НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.02.183

На правах рукописи
УДК 517.95

ПИРМАТОВ АБДЫМАНАП ЗИЯЙДИНОВИЧ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННЫХ ПСЕВДО-ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

01.01.02 - дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

БИШКЕК 2003

Работа выполнена на кафедре программирования Ошского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Сопуев А.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Асанов А.,

доктор физико-математических наук, профессор Иманалиев Т. М.

Ведущая организация: Институт математики Академии наук Республики Узбекистан

Защита диссертации состоится "6" мая 2003 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.02.183 по присуждению ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук при Институте математики НАН Кыргызской Республики.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан "5" апреля 2003 г.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу: 720071, г. Бишкек - 71, Проспект Чуй, 265 - а, Институт математики НАН Кыргызской Республики, Диссертационный совет Д 01. 02. 183

Ученый секретарь
Диссертационного совета Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, использованием криогенных жидкостей в технике и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики различных неоднородных, в частности стратифицированных жидкостей, которые приводят к начально-краевым задачам для уравнений с частными производными четвертого порядка.

Одним из актуальных вопросов в современной теории дифференциальных уравнений является постановка и исследование корректных краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка.

Получены результаты по теории уравнений смешанного типа второго и третьего порядков и развивались в различных направлениях в работах С.А. Алдашева, В.Ф. Волкодавова, В.Н. Врагова, Т.Д. Джураева, В.И. Жегалова, Т.Ш. Калменова, Е.И. Моисеева, М.М. Мередова, А.М. Нахушева, М.С. Салахитдинова, М.М. Смирнова, К.Б. Сабитова, М.А. Садыбекова, А. Сопуева и многих других.

Систематическое изучение уравнений третьего порядка, содержащих в главной части смешанные операторы параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов, началось в семидесятые годы и интенсивно развивается в работах Т.Д. Джураева и его учеников.

Изучение краевых задач для уравнений третьего порядка привлекали внимание многих исследователей. Среди работ, непосредственно примыкающих к данной диссертации, посвященных как локальным, так и нелокальным краевым задачам для уравнений псевдопараболических, псевдогиперболических и смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений третьего порядка, можно отметить работы Д. Колтона (D.Colton), М.Х. Шханукова, В.З. Канчукоева, Водаховой В.А.

Т.Д. Джураев и А. Сопуев исследовали вопросы полной классификации и приведения к каноническому виду уравнений с частными производными четвертого порядка

$$Au_{xxxx} + Bu_{xxxy} + Cu_{xxyy} + Du_{xyyy} + Eu_{yyyy} =$$
$$= F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy}, u_{yyy}),$$

где A, B, C, D, E являются функциями x и y.

Цель работы заключается в постановке и исследовании корректных краевых задач для псевдопараболических, псевдогиперболических, смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с одной и двумя линиями изменения типов, а также для псевдогиперболических уравнений четвертого порядка с разрывными коэффициентами.

Методика исследования в основном проводится методом редукции к интегральным уравнениям типа Вольтерра и Фредгольма второго рода с использованием функций Грина и Римана.

При доказательстве единственности и существования решения краевых задач для уравнений смешанных псевдо-параболо-гиперболических типов существенно используется функциональная связь между следом искомого решения и следом производных по направлению нормали на характеристических линиях изменения типа.

Научная новизна. В работе получены следующие результаты:

1. Доказаны теоремы единственности и существования решения краевых задач для модельного и общего смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с одной линией сопряжения.

2. Доказаны теоремы единственности и существования решения краевой задачи для смешанного псевдо-параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с двумя линиями изменения типа.

3. Доказаны теоремы единственности и существования решения краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами.

4. Исследованы аналоги задачи Дарбу для гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками в треугольных областях.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы носят теоретический характер, но они могут быть применены при анализе математических моделей физических процессов, связанных с распространением волн в средах, параметры которых резко меняются при переходе через некоторые линии или поверхности, в решении задач динамики экспоненциально стратифицированной жидкости, при изучении распространения волн в диспергирующих средах и в других задачах механики, физики и техники.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказательство теоремы единственности и существования решения краевых задач для модельного и общего смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с характеристической линией сопряжения *y=0*.

2. Доказательство теоремы единственности и существования решения краевых задачи для смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с нехарактеристической линией сопряжения *x=0*.

3. Доказательство теоремы единственности и существования решения краевой задачи для смешанного псевдо-параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с двумя линиями изменения типа.

4. Доказательство теоремы единственности и существования решения краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами.

5. Исследование аналоги задачи Дарбу для гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками в треугольных областях.

Апробация работы. Результаты работы регулярно докладывались и обсуждались: на семинарах кафедры Прикладной математики и информатики Ошского госуниверситета (1995-2002 гг., руководитель - д. ф.-м. н., проф. А. Сопуев); на семинарах кафедры математического анализа Ошского госуниверситета (1998-2001 гг., руководитель - д. ф.-м. н., профессор С. К. Каримов); на семинарах "Актуальные проблемы математики и информатики" (2001-2002 гг., руководитель д. ф.-м. н., профессор К. Алымкулов), на I региональной научной конференции "Проблемы алгебры, геометрии и их приложений" (г. Ош, 1996 г.); на международной научно-практической конференции "Математические вопросы колебания и управляемых систем" (г. Ош, 1997г); на международной научной конференции "Современные проблемы химии и химической технологии. Актуальные вопросы естественных и гуманитарных наук" (г.Ош, 2001 г); на Юбилейной международной научной конференции "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике", посвященной 70 - летию академика М. И. Иманалиева (г. Бишкек - с. Бостери, 2001 г.); на международной научно-теоретической конференции "Проблемы образования, науки и культуры в начале XXI века", посвященной 50 - летию Ошского государственного университета (г. Ош, 2001 г.), на семинаре Института Математики НАН КР (2003 г., руководитель академик М.И. Иманалиев).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в тезисах [1-2] и статьях [3-9], приведенных в конце автореферата. Из совместных работ с А. Сопуевым [1-4, 9] и Т. Асылбековым [5], им принадлежит постановка задачи, а результаты принадлежат автору.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 10 параграфов, заключения, приложение. Нумерация параграфов - двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая - на номер параграфа, нумерация задач, лемм, теорем - двойная: первая цифра указывает на номер параграфа, вторая - порядковый номер, а нумерация формул - тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая - на номер параграфа, третья - на порядковый номер. Объем текста 128 стр. Список литературы содержит 92 наименований.

Основное содержание работы.

Во введении сделан краткий обзор работ исследователей, имеющих непосредственные отношения к теме диссертации, указаны цель и краткое содержание работы по главам.

Первая глава посвящена исследованию краевых задач для смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с характеристической линией сопряжения *y=0*.

