НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.04.255

На правах рукописи

МАТИЕВА ГУЛБАДАН

УДК 514.75

ЧАСТИЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, СЕТИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Бишкек – 2004

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии Ошского государственного университета.

Научный консультант: академик НАН Кыргызской Республики, доктор физико-математических наук, профессор Борубаев А.А.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Евтушик Л.Е., доктор физико-математических наук, профессор Йозеф Микеш, доктор физико-математических наук, профессор Асанов А.

Ведущая организация: Чувашский государственный педагогический университет

Защита диссертации состоится 12 мая 2004 г. в 14.00 часов на заседании Диссертационного совета Д 01.04.255 по присуждению ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук в Институте математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан 7 апреля 2004 г.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу: Кыргызстан, 720071, Бишкек–71, проспект Чуй, 265-а, Институт математики НАН Кыргызской Республики, Диссертационный совет Д 01.04.255.

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

Дифференциальная геометрия точечных соответствий пространств (проективных, аффинных, евклидовых) равной размерности систематически начала изучаться в двадцатых годах прошлого столетия. Эти работы были посвящены, в основном, отображениям плоскостей. В бывшем Советском Союзе вопросами точечных соответствий пространств равной размерности занимались такие известные математики, как А.П.Норден, В.В.Рыжков, М.А.Акивис, В.Т.Базылев и их ученики, а также другие геометры. В.Т.Базылев предложил изучить точечные соответствия n-мерных проективных, аффинных и евклидовых плоскостей с привлечением введенного им понятия конструктивного графика отображения, которым служит n-мерная поверхность $2n$-мерного пространства, содержащего данные n-мерные подпространства. В работах С.В.Киреевой, М.Н.Марюкова и В.И.Грачевой использование графика отображения позволяет при изучении точечных соответствий применять теорию многомерных поверхностей и теорию многомерных сетей.

Теория распределений на гладких многообразиях является значительной главой современной дифференциальной геометрии. Она получила развитие в работах Г.Ф.Лаптева и Н.М.Остиану, а также других геометров. Теория распределений является естественным обобщением теории поверхностей, и она тесно связана с теорией связностей, поскольку связность на расслоенном пространстве – это горизонтальное распределение на его тотальном пространстве, дополнительное к распределению, касательному к слою.

Теория распределений позволила по-новому подойти к ряду задач геометрии сетей. Основы геометрии плоских многомерных сетей заложены в работах В.Т.Базылева. Им построена также общая теория многомерных сетей на поверхностях проективного и евклидова пространства. Работы В.Т.Базылева, А.В.Столярова, М.К.Кузьмина, Е.К.Сельдюкова и В.А.Тихонова вскрыли тесные связи между теорией распределений и теорией сетей. Отметим некоторые работы, которые примыкают к рассматриваемой теме.

Как уже отмечалось, работы В.Т.Базылева и В.И.Грачевой посвящены изучению точечных соответствий n-мерных проективных, аффинных и евклидовых плоскостей с привлечением графика отображения, которым служит n-мерная поверхность $2n$-мерного пространства, содержащего данные плоскости.

В работах В.Т.Базылева, Е.К.Сельдюкова, М.К.Кузьмина, В.А.Тихонова исследованы задачи по конструктивному построению сетей с помощью распределений.

В.Т.Базылев рассмотрел конструктивный способ задания одномерных распределений, определяющих сеть на поверхности.

В работах М.Н.Марюкова рассматриваются свойства линий кривизны пары p-распределений, заданных в областях Ω, $\overline{\Omega}$ пространства E_n, между которыми установлен диффеоморфизм. Им найдено необходимое и достаточное условие их соответствия в этом отображении. Изучены некоторые свойства сетей, инвариантно связанных с парой p-распределений.

В работах С.В.Киреевой рассматривается в проективном пространстве отображение $g:\Omega \to \overline{\Omega}$, в котором каждая линия двойная, при этом области $\Omega \subset P_n$, $\overline{\Omega} \subset P_n$, нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей. Ей же изучается отображение f области Ω проективного пространства P_n в область $\overline{\Omega} \subset P_n$, переводящее точку A в точку B. Области Ω и $\overline{\Omega}$ нормализованы в смысле А.П.Нордена одним и тем же семейством плоскостей $A \to \Pi_{n-1}(A)$, $B \to \Pi_{n-1}(A)$. Изучаются также объекты отображения f и его характеристические направления.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию частичных отображений евклидова пространства, порождаемые заданным распределением, для установления тесных связей между теориями отображений, сетей и распределений.

Заданием p-мерного распределения Δ_p в некоторой области Ω евклидова пространства E_n инвариантным образом определяется распределение $\overline{\Delta}_{n-p}$, ортогонально дополнительное данному распределению.

Когда $p = 1, n = 3$ в области $\Omega \subset E_3$ имеем семейство гладких линий (интегральные линии 1-мерного распределения Δ_1) такое, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. На каждой прямой $(X,\vec{e}_i)$ (где $(X,\vec{e}_i)$-координатные прямые репера Френе для линии ω^1 заданного семейства, $i, j = 1,2,3$) инвариантным образом определяется точка $F_i^j (i \neq j)$, так называемая псевдофокусом этой прямой. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_i^j описывает свою область Ω_i^j. Получается отображение f_i^j области Ω в область Ω_i^j такое, что точка X переходит в точку F_i^j.

