НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01. 02. 183

На правах рукописи

СУЛАЙМАНОВ БАКТЫБЕК ЭРЖИГИТОВИЧ

УДК 517. 948

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА К ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

БИШКЕК 2003

Работа выполнена в Институте математики НАН Кыргызской Республики и на кафедре высшей математики Кыргызского технического университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Асанов А.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, с. н. с. Алексеенко С. Н., кандидат физико-математических наук, доцент Бараталиев К. Б.

Ведущая организация: КазГНУ им. Аль-Фараби.

Защита диссертации состоится "6" мая 2003 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 01. 02. 183 по присуждению ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук при Институте математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан "5" апреля 2003 г.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек-71, проспект Чуй-265а, Институт математики НАН Кыргызской Республики, Диссертационный совет Д 01. 02. 183

Ученый секретарь
Диссертационного совета Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Существует широкий класс обратных задач, математическая постановка которых не удовлетворяет классическим условиям корректности. А. Н. Тихонов показал целесообразность применения к некорректным в смысле Адамара задачам понятия корректности, отличного от классического. При этом на передний план выдвигается вопрос существования и единственности решений обратных задач.

Настоящая работа посвящена изучению обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений методом дополнительного аргумента.

Метод дополнительного аргумента к прямым задачам применен в работах М. И. Иманалиева, Ю. А. Ведь, П. С. Панкова, С. Н. Алексеенко, А. Ж. Аширбаевой, Т. М. Иманалиева, Ш. А. Эгембердиева и многих других. Этот метод, предложенный академиком М. И. Иманалиевым, открыл новые возможности для изучения нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Обратные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений исследованы довольно широким кругом ученых, таких, как М. М. Лаврентьев, Ю. Е. Аниконов, А. Л. Бухгейм, В. Г. Романов, С. И. Кабанихин, В. Г. Яхно, М. И. Иманалиев, А. Саадабаев, А. Асанов, П. С. Панков, М. Джураев, Э. Р. Атаманов, Б. С. Аблабеков, О. Ш. Мамаюсупов и других. Предложено множество различных методов, однако методом дополнительного аргумента обратные задачи не были исследованы. Ранее не рассматривались такие обратные задачи, как в данной диссертации, в частности обратные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений типа Уизема.

Цель работы: Распространение метода дополнительного аргумента на обратные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений математической физики. Доказательство существования и единственности решения обратных задач методом дополнительного аргумента.

Научная новизна: В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Доказана теорема существования и единственности решения обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, методом дополнительного аргумента.

2. Доказана теорема существования и единственности решения обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, методом дополнительного аргумента.

3. Исследованы обратные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений типа Уизема и получены условия существования и единственности решения таких задач с помощью метода дополнительного аргумента.

4. Осуществлено применение метода дополнительного аргумента для приближенных решений обратных задач.

Практическая и теоретическая ценность: Результаты диссертации являются развитием теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Изложенные методы и разработанная методика программирования могут быть применены в численных реализациях решений различных обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений математической физики.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказательство теоремы существования и единственности решения обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, методом дополнительного аргумента.

2. Доказательство теоремы существования и единственности решения обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений типа Уизема.

3. Получены условия существования и единственности решения таких обратных задач с помощью метода дополнительного аргумента.

4. Осуществлено применение метода дополнительного аргумента для приближенных решений обратных задач.

Общая методика исследования: Для получения сформулированных в диссертации результатов используются метод дополнительного аргумента и принцип сжатых отображений.

Апробация работы: Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Международной конференции "Современные технологии и управление качеством в образовании, науке и производстве: опыт и адаптации и внедрения" (Бишкек 2001), на семинаре кафедры "высшей математики" Кыргызско-Турецкого университета "МАНАС" (2001), на Международной научной конференции "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике" посвященной 70-летию академика М. И. Иманалиева Бишкек, 2001, на семинаре под руководством академика М. И. Иманалиева проводимого в ИМ НАН КР (2003), на семинарах лаборатории теории обратных задач ИМ НАН КР (1997-2003), на семинарах кафедры "Высшая математика" Кыргызского технического университета (1999-2003), на семинарах кафедры "Математики и новых информационных технологий". "Центр информационно-телекоммуникационных технологий" Бишкекского гуманитарного университета (1997-2003).

