НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

КЕРИМБЕКОВ АКЫЛБЕК

УДК 517.95; 517.97

НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

БИШКЕК – 2003

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Кыргызского Национального Университета им. Ж. Баласагына

Научный консультант: заслуженный деятель науки КР, академик НАН КР, доктор физико-математических наук, профессор **Борубаев А.А.**

Официальные оппоненты: член-корр. НАН Республики Казахстан, доктор физико-математических наук, профессор **Касымов К.А.**
доктор физико-математических наук, профессор **Бижанова Г.И.**
доктор физико-математических наук, профессор **Рафатов Р.**

Ведущая организация: Институт программных систем РАН

Защита диссертации состоится «19» сентября 2003 г. в 14.00. часов на заседании Диссертационного совета Д 01.03.222 по присуждению ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук при Институте математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан «18» августа 2003 г.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу: Кыргызская Республика, 720071, Бишкек - 71, проспект Чуй, 265-а, Институт математики НАН Кыргызской Республики, Диссертационный совет Д 01.03.222.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник **Искандаров С.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, основы которой были заложены в 60-е годы двадцатого столетия, в настоящее время является одним из интенсивно развивающихся научных направлений теории оптимальных процессов.

Движение систем с распределенными параметрами описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными, интегро-дифференциальными и более сложными функциональными уравнениями. Исследование задач оптимального управления системами с распределенными параметрами является более сложной, нежели аналогичные задачи управления системами с сосредоточенными параметрами. Это связано с разнообразием типов уравнений, различными формами задания начально-граничных условий, а также неполной разработанностью качественной теории систем с распределенными параметрами. Тем не менее, интерес к проблемам теории и стремление решить насущных прикладных задач оптимизации породили большой поток исследований и для управляемых систем с распределенными параметрами разработаны качественные методы исследования и различные методы решения задач оптимизации в виде программы или синтеза и методы теории оптимальных конструкций.

Методы решения задач оптимизации при программном управлении системами с распределенными параметрами основаны на методах классического вариационного исчисления, ℓ-проблемы моментов, принципа максимума и получили развитие в исследованиях А.Г.Бутковского, А.И.Егорова, Т.К.Сиразетдинова, К.А.Лурье, В.И.Плотникова, В.А.Троицкого, О.В.Васильева, их учеников и последователей, в работах Д.Л.Рассела, В.Комкова, Ж.Л.Лионса.

Методы решения задач синтеза опирались на метод динамического программирования, в основе которого лежит принцип оптимальности Р.Беллмана. Для систем с распределенными параметрами идеи метода динамического программирования в сочетании с методом функции А.М. Ляпунова были использованы Т.К.Сиразетдиновым и его учениками в решении задач об оптимальной стабилизации программных движений. Позже более общий подход был разработан А.И.Егоровым. Предложенный им метод, где широко используются аппарат теории обобщенных решений краевых задач и понятие дифференциала Фреше, позволил более или менее полно исследовать задачи синтеза оптимального управления как обычными системами с распределенными параметрами, так и системами с сингулярными возмущениями и отклоняющимися аргументами. Метод А.И.Егорова был использован и развит в исследованиях его учеников.

Отметим, что при разработке методов решения задач оптимизации (в виде программы или синтеза) большое количество работ были посвящены исследованию линейно-квадратичных задач, т.е. задач, где функция внешних воздействий линейно зависит от управления и критерием оптимальности служит квадратичный интегральный функционал, характеризующий энергию (например, потенциальную) управляемого объекта.

В природе реально протекающие процессы обычно нелинейны, и математическая модель большинства прикладных задач приводит к необходимости решения нелинейных задач оптимизации, где, например, наряду с минимизацией квадратичного функционала, необходимо учитывать влияния внешних воздействий, нелинейно зависящих от управляющих функций. Известно, что нелинейные задачи оптимизации из-за сложности их исследования и недостаточной разработанности методов их решения мало изучены. Сложность исследования нелинейных задач оптимизации прежде всего, обусловлена тем, что задачи оптимального управления весьма чувствительны к малым изменениям исходных данных. Малые изменения в уравнениях движения системы могут привести к принципиальным изменениям в структуре оптимального управления и в значении критерия оптимальности при этом управлении. Использование линейных моделей при исследовании нелинейных задач оптимизации не всегда оправдано, ибо нередки случаи, когда недостаточно обоснованная линеаризация приводит к ошибочным выводам. Поэтому разработка конструктивных методов решения нелинейных задач оптимизации, позволяющих анализировать нелинейные явления непосредственно, является одной из актуальных проблем теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Цель работы. Разработать конструктивные методы решения нелинейно-квадратичных задач оптимизации в виде программы и синтеза на примере управления электромагнитными колебаниями в линиях передач, упругими колебаниями и тепловыми процессами, в том, числе:

- получить условия оптимальности в нелинейно-квадратичной задаче оптимизации с обобщенным квадратичным интегральным критерием качества;
- найти условия разрешимости нелинейно-квадратичных задач оптимального управления электромагнитными колебаниями в линиях передач, упругими колебаниями и тепловыми процессами;
- разработать алгоритм построения сколь угодно точного решений нелинейно-квадратичной задачи оптимального управления электромагнитными колебаниями в линиях передач, упругими колебаниями и тепловыми процессами в виде программы и синтеза.

Методы исследования. В процессе исследования использованы методы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, в частности, методы вариационного исчисления, принцип максимума и метод динамического программирования (по методике, разработанной проф. А.И. Егоровым), методы теории дифференциальных уравнений, вариационные методы математической физики, методы теории интегральных уравнений и методы функционального анализа, а также метод «выпуклого преобразования», разработанный автором.

Научная новизна. Впервые разработан конструктивный метод решения нелинейно-квадратичной задачи оптимизации систем с распределенными

параметрами и полученные научные результаты являются новыми в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, в частности

- для нелинейно-квадратичной задачи оптимального управления (в виде программы и синтеза) с обобщенным квадратичным критерием качества получены условия оптимальности в виде системы дифференциальных равенств и неравенств, которые обобщают ранее известные результаты;
- доказано, что нелинейно-квадратичная задача с обобщенным квадратичным критерием качества может быть преобразована к обобщенной линейно-квадратичной задаче оптимизации;
- доказано, что в обобщенной линейно-квадратичной задаче оптимизации программное оптимальное управление определяется, как решение нелинейного интегрального уравнения специфического вида и найдены условия его однозначной разрешимости;
- доказана сходимость приближенного решения обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации при программном управлении колебательными и тепловыми процессами;
- найден класс К функций «квадратных аргументов», обладающих тем свойством, что при решении обобщенных линейно-квадратичных задач оптимизации, программное оптимальное управление, в отличие от общего случая, определяется как решение линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-рода;
- найдены условия разрешимости обобщенной линейно-квадратичной задачи синтеза оптимального управления в классе К;
- доказана сходимость приближенного решения задачи оптимизации в классе К, построенного в виде программы или синтеза.

Практическая ценность. Разработанные методы решения нелинейно-квадратичных задач оптимизации позволяют довести решения задачи до численных расчетов и пригодны для решения на инженерном уровне многих прикладных задач, связанных с управлением колебательными, тепловыми и другими процессами, описываемыми системами с распределенными параметрами.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получены необходимое и достаточное условия оптимальности управления (в форме принципа максимума) в нелинейно-квадратичной задаче оптимизации при управлении колебаниями в линиях передач, упругими колебаниями и тепловыми процессами, следствием которого (для каждого управляемого процесса в отдельности) является система нелинейных дифференциальных равенств и неравенств в частных производных.
2. Найдены условия, при выполнении которых, нелинейно-квадратичная задача оптимизации общего вида может быть однозначно преобразована к обобщенной линейно-квадратичной задаче оптимизации.
3. Разработан конструктивный метод решения обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации при программном управлении колебаниями в

линиях передач, упругими колебаниями, тепловыми процессами. При этом относительно оптимального управления получено нелинейное интегральное уравнение специфического вида, найдены условия его однозначной разрешимости в гильбертовом пространстве и разработана методика его решения. Построен алгоритм. приближенного вычисления решения обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации, доказана его сходимость к точному решению по управлению и по функционалу и дана оценка скорости сходимости.

4. Разработан конструктивный метод решения обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации в классе K. Построен алгоритм приближенного решения задачи оптимизации и доказана его сходимость к точному решению по управлению и по функционалу.

Решение задачи оптимизации в классе K заслуживает внимания тем, что при их решении удается снять многие ограничения, налагаемых на заданные функции и параметры, которые потребовались для однозначной разрешимости линейно-квадратичной задачи оптимизации в общем случае.

5. Получено условие оптимальности управления (как следствие принципа оптимальности Беллмана) в нелинейно-квадратичной задаче оптимизации с обобщенным квадратичным критерием качества при управлении колебаниями в линиях передач в виде системы нелинейных дифференциальных равенств и неравенств в частных производных.

6. Разработана методика решения обобщенной линейно-квадратичной задачи синтеза в классе K. Получено нелинейное дифференциальное уравнение Беллмана в частных производных первого порядка, которое допускает решение в виде квадратичного функционала. Найдено решение задачи Коши-Беллмана и построено синтезирующее оптимальное управление в виде функционала от состояния управляемого процесса. Построен алгоритм приближенного вычисления решения задачи синтеза в классе K и доказана его сходимость к точному решению.

7. На примере управления тепловым процессом дана численная реализация разработанного метода. Численные расчеты подтверждают достоверность теоретических выводов (результатов) и показывают пригодность разработанного метода для использования в приложениях.

Апробация работы. Научные результаты докладывались на

- Всесоюзной научно-технической конференции «Актуальные проблемы моделирования и управления системами с распределенными параметрами» (Одесса, 8-10 сентября 1987 г.);
- 3-й школе-семинаре «Численные методы для высокопроизводительных систем» (Фрунзе, сентябрь 1988 г.);
- международной конференции «Second International colloquium on differential equations» (Plovdiv, Bulgaria, 19-24 August, 1991 г.);
- международной научной конференции «Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа» (Ташкент, 23-25 ноября 1993 г.);

- международной научно-практической конференции «Проблемы вычислительной математики и информационных технологий» (Алматы, 25-26 марта 1999 г.);
- международном симпозиуме «1st Turkish world mathematics symposium» (Elazig, Turkia, 29 June – 2 July 1999);
- международной научной конференции «Проблемы математики и информатики в XXI веке» (Бишкек, 12-15 сентября 2000 г.);
- международной конференции «Проблемы управления и информатики» (Бишкек, 19-22 сентября 2000 г.);
- международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (Бишкек, 12-15 сентября 2001г.);
- международном симпозиуме «Generalized solutions in control problems» (Переславль-Залесский, Россия, 27-31 августа 2002 г.);
- международной конференции «Analytical and approximate methods of solving of the problems, described with help of differential equations» (Бишкек, 23-24 сентября 2002 г.),

а также на республиканских, межвузовских конференциях и на ежегодных отчетных заседаниях Института фундаментальных наук КНУ им. Ж.Баласагына .