В § 1.1. в прямоугольной области $D=\{(x,y): 0<x<\ell, -h_2<y<h_1\}$, $(\ell, h_1, h_2>0)$ рассмотрено уравнение в частных производных четвертого порядка

$$0=\begin{cases} u_{xxyy}-u_{yyy},\ y>0, \\ u_{xxyy}+c_2u_{yy},\ y<0 \end{cases} \qquad (1)$$

где $c_2=const$. Пусть $D_1=D\cap(y>0)$, $D_2=D\cap(y<0)$. Уравнение (1) является простой моделью уравнения псевдопараболического типа с двумя кратными семействами $x=const$, $y=const$ действительных характеристик. Оно является уравнением смешанного типа в том смысле, что при $-h_2<y<0$ относится к классу псевдопараболических уравнений, а при $0<y<h_1$ к классу псевдогиперболических уравнений. Прямой $y=0$ является линией сопряжения уравнения (1).

Для уравнения (1) рассмотрены следующие краевые задачи:

Задача 1.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$, являющуюся решением уравнения (1) в области $D\backslash(y=0)$ и удовлетворяющую краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h_1,$$
$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u(\ell,y)=\chi_2(y),\ -h_2\le y\le 0,$$
$$u(x,h_1)=\psi_1(x),\ u_y(x,h_1)=\psi_2(x),\ 0\le x\le \ell,$$

где $\varphi_i(y)$, $\chi_i(y)$, $\psi_i(x)$, $(i=1,2)$ - заданные функции.

Задача 1.2. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи 1.1, и условиям

$$u_x(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h_1,$$
$$u(0,y)=\chi_1(0),\ u_x(0,y)=\chi_2(y),\ -h_2\le y\le 0,$$
$$u(x,h_1)=\psi_1(x),\ u_y(x,h_1)=\psi_2(x),\ 0\le x\le \ell.$$

Из постановки задачи 1.1 следует, что на линии $y=0$ выполняются следующие условия сопряжения

$$u(x,+0)=u(x,-0),\ u_y(x,+0)=u_y(x,-0),\ 0\le x\le \ell,$$
$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0),\ 0\le x\le \ell. \qquad (2)$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.1. Задача 1.1 всегда разрешима и притом единственным образом, если $\varphi_1'(h_1)=\psi_2(0)$, $\varphi_1(h_1)=\psi_1(0)$, $\varphi_2'(h_1)=\psi_2(\ell)$, $\varphi_2(h_1)=\psi_1(\ell)$, $c_2\ne-\left(\frac{\pi\cdot n}{\ell}\right)^2$, $n=1, 2, 3, \ldots$, $\varphi_i(0)=\chi_i(0)$, $\varphi_i^{(i)}(0)=\chi_i^{(i)}(0)$, $\varphi_i,\ \chi_i,\ \psi_i\in C^2$ $(i,j=1,2)$.

Во втором параграфе первой главы рассматриваются задачи 1.1 и 1.2 первого параграфа для более общего уравнения, чем уравнение (1):

$$0=\begin{cases} u_{xxyy}-u_{yyy}+a_1(x,y)u_{xyy}+c_1(x,y)u_{yy}-f_1(x,y),\ y>0, \\ u_{xxyy}+a_2(x,y)u_{xyy}+c_2(x,y)u_{yy}-f_2(x,y),\ y<0. \end{cases} \qquad (3)$$

Пусть выполняются условия

$$\forall(x,y)\in\overline{D}_2:\ \frac{1}{2}a_{2x}(x,y)-c_2(x,y)\ge 0. \qquad (4)$$

$$\forall(x,y)\in D_1:\ c_1(x,y)\le 0. \qquad (5)$$

Методом функции Грина доказаны следующие теоремы:

Теорема 2.1. Если выполняются условия (4), (5) и $\varphi_i(y)\in C^2[0,h_1]$, $\chi_i(y)\in C^2[-h_2,0]$, $\psi_i(x)\in C^2[0,\ell]$, $\varphi_i(0)=\chi_i(0)$, $\varphi_i^{(i)}(0)=\chi_i^{(i)}(0)$, $\varphi_1(h_1)=\psi_1(0)$, $\varphi_2(h_1)=\psi_1(\ell)$, $\varphi_1'(h_1)=\psi_2(0)$, $\varphi_2'(h_1)=\psi_2(\ell)$, $a_i(x,y)$, $a_{ix}(x,y)$, $c_i(x,y)$, $f_i(x,y)\in C(D_i)$ $(i,j=1,2)$, то решение задачи 1.1 для уравнения (3) существует и единственно.

Теорема 2.2. Если $\varphi_i(y)\in C^2[0,h_1]$, $\chi_i(y)\in C^2[-h_2,0]$, $\psi_i(x)\in C^2[0,\ell]$, $a_i(x,y)$, $c_i(x,y)$, $f_i(x,y)\in C(D_i)$, $\varphi_i(0)=\chi_2(0)$, $\varphi_i^{(i)}(0)=\chi_2^{(i)}(0)$, $\varphi_1(h_1)=\psi_1'(0)$, $\varphi_2(h_1)=\psi_1(\ell)$, $\varphi_2'(h_1)=\psi_2(\ell)$ $(i=1,2)$, то решение задачи 1.2 для уравнения (3) существует и единственно.

§ 1.3 первой главы посвящен изучению краевых задач для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(u_{xx}+\alpha(x,y)u_y\right)+\beta(x,y)u_{xx}+\gamma(x,y)u_{xy}+\delta(x,y)u_{yy}+$$
$$+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=f(x,y), \qquad (6)$$

в прямоугольной области D, где коэффициенты и правая часть уравнения (6) терпят разрывы первого рода при переходе через линии $y=0$. Пусть

$$D_1=D\cap(y>0),\ D_2=D\cap(y<0).$$

Отметим также, что на постановку задачи для уравнения (6) существенное влияние оказывает наличие коэффициента $\alpha(x,y)$. Так как при $\alpha(x,y)\ne 0$ в характере решения уравнения (6) будут преобладать свойства параболичности, но из-за производной $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в постановке задачи необходимо будет учесть начальные условия. Поэтому в этом случае уравнение (6) можно назвать псевдогиперболическим.

При $\alpha(x,y)\equiv 0$ в характере решение уравнения (6) свойства параболичности теряются, и исследование решения уравнения требует иного подхода.

В работе уравнение (6) исследовано в области D, содержащей указанные выше два случая. Для определенности рассмотрены случаи, когда

$$\alpha(x,y)\equiv\begin{cases}-1,\ y>0, \\ 0,\ y<0\end{cases},\quad \beta(x,y)=\begin{cases}0,\ y>0, \\ \beta_2(x,y),\ y<0\end{cases},\quad \gamma(x,y)=\begin{cases}0,\ y>0, \\ \gamma_2(x,y),\ y<0\end{cases}$$

Тогда уравнение (6) можно записать в виде

$$0=\begin{cases} u_{xxyy}-u_{yyy}+\delta_1u_{yy}+a_1u_x+b_1u_y+c_1u-f_1,\ y>0, \\ u_{xxyy}+\beta_2u_{xx}+\gamma_2u_{xy}+\delta_2u_{yy}+a_2u_x+b_2u_y+c_2u-f_2,\ y<0, \end{cases} \qquad (7)$$

где $\beta_i,\gamma_i,\delta_i,a_i,b_i,c_i,f_i$ $(i=1,2)$ – заданные гладкие функции.

