

Контрольный экземпляр

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ
Д 01.02.191

На правах рукописи

УДК 533.6.011.

ТУГАНБАЕВ Уланбек Мансурович

**ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
ТЕЧЕНИЙ В СОПЛАХ
И В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КАНАЛАХ**

**Специальность 01.02.05 — Механика жидкости,
газа и плазмы**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

БИШКЕК 2002

Диссертационная работа выполнена в Кыргызском аграрном университете им. К.И. Скрябина

Научный консультант: член-корреспондент НАН КР, доктор физико-математических наук, профессор **Бийбосунов И.Б.**

Официальные оппоненты: член-корреспондент НАН Республики Казахстан, доктор технических наук, профессор **Ершин Ш.А.**

доктор физико-математических наук, профессор **Джаманбаев М.Д.**

доктор физико-математических наук, профессор **Энгельшт В.С.**

Ведущая организация - Институт математики Министерства образования и науки Республики Казахстан

Защита состоится « » _____ 2002 года в ⁰⁰ ч. на заседании Диссертационного совета Д.01.02.191 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук в Кыргызском техническом университете им. И. Разакова, по адресу: 720044, Кыргызская Республика, г. Бишкек, проспект Мира, 66. Корпус 1. Малый актовый зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Кыргызского технического университета им. И. Разакова.

Ваш отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью учреждения просим направлять в адрес Диссертационного совета.

Автореферат разослан « » _____ 2002 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета, кандидат
технических наук, доцент

Ж.Д. Рабидинова

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Задача профилирования стенок сопла Лавала и различных криволинейных каналов с большими дозвуковыми, околосвуковыми, сверхзвуковыми течениями в них всегда была актуальной, важной для науки и практики. Она является классической в околосвуковой газовой динамике, имеет богатую историю и обширную библиографию. Интерес к ней, во многих развитых государствах, объясняется, прежде всего, большой практической важностью профилирования сопла при проектировании ракетных двигателей, аэродинамических труб, форсунок и других технических изделий. Сопла используются, также в МГД-устройствах, в газодинамических и химических лазерах, в аэродинамике порошковой металлургии, в аэродинамике контейнерного трубопроводного транспорта, в стекольной и в текстильной промышленности при использовании пара и воздуха высокого давления для получения ультратонкого стекла и штапельного полотна, в сушильных аппаратах овощей и фруктов. Главной особенностью околосвуковых течений заключается в том, что здесь одновременно существуют дозвуковая и сверхзвуковая зоны, появляется вопрос об образовании поверхности разрыва плотности, давления, скорости и т.д. И это глубокое различие между этими областями, является причиной ряда трудностей, возникающих при исследовании таких течений, и до настоящего времени, эти проблемы еще полностью не преодолены. В данное время, имеется большое количество разработок, различных подходов в разрешении этой проблемы, и во многом имеется успех, однако полного разрешения она не получила - это объясняется её комплексностью и сложностью. Именно к таким задачам относится задача профилирования сопла, определения характеристик потока внутри его. Течения газовых потоков внутри сопла разнообразны, поэтому разнообразны и решения уравнений, описывающих такие течения. Сложность задачи заключается не только в большом количестве уравнений, описывающих течения, но и в том, что характер их движения различен в различных областях сопла и построение строгой математической теории очень сложно. Сопла имеют различные формы, а значит различные тяги. Все исследования и расчеты ведутся в окрестности самого узкого поперечного сечения, так как здесь осуществляется переход через скорость звука, здесь образуется смешанная зона, и вся трудность решения задачи заключается в этой зоне. Течения в окрестности горловины сопла описываются уравнениями смешанного эллиптического-гиперболического типа. Большие успехи при решении плоских стационарных задач теории сопла Лавала, связаны с применением метода годографа, где нелинейные уравнения газодинамики становятся линейными. Построение безударных сопел и исследование характера течения в окрестности звуковой линии изучались Мейером, С.А.Христиановичем, Ф.И.Франклем, С.В.Фальковичем, У.Г.Цирумовым, Г.С. Росляковым, С.Томотика и К.Тамада. Сопла с прямой

звуковой линией рассматривали К.Гертлер, С.А.Христианович и более детально Л.В.Овсянников, а для осесимметричного потока О.С.Рыжов. Течение, которое в целом является дозвуковым вплоть до выхода из сопла, но содержит симметричные местные сверхзвуковые зоны у стенок в окрестности его минимального сечения, является одним из малоизученных вопросов. Большие проблемы возникают при профилировании сопел с двумя сужениями, диффузоров и различных криволинейных каналов. Эти же проблемы существуют и при исследовании нестационарных околозвуковых течений. В последнее время, изучению нестационарных газодинамических процессов обращают все большее внимание, так как для расчета течения в аэродинамических трубах, как при запуске так и при остановке необходимо решить ряд нестационарных газодинамических задач. Хотя общая теория простейших нестационарных процессов для идеальных газов хорошо развита, но общих эффективных методов, для более сложных конкретных задач, требуют еще своего развития.