При $p>1$ имеем два вектора $\vec{M}_p$, $\vec{\overline{M}}_{n-p}$- вектора средних кривизн распределений Δ_p, $\overline{\Delta}_{n-p}$ соответственно. Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_n$ точка M, определенная радиус-вектором $\vec{M} = \vec{M}_p + \vec{\overline{M}}_{n-p}$, описывает свою область $\overline{\Omega}$. Получим отображение $f:\Omega \to \overline{\Omega}$ такое, что точка X переходит в точку M.

Таким образом, возникает актуальная проблема: исследовать эти частичные отображения в тесной связи с геометриями распределений $\Delta_p \subset \Omega$ и сетей, определяемых заданным распределением Δ_p.

В диссертационной работе дано решение этой проблемы и рассмотрены близкие к ней вопросы.

Цель работы.

1. Выявление зависимостей между существованием и расположением фокусов, псевдофокусов и гармонических полюсов касательных к линиям сети Френе $\sum_F$ в области $\Omega \subset E_3$, кривизнами и кручениями этих линий.
2. Получение необходимых и достаточных условий ортогональности образа сети Френе в частичных отображениях $f_i^j:\Omega \to \Omega_i^j$, существования двойных и характеристических линий этих отображений $(i \neq j;\ i, j, k = 1,2,3)$.
3. Выяснение геометрических смыслов некоторых объектов, порождаемых заданным p-мерным распределением $\Delta_p \subset \Omega$.
4. Получение необходимого и достаточного условия минимальности образов распределений Δ_p, $\overline{\Delta}_{n-p}$ в отображении $f:\Omega \to \overline{\Omega}$.
5. Нахождение необходимых и достаточных условий для того, чтобы линии ω^A заданной сети Σ_n были характеристическими линиями отображения $f:\Omega \to \overline{\Omega}$.
6. Построение новых классов сетей и изучение их образов в отображении $f:\Omega \to \overline{\Omega}$ и их взаимосвязь.

Методы исследования.

Основным методом исследования данной работы является метод внешних форм Картана с комбинированием теоретико–группового метода дифференциально–геометрических исследований Г.Ф.Лаптева.

Научная новизна.

Найдены связи между существованием, расположением фокусов, псевдофокусов, гармонических полюсов касательных к линиям сети Френе $\sum_F$, кривизнами и кручениями этих линий. Введено понятие циклической сети Френе.

Получены необходимые и достаточные условия ортогональности образа сети Френе $\sum_F$ в частичных отображениях $f_i^j:\Omega \to \Omega_i^j$, существования двойных и характеристических линий этих отображений.

Найден геометрический смысл объектов, порождаемых заданным p-мерным распределением $\Delta_p \subset \Omega$.

Получены необходимые и достаточные условия минимальности образов распределений Δ_p, $\overline{\Delta}_{n-p}$ в отображении $f:\Omega \to \overline{\Omega}$.

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^A заданной сети Σ_n были характеристическими линиями отображения $f:\Omega\to\overline{\Omega}$.

Практическая и теоретическая значимость.

Результаты, полученные в диссертации, имеют теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях по геометрии отображений погруженных многообразий и в теории сетей на многообразиях. Результаты диссертации также могут быть использованы в теории графов, компьютерной геометрии.

Положения, выдвигаемые на защиту.

Установлены зависимостей между существованием и расположением фокусов, псевдофокусов и гармонических полюсов касательных к линиям сети Френе $\sum_F$, кривизнами и кручениями этих линий. Доказано существование циклической сети Френе $\widetilde{\sum}_F$.

Доказаны необходимые и достаточные условия ортогональности образа сети Френе в частичных отображениях $f_i^j:\Omega\to\Omega_i^j$, существования двойных и характеристических линий этих отображений.

Выяснены геометрические смыслы некоторых объектов, порождаемых заданным распределением Δ_p.

Получены необходимые и достаточные условия минимальности образов распределений Δ_p, $\overline{\Delta}_{n-p}$ в отображении $f:\Omega\to\overline{\Omega}$.

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^A заданной сети $\sum_n$ были характеристическими линиями отображения $f:\Omega\to\overline{\Omega}$.

Построены новые классы сетей и получены необходимые и достаточные условия совпадения этих сетей или их совпадения с известными сетями.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах: Института математики НАН КР (руководитель - академик М.И.Иманалиев), факультета математики, информатики и кибернетики Кыргызского национального университета (руководитель – доктор ф.-м. наук, профессор А.А.Чекеев), факультета физики, математики и информатики ОшГУ (руководитель – доктор ф.-м. наук, профессор К. Алымкулов), на Всесоюзной научной конференции по дифференциальной геометрии (г.Кишинев, 1988), Международной научной конференции «Лобачевский и современная геометрия» (г. Казань, 1992), Восьмой Международной конференции организации «Женщины Европы в математике» (Италия, г. Триест, 1997), Международной научной конференции «Проблемы математики и информатики в XXI веке» (г. Бишкек, 2000), Международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 70-летию академика М.И.Иманалиева (г.Бишкек, 2001), Международной научно-теоретической конференции «Проблемы образования, науки и культуры в начале XXI века» (г. Ош, 2001), Международных научно-практических конференциях: "Университетское образование в современном обществе", посвященной 10-летию преобразования педагогического института в Ошский государственный университет (г. Ош, 2002), "Наука и образование для устойчивого горного развития", посвященной Международному году гор (г. Ош, 2002).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[29]. В работах [5]-[7], [9]-[12], [19], [23], [25], [27] соискателю принадлежит постановка задачи и идеи доказательства, а Г.Борбоевой – получение конкретных результатов. В работах [7] и [20] соискателю принадлежит постановка проблемы и идеи доказательства, а Д.Камиловой – вывод конкретных результатов, в [18], [22], [29] соискателю принадлежит постановка проблемы и идеи доказательства, а Ч.Абдуллаевой - получение конкретных результатов, в [8] соискателю принадлежит постановка проблемы и идеи доказательства, а М.Чамашеву - вывод конкретных результатов.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы из 84 наименований и приложения. Работа содержит 226 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, цель исследования и структура работы.