Для уравнения (7) изучена следующая задача.

Задача 3.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющую в области $D\setminus(y=0)$ уравнению (7), краевым и начальным условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y), u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h_1, \tag{8}$$

$$u(0,y)=\chi_1(y), u(\ell,y)=\chi_2(y),\ -h_2\le y\le 0, \tag{9}$$

$$u(x,h_1)=\psi_1(x), u_y(x,h_1)=\psi_2(y),\ 0\le x\le \ell, \tag{10}$$

где $\varphi_i(y),\chi_i(y),\psi_i(x)\ (i=1,2)$ – заданные функции.

Такая задача для уравнения вида (7), когда $\beta_i,\gamma_i,\delta_i,a_i,b_i,f_i\equiv 0, c_1\equiv 0$, $c_2\ne 0\ (i=1,2)$ была рассмотрена § 1.1. Но метод, примененный в § 1.1 не пригоден для изучения задачи 3.1 для уравнения (7). Для решения этой задачи мы будем использовать метод функции Грина для параболических уравнений и метод функции Римана для гиперболических уравнений.

Из постановки задачи 3.1 следует, что на линии выполняются следующие условия сопряжения

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\ u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell,$$
$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=\mu(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{11}$$

где $\tau(x),\nu(x)$ и $\mu(x)$ – пока неизвестные функции.

Для решения этой задачи строится функция Римана для уравнения

$$L_2(u)\equiv u_{xxyy}+\beta_2 u_{xx}+\gamma_2 u_{x,y}+\delta_2 u_{yy}+a_2 u_x+b_2 u_y+c_2 u=f_2 \tag{12}$$

в области D_2, которая определяется как решение следующей задачи:

Задача 3.2. Найти в области D_2 решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_3(y),\ -h_2\le y\le 0, \tag{13}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{14}$$

где $\chi_3(y),\tau(x)$ и $\nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Нетрудно заметить, что краевые условия задачи 3.2 заданы на характеристиках $x=0$ и $y=0$ уравнения (12). Поэтому задачу 3.2 можно назвать задачей Гурса.

Введем класс функций

$$M=\left\{u(x,y):u(x,y)\in C^2(\overline{D}_2),u_{xxyy}\in C(D_2)\right\}$$

Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (12) удовлетворяют условиям

$$\beta_2,\gamma_2,\delta_2,a_2,b_2,c_2,f_2,\beta_{2xx},\gamma_{2xy},\delta_{2yy},a_{2x},b_{2y}\in C(\overline{D}_2).$$

Тогда для $\forall u,\vartheta\in M$ определен формально сопряженный оператор L_2^* и имеет место тождество

$$\vartheta L_2(u)-uL_2^*(\vartheta)=\frac{\partial Q}{\partial\xi}-\frac{\partial P}{\partial\eta}, \tag{15}$$

где

$$L_2^*(\vartheta)\equiv\vartheta_{\eta\eta\xi\xi}+(\beta_2\vartheta)_{\xi\xi}+(\gamma_2\vartheta)_{\eta\xi}+(\delta_2\vartheta)_{\eta\eta}-(a_2\vartheta)_\xi-(b_2\vartheta)_\eta+c_2\vartheta,$$

$$P=\vartheta_\eta u_{\xi\xi}+(\delta_2\vartheta)_\eta u-(u_{\xi\xi\eta}+\gamma_2 u_\xi+\delta_2 u_\eta+\varepsilon_2 u)\vartheta,$$

$$Q=(\vartheta_{\eta\eta}+\beta_2\vartheta)u_\xi-\left[\vartheta_{\eta\eta\xi}+(\beta_2\vartheta)_\xi+(\gamma_2\vartheta)_\eta-a_2\vartheta\right]u$$

Пусть (x,y) - произвольная точка области

$$D_2=\{(\xi,\eta):0<\xi<\ell,-h_2<\eta<0\}.$$

Интегрируя тождество (15) по области $D_2^*=\{(\xi,\eta):0<\xi<x,\ y<\eta<0\}$, будем иметь представление решения задачи Гурса

$$u(x,y)=\vartheta_{\eta\xi}(x,y;0,y)\chi_1(y)-\vartheta_\eta(x,y;0,y)\chi_3(y)+\int_0^y\left[A(x,y;\eta)\chi_3(\eta)-B(x,y;\eta)\chi_2(\eta)\right]d\eta+$$

$$+\int_0^x\left[\vartheta(x,y;\xi,0)\nu''(\xi)-\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)\tau''(\xi)-\gamma_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\tau'(\xi)+\delta_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\nu(\xi)-\right.$$

$$\left.-C(x,y;\xi)\tau(\xi)\right]d\xi+\int_0^x d\xi\int_0^y\vartheta(x,y;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\eta,$$

где $A(x,y;\xi)=\vartheta_{\eta\eta}(x,y;0,\eta)+\beta_2(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta)$,

$$B(x,y;\eta)=\vartheta_{\xi\eta\eta}(x,y;0,\eta)+\beta_2(0,\eta)\vartheta_\xi(x,y;0,\eta)+\gamma_2(0,\eta)\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)+$$
$$+\left[\beta_{2\xi}(0,\eta)+\gamma_{2\eta}(0,\eta)-a_2(0,\eta)\right]\vartheta(x,y;0,\eta),$$

$$C(x,y;\xi)=\delta_2(\xi,0)\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)+\left[\delta_{2\eta}(\xi,0)-b_2(\xi,0)\right]\vartheta(x,y;\xi,0),$$

$\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана оператора L_2, удовлетворяющая условиям

1^0. функция $\vartheta(x,y;\xi,\eta)\in M$ по совокупности переменных $(x,y;\xi,\eta)$ на $\overline{D}_2\times\overline{D}_2$;

2^0. при каждой $(x,y)\in D_2$ функция $\upsilon(x,y;\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$L^*_{2(\xi\eta)}(\vartheta(x,y;\xi,\eta))=0,\ (\xi,\eta)\in D.$$

3^0 на характеристиках $\xi=x$ и $\eta=y$ выполняются

$$\vartheta(x,y;x,\eta)=0,\ \vartheta_\xi(x,y;x,\eta)=\omega_1(\eta;x,y),\ 0\le\eta\le y;$$

$$\vartheta(x,y;\xi,y)=0,\ \vartheta_\xi(x,y;\xi,y)=\omega_2(\xi;x,y),\ 0\le\xi\le y,$$

где $\omega_1(\eta;x,y)$ и $\omega_2(\xi;x,y)$ являются решениями следующих задач Коши соответственно:

$$\begin{cases} \vartheta_{\xi\eta\eta}(x,y;x,\eta)+\beta_2(x,\eta)\vartheta_\xi(x,y;x,\eta)=0, \\ \vartheta_\xi(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=0, \quad \vartheta_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=1,\ 0\le\eta\le y, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \vartheta_{\eta\xi\xi}(x,y;\xi,y)+\delta_2(\xi,y)\vartheta_\eta(x,y;\xi,y)=0, \\ \vartheta_\eta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0, \quad \vartheta_{\eta\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1,\ 0\le\xi\le x, \end{cases} \tag{17}$$

Очевидно, что задачи (16) и (17) однозначно разрешимы.