Много работ посвящено решению так называемой «обратной» задачи теории сопла Лавала и в этом направлении получены определенные результаты. Решение «прямой» задачи является более трудной проблемой. Во первых, из-за невозможности переноса образа стенки на плоскость годографа, во вторых, единственность решения краевой задачи в области дозвуковых течений вплоть до горловины сопла для нелинейных уравнений газовых потоков в общем случае не доказана. Однако, если рассматривать угол наклона вектора скорости θ и потенциал скорости ϕ как функции от модуля скорости σ и функций тока ψ , то в этой новой плоскости (σ, ψ) неизвестной остается предельная характеристика, которая ограничивает область определения решения. Такая запись газодинамических уравнений наиболее удобна, прежде всего, для решения «прямых» задач теории сопла Лавала. Она не менее прагматична и для решения «обратных» задач, так как открывает широкие возможности профилирования сопел и различных криволинейных каналов.

Вышеизложенные проблемы, недостатки существующих моделей, преимущества плоскости (σ, ψ) привели к необходимости разработки новой математической модели, свободной от этих проблем и недостатков.

Цель настоящей работы заключается в совершенствовании существующих теорий и методологии расчетного обоснования, путем разработки других систем дифференциальных уравнений осесимметричных (стационарных и нестационарных) течений и методов их решений, обеспечивающих непрерывный потенциальный равномерный поток в соплах и в криволинейных каналах.

Для реализации цели потребовалось решать следующие задачи:

- теоретически обосновать разработки новых систем дифференциальных уравнений стационарных и нестационарных течений идеальных газов, оптимальных, и наиболее выгодных при решении задач определения

характеристик потока в соплах, при профилировании самих сопел и криволинейных каналов;

- разработка аналитических и приближенно-аналитических решений, идентичных течениям газовых потоков в соплах и в криволинейных каналах, позволяющих наиболее эффективно решать практические задачи изменения форм их стенок;

- обосновать разработки рациональных форм систем дифференциальных уравнений и достоверность разработанных аналитических и приближенных методов.

Основная идея заключается в разработке систем дифференциальных уравнений для осесимметричных течений в плоскости модуля скорости и функций тока, в использовании современных аналитических и приближенных методов математики, а также их целенаправленное сочетание, дающие возможность развить асимптотический метод малых возмущений, автомодельный и другие специальным образом выбранные решения, которые расширяют круг решаемых задач как для стационарных так и для нестационарных потоков.

Методика исследования связана с поиском наиболее эффективного способа математического моделирования изучаемого процесса, а именно, задача определения характеристик потока в сопле и задача его профилирования и различных криволинейных каналов. Разработанные математические модели реализуются в виде аналитических, приближенно-аналитических решений, где использовались специальные функции математической физики - гипергеометрические функции, функции Бесселя, Вейерштрасса, Ламэ и т.д. А решение поставленных краевых задач основываются на сочетании теории малых возмущений с методом автомодельных решений, специальным образом выбранных решений для дифференциальных уравнений в частных производных.

Научная новизна и выносимые на защиту основные положения состоят:

- в обобщении и интеграции литературных и других научных данных по данной проблеме и разработке на этой основе новых систем дифференциальных уравнений околозвуковых течений идеального газа;

- на основании общеизвестных законов термодинамики предложена система дифференциальных уравнений для стационарного осесимметричного потенциального потока идеального газа в плоскости (σ, ψ) ;

- развит асимптотический метод малых возмущений для исследования околозвуковых течений в соплах и в криволинейных каналах;

- разработан аналитический метод профилирования осесимметричного сопла с местными сверхзвуковыми зонами и прямой звуковой линией;

- для нестационарных течений разработан метод построения стенки сопла - с двумя сужениями, с прямой звуковой поверхностью, с местными сверхзвуковыми областями и решена задача обтекания тела с местной сверхзвуковой зоной;

- для уравнения, обобщающего классическое уравнение Линя-Рейснера-Тзяна (Л.Р.Т.) предложены аналитические решения, описывающие течения в соплах с криволинейной звуковой поверхностью и течения в криволинейных каналах;
- разработаны модели, линеаризующие классическое осесимметричное уравнение Кармана и Л.Р.Т. и приведены ряд решений, идентичные сопловым решениям и решениям в различных криволинейных каналах.