Приведены обозначения, принятые в работе, и некоторые сведения из теории отображений, сетей и распределений.

В диссертационной работе все рассмотрения носят локальный характер, встречающиеся функции и дифференциальные формы предполагаются необходимое число раз дифференцируемыми.

В первой главе изучены частичные отображения f_i^j пространства E_3, порождаемые заданным семейством гладких линий.

Кратко приведем сведения и обозначения, используемые в этой главе.

В области $\Omega\subset E_3$ задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X\in\Omega$ проходит одна линия этого семейства. Область Ω отнесена к подвижному ортонормированному реперу $R=\left(X,\overrightarrow{e_i}\right)$ $(i,j,k=1,2,3)$, который является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы этого репера имеют вид

$$d\overline{x}=\omega^{i}\overline{e_i},\quad d\overline{e_i}=\omega_i^k\overline{e_k}.$$

Формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики $dg_{AB}=g_{AK}\omega_B^K+g_{KB}\omega_A^K$ и структурным уравнениям евклидова пространства

$$D\omega^{i}=\omega^{k}\wedge\omega_k^i,\quad D\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j,\quad \omega_i^k+\omega_k^i=0\ \ (i\neq k).$$

Контравариантные компоненты g^{BK} метрического тензора g_{AB} определяются из соотношения $g_{AB}\,g^{BK}=\delta_A^K$, где δ_A^K - символ Кронекера.

Интегральные линии ω^i векторных полей $\overline{e_i}$ определяют в области Ω ортогональную сеть Σ_F, называемую сетью Френе. Все формы ω_i^j главные, так как репер R построен на касательных к линиям сети Френе: $\omega_i^j=\Lambda_{ik}^j\omega^k$, где $\Lambda_{ik}^j=-\Lambda_{jk}^i$. Дифференцируя внешним образом эту систему уравнений, и применяя лемму Картана, получим

$$d\Lambda_{ik}^j=\left(\Lambda_{ikm}^j+\Lambda_{ie}^j\Lambda_{km}^e+\Lambda_{ik}^j\Lambda_{im}^e\right)\omega^m\quad\left(\Lambda_{ikm}^j=\Lambda_{imk}^j\right).$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ik}^j,\Lambda_{ikm}^j\right\}$ определяет геометрический объект второго порядка.

Точка $A\in\left(X,\overline{e_i}\right)$, определяемая радиус-вектором $\overline{A}=\overline{X}+\lambda\overline{e_i}$ называется фокусом прямой $\left(X,\overline{e_i}\right)$, если $d\overline{A}\,//\,\overline{e_i}$ при смещении точки X по площадке $\left(X,\overline{e_{\hat k}},\overline{e_{\hat j}}\right)$ (где $\hat k,\hat j=1,2,3;\ \hat k\neq\hat j;\ \hat k,\hat j$-не принимают значения i).

Псевдофокусом касательной $\left(X,\overline{e_i}\right)$ линии ω^i называется такая точка $F_i^j\in\left(X,\overline{e_i}\right)(i\neq j)$, смещение которой принадлежит плоскости $\left(X,\overline{e_{\tilde k}},\overline{e_{\tilde i}}\right)$, когда точка X смещается в направлении ω^j (где $\tilde k,\tilde i=1,2,3;\ \tilde k\neq\tilde i;\ \tilde k,\tilde i$ - не принимают значения j).

В параграфе 1.1. исследованы существование и расположение фокусов, псевдофокусов и гармонических полюсов касательных к линиям сети Френе Σ_F. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы а) $S_1\equiv F_2^1$, $S_2\equiv F_2^3$, где S_1, S_2 - фокусы, F_2^1, F_2^3 - псевдофокусы прямой $(X,\vec e_2)$; б) $Q_1\equiv F_1^3$, $Q_2\equiv F_1^2$, где Q_1, Q_2 - фокусы, F_1^2, F_1^3 - псевдофокусы прямой $(X,\vec e_1)$. Получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы касательная $(X,\vec e_3)$ к линии ω^3 сети Френе имела единственный фокус, совпадающий с единственным псевдофокусом этой прямой (Теорема 1.1.8). Доказано, что если на прямой $(X,\vec e_2)$ существует единственный фокус S, то точка $X\in\Omega$ и гармонический полюс F_2 этой точки $X\in\Omega$ относительно системы двух псевдофокусов F_2^1, $F_2^3\in(X,\vec e_2)$, расположены симметрично относительно этого фокуса.

В параграфе 1.2 введено понятие циклической сети Френе $\widetilde{\Sigma}_F$ и изучен вопрос: как связаны существование и расположение фокусов, псевдофокусов касательных к линиям сети $\widetilde{\Sigma}_F$ с кривизнами и кручениями линий этой циклической сети Френе? Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы сеть Френе была голономной. Получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы сеть Френе являлась циклической сетью Френе.

В параграфе 1.3 рассмотрено частичное отображение $f_3^2:\Omega\to\Omega_3^2$. Найдено необходимое и достаточное условие ортогональности образа сети Френе в этом отображении. Получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы линии сети Френе являлись двойными линиями отображения f_3^2. Рассмотрен случай, когда образ сети Френе в этом отображении является ортогональной сетью и показано, что линия ω^1 сети Френе не может быть характеристической линией отображения f_3^2 и найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы линия ω^2 (ω^3) была характеристической линией этого отображения.