Публикации. По теме диссертации опубликованы: одна монография [12], 35 статей и 6 тезисов докладов [2,4,5,8,9,16]. В совместных статьях [10,13,14,15,23,37,38,39,41] диссертанту принадлежат постановка задачи и разработка схемы метода, а соавторам принадлежат его реализация при решении задачи оптимизации для того или иного управляемого объекта.

Структура и объем диссертации. Диссертация, изложенная на 223 страницах, состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения, списка использованных источников и приложения.

Краткое содержание работы. В диссертации изложены результаты исследований автора по вопросам разрешимости (в виде программы и синтеза) нелинейно-квадратичных задач оптимизации с обобщенным квадратичным интегральным критерием качества при оптимальном управлении электромагнитными колебаниями в линиях передач, упругими колебаниями и тепловыми процессами.

Результаты исследований изложены по главам в следующей последовательности: нелинейное оптимальное управление колебаниями в линиях передач, нелинейное оптимальное управление упругими колебаниями, нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами.

В первой главе «Нелинейное оптимальное управление колебаниями в линиях передач», состоящей из семи параграфов, исследованы вопросы разрешимости нелинейно-квадратичной задачи оптимизации колебаний в линиях передач. Разработаны конструктивные методы решения задачи управления конечным состоянием управляемого процесса и задачи «слежения», т.е. задачи управления процессом вдоль заданной траектории, которые были сформулированы в виде нелинейно-квадратичной задачи оптимизации.

Согласно методу нелинейно-квадратичная задача оптимизации однозначно преобразуется к обобщенной линейно-квадратичной задаче оптимизации, для которой указаны алгоритмы построения точного и приближенных решений. Доказана сходимость приближенных решений к точному решению по норме соответствующих пространств.

Объектом исследования является задача о нелинейном оптимальном управлении колебаниями в линиях передач, описываемыми вектор-функцией $V(t,x)=\{V_1(t,x),V_2(t,x)\}$, которая удовлетворяет в области $Q_T=Q\times(0,T]$ системе телеграфных уравнений

$$V_t + AV_x = g(x)f(t,u(t)), \qquad (1)$$

а на границе Q_T начальным

$$V(0,x)=\psi(x), \quad 0<x<1, \qquad (2)$$

и граничным

$$V_2(t,0)=0, \quad V_2(t,l)=0, \quad 0<t\le T \qquad (3)$$

условиям, где A – постоянная матрица; матрица $g(x)=\left(g_{ij}(x)\right), i,j=1,2, g_{ij}(x)\in H(Q)$, и вектор-функция $\psi(x)=\{\psi_1(x),\psi_2(x)\}, \psi_i(x)\in H(Q)$, заданы; вектор-функция $f(t,u(t))=\{f_1(t,u(t)),f_2(t,u(t))\}\in H^2(0,T)$, - описывает изменения внешнего воздействия и нелинейно зависит от вектор-функции управления $u(t)=\{u_1(t),u_2(t)\}\in H^2(0,T)$; T – фиксировано.

Замечание 1.1. Здесь и в дальнейшем запись

$$y(t,u(t))=\{y_1(t,u(t)),y_2(t,u(t))\}\in H^2(0,T)$$

(или $y(t,u)=\{y_1(t,u),y_2(t,u)\}\in H^2(0,T)$) означает, что компоненты $y_i(t,u(t))$, i=1,2, при каждом $u(t)\in H^2(0,T)$, как функция по переменной $t\in[0,T]$, являются элементами гильбертова пространства $H(0,T)$, т.е. $y_i(t,u(t))\equiv\widetilde{y}_i(t)\in H(0,T)$. Замечание остается в силе и для скалярной функции $y(t,u(t))\in H(0,T)$.

Если отображение $f:u\to f(t,u)$ взаимно однозначное ($\forall t\in[0,T]$), то при каждом фиксированном $u(t)\in H^2(0,T)$ краевая задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение $V(t,x)\in H^2(Q_T)$, которое определяется по формуле

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[\Phi_n(t)\psi_n+\int_0^t\Phi_n(t-\tau)g_n f(\tau,u(\tau))d\tau\right], \qquad (4)$$

где $X_n(x)=\mathrm{diag}\left(X_{n1}(x),X_{n2}(x)\right)$ - матрица составленная из собственных функций краевой задачи (1)-(3), ψ_n, g_n - коэффициенты Фурье.

На выбранном классе допустимых управлений $u(t)\in H^2(0.T)$ определяется функционал

$$J(u)=\int_Q\|V(T,x)-\xi(x)\|^2dx+\beta\int_0^T\|p(t,u(t))\|^2dt, \beta>0, \qquad (5)$$

где $\xi(x)=\{\xi_1(x),\xi_2(x)\},\xi_i(x)\in H(Q)$, - известная вектор-функция; $p(t,u)=\{p_1(t,u),p_2(t,u)\}\in H^2(0,T)$ - некоторая вектор-функция нелинейная по аргументу u, которая задается с учетом специфики управляемого процесса.

Пусть отображение $f:u\to f(t,u)$ взаимно однозначное ($\forall t\in[0,T]$) и функции $p_i(t,u)$ выпуклые по переменным $u_i, i=1,2$. Если существует элемент $u^0(t)\in H^2(0,T)$, на котором функционал (5) достигает минимального значения, то он является единственным (лемма 1.1).

В параграфах 1.1-1.3 исследованы вопросы разрешимости нелинейно-квадратичной задачи программного оптимального управления: среди допустимых управлений $u(t)\in H^2(0,T)$ найти такое $u^0(t)$, для которого при соответствующем ему решении $V^0(t,x)$ краевой задачи (1)-(3) функционал (5) принимает наименьшее возможное значение.

Из принципа максимума, выполнение которого является необходимым и достаточным условием оптимальности управления u(t) (теорема 1.1), следует, что на оптимальном управлении $u^0(t)$ одновременно должны выполнятся следующие соотношения

$$\left.\begin{aligned}&2\beta D^*\left(\frac{p}{u}\right)p(t,u)-\int_Q D^*\left(\frac{f}{u}\right)g(x)\omega(t,x)dx=\theta,\\&\Pi_{u_1u_1}<0,\Pi_{u_1u_1}\cdot\Pi_{u_2u_2}-\Pi^2_{u_1u_2}>0,\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где $D\left(\frac{\zeta}{u}\right)$ – матрица Якоби вектор-функции $\zeta(t,u)=\{\zeta_1(t,u_1,u_2),\zeta_2(t,u_1,u_2)\}$;

$$\Pi_{u_iu_j}=\frac{\partial^2 f^*}{\partial u_i\partial u_j}\cdot\int_Q g(x)\omega(t,x)dx-2\beta\left(\frac{\partial p^*}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial p}{\partial u_j}+p^*\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial u_i\partial u_j}\right), i,j=1,2;$$

вектор-функция $\omega(t,x)=\{\omega_1(t,x),\omega_2(t,x)\}$ является единственным обобщенным решением краевой задачи

$$\begin{aligned}&\omega_t+A^*\omega_x=\theta, \quad x\in Q, 0\le t<T,\\&\omega(T,x)+2[V(T,x)-\xi(x)]=\theta, x\in Q,\\&\omega_2(t,0)=0, \omega_2(t,l)=0, \quad 0\le t<T.\end{aligned} \qquad (7)$$

Соотношения (6) называются *условиями оптимальности* в нелинейно-квадратичной задаче с программным управлением при оптимизации колебаний, происходящих в линиях передач и представляет собой систему дифференциальных равенств и неравенств в частных производных.

Определить оптимальное управление из условий (6) при произвольно заданных f(t,u) и p(t,u) является довольно сложной задачей. Поэтому вопросы разрешимости нелинейно-квадратичной задачи оптимизации исследованы при условии, что отображение $f:u\to f(t,u)$ взаимно однозначное ($\forall t\in[0,T]$) и якобиан вектор-функции f(t,u) отличен от нуля при любом $t\in[0,T]$, т.е.

$$\left| D\left(\frac{f}{u}\right) \right| \neq 0. \qquad (8)$$

Тогда из соотношения

$$f[t, u(t)] = q(t) \qquad (9)$$

управление u(t) определяется однозначно, т.е. существует взаимно однозначное ($\forall t \in [0,T]$) отображение $\nu : H^2(0,T) \to H^2(0,T)$ такое, что

$$u(t) = \nu[t, q(t)]. \qquad (10)$$

Если вектор-функцию $\sigma[t,q(t)] = \{\sigma_1[t,q(t)], \sigma_2[t,q(t)]\}$ определить по формуле

$$\sigma[t,q(t)] = p(t, \nu[t,q(t)]) = p[(t,u(t)], \qquad (11)$$

то согласно (8)-(10) нелинейно-квадратичная задача оптимизации (1)-(3), (5) преобразуется к следующей обобщенной линейно-квадратичной задаче, где на множестве решений краевой задачи

$$V_t + AV_x = g(x)q(t), \quad 0 < x < 1, 0 < t \le T,$$

$$V(0,x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$V_2(t,0) = 0, \quad V_2(t,1) = 0, \quad 0 < t \le T \qquad (12)$$

требуется минимизировать обобщенный квадратичный функционал

$$J(q) = \int_Q \|V(T,x) - \xi(x)\|^2 dx + \beta \int_0^T \|\sigma[t,q(t)]\|^2 dt. \qquad (13)$$

Замечание 1.2. Преобразование нелинейно-квадратичной задачи оптимизации, при условии (8), к обобщенной линейно-квадратичной задаче является взаимно однозначным. Для однозначной разрешимости обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации функция $\sigma[t,q]$ должна обладать свойством выпуклости по переменной q. При таком преобразовании сохраняется свойство строгой выпуклости интегрального функционала. Метод, разработанный на основе такого преобразования, назовем методом «выпуклого преобразования».