Практическая ценность работы. Разработанные математические модели, а также их решения, вносят определенный вклад в развитие теории внутренних задач околосзвуковой газовой динамики. Конечные результаты получены в явной формульной зависимости от параметров потока, удобные для практического применения, дают хорошие приближения к известным экспериментальным и численным разработкам, что в свою очередь служит дополнением к дорогостоящим экспериментальным исследованиям. Результаты полезны при решении задачи проектирования осесимметричных сопел и при теоретических исследованиях определения особенностей околосзвуковых течений газов в криволинейных каналах.

Основные результаты могут быть рекомендованы к включению в программы спецкурсов по околосзвуковой газовой динамике в университетах.

Обоснованность и достоверность результатов. На основе обзора, изучения и анализа существующих аналитических, численных и экспериментальных работ, подходов и методов решения данной проблемы, доказана необходимость теоретического обоснования разработки и создания других систем дифференциальных уравнений осесимметричных течений, наиболее эффективных, прежде всего для решения «прямой» задачи теории сопла Лавала. Эти модели базируются на общеизвестных законах термодинамики, физики, математики с определенными гипотезами. Предложенные аналитические методы решений, зависимости параметров потока, с применением современного сложного математического аппарата, позволяют обоснованно выбрать технологические параметры сопел. Выполненные исследования и полученные результаты достоверны, так как конечные результаты, записанные в формульном виде, дают хорошие совпадения с аналитическими решениями других авторов (где они имеются) и экспериментальными работами в этой области, что говорит об их надежности.

Личный вклад в решение проблемы. На основе анализа литературных данных, автором сформулирована проблема задачи исследований, намечены направления их теоретического решения. Теоретические исследования, анализ основного объема полученных данных, разработка методики расчета околосзвуковых течений в соплах и в криволинейных каналах, формулирование заключительных выводов осуществлено лично автором диссертации.

При постановке ряда задач исследований и выполнении диссертации, автор получил ценные советы и эффективную помощь научного консультанта,

член-корреспондента НАН КР, Заслуженного деятеля науки Кыргызской Республики, д.ф.-м.н., профессора Бийбосунова И.Б.

Апробация работы. Результаты исследований диссертационной работы обсуждались на различных научных семинарах, республиканских и международных конференциях: на Всесоюзной конференции «Современные проблемы гидроаэродинамики» (Фрунзе, 1980г.), на V Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Алма-Ата, 1981г.), на республиканской научно-технической конференции молодых ученых Киргизии (Фрунзе, 1981, 1985, 1986 гг.), на совещании секции физики Московского общества испытателей природы по гидродинамике (Москва, 1982г.), на VII межреспубликанской научной конференции молодых ученых АН Кыргызской ССР (Фрунзе, 1984г.), на Всесоюзной конференции молодых ученых и специалистов (Новосибирск, 1984г.), на конференции молодых математиков (Свердловск, 1987г.), на научном семинаре Института математики и механики УО СО АН СССР (Свердловск, 1987г.), на научном семинаре СГУ (Саратов, 1987г.), на научном семинаре Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР (Новосибирск, 1986, 1987 гг.), на научном семинаре Института кибернетики АН Узбекской ССР (Ташкент, 1987г.), на научном семинаре Института гидродинамики СО АН СССР (Новосибирск, 1987г.), на научном семинаре КазГУ им. Аль-Фараби (Алма-Ата, 1990г.), на научных семинарах Института автоматки НАН КР (1978-93 гг.), на научно-технических конференциях КСХИ (1989-90 гг.) и Кыргызской аграрной академии (1997, 1998, 2000, 2002 гг.), на научно-технических конференциях КГПУ им. И. Арабаева (1992, 1993, 1999, 2001 гг.), на научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Ош, 1993г.), на Международной научной конференции «Традиции и новации в культуре университетского образования» КТУ им. И.Раззакова (Бишкек, 1997г.), на Международной научной конференции КТУ им. И.Раззакова (Бишкек, 2001г.), на научно-технических конференциях ТУ «Дастан» (Бишкек, 1997, 1999 гг.), на Международной научно-практической конференции посвященной 45-летию образования строительного факультета КГУСТА (Бишкек, 2000г.), на Международной научно-практической конференции КазГУ им. Аль-Фараби (Алма-Ата, 1999, 2000, 2001 г.), на научной конференции БГИЭиК (Бишкек, 1999г.), на Международной конференции «Проблемы математики и информатики в XXI веке» КГНУ (Бишкек, 2000г.), на научной конференции МАУПФиБ (Бишкек, 2001).