Параграф 1.4 посвящен изучению частичного отображения $f_1^3:\Omega\to\Omega_1^3$. Получено необходимое и достаточное условия для того, чтобы образ сети Френе в отображении f_1^3 была ортогональной. Выяснено, что линия ω^2 сети Френе не может быть двойной линией отображения f_1^3, а линия ω^1 является единственной (дважды взятой) двойной линией пары $\left(f_1^3,\ \Delta_2=\Delta(X,\vec e_1,\vec e_2)\right)$. Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы линия ω^3 сети Σ_F была двойной линией отображения f_1^3. В случае, когда сеть $f_1^3(\Sigma_F)$ ортогональна доказано, что линии ω^1,ω^3 сети Σ_F не могут быть характеристическими линиями отображения f_1^3. Доказано необходимое и достаточное условие для того, чтобы линия ω^2 сети Σ_F была характеристической линией этого отображения.

В параграфе 1.5 рассмотрено частичное отображение $f_2^3:\Omega\to\Omega_2^3$. Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы сеть $f_2^3(\Sigma_F)$ была ортогональной. Доказано необходимое и достаточное условие для того, чтобы линия $\omega^1(\omega^3)$ сети Σ_F была двойной линией этого отображения. Получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы любая линия, принадлежащая распределению $\Delta_2=\Delta(X,\vec e_2,\vec e_3)$ являлась двойной линией пары $\left(f_2^3,\Delta_2=\Delta(X,\vec e_2,\vec e_3)\right)$. Выяснено, что если линии ω^1, ω^3 сети Σ_F являются двойными линиями отображения f_2^3 одновременно, то распределение $\Delta_2=\Delta(X,\vec e_1,\vec e_3)$, которому принадлежат эти линии, является голономным. Доказано, что псевдофокусы F_2^1, $F_2^3\in(X,\vec e_2)$ совпадают тогда и только тогда, когда пара $\left(f_2^3, \Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_1, \vec{e}_3)\right)$ имеет две двойные линии, определяемые векторными полями, которые симметричны либо относительно прямой $(X, \vec{e}_3)$, либо относительно $(X, \vec{e}_1)$.

В параграфе 1.6 изучено частичное отображение $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$. Получено необходимое и достаточное условие ортогональности сети $f_2^1(\Sigma_F)$. Выяснено, что линия ω^1 сети Σ_F не может быть характеристической линией отображения f_2^1. Доказано необходимое и достаточное условие для того, чтобы линия $\omega^2(\omega^3)$ сети Σ_F была характеристической линией этого отображения.

Параграф 1.7 посвящен изучению частичного отображения $f_1^2 : \Omega \to \Omega_1^2$. Найдено необходимое и достаточное условие ортогональности сети $f_1^2(\Sigma_F)$. Получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы линия $\omega^2(\omega^3)$ сети Σ_F была двойной линией отображения f_1^2. Доказано, что если линия ω^2 сети Σ_F не является двойной линией пары $\left(f_1^2, \Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2)\right)$, то линия ω^1 является дважды взятой двойной линией этой пары и если линия ω^2 сети Σ_F является двойной линией пары $\left(f_1^2, \Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2)\right)$, то любая линия, принадлежащая распределению $\Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ является двойной линией этой пары. Выяснено, что линия ω^1 не может быть характеристической линией отображения f_1^2. Получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы линия $\omega^2(\omega^3)$ сети Σ_F была характеристической линией этого отображения.

Во второй главе исследовано частичное отображение евклидова n-мерного пространства, порождаемое заданным p-распределением и построены новые классы сетей.

В параграфе 2.1 кратко приведены сведения и обозначения, используемые в этой главе. Пусть n-мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному ортонормированному реперу $\Re = (X, \vec{e}_A)$, где $X \in \Omega$, $\left|\overline{e_A}\right| = 1$ $(A, B, C = 1,2,3,\dots,n)$. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид: $d\vec{X} = \omega^A \vec{e}_A$, $\quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B$.

Формы ω^A, ω_A^B удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики

$$dg_{AB} = g_{AK}\omega_B^K + g_{KB}\omega_A^K,$$

где $g_{AB} = \vec{e}_A \cdot \vec{e}_B$ - ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_n и структурным уравнениям:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \; D\omega_A^B = \omega_A^K \wedge \omega_K^B.$$

Рассмотрим в области $\Omega \subset E_n$ распределение Δ_p $\quad (1 < p < n-1)$ и ортогонально дополнительное к Δ_p распределение $\overline{\Delta}_{n-p}$. Векторы $\vec{e}_i$ $(i, j, k = 1,2\dots, p)$ репера $\Re$ расположим в подпространстве $\Delta_p(X)$, а векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha, \beta, \gamma = p+1,\dots,n)$ - в подпространстве $\overline{\Delta}_{n-p}(X)$. При этом дифференциальные уравнения распределения Δ_p будут $\omega_i^\alpha = \Lambda_{iA}^\alpha \omega^A$, а так как $\vec{e}_\alpha \in \overline{\Delta}_{n-p}(X)$, то $\omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha A}^i \omega^A$. Дифференцируя тождества $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha = 0$, получим $\quad \omega_i^\beta g_{\beta\alpha} + g_{ij}\omega_\alpha^j = 0$. Отсюда имеем

$$\omega_\alpha^i = -g^{ik}\omega_k^\beta g_{\beta\alpha}, \qquad \omega_i^\alpha = -g_{ij}\omega_\beta^j g^{\beta\alpha}.$$