Публикации: Основные результаты работы опубликованы в статьях [1-10]. В статьях, совместных с А. Асановым, ему принадлежат постановки задач, а автору - методы решения и вывод окончательных результатов.

Структура и объем работы: Диссертационная работа состоит из введения, семи параграфов, приложение (текст программы и результаты расчетов) и списка использованной литературы, содержащего 102 наименование. Работа содержит 94 страниц машинописного текста. Нумерация математических соотношений и формул производится по параграфам в виде (n, m), где n-номер параграфа, m-номер формул в данном параграфе. Нумерация теорем, лемм аналогична.

Содержание и основные результаты работы: Во введении дается обзор литературы по теории некорректных задач и обратных задач для дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений в частных производных и о применении метода дополнительного аргумента к прямым задачам математической физики. В краткой форме изложено содержание работы.

В § 1 рассматривается обратная задача:

$$u_t(t,x) + a(t,x,u(t,x))u_x(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) f_i(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in R, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in R, \tag{2}$$

$$u(t,x_j) = g_j(t), \quad t \in [0,T], \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_m, \tag{3}$$

где $a(t,x,u)$, $f_i(t,x)$, $\varphi(x)$, $g_j(t)$ - известные функции, $u(t,x)$, $\lambda_j(t)$ - неизвестные функции, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Выполняются условия согласования

$$\varphi(x_i) = g_i(0). \tag{4}$$

Введем следующие обозначения:

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t,x_1) & f_2(t,x_1) \ldots f_n(t,x_1) \\ f_1(t,x_2) & f_2(t,x_2) \ldots f_n(t,x_2) \\ - & - \ldots - \\ f_1(t,x_n) & f_2(t,x_n) \ldots f_n(t,x_n) \end{pmatrix},$$

$\overline{C}^{\gamma1,\gamma2,\gamma3,\ldots\gamma n}(\vartheta_T)$ - пространство функций, имеющих непрерывные и ограниченные производные по i - аргументу до порядка γ_i в области ϑ_T, $C_n[0,T]$ - пространства n- мерных векторных функций с элементами из $C[0,T]$, нормой

$\|\chi(t)\|_{C_n[0,T]}=\max\limits_{1\le i\le n}\{Sup_{t\in[0,T]}|\chi_i(t)|\}$, $C_n^n(G)$ – пространства $n\times n$ - мерных матричных функций с элементами из $\bar{C}(G)$, нормой $\|\beta(X)\|_{C_n^n(G)}=\max\limits_{1\le i,j\le n}\{Sup_{X\in G}|\beta_{ij}(X)|\}$ $D=\{(s,t):0\le s\le t\le T\}, G=\{(t,x):0\le t\le T, x\in R\}$,

$Q=\{(s,t,x):0\le s\le t\le T, x\in R\}$, $G_1=\{(t,x,u):0\le t\le T, x\in R, -N\le u\le N\}$, где N - ограниченная постоянная определяемая из исходных данных.

Предположим выполнение следующих условий:

1.1) $\varphi(x)\in\bar{C}^2(R)$, $g_i(t)\in C^1[0,T]$, $a(t,x,u)\in\bar{C}^{0,2,2}(G_1)$, $f_i(t,x)\in\bar{C}^{0,2}(G)$, причём существуют такие конечные константы L, M, A, F, T, что

$$\max\left\{\sup_{x\in R}|\varphi(x)|,\ \sup_{x\in R}|\varphi'(x)|\right\}=L,\quad \max\left\{\max_{1\le i\le n}\left\{\sup_{0\le t\le T}|g_i(t)|\right\},\ \max_{1\le i\le n}\left\{\sup_{0\le t\le T}|g_i'(t)|\right\}\right\}=M,$$

$$\max\left\{\sup_{G_1}|a(t,x,u)|,\ \sup_{G_1}|a_x(t,x,u)|,\ \sup_{G_1}|a_u(t,x,u)|\right\}=A,$$

$$\max\left\{\max_{1\le i\le n}\{\sup_G|f_i(t,x)|\},\ \max_{1\le i\le n}\{\sup_G|f_{ix}(t,x)|\}\right\}=F,$$

1.2) функции $\varphi'(x), f_{ix}(t,x)$ удовлетворяют условию Липшица по аргументу x соответственно с константами L, F, функции $a_x(t,x,u)$, $a_u(t,x,u)$ удовлетворяют условию Липшица по переменным x, u с константой A,

1.3) для матричных функций $F(t)$, пусть $\det F(t)\ne 0$ при всех $t\in[0,T]$.

