НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.04.255

На правах рукописи

АЛЫБАЕВ АНАРБЕК МАСАЛБЕКОВИЧ

УДК 517.9

МЕТОД СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек - 2004

Работа выполнена на кафедре высшей математики и образовательных технологий КНУ им. Ж.Баласагына.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент Омуров Т.Д.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Асанов А.
кандидат физико-математических наук, с.н.с. Байзаков А.Б.

Ведущая организация: Казахский Национальный университет имени Аль-Фараби.

Защита состоится «12» мая 2004 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 01.04.255 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата физико-математических наук в Институте математики НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек – 71, проспект Чуй, 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан «8» апреля 2004г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., с.н.с. Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Общая теория интегральных уравнений создана только на рубеже XIX-XX столетий и некоторые виды этих уравнений входят в класс некорректных задач. Примером сказанного могут быть и интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода, которые имеют широкое приложение в прикладных задачах (обратные задачи геофизики, кинематики, сейсмики, наследственной среды, теплопроводности, в задачах динамики почвенной влаги и грунтовых вод и др.). Поэтому вышеуказанные классы уравнений являются предметом исследования многих ученых. Теория этих задач в наше время интенсивно развивается и представляет большой научный интерес среди специалистов этой области.

На базе теории некорректных задач, основы которой были заложены в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, получены различные подходы исследования некорректных интегральных и операторных уравнений Вольтерра первого и третьего рода, которые имеют специфические особенности, связанные с постановкой задач и физическим значением изучаемой проблемы.

Основной проблемой в теории уравнений Вольтерра первого и третьего рода является исследование, связанное с регуляризацией уравнения той или иной области, которое может дать достаточные условия разрешимости исследуемого уравнения. Поэтому в работах таких авторов, как М.М. Лаврентьев, М.И. Иманалиев, А.С. Апарцин, А. Асанов, А.Л. Бухгейм, Ю.Э. Аниконов, А.Б.Бакушинский, А.М. Денисов, Б.И. Дмитриев, Н.А. Магницкий, Т.Д. Омуров, В.О. Сергеев, Я. Янно и других были построены вольтерровские регуляризирующие операторы для изучаемых операторных уравнений с конкретными ядрами в различных пространствах. А в области обратных задач аналогичные проблемы были изучены О.М.Алифановым, Е.А. Артюхиным, Д.С. Аниконовым, В.А. Елеевым, М.И. Иманалиевым, А.Л. Бухгеймом, И.С.Барашковым, П.Н.Вабищевичем, М.М.Лаврентьевым, В.И.Дмитриевым, А.М.Нахушевым, Т.Д. Омуровым, В.Г. Романовым, Я. Янно, Т. Тобиасом и др. Но мы выше отметили, что способы исследования некорректных уравнений Вольтерра могут быть различными, которые зависят от постановки задач и от изучаемой проблемы.

Для наглядности сказанного рассмотрим из перечисленных проблем задачу распространения продольной волны деформации в наследственной среде, т.е. обратную задачу по определению ядра $\varphi(x)$, характеризирующего физические свойства наследственной среды, и перемещения $u(y,x)$. Требуется найти функции $\varphi(x)$ и $u(y,x)$ по начальной деформации $\psi_0(x)$ и $\psi_l(x)$ из решения следующей задачи:

$$(L_1 u)(y,x) - \int_0^x \varphi(x-s)\frac{\partial^2 u(y,s)}{\partial s^2}ds = 0,\ 0 \le y \le l,\ 0 \le x \le X, u(y,0)=0\ ,$$

$$u_x(y,0)=0,\ u(0,x)=\psi_0(x), u_x(l,x)=\psi_l(x),\ \alpha(x)u_y(l,x)=g(x),\ \forall x\in[0,X],$$

где $(L_1u)(y,x)\equiv u_{xy}(y,x)$, $\alpha(x)$, $g(x)$ - известные функции.

Эта задача приводится к исследованию уравнения Вольтерра вида

$$(L\varphi)(x)\equiv p(x)\varphi(x)+\int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds=f(x), \qquad (1)$$

при этом $K(x,s)\equiv\alpha(x)\overline{\psi}_x(x-s)+2\alpha'(x)\overline{\psi}(x-s)+\alpha''(x)\int_s^x\overline{\psi}(\xi-s)d\xi$,

$$p(x)\equiv\alpha(x)\overline{\psi}(0),\ f(x)\equiv g''(x),\psi_{lx}(x)\equiv\overline{\psi}(x).$$

Случай $p(0)=0$, $f(0)=0$, ($g^{(i)}(0)=0$, $i=0,1,2$), причем $f(x)/p(x)\to 0$, при $x\to 0$, с требованием гладкости ядра по $K(x,s)$, изучен Я. Янно. Но в случае, когда $f(0)\neq 0$ и ядро $K(x,s)$ имеет свойство:

$$K(x,s)\in C(D), K(x,x)\geq 0,\ D=\{(x,s)/0\leq s\leq x\leq \mathrm{X}\} \qquad (2)$$

для уравнения вида (1) ранее не была построена регуляризирующая задача в пространстве $L^p(0,\mathrm{X})$. При этом уравнение (1) является некорректным и не имеет решения в пространстве $C[0,\mathrm{X}]$.

Отметим, что уравнение (1) можно также рассматривать как систему уравнений в векторно-матричной записи: $p(x)$ - скалярная функция, $\varphi(x)$, $f(x)$ - векторные (столбец) – функции, $K(x,s)$ - матричная функция.

Обозначим через $\lambda_i(x)$ - собственные значения $K(x,x)$, $\lambda_i^*(x)$ - собственные значения $[K(x,x)+K^*(x,x)]/2$, $\lambda_0(x)=\min\{\lambda_i(x)|i=1,...,n\}$, $\lambda_0^*(x)=\min\{\lambda_i^*(x)|i=1,...,n\}$. Везде ниже $\varepsilon\in(0,1)$ - малый параметр регуляризации.

М.И. Иманалиевым решение сингулярно-возмущенной системы интегральных уравнений Вольтерра

$$\varepsilon\varphi(x)+\int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds=f(x),$$

(вырожденная система получается из (1) при $p(x)\equiv 0$), если $0<\alpha<\lambda_0(x)$, построено в виде:

$$\varphi_\varepsilon(x)=\upsilon(x)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_{-1}(\tau)+\Pi_0(\tau)+\varepsilon\eta(\varepsilon,x),\ \tau=\frac{x}{\varepsilon},$$

где $\Pi_{-1}(\tau)$, $\Pi_0(\tau)$ являются решениями систем дифференциальных уравнений первого порядка и допускают оценки

$$\|\Pi_{-1}(\tau)\|\leq K_1\exp(-\alpha x/\varepsilon),\ \|\Pi_0(\tau)\|\leq K_0\exp(-\alpha x/\varepsilon),$$
$$K_1=M_0\|f(0)\|,\ 0<K_0,\ M_0=const.$$

В работах А.Асанова система (1) исследована в случае, когда $K(x,x)\in L^1_{n\times n}(0,\mathrm{X})$ и $\lambda_0^*(x)$ – неубывающая функция. Доказана сходимость решения регуляризованной системы, построенного по формуле

$\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(x)+\eta_\varepsilon(x)$, к решению исходной системы, и единственность решения в пространстве $C_n[0,\mathrm{X}]$ и специальном пространстве $C^\gamma_{\psi,n}[0,\mathrm{X}]$ - n-мерных вектор-функций с компонентами из $C^\gamma_\psi[0,\mathrm{X}]$ - пространства всех непрерывных функций $\overline{\varphi}(x)$ на $[0,\mathrm{X}]$, удовлетворяющих условию: $|\overline{\varphi}(x)-\overline{\varphi}(t)|=\mathrm{O}|\psi(x)-\psi(t)|^\gamma$, $(0<\gamma\leq 1)$ с нормой

$$\|\overline{\varphi}(x)\|_\gamma=\max_{[0,\mathrm{X}]}|\overline{\varphi}(x)|+\sup_{(x,t)\in[0,\mathrm{X}]}\frac{|\overline{\varphi}(x)-\overline{\varphi}(t)|}{|\psi(x)-\psi(t)|^\gamma},$$ где $\psi(x)=\int_0^x\lambda_0(\tau)d\tau$, с основным требованием $0\leq\lambda_0(x)\in L^1(0,\mathrm{X})$, причем

$$\|K(x,s)-K(y,s)\|\leq l(s)\int_y^x\lambda_0(\tau)d\tau,\ 0\leq l(s)\in L^1(0,\mathrm{X}),(y\leq x).$$