Если найдено решение обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации (12)-(13), то, согласно формулам (4),(8)-(11), нетрудно определить решение нелинейно-квадратичной задачи оптимизации (1)-(3),(5). Таким образом, при выполнении условия (8) достаточно исследовать вопросы разрешимости обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации.

Пусть в (13) вектор-функция $\sigma[t,q]$, по переменной $q = \{q_1, q_2\}$ является выпуклой ($\forall t \in [0,T]$). Тогда обобщенная линейно-квадратичная задача оптимизации (при ее разрешимости) не может иметь более одного решения. При этом условия оптимальности имеют вид

$$2\beta\eta[t,q(t)] = \int_Q g^*(x)\omega(t,x)dx, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial \eta_1[t,q]}{\partial q_1} > 0, \quad \left| D\left(\frac{\eta}{q}\right) \right| > 0, \qquad (15)$$

где $\eta[t,q(t)] = \{\eta_1[t,q(t)], \eta_2[t,q(t)]\}$, $\eta_i[t,q(t)] = \sigma^*[t,q(t)]\dfrac{\partial \sigma}{\partial q_i}$, $i = 1,2$.

Из равенства (14), с учетом решений краевых задач (1)-(3) и (7), относительно оптимального управления q(t) получим нелинейное интегральное уравнение

$$\beta\eta[t,q(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(T,t)\int_0^T G_n(T,\tau)q(\tau)d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(T,t)h_n, \qquad (16)$$

где

$$G_n(T,t) = \Phi_n(T-t)g_n, \; h_n = \xi_n - \Phi_n(T)\psi_n.$$

Замечание 1.3. Если вектор-функция $F[t,z(t)]$в окрестности точки $(t^*, z(t^*))$, $t^* \in [0,T]$, удовлетворяет следующим условиям

$$F[t^*, z(t^*)] = 0, \quad \left| D\left(\frac{F}{z}\right) \right| \neq 0, \qquad (A)$$

то согласно общеизвестной теореме о существовании и единственности неявной функции, в окрестности точки $(t^*, z(t^*))$, $t^* \in [0,T]$, из равенства $F[t,z(t)] = 0$, вектор-функция z(t) определяется однозначно.

Если положить

$$\eta[t,q(t)] = \upsilon(t), \qquad (17)$$

то, согласно (15) и замечанию 1.3, отсюда однозначно определяется q(t), т.е. существует взаимно однозначное ($\forall t \in [0,T]$) отображение $\mu : H^2(0,T) \to H^2(0,T)$, такое, что

$$q(t) = \mu[t, \upsilon(t)]. \qquad (18)$$

Согласно (17) и (18) нелинейное интегральное уравнение (16) можно переписать в следующей операторной форме

$$\upsilon(t) = G[\upsilon(t)], \qquad (19)$$

где оператор $G[\cdot]$ действует по формуле

$$G[\upsilon(t)] = \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)\left[h_n - \int_0^T G(T,\tau)\mu[\tau, \upsilon(\tau)d\tau\right]$$

и отображает гильбертово пространство $H^2(0,T)$ в себя.

Доказано, что если вектор-функция $\mu[t,\upsilon(t)]$ по функциональному аргументу υ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, то оператор $G[\cdot]$ при выполнении условия

$$C^2TL\|g(x)\|_{H^2}^2 < \beta, \quad C - \text{const} \qquad (20)$$

является сжимающим и нелинейное интегральное уравнение (19) в пространстве $H^2(0,T)$ имеет единственное решение $\upsilon^0(t)$. Это решение подставляется в (18) и по формуле

$$q^0(t) = \mu[t, \upsilon^0(t)]$$

определяется оптимальное управление.

В формуле (4) заменяя $f(t,u(t))$ на $q^0(t)$ получим решение краевой задачи (12) $V^0(t,x)$ соответствующее оптимальному управлению. Подставляя $q^0(t)$ и $V^0(t,x)$ в (13) вычисляется минимальное значение функционала $J(q^0)$. Полученные результаты сформулированы в виде теоремы (теорема 1.3).

При построении приближенного решения обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации рассматривается «усеченное» нелинейное интегральное уравнение

$$\upsilon^k(t) = G^k[\upsilon^k(t)], \qquad (21)$$

где

$$G^k[\upsilon^k(t)] = \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{k} G_n(T,t)\left[h_n - \int_0^T G_n(T,\tau)\mu[\tau,\upsilon^k(\tau)]d\tau\right],$$

которое решается методом последовательных приближений. При выполнении условия (20) оно имеет единственное решение $\upsilon^k(t)$, m-е приближение которого при любом фиксированном k=1,2,3,…, определяется по формуле

$$\upsilon^k_m(t) = G^k[\upsilon^k_{m-1}(t)], \quad m = 1,2,3,...,$$

где $\upsilon^k_0(t)$ - произвольный элемент пространства $H^2(0,T)$. Приближенное решение $\upsilon^k_m(t)$, при любом фиксированном k=1,2,3,…, удовлетворяет оценке

$$\left\|\upsilon^k(t) - \upsilon^k_m(t)\right\|_{H^2} \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\left\|G^k[\upsilon_0(t)] - \upsilon_0(t)\right\|_{H^2}, \ m = 1,2,3,..., \qquad (22)$$

где

$$\alpha = \frac{C^2TL\|g(x)\|^2_{H^2}}{\beta} < 1.$$

Решение $\upsilon^k(t)$ нелинейного интегрального уравнения (21) называется k-м приближением решения $\upsilon^0(t)$ нелинейного интегрального уравнения (19). Доказано, что оно удовлетворяет оценке

$$\left\|\upsilon^0(t) - \upsilon^k(t)\right\|_{H^2} \le \frac{M(k+1)}{\beta - C^2TL\|g(x)\|^2_{H^2}}. \qquad (23)$$

Решение $\upsilon^k_m(t)$ называется k,m-м приближением решения $\upsilon^0(t)$ нелинейного интегрального уравнения (19) и удовлетворяет оценке

$$\left\|\upsilon^0(t) - \upsilon^k_m(t)\right\|_{H^2} \le \left\|\upsilon^0(t) - \upsilon^k(t)\right\|_{H^2} + \left\|\upsilon^k(t) - \upsilon^k_m(t)\right\|_{H^2} \le$$

$$\le \frac{M(k+1)}{\beta - C^2TL\|g(x)\|^2_{H^2}} + \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\left\|G^k[\upsilon_0(t)] - \upsilon_0(t)\right\|_{H^2}.$$

Отсюда и из оценок (22) и (23) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty}\upsilon^k_m(t) = \lim_{k\to\infty}\upsilon^k(t) = \upsilon^0(t).$$

При подстановке решений $\upsilon^k_m(t)$ и $\upsilon^k(t)$ в формулу (18) будут найдены соответственно k,m-е приближение

$$q^k_m(t) = \mu[t,\upsilon^k_m(t)], \quad k,m = 1,2,3,...$$

и k-е приближение

$$q^k(t) = \mu[t,\upsilon^k(t)], \quad k = 1,2,3,...$$

оптимального управления $q^0(t)$.

Доказаны следующие оценки

$$\left\|q^k(t) - q^k_m(t)\right\|_{H^2} \le \frac{L\alpha^m}{1-\alpha}\left\|G^k[\upsilon_0(t)] - \upsilon_0(t)\right\|_{H^2},$$

$$\left\|q^0(t) - q^k(t)\right\|_{H^2} \le \frac{LM(k+1)}{\beta - C^2TL\|g(x)\|^2_{H^2}},$$

из которых следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty}q^k_m(t) = \lim_{k\to\infty}q^k(t) = q^0(t).$$

Для решений $V^k_m(t,x)$ и $V^k(t,x)$ краевой задачи (12), соответствующие управлениям $q^k_m(t)$ и $q^k(t)$, доказаны следующие оценки

$$\left\|V^k(t,x) - V^k_m(t,x)\right\|_{H^2} \le LTC\|g(x)\|_{H^2}\frac{\alpha^m}{1-\alpha}\left\|G^k[\upsilon_0(t)] - \upsilon_0(t)\right\|_{H^2},$$

$$\left\|V^0(t,x) - V^k(t,x)\right\|_{H^2} \le M_1(k+1),$$

из которых следует сходимость приближенных решений т.е.

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty}V^k_m(t,x) = \lim_{k\to\infty}V^k(t,x) = V^0(t,x).$$

При условии, что вектор-функция $\sigma[t,q]$ по аргументу q удовлетворяет условию Липшица с постоянной p_0 для значений $J(q^k_m)$ и $J(q^k)$ функционала $J(q^0)$ доказаны следующие оценки

$$\left|J(q^k) - J(q^k_m)\right| \le C_1L\frac{\alpha^m}{1-\alpha}\left\|G^k[\upsilon_0(t)] - \upsilon_0(t)\right\|_{H^2},$$

$$\left|J(q^0) - J(q^k)\right| \le \overline{C}_1L\frac{M(k+1)}{\beta - C^2T\|g(x)\|^2_{H^2}} + 2\overline{M}(k+1),$$

где $C_1, \overline{C}_1$ - положительные постоянные. Из этих оценок следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty}J(q^k_m) = \lim_{k\to\infty}J(q^k) = J(q^0).$$

Полученные результаты сформулированы в виде теоремы (теорема 1.4).

При исследовании разрешимости обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации выделен класс К функций «квадратных аргументов», заслуживающих внимания тем, что при решении задачи управления оптимальное управление $q^0(t)$ определяется как решение линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-рода и для его разрешимости не требуется выполнения тех условий (например, ограничения на норму матричной функции g(x), условие сжатия и т.д.), которые потребовались для разрешимости обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации в общем случае. В этом классе компоненты

$\sigma_1[t,q(t)], \sigma_2[t,q(t)]$ вектор-функции $\sigma[t,q(t)]$ удовлетворяют нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка следующего вида

$$D^*\left(\frac{\sigma}{q}\right)\sigma[t,q(t)] = q(t). \qquad (24)$$

Доказано, что множество K решений уравнения (24) не пусто. Для задач класса K оптимальное управление $q^0(t)$ определяется как единственное решение линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-рода

$$\beta q(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(\tau,t)\int_0^T G_n(T,\tau)q(\tau)d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(T,t)h_n.$$

Указаны алгоритмы построения как точного $(q^0(t), V^0(t,x), J(q^0))$, так приближенного $(q^m(t), V^m(t,x), J(q^m))$ решения обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации и доказана сходимость приближенного решения к точному по норме соответствующих пространств (теорема 1.7).