Публикации. Результаты исследований относящиеся к теме диссертации опубликованы в 49 научных работах, в том числе в одной монографии и в 30 статьях в рецензируемых изданиях.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 261 страницах машинописного текста, включая 85 рисунков, графиков и состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 186 наименований.

Основное содержание работы.

Во введении подробно излагается актуальность темы, проанализировано современное состояние данного вопроса на основе обзора существующей литературы по данной области, обосновываются цели и задачи исследования, указана структура и объем диссертации, кратко приведено содержание диссертации и её апробации.

Первая глава состоит из двух параграфов, в которых на основании основных уравнений газовой динамики предлагается новая система дифференциальных уравнений осесимметричного потенциального течения идеального газа в модульной плоскости (σ, ψ) .

После обзора основных термодинамических понятий приведены основные уравнения газовой динамики - уравнения движения (сохранения импульса), которое составляет её теоретический фундамент, уравнения неразрывности, состояния и адиабаты Пуассона. Все эти уравнения составляют систему основных дифференциальных уравнений, в результате решения которых определяется движение изучаемой среды. При этом их вывод базируется на совокупности предпосылок, составляющих определенную физическую схему изучаемого течения. Схематизация потока и процессов, происходящих в нем, лежит в основе любой задачи, так как позволяет максимально упростить уравнения, причем схема может быть более или менее сложной, в зависимости от того, какой характер имеет само течение. Наиболее широкий класс задач связан с расчетом и распределением параметров потока около различных тел при обтекании невязким сжимаемым идеальным газом. Некоторые пространственные задачи газовой динамики удобнее решать применяя криволинейную ортогональную систему координат, в частности, цилиндрическую. В этом случае система уравнений сильно упрощается, особенно, для идеальных газов. Таким образом, указаны различные системы уравнений. Это связано с тем, как показывает опыт, при исследовании закономерностей взаимодействия газовых потоков с обтекаемыми телами удобно пользоваться одной формой уравнений, а в других - другой. В дальнейшем будем использовать наиболее удобные и выгодные формы уравнений с определенными допущениями.

Рассмотрим некоторую сжимаемую жидкость, в которой течение потенциальное, установившееся и отсутствуют массовые силы, причем поток осесимметричный, являющийся частным случаем пространственного. Воспользовавшись цилиндрическими координатами (ось x совмещается с осью симметрии потока) видим, что вектор скорости V будет зависеть от двух координат x и r , всегда лежит в меридианной плоскости, поток в этих плоскостях будет одинаков, и достаточно исследовать движение только в одной какой-нибудь меридианной плоскости. Получающаяся система уравнений упрощается, но она остается нелинейной. Существуют различные методы линеаризации этих уравнений, например, для плоских потоков. Он

основан не на отбрасывании каких-либо членов, а на преобразовании потенциала скоростей ϕ и функции тока ψ от независимых переменных x и y к независимым переменным (u, v) , (ω, θ) - плоскости годографа. Получающееся таким путем линейное дифференциальное уравнение является вполне точным для любых потоков. Однако, такая линеаризация невозможна ни для произвольного пространственного, ни для осесимметричного потока. Действительно, относительно потенциала скорости и функции тока в плоскости годографа имеем нелинейную систему. В полученной системе уравнения очень громоздки по форме, а границы течения в плоскости годографа неизвестны кривые, что приводит к дополнительным трудностям. Поэтому предлагается другая система дифференциальных уравнений для стационарного осесимметричного течения.

Итак, на основании системы уравнений движения, неразрывности, безвихренности, а также считая, что плотность ρ и давление P связаны с уравнением адиабаты, излагается вывод уравнения осесимметричного стационарного потенциального движения идеального газа в плоскости (σ, ψ)

$$\begin{aligned} \phi_{\psi} &= \frac{\theta_{\sigma}}{r^v}; & \phi_{\sigma} &= \frac{1}{r^v} \left[\frac{\theta_{\sigma}^2 + k(\sigma)}{\theta_v + v\rho_0} \frac{\sin \theta}{r^{2v}\rho w} \right] \\ (r^2)_v &= \frac{2}{w} \left[\theta_{\sigma} \sin \theta + \frac{P_0}{\rho} \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Полученная система уравнений является нелинейной, тем не менее, для этих уравнений открывается хорошая возможность для решения различных газодинамических задач.

Во второй главе, состоящей из четырех параграфов, на основе разработанной системы дифференциальных уравнений, введением малого параметра ϵ , приближенно-аналитически решена «прямая» краевая задача теории сопла Лавала, установлением граничного условия на стенке. Аналитически и приближенно-аналитически решены задачи профилирования сопел с местными сверхзвуковыми зонами в окрестности критического сечения и с прямой звуковой линией.