В исследованиях Т.Д.Омурова в случае $K(x,x)\equiv 0$ для (1) введена регуляризующая система: $\varepsilon\varphi_\varepsilon(x)+(L\varphi_\varepsilon)(x)+(L_0\varphi_\varepsilon)(x)=f(x)$, и ее решение построено в виде:

$$\varphi_\varepsilon(x)=\upsilon(x)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi(\varepsilon,x)+\xi_\varepsilon(x). \qquad (3)$$

Здесь $(L_0\varphi)(x)\equiv\int_0^x H(s)\varphi(s)ds-\int_0^x G(s)\varphi(s)ds$, $G(s)\equiv G_0(s)\cdot(L\varphi)(s)$,

$H(x)$, $G_0(x)$ - диагонально-матричные функции, $H(x)\equiv\mu(x)f(x)\cdot f(x)$, $G_0(x)=\mu(x)f(x)$, $\mu(x)$ - известная функция, $h_1(x),...,h_n(x)$ - собственные значения матрицы $H(x)$, $0<h_i(x)\in L^1(0,\mathrm{X})$, $(i=1,...,n)$, при этом получено уравнение

$$(L\varphi)(x)+(L_0\varphi)(x)=f(x), \qquad (4)$$

(1) и (4) эквивалентны. Для векторов-столбцов $a=(a_1,...,a_n)^{\mathrm{T}}$, $b=(b_1,...,b_n)^{\mathrm{T}}$ используется операция $a\cdot b=diag(a_1b_1,...,a_nb_n)$.

Решение регуляризированной системы по правилу (3) в случае (2) возможно только при выполнении

$$\|K(x,s)\|\leq\alpha_0<1. \qquad (5)$$

Поэтому когда для ядра $K(x,s)$ не имеет места условие (5) возникает задача: Модифицировать метод интегральных операторов с весовыми функциями, чтобы получить способ решения уравнений вида (1) на случай, когда выполняется условие вида (2).

Так как в работе основным объектом исследования является уравнение Вольтерра третьего рода, то, не нарушая общности, можем сформулировать следующую задачу:

Если $K(x,s)$ удовлетворяет условию (2), $f(x)\in C^1[0,\mathrm{X}]$, $p(x)\in C[0,\mathrm{X}]$ - известные функции, а $L^q(0,\mathrm{X})\ni u(x)$ - искомая функция, входящие в уравнение

$$Au + Bu = f(x), \qquad (6)$$

где B – вполне непрерывный интегральный оператор Вольтерра

$Bu \equiv \int_0^x K(x,s)u(s)ds$, $Au \equiv p(x)u(x)$, причем $p(0)=0$, $f(0)\neq 0$, то при этих условиях требуется исследовать (6) на достаточные условия разрешимости в $L^q(0,X)$ (на единственность и регуляризируемость (6) на $L^q(0,X)$).

Кроме стандартных обозначений пространств C, L^q, будем рассматривать Z^q - пространство всех кусочно-непрерывных с конечным числом разрывов первого рода и суммируемых с q-той степенью функций (интегрируемость в смысле Лебега).

Для введенных пространств через L_k^q, Z_k^q, C_k обозначены соответственно пространства k-мерных вектор-функций (или матричных функций) с компонентами из L^q, Z, C.

Основными объектами исследования в диссертационной работе являются обратные и нелокальные задачи типа Бицадзе-Самарского и классы некорректных уравнений Вольтерра третьего рода.

Целью работы является исследование обратных задач для смешанной системы второго порядка, для системы интегральных и дифференциальных уравнений третьего порядка, а также построение особых решений систем нелинейных и обобщенных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.

Методы исследования. В работе применяются методы сингулярных возмущений, эквивалентных представлений интегральных уравнений с весовыми функциями, элементы функционального и математического анализа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие результаты:

1. Построена матричная функция, посредством которой введена система интегральных уравнений, решение которой представимо с помощью матрицы Коши, допускающей неравенство Важевского.
2. Разработана методика исследования сингулярно-возмущенной системы, введенной относительно исследуемой системы, решение которой включает в себя функцию типа погранслойной.
3. Доказаны условия существования и единственности решения сингулярно-возмущенной системы и установлено поведение решения в окрестности особой точки.
4. Получена оценка близости решений сингулярно-возмущенной системы и системы видоизмененных интегральных уравнений в смысле $L_n^q(0,X)$.

Апробация. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- международной научной конференции, посвященной 70-летию академика М.И.Иманалиева «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», Бишкек - Бостери, 2001 г.;
- международной конференции «Модернизация высшей школы в переходный период: состояние и перспективы», Бишкек, 2002 г.;

- научно-практической конференции «Современные исследования молодых ученых», Бишкек, 2000 г.;
- на семинаре лаборатории математических методов оптимизации Института автоматики НАН КР, Бишкек, 2003 г.;
- на семинарах факультета математики, информатики и кибернетики и кафедры высшей математики и образовательных технологий КНУ, Бишкек, 2000-2003 г.г.;
- на семинаре Института математики НАН КР (руководитель – академик Иманалиев М.), Бишкек, 2003 г.

Публикация. Результаты диссертации опубликованы в работах [1-8]. В совместных работах [3, 6, 7] постановка задач и обсуждение выводов принадлежат соавторам, диссертанту – разработка методов и доказательство теорем.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 54 наименования. Объем текста 100 страниц.

Краткое содержание работы. Исследования рассматриваемых в работе задач проведены на основе следующей леммы:

Лемма 1. Если $K(x,x)$ - диагональная матрица, а ее собственные значения удовлетворяют условию

$$0 \le \lambda_0(x),\ \lambda_i(x)\in C[0,X], \qquad (7)$$

то матричная функция Коши $W(x,0,\varepsilon)$ системы $V'(x) = -\dfrac{H_0(x)}{\varepsilon + p(x)}V(x)$, где $H_0(x) = K(x,x) + \mu(x)f(x)\cdot f(x)$, $0<\mu(x)\in L^1(0,X)$, удовлетворяет оценке

$$\|W(x,0,\varepsilon)\| \le \sqrt{n}\exp\left(-\int_0^x \frac{h_0(\eta)+\lambda_0(\eta)}{\varepsilon + p(\eta)}d\eta\right),$$

где $0 < h_0(x) = \min\limits_{1\le i\le n}\left(\mu(x)f_i(x)\cdot f_i(x)\right)$, $\|h\| = \left(\sum\limits_{i=1}^n h_i^2\right)^{1/2}$.

При выполнении условия (7) неравенство типа (5) для ядра $K(x,s)$ может не иметь места. В нашем случае неубываемость функции $\lambda_0(x)$ не требуется, что и является одним из важных моментов данной работы.

В первой главе исследуются системы дифференциальных уравнений второго и третьего порядка с граничными условиями. Эти задачи относятся к классу обратных задач и могут иметь важное прикладное значение.