В параграфе 1.5 рассматривается нелинейно-квадратичная задача оптимизации с распределенным управлением, которая может быть преобразована к обобщенной линейно-квадратичной задаче оптимизации с распределенным управлением $u(t,x) \in H^2(Q_T)$, где на множестве решений краевой задачи

$$\begin{aligned} &V_t + AV_x = u(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \\ &V(0,x) = \psi(x) \in H(Q), \quad x \in Q, \\ &V_2(t,0) = 0, \quad V_2(t,l) = 0, \quad 0 < t \le T \end{aligned} \qquad (25)$$

требуется минимизировать обобщенный квадратичный функционал

$$J(u) = \int_0^T\int_Q \left\{\|V(t,x) - \xi(t,x)\|^2 + \beta\|p[t,x,u(t,x)]\|^2\right\}dxdt, \quad \beta > 0. \qquad (26)$$

В этой задаче оптимизации процессом нужно управлять так, чтобы состояние управляемого процесса с течением времени протекало в квадратичном приближении максимально близко к заданному режиму $\xi(t,x) = \{\xi_1(t,x), \xi_2(t,x)\} \in H^2(Q_T)$.

Условия оптимальности в обобщенной линейно-квадратичной задаче оптимизации (25)-(26) состоит из соотношений

$$2\beta\eta[t,x,u(t,x)] = \omega(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \qquad (27)$$

$$\frac{\partial\eta_1(t,x,u)}{\partial u_1} > 0, \quad \left|D\left(\frac{\eta}{u}\right)\right| > 0,$$

где

$$\eta(\cdot) = \{\eta_1(\cdot), \eta_2(\cdot)\}, \ \eta_i[t,x,u(t,x)] = p^*[t,x,u(t,x)]\frac{\partial p[t,x,u]}{\partial u_i}, \ i = 1,2,$$

вектор-функция $\omega(t,x) = \{\omega_1(t,x), \omega_2(t,x)\}$ является единственным обобщенным решением краевой задачи

$$\begin{aligned} &\omega_t + A^*\omega_x = 2[V(t,x) - \xi(t,x)], \ (t,x) \in Q_T, \\ &\omega(T,x) = \theta, \quad x \in Q, \\ &\omega_2(t,0) = 0, \omega_2(t,l) = 0, \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Согласно (27) оптимальное управление $u^0(t,x)$ определяется как решение нелинейного интегрального уравнения

$$\beta\eta[t,x,u(t,x)] + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\int_Q Ш_n(t,x,\tau,z)u(\tau,z)dzd\tau = h(t,x),$$

которое при выполнении условия

$$C^4T^2L < \beta$$

имеет единственное решение в гильбертовом пространстве $H^2(Q_T)$.

Построено решение $V^0(t,x)$ краевой задачи (25) и получена формула для вычисления минимального значения функционала (26) $J(u^0)$ соответствующие оптимальному управлению $u^0(t,x)$.

Указан алгоритм построения приближенного решения обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации (25)-(26) и получены следующие оценки

$$\|u^0(t,x) - u_m^k(t,x)\|_{H^2} \le L\left(\frac{\alpha^m}{1-\alpha}\|Ш^k[\upsilon_0(t,x)] - \upsilon_0(t,x\|_{H^2} + \frac{2CT\gamma(k+1)}{\beta - C^4T^2L}\right),$$

$$\|V^0(t,x) - V_m^k(t,x)\|_{H^2} \le CTL\frac{\alpha^m}{1-\alpha}\|Ш^k[\upsilon_0(t,x)] - \upsilon_0(t,x)\|_{H^2} +$$

$$+\left\{2\frac{C^3T^3L\gamma(k+1)}{\beta - C^4T^2L} + \gamma_0(k+1)\right\}^{1/2};$$

$$|J(u^0) - J(u_m^k)| \le C_1\|u^0(t,x) - u^k(t,x)\|_{H^2} + \gamma_1(k+1) +$$

$$+ C_0L\frac{\alpha^m}{1-\alpha}\|Ш^k[\upsilon_0(t,x)] - \upsilon_0(t,x)\|_{H^2},$$

где $\upsilon_0(t,x)$ - произвольный элемент пространства $H(Q_T)$;

$$Ш^k[\upsilon(t,x)] = \frac{1}{\beta}\left(h(t,x) - \sum_{n=1}^{k}\int_0^T\int_Q Ш_n(t,x,\tau,z)u(\tau,z)dzd\tau\right),$$

из которых следует сходимость приближенного решения задачи оптимизации.

В этом же параграфе дано решение задачи управления конечным состоянием управляемого процесса, т.е. решение обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации, где на множестве решений краевой задачи (25) минимизируется функционал

$$J(u) = \int_Q\|V(T,x) - \xi(x)\|^2 dx + \beta\int_0^T\int_Q\|p[t,x,u(t,x)]\|^2 dxdt, \quad \beta > 0.$$

В параграфах 1.6 и 1.7 исследованы вопросы разрешимости нелинейно-квадратичной задачи синтеза оптимального управления: среди допустимых управлений $u(t) \in H^2(0,T)$ требуется найти такое $u^0(t) = u^0\left[t, V^0(t,x)\right]$ (как функционал), где $V^0(t,x)$ решение краевой задачи (1)-(3) при $u(t) = u^0(t)$, для которого функционал (5) принимает наименьшее возможное значение.

При исследовании, в частности, при выводе уравнения Беллмана, была использована методика профессора А.И. Егорова, разработанная на основе принципа оптимальности Беллмана для управляемых систем, описываемых уравнениями в частных производных.

Для функционала

$$S[t, V(t,x)] = \min_{\substack{u(\tau)\in P \\ t\le\tau\le T}} \left\{ \int_Q \|V(T,x) - \xi(x)\|^2 dx + \beta \int_t^T \|p(\tau, u(\tau))\|^2 d\tau \right\}, \quad \beta > 0$$

получено уравнение Беллмана

$$-\frac{\partial S[t,V]}{\partial t} - \int_Q m_x^*(t,x) A V(t,x) dx + \left(m^*(t,x) A V(t,x)\right)_{x=0}^{x=1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \min_{u\in P} \left\{ \beta \|p[t,u(t)]\|^2 + \int_Q m^*(t,x) g(x) f(t,u(t)) dx \right\}$$

с дополнительными условиями

$$S[t, V(t,x)] \ge 0, \; S[T, V(T,x)] = \int_Q \|V(T,x) - \xi(x)\|^2 dx,$$

где символ $\Leftrightarrow$ означает равенство, справедливое почти при всех $t \in [0,T]$, а вектор-функция $m(t,x) = \{m_1(t,x), m_2(t,x)\}$ является градиентом функционала $S[t,V]$.

Оптимальное управление $u^0(t)$ должно удовлетворять условиям

$$2\beta D^*\left(\frac{p}{u}\right) p(t,u) + D^*\left(\frac{f}{u}\right) \int_Q g^*(x) m(t,x) dx = \theta, \tag{28}$$

$$\overline{\Pi}_{u_1u_1} > 0, \quad \overline{\Pi}_{u_1u_1} \cdot \overline{\Pi}_{u_2u_2} - \overline{\Pi}^2_{u_1u_2} > 0, \tag{29}$$

где

$$\overline{\Pi}_{u_iu_j} = \frac{\partial^2 f^*}{\partial u_i \partial u_j} \int_Q g^*(x) m(t,x) dx + 2\beta \left(\frac{\partial p}{\partial u_i} \frac{\partial p}{\partial u_j} + p^*(t,u) \frac{\partial^2 p}{\partial u_i \partial u_j} \right), \quad i,j = 1,2,$$

которые называются условиями оптимальности в квадратичной задаче синтеза при управлении колебаниями в линиях передач.

Поскольку условия оптимальности (28)-(29) содержат частные производные первого порядка (по аргументу u) вектор-функций p(t,u), p(t,u) и градиента m(t,x) функционала S[t,V], конкретный вид которого определяется лишь после того, как будет задан функционал S[t,V], то вопросы разрешимости нелинейно-квадратичной задачи синтеза, который тесно связан с вопросами разрешимости задачи Коши-Беллмана, при произвольно заданных вектор-функций f(t,u(t)) и p(t,u(t)) является довольно сложной задачей.

В случае, когда вектор-функция f(t,u) удовлетворяет условию (8) нелинейно-квадратичная задача синтеза может быть преобразована к обобщенной

линейно-квадратичной задаче вида (12)-(13), где оптимальное управление $q^0(t)$ следует находить как функционал от состояния управляемого процесса V(t,x). При этом условия оптимальности определяются следующими соотношениями

$$2\beta\eta[t, q(t)] + \int_Q g^*(x) m(t,x) dx = \theta, \tag{30}$$

$$\frac{\partial \eta_1[t,q]}{\partial q_1} > 0, \quad \left| D\left(\frac{\eta}{q}\right) \right| > 0, \tag{31}$$

где

$$\eta[t, q(t)] = \begin{pmatrix} \eta_1[t, q(t)] \\ \eta_2[t, q(t)] \end{pmatrix} = D^*\left(\frac{\sigma}{q}\right) \sigma[t, q(t)].$$

В обобщенной линейно-квадратичной задаче синтеза из соотношения (30), согласно (31), управление $q^0(t)$ определяется однозначно, т.е. существует взаимно однозначное ($\forall t \in [0,T]$) отображение $\mu[\cdot]$ такое, что

$$q^0(t) = \mu\left[t, \int_Q g^*(x) m(t,x) dx \right]$$

и соответствующая задача Коши-Беллмана имеет вид

$$-\frac{\partial S[t,V]}{\partial t} - \int_Q m_x^*(t,x) A V(t,x) dx + \left(m^*(t,x) A V(t,x)\right)_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \beta \left\| \sigma\left[t, \mu\left(t, \int_Q g^*(x) m(t,x) dx \right) \right] \right\|^2 +$$

$$+ \int_Q m^*(t,x) g(x) \cdot \mu\left(t, \int_Q g^*(x) m(t,x) dx \right) dx, \tag{32}$$

$$S[t, V(t,x)] \ge 0, \quad S[T, V(T,x)] = \int_Q \|V(T,x) - \xi(x)\|^2 dx. \tag{33}$$

Методика решения задачи Коши-Беллмана вида (32)-(33), при произвольно заданной вектор-функции $\sigma[t,q(t)]$, не достаточно разработана. Однако, если компоненты $\sigma_i[t,q(t)], i = 1,2$, вектор-функции $\sigma[t,q(t)]$ удовлетворяют системе нелинейных дифференциальных уравнений (24), т.е. если $\sigma[t,q(t)] \in K$, то уравнение Беллмана (32) упрощается и задача Коши-Беллмана (32)-(33) допускает решение в виде квадратичного функционала

$$S[t,V] = \int_Q \int_Q V^*(t,x) \overline{R}(t,x,z) V(t,z) dz dx + \int_Q V^*(t,x) \overline{\varphi}(t,x) dx + r(t), \tag{34}$$

где матрица $\overline{R}(t,x,z)$, вектор-функция $\overline{\varphi}(t,x)$ и скалярная функция r(t) полежат определению.