Продолжив систему уравнений $\omega_i^\alpha = \Lambda_{iA}^\alpha \omega^A$, получим:

$$d\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ik}^\alpha \omega_j^k - \Lambda_{kj}^\alpha \omega_i^k + \Lambda_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha = \overline{\Lambda}_{ijA}^\alpha \omega^A,$$

$$\overline{\Lambda}_{ijA}^\alpha = \Lambda_{ijA}^\alpha + \Lambda_{i\beta}^\alpha \Lambda_{jA}^\beta,$$

$$d\Lambda_{i\beta}^\alpha - \Lambda_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^\gamma - \Lambda_{k\beta}^\alpha \omega_i^k + \Lambda_{i\beta}^\gamma \omega_\gamma^\alpha = \overline{\Lambda}_{i\beta A}^\alpha \omega^A,$$

$$\overline{\Lambda}_{i\beta A}^\alpha = \Lambda_{i\beta A}^\alpha + \Lambda_{ik}^\alpha \Lambda_{\beta A}^k.$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{i\beta}^\alpha\right\}$ образует геометрический объект - фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_p. При этом компоненты Λ_{ij}^α, $\Lambda_{i\beta}^\alpha$ образуют тензоры в отдельности. Тензор Λ_{ij}^α в общем случае не симметричен по индексам i, j. Величины $\quad H_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ji}^\alpha\right)$ образуют тензор. Этот тензор называют тензором неголономности распределения Δ_p. Распределение, тензор неголономности которого равен нулю тождественно, называется голономным.

Векторы $\quad \vec{M}_p(X) = \frac{1}{p} g^{ij} \Lambda_{(ij)}^\alpha \vec{e}_\alpha$, $\quad \vec{M}_{n-p}(X) = \frac{1}{n-p} g^{\alpha\beta} \Lambda_{(\alpha\beta)}^i \vec{e}_i$ называются векторами средних кривизн распределений Δ_p и $\overline{\Delta}_{n-p}$ соответственно. Если вектор средней кривизны распределения тождественно равен нулю, то распределение называется минимальным. Будем считать, что распределения Δ_p и $\overline{\Delta}_{n-p}$ - не минимальны.

Рассмотрим точку M, определенную радиус-вектором $\overline{M} = \overline{M}_p + \overline{M}_{n-p}$. Когда точка X смещается в области Ω, точка M описывает свою область $\overline{\Omega}$. Получено отображение $f : \Omega \to \overline{\Omega}$ такое, что $f(X) = M$. Выяснен геометрический смысл координат векторов $\overline{\varepsilon_i}$, $\overline{\varepsilon_\alpha}$ относительно базиса $\left\{\overline{e_i}, \overline{e_\alpha}\right\}$ (где $\overline{\varepsilon_i}$, $\overline{\varepsilon_\alpha}$ - образы векторов $\overline{e_i}$, $\overline{e_\alpha}$ в отображении f), так же найден геометрический смысл объектов, связанных с заданным p-мерным распределением.

Параграф 2.2 посвящен нахождению связей между формами ω_A^B, $\overline{\omega}_A^B$ в деривационных формулах реперов $\overline{\Re} = \left(M, \overline{\varepsilon_A}\right)$, $\Re = \left(X, \overline{e_A}\right)$. Определены отображения

$$f_1 : \Delta_p(X) \to \Delta_p(X), \qquad g_1 : \overline{\Delta}_{n-p}(X) \to \overline{\Delta}_{n-p}(X),$$
$$h_1 : \Delta_p(X) \to \overline{\Delta}_{n-p}(X), \qquad \varphi_1 : \overline{\Delta}_{n-p}(X) \to \Delta_p(X),$$
$$\psi : \Delta_p(X) \to \Delta_p(X), \qquad \overline{\psi} : \overline{\Delta}_{n-p}(X) \to \overline{\Delta}_{n-p}(X)$$

следующим образом:

$\forall \vec{x} = x^i \vec{e}_i \in \Delta_p(X)$: $f_1(\vec{x}) = \varepsilon_i^k x^i \vec{e}_k \in \Delta_n(X)$, $h_1(\vec{x}) = \varepsilon_i^\alpha x^i \vec{e}_\alpha \in \overline{\Delta}_{n-p}(X)$,

$\forall \vec{y} = y^\alpha \vec{e}_\alpha \in \overline{\Delta}_{n-p}(X)$: $g_1(\vec{y}) = \varepsilon_\alpha^\beta y^\alpha \vec{e}_\beta \in \overline{\Delta}_{n-p}(X)$, $\varphi_1(\vec{y}) = \varepsilon_\alpha^k y^\alpha \vec{e}_k \in \Delta_p(X)$,

$\psi = f_1 - \varphi_1 \circ g_1^{-1} \circ h_1$, $\overline{\psi} = g_1 - h_1 \circ f_1^{-1} \circ \varphi_1$.

В параграфе 2.3 найдены необходимые и достаточные условия минимальности образов распределений Δ_p и $\overline{\Delta}_{n-p}$ в отображении $f : \Omega \to \overline{\Omega}$.