В области D_1 рассмотрена вспомогательная задача для уравнения

$$L_1(u)\equiv u_{xxyy}-u_{yyy}+\delta_1 u_{yy}+a_1 u_x+b_1 u_y+c_1 u=f_1(x,y) \tag{18}$$

Задача 3.4. Найти в области D_1 решение уравнения (18), удовлетворяющее условиям (8) и (11).

Далее, используя идеи Ф. Трикоми, решение задачи 3.1 сводится к системе уравнений относительно функций $u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y)$, $\tau(x), \tau'(x), \tau''(x)$, $\nu(x), \nu''(x), \mu(x)$, решение которого строится методом последовательных приближений.

В четвертом параграфе методом "abc" доказана единственность решения следующей задачи: найти решение уравнения .

$$u_{xxxx}+u_{yyy}=f(x,y)$$

в области $D_1=\{(x,y): 0<x<\ell, 0<y<h\}$ $(\ell, h>0)$, (>0), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,$$

$$u(\ell,y)=\psi_1(y),\ u_x(\ell,y)=\psi_2(y),\ 0\le y\le h,$$

$$u(x,0)=\tau(y),\ u_y(x,0)=\nu(x,h), u(x,h)=\mu(x),\ 0\le x\le\ell,$$

причем

$f(x,y), \varphi_i(y), \psi_i(y) (i=1,2), \tau(x), \nu(x), \mu(x)$ - гладкие функции, а

$$\varphi_1(0)=\tau(0), \varphi_2(0)=\tau'(0), \psi_1(0)=\tau(\ell), \psi_2(0)=\tau'(\ell), \varphi_1'(0)=\nu(0),$$

$$\psi_1'(0)=\nu(\ell), \varphi_1(h)=\mu(0), \psi_1(h)=\mu(\ell), \varphi_2(h)=\mu'(0), \psi_2(h)=\mu'(\ell).$$

Во второй главе изучаются краевые задачи для смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с нехарактеристической линией сопряжения $x=0$.

В § 2.1 в области D, представляющей собой объединение прямоугольников $ABCA_0$, AA_0EF, где $A(0,0)$, $B(\ell_1,0)$, $C(\ell_1,h)$, $A_0(0,h)$, $E(-\ell_2,h)$, $F(-\ell_2,0)$ $(\ell_1, \ell_2, h>0)$ и интервала AA_0, рассмотрены краевые задачи для уравнения четвертого порядка

$$L(u)\equiv\begin{cases} u_{xxyy}-u_{yyy}=f_1(x,y), & x>0, \\ u_{xxyy}+c_2 u_{yy}=f_2(x,y), & x<0, \end{cases} \tag{19}$$

где $c_2=const$, $f_i(x,y)$ $(i=1,2)$ - заданные функции.

Уравнение (19) является простой моделью уравнения гиперболического типа с двумя кратными семействами $x=const$, $y=const$ действительных характеристик относительно старших производных четвертого порядка. Оно является ещё уравнением смешанного типа в том смысле, что при $x>0$ относится к псевдогиперболическому типу, а при $x<0$ к псевдопараболическому типу. Прямая $x=0$ представляет собой линию сопряжения уравнения (19).

Краевые задачи для уравнения (19), когда линией сопряжения является прямая $y=0$, рассмотрены в § 1.1.

Задача 1.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)$, являющуюся решением уравнения (19) в области $D\setminus(x=0)$ и удовлетворяющую краевым условиям

$$u(\ell_1,y)=\varphi_1(y),\ u(-\ell_2,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,$$
$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=\psi_2(x),\ u_{yy}(x,0)=\psi_3(x),\ 0\le x\le\ell_1,$$
$$u(x,0)=\theta_1(x),\ u_y(x,0)=\theta_2(x),\ -\ell_2\le x\le 0,$$

где $\varphi_i(y)$, $\theta_i(x)$ $(i=1,2)$, $\psi_j(x)$ $(j=1,2,3)$ - заданные функции, причем

$$\varphi_1(0)=\psi_1(\ell_1),\ \varphi_1'(0)=\psi_2(\ell_1),\ \varphi_1''(0)=\psi_3(\ell_1),\ \varphi_2(0)=\theta_1(-\ell_2),\ \varphi_2'(0)=\theta_2(-\ell_2),$$
$$\psi_1(0)=\theta_1(0),\ \psi_2(0)=\theta_2(0).$$

Из постановки задачи 1.1 следует, что $u(x,y)$ и $u_x(x,y)$ непрерывны при переходе через линию сопряжения $x=0$. Введем обозначения:

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu(y),\ 0\le y\le h, \tag{20}$$

где $t(y)$ и $n(y)$ - пока неизвестные функции.

Обозначая $u_{yy}(x,y)=\vartheta(x,y)$, для $\vartheta(x,y)$ из задачи 1.1 получается

Задача 1.2. Найти функцию $\vartheta(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)$, являющуюся решением уравнения

$$\bar{L}(\vartheta)\equiv\begin{cases} \vartheta_{xx}-\vartheta_y=f_1(x,y), & x>0, \\ \vartheta_{xx}+c_2\vartheta=f_2(x,y), & x<0, \end{cases}$$

и удовлетворяющую краевым условиям

$$\vartheta(\ell_1,y)=\varphi_1''(y),\ \vartheta(-\ell_2,y)=\varphi_2''(y),\ 0\le y\le h,$$
$$\vartheta(x,0)=\psi_3(x),\ 0\le x\le\ell_1$$

причем $\varphi_1''(0)=\psi_3(\ell_1)$.

Из условий (20) и постановки задачи 1.2 будем иметь:

$$\vartheta(-0,y)=\vartheta(+0,y)=\tau''(y),\ \vartheta_x(-0,y)=\vartheta_x(+0,y)=\nu''(y),\ 0\le y\le h.$$

Замечание. Линии изменения типа $x=0$ и $y=0$ для уравнения (1) и (19) не равноправны, так как линия $y=0$ для уравнения (1) является характеристикой, поэтому на этой линии требуется выполнения трех условий склеивания (см. формулу (2)), а линия $x=0$ для уравнения (19) является не характеристической, поэтому на этой линии потребуется выполнения двух условий склеивания (см. формулу (20)).