В §1.1 рассмотрена нелокальная граничная задача типа Бицадзе-Самарского для системы дифференциальных уравнений третьего порядка и двумерных интегральных уравнений

$$u_{xxt}(x,t) - \mu_1 u_t(x,t) = f\left(x,t,u(x,t),u_x(x,t),u_{xx}(x,t)\right), \qquad (1.1.1)$$

$$p(t)\varphi(x,t) + \int_0^t K(x,t,s)\varphi(x,s)ds = \int_0^t\int_0^x K_0(x,t,\eta,s)g(\eta,s,u(\eta,s))d\eta ds + f_0(x,t).$$

$$u(x,0)=0,\ u(0,t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(t)u(x_i,t), \qquad (1.1.2)$$

$$u(x,t)\ =\int_0^t\int_0^X M\left(\delta,t,\eta,s,\varphi(\eta,s),u(0,s)\right)dsd\eta, \qquad (1.1.3)$$

$(0,1)\ni\delta$ – малый параметр,

где $a_i(t),K,K_0,f,p,M$ - известные функции, $0<x_1<x_2<...<x_n<X$, причем $0<\mu_1=const$, $\sum_{i=1}^{n}|a_i(t)|\le\mu_0=const$, $\forall t\in[0,T]$ и $\mu_0+\mu_1X^2<1$.

Исследование этой задачи проведено на основе трех систем интегральных уравнений Вольтерра второго и третьего рода, решения которых принадлежат тройке $\left(C_n^{2,1}(D),C_n^{0,1}(D),Z_n^q[0,T]\right)$. Методом возмущений построена регуляризирующая система вида (1.1.11) (см. далее) и исследована однозначная разрешимость этой системы. Оценка близости регуляризованного решения $u_\varepsilon(x,t)$ и решения $u(x,t)$ исходной задачи измерены по метрике пространства $L_n^q(D_0)$, $q>1$, при выполнении следующих условий:

а) $K(x,t,s)\in C_n(D_1)$, $D_1=D_0\times[0,T]$,
$D_0=[0,X]\times[0,T]$, $0\le\lambda_0(t)=\min\left\{\lambda_i(x,t)\middle|\forall x\in[0,X],i=1,...,n\right\}$,
$C(D_0)\ni\lambda_i^*(x,t)$ - собственные значения матрицы
$\left[K(x,t,t)+K^*(x,t,t)\right]/2$, $\|K(x,t,s)-K(x,z,s)\|\le L_1|t-z|$, $0<L_1=const$;

б) $f_0(x,t)\in C_n^{0,1}(D_0)$, $f_0(x,t)\ne0$, $\forall(x,t)\in D_0$, $p(0)=0$, $p(t)>0$, $\forall t\in(0,T]$,
$p(t)\le\gamma_1(\psi(t))^\beta$, $0<\gamma_1=const$, $0<\gamma_2\le h(t)\in L^1(0,T)$, $\beta>2+\beta_0$, $\beta_0>0$,
$(\psi(t))^{-\beta}\in L^1(0,T)$, $\psi(t)=\int_0^t h(s)ds$, $h(s)=\lambda_0(s)+h_0(s)$,
$p(t)$ - неубывающая функция;

в) для матричной функции $H_0(x,t)\equiv diag\left(H_1(x,t),...,H_n(x,t)\right)$, где $H_0(x,t)\equiv\mu(t)f_0(x,t)\cdot f_0(x,t)+K(x,t,t)$, выполняется
$$\|H_0(x,t)\|\le C_1h(t); \qquad (1.1.4)$$

г) $f(x,t,u,w,v)\in C_n\left(D_0\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\right)$, причем $0<L_{if}$ - коэффициенты Липшица f по u,w,v $(i=1,2,3)$, при фиксированных $(t,\eta,u)\in D_1\times\mathbb{R}^n$: $M(\delta,t,\eta,s,\varphi,u)\in L_n^1(0,T)$ (суммируемых по аргументу s, $s\in[0,T]$) и по u, φ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $L_{1M}>0$,
$M(\delta,t,\eta,s,\varphi,u)\to0$, $\delta\to0$, $g(\eta,s,u)\in C_n^{0,0,1}(D_*)$, $D_*=D_0\times\mathbb{R}^n$,
$L_g=\sup_{D_*}\|g_u(x,t,u)\|$;

д) $K_0(x,t,\eta,s)\in C_n^{0,1,0,0}(D_0\times D_0)$, $K_0(x,t,\eta,t)\equiv0$, $L_{K_0}=\sup_{D_0\times D_0}\|K_{0t}(x,t,\eta,s)\|$.

Из условия **б)** следует, что $\varphi(x,t)$ не будет принадлежать классу непрерывных функций, т.е. $\varphi(x,t)\in Z_n^q(D_0)$.

С помощью подстановки
$$u_{xx}(x,t)=z(x,t)+\mu_1u(x,t)\equiv(N[u,z])(x,t),\ \forall(x,t)\in D=D_0\times[0,T], \qquad (1.1.5)$$
задачу (1.1.1) - (1.1.3) сводим к системе интегральных уравнений
$$\begin{cases}u(x,t)=(A[u,z,\varphi])(x,t),\\ z(x,t)=(F[u,z,\varphi])(x,t),\\ p(t)\varphi(x,t)+(H_0\varphi)(x,t)=(B[u,\varphi])(x,\ t)+f_0(x,t),\end{cases} \qquad (1.1.10)$$
где $(H_0\varphi)(x,t)\equiv\int_0^t H_0(x,s)\varphi(x,s)ds$,

$$(F[u,z,\varphi])(x,t)\equiv\int_0^t f(x,s,u(x,s),(N_0[u,z,\varphi])(x,s),(N[u,z])(x,s))ds,$$

$$(A[u,z,\varphi])(x,t)\equiv\frac{x}{X}\left[\int_0^t\int_0^X M(\delta,t,s,\eta,\varphi(\eta,s),u(0,s))d\eta ds-\sum_{i=1}^{n}a_i(t)u(x_i,t)-\int_0^X(X-\eta)\times(z(\eta,t)+\mu_1u(\eta,t))d\eta\right]+\sum_{i=1}^{n}a_i(t)u(x_i,t)+\int_0^x(x-\eta)(z(\eta,t)+\mu_1u(\eta,t))d\eta,$$

$z(x,0)=0$, $\forall x\in[0,T]$,

$$(N_0[u,z,\varphi])(x,t)\equiv\frac{1}{X}\left[\int_0^t\int_0^X M(\delta,t,s,\eta,\varphi(\eta,s),u(0,s))d\eta ds-\sum_{i=1}^{n}a_i(t)u(x_i,t)-\int_0^X(X-\eta)\times(z(\eta,t)+\mu_1u(\eta,t))d\eta\right]+\int_0^x(z(\eta,t)+\mu_1u(\eta,t))d\eta,$$

$$(B[\varphi,u])(x,t)\equiv\int_0^t G(x,s)\left(Q[u,\varphi]\right)(x,s)dt-\int_0^t\left[K(x,t,s)-K(x,s,s)\right]\varphi(x,s)ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x K_0(x,t,\eta,s)g(\eta,s,u(\eta,s))d\eta ds.$$

Здесь оператор $(Qu)(x,t)$ определяется по формуле

$$\left(Q[u,\varphi]\right)(x,t)=colon\left[\left(Q_1[u_1,...,u_n,\varphi_1,...,\varphi_n]\right)(x,t),...,\left(Q_n[u_1,...,u_n,\varphi_1,...,\varphi_n]\right)(x,t)\right],$$
$$\left(Q_i[u_1,...,u_n,\varphi_1,...,\varphi_n]\right)(x,t)=u_i(x,t)\left[p(t)u_i(x,t)+\left(L_i[u_1,...,u_n,\varphi_1,...,\varphi_n]\right)(x,t)\right],$$
$(i=1,...,n)$,

$$\left(L[u,\varphi]\right)(x,t)\equiv\int_0^t K(x,t,s)\varphi(x,s)ds+\int_0^t\int_0^x K_0(x,t,\eta,s)g(\eta,s,u(\eta,s))d\eta ds,$$

$G(x,t)\equiv diag(G_1(x,t),...,\ G_n(x,t))$, $G_i(x,t)=\mu(t)f_{0i}(x,t)$, $(i=1,...,n)$, причем $\|G(x,t)\|\le C_2h(t)$.