В параграфе 2.4 изучен вопрос: при каких условиях линии сети Σ_n являются характеристическими линиями отображения $f : \Omega \to \overline{\Omega}$? Получены следующие результаты:

Теорема 2.4.1. Линия ω^i (ω^α) сети Σ_n является характеристической линией отображения f тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\overline{\varepsilon_{ii}^T} - \left(\varphi_1 \circ g_1^{-1}\right)\left(\overline{\varepsilon_{ii}^N}\right) = \psi\left(\overline{\Lambda_{ii}^T}\right),$$
$$\overline{\varepsilon_{ii}^N} - \left(h_1 \circ f_1^{-1}\right)\left(\overline{\varepsilon_{ii}^T}\right) = \overline{\psi}\left(\overline{\Lambda_{ii}^N}\right),$$
$$\left(\overline{\varepsilon_{\alpha\alpha}^T} - \left(\varphi_1 \circ g_1^{-1}\right)\left(\overline{\varepsilon_{\alpha\alpha}^N}\right) = \psi\left(\overline{\Lambda_{\alpha\alpha}^T}\right), \quad \overline{\varepsilon_{\alpha\alpha}^N} - \left(h_1 \circ f_1^{-1}\right)\left(\overline{\varepsilon_{\alpha\alpha}^T}\right) = \overline{\psi}\left(\overline{\Lambda_{\alpha\alpha}^N}\right)\right).$$

Следствие 2.4.1. Если линия ω^i сети Σ_n является характеристической линией отображения f, то распределение $\Delta_p' = f(\Delta_p)$ минимально тогда и только тогда, когда $\sum_i \overline{\psi}\left(\overline{\Lambda_{ii}^N}\right) = \vec{0}$.

Следствие 2.4.2. Если линии ω^α сети Σ_n являются характеристическими линиями отображения f, то распределение $\overline{\Delta}_{n-p}' = f\left(\overline{\Delta}_{n-p}\right)$ минимально тогда и только тогда, когда $\sum_i \psi\left(\overline{\Lambda_{\alpha\alpha}^T}\right) = \vec{0}$.

В параграфе 2.5. построены сети $\mathring{\widetilde{\Sigma}}_n$, $\hat{\widetilde{\Sigma}}$ двумя способами.

Свернув тензор $\Lambda_{\gamma i}^j$ с вектором $\vec{q} = q^\beta \overline{e_\beta} = \sum_i \overline{q_i}$, а тензор $\Lambda_{i\beta}^\alpha$ с вектором $\vec{p} = p^j \overline{e_j} = \sum_\alpha \overline{p_\alpha}$, получены два аффинора

$$q_i^j = \Lambda_{\gamma i}^j q^\gamma = -\sum_\gamma \Lambda_{ji}^\gamma q^\gamma, \qquad p_\beta^\alpha = \Lambda_{i\beta}^\alpha p^i = -\sum_i \Lambda_{\alpha\beta}^i p^i$$

в пространствах $\Delta_p(X)$, $\overline{\Delta}_{n-p}(X)$ соответственно (где $\overline{q_i} = \varepsilon_i^\beta \overline{e_\beta}$, $\overline{p_\alpha} = \varepsilon_\alpha^k \overline{e_k}$). Интегральные линии собственных векторов этих аффиноров определяют сеть $\mathring{\widetilde{\Sigma}}_n$ в области $\Omega \subset E_n$. Эта сеть получена и другим путем: *(n-p)* векторных полей $\overline{e_\alpha} \in \overline{\Delta}_{n-p}$ выбраны так, чтобы выполнялось условие $d_\alpha \vec{p} \in \Delta\left(\Delta_p, \overline{e_\alpha}\right)$, p векторных полей $\overline{e_i} \in \Delta_p$ выбраны так, чтобы выполнялось условие $d_i \vec{q} \in \Delta\left(\overline{\Delta}_{n-p}, \overline{e_i}\right)$. Доказаны

Теорема 2.5.1. Направления векторов $\overline{e_i}, \left(\overline{e_\alpha}\right)$ являются собственными для аффинора q_i^j (p_α^β) тогда и только тогда, когда интегральные линии векторных полей $\overline{e_i}, \left(\overline{e_\alpha}\right)$ являются линиями кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = \Delta\left(\vec{q}\right)$ $\left(\Delta_1 = \Delta\left(\vec{p}\right)\right)$.

Теорема 2.5.2. Данная сеть $\Sigma_n \subset \Omega \subset E_n$ является сетью типа $\mathring{\widetilde{\Sigma}}_n$ для некоторого p- мерного распределения, порождаемого этой сетью, тогда и только тогда, когда выполнены условия $O_{\overline{e_j}} \vec{q} \,//\, \overline{e_i}$, $T_{\overline{e_\beta}} \vec{p} \,//\, \overline{e_\beta}$ (где T и O операторы, действующие на векторные поля X, Y пространства E_n по правилу:

$$T_X Y = H d_{VX}(VY) + V d_{VX}(HY),$$
$$O_X Y = V d_{HX}(HY) + H d_{HX}(VY),$$

где H, V - операторы проектирования на $\Delta_p(X)$ и $\overline{\Delta}_{n-p}(X)$ соответственно).

Следствие 2.5.1. Ортогональная, голономная сеть $\Sigma_n \subset \Omega \subset E_n$ является сетью типа $\mathring{\widetilde{\Sigma}}_n$ для некоторого p-мерного распределения, порождаемого этой сетью.

Найден геометрический смысл аналитических условий, характеризующих сеть $\mathring{\widetilde{\Sigma}}_n$.

Аналогичным образом, используя векторов $\vec{\widetilde{p}} = \widetilde{p}^j \overline{e_j}$, $\vec{\widetilde{q}} = \widetilde{q}^\beta \overline{e_\beta}$ (где $\widetilde{p}^j = \sum_i \varepsilon_i^j$, $\widetilde{q}^\beta = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha^\beta$) построена сеть $\hat{\widetilde{\Sigma}}_n$ и указан другой способ получения этой сети. Получено необходимое и достаточное условия для того, чтобы данная сеть $\Sigma_n \subset \Omega \subset E_n$ являлась сетью типа $\hat{\tilde{\Sigma}}_n$ для некоторого p- мерного распределения, порождаемого этой сетью. Найдено необходимое и достаточное условия совпадения сетей $\overset{\circ}{\tilde{\Sigma}}_n$, $\hat{\tilde{\Sigma}}_n$.