Доказаны следующие утверждения:

Лемма 1.1. Пусть $\varphi_2(y)\in C^2[0,h]$, $\varphi_2''(0)=0$, $\psi_3(x)\in C^1[0,\ell_1]$, $\psi_3(0)=0$, $\psi_3'(0)=0$, $\varphi_1(y)\in C^2[0,h]$, $\varphi_1''(0)=\psi_3(\ell_1)$, $f_1(x,y)\in C(\overline{D_1})$, $f_2(x,y)\in C(\overline{D_2})$, $f_2(x,0)=0$. Тогда существует единственное классическое решение задачи 1.2, причем $\nu(y)=u_x(x,y)\,/_{x=0}$ принадлежит классу $C^2[0,h]$, $\nu''(0)=0$.

Теорема 1.1. Если выполняются условия Леммы 1.1, $c_2<0$ и $\theta_i(x)\in C^2[-\ell_2,0]$, $\psi_i(x)\in C^2[0,\ell_1]$, $\theta_i(0)=\psi_i(0)$ $(i=1,2)$, $\varphi_1(0)=\psi_1(\ell_1)$, $\varphi_1'(0)=\psi_2(\ell_1)$, $\varphi_2(0)=\theta_1(-\ell_2)$, $\varphi_2'(0)=\theta_2(-\ell_2)$, то решение задачи 1.1 существует, единственно и представимо через функции Римана.

Отметим, что утверждения Леммы 1.1 и Теорема 1.1 остаются в силе и в случаях $c_2=0, c_2>0$.

Во втором параграфе второй главы в области $D=D_1\cup I\cup D_2$, где D_1 - внутренность прямоугольника $A(0,0), B(\ell_1,0), B_0(\ell_1,h_1)$, $A_0(0,h_1)$, D_2 - внутренность треугольника $A(0,0)$, $A_0(0,h_1)$, $B_1(-\ell_2,0)$ $(\ell_1,\ell_2,h>0)$, I - отрезок AA_0, изучаются краевые задачи для уравнения

$$L(u)\equiv u_{xxyy}+\alpha(x)u_{yyy}+d(x,y)u=f(x,y), \qquad (21)$$

где коэффициенты $\alpha(x)$ и $d(x,y)$ терпят разрывы первого рода при переходе через линию $x=0$. Для определенности рассмотрены случаи, когда

$$\alpha(x)=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad d(x,y)=\begin{cases}d_1(x,y), & x>0\\ d_2(x,y), & x<0.\end{cases}$$

Тогда уравнение (21) запишется в виде

$$0=\begin{cases}u_{xxyy}-u_{yyy}+d_1(x,y)u-f_1(x,y), & x>0\\ u_{xxyy}+d_2(x,y)u-f_2(x,y), & x<0\end{cases} \qquad (22)$$

Обращение в нуль коэффициента $\alpha(x)$ при $x<0$ резко меняет свойства и поведение решения уравнения (21). В случае $\alpha(x)\neq 0$ уравнение (21) можно рассматривать как уравнение четвертого порядка, содержащее в главной части оператор теплопроводности. Поэтому решение этого уравнения обладает свойствами как гиперболического, так и параболического уравнения. По этой причине уравнение (22) при $x>0$ называется псевдогиперболическим уравнением.

При $\alpha(x)\equiv 0$ в характере решения уравнения (21) свойство параболичности теряется. Поэтому в случае, когда $\alpha(x)\equiv 0$ уравнение (21) иногда называют псевдопараболическим. В дальнейшем уравнение (22) назовем уравнением

смешанного псевдо-параболо-гиперболического типа, так как линия $x=0$ фактически является линией изменения типа уравнения.

Задача 2.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)$, удовлетворяющую в области $D\setminus I$ уравнению (22), краевым и начальным условиям

$$u\big|_{BB_0}=\varphi_1(y),\quad u\big|_{A_0B_1}=\varphi_2(y),\qquad 0\le y\le h_1, \qquad (23)$$

$$u\big|_{AB}=\psi_1(x),\quad u_y\big|_{AB}=\psi_2(x),\quad u_{yy}\big|_{AB}=\psi_3(x),\ 0\le x\le\ell_1 \qquad (24)$$

$$u\big|_{AB_1}=\chi_1(x),\quad u_y\big|_{AB_1}=\chi_2(x),\ -\ell_2\le x\le 0, \qquad (25)$$

где $\varphi_i(y)$, $\chi_i(x)(i=1,2)$, $\psi_j(x)(j=\overline{1,3})$ - заданные функции, причем выполняются условия согласования

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1^{(i)}(0)=\psi_{i+1}(\ell_1)(i=0,1,2),\ \varphi_2^{(j)}(0)=\chi_{(j+1)}(-\ell_2)\ (j=0,1),\\ &\psi_k(0)=\chi_k(0)\ (k=1,2).\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Краевые задачи для уравнения вида (22) рассмотрены в § 1.1. Но методика исследования задачи 2.1, предложенная в данной работе, существенно отличается от методики исследования задач, рассмотренных в § 1.1.

Из постановки задачи 2.1 следует, что на линии $x=0$ выполняются условия склеивания

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y),\qquad u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu(y),\qquad 0\le y\le h_1.$$

Следуя идее Трикоми, для решения задачи 2.1 необходимо найти функциональные соотношения между функциями $\tau(y)$ и $\nu(y)$, принесенные из областей D_1 и D_2. С этой целью рассмотрены следующие задачи:

Задача 2.2. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D_2})$, удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$L_2(u)\equiv u_{xxyy}+d_2(x,y)u=f_2(x,y),\qquad (x,y)\in D_2,$$

начальным условиям (25) и краевым условиям

$$u(0,y)=\tau(y),\quad u_x(0,y)=\nu(y),\qquad 0\le y\le h_1,$$

причем

$$\tau(0)=\chi_1(0),\qquad \tau'(0)=\chi_2(0),\qquad \chi_1'(0)=\nu(0)$$

Задача 2.3. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D_1})$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$L_1(u)\equiv u_{xxyy}-u_{yyy}+d_1(x,y)u=f_1(x,y),\quad (x,y)\in D_1,$$

начальным условиям (24) и краевым условиям

$$u(0,y)=\tau(y),\qquad u(\ell_1,y)=\varphi_1(y),\qquad 0\le y\le h_1,$$

причем

$$\tau(0)=\psi_1(0),\ \tau^{(i)}(0)=\psi_{i+1}(0)=0\,(i=1,2),\ \varphi_1^{(j)}(0)=\psi_{j+1}(\ell_1)\ (j=0,1,2). \qquad (27)$$

Методом функции Римана, Грина и интегральных уравнений доказаны существование и единственность решений краевых задач 2.1, 2.2 и 2.3.

