{l}_m^2\cup\tilde{l}_m^3$, при этом $\tilde{l}_m$ симметрично l_m. При l_m^1: отрезок прямой $\tau_2=0$, $\sqrt{3}\le\tau_1\le\sqrt{3}+\alpha$; l_m^2: верхняя часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_1)=\tilde{c}(\alpha)$, $\sqrt{3}+\alpha\le\tau_1\le t_1^*$, t_1^* - абсцисса точки пересечения линии уровня с прямой $(\tau_2+1)t_1=(t_2+1)\tau_1$; l_m^3: отрезок прямой $(\tau_2+1)t_1=(t_2+1)\tau_1$, $t_1\le\tau_1\le t_1^*$.

2) если $(t_1;t_2)\in H_1$, то $l_m=l_m^1\cup l_m^2\cup l_m^3$, $\tilde{l}_m=\tilde{l}_m^1\cup\tilde{l}_m^2\cup\tilde{l}_m^3\cup\tilde{l}_m^4\cup\tilde{l}_m^5$. Здесь l_m та же l_m, что в H_0, определяется $\tilde{l}_m$: При l_m^1: отрезок прямой $\tau_2=0$, $\sqrt{3}\le\tau_1\le\sqrt{3}+\alpha$; $\tilde{l}_m^2$: нижняя часть линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2)=\tilde{c}(\alpha)$, $\sqrt{3}+\alpha\le t_1\le T_\alpha$; $\tilde{l}_m^3$: отрезок прямой $(-\tau_2+1)t_1=(-t_2+1)\tau_1$, $t_1+\alpha_0\le t_1\le T_\alpha$; $\tilde{l}_m^4$: часть линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2)=u\left(t_1+\alpha_0,-1+\dfrac{-t_2+1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right)$, $t_1^*\le\tau_1\le t_1+\alpha_0$; $0<\alpha_0<1$, t_1^*- абсцисса точки пересечения линии уровня

$u(\tau_1,-\tau_2)=u\left(t_1+\alpha_0,-1+\dfrac{-t_2+1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right)$ с прямой $(-\tau_2+1)t_1=(-t_2+1)\tau_1$;

$\widetilde{l}_m^5$: отрезок прямой $(-\tau_2+1)t_1=(-t_2+1)\tau_1$, $t_1\le\tau_1\le t_1^*$.

3) если $(t_1;t_2)\in H_2$, то $l_m=l_m^1\cup l_m^2\cup l_m^3\cup l_m^4\cup l_m^5$, $\widetilde{l}_m$ - та же $\widetilde{l}_m$, что в H_0. l_m симметрично $\widetilde{l}_m$ - путь интегрирования в H_1.

В третьей главе, состоящей из одного параграфа, исследуются асимптотические поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют n-кратный полюс.

В параграфе 3.1 доказана

Теорема 3.1.1. Пусть выполняется условие U_{31} : матрица-функция $A(t)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения: $\lambda_1(t)=(t+i)^{-n}$, $\lambda_2(t)=(t-i)^{-n}$., $t_0=ctg(\pi/(2n-2))$. Тогда задача (8)-(9) имеет единственное решение и для него справедлива оценка: $||x(t,\varepsilon)+A^{-1}(t)f(t)||\le c\varepsilon$ при $t\in\left[ctg\dfrac{\pi}{2(n-1)},T_0\right]$, где $c>0$, $T_0>1$ – постоянные числа.

Исследование проводится в области H_α содержащий отрезок действительной оси $t\in\left[ctg\dfrac{\pi}{2(n-1)},T_0\right]$,

где $H_\alpha=\left\{(t_1;t_2): u(t_1,t_2)\le u\left(ctg\dfrac{\pi}{2(n-1)}+\alpha,0\right), u(t_1,-t_2)\le u\left(ctg\dfrac{\pi}{2(n-1)}+\alpha,0\right)\right\}$.

Область H_α делится на три части H_0, H_1, H_2 ($H_\alpha=H_0\cup H_1\cup H_2$), где

$$H_0=\left\{\begin{array}{l}(t_1;t_2): u(t_1,t_2)\le u\left(ctg\dfrac{\pi}{2(n-1)}+\alpha,0\right), u(t_1,-t_2)\le u\left(ctg\dfrac{\pi}{2(n-1)}+\alpha,0\right),\\ \qquad T_\alpha(t_2+1)\ge t_1,\ T_\alpha(-t_2+1)\ge t_1\end{array}\right\};$$

$$H_1=\left\{(t_1;t_2): u(t_1,t_2)\le u\left(ctg\dfrac{\pi}{2(n-1)}+\alpha,0\right),\qquad T_\alpha(-t_2+1)\le t_1\right\};$$

$$H_2=\left\{(t_1;t_2): u(t_1,-t_2)\le u\left(ctg\dfrac{\pi}{2(n-1)}+\alpha,0\right),\qquad T_\alpha(t_2+1)\le t_1\right\};$$

$u(T_0,0)<u\left(ctg\dfrac{\pi}{2(n-1)}+\alpha,0\right)<0$, $T_\alpha>T_0$ – абсцисса точки пересечения $u(t_1,t_2)=-c(\alpha)$ и $u(t_1,-t_2)=-c(\alpha)$, $T_0>1$ - постоянное число.