В параграфе 2.6. с помощью аффиноров $\varepsilon_i^k, \varepsilon_\alpha^\gamma, \varepsilon_\alpha^k \varepsilon_i^\alpha, \varepsilon_i^\beta \varepsilon_\alpha^i$ построены сети $\sum_n^s$, $\tilde{\Sigma}_n^s$. Выяснен геометрический смысл аналитических условий, характеризующих этих сетей. Доказана

Теорема 2.6.1. Сети $\sum_n^s$ и $\tilde{\Sigma}_n^s$ совпадают тогда и только тогда, когда выполнены условия $(\varphi_1 \circ h_1)(\vec{e}_i) \,//\, f_1(\vec{e}_i)$; $(h_1 \circ \varphi_1)(\vec{e}_\alpha) \,//\, g_1(\vec{e}_\alpha)$.

Далее построена сеть $\overset{\circ}{\hat{\Sigma}}_n$, линии ω^i которой являются линиями кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = \Delta(\vec{q}_1)$, а линии ω^α являются линиями кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = \Delta(\vec{p}_1)$, где $\overrightarrow{p_i} = \varepsilon_i^k \overrightarrow{e_k}$, $\overrightarrow{q_i} = \varepsilon_i^\beta \overrightarrow{e_\beta}$. Аналогично этому, используя векторов $\overrightarrow{p_\alpha} = \varepsilon_\alpha^k \overrightarrow{e_k}$, $\overrightarrow{q_\alpha} = \varepsilon_\alpha^\beta \overrightarrow{e_\beta}$ построена сеть $\hat{\hat{\Sigma}}_n$. Выяснен геометрический смысл аналитических соотношений, характеризующих сетей $\overset{\circ}{\hat{\Sigma}}_n$, $\hat{\hat{\Sigma}}_n$. Найдено необходимое и достаточное условия для того, чтобы эти сети совпадали.

В приложении 1 приведены примеры линейных преобразований пространства E_3, определяемых матрицами частичных отображений f_i^j в случае, когда образы сети Френе в этих отображениях голономные.

В приложении 2 приводится пример для теоремы 1.1.8 и соответствующее компьютерное изображение сети Френе.

В приложении 3 рассмотрено частичное отображение пространства E_3, порождаемое заданным распределением.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность моему научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору, академику НАН КР, заслуженному деятелю науки КР А.А.Борубаеву за ценные советы, постоянное внимание и полезные обсуждения результатов работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Об одной сети Френе //Тезисы докладов IX Всесоюзной научной конференции по дифференциальной геометрии. – Кишинёв, 1988. - С. 20.
2. О двойных линиях пары в евклидовом пространстве //Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: Калининградский государственный университет, 1990. - Вып.21. - С. 59-61.

3. К геометрии частичных отображений // Лобачевский и современная геометрия: Тезисы докладов международной научной конференции. – Казань, 1992. - С. 76.
4. О двойных линиях одного частичного отображения //Научные труды ОшГУ.– 1995. - Вып.1. - С. 20-22.
5. (совм. с Борбоевой Г.) Об одном случае частичного отображения евклидова пространства //Научные труды Ошского государственного университета. Физико-математические науки. –1999. - Вып.2. - С. 220-227.
6. (совм. с Борбоевой Г.) О фокусах касательных прямых линий циклической сети Френе //Современные проблемы химии и химической технологии. Актуальные вопросы естественных и гуманитарных наук: Труды международной научной конференции. – Ош: Билим, 2001. – 297 с. /Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат. наук. – 2001. - № 3. – С. 169-176.
7. (совм. с Борбоевой Г., Камиловой Д.) Кривизны, кручения линии сети Френе и существование фокусов касательных //Современные проблемы химии и химической технологии. Актуальные вопросы естественных и гуманитарных наук: Труды международной научной конференции. – Ош: Билим, 2001. /Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат.наук. – 2001. - № 3. – С. 177-184.
8. (совм. с Чамашевым М.) К геометрии трехмерных распределений евклидова пространства E_5 //Проблемы математики и информатики в XXI веке: Труды международной научной конференции. – Бишкек: КГНУ, 2000 / Вестник Кыргызского государственного Национального университета: Серия 3. Естественно–технические науки. – 2000. – Вып 4. – С. 56-59.
9. (совм. с Борбоевой Г.) Об одном частичном отображении пространства E_3 //Проблемы математики и информатики в XXI веке: Труды международной научной конференции. – Бишкек: КГНУ, 2000 / Вестник Кыргызского государственного Национального университета: Серия 3. Естественно-технические науки. – 2000. – Вып. 4. – С. 52-56.
10. (совм. с Борбоевой Г.) К геометрии частичных отображений евклидова пространства //Проблемы математики и информатики в XXI веке: Труды международной научной конференции. – Бишкек: КГНУ, 2000 / Вестник Кыргызского государственного Национального университета: Серия 3. Естественно–технические науки. – 2000. – Вып. 4. – С. 48-52.
11. (совм. с Борбоевой Г.) Об одном частичном отображении евклидова пространства, порожденном заданным семейством гладких линий //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2000. - Вып. 29. – С. 423-430.
12. (совм. с Борбоевой Г.) Об одном дифференцируемом отображении евклидова пространства //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2000. - Вып. 29. – С. 430-437.
13. Об одном линейном операторе, порожденном заданным распределением //Современные технологии и управления качеством в образовании, науке и производстве: опыт адаптации и внедрения: Труды международной

научной конференции. – Бишкек: КТУ им. И.Раззакова, 2001 /Вестник КТУ им. И.Раззакова. – 2001 . – С.250-254.