Наряду с (1.1.10) рассмотрим сингулярно-возмущенную систему

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x,t) = (A[u_\varepsilon, z_\varepsilon, \varphi_\varepsilon])(x,\ t), \\ z_\varepsilon(x,t) = (F[u_\varepsilon, z_\varepsilon, \varphi_\varepsilon])(x,t), \\ [\varepsilon + p(t)]\varphi_\varepsilon(x,t) + (H_0\varphi_\varepsilon)(x,t) = (B[u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon])(x,\ t) + f_0(x,t), \end{cases} \tag{1.1.11}$$

$\varphi_\varepsilon(x,0) = \dfrac{1}{\varepsilon} f_0(x,0)$, решение которой ищем в виде:

$$\begin{cases} u_\varepsilon\ (x,t) = \overline{u}(x,t) + \omega_\varepsilon(x,t), \\ z_\varepsilon(x,t) = \overline{z}(x,t) + \varsigma_\varepsilon(x,t), \\ \varphi_\varepsilon\ (x,t) = \Pi_{0\varepsilon}(x,t) + \upsilon(x,t) + \xi_\varepsilon(x,t), \end{cases} \tag{1.1.12}$$

где $\Pi_{0\varepsilon}(x,t) = \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(x,t)$. Для определения новых неизвестных вектор-функций $\omega_\varepsilon(x,t), \varsigma_\varepsilon(x,t), \Pi_\varepsilon(x,t), \xi_\varepsilon(x,t)$, подставляя (1.1.11) в (1.1.10), получим системы

$$\begin{cases} \overline{u}(x,t) = (A[\overline{u}, \overline{z}, \upsilon])(x,\ t), \\ \overline{z}(x,t) = (F[\overline{u}, \overline{z}, \upsilon])(x,t), \\ p(t)\upsilon(x,t) + (H_0\upsilon)(x,t) = (B[\overline{u}, \upsilon])(x,\ t) + g_0(x,t), \quad \upsilon(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1.1.14}$$

$g_0(x,t) = f_0(x,t) - f_0(x,0)$,

$$\begin{cases} \omega_\varepsilon(x,t) = (A[\overline{u} + \omega, \overline{z} + \varsigma, \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])(x,\ t) - (A[\overline{u}, \overline{z}\upsilon])(x,\ t), \\ \varsigma_\varepsilon(x,t,\varepsilon) = (F[\overline{u} + \omega_\varepsilon, \overline{z} + \varsigma_\varepsilon, \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])(x,\ t) - (F[\overline{u}, \overline{z}, \upsilon])(x,\ t), \\ [\varepsilon + p(t)]\xi_\varepsilon(x,t) + (H_0\xi_\varepsilon)(x,t) = (B[\overline{u} + \omega_\varepsilon, \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi + \upsilon + \xi_\varepsilon])(x,\ t) - \\ -(B[\overline{u}, \upsilon])(x,\ t) - \dfrac{1}{\varepsilon}p(t)\Pi_\varepsilon(x,t) - \varepsilon\upsilon(x,t), \quad \xi_\varepsilon(x,0) = 0. \end{cases} \tag{1.1.15}$$

$$\Pi_\varepsilon(x,t) = W_0(x,t,0,\varepsilon) f_0(x,0), \tag{1.1.16}$$

где $W_0(x,t,s,\varepsilon) = \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_s^t H_0(x,\tau)d\tau\right)$,

$$\|W_0(x,t,s,\varepsilon)\| \le \sqrt{n}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t h(\tau)d\tau\right), \ (s \le t).$$

Тогда $\|\Pi(x,t,\varepsilon)\| \le \sqrt{n}\|f_0(x,0)\| e^{-\frac{1}{\varepsilon}\psi(t)}$. (1.1.17)

Регуляризирующей системой для (1.1.14) является система вида

$$\begin{cases} \overline{u}_\delta(x,t) = (A[\overline{u}_\delta, \overline{z}_\delta, \upsilon_\delta])(x,\ t), \\ \overline{z}_\delta(x,t) = (F[\overline{u}_\delta, \overline{z}_\delta, \upsilon_\delta])(x,t), \\ [\delta + p(t)]\upsilon_\delta(x,t) + (H_0\upsilon_\delta)(x,t) = (B[\overline{u}_\delta, \upsilon_\delta])(x,\ t) + g_0(x,t), \end{cases} \tag{1.1.18}$$

$(0,1) \ni \delta$ - малый параметр.

Лемма 1.1.2. Если при выполнении условий **а)-д)**, (1.1.4) и $Q_0 < 1$, то система (1.1.18) имеет единственное решение в классе $\left(C_n^{2,1}(D),\ C_n(D)\right)$, которое при $\delta \to 0$ равномерно сходится к решению системы (1.1.14), причем

$$\|u_\delta(x,t) - \overline{u}(x,t)\|_C + \|z_\delta(x,t) - \overline{z}(x,t)\|_C + \|\upsilon_\delta(x,t) - \upsilon(x,t)\|_C \le$$
$$\le (1 - Q_0)^{-1}\left[e^{-1}(2C_1 + 1)\|\upsilon(x,t)\|_C \sqrt{n}\delta^{1-\theta} + (C_1 + 1)W_{\overline{\upsilon}}(\delta^\theta)\sqrt{n}\right],$$

где $0 < \theta < 1$, $W_{\overline{\upsilon}}(\overline{\alpha}) = \sup\limits_{|y-v|\le\overline{\alpha}} \|\upsilon(\psi^{-1}(y)) - \upsilon(\psi^{-1}(v))\|$, $\psi^{-1}(y)$ - обратная функция относительно $\psi(t)$, $Q_0 = q_1 + q_2 + q_3^0$, $q_3^0 = q_3C_3$, $C_3 = 2C_1C_4 + e^{-1}$, $0 < C_4 \le 1 + e^{-1}$, q_1, q_2, q_3^0 - коэффициенты Липшица операторов системы (1.1.18).

Лемма 1.1.3. При выполнении условий **а)-г)**, (1.1.4) и неравенства $Q_0 < 1$ система (1.1.15) имеет единственное непрерывное решение, равномерно стремящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$, причем

$$\|\omega_\varepsilon(x,t)\|_C + \|\varsigma_\varepsilon(x,t)\|_C + \|\xi_\varepsilon(x,t)\|_C \le (1 - \overline{Q}_2)^{-1}\left[e^{-1}(2C_1 + 1)\|\upsilon(x,t)\|_C \sqrt{n} \times \varepsilon^{1-\theta} + \right.$$
$$\left. +(C_1 + 1)W_{\overline{\upsilon}}(\varepsilon^\theta)\sqrt{n} + N_0\varepsilon^{\beta-2}\right], \tag{1.1.22}$$

$\overline{Q}_2 = \max\{q_1, q_2, Q_2\}$, $Q_2 = C_3(q_3 + Q_3\varepsilon^{\beta-1})$, $Q_3 = 2Q_4 + Q_5Q_6C_2\left[\gamma_1 + L_g L_{K_0}\mathrm{T}r_4\|\sigma_3(t)\|_C\right]$, $Q_4 = C_2\|\sigma_2(x,t)\|_C + \mathrm{X}L_1\|\sigma_3(t)\|_C$, $N_0 = Q_5Q_6[\gamma_2^{-1}\mathrm{T}L_1 + Q_4(Q_5 + 2r_1) + \gamma_1C_2(Q_5 + r_1)\|p(t)\|_C + \mathrm{X}L_{1M}\|\sigma_3(t)\|_C]$, $Q_5 = \sqrt{n}\|f(x,0)\|_C$, $Q_6 = (\beta e^{-1})^\beta$,

$\sigma_2(x,t) = \displaystyle\int_0^t K(x,s,s)(\psi(s))^{-\beta}ds$, $\sigma_3(t) = \displaystyle\int_0^t (\psi(s))^{-\beta}ds$,

$\|\xi_\varepsilon(x,t)\|_C \le r_1$, $r = \max(r_1, r_2)$, $\|\upsilon(x,t)\|_C \le r_2$, $\|\overline{u}(x,t)\|_C \le r_4$.