Путь интегрирования состоит из:

1) если $(t_1;t_2)\in H_0$, то $l_m=l_m^1\cup l_m^2\cup l_m^3$, $\widetilde{l}_m=\widetilde{l}_m^1\cup\widetilde{l}_m^2\cup\widetilde{l}_m^3$, при этом $\widetilde{l}_m$ симметрично l_m. При l_m^1 :отрезок прямой $\tau_2=0$, $t_0\le\tau_1\le t_0+\alpha$; l_m^2 : верхняя часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_1)=u(t_0+\alpha,0)$, $t_0+\alpha\le\tau_1\le t_1^*$, t_1^* -

абсцисса точки пересечения линии уровня с прямой $\tau_2+1=(t_2+1)\tau_1/t_1$;

l_m^3 : отрезок прямой $(\tau_2+1)t_1=(t_2+1)\tau_1, t_1\le\tau_1\le t_1^*$.

2) если $(t_1;t_2)\in H_1$, то $l_m=l_m^1\cup l_m^2\cup l_m^3$, $\widetilde{l}_m=\widetilde{l}_m^1\cup\widetilde{l}_m^2\cup\widetilde{l}_m^3\cup\widetilde{l}_m^4\cup\widetilde{l}_m^5$. Здесь l_m та же l_m, что в H_0, определяется $\widetilde{l}_m$. При $\widetilde{l}_m^1$: отрезок прямой $\tau_2=0, t_0\le\tau_1\le t_0+\alpha$; $\widetilde{l}_m^2$:нижняя часть линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2)=u(t_0+\alpha,0)$, $t_0+\alpha\le t_1\le T_\alpha$; $\widetilde{l}_m^3$: прямой $-\tau_2+1=(-t_2+1)\tau_1/t_1$, $t_1+\alpha_0\le t_1\le T_\alpha;\widetilde{l}_m^4$: часть линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2)=u\left(t_1+\alpha_0,1+\dfrac{t_2-1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right)$, $t_1^*\le\tau_1\le t_1+\alpha_0$; t_1^*- абсцисса точки пересечения линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2)=u(t_1+\alpha_0,1+(t_2-1)(t_1+\alpha_0)/t_1)$ с прямой $-\tau_2+1=(-t_2+1)\tau_1/t_1$; $\widetilde{l}_m^5$: отрезок прямой $-\tau_2+1=(-t_2+1)\tau_1/t_1$, $t_1\le\tau_1\le t_1^*$.

3) если $(t_1;t_2)\in H_2$, то $l_m=l_m^1\cup l_m^2\cup l_m^3\cup l_m^4\cup l_m^5$, $\widetilde{l}_m$ - та же $\widetilde{l}_m$, что в H_0. l_m симметрично $\widetilde{l}_m$ - путь интегрирования в H_1.

В Заключении кратко проводится анализ полученных результатов.

В приложении 1 приводятся основные факты из теории функции комплексного переменного, а в приложении 2, листинг 1, приводятся текст программы на языке VBA, составленной для численного решения задачи (8)-(9), когда собственные значения матрицы-функции $A(t)$ имеют простой полюс, и результаты работы программы для проверки полученной оценки (6). В листинге 2 приводится текст программы на языке Borland Pascal 7.0, рисующей линии уровня $u(t_1,t_2)=c$, $u(t_1,-t_2)=c$, ($c=0$, $c\ne0$, $n>1$),

где $u(t_1,t_2)=\mathrm{Re}\int\limits_{t_0}^{t_1+it_2}(s+i)^{-n}ds$, $u(t_1,-t_2)=\mathrm{Re}\int\limits_{t_0}^{t_1+it_2}(s-i)^{-n}ds$.

В полярных координатах линии уровня имеют вид:

$$u(\rho,\varphi)=-\frac{cos(n-1)\varphi}{\rho^n},\quad u(\widetilde{\rho},\widetilde{\varphi})=-\frac{cos(n-1)\widetilde{\varphi}}{\widetilde{\rho}^n},$$

где $\begin{cases}t_1=\rho cos\varphi\\ t_2+1=\rho sin\varphi\end{cases}$, $\begin{cases}t_1=\widetilde{\rho}cos\widetilde{\varphi}\\ -t_2+1=\widetilde{\rho}sin\widetilde{\varphi}\end{cases}$ ("лепестки розы").