Изучение околосвуковых (трансзвуковых) течений гораздо сложнее чем чисто дозвуковые или сверхзвуковые. Во первых, не тривиальным оказывается процесс упрощения задачи методом малых возмущений, во вторых, упрощение, в сущности, мало облегчает задачу. В трансзвуковом режиме линеаризованная задача не дает удовлетворительного решения. Это значит, что в процессе перехода от нелинейного к линейному где то сделан шаг незаконный. Поэтому, необходимо найти надежную замену линейной теории, т.е. найти истинные порядки малости всех возмущенных величин.

Пусть дано осесимметричное сопло, где за ось симметрии принимается ось абсцисс на которой $\psi = 0$, $\theta = 0$. Считаем набегающий поток дозвуковым, а в окрестности минимального сечения сопла скорость достигает скорости звука. На выходе скорость сверхзвуковая и никаких краевых условий не ставим. Форма звуковой и других характерных линий потока, определяющие течение будут определены в результате решения задачи. Дозвуковая часть сопла продолжается до бесконечности, где стенки становятся параллельной оси симметрии. В остальном стенки произвольны, достаточно гладки, чтобы обеспечить отсутствие ударных волн (рис. 1, рис. 2).

Итак, найти решения системы уравнений (1) со следующими граничными условиями

$$\left. \frac{\theta_{\sigma} \omega(\sigma)}{\varphi_{\sigma}} \right|_{\psi=\psi_0} = \left. \frac{d\theta}{dS} \right|_{\psi=\psi_0} = \chi(\sigma, \psi_0) - \text{кривизна сопла на линии CB,}$$

$$\theta(\sigma, 0) = 0 - \text{на оси симметрии,} \quad (2)$$

$$\theta(\sigma, \psi)|_{\sigma=\sigma_0, 0} = F(\psi) - \text{расход газа в дозвуковой области на CD,}$$

$$\theta(\sigma, -\psi) = -\theta(\sigma, \psi), \quad \varphi(\sigma, -\psi) = \varphi(\sigma, \psi) - \text{условие симметрии,}$$

где $\chi(\sigma, \psi)$ - кривизна сопла, S - длина дуги вдоль стенки.

Для решения этой задачи применяем метод малого параметра, причем порядок возмущений подбирается таким образом, чтобы полученные уравнения были пригодны к трансзвуковым течениям. в результате имеем систему рекуррентных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_{0\sigma} = \theta_{0\sigma} \\ \varphi_{0\sigma} = (\theta_{0\sigma}^2 + k_0 \sigma) / (\theta_{0\sigma} + v \theta_0 / S) \end{cases} \quad (3)$$

с краевыми условиями

$$\chi_0(\sigma, S_0) = a_0 \left[\theta_{0\sigma} / \varphi_{0\sigma} \right]_{S=S_0} - \text{на стенке сопла;}$$

$$\theta_0(\sigma, 0) = 0 - \text{на оси симметрии;} \quad (4)$$

$$\theta_0(\sigma, -S) = -\theta_0(\sigma, S), \quad \varphi_0(\sigma, S) = \varphi_0(\sigma, -S)$$

Уравнения для первого приближения

$$\begin{cases} \theta_{1\sigma} - \varphi_{1\sigma} = a_1 \sigma \varphi_{0\sigma} / 2a_0 \\ \theta_{1\sigma} + v \theta_1 / S - 2\theta_{0\sigma} \theta_{1\sigma} / \varphi_{0\sigma} + [\theta_{0\sigma} + v \theta_0 / S] \varphi_{1\sigma} / \varphi_{0\sigma} = \\ = [a_1 \sigma \theta_{0\sigma}^2 + (2a_0 k_1 - a_1 k_0)] / 2a_0 \varphi_{0\sigma} + a_1 \sigma (\theta_{0\sigma} + v \theta_0 / S) / a_0 \end{cases} \quad (5)$$

с соответствующими граничными условиями

$$\chi_1(\sigma, S_0) = a_1 \left[(\theta_{1\sigma} - \chi_0 \varphi_{1\sigma} + b_1 \sigma \theta_{0\sigma}) / \varphi_{0\sigma} \right]_{S=S_0} - \text{на стенке сопла;}$$

$$\theta_1(\sigma, 0) = 0 - \text{на оси симметрии;} \quad (6)$$

$$\theta_1(\sigma, -S) = -\theta_1(\sigma, S), \quad \varphi_1(\sigma, S) = \varphi_1(\sigma, -S)$$