Теорема 1.1.1. Если выполняются условия **а)-д)**, (1.1.4) и $Q_0 < 1$, то существует решение возмущенной системы (1.1.11), которое единственным образом представимо в виде (1.1.12) и при $\varepsilon \to 0$, оно сходится к решению системы (1.1.14) $\forall (x,t) \in [0,\mathrm{X}] \times (0,\mathrm{T}]$, а в точке $t = 0$: $\varphi_\varepsilon(x,0) = \dfrac{1}{\varepsilon}f_0(x,0)$ $\forall x \in [0,\mathrm{X}]$.

Пусть

$$\left\|\int_0^t\int_0^{\mathrm{X}} M(\delta,t,s,\eta,\varphi(\eta,s),u(0,s))d\eta ds - \int_0^t\int_0^{\mathrm{X}} M(\delta,t,s,\eta,\upsilon(\eta,s),\overline{u}(0,s))d\eta ds\right\|_{L^q_n(0,\mathrm{T})} \le \delta_0,$$

где δ_0 - достаточно малое число, $p > 1$. (1.1.27)

Лемма 1.1.4. Пусть выполняются условия **а)-д)**, (1.1.27). Тогда имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)\|_{L^q(0,T)} \le M_5\Delta_0(\varepsilon) + M_6\delta_0,$$

где $\Delta_0(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0$, $0 < M_5, M_6 = const$.

Лемма 1.1.5. При условиях **а)-г)** имеют место оценки

$$\|\varphi_\varepsilon(x,t) - \upsilon(x,t)\|_{L^q(0,T)} \le (2^q\mathrm{T}\delta_0^q(\varepsilon) + C_7B_0\varepsilon^{\beta-q})^{\frac{1}{q}}, \tag{1.1.29}$$

$$\|\Pi_\varepsilon(x,t)\|_{L^q(0,\mathrm{T})} \le (C_8 B_0)^{\frac{1}{q}} \varepsilon^{\frac{\beta}{q}}, \tag{1.1.30}$$

где $C_7 = 2^q Q_5^q Q_6 q^{-\beta}$, $C_8 = Q_6 Q_5^q q^{-\beta}$, $1 < q < \beta$, $B_0 = \sup\limits_{[0,\mathrm{T}]} \left| \int_0^t (\psi(\tau))^{-\beta} d\tau \right|$,

$\overline{\delta}_0(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Лемма 1.1.6. Если выполняются условия **а)-г)**, то имеет место оценка

$$\|(\Phi[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x,t) - f_0(x,t)\|_{L^q} \le [2^q C_9^q (2^q \mathrm{T} \overline{\delta}_0^q(\varepsilon) + C_7 B_0 \varepsilon^{\beta-q}) +$$

$$+4^q(\varepsilon r + \delta_1(\varepsilon))^q \mathrm{T} + 4^q C_8 B_0 \varepsilon^\beta]^{\frac{1}{q}} + \varepsilon(\overline{\delta}_0(\varepsilon) + r)\mathrm{T}^{\frac{1}{q}} + (C_8 B_0 \varepsilon^\beta)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.1.32}$$

где $C_9 = \varepsilon + p(t)$, $\overline{\delta}_0(\varepsilon)$, $\delta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$,

$$(\Phi[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x,t) \equiv p(t)\varphi_\varepsilon(x,t) + (B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x,t) + \int_0^t H_0(x,s)\varphi_\varepsilon(x,s)ds.$$

В §1.2 изучается задача с обратным временем для системы интегральных и дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} u_{xt}(x,t) + b(x)u_t(x,t) = f(x,t,u(x,t),u_x(x,t)), & (1.2.1) \\ p(x)\varphi(x) + \int_0^x K(x,\eta)\varphi(\eta)d\eta = f_0(x) + \int_0^x\int_0^{\mathrm{T}} M_0(x,\eta,\tau,u(\eta,\tau))d\tau d\eta, & (1.2.2) \\ (P_0 u)(x) = \int_0^x\int_0^{\mathrm{T}} \left[M_1(x,\eta,\tau,u_\eta(\eta,\tau),u(\eta,\tau)) + M(\delta,x,\eta,\tau,\varphi(\eta))\right]d\tau d\eta, & (1.2.3) \\ u(0,t) = 0 \ \forall t \in [0,\mathrm{T}], \end{cases}$$

где $(P_0 u)(x) \equiv u_x(x,\mathrm{T}) + b(x)u(x,\mathrm{T})$, а относительно $f_0(x)$, $p(x)$, $M_0(x,\eta,\tau,u)$, $M_1(x,\eta,\tau,u_x,\overline{u})$, $M(\delta,x,\eta,\tau,\varphi)$, $K(x,\eta)$, $b(x)$, $f(x,t,u,u_x)$ выполняются условия вида:

а) $K(x,\eta) \in C_n(D_1)$, $D_1 = \{(x,\eta): 0 \le \eta \le x \le \mathrm{X}\}$, $D_0 = [0,\mathrm{X}] \times [0,\mathrm{T}]$,
$0 \le \lambda_0(x) = \min\{\lambda_i(x) | (i = 1,\ldots,n)\}$, $C[0,\mathrm{X}] \ni \lambda_i(x)$,
$\|K(x,\eta) - K(z,\eta)\| \le L_1|x - z|$, $0 < L_1 = const$, $b(x) \in C[0,\mathrm{X}]$;

б) $f_0(x) \in C^{0,1}[0,\mathrm{X}]$, $f_0(x) \ne 0$, $\forall x \in [0,\mathrm{X}]$,
$p(x) > 0$, $\forall x \in (0,\mathrm{X}]$, $p(0) = 0$, $p(x) \le \gamma_1(\psi(x))^\beta$, $0 < \gamma_1 = const$,
$\psi(x) = \int_0^x h(\tau)d\tau$, $0 < \gamma_2 \le h(x) \in L^1(0,\mathrm{X})$, $\beta > 2 + \beta_0$, $\beta_0 > 0$,
$(\psi(x))^{-\beta} \in L^1(0,\mathrm{X})$, $p(x)$ - неубывающая функция;

в) $M_1(x,\eta,\tau,u_x,\overline{u}) \in C_n(D_2)$, $D_2 = D_1 \times [0,\mathrm{T}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
$M_1(x,0,\tau,u_x,\overline{u}) = 0$, $f(x,t,u,u_x) \in C_n(D_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $M_{0u}^{(i)}(\eta,\eta,\tau,u) \equiv 0$,
$i = 0,1$, $M(\delta,x,\eta,\tau,\varphi) \to 0$, $\delta \to 0$,
$\|M(\delta,x,\eta,\tau,\varphi) - M(\delta,z,\eta,\tau,\varphi)\| \le N_0(\delta)\lambda(\eta)|\psi(x) - \psi(z)|$,

$\|M_{0u}^{(i)}(x,\eta,\tau,u) - M_{0u}^{(i)}(z,\eta,\tau,u)\| \le N_1|\psi(x) - \psi(z)|$, $i = 0,1$,
$\lambda(\eta)(\psi(\eta))^{-\beta} \in L^1(0,\mathrm{X})$, $M_1(x,\eta,\tau,u_x,\overline{u})$ удовлетворяет условию Липшица по аргументам $u_x, \overline{u}$.