Тогда, в силу условия 1.3), существует матрица

$$F^{-1}(t)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t)\ldots\alpha_{1n}(t)\\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t)\ldots\alpha_{2n}(t)\\ - & -\ \ldots\ -\\ \alpha_{n1}(t) & \alpha_{n2}(t)\ldots\alpha_{nn}(t)\end{pmatrix},\ \text{обратная к матрице } F(t).\qquad(5)$$

Применяя метод дополнительного аргумента, получим:

$$z(s,t,x)=-\int_s^t a(\tau,x+z(\tau,t,x),w(\tau,t,x))dt,\ 0\le s\le t\le T, x\in R,\qquad(6)$$

$$w(s,t,x)=\varphi(x-\int_0^s a(\tau,x+z(\tau,t,x),w(\tau,t,x))d\tau)+$$

$$+\int_0^s\sum_{i=1}^n\lambda_i(\rho)f_i(\rho,x-\int_\rho^t a(\tau,x+z(\tau,t,x),w(\tau,t,x))d\tau)d\rho.\qquad(7)$$

В уравнении (6), полагая $s=t$, получим:

$$u(t,x)=\varphi(x-\int_0^t a(\tau,x+z(\tau,t,x),w(\tau,t,x))d\tau)+$$

$$+\int_0^t\sum_{i=1}^n\lambda_i(\rho)f_i(\rho,x-\int_\rho^t a(\tau,x+z(\tau,t,x),w(\tau,t,x))d\tau)d\rho.\qquad(8)$$

В уравнении (8) полагая $x=x_j$, берем производную по t и полученное уравнение с учетом (5) разрешая относительно $\lambda_i(t)$, имеем:

$$\lambda_i(t)=\sum_{\gamma=1}^n\alpha_{i\gamma}\{g_j'(t)+\varphi'(x_j-\int_0^t a(\tau,x_j+z(\tau,t,x_j),w(\tau,t,x_j))d\tau)[a(t,x_j,g_j(t))+$$

$$+\int_0^t a_x(\tau,x_j+z(\tau,t,x_j),w(\tau,t,x_j))z_t(\tau,t,x_j)d\tau+$$

$$+\int_0^t a_u(\tau,x_j+z(\tau,t,x_j),w(\tau,t,x_j))w_t(\tau,t,x_j)d\tau]+$$

$$+\int_0^t\sum_{k=1}^n\lambda_k(\rho)f_{kx}(\rho,x_j-\int_\rho^t a(\tau,x_j+z(\tau,t,x_j),w(\tau,t,x_j))d\tau)[a(t,x_j,g_j(t))+$$

$$+\int_\rho^t a_x(\tau,x_j+z(\tau,t,x_j),w(\tau,t,x_j))z_t(\tau,t,x_j)d\tau+$$

$$+\int_\rho^t a_u(\tau,x_j+z(\tau,t,x_j),w(\tau,t,x_j))w_t(\tau,t,x_j)d\tau]d\rho\}.\qquad(9)$$

Введем пространства

$$Z=\bar{C}(Q)\times\bar{C}(Q)\times C_n(D)\times C_n(D)\times C_n(D)\times C_n(D)\times$$

$$\times\bar{C}(G)\times C_n[0,T]\times\bar{C}(Q)\times\bar{C}(Q)\times\bar{C}(G)\times C_n(D)\times C_n(D).$$

Для каждого элемента $V(s,t,x)\in Z$ вводим норму:

$$\|V(s,t,x)\|_Z=\|z(s,t,x)\|_{\bar{C}(Q)}+\|w(s,t,x)\|_{\bar{C}(Q)}+\|Z(s,t)\|_{\bar{C}_n(D)}+\|Z_t(s,t)\|_{C_n(D)}+$$

$$+|W(s,t)\|_{C_n(D)}+\|W_t(s,t)\|_{C_n(D)}+\|u(t,x)\|_{\bar{C}(G)}+\|\Lambda(t)\|_{C_n[0,T]}+$$

$$+|z_x(s,t,x)\|_{\bar{C}(Q)}+\|w_x(s,t,x)\|_{\bar{C}(Q)}+\|u_x(t,x)\|_{\bar{C}(G)}+\|Z_x(s,t)\|_{C_n(D)}+\|W_x(s,t)\|_{C_n(D)},$$

$$\|w_x(s,t,x)\|_{C(Q)}=\sup_Q|w_x(s,t,x)|,\quad \|Z(s,t)\|_{C_n(D)}=\max_{1\le j\le n}\left\{\sup_{(s,t)\in D}|z(s,t,x_j)|\right\},$$