Используя разложения

$$\overline{R}(t,x,z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} X_n^*(x) R_{nk}(t) X_k(z) = X^*(x) R(t) X(z), \quad R_{nk}(t) = \left(R_{nk}^{ij}(t)\right)_{i,j=1,2},$$

$$\varphi(t,x) = \sum_{n,k=1}^{\infty} X_n^*(x)\varphi_n(t) = X^*(x)\varphi(t), \quad \varphi_n(t) = \{\varphi_{n1}(t), \varphi_{n2}(t)\},$$

доказано, что если бесконечномерную матрицу $R(t)$, бесконечномерную вектор-функцию $\varphi(t)$ и скалярную функцию $r(t)$, соответственно, определить как решение следующих задач

$$\dot{R}(t) = N_0^* R(t) + R(t)N_0 + \beta^{-1}R(t)gg^*R(t), \quad R(T) = E,$$

$$\dot{\varphi}(t) = \left(N_0^* + \beta^{-1}R(t)gg^*\right)\varphi(t), \quad \varphi(T) = -2\xi,$$

$$\dot{r}(t) = \frac{1}{4\beta}\|g^*\varphi(t)\|^2 - b^2(t), \quad r(T) = \|\xi\|^2,$$

то функционал (34) является единственным решением соответствующей задачи Коши-Беллмана и синтезирующее оптимальное управление определяется по формуле

$$q^0(t) = -\frac{1}{2\beta}\int_Q g^*(x)\left[2\int_Q R^0(t,x,z)V(t,z)dz + \varphi^0(t,x)\right]dx, \quad (35)$$

где $R^0(t,x,z)$ и $\varphi^0(t,x)$ - известны.

В краевой задаче (12) при замене управления $q(t)$, согласно (35), на $q^0(t)$ получается интегро-дифференциальная краевая задача, решение которой $V^0(t,x)$ описывает изменения оптимального поведения управляемого процесса. Минимальное значение функционала (13), согласно (34), вычисляется по формуле

$$J(q^0) = S[0, \psi(x)].$$

Далее разработан алгоритм построения приближенного решения обобщенной линейно-квадратичной задачи синтеза в классе K и доказана его сходимость к точному решению как по управлению, так и по функционалу.

Во второй главе «Нелинейное оптимальное управление упругими колебаниями», состоящей из трех параграфов, исследованы вопросы разрешимости нелинейно-квадратичной задачи оптимизации упругих колебаний и решены задача управления конечным состоянием управляемого процесса и задача управления процессом вдоль заданной траектории. Показано, что методы, разработанные в первой главе пригодны и для решения задачи оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми гиперболическими уравнениями второго порядка. Разработан алгоритм построения как точного так и приближенных решений обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации и доказана сходимость приближенных решений к точному решению по норме соответствующих пространств.

Объектом исследования является задача о нелинейном оптимальном управлении упругими колебаниями, описываемыми скалярной функцией $V(t,x_1,x_2,...,x_n)$, которая удовлетворяет в области Q_T гиперболическому уравнению

$$V_{tt} - AV = g(x)f(t,u(t)), \quad x = \{x_1,...,x_n\} \in Q, \; 0 < t \le T, \quad (36)$$

где оператор A, действующий по формуле

$$AV = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_j}\right) - c(x)V(t,x),$$

является эллиптическим, т.е. всюду в замкнутой области $\overline{Q} = Q + \gamma$ с кусочно-гладкой границей γ выполнено условие

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in H(Q), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j \ge \gamma_0 \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2, \quad \gamma_0 > 0$$

для любых $\alpha_i \in R$; $g(x) \in H(Q)$ - заданная функция; функция $f(t,u(t)) \in H(0,T)$ описывает изменения внешних воздействий и нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0,T)$; $c(x)$- ограниченная неотрицательная измеримая функция; T - фиксировано.

Вместе с уравнением (36) рассматриваются начальные

$$V(0,x) = \psi_1(x), \quad V_t(0,x) = \psi_2(x), \; x \in Q \quad (37)$$

и граничное

$$\Gamma V(t,x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_j}\cos(\vartheta, x_i) + a(x)V = 0, \; x \in \gamma, \; 0 < t \le T \quad (38)$$

условия, где $\psi_1(x) \in H_1(Q)$, $\psi_2(x) \in H(Q)$ - заданы; $a(x)$ - ограниченная неотрицательная измеримая функция, ϑ-внешняя нормаль к γ в точке $x \in \gamma$.

Если отображение $f: u \to f(t,u)$ является взаимно однозначным $(\forall t \in [0,T])$, то краевая задача (36) – (38) имеет единственное обобщенное решение

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)z_n(x),$$

$$V_n(t) = \psi_{n1}\cos\lambda_n t + \frac{\psi_{n2}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)g_n f(\tau,u(\tau))d\tau,$$

где $\psi_{n1}, \psi_{n2}, g_n$ - коэффициенты Фурье, соответственно функций $\psi_1(x), \psi_2(x), g(x)$; $\{z_n(x)\}$ - полная в $H(Q)$ ортонормированная система обобщенных собственных функций краевой задачи

$$Az(x) = -\lambda^2 z(x), \quad x \in Q,$$

$$\Gamma z(x) = 0, \quad x \in \gamma;$$

$\{\lambda_k\}$ - последовательность собственных значений, причем $\lambda_k \le \lambda_{k+1}$ и $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

На выбранном классе допустимых управлений $u(t) \in H(0,T)$ рассматривается функционал

$$J(u) = \int_Q \left\{[V(T,x) - \xi_1(x)]^2 + [V_t(T,x) - \xi_2(x)]^2\right\}dx + \beta\int_0^T p^2(t,u(t))dt, \beta > 0, \quad (39)$$

где $\xi_1(x), \xi_2(x) \in H(Q)$ – заданные функции, $p(t,u(t))$ – некоторая функция из пространства $H(0,T)$.

Пусть отображение $f: u \to f(t,u)$ взаимно однозначное $(\forall t \in [0,T])$ и функция $p(t,u)$ выпукла по переменной u. Если существуют элемент

$u^0(t)\in H(0,T)$, на котором функционал (39) достигает минимального значения, то он является единственным (лемма 2.1).

В параграфах 2.1-2.2 исследованы вопросы разрешимости нелинейной задачи программного оптимального управления, где требуется найти допустимое управление $u^0(t)$ и соответствующее ему решение $V^0(t,x)$ краевой задачи (36) – (38), на которых функционал (39) принимает наименьшее возможное значение.

На основе принципа максимума установлено, что необходимое и достаточное условия оптимальности приводят к дифференциальным соотношениям

$$2\beta p(t,u)p_u(t,u)=\int_Q g(x)\omega(t,x)f_u(t,u(t))dx,$$

$$\int_Q g(x)\omega(t,x)dx\cdot f_{uu}(t,u)-2\beta\left[p_u^2(t,u)+p(t,u)p_{uu}(t,u)\right]<0, \tag{40}$$

где функция $\omega(t,x)$ является единственным обобщенным решением краевой задачи

$$\begin{gathered}\omega_{tt}+A\omega=0, x\in Q,\quad 0\le t<T,\\ \omega(T,x)+2\left[V_t(T,x)-\xi_2(x)\right]=0,\\ \omega_t(T,x)-2\left[V(T,x)-\xi_1(x)\right]=0, x\in Q,\\ \Gamma\omega(t,x)=0, x\in\gamma, 0\le t<T.\end{gathered} \tag{41}$$

Соотношения (40), где дифференциальные равенство и неравенство в частных производных на оптимальном управлении $u^0(t)$ должны выполнятся одновременно, называются *условиями оптимальности* в нелинейно-квадратичной задаче программного оптимального управления при оптимизации упругих колебаний.

Оптимальное управление $u^0(t)$ следует находить из условий оптимальности (40), однако при произвольно заданных функций $f(t,u(t))$ и $p(t,u(t))$ эта задача не всегда однозначна разрешима. Поэтому исследован случай, когда функция $f(t,u)$ при любом $t\in[0,T]$ удовлетворяет условию

$$f_u(t,u)\ne 0. \tag{42}$$

Введем обозначение

$$f(t,u(t))=q(t). \tag{43}$$

Отсюда, в силу (42), управление $u(t)$ определяется однозначно, т.е. существует взаимно однозначное ($\forall t\in[0,T]$) отображение $\nu: H(0,T)\to H(0,T)$ такое, что

$$u(t)=\nu[t,q(t)]. \tag{44}$$

Тогда нелинейно-квадратичная задача оптимизации (36)-(38), (39) может быть преобразована к следующей обобщенной линейно-квадратичной задаче оптимизации: на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt}-AV=g(x)q(t), x\in Q, 0<t\le T,$$

$$V(0,x)=\psi_1(x), V_t(0,x)=\psi_2(x),\quad x\in Q,$$

$$\Gamma V(t,x)=0,\quad x\in\gamma,\quad 0<t\le T \tag{45}$$

требуется минимизировать обобщенный квадратичный функционал

$$J(q)=\int_Q\left\{\left[V(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_t(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\sigma^2[t,q(t)]dt, \beta>0, \tag{46}$$

где функции $\sigma(t,q(t))$ и $p(t,u(t))$, согласно (44), связаны соотношением

$$\sigma(t,q(t))=p\left[t,\nu(t,q(t))\right]=p(t,u(t)).$$

В силу однозначности указанного преобразования, используя решение обобщенной линейно-квадратичной задачи, легко получить решение нелинейно-квадратичной задачи оптимизации.