В отличие от задачи предыдущего параграфа в случае задачи (1.2.1)-(1.2.3) эквивалентная система интегральных уравнений состоит из двух систем смешанной структуры: системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода и системы интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

$$z(x,t) = \int_0^t f\Big(x,\tau, \int_0^x e^{-\int_\eta^x b(s)ds} z(\eta,\tau)d\eta, z(x,\tau) - b(x)\int_0^x e^{-\int_\eta^x b(s)ds} z(\eta,\tau)d\eta\Big)d\tau +$$

$$+ \int_0^x\int_0^{\mathrm{T}} \Big[M_1\Big(x,\eta,\tau, z(\eta,\tau) - b(\eta)\int_0^\eta e^{-\int_s^\eta b(\mu)d\mu} z(s,\tau)ds, \int_0^\eta e^{-\int_s^\eta b(\mu)d\mu} z(s,\tau)ds\Big) +$$

$$+M(\delta,x,\eta,\tau,\varphi(\eta))\Big]d\tau d\eta - \int_0^{\mathrm{T}} f\Big(x,\tau, \int_0^x e^{-\int_\eta^x b(s)ds} z(\eta,\tau)d\eta, z(x,\tau) - b(x)\int_0^x e^{-\int_\eta^x b(s)ds} \times$$

$$\times z(\eta,\tau)d\eta\Big)d\tau \equiv \big(B[z,\varphi]\big)(x,t), \tag{1.2.5}$$

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x [K_0(x,\eta) - K_0(\eta,\eta)]\varphi(\eta)d\eta + \int_0^x H_0(\eta)\varphi(\eta)d\eta - \int_0^x G(\eta)\big(Q[\varphi,z]\big)(\eta)d\eta =$$

$$= f_0(x) + \int_0^x\int_0^{\mathrm{T}} M_0\Big(x,\eta,\tau, \int_0^\eta e^{-\int_\mu^\eta b(s)ds} z(\mu,\tau)d\mu\Big)d\tau d\eta, \tag{1.2.6}$$

где $H_0(x) = K(x,x) + G(x)f_0(x)$, $G(x) = diag(\mu(x)f_{0i}(x))_1^n$,
$\big(Q[\varphi,z]\big)(x) = colon\big(Q_1[\varphi_1,\ldots,\varphi_n,z_1,\ldots,z_n],\ldots,Q_n[\varphi_1,\ldots,\varphi_n,z_1,\ldots,z_n]\big)$,
$Q_1[\varphi_1,\ldots,\varphi_n,z_1,\ldots,z_n] \equiv \varphi_1(x)L_1[\varphi_1,\ldots,\varphi_n,z_1,\ldots,z_n]$, ...,
$Q_n[\varphi_1,\ldots,\varphi_n,z_1,\ldots,z_n] \equiv \varphi_n(x)L_n[\varphi_1,\ldots,\varphi_n,z_1,\ldots,z_n]$;

$$\big(L[\varphi,z]\big)(x) \equiv p(x)\varphi(x) + \int_0^x K_0(x,s)\varphi(s)ds -$$

$$-\int_0^x\int_0^{\mathrm{T}} M_0\Big(x,\eta,\tau, \int_0^\eta e^{-\int_\mu^\eta b(s)ds} z(\mu,\tau)d\mu\Big)d\tau d\eta.$$

Регуляризованная система для (1.2.5), (1.2.6) строится в виде

$$\begin{cases} z_\varepsilon(x,t) = (B[z_\varepsilon,\varphi_\varepsilon])(x,t), & (1.2.7) \\ (\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + (P[\varphi_\varepsilon,z_\varepsilon])(x) + \int_0^x H_0(\eta)\varphi_\varepsilon(\eta)d\eta = f_0(x), & (1.2.8) \\ \varphi_\varepsilon(0) = \dfrac{1}{\varepsilon}f_0(0), \end{cases}$$

решение которой имеет структуру

$$\begin{cases} z_\varepsilon(x,\ t) \ = \ \overline{z}(x,\ t) \ + \aleph_\varepsilon(x,\ t), \\ \varphi_\varepsilon(x) \ = \ \upsilon(x) \ + \ \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi(x,\ \varepsilon) \ + \ \xi_\varepsilon(x), \end{cases} \tag{1.2.9}$$

где $\big(P[\varphi,z]\big)(x) \equiv \int\limits_0^x \big[K_0(x,\eta) - K_0(\eta,\eta)\big]\varphi(\eta)d\eta - \int\limits_0^x G(\eta)\big(Q[\varphi,z]\big)(\eta)d\eta -$

$$-\int\limits_0^x\int\limits_0^{\mathrm{T}} M_0\left(x,\eta,\tau,\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_\mu^\eta b(s)ds} z(\mu,\tau)d\mu \right)d\tau d\eta .$$

Относительно новых искомых вектор-функций получены системы

$$\aleph_\varepsilon(x,t) = (B[\overline{z} + \aleph_\varepsilon, \Pi/\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])(x,t) - (B[\overline{z},\upsilon])(x,t), \tag{1.2.10}$$

$$(\varepsilon + p(x))\xi_\varepsilon(x) + \int\limits_0^x H_0(\eta)\xi_\varepsilon(\eta)d\eta + \left(P\left[\frac{1}{\varepsilon}\Pi + \upsilon + \xi_\varepsilon, \overline{z} + \aleph_\varepsilon\right](x) - \right.$$

$$\left. -P[\upsilon,\overline{z}]\right)(x) = -\varepsilon\upsilon(x) - \frac{p(x)}{\varepsilon}\Pi(x,\varepsilon), \tag{1.2.11}$$

$$p(x)\upsilon(x) + \int\limits_0^x H_0(\eta)\upsilon(\eta)d\eta + (P[\upsilon,\overline{z}])(x) = f_0(x) - f_0(0), \tag{1.2.13}$$

$$\Pi(x,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x W_0(x,\ \eta,\ \varepsilon)H_0(\eta)f_0(0)d\eta + f_0(0) = W_0(x,0,\varepsilon)\times f_0(0), \tag{1.2.16}$$

$\Pi(0,\varepsilon) = f_0(0)$,

$$\begin{cases} \overline{z}(x,t) = (B[\overline{z},\upsilon])(x,t), \quad \forall(x,t)\in D_0, \\ p(x)\upsilon(x) + \int\limits_0^x H_0(\eta)\upsilon(\eta)d\eta + \big(P[\upsilon,\overline{z}]\big)(x) = F(x), \end{cases} \tag{1.2.17}$$

где $\upsilon(0) = 0,\ f_0(x) - f_0(0) = F(x) \in C_n^1[0,\mathrm{X}]$.

Теорема 1.2.1. Пусть для функций $f_0(x),\ p(x),\ M_0(x,\eta,\tau,u)$, $M(\delta,x,\eta,\tau,\varphi),\ M_1(x,\eta,\tau,w,\overline{u}),\ K_0(x,\eta),\ b(x),\ f(x,t,w,u)$ имеют место условия **а)-д)**. Тогда нелинейная система интегральных уравнений (1.2.7) с условием (1.2.8) имеет единственное решение, представимое в виде (1.2.9). Причем, это решение сходится при $\varepsilon \to 0$, $(0<\varepsilon\le\varepsilon_0<1)$ к решению $(\overline{z},\upsilon)$ системы (1.2.17) на $(0,\mathrm{X}]\times[0,\mathrm{T}]$, имеют место оценки:

$$\|z_\varepsilon(x,t) - \overline{z}(x,t)\| \le \Delta_0(\varepsilon), \tag{1.2.31}$$

$$\|\varphi_\varepsilon(x) \ - \ \upsilon(x)\| \le \Delta_1(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{n}\|f_0(0)\|e^{-\frac{\psi(x)}{\varepsilon}}, \tag{1.2.32}$$