Уравнения для n-го приближения

$$\begin{cases} \theta_{n\sigma} - \varphi_{n\sigma} = \frac{a_n \sigma \varphi_{n-1\sigma} (4a_0 a_1 - a_1^2) \sigma^2 \varphi_{n-2\sigma} + \varphi_{n-2\sigma} \int_0^S (\theta_0^2)_{\sigma} S dS}{2a_0} + \frac{\varphi_{n-2\sigma} S}{2a_0 S^2} \\ \theta_{n\sigma} + v \theta_n / S - 2\theta_{0\sigma} \theta_{n\sigma} / \varphi_{0\sigma} + (\theta_{0\sigma} + v \theta_0 / S) \varphi_{n\sigma} / \varphi_{0\sigma} = F(\sigma, S, \varphi_{0\sigma}, \dots, \theta_0, \dots, \theta_{n-1, \sigma}) \end{cases} \quad (7)$$

с соответствующими граничными условиями на стенке сопла

$$\chi_n(\sigma, S_0) = a_n \left[(\theta_{n\sigma} - \chi_0 \varphi_{n\sigma} - \chi_1 \varphi_{n-1, \sigma} + \dots + F(\sigma, S, \dots, \theta_{n-1, \sigma})) / \varphi_{0\sigma} \right]_{S=S_0} -$$

$$\theta_n(\sigma, 0) = 0 - \text{на оси симметрии;} \quad (8)$$

$$\theta_n(\sigma, -S) = -\theta_n(\sigma, S), \quad \varphi_n(\sigma, S) = \varphi_n(\sigma, -S)$$

Для системы уравнений (3) найдено одно частное решение для искомых функций

$$\varphi_0(\sigma, S) = a\sigma + k_0 S^2 / 4a = a\sigma + k_0 \psi / 2a_0 a^2, \quad (9)$$

$$\theta_0(\sigma, S) = \frac{k_0}{2a} \sigma S + \frac{k_0^2}{16a^3} S^3 = \left(\frac{2}{a} \right)^{1/2} \left[\frac{k_0 \sigma}{2a} + \frac{k_0^2 \psi}{a_0 a^3} \right] \cdot \psi^{1/2}$$

Эти решения удовлетворяют краевым условиям (4) и описывают течение в осесимметричном сопле с криволинейной звуковой поверхностью. Это следует из неравенства нулю градиента скорости вдоль стенки сопла, а кривизна сопла в нулевом приближении есть величина постоянная.

С помощью формул обратного перехода на физическую плоскость

$$\begin{cases} dx = \frac{\cos \theta}{\omega} \varphi_{\sigma} d\sigma + \frac{\varphi_{\psi}}{\omega} \left[\cos \theta - \frac{\rho_0 \sin \theta}{\omega \rho \theta_{\sigma}} \right] d\psi \\ dr = \frac{\sin \theta}{\omega} \varphi_{\sigma} d\sigma + \frac{\varphi_{\psi}}{\omega} \left[\sin \theta + \frac{\rho_0 \cos \theta}{\omega \rho \theta_{\sigma}} \right] d\psi \end{cases} \quad (10)$$

найлены характеристики I и II семейства, уравнения звуковой поверхности и стенки сопла в параметрическом виде. Переход на физическую плоскость осуществляется очень легко, так как одно из слагаемых уравнений (10) отпадает при определении того или иного параметра потока.

Далее определены решения уравнений 1^{го}, 2^{го} приближений, удовлетворяющие своим соответствующим краевым условиям. Однородная часть у них одинакова по форме, линейна, поэтому решения искали сразу для n^{го} прибли-

жения, в результате получим гипергеометрическое уравнение Гаусса, решения которых известны. Далее определяются их частные решения. С учетом всего этого, решения для искоемых функций запишутся в первых трех приближениях

$$\varphi = a\sigma + \alpha_0 a \psi / a_0 + \alpha(b\sigma^2 + A_{11}\sigma\psi + A_{12}\psi^2) + \epsilon^2(\alpha\sigma^3 + A_{21}\sigma^2\psi + A_{22}\sigma\psi^2 + A_{23}\psi^3) + \dots \quad (11)$$

$$\theta = [B_0\sigma + B_1\psi + \alpha(B_{10}\sigma^2 + B_{11}\sigma\psi + B_{12}\psi^2) + \epsilon^2(B_{20}\sigma^3 + B_{21}\sigma^2\psi + B_{22}\sigma\psi^2 + B_{23}\psi^3)] \cdot \psi^{1/2} + \dots$$

Для определения произвольных постоянных интегрирования приведена тестовая задача, когда кривизна заданного сопла задается в виде

$$\chi(\theta) = k_0 + \epsilon k_1 \theta + \epsilon^2 k_2 \theta^2 + \dots \quad (12)$$

и определены постоянные a, b, c . Здесь k_0, k_1, k_2 - известные параметры. Затем определяются физические параметры потока, с учетом первых трех приближений, при задании стенки сопла в виде (12).