Пусть в (46) функция $\sigma[t,q]$ по переменной q является выпуклой ($\forall t\in[0,T]$). Тогда, как известно из первой главы, обобщенная линейно-квадратичная задача оптимизации (если существует ее решение) не может иметь более одного решения. Для задачи (45)-(46) условия оптимальности имеют вид

$$2\beta\eta[t,q(t)]=\int_Q g(x)\omega(t,x)dx,\quad \frac{\partial\eta(t,q)}{\partial q}>0, \tag{47}$$

где

$$\eta[t,q(t)]=\sigma[t,q(t)]\frac{\partial\sigma}{\partial q},$$

функция $\omega(t,x)$ - является обобщенным решением краевой задачи (41). Из (47) для оптимального управления $q^0(t)$ получено нелинейное интегральное уравнение

$$\beta\eta[t,q(t)]+\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(T,t)\int_0^T G_n(T,\tau)q(\tau)d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(T,t)h_n, \tag{48}$$

где

$$G_n(T,t)=\{G_{n1}(T,t),G_{n2}(T,t)\}, h_n=\{h_{n1},h_{n2}\},$$

$$G_{n1}(T,t)=g_n\cos\lambda_n(T-t), G_{n2}(T,t)=\frac{g_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t),$$

$$h_{n1}=\xi_{n2}-\psi_{n2}\cos\lambda_nT+\lambda_n\psi_{n1}\sin\lambda_nT,$$

$$h_{n2}=\xi_{n1}-\psi_{n1}\cos\lambda_nT-\frac{\psi_{n2}}{\lambda_n}\sin\lambda_nT,$$

которое исследовано по схеме изложенной в первой главе.

Согласно равенствам

$$\eta[t,q(t)]=\upsilon(t),\quad q(t)=\mu[t,\upsilon(t)]$$

уравнение (48) преобразуется к нелинейному интегральному уравнению

$$\upsilon(t)=\frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(T,t)\left(h_n-\int_0^T G_n(T,\tau)\mu[\tau,\upsilon(\tau)]d\tau\right), \tag{49}$$

которое, при выполнении условия сжатия

$$\alpha = \frac{B^2TL\|g(x)\|_H^2}{\beta} < 1,$$

однозначно разрешимо в гильбертовом пространстве H(0,T).

Оптимальное управление имеет вид

$$q^0(t) = \mu[t, \upsilon^0(t)],$$

где $\upsilon^0(t)$ решение уравнения (49), а соответствующее минимальное значение функционала (46) вычисляется по формуле

$$J(q^0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[-h_{n1} + \int_0^T G_{n1}(T,\tau)q^0(\tau)d\tau\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[-h_{n2} + \int_0^T G_{n2}(T,\tau)q^0(\tau)d\tau\right]^2\right\} + \beta\int_0^T \sigma[t, q^0(t)]dt.$$

Доказана однозначная разрешимость обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации (45)-(46) (теорема 2.2.). Указан алгоритм построения приближенного решения задачи оптимизации и доказана его сходимость к точному решению (теорема 2.3).

В параграфе 2.3 исследованы вопросы разрешимости задачи «слежения», т.е. нелинейно-квадратичной задачи оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный функционал

$$J(u) = \int_0^T\int_Q\left\{[V(t,x) - \xi_1(t,x)]^2 + [V_t(t,x) - \xi_2(t,x)]^2\right\}dx + \beta\int_0^T p^2[t,u(t)]dt, \beta > 0 \quad (50)$$

на множестве решений краевой задачи (36)-(38) при заданных функций

$$\xi_i(t,x) \in H(Q_T), i = 1,2; \quad \frac{\partial}{\partial t}\xi_2(t,x) \in H(Q_T).$$

При выполнении условия (42) эта задача преобразуется к обобщенной линейно-квадратичной задаче, для которой условия оптимальности получено в виде (47), где функция $\omega(t,x)$ является единственным обобщенным решением краевой задачи

$$\omega_{tt} - A\omega = 2\left\{AV(t,x) + g(x)q(t) - V(t,x) + \xi_1(t,x) - \frac{\partial \xi_2}{\partial t}\right\}, x \in Q, 0 \le t < T$$

$$\omega(T,x) = 0, \quad \omega_t(T,x) = 0, \quad x \in Q,$$

$$\Gamma\omega(t,x) = 0, \quad x \in \gamma, 0 \le t < T.$$

Оптимальное управление определяется по формуле

$$q^0(t) = \mu[t, \upsilon^0(t)].$$

Функция $\upsilon^0(t)$ является решением нелинейного интегрального уравнения

$$\upsilon(t) = \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} g_n\left[\hbar_n(t) - \int_0^T \overline{G}_n(t,s)\mu[s,\upsilon(s)]ds\right],$$

где

$$\overline{G}_n(t,s) = \begin{cases} g_n\left(1 + \dfrac{1}{\lambda_n^2}\right)\displaystyle\int_t^T \sin\lambda_n(\tau - t)\sin\lambda_n(\tau - s)d\tau, & 0 \le s \le t, \\ g_n\left[\left(1 + \dfrac{1}{\lambda_n^2}\right)\displaystyle\int_s^T \sin\lambda_n(\tau - t)\sin\lambda_n(\tau - s)d\tau - \dfrac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(s - t)\right], & t \le s \le T, \end{cases}$$

$$\hbar_n(t) = \int_t^T \sin\lambda_n(\tau - t)\left[(\xi_{n1}(\tau) - \dot{\xi}_{n2}(\tau)) - \left(\frac{1 + \lambda_n^2}{\lambda_n}\right)\left(\psi_{n1}\cos\lambda_n\tau + \frac{\psi_{n2}}{\lambda_n}\sin\lambda_n\tau\right)\right]d\tau,$$

которое, при выполнении условия

$$C_0TL\|g(x)\|_H^2 < \beta,$$

однозначно разрешимо в гильбертовом пространстве H(0,T).

Минимальное значение функционала (50) вычисляется по формуле

$$J(q^0) = \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[-r_{n1}(t) + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t - \tau)\cdot g_n q^0(\tau)d\tau\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[-r_{n2}(t) + \int_0^t \cos\lambda_n(t - \tau)g_n q^0(\tau)d\tau\right]^2\right\}dt + \beta\int_0^T \sigma^2[t, q^0(t)]dt.$$

Полученные результаты сформулированы в виде теоремы (теорема 2.4.).

Далее указан алгоритм построения приближенного решения обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации и доказана его сходимость к точному решению (теорема 2.5.).

В третьей главе «Нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами», состоящей из четырех параграфов, исследованы вопросы разрешимости нелинейно-квадратичной задачи оптимизации тепловых процессов, аналогичные задачам, которые были рассмотрены во второй главе. Разработан алгоритм построения точного и приближенного решений задачи оптимального управления тепловыми процессами и на примере решения одной задачи приведены результаты численных расчетов, подтверждающие теоретические выводы.

Объектом исследования является задача о нелинейном оптимальном управлении тепловыми процессами, описываемыми скалярной функцией $V(t,x_1,x_2,...,x_n)$, которая удовлетворяет в области Q_T параболическому уравнению

$$V_t - AV = g(x)f(t,u(t)), \quad x = \{x_1,...,x_n\} \in Q, \quad 0 < t \le T, \quad (51)$$

а на границе Q_T начальному

$$V(0,x) = \psi(x), \quad x \in Q, \quad (52)$$

и граничному

$$\Gamma V(t,x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)V_{x_j}\cos(\vartheta,x_i) + a(x)V(t,x) = 0, \quad x \in \gamma, 0 < t \le T \quad (53)$$

условиям, где оператор A, как и в уравнении (36), является эллиптическим в замкнутой области $\overline{Q} = Q + \gamma$, с кусочно-гладкой границей γ, $q(x) \in H(Q), \psi(x) \in H(Q)$ - заданные функции, $a(x)$ – ограниченная неотрицательная измеримая функция; ϑ - внешняя нормаль к γ в точке $x \in \gamma$; T – фиксировано.

Если отображение $f: u \to f(t,u)$ является взаимно однозначным ($\forall t \in [0,T]$), то краевая задача (51) – (52) имеет единственное обобщенное решение

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x) \left[e^{-\lambda_n t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} g_k f(\tau, u(\tau)) d\tau \right],$$

где ψ_n, g_n - коэффициенты Фурье, соответственно функций $\psi(x)$ и $g(x)$, $\{z_n(x)\}$ - полная в H(Q) ортонормированная система обобщенных собственных функций, $\{\lambda_n\}$ - соответствующая последовательность собственных значений.

На выбранном классе допустимых управлений $u(t) \in H(0,T)$ рассматривается функционал

$$J(u) = \int_Q [V(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T p^2(t, u(t)) dt, \quad \beta > 0, \tag{54}$$

где $\xi(x) \in H(Q)$ - заданная функция, p(t,u(t)) – некоторая функция из пространства H(0,T).

Пусть отображение $f: u \to f(t,u)$ взаимно однозначное ($\forall t \in [0,T]$) и функция p(t,u) выпукла по переменной u. Если существует элемент $u^0(t) \in H(0,T)$ на котором функционал (54) достигает минимального значения, то он является единственным (лемма 3.1).

В параграфах 3.1-3.2 исследованы вопросы разрешимости нелинейной задачи программного оптимального управления, где требуется найти допустимое управление $u^0(t)$ и соответствующее ему решение $V^0(t,x)$ краевой задачи (51) – (53), на которых функционал (54) принимает наименьшее возможное значение.

Необходимое и достаточное условия оптимальности управления u(t), полученное на основе принципа максимума, приводят к дифференциальным соотношениям

$$\begin{gathered} 2\beta p(t,u) p_u(t,u) - \int_Q g(x)\omega(t,x) dx \cdot f_u(t,u(t)) = 0, \\ \int_Q g(x)\omega(t,x) dx \cdot f_{uu}(t,u(t)) - 2\beta\left[p_u^2(t,u) + p(t,u) p_{uu}(t,u)\right] < 0, \end{gathered} \tag{55}$$

которые на оптимальном управлении должны выполнятся одновременно. Здесь $\omega(t,x)$ является единственным обобщенным решением краевой задачи

$$\begin{gathered} \omega_t + AV = 0, \quad x \in Q, 0 \le t < T, \\ \omega(T,x) + 2[V(T,x) - \xi(x)] = 0, x \in Q, \\ \Gamma\omega(t,x) = 0, x \in \gamma, \quad 0 \le t < T. \end{gathered} \tag{56}$$

В соотношениях (55) дифференциальные равенство и неравенство в частных производных вместе называются *условиями оптимальности* в нелинейно-

квадратичной задаче с программным управлением при оптимизации тепловых процессов.