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Каримов С.К., Турсунов Д.А. Асимптотические оценки решения одной системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости // Материалы весенней сессии молодых ученых и аспирантов

«Активизация творческих возможностей молодых ученых вузов юга Кыргызстана». – Ош: Билим, 2002. – С. 165-170.

2. Каримов С.К., Турсунов Д.А. Асимптотические оценки одного интеграла в неустойчивой области // Конф., посв. 50-летию ОшГУ и 60-летию акад. НАН КР Мурзубраимова Б.М. / Вестник ОшГУ. - № 3. - Сер. физ.-мат. наук. - 2002. - С.6-7.
3. Каримов С.К., Турсунов Д.А. Исследования решения сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости // Проблемы общественного развития, науки и образования: Материалы междунар. научно–теоретической конф. молодых ученых, посв. Дню независимости Республики Казахстан. – Чымкент, 2003. – С. 31-33.
4. Турсунов Д.А., Камбарова А.Д. Исследование времени задержки течения интегральных кривых для одной сингулярно-возмущенной задачи в неустойчивой области // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Труды Междунар. научн. конф., посв. 70-летию академика М.И. Иманалиева / Вестник Кыргызского государственного Национального университета: Сер. 3. Естественно-технические науки. – Вып. 6. Математические науки. Информатика и информационные технологии. – 2001. - С.272-273.
5. Турсунов Д.А. Исследование асимптотического поведения решения одной системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости// Конф., посв. 10-летию ОшГУ / Вестник ОшГУ. - № 5. - Сер. физ.-мат. наук. - 2002. - С. 124-129.
4. Турсунов Д.А. Асимптотика решения одного класса системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости // Вестник ОшГУ. Сер. физ. - мат. наук. - 2003. - № 6. - С. 183-188.
5. Турсунов Д.А. Асимптотическое поведение решения одной системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости // Вестник ОшГУ. - Сер. физ. -мат. наук. – 2003. - № 6. - С. 188-193.
6. Турсунов Д.А. Исследование решения сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости // Вестник ОшГУ, сер. физ.-мат. наук. - 2003. - № 7. - С. 141-146.
7. Турсунов Д.А., Камбарова А.Д. Исследование одной сингулярно возмущенной задачи в случае смены устойчивости // Вестник ОшГУ, сер. физ.-мат. наук. - 2003. - № 7. - С.80-87.
8. Турсунов Д.А. Асимптотические поведения решения сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости // Журнал актуальной научной информации «Аспиранты и соискатели». – Москва. - 2004. - № 3 (20). – С. 113-117.

Резюме

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович

ТУРУКТУУЛУК ШАРТЫ БУЗУЛГАН, ӨЗДҮК МААНИЛЕРИ n-ЭСЕЛҮҮ УЮЛГА ЭЭ БОЛГОН УЧУРДА СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК АБАЛЫ

Урунттуу сөздөр: дифференциалдык тендеме, баштапкы маселе, сингулярдык козголуу, туруктуу аралык, асимптотика, комплекс түйүндөш, өздүк маанилер, уюл, кичине параметр.

Туруктуулук шарты бузулганда, сингулярдык козголгон сызыктуу тендемелер системасынын коэффициенттеринин матрицасы комплекс түйүндөш өздүк маанилери эселүү уюлга ээ болгондо, баштапкы маселенин чыгарылышына козголбогон системанын чыгарылыштарынын асимптотикалык жакындыгы далилденди.

Резюме

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ, КОГДА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИМЕЮТ n-КРАТНЫЙ ПОЛЮС

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, начальная задача, сингулярное возмущение, устойчивый интервал, асимптотика, комплексно сопряженные, собственные значения, полюс, малый параметр.

Доказано асимптотическая близость решений начальной задачи для систем сингулярно возмущенных и невозмущенных линейных уравнений в случае смены устойчивости, когда комплексно сопряженные собственные значения матрицы коэффициентов системы имеют кратный полюс.

Abstract

Tursunov Dilmurat Abdillajanovich

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS IN CASE OF CHANGING STABILITY WHEN EIGENVALUES HAVE A n-MULTIPLE POLE

Key words: differential equation, initial value problem, singular perturbation, stability interval, asymptotic, complex conjugate, eigenvalue, pole, small parameter.

Asymptotic proximity of solutions of the initial value problem for systems of singularly perturbed and unperturbed linear equations in case of changing stability, when complex conjugate eigenvalues of matrix of coefficients of system have multiple pole is proved.