где

$$\|u_x(t,x)\|_{C(G)}=\sup_G|u_x(t,x)|,\quad \|\Lambda(t)\|_{C_n[0,T]}=\max_{1\le i\le n}\left\{\sup_{t\in[0,T]}|\lambda_i(t)|\right\},$$

$$\|W(s,t)\|_{C_n(D)}=\max_{1\le j\le n}\left\{\sup_{(s,t)\in D}|w(s,t,x_j)|\right\}.$$

Доказываются три леммы и теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. Если выполняются условия 1.1), 1.2), 1.3), (4), то найдется $T>0$ такое, что обратная задача (1)-(3) имеет единственное решение $\{u(t,x),\ \lambda_i(t)\},\ i=1,2,\dots,n,$ из класса.

ЛЕММА 1.1. Пусть выполняются условия 1.1), 1.2), 1.3), (4) и Z - некоторое банахово пространство, $B: Z \to Z$ – некоторый линейный непрерывный оператор, удовлетворяющий условию Липшица с константой $q<1$. Тогда уравнение $V(s,t,x)=BV(s,t,x)$, имеет единственное решение в Z и оно принадлежит шару $U_n=\left\{V(s,t,x):\ \|V(s,t,x)\|\le\dfrac{\|B(0)\|}{1-q}\right\}$.

ЛЕММА 1.2. Существует и явно определяется из исходных данных величина $T>0$ такая, что при выполнении условий 1.1), 1.2), 1.3), (4), система интегральных уравнений $z_t(s,t,x_i)$, $w_t(s,t,x_i)$, $u_t(t,x)$ имеет единственное ограниченное решение.

ЛЕММА 1.3. Если вектор - функция $V(s,t,x)=(z(s,t,x), w(s,t,x), z(s,t,x_i), z_t(s,t,x_i), w(s,t,x_i), w_t(s,t,x_i), u(t,x), \lambda_i(t), z_x(s,t,x), w_x(s,t,x), u_x(t,x), z_x(s,t,x_i), w_x(s,t,x_i))$ - решение системы интегральных уравнений для неизвестных функций $z(s,t,x)$, $w(s,t,x)$, $z(s,t,x_i)$, $z_t(s,t,x_i)$, $w(s,t,x_i)$, $w_t(s,t,x_i)$, $u(t,x)$, $\lambda_i(t)$, $z_x(s,t,x)$, $w_x(s,t,x)$, $u_x(t,x)$, $z_x(s,t,x_i)$, $w_x(s,t,x_i)$, то функции $u(t,x)$, $\lambda_i(t)$, удовлетворяют задаче (1)-(3), и наоборот.

В §2 рассматривается обратная задача:

$$u_t(t,x)+a(t,x,u(t,x))u_x(t,x)=\lambda(t)f(t,x,u(t,x)),\ t\in[0,T],\ x\in R, \tag{10}$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad x\in R, \tag{11}$$

$$u(t,x_0)=g(t),\quad t\in[0,T], \tag{12}$$

где $a(t,x,u)$, $f(t,x,u)$, $g(t)$, $\varphi(x)$ - известные, а $u(t,x)$, $\lambda(t)$ - неизвестные функции. Выполняется условие согласования $\varphi(x_0)=g(0)$. (13)

Предположим выполнение следующих условий:

2.1) $\varphi(x)\in\bar C^2(R)$, $g(t)\in C^1[0,T]$, $a(t,x,u)\in\bar C^{0,2,2}(G_1)$, $f(t,x,u)\in\bar C^{0,2,2}(G_1)$,

2.2) функция $\varphi'(x)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу x с константой L, а функции $a_x(t,x,u)$, $a_u(t,x,u)$, $f_x(t,x,u)$, $f_u(t,x,u)$, удовлетворяют условию Липшица по переменным x, u соответственно с константами A, F,

2.3) $f(t,x_0,g(t))\ge\alpha>0$ на $[0,T]$.

Доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи (10)-(12) для достаточно малого $T>0$.