Основным результатом этого параграфа является **теорема**: если выполняются условия (26), (27) и

$$\varphi_i(y)\in C^3[0,h_1],\quad \chi_i(x)\in C^3[0,\ell_1],\quad f_i(x,y)\in C(\overline{D_i}),$$
$$\psi_i(x)\in C^2[0,\ell_1]\,(i=1,2),\quad \psi_3(x)\in C^1[0,\ell_1],\quad d_2(x,y)\in C(\overline{D_2}),$$

то решение задачи 2.1 существует и единственно.

Третья глава посвящена исследованию краевых задач для уравнений смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с двумя линиями изменения типа, задачам сопряжения для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка и аналогу задачи Дарбу для гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками в треугольных областях.

В первом параграфе третьей главы в области D, ограниченной отрезками прямых $x=0,\ y=-h_2,\ x=\ell_1,\ y=h_1,\ x=-\ell_2,\ y=0\ (\ell_1,\ell_2,h_1,h_2>0)$, рассмотрено уравнение

$$L(u)\equiv\begin{cases}u_{xxyy}-u_{yyy}=f_1(x,y),\ (x,y)\in D_1,\\ u_{xxyy}+c_2u_{yy}=f_2(x,y),(x,y)\in D_2,\\ u_{xxyy}+c_3u_{yy}=f_3(x,y),(x,y)\in D_3,\end{cases} \qquad (28)$$

где c_2,c_3 - $const$, $f_i(x,y)$ $(i=1,2,3)$ - заданные функции, а $D_2=D\cap(y<0)$, $D_3=D\cap(x<0)$, $D_1=D\setminus(D_2\cup D_3)$.

Нетрудно заметить, что линии $y=0$ и $x=0$ являются линиями изменения типа уравнения (28), так как в области D_1 уравнение (28) **принадлежит к** псевдогиперболическому типу, а в областях D_2 и D_3 уравнение (28) принадлежит к псевдопараболическому типу. Отметим также, что линии $x=0$ и $y=0$ являются двукратными действительными характеристиками уравнения (28). Поэтому уравнение (28) является уравнением гиперболического типа относительно старших производных четвертого порядка.

В области D для уравнения (28) будем изучать краевую задачу с заданными данными на всей границе рассматриваемой области.

Задача 1.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)$, являющуюся решением уравнения (28) в области $D\setminus(xy=0)$ и удовлетворяющую краевым условиям

$$u(\ell_1,y)=\varphi_1(y),\ u(-\ell_2,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h_1,$$
$$u(0,y)=\varphi_3(y),\ u(\ell_1,y)=\varphi_4(y),\ -h_2\le y\le 0,$$
$$u(x,0)=\psi_1(x),\ -\ell_2\le x\le 0,\ u(x,-h_2)=\psi_2(x),\ 0\le x\le\ell_1,$$
$$u(x,h_1)=P(x)u(x,+0),\ u_y(x,-h_2)=\psi_3(x),\ 0\le x\le\ell_1,$$
$$u(x,h_1)=\psi_4(x),\ -\ell_2\le x\le 0,$$

где $\varphi_i(y)$, $(i=\overline{1,4})$, $\psi_j(x)$ $(j=\overline{1,5})$, $P(x)$ - заданные функции, причем

$$\varphi_2(0)=\psi_1(-\ell_2),\ \psi_1(0)=\varphi_3(0),\ \varphi_3(-h_2)=\psi_2(0),\ \psi_2(\ell_1)=\varphi_4(-h_2),\ \varphi_4(0)=\varphi_1(0),$$
$$\varphi_1(h_1)=P(\ell_1)\,\varphi_1(0),\ \ \psi_4(0)=P(0)\varphi_3(0),\ \varphi'_3(-h_2)=\psi_3(0),\ \varphi'_4(-h_2)=\psi'_3(\ell_1).$$

Из постановки задачи 1.1 следует непрерывность $u(x,y)$, $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ вдоль линий сопряжения $x=0$ и $y=0$, то есть выполняются следующие условия сопряжения

$$u(x,+0)=u(x,-0),\ u_y(x,+0)=u_y(x,-0),\ 0\le x\le\ell_1$$
$$u(+0,y)=u(-0,y),\ u_x(+0,y)=u_x(-0,y),\ 0\le y\le h_1.$$

Методом построения общих решений, функций Грина и интегральных уравнений доказано существование единственного решения задачи.

Во втором параграфе третьей главы в области $D=\{(x,t):-\ell_2<x<\ell_1,\ 0<t<h\}$ $(\ell_1,\ell_2,h>0)$ рассмотрено псевдогиперболическое уравнение четвертого порядка с разрывными коэффициентами на линии $x=0$:

$$a_i^2u_{xxtt}-u_{ttt}+b_i(x,t)u_{tt}+c_i(x,t)u=f_i(x,t),\ (x,t)\in D_i\ \ (i=1,2), \qquad (29)$$

где $a_i=const$, $b_i(x,t), c_i(x,t), f_i(x,t)\,(i=1,2)$ - заданные функции, а

$$D_1=D\cap(x>0),\ D_2=D\cap(x<0).$$

Задача 2.1. Найти функцию $u(x,t)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)$, удовлетворяющую уравнению (29) в областях $D_i(i=1,2)$, краевым и начальным условиям

$$u(\ell_1,t)=\varphi_1(t),\ u(-\ell_2,t)=\varphi_2(t),\ \ 0\le t\le h, \qquad (30)$$
$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_t(x,0)=\psi_2(x),\ u_{tt}(x,0)=\psi_3(x),\ 0\le x\le\ell_1, \qquad (31)$$
$$u(x,0)=\psi_4(x),\ u_t(x,0)=\psi_5(x),\ u_{tt}(x,0)=\psi_6(x),\ -\ell_2\le x\le 0, \qquad (32)$$

где $\varphi_i(t),\psi_j(x)\left(i=1,2;\ j=\overline{1,6}\right)$ - заданные функции, причем

$$\varphi_1(0)=\psi_1(\ell_1),\ \varphi_2(0)=\psi_4(-\ell_2),\ \varphi'_1(0)=\psi_2(\ell_1),$$
$$\varphi'_2(0)=\psi_5(-\ell_2),\psi_1(0)=\psi_4(0)=0,\ \psi'_1(0)=\psi'_4(0), \qquad (33)$$
$$\psi_2(0)=\psi_5(0),\psi_3(0)=\psi_6(0).$$

Из постановки задачи 2.1 заключаем, что на линии $x=0$ выполняются следующие условия сопряжения:

$$u(+0,t)=u(-0,t)=\tau(t),\ u_x(+0,t)=u_x(-0,t)=\nu(t),0\le t\le h,$$

$\tau(t),\nu(t)$ – пока неизвестные функции.