14. Об одном частичном отображении *n*-мерного евклидова пространства //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2001. - Вып. 30. – С.278-285.
15. Сеть, определенная образами заданных распределений в частичном отображении евклидова пространства //Асимптотические, топологичес-кие и компьютерные методы в математике: Труды международной научной конференции, посвященной 70-летию академика М.И.Имана-лиева. – Бишкек: КГНУ, 2001 /Вестник КГНУ. Серия 3. Естественно-технические науки. – 2001. – Вып. 6. – С. 232-235.
16. Критерий минимальности образа распределения в частичном отображении //Проблемы образования, науки и культуры в начале XXI века: Труды международной научно–теоретической конференции. – Ош: Билим, 2001 /Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат.наук.- 2001.- № 4.- С. 164-168.
17. Необходимое и достаточное условие голономности образа распределения в линейном операторе //Проблемы образования, науки и культуры в начале XXI века: Труды международной научно–теоретической конференции. – Ош: Билим, 2001/Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат.наук. - 2001. - № 4. - С. 169-173.
18. (совм. с Абдуллаевой Ч.) О характеристических линиях частичного отображения, порожденного заданиям распределением //Проблемы образования, науки и культуры в начале XXI века: Труды международной научно – теоретической конференции. – Ош: Билим, 2001 /Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат.наук.-2001. - № 4.- С. 174-179.
19. (совм. с Борбоевой Г.) Геометрия линейного оператора трехмерного евклидова пространства, порожденного заданным двумерным распределением //Проблемы образования, науки и культуры в начале XXI века: Труды международной научно–теоретической конференции. – Ош: Билим, 2001 /Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат.наук.-2001.- № 4.-С.159-163.
20. (совм. с Камиловой Д.) Двойные линии частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным распределением //Наука и новые технологии. – Бишкек, 2002.- № 4. - С.5-8.
21. К геометрии частичных отображений евклидова трехмерного пространства //Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат. наук. – 2002. - № 5. –С. 152-161.
22. (совм. с Абдуллаевой Ч.) Об одном частичном отображении евклидова пространства E_n, порожденном заданным семействам гладких линий //Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук. - 2002. - № 5. –С. 161-166.
23. (совм. с Борбоевой Г.) Об одном группе преобразований евклидова трехмерного пространства и ее подгруппе //Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат. наук. - 2002.- № 5. –С. 166-170.

24. Гомотопические отображения евклидова пространства, порождаемые заданным распределением //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. - Вып. 31. – С. 269-275.
25. (совм. с Борбоевой Г.) О двойных линиях частичного отображения евклидова пространства // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. - Вып. 31. – С. 287-291.
26. Необходимое и достаточное условия ортогональности образа сети Френе в частичном отображении евклидова пространства // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. - Вып. 31. – С. 259-264.
27. (совм. с Борбоевой Г.) Необходимое и достаточное условия существования двойных линий одного частичного отображения //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. - Вып. 31. – С. 281-287.
28. Об одной группе линейных преобразований трехмерного евклидова пространства // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. - Вып. 31. – С. 264-269.
29. (совм. с Абдуллаевой Ч.) К геометрии частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданным семейством гладких линий // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. - Вып. 31. – С. 275-281.
30. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений в евклидовом пространстве. – Ош: ОшГУ, 2003. –147 с.

Аннотация
Матиева Гулбадан

ЧАСТИЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, СЕТИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ключевые слова: частичное отображение, сеть, распределение, фокус, псевдофокус, двойная линия, характеристическая линия.

В диссертационной работе исследуются частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданным распределением в целях вскрыть тесные связи между теориями отображений, сетей и распределений. Доказаны необходимые и достаточные условия существования двойных и характеристических линий этих отображений, построены новые классы сетей и изучены их свойства и взаимосвязь.

Аннотация
Матиева Гулбадан

ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИКТЕГИ БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУЛАР, ТОРЧОЛОР ЖАНА БӨЛҮШТҮРҮҮЛӨР

Урунтуу сөздөр: бөлүктөп чагылтуу, торчо, бөлүштүрүү, фокус, псевдофокус, кошмок сызык, мүнөздүк сызык.

Диссертациялык иште бөлүштүрүүлөр, торчолор жана чагылтуулар теорияларынын арасындагы байланыштарды табуу максатында берилген бөлүштүрүү тарабынан жаратылган евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп чагылтуулар изилденет. Бул чагылтуулардын мүнөздүк жана кошмок сызыктарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген, торчолордун жаны классы түзүлгөн, алардын касиеттери жана өз ара байланыштары табылган.

Abstract
Gulbadan Matieva

PARTIALLY MAPPINGS, NETS AND DISTRIBUTIONS IN EUCLIDEAN SPACE

Key words: partially mapping, a net, a distribution, focus, pseudofocus, double line, characteristic line.

The dissertation researches partially mappings of Euclidean space generated by given distribution with a view of revealing close connection between theories of mappings, nets and distributions. Necessary and sufficient conditions of existence of double lines and characteristic lines of these mappings are proved. New classes of nets are constructed. Properties and interconnection of these nets are researched.

Матиева Гулбадан

Частичные отображения, сети и распределения в евклидовом пространстве

Автореферат

Компьютерный набор: Матиева Г.
Компьютерная верстка: Першина Е.В.
Формат 60x84/16
Объем: 1,25 печ. л.
Тираж: 100 экз.
Отпечатано: издательство «Квант»