В §3 рассматривается дифференциальное уравнение типа Уизема

$$u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)=f(t,x,u(t,x),\lambda(t)),\quad 0\le t\le T,\quad x\in R, \tag{14}$$

с условиями (11), (12), где $f(t,x,u,\lambda)$, $\varphi(x)$, $g(t)$ - известные, а $u(t,x)$, $\lambda(t)$ - неизвестные функции. Выполняется условие согласования (13).

Предположим выполнение следующих условий:

3.1) $g(t)\in C^1[0,T]$, $\varphi(x)\in\bar C^2(R)$, $f(t,x,u,\lambda)\in\bar C^{1,2,2,2}(\Omega)$, причем существует такая конечная константа F, что

$$\max\left\{\sup_\Omega|f|,\ \sup_\Omega|f_t|,\ \sup_\Omega|f_x|,\ \sup_\Omega|f_u|,\ \sup_\Omega|f_\lambda|\right\}=F,$$

где $\Omega=\{(t,x,u,\lambda):\ 0\le t\le T,\ x\in R,\ -N\le u\le N,\ -2S\le\lambda\le 2S\}$, где S, N - ограниченные постоянные определяемые из исходных данных,

3.2) функции $f_x(t,x,u,\lambda)$, $f_u(t,x,u,\lambda)$, $f_\lambda(t,x,u,\lambda)$ - удовлетворяют условию Липшица по переменным x, u, λ, с константой F,

3.3) $\dfrac{\partial f(t,x,u,\lambda)}{\partial\lambda}\ge\beta>0$ для $\forall\ a\in R$ уравнение $f(t,x_0,g(t),\lambda)=a$ имеет единственное решение $\lambda=f^{-1}(t,a)$, где функция $f^{-1}(t,a)$ в области $[0,T]\times R$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменным a.

При выполнении условий 3.1) - 3.3), (13) доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи (14), (11), (12) для достаточно малого $T>0$.

В §4 рассматривается уравнение

$$u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)=f(t,x,u(t,x),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\dots,\lambda_n(t)),\ t\in[0,T],\ x\in R, \tag{15}$$

с условиями (11), (3), где $f(t,x,u,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$, $\varphi(x)$, $g_i(t)$ – известные функции, $u(t,x)$, $\lambda_j(t)$ - неизвестные функции, $j=1,\dots,n$. Выполняются условия согласования (4).

Предположим выполнение следующих условий:

4.1. $g_i(t)\in C^1[0,T]$, $\varphi(x)\in\bar C^2(R)$, $f(t,x,u,\lambda)\in\bar C^{1,2,2,2}(\Omega_1)$, причем существуют такие конечные числа M, F, что

$$\max\left\{\max_{1\le i\le n}\{\sup_{0\le t\le T}|g_i(t)|,\ \max_{1\le i\le n}\{\sup_{0\le t\le T}|g_i'(t)\right\}=M,$$

$$\max\left\{\sup_{\Omega_1}|f|,\ \sup_{\Omega_1}|f_t|,\ \sup_{\Omega_1}|f_x|,\ \sup_{\Omega_1}|f_u|,\ \sup_{\Omega_1}|f_\lambda|\right\}=F,$$

где $\Omega_1=\{(t,x,u,\lambda_1,\dots,\lambda_n):0\le t\le T,\ x\in R,\ -N\le u\le N,\ \max_{1\le i\le n}\{\sup_{t\in[0,T]}|\lambda_i|\}\le 2S\}$,

4.2) функции $f_x(t,x,u,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $f_u(t,x,u,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $f_{\lambda_i}(t,x,u,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ – удовлетворяют условию Липшица по переменным x, u, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ с константой F, 4.3) при всех $t\in[0,T)$ и $\forall (F_1, F_2,\dots,F_n)\in R^n$ система

$$\begin{cases} f(t,x_1,g_1(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\dots,\lambda_n(t))=F_1, \\ f(t,x_2,g_2(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\dots,\lambda_n(t))=F_2, \\ ------------------ \\ f(t,x_n,g_n(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\dots,\lambda_n(t))=F_n, \end{cases}$$

имеет единственное решение, представимое в виде:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ -\\ \lambda_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(t,F_1,F_2,\dots,F_n)\\ f_2(t,F_1,F_2,\dots,F_n)\\ -\\ f_n(t,F_1,F_2,\dots,F_n)\end{pmatrix},$$ где функции $f_i(t,F_1,F_2,\dots,F_n)$ удовлетворяют условию Липшица по $F_1,F_2,\dots,F_n$ с коэффициентами N_i.