Из условия оптимальности (55), при произвольно заданных функций f(t,u) и p(t,u), не всегда удается однозначно определить оптимальное управление $u^0(t)$. Поэтому нелинейно-квадратичная задача оптимизации исследована при выполнении условия

$$f_u(t,u) \ne 0 \tag{57}$$

для любого $t \in [0,T]$. Тогда согласно равенствам

$$f(t,u(t)) = q(t), \qquad u(t) = \nu[t, q(t)], \tag{58}$$

где $\nu: H^2(0,T) \to H^2(0,T)$ взаимно однозначное ($\forall t \in [0,T]$) отображение, нелинейно-квадратичная задача оптимизации (51)-(53), (54) преобразуется к обобщенной линейно-квадратичной задаче оптимизации, где требуется минимизировать обобщенный квадратичный функционал

$$J(q) = \int_Q \|V(T,x) - \xi(x)\|^2 dx + \beta \int_0^T \|\sigma^2[t, q(t)]\| dt, \beta > 0, \tag{59}$$

где функции $\sigma[t,q(t)]$ и $p[t,u(t)]$, согласно (58), связаны соотношением

$$\sigma[t,q(t)] = p[t, \nu(t,q(t))] = p[t,u(t)],$$

на множестве решений краевой задачи

$$\begin{gathered} V_t - AV = g(x)q(t), \quad x \in Q, \quad 0 < t \le T, \\ V(0,x) = \psi(x), \quad x \in Q, \\ \Gamma V(t,x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 < t \le T \end{gathered} \tag{60}$$

при заданной функции $\xi(x) \in H(0,T)$. Поскольку это преобразование однозначное, то, используя решение обобщенной линейно-квадратичной задачи (59)-(60), нетрудно получить решение исходной нелинейно-квадратичной задачи (51)-(53), (54).

Для обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации (59)-(60) условия оптимальности имеют вид (47), где функция $\omega(t,x)$ является единственным обобщенным решением краевой задачи (56). Относительно оптимального управления получено нелинейное интегральное уравнение

$$\beta\eta[t,q(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t) \int_0^T G_n(T,\tau) q(\tau) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t) h_n,$$

где

$$G_n(T,t) = g_n e^{-\lambda_n (T-t)}, \qquad h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n T}\psi_n,$$

которое, согласно равенствам

$$\eta[t,q(t)] = \upsilon(t), \qquad q(t) = \mu[t, \upsilon(t)],$$

приводится к виду

$$\upsilon(t) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)[h_n - \int_0^T G_n(T,\tau) \mu[\tau, \upsilon(\tau)] d\tau]. \tag{61}$$

Оптимальное управление определяется по формуле

$$q^0(t) = \mu[t, \upsilon^0(t)],$$

где $\upsilon^0(t)$ решение нелинейного интегрального уравнения (61), которое при выполнении условия

$$\lambda_n TL \|g(x)\|_H^2 < \beta,$$

однозначно разрешимо в гильбертовом пространстве $H(0,T)$.

Минимальное значение функционала (59), соответствующее оптимальному управлению $q^0(t)$, вычисляется по формуле

$$J(q^0) = \sum_{n=1}^{\infty}[-h_n + \int_0^T G_n(T,\tau)q^0(\tau)d\tau]^2 + \beta\int_0^T \sigma^2[t, q^0(t)]dt.$$

Однозначная разрешимость обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации сформулирована в виде теоремы (теорема 3.2). Разработан алгоритм построения приближенного решения обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации и доказана его сходимость к точному решению (теорема 3.3).

В параграфе 3.3. исследованы вопросы разрешимости задачи «слежения» при распределенном управлении тепловым процессом, т.е. обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации, где требуется минимизировать обобщенный квадратичный функционал

$$J(u) = \int_{Q_T}\{[V(t,x) - \xi(t,x)]^2 + \beta p^2[t,x,u(t,x)]\}dxdt, \beta > 0 \qquad (62)$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t - AV = u(t,x), \quad x \in Q, \quad 0 < t \le T,$$
$$V(0,x) = \psi(x), \quad x \in Q,$$
$$\Gamma V(t,x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 < t \le T$$

при заданной функции $\xi(t,x) \in H_1(Q_T)$.

Условия оптимальности имеют вид

$$2\beta\eta[t,x,u(t,x)] = \omega(t,x), \qquad \frac{\partial}{\partial u}\eta[t,x,u] > 0,$$

где

$$\eta[t,x,u(t,x)] = p[t,x,u(t,x)]\frac{\partial p}{\partial u};$$

функция $\omega(t,x)$ является единственным обобщенным решением краевой задачи

$$\omega_t + A\omega = 2[V(t,x) - \xi(t,x)], \quad x \in Q, \quad 0 \le t < T,$$
$$\omega(T,x) = 0, \quad x \in Q,$$
$$\Gamma\omega(t,x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 \le t < T.$$

Относительно оптимального управления получено нелинейное интегральное уравнение

$$\beta\eta[t,x,u(t,x)] = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x)\left[h_n(t) - \int_0^T G_n(t,s)\int_Q z_n(y)u(s,y)dyds\right],$$

где

$$G_n(t,s) = \begin{cases} \int_t^T e^{-\lambda_n[2\tau-(t+s)]}d\tau, & 0 \le s \le t, \\ \int_s^T e^{-\lambda_n[2\tau-(t+s)]}d\tau, & t \le s \le T, \end{cases}$$

которое, согласно равенствам

$$\eta[t,x,u(t,x)] = \upsilon(t), \qquad u(t,x) = \mu[t,x,\upsilon(t,x)], \qquad (63)$$

преобразуется к нелинейному интегральному уравнению

$$\upsilon(t,x) = \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} z_n(x)\left[h_n(t) - \int_0^T G_n(t,s)\int_Q z_n(y)\mu[s,y,\upsilon(s,y)]dyds\right].$$

Это уравнение при выполнении условия

$$TL\sqrt{\lambda_0 T} < \beta,$$

однозначно разрешимо в гильбертовом пространстве $H(Q_T)$ и имеет единственное решение $\upsilon^0(t,x)$.

Согласно (63) оптимальное управление определяется по формуле

$$u^0(t,x) = \mu[t,x,\upsilon^0(t,x)],$$

а соответствующее минимальное значение функционала (62) вычисляется по формуле

$$J(u^0) = \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left[-r_n(t) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}u_n^0(\tau)d\tau\right]^2 + \beta\int_{Q_T} p^2[t,x,u^0(t,x)]\}dxdt .$$

Однозначная разрешимость обобщенной линейно-квадратичной задачи «слежения» сформулирована в виде теоремы (теорема 3.4).

Далее разработан алгоритм построения приближенного решения задачи оптимизации и доказана его сходимость к точному решению (теорема 3.5).

В приложении рассмотрена одна (модельная) нелинейно-квадратичная задача оптимального управления тепловым процессом, которая преобразована к обобщенной линейно-квадратичной задаче и решена методом, разработанным в диссертации. Составлена программа численных расчетов и приведены результаты вычислений, которые подтверждают достоверность теоретических результатов, полученных по разработанному методу.

Также приведен другой пример, где показано, что нелинейные задачи оптимального управления весьма чувствительны к изменениям исходных данных. Построено разрывное оптимальное управление в виде кусочно-постоянной функции, которая, в зависимости от свойств заданных функций, может иметь конечное или счетное число точек переключений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование нелинейно-квадратичных задач оптимизации систем с распределенными параметрами, на примере управления колебаниями в линиях передач, упругими колебаниями и тепловыми процессами показывает, что вопросы о разрешимости нелинейных задач теории оптимального управления в общем случае является достаточно сложными. В диссертации основное внимание было уделено разработке конструктивных методов решения нелинейных задач оптимизации и

- найдены условия разрешимости нелинейно-квадратичных и обобщенных линейно-квадратичных задач оптимального управления колебаниями в линиях передач, упругими колебаниями и тепловыми процессами;
- разработаны алгоритмы построения сколь угодно точных решений нелинейно-квадратичных и обобщенных линейно-квадратичных задач оптимизации.

Отметим, что разработанный метод решения нелинейно-квадратичных и обобщенных линейно-квадратичных задач оптимизации, на примере решения задачи управления колебаниями в линиях передач, упругими колебаниями и тепловыми процессами, является конструктивным и может быть использован для дальнейшего развития и усовершенствования методов качественного исследования и конструктивных методов решения нелинейных задач теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Выражаю искреннюю благодарность научному консультанту академику НАН Кыргызской Республики А.А. Борубаеву за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

1. Керимбеков А. К теории решения задачи синтеза для управляемых колебательных систем // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1985.- Вып.18. - С.342-346.
2. Керимбеков А. Точечная управляемость электромагнитных колебаний // Тез. докл. Всесоюз. Науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы моделирования и управления систем с распределенными параметрами». – Киев, 1987. - С.75.
3. Керимбеков А. Об одной задаче оптимального управления электромагнитными колебаниями // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1988.- Вып.21. - С.298-302.
4. Керимбеков А. Об одной задаче оптимального управления упругими колебаниями // Численные методы для высокопроизводительных систем. Тез. докл. 3-й школы-семинара – Фрунзе: Илим, 1988. - С. 39.
5. Керимбеков А. О решениях задачи быстродействия в процессе успокоения колебаний // Дифференц. уравнения и их приложения. Тез. докл. Республиканской научной конференции. – Фрунзе, 1989. - С. 109.
6. Керимбеков А. О некоторых решениях задачи быстродействия // Исслед. по теории и приближенным методам решения дифференц. и интегро-дифференц. уравнений. - Фрунзе, 1989. - С. 30-33.
7. Керимбеков А. Точечная управляемость в задачах быстродействия // Оптимальный синтез в системах с распределенными параметрами. – Фрунзе: Илим, 1989. - С. 118-124.
8. Керимбеков А. Точечная управляемость волновых процессов и ее следствия // Abstracts of Invited Lectures and short Communications delivered at the second International colloquium on differential equations. – Plovdiv: 1991. - P. 139.
9. Керимбеков А. Оптимальное управление упругими колебаниями // Тез. докл. Междунар. науч. конф. – Ташкент: Изд-во ФАН, 1993. - С. 92.
10. Керимбеков А., Байшериева Р., Аскулова З. О единственности решений нелинейных уравнений типа Риккати // Сб. науч. тр. КГПУ им. И. Арабаева. – Бишкек, 1995.- Вып.1. - С. 22-25.
11. Керимбеков А. К теории нелинейных интегральных уравнений // Мат-лы IV Республиканской науч.-метод. конф. «Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики», – Бишкек, 1996.- Ч. II. - С.67-69.
12. Керимбеков А. Математические методы оптимального управления электромагнитными колебаниями. – Бишкек: Изд-во КГПУ им. И. Арабаева, 1997. - 112 с.
13. Керимбеков А., Эсенканова А. Об одной задаче оптимизации с нелинейным управлением // Сб. науч. тр. КГПУ им. И. Арабаева. – Бишкек, 1997.-Вып.2. - С. 30-35.
14. Керимбеков А., Конокбаева Д. Об одной задаче оптимизации колебательных процессов // Там же – С. 36-41.