Решение задачи 2.1 можно свести к решению двух вспомогательных задач.

Задача 2.2: Найти функцию $u(x,t)\in C(\overline{D_1})$, удовлетворяющую уравнению

$$a_2^2u_{xxtt}-u_{ttt}+b_2(x,t)u_{tt}+c_2(x,t)u=f_2(x,t),\ (x,t)\in D_2\,,$$

начальным условиям (31) и краевым условиям

$$u_x(0,t)=\nu(t),\ u(\ell_1,t)=\varphi_1(t),\ 0\le t\le h,$$

причем

$$\nu(0)=\psi_1'(0),\varphi_1''(0)=\psi_3(\ell_1). \tag{34}$$

Задача 2.3. Найти функцию $u(x,t)\in C(\overline{D}_2)$, удовлетворяющую уравнению

$$a_2^2 u_{xxtt}-u_{ttt}+b_2(x,t)u_{tt}+c_2(x,t)u=f_2(x,t),\ (x,t)\in D_2,$$

начальным условиям (32) и краевым условиям

$$u(-\ell_2,t)=\varphi_2(t),\ u(0,t)=\tau(t),\ 0\le t\le h,$$

причем

$$\varphi_2''(0)=\psi_6(-\ell_2),\varphi_4(0)=\tau(0)=0 \tag{35}$$

Методом функции Грина и интегральных уравнений доказаны существование и единственность решений задач 2.2 и 2.3, и тем самым установлена справедливость следующей теоремы:

Теорема 2.1. Пусть

$$\Psi_1(x),\Psi_2(x)\in C^2[0,\ell_1],\ \Psi_4(x),\Psi_5(x)\in C^2[-\ell_2,0],$$
$$\Psi_3(x)\in C[0,\ell_1],\ \Psi_5(x)\in C[\ell_2,0],\quad \varphi_1(t)\varphi_2(t)\in C^1[0,h],$$
$$c_i(x,t),f_i(x,t),в_i(x,t),в_{i\eta\eta}(x,t)\in \dot{C}(D_i)\,(i=1,2)$$

и выполняются условия (33), (34) и (35). Тогда решение задачи 2.1 существует и единственно.

В последнем, третьем, параграфе третьей главы в треугольнике D, полученным из отрезков AC и BC характеристик $x=0$ и $y=h, h>0$ и отрезком AB прямой $y=x$ для уравнения

$$L(u)=u_{xxxy}+\alpha_1 u_{xxx}+\alpha_2 u_{xxy}+\beta_1 u_{xx}+\beta_2 u_{xy}+\gamma_1 u_x+\gamma_2 u_y+\delta u=f \tag{36}$$

изучены следующие задачи.

Задача 3.1(Дарбу). Требуется найти в области D регулярное решение уравнения (36), удовлетворяющее условиям

$$u_x\big|_{AB}=\nu(x),\ u_{xy}\big|_{AB}=\mu(x),\ u_{xxy}\big|_{AB}=\chi(x),$$
$$u(0,y)=\varphi(y),$$

где $\varphi(y),\nu(x),\mu(x),\chi(x)$ – заданные гладкие функции.

Задача 3.2. Требуется найти в области D регулярное решение уравнения (36), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi(y),$$
$$u_{AB}=\tau(x),u_{xy\,AB}=\mu(x),u_{xxy\,AB}=\chi(x),$$

где $\varphi(y),\ \tau(x),\ \mu(x),\ \chi(x)$ – заданные гладкие функции.

Задача 3.3. Требуется найти в области регулярное решение уравнения (36), удовлетворяющее условиям

$$u_{xy}(0,y)=\varphi_1(y),$$
$$u\big|_{AB}=\tau(x),\ u_y\big|_{AB}=\nu(x),\ u_{xxy}\big|_{AB}=\chi(x),$$

где $\varphi_1(y),\ \tau(x),\ \nu(x),\ \chi(x)$ - заданные гладкие функции.

Задача 3.4. Требуется найти в области D регулярное решение уравнения (36), удовлетворяющее условиям

$$u_y(0,y)=\varphi_3(y),$$
$$u\big|_{AB}=\tau(x),\ u_y\big|_{AB}=\nu(x),\ u_{xy}\big|_{AB}=\mu(x),$$

где $\varphi_3(y),\ \tau(x),\ \nu(x),\ \mu(x)$ заданные гладкие функции.

Методом функций Римана и интегральных уравнений доказаны следующие теоремы:

Теорема 3.1. Если выполняются условия $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\,(i=1,2),\delta,\alpha_{1xxx}$, $\alpha_{2xxy},\beta_{2xy},\gamma_{2y}\in C(\overline{D}),\ \varphi(y)\in C^2[0,h],\nu(x),\mu(x)\in C^1[0,h]$, $\chi(x)\in C[0,h], f\in C(\overline{D})$. Тогда в области D решение задачи 3.1 существует и единственно.

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\,(i=1,2),\delta,\alpha_{1xxx}$, $\alpha_{2xxy},\beta_{2xy},\gamma_{2y}\in C(\overline{D}),\ \varphi(y)\in C^2[0,h],\tau(x)\in C^2[0,h],\mu(x)\in C^1[0,h]$ $\chi(x)\in C[0,h], f\in C(\overline{D})$. Тогда в области D решение задачи 3.2 существует и единственно.

Теорема 3.3. Если выполняются условия $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\,(i=1,2),\delta,\alpha_{1xxx}$, $\alpha_{2xxy},\beta_{2xy},\gamma_{2y}\in C(\overline{D}),\varphi_1(y)\in C^2[0,h],\tau(x)\in C^2[0,h],\varphi_1(y),\nu(x)\in C^1[0,h]$ $\chi(x)\in C[0,h], f\in C(\overline{D})$. Тогда в области решение задачи 3.3 существует и единственно.

Теорема 3.4. Если выполняются условия $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\,(i=1,2),\delta,\alpha_{1xxx}$, $\alpha_{2xxy},\beta_{2xy},\gamma_{2y}\varphi_3(y)\in C(\overline{D}),\in C^2[0,h],\tau(x)\in C^2[0,h],\varphi_3(y),\nu(x)\in C^1[0,h]$ $\chi(x)\in C[0,h], f\in C(\overline{D})$. Тогда в области решение задачи 3.4 существует и единственно.

В четвертом параграфе третьей главы, аппроксимируя модельное псевдо-параболо-гиперболическое уравнение и применяя метод сеток, получено численное решение на ПК Pentium IV.

Таким образом, в работе доказаны теоремы существования и единственности решения краевых задач для смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка как с одной, так и с двумя линиями изменения типа, а также для уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами.