При выполнении условий 4.1) - 4.3), (4) доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи (15), (11), (3) для достаточно малого T>0.

В §5 рассмотрена интегро-дифференциальное уравнение

$$u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,u(t,x))d\xi=f(t,x), x\in R, t\in[0,T], \qquad (16)$$

с условиями (11), (12), где $a(t,u)$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$, $g(t)$ - известные, а $u(t,x)$, $K(t)$ - неизвестные функции. Выполняется условие согласования (13).

Предположим выполнение следующих условий:

5.1) $g(t)\in C^2[0,T]$, $\varphi(x)\in \bar{C}^3(R)$, $a(t,u)\in C^{0,3}(Q_T)$ $f(t,x)\in \bar{C}^{0,3}(G)$, где $Q_T=\{(t,u):\ 0\le t\le T,\ -N\le u\le N\}$,

5.2) функции $\varphi''(x), f_{xx}(t,x)$ удовлетворяют условию Липшица по переменным x соответственно с константами L, F, а функция $a_{uu}(t,u)$ удовлетворяет условию Липшица по u с константой A,

5.3) $a(t,g(t))\ge a>0$ при всех $t\in[0,T]$.

Доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи (16), (11), (12) для достаточно малого T>0.

В §6 рассматриваем интегро-дифференциальное уравнение типа Уизема

$$u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x,\xi,\nu)u(\xi,\nu)d\xi d\nu+\lambda(t)f(t,x), \qquad (17)$$

с условиями (11), (12), где $g(t)$, $\varphi(x)$, $K(t,x,t,x)$, $f(t,x)$ - известные, а $u(t,x)$, $\lambda(t)$ - неизвестные функции. Выполняется условие согласования (13).

Предположим выполнение следующих условий:

6.1) $g(t)\in C^1[0,T]$, $\varphi(x)\in \bar{C}^2(R)$, $f(t,x)\in\bar{C}^{0,2}(G)$,

$\int_{-\infty}^{\infty}\left|K_x^{(j)}(t,x,\xi,\nu)\right|d\nu\le K<\infty$, $j=0, 1, 2$,

6.2) $K_x(t,x,\xi,\nu)$ функция удовлетворяет условию Липшица по переменной x, с константой K,

6.3) $f(t,x_0)\ge\alpha>0$ при всех $t\in[0,T]$.

При выполнении условий 6.1) - 6.3), (13) доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи (17), (11), (12) для достаточно малого T>0.

В §7 рассматривается пример:

$$u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)=\lambda(t)(2+t\cos x)+\frac{1}{2}\sin 2x, \qquad (18)$$

$$u(0,x)=\sin x,\quad x\in R, \qquad (19)$$

$$u(t,\frac{\pi}{2})=t^2+1,\quad 0\le t\le T, \qquad (20)$$

где $u(t,x)$, $\lambda(t)$ - неизвестные функции. Эта задача имеет точное решение $u(t,x)=t^2+\sin x$, $\lambda(t)=t$.

Пример является частным случаем задачи (1) - (3) при $n=1$.

Очевидно, что выполняются все требования теоремы существования и единственности решения обратной задачи (1) - (3) в §1 с константами $L=1$, $M=1+T^2$, $F=2+T$, $a=1$ для достаточно малого T.

Применяя метод дополнительного аргумента к задаче (18)-(20) получим эквивалентную систему интегральных уравнений (см. лемму 1.3).

Из условия, что константы Липшица в интегральных операторах меньше 1, для определения $T>0$, получим уравнения:

$$6T^4+51T^3/2+43T^2/2+51T/2-0{,}5=0,$$

$$6T^5+27T^4+67T^3/2+14T^2/2+17T/2-1=0.$$

Решая эти уравнения с помощью программного средства Mat lab, соответственно получим корни: $T_{1,2}=-0{,}291\pm i1.841$, $T_3=0.172$, $T_4=-2.376$ и $T_{1,2}=-0{,}124\pm i0{,}441$, $T_{3,4}=-2.205\pm i0.394$, $T_5=0{,}159$.

Из этих корней выбираем минимальный положительный действительный корень $T=0.159$. Следовательно, при 0<T ≤ 0,158 - система

нелинейных интегральных уравнений заведомо имеет единственное решение.