15. Керимбеков А., Байшериева Р. Об одной задаче оптимизации тепловых процессов//.Там же - С. 42-46.
16. Керимбеков А. Нелинейное оптимальное управление системами с распределенными параметрами // Мат-лы междунар. науч.-практ. конф. «Проблемы вычислительной математики и информационных технологий». — Алматы, 1999. - С. 244.
17. Керимбеков А. Нелинейное оптимальное управление электромагнитными колебаниями // Наука и новые технологии. -1999.- №2. - С. 29-35.
18. Керимбеков А. Нелинейное оптимальное управление упругими колебаниями // Изв. НАН КР.-1999.-№2.-С. 5-10.
19. Керимбеков А. Нелинейное распределенное оптимальное управление электромагнитными колебаниями // Современные технологии образования в высшей школе. - Бишкек, 1999,- Ч. 1. - С. 248-257.
20. Керимбеков А. Приближенное решение нелинейной задачи синтеза для управляемых колебательных процессов // Проблемы автоматики и управления. - Бишкек, 1999. - С. 85-94.
21. Керимбеков А. Нелинейное распределенное оптимальное управление упругими колебаниями // Вестн. КГНУ. Серия естеств.-техн. науки. - Бишкек, 1999.-Ч. II. - С. 96-104.
22. Керимбеков А. Нелинейное распределенное оптимальное управление тепловыми процессами // Там же - С. 71-78.
23. Керимбеков А., Эсенканова А. Нелинейное точечное оптимальное управление электромагнитными колебаниями // Там же - С. 86-91.
24. Керимбеков А. О синтезе нелинейного оптимального управления тепловыми процессами // Сб. науч. тр. Бишкек: БВКК, 1999,- Вып.1. - С. 308-316.
25. Керимбеков А. О синтезе нелинейного оптимального управления электромагнитными колебаниями // Там же - С. 317-329.
26. Керимбеков А. О разрешимости нелинейной задачи оптимизации колебательных процессов// Вестн. КГНУ. Тр. междунар. конф. «Проблемы математики и информатики в XXI веке». Серия 3. Естеств.-техн.науки: Математические науки. Информатика и информационные технологии. - Бишкек, 2000.-Вып.4. -С. 237-241.
27. Керимбеков А. О разрешимости нелинейной задачи синтеза при оптимизации систем с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. Докл. междунар. конф. - Бишкек: Илим, 2000. - С. 94-100.
28. Керимбеков А. О разрешимости одной нелинейной задачи оптимизации тепловых процессов // Проблемы автоматики и управления. - Бишкек: Илим, 2000. - С. 151-158.
29. Керимбеков А. Нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами // Наука и новые технологии. - 2000.- №2. - С. 30-35.
30. Керимбеков А. О синтезе нелинейного оптимального управления упругими колебаниями // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2000,- Вып.29. - С. 354-389.

31. КептЪекоу А. СопПпиоиз тар т 1Ье попНпеаг 1азк оГор11т1га1юп о1"озсШа{огу ргосеззез // Вестн. КГНУ - 2001. Серия 3. Естеств.-техн. науки. - Бишкек, 2001.- Вып. 5.-С. 150-154.
32. Керимбеков А. О разрешимости нелинейной задачи оптимизации упругих колебаний // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2001.- Вып. 30. - С. 266-272.
33. Керимбеков А. Приближенное решение задачи оптимизации упругих колебаний // Там же - С. 273-277.
34. Керимбеков А. Приближенное решение нелинейной задачи оптимизации колебательных процессов//Вестн. КГНУ-2001. Серия 3. Естеств.-техн. науки. - Бишкек, 2001.- Вып. 6. - С. 168-173.
35. Керимбеков А. Приближенное решение нелинейной задачи оптимизации тепловых процессов // Проблемы автоматики и управления. - Бишкек: Илим, 2001.-С. 58-65.
36. Керимбеков А. Непрерывное отображение в нелинейной задаче оптимизации тепловых процессов // Вестн. КГНУ-2001. Серия 3. Естеств.-техн. науки. - Бишкек, 2001,- Вып. 7. - С. 26-30.
37. Керимбеков А., Джээнбаева Г., Шаршенова И. О разрешимости нелинейной задачи оптимизации тепловых процессов при граничном управлении // Вестн. КГНУ-2001. Серия 3. Естеств.-техн. науки. -Бишкек, 2001.-Вып. 7. - С. 30-34.
38. Джээнбаева Г., Керимбеков А. О разрешимости нелинейной задачи оптимизации с распределенным управлением // Вестн. КГНУ. Серия 5. Физ. и мат. науки. Тр. молодых ученых. - Бишкек, 2001.- Вып. 3. - С. 55-59.
39. Трубленкова А., Керимбеков А. Приближенное решение оптимизации упругих колебаний с нелинейным управлением и квадратичным критерием качества // там же-С. 111-116.
40. КептЪекоу А. Оп 5о1уаЫН1у оГпопПпеаг орйппга^оп ргоЫет й>г Ьеа4 ргосеззез // СепегаПгес! зоПйопз ₁₁₁ соп!го1 ргоЫетз. Ргосее<Нп§з оГ 1Ье ₁п₁егпа₁юпа₁ Зутрозшт. Регез1ау|-2а1еззку, К.изз1а, аи§. 27-31, 2002. АЬз1гас1 оГ 1а1к5. ЯезеагсН СегПег оГ Соп1го1 Ргосеззез, Рго§гат Зуз1ет5 1пз1Ни1е, Киз81ап Асас1ету оГ8аспсез, 2002.-Р. 117-120.
41. Курманова С.Ч., Керимбеков А.К. Решение задачи синтеза с ортогональным разложением при оптимизации тепловых процессов // Вестн. КНУ им. Ж.Баласагына. Серия естеств.и техн. науки. Тр. молодых ученых.-Бишкек, 2002.- Вып. 3.-С. 20-23.
42. Керимбеков А. Приближенное решение обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации упругих колебаний // Проблемы автоматики и управления.- Бишкек: Илим, 2002.-С. 48-55.

АННОТАЦИЯ

Керимбеков Акылбек

Жайылган параметрлүү сызыктуу системаларды оптималдуу сызыктуу эмес башкаруу

Урунттуу сөздөр: Гиперболалык жана параболалык теңдемелер, сызыктуу эмес (квадраттык функционалдуу) маселе, иймек функционал, оптималдуу башкаруу, Понтрягин максимум принциби, зарыл жана жетиштүү шарттар, сызыктуу эмес интегралдык теңдеме.

Диссертацияда жайылган параметрлүү системаларды оптималдуу башкаруунун (программа же синтез түрүндө) сызыктуу эмес маселелеринин жалгыз чыгарылышынын жашоо шарттары изилденген. Оптималдаштыруунун сызыктуу эмес (квадраттык функционалдуу) жана жалпыланган сызыктуу-квадраттык маселелерин чыгаруунун конструктивдүү жаңы ыкмалары табылган жана ал маселелердин чыгарылыштарынын тыгыз байланышын камсыз кылуучу шарттар тастыкталган. Ток жүргүзүлгөн зымдар арасындагы термелүүлөрдү, серпилгичтүү термелүүлөрдү жана жылуулук процесстерин башкаруу маселелерин чыгаруунун мисалында оптималдаштыруу маселесинин жакындаштырылган чыгарылыштарын табуучу алгоритм түзүлгөн жана жакындаштырылган чыгарылыштарынын так чыгарылышка жыйнала тургандыгы далилденген.

АННОТАЦИЯ

Керимбеков Акылбек

Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами

Ключевые слова: Гиперболические и параболические уравнения, нелинейно-квадратичная задача, выпуклый функционал, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, необходимое и достаточное условия, нелинейное интегральное уравнение.

В диссертации исследованы вопросы однозначной разрешимости нелинейно-квадратичной задачи оптимального управления (в виде программы и синтеза) системами с распределенными параметрами. Разработаны новые конструктивные методы решения нелинейно-квадратичной и обобщенной линейно-квадратичной задач оптимизации и найдены условия, при выполнении которых, между решениями этих задач существует тесная связь. На примере решения задачи управления колебаниям в линиях передач, упругими колебаниями и тепловыми процессами разработан алгоритм построения приближенного решения задачи оптимизации и доказана его сходимость к точному решению.

SUMMARY

Kerimbekov Akylbek

Nonlinear optimal control of linear systems with the distributed parameters

Key words: Hyperbolic and parabolic equations, nonlinear-quadratic problem, convex functional, optimal control, Pontryagin-type maximum principle, necessary and sufficient conditions, nonlinear integral equation.

In the dissertation questions of unique solvability of a nonlinear-quadratic problem of optimum control (as the program and synthesis) by systems with the distributed parameters are investigated. New constructive methods to solve approximately nonlinear-quadratic generalized linear-quadratic optimization problems are developed and conditions providing close correlation between solutions of these problems are found. As example of solving a problem of control to oscillations in lines of transfers, elastic oscillations and thermal processes an algorithm of construction of the approximate solution of a problem of optimization is developed and its convergence to the exact one is proved.

Отпечатано в типографии ОсОО «ЛИАРД»
Подписано к печати 24.06.2003
Объем 2,5 п.л.
Тираж 100 экз.
Формат 60x84/16 заказ №56