Далее рассматривается следующая задача, когда у стенок сопла появляются местные сверхзвуковые зоны. Пусть ось сопла совпадает с осью Ox , а направление вектора скорости газа совпадает с этой осью. В предельном случае, когда $x=r=0$ является точкой пересечения сверхзвуковых зон, исходящих из противоположных стенок сопла имеем $U = a, \partial U / \partial x = 0$ при $x = r = 0$.

Для системы уравнений, описывающей стационарное околосзвуковое течение в виде (3), найдены решения

$$\varphi(\sigma, S) = \Gamma(U) + aS^2, \quad U = k_0\sigma + 4a^2S^2, \quad (13)$$

$$\theta(\sigma, S) = 2aS[4a\Gamma + k_0\sigma + 4a^2(v+5)S^2 / (v+3)] / k_0$$

Доказывается, что эти решения можно рассматривать как совокупность трех видов течения в осесимметричном сопле, зависящих от некоторого параметра C_0 - течение с местными сверхзвуковыми зонами, течение с криволинейной звуковой поверхностью и течение с сомкнувшимися местными сверхзвуковыми включениями, исходящих из стенок сопла.

Размеры сверхзвуковых зон, появившихся у стенок увеличиваются с увеличением разности давления у входа и выхода, постепенно они достигают оси сопла и могут слиться на этой оси, а при дальнейшем увеличении разности давлений появляется только одна звуковая поверхность, простирающаяся по всему критическому сечению. Затем определяются кривизна стенки сопла и другие характерные поверхности потока. Полученный нами результат не противоречит теории Никольского и Таганова, совпадают с работой С.Тамата-Томотика, Хасимото, которые сравнивали свои теоретические результаты с экспериментальными исследованиями Г.Липмана (рис.3, рис.4).

В последнем параграфе данной главы рассматривается задача профилирования осесимметричного сопла с прямой звуковой поверхностью.

Для этого нам было необходимо решить систему уравнений (3) с граничными условиями на оси симметрии (рис. 5):

$$\theta(\sigma, 0) = 0, \quad \theta_\sigma(\sigma, 0) = 0, \quad \theta_s(\sigma, 0) = F(\sigma) \quad (14)$$

и условиями о прямолинейности звуковой поверхности

$$\theta(0, S) = 0, \quad \theta_\sigma(0, S) = 0, \quad \theta_s(0, S) = 0 \quad (15)$$

Решение ищется классическим методом разделения переменных, причем из инвариантности системы уравнений (3), вытекает одно уравнение, которое

$$\text{введением новой функции, записывается} \quad Sf_4'' + f_4' = Sf_4^2 \quad (16)$$

Подробное исследование данного уравнения дает полную картину различных видов течений, которые были всесторонне изучены Л.Овсянниковым и О.Рыжовым. Здесь существуют пять видов течений и свойства течений определяются расположениями особенностей этих решений. Уравнение (16) в общем случае не имеет целых решений, т.е. решений регулярных во всей плоскости и неразрешимо в элементарных функциях. Здесь ограничились изучением его простейших решений, имеющих непосредственное применение в построении течений в осесимметричных соплах с прямолинейной звуковой поверхностью, а контур сопла в зоне критического сечения является параболой четвертой степени. Другой метод с использованием функции Вейерштрасса будет применен позже при исследовании нестационарных течений.

Глава III, состоящая из шести параграфов, посвящена исследованию нестационарных задач. Изучение стационарных течений позволило установить основные закономерности, сопровождающие переход через скорость звука в сопле Лавала. Они служат основой для исследования пространственных двумерных (осесимметричных) нестационарных течений. А исследование неустановившихся нелинейных задач механики жидкости и газа, как в теоретическом, так и в прикладном значении является актуальной и важной.