Далее, составлена программа на языке pascal для вычисления значений точных решений обратной задачи (18) - (20) и приближенных решений системы интегральных уравнений в фиксированных точках по методу последовательных приближений. По результатам можно убедиться, что приближенное решение сходится к точному решению.

При вычислении x - рассматривается как параметр. интегралы аппроксимировались по формуле трапеций.

Приложен основной текст программы и результаты вычислений.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д. ф.-м. н. А. Асанову за постановку задач и постоянное внимание к работе, а также академику И. М. Иманалиеву за полезные советы при обсуждении работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора:

1. Применение метода дополнительного аргумента к обратной задаче // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып. 27. - С. 244-248.

2. (совм. с Асановым А.) Об одной обратной задаче для дифференциальных уравнений с частными производными // Вестник Технол. Ун-та. "ДАСТАН". - Бишкек, 1999. - №2. - С. 9-14.

3. (совм. с Асановым А.) Метод дополнительного аргумента к обратной задаче для уравнения типа Уизема // Вестник Технол. Ун-та. "ДАСТАН". - Бишкек, 1999. - №2. - С. 15-20.

4. Применение метода дополнительного аргумента к обратной задаче для дифференциальных уравнений с частными производными // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 1999. - Вып. 28. - С. 301-305.

5. (совм. с Асановым А.) Об одной обратной задаче для интегро-дифференциального уравнения // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим. 2000. - Вып. 29. - С. 105-110.

6. Метод дополнительного аргумента к обратной задаче для дифференциальных уравнений типа полной производной по времени // Исслед. по интегро-дифференцальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2000. -Вып. 29. - С. 358-363.

7. (совм. с Асановым А.) Нелинейная обратная задача для дифференциальных уравнений типа Уизема // Вестник КГНУ: Сер. 3. - Вып. 5. -Бишкек: КГНУ, 2001. -С. 102 - 106.

8. (совм. с Асановым А.) Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Вестник КГНУ: Труды международной научной конференции, посвященной 70- летию академика М. И. Иманалиева, "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике". - Бишкек: КГНУ, 2001. Сер. 3. - Вып. 6. - С. 74 - 79.

9. (совм. с Асановым А.) Обратная задача для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка // Труды международной конференции "Современные технологии и управление качеством в образовании, науке и производстве: опыт адаптации и внедрения". - Бишкек: КТУ. 2001. Вестник КТУ. -С. 221-225.

10. (совм. с Асановым А.) Об одной обратной задаче для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Вестник ТарГУ им. М. Х. Дулати, "Природопользование и проблемы антропосферы". - Тараз: Тар. ГУ. 2002, №2(6). - С. 32-46.

АННОТАЦИЯ

Сулайманов Бактыбек Эржигитович

Биринчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн коюлган тескери маселелерди изилдөөдө кошумча аргумент ыкмасын колдонуу

Негизги сөздөр: Тескери маселе, кошумча аргументтер ыкмасы, жекече туундулуу дифференциалдык тендемелер.

Диссертацияда биринчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн коюлган тескери маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теоремалар далилденген. Так чыгарылышка ээ болуучу мисал каралган. Диссертацияда алынган теориялык жыйынтыктарга негизделип, изделүүчү функциялардын жана так чыгарылыштын маанилерин бекитилген чекиттерде эсептөөчү программа Turbo Pascal тилинде түзүлгөн.

АННОТАЦИЯ

Сулайманов Бактыбек Эржигитович

Применение метода дополнительного аргумента к обратным задачам для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Ключевые слова: Обратные задачи, метод дополнительного аргумента, дифференциальные уравнения в частных производных.

В диссертационной работе доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Рассмотрен конкретный пример, имеющий точное решение. На основе полученных теоретических результатов работы, на языке Turbo Pascal составлена программа, вычисляющая значение искомых функций и значение точного решения примера в фиксированных точках.

RESUME

Sulaymanov Baktybek Erjigitovich

Application of the method of additional argument to inverse problems for partial differential and integral-differential equations of the first order

Key words: inverse problem, method of additional argument, differential equations in partial derivative.

In this thesis theorems of existence and uniqueness of solutions of inverse problems for partial differential and integral-differential equations of the first order are proved. A specific example having an exact solution was considered. On the base of received theoretical results, the program was made up in Turbo Pascal language calculating the values of unknown functions and values of exact solution of the example in fixed points.