$\forall x \in (0,\mathrm{X}]$, если $\upsilon(x) \in C_n(D_0)$, где

$$\Delta_0(\varepsilon) = Q_*(1-\overline{Q})^{-1}\big[\varepsilon^{\alpha_0}(Q_1^0 + Q_2^0) \ + \ e^{-1}(2N_0+1)\sqrt{n}\varepsilon^{1-\beta_0}\|\upsilon(x)\|_C +$$

$$+(N_0+1)\sqrt{n}\omega_{0\overline{\upsilon}}(\varepsilon^{\beta_0})\big] + \varepsilon^{\alpha_0}Q_*^0,$$

$$\Delta_1(\varepsilon) = \Delta_0(\varepsilon) + e^{-1}(2N_0 \ + \ 1)\sqrt{n}\varepsilon^{1-\beta_0}\,\|\upsilon(x)\|_C + (N_0+1)\sqrt{n}\omega_{0\overline{\upsilon}}(\varepsilon^{\beta_0}),$$

$$Q_* = \max(Q_1,Q_2),\ Q_*^0 = \max(Q_1^0,Q_2^0).$$

Теорема 1.2.2. Пусть выполняются условия теоремы 1.2.1 и $\overline{z}(x,t) \in C_n^{0,1}(D),\ \upsilon(x) \in C_n[0,\mathrm{X}]$. Тогда на основе равенства вида

$$u(x,t) = \int\limits_0^x e^{-\int\limits_\eta^x b(s)ds} z(\eta,t)d\eta \equiv (Az)(x,t) \tag{1.2.4}$$

существует единственная функция $\overline{u}(x,t)$, которая является пределом функции $u_\varepsilon(x,t)$, когда $\varepsilon \to 0$, при этом имеет место:

$$\|u_\varepsilon(x,t) - \overline{u}(x,t)\|_C \le N_5\Delta_0(\varepsilon)\mathrm{X}.$$

Теорема 1.2.3. При условиях теорем 1.2.1, 1.2.2 существует единственная пара n-мерных вектор-функций $(u_\varepsilon,\varphi_\varepsilon)$ и при $\varepsilon \to 0$ сходится к паре $(\overline{u},\upsilon)$ на $(0,\mathrm{X}]\times[0,\mathrm{T}]$, где $(\overline{u}(x,t),\upsilon(x))$ - решение системы (1.2.13) и $\overline{u}(x,t) = (A\overline{z})(x,t)$.

Далее с учетом

$$\|M(\delta,x,\eta,\tau,\varphi) - M(\delta,x,\eta,\tau,\upsilon)\|_{L^q(0,\mathrm{X})} \le \delta_1, \tag{1.2.33}$$

доказана близость функций $u_\varepsilon(x,t),\ u(x,t)$ в смысле $L_n^q(0,\mathrm{X})$ (результат леммы 1.2.3.), т.е.

$$\|u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)\|_{L^q(0,\mathrm{X})} \le \mathrm{X}^{\frac{1}{q}}N_5\Delta_0(\varepsilon) + (1-Q_1^0)^{-1}\mathrm{T}\mathrm{X}^2N_5\delta_1.$$

В §1.3 рассмотрен случай задачи (1.2.1) - (1.2.3), когда $M(\delta,x,\eta,\tau,\varphi) \equiv 0$, которая приводит к системам интегральных уравнений, одна из которой разрешима независимо от второй.

Приведен пример, наглядно иллюстрирующий построенную теорию. Расчет данных в таблице и график выполнен в MS Excel.

Вторая глава посвящена исследованию системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода, имеющих особое решение из пространства $Z_n^q(D)$. Все нелинейные системы данной главы имеют выделенную линейную часть, ядро которой удовлетворяет условию (7), а нелинейная часть тождественно равна нулю на диагонали.

В такой постановке задачи рассмотрены следующие вопросы:

1. Построить эквивалентную систему, допускающую применение метода сингулярных возмущений.
2. Исследовать условия однозначной разрешимости построенной регуляризирующей системы и структуру ее решения.
3. Доказать сходимость регуляризованного решения к решению видоизмененной системы.

В §2.1 изучена система интегральных уравнений

$$p(x)u(x) + \int\limits_0^x K(x,t)u(t)dt = \int\limits_0^x K_0(x,t,u(t))dt + f(x), \tag{2.1.1}$$

где известные функции $p(x)$, $f(x)$, $K(x,t)$ удовлетворяют условиям а)-б) §1.2 первой главы, а для $K_0(x,t,u)$ имеют место условия:

$$K_0(x,x,u)\equiv 0,\ \left\|K_{0u}^{(i)}(x,t,u)-K_{0u}^{(i)}(y,t,u)\right\|\le C_0\lambda(t)\int_y^x h(\tau)d\tau,$$

$$x\ge y,\ (i=0,1),\ \lambda(t)\psi(t)^{-\beta}\in L^1(0,X).$$

Для системы (2.1.1), получена регуляризованная система

$$(\varepsilon+p(x))u_\varepsilon(x)+\int_0^x H_0(t)u_\varepsilon(t)dt=\int_0^x G(t)(Qu_\varepsilon)(t)dt+\int_0^x K_0(x,t,u_\varepsilon(t))dt-$$

$$-\int_0^x[K(x,t)-K(t,t)]u_\varepsilon(t)dt+f(x),\ u_\varepsilon(0)=\frac{f(0)}{\varepsilon}, \qquad (2.1.3)$$

$$H_0(t)=H(t)+K(t,t),\ Q_i(u_1,...,u_n)=u_i(x)\left[p(x)u_i(x)+\left(L_i[u_1,...,u_n]\right)(x)\right],\ i=1,...,n,$$

$$(Lu)(x)=\int_0^x K(x,t)u(t)dt-\int_0^x K_0(x,t,u(t))dt,\ G(t)=\mu(t)f(t),\ H(t)=G(t)f(t).$$

Теорема 2.1.1. Решение системы (2.1.3) единственным образом представимо в виде $u_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\Pi(x,\varepsilon)+v(x)+\xi_\varepsilon(x)$, которое при $x\in(0,X]$ и $\varepsilon\to 0$ сходится к решению $v(x)$ системы (2.1.5), причем $u_\varepsilon(0)=\frac{1}{\varepsilon}f(0)$.

Лемма 2.1.4. Если выполняются условия *а) - д),* то имеют место оценки

$$\|\Pi(x,\varepsilon)\|_{L^q}\le(C_4B_0)^{\frac{1}{q}}\varepsilon^{\frac{1}{q}},\ \|u_\varepsilon(x)-v(x)\|_{L^q}\le 2(X\delta_0^q(\varepsilon)+C_4B_0\varepsilon^{\beta-q})^{\frac{1}{q}},$$

$$\|(\Phi u_\varepsilon)(x)-f(x)\|_{L^q}\le\delta_1(\varepsilon),$$

где $C_4=N_0N_1^q q^{-\beta}$, $\|\xi(x,\varepsilon)\|_C\le\delta_0(\varepsilon)\to 0,\ \delta_1(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0,$

$$B_0=\sup_{[0,X]}\left|\int_0^x(\psi(t))^{-\beta}dt\right|,\ (\Phi u_\varepsilon)(x)=p(x)u_\varepsilon(x)+\int_0^x H_0(t)u_\varepsilon(t)dt+$$

$$+\int_0^x[K(x,t)-K(t,t)u_\varepsilon(t)]dt-\int_0^x G(t)(Qu_\varepsilon)(t)-\int_0^x K_0(x,t,u_\varepsilon(t))dt.$$

Здесь $v(x)$ и $\xi_\varepsilon(x)$ определяются из системы:

$$p(x)v(x)=-\int_0^x H_0(t)v(t)dt+\int_0^x G(t)(Qv)(t)dt+\int_0^x K_0(x,t,v(t))dt-$$

$$-\int_0^x[K(x,t)-K(t,t)]v(t)dt+F(x),$$

$$v(0)=0,\ F(x)=f(x)-f(0), \qquad (2.1.5)$$

$$[\varepsilon+p(x)]\xi_\varepsilon(x)=-\int_0^x H_0(t)\xi_\varepsilon(t)dt-\int_0^x G(t)\left(\left[Q\left[v+\frac{1}{\varepsilon}\Pi+\xi_\varepsilon\right]\right](t)-(Qv)(t)\right]dt-$$

$$-\int_0^x\left[K(x,t,v(t)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi(t,\varepsilon)+\xi_\varepsilon(t))-K(x,t,v(t))\right]dt-\int_0^x[K(x,t)-K(t,t)]\left(\frac{1}{\varepsilon}\Pi(t,\varepsilon)+\right.$$

$$\left.+\xi_\varepsilon(t)\right)dt-\varepsilon v(x)-\frac{p(x)}{\varepsilon}\Pi(x,\varepsilon),\ \xi_\varepsilon(0)=0. \qquad (2.1.6)$$

В §2.2 рассмотрена система обобщенных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

$$p(x)u(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt=\int_0^{M(x)}K_0(x,t,u(t))dt+f(x), \qquad (2.2.1)$$

где $p(x)$, $K(x,t)$, $K_0(x,t,u)$ такие же, как и в §2.1, а $M(x)$ -- заданная неубывающая функция, удовлетворяющая условию Липшица с коэффициентом $0<L_3=const$, $M(x)\in C[0,X]$, $0\le M(x)\le x\le X$, $M(0)=0$.