Пользуясь случаем выражаю глубокую благодарность моему учителю и научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору А. Сопуеву за постановки задач, ценные советы, постоянное внимание и полезные обсуждения результатов работы.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

1. Сопуев А.С., Пирматов А.З. Единственность решения одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Проблемы алгебры, геометрии и их приложений: Тез. докл. конф. - Ош, 1996.- С.56-58.

2. Сопуев А.С., Пирматов А.З. Краевые задачи для смешанного псевдо-параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с младшими членами // Математические вопросы колебания и управляемых систем. - Ош: ОшГУ, 1998. - С. 47-49.

3. Сопуев А.С., Пирматов А.З. Краевые задачи для смешанного псевдо-параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка. // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 1998. Вып. 27. - С. 281-287.

4. Сопуев А.С., Пирматов А.З. Краевые задачи для смешанного псевдо-параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с линией сопряжения x=0 // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2000. Вып. 29. -С. 316-325.

5. Асылбеков Т. Д., Пирматов А. З. Аналог задачи Дарбу для гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками в треугольных областях // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Тр. Междунар. науч. конф., посв. 70-летию акад. М.И.Иманалиева / Вестник КГНУ. Сер. 3. Естественно-техн. Науки. - 2001. -Вып. 6. Мат. науки. Информатика и информац. техн. - С. 262 - 266.

6. Пирматов А. Об одной задаче для смешанного псевдо-параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с двумя линиями изменения типа. // Вестник ОшГУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки. - Ош: Билим, 2001. - С. 158-168.

7. Пирматов А. Задача сопряжения для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами. // Вестник ОшГУ. Сер. 4. Физ.-мат. науки. - Ош: Билим, 2001. - С. 113-120.

8. Пирматов А. Задачи сопряжения гиперболического и псевдогиперболического уравнения четвертого порядка // Вестник ОшГУ. Сер. 4. Физ.-мат. науки. - Ош: Билим, 2001.- С. 121-132.

9. Сопуев А.С., Пирматов А.З. Краевые задачи для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами. // Вестник ОшГУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки. - №3.- Ош: Билим, 2001. - С. 158-168.

РЕЗЮМЕ

Пирматов Абдыманап Зияйдинович

Төртүнчү тартиптеги аралаш псевдо-парабола-гиперболалык теңдемелер үчүн чек аралык маселелер

Негизги сөздөр: Теңдемелер, псевдо-парабола-гиперболалык, жашашы, жалгыздыгы, маселелер.

Изилдөө обьектиси: Бир жана эки жабыштыруу сызыктары бар төртүнчү тартиптеги псевдопараболалык, псевдогиперболалык, аралаш псевдо-парабола-гиперболалык теңдемелер үчүн жана үзүлүү коэффициенттери бар төртүнчү тартиптеги псевдо-гиперболалык теңдеме үчүн чек аралык маселелерди коюу жана аларды изилдөө.

Изилдөөнүн ыкмалары: Грин жана Римандын функцияларынын жардамы менен Вольтерра жана Фредгольмдун экинчи түрдөгү интегралдык теңдемелерине алынып келинип, редукция ыкмасы колдонулду.

Алынган негизги жыйынтыктар:

♦ Моделдик жана жалпы көрүнүштөгү төртүнчү тартиптеги аралаш псевдо-парабола-гиперболалык теңдемелер үчүн бир жана эки жабыштыруу сызыктары бар чек аралык маселелердин чыгарылыштын жашашы жана жалгыздыгы теоремалары далилденди.

♦ Үзүлүү коэффициенттери бар төртүнчү тартиптеги псевдо-гиперболалык теңдеме үчүн чек аралык маселелердин чыгарылыштын жашашы жана жалгыздыгы теоремалары далилденди.

♦ Төртүнчү тартиптеги гиперболалык теңдеме үчүн үч бурчтук аймагында Дарбунун маселесинин аналогу изилденди.

Колдонуу тармагы: Алынган жыйынтыктарды жогорку тартиптеги аралаш типтеги теңдемелер үчүн чек аралык маселелердин теориясында, үзүлүү коэффициенттери бар жекече туундулуу теңдемелер теориясында, ошондой эле ушундай түрдөгү теңдемелерге келүүчү физикалык процесстердин жана кубулуштардын математикалык моделдеринин анализдеринде колдонууга болот.

РЕЗЮМЕ

Пирматов Абдыманап Зияйдинович

Краевые задачи для смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка

Ключевые слова: уравнения, псевдо-параболо-гиперболическое, единственность, существование, задача.

Объект исследования: постановка и исследование корректных краевых задач для псевдопараболических, псевдогиперболических, смешанных псевдо-

параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с одной и двумя линиями изменения типов, а также для псевдогиперболических уравнений четвертого порядка с разрывными коэффициентами.

Методы исследования: Исследование проводится методом редукции к интегральным уравнениям типа Вольтерра и Фредгольма второго рода с использованием функций Грина и Римана.

Полученные результаты:

♦ Доказаны теоремы единственности и существования решения краевой задачи для смешанного псевдо-параболо-гиперболического уравнения с одной и двумя линиями изменения типов.

♦ Доказаны теоремы единственности и существования решения краевой задачи для псевдогиперболического уравнения с разрывными коэффициентами.

♦ Исследованы аналоги задачи Дарбу для гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками в треугольных областях.

Область применения: Полученные результаты могут быть использованы при исследованиях в теории краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка, в теории уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами, при анализе математических моделей физических процессов и явлений, приводящих к таким уравнениям.

RESUME

Pirmatov Abdymanap Zyaidinovich

Boundary value problems for mixed pseudo - parabolic - hyperbolic equations of the fourth order

Key words: Equations, pseudo - parabolic - hyperbolic, uniqueness, existence, problems.

Object of research: Setting and research of the correct boundary value problems for pseudo-parabolic, pseudo-hyperbolic, mixed pseudo-parabolic-hyperbolic equations of the fourth order with one and two lines of changing of types, and also for the pseudo-hyperbolic equations of the fourth order with discontinuous coefficient.

The research methods are: the method of a reduction to the integral equations such as Volterra and Fredholm of the second kind with using of Green and Riemann's functions.

Received scientific results:

♦ We have proved theorems of uniqueness and existence of the solutions of boundary value problems for mixed pseudo - parabolic - hyperbolic equation with one and two lines of changing of a type.

♦ We have proved theorems of uniqueness and existence of the solutions of boundary value problems for the pseudo-hyperbolic equation with discontinuous coefficient.

♦ We have investigated analogues of the Darbox problem for the hyperbolic equation of the fourth order with the triple characteristics in triangular domains.

Sphere of application: The received results may be applied to research in the theory of the boundary value problems for the equations of the mixed type of high orders, in the theory of partial differential equations in private derivative with discontinuous coefficient, in the analysis of mathematical models of physical processes and phenomena reducing to such equations.