Система (2.2.1) исследована в двух случаях. В первом случае правая функция $f(x)$ системы отлична от нуля на заданном отрезке $[0,X]$, во втором - имеет место разложение $f(x)=f_0(x)-\overline{f}(x)$ и выполняются условия

$$\overline{f}(0)=0,\ f_0(x)\ne 0,\ \forall x\in[0,X],\ f(x)\in C_n^1[0,X],\ \left\|\overline{f}(x)\right\|\le d_2(\psi(x))^\beta,$$

$$0<d_2=const,\ \beta>\beta_0+2,\ \beta_0>0.$$

Для второго случая регуляризованная система имеет вид:

$$[\varepsilon+p(x)]u_\varepsilon(x)+\int_0^x H_0(t)u_\varepsilon(t)dt=\int_0^x G(t)(Qu_\varepsilon)(t)dt+\int_0^x G_0(t)u_\varepsilon(t)dt+$$

$$+\int_0^{M(x)}K_0(x,t,u(t))dt-\int_0^x[K(x,t)-K(t,t)]u(t)dt+f(x),$$

где $G_0(x)\equiv diag(G_1(x)\overline{f}_1(x),...,G_n(x)\overline{f}_n(x))$.

В §2.3 результаты предыдущих исследований распространены на систему двумерных, нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

$$p(t)u(x,t)+\int_0^t K(x,t,s)u(x,s)ds=\int_0^{M(t)}\int_0^{N(x)}K_0(x,t,s,\eta,u(\eta,s))d\eta ds+f(x,t), \qquad (2.3.1)$$

Здесь $p(t), f(x,t),\ K(x,t,s)$ такие же, как и в §1.1, а $M(t),\ N(x),\ K_0(x,t,s,u)$ удовлетворяют условиям: $M(0)=0,\ 0\le M(t)\le t\le T,\ 0\le N(x)\le X$, $M(t)\in C[0,T],\ N(x)\in C[0,X];\ K_{0u}^{(i)}(x,t,t,\eta,u)\equiv 0,\ i=0,1,\ D_2=D_0\times D_0\times\mathbb{R}^n$,

$$\left\|K_{0u}^{(i)}(x,t,s,\eta,u)-K_{0u}^{(i)}(x,z,s,\eta,u)\right\|\le C_0\lambda(s)\int_z^t h(\tau)d\tau,\ z\le t,\ i=0,1.$$

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Алыбаев А.М. Нелинейная задача Гурса с обратным временем //Вестник КГНУ. Серия 5. Труды молодых ученых Центра магистратуры, аспирантуры и нац. образовательных программ. - Бишкек, 2000. - Вып.6. Естеств.-техн. науки. -С.34-38.

2. Алыбаев А.М. Система обобщенных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с особым решением //Вестник КГНУ. Сер. 3. Естеств.-техн. науки. –Бишкек, 2001. - Вып.7. Мат. науки.-С.214-217.
3. Каракеев Т.Т., Алыбаев А.М. Системное решение интегральных уравнений Вольтерра третьего рода //Там же. – С. 83-88.
4. Алыбаев А.М. Метод сингулярных возмущений для двумерных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода //Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Тр. Междунар. науч. конф., посв. 70-летию акад. М.И. Иманалиева /Вестник КГНУ.– Сер. 3. Естеств.-техн. науки. - Бишкек, 2001. - Вып.6. Мат. науки. Информатика и информац. технол.-С.244-248.
5. Алыбаев А.М. Метод возмущения для линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода //Вестник КГНУ. Естественн.-техн. науки. – Сер. 5. Тр. молодых ученых Центра магистратуры, аспирантуры и нац. Образовательных программ. - Бишкек, 2001. - Вып.3. физ. мат. науки. - С.35-40.
6. Омуров Т.Д., Алыбаев А.М. Метод сингулярных возмущений для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям - Бишкек: Илим, 2001. - Вып.30.-С.35-38.
7. Омуров Т.Д., Алыбаев А.М. Метод сингулярных возмущений для двумерных интегральных и дифференциальных уравнений с нелокальными условиями // Там же. - Бишкек: Илим, 2002. - Вып.31. – С. 198-206.
8. Алыбаев А.М. Регуляризация смешанной системы с граничными интегральными условиями //Мат-лы междунар. конф. «Модернизация высшей школы в переходный период: состояние и перспективы» к 50- летию КГПУ им. И. Арабаева. - Бишкек, 2002.- Т.1. - С.79-85.

Аннотация

АЛЫБАЕВ АНАРБЕК МАСАЛБЕКОВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЖАНА ВОЛЬТЕРРАНЫН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИНИН СИСТЕМАЛАРЫН СИНГУЛЯРДУУ ӨЗГӨРТҮҮ ЫКМАСЫ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

Урунттуу сөздөр: интегро-дифференциалдык теңдеме, интегралдык теңдеме, тескери маселе, корректүү эмес коюлган маселе, сингулярдуу өзгөртүү, эквиваленттүү көрсөтүлүш.

Диссертациялык иште тескери коюлган маселелер жана Бицадзе-Самарский тибиндеги локалдуу эмес маселелер, ошондой эле Вольтерранын үчүнчү түрдөгү теңдемелеринин корректүү эмес учуру изилденет. Каралып жаткан маселелерди чыгарууда сингулярдуу өзгөртүү жана интегралдык теңдемелерди эквиваленттүү теңдемелерге айлантуу ыкмалары колдонулган. Изилденүүчү маселелердин чыгарылышынын жалгыздыгы жана жашоосунун жетиштүү шарттары далилденген.

Аннотация

АЛЫБАЕВ АНАРБЕК МАСАЛБЕКОВИЧ

МЕТОД СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, интегральное уравнение, обратная задача, некорректно поставленная задача, сингулярное возмущение, эквивалентное представление.

В диссертационной работе исследованы обратные и нелокальные задачи типа Бицадзе-Самарского и классы некорректных уравнений Вольтерра третьего рода. Для решения поставленных задач применены методы сингулярных возмущений, эквивалентных представлений интегральных уравнений. Доказаны достаточные условия существования и единственности исследуемых задач.

Abstract

ANARBEK M. ALYBAEV

THE METHOD OF SINGULAR PERTURBATION FOR SOLVING THE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THE THIRD KIND VOLTERRA TYPE INTEGRAL EQUATIONS

Key words: integro-differential equation, integral equation, inverse problem, ill-posed problem, singular perturbation, equivalent representation.

In this thesis inverse problems and non-local problems of Bitsadze-Samarsky type and ill-posed problem for the third kind Volterra type equations were investigated. The method of singular perturbation and equivalent representation of integral equations with weighting function was used. The sufficient conditions of existence and uniqueness of solution of the researched problems are proved.

Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Бумага офсетная. Объем 1 п.л.
Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Ч.П. «Абыкеева А.Э.»
г. Бишкек. ул. Абдумомунова-193
тел:62-20-48