Предлагается асимптотическое решение профилирования осесимметричного сопла, находятся необходимые характеристики для нестационарного потока на основании общеизвестных уравнений. Систему для потенциальных осесимметричных течений запишем как

$$(a^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} + (a^2 - \varphi_t^2)\varphi_{tt} - 2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt} + va^2\varphi_t / r - 2[\varphi_x\varphi_{xt} + \varphi_t\varphi_{tt}] - \varphi_{tt} = 0 \quad (17)$$

$$\text{где} \quad a^2 = \frac{\gamma+1}{2}a^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_t^2 + 2\varphi_t)$$

$$(1 - x_t + \varphi_x - \varphi_t x_t)^2 = (1 - x_t^2)a^2 - \text{характеристическое уравнение.}$$

Для изучения несимметричных течений, ставятся следующие условия на оси симметрии

$$\varphi_x(x,0,t) = xB_0(t) + x^2B_1(t) + x^3B_2(t) + \dots, \quad \varphi_r(x,0,t) = 0 \quad (18)$$

$$\varphi_x(x,r,0) = F_0(x,r), \quad \varphi_r(x,r,0) = F_1(x,r) - \text{начальные условия} \quad (18a)$$

Решение уравнения (17) ищется в виде ряда

$$\varphi(x,r,t) = a_n x + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \varphi_n(x,r,t)$$

Классификация исследуемого уравнения с точки зрения размерности, условий подобия, законов растяжения, определяющих порядок переменных, входящих в уравнение, позволило получить следующие рекуррентные уравнения

$$-\varphi_{0x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0rr} + v\varphi_{0r} / r - 2\varphi_{0xt} = 0 \quad (19)$$

$$[\varphi_{0x}\varphi_{1xx} + \varphi_{0xx}\varphi_{1x}] + \varphi_{1rr} + v\varphi_{1r} / r - 2\varphi_{1xt} = \varphi_{0x}^2\varphi_{0xx} / 2 + 2\varphi_{0r}\varphi_{0xx} + m(\varphi_{0rr} + v\varphi_{0r} / r)\varphi_{0x} + m_1\varphi_{0xx}\varphi_{0r} + 2\varphi_{0x}\varphi_{0xt} + m_0\varphi_{0x} \quad (20)$$

$$[\varphi_{0x}\varphi_{nxx} + \varphi_{0xx}\varphi_{nx}] + \varphi_{nrr} + v\varphi_{nr} / r - 2\varphi_{nxt} = G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$$

Основное уравнение (25), являющееся классическим уравнением Линя-Рейснера-Гзяна (Л.Р.Т.), решается комбинированным методом - разделения переменных и автомоделным

$$\varphi_0(x,r,t) = r^{3n-2} f_0(\xi) \cdot A_0(t), \quad \xi = x \cdot r^{-n} \quad (21)$$

в результате получается обыкновенное дифференциальное уравнение, где одним из решений при $n=2$ будет

$$\varphi_0(x,r,t) = (2x^2 + 4axr^2 + a^2r^4)a / (1 - ce^{-2a}) \quad (22)$$

На основании полученного решения определяются звуковая линия, геометрическое место точек, в которых вектор скорости горизонтален и пара характеристик. Затем определяется форма линии тока, для чего следует проинтегрировать её наклон φ_r вдоль прямой $r = \text{const}$. Если взять две линии тока расположенные по обе стороны от оси абсцисс на одинаковых расстояниях, то получим семейство сопел (рис.6). Если в качестве стенок брать две линии тока, расположенные по одну и ту же сторону от оси, то получается семейство различных криволинейных каналов. Затем находятся решения уравнений следующих приближений (20) и из (18, 18a) определяются постоянные интегрирования.

Таким образом, решена краевая задача теории сопла Лавала с криволинейной звуковой поверхностью в нестационарном режиме при помощи асимптотического метода. Этот метод дает возможность изучить полное уравнение (17) с краевыми условиями (18, 18a), позволяя упростить его и получить новое решение.

В вышеприведенной задаче основным околозвуковым уравнением для исследования было уравнение Л.Р.Т., которое заменяло полное уравнение для потенциала скоростей и являлось предметом неоднократных исследований. Ниже показан возможный переход от течения в сопле с криволинейной звуковой поверхностью к течению с прямолинейной. Ставятся следующие условия на оси симметрии

$$\varphi(x,0,t) = a_1 D_1(t)x + a_2 D_2(t)x^2 + a_3 x^3 + \dots, \quad \varphi_r(x,0,t) = 0 \quad (23)$$

и начальные условия $\varphi(x,r,0) = F_0(x,r)$

Данное уравнение может быть разрешено, если взять решение в форме

$$\varphi(x,r,t) = A_0(r,t) + A_1(r,t)x + A_2(r,t)x^2 + A_3(r,t)x^3 \quad (24)$$

тогда относительно искомых функций получается система из четырех уравнений, решения, которых найдены в виде рядов в окрестности точек $r=0$, $r=r_0$. Для плоского случая данная задача решается аналитически, при помощи специальных функций Вейерштрасса

$$U(x,r,t) = 3[x + a^2 / 3a_3(t+c)]^2 \gamma + [2a_2 - 2^{1/3}c_1 a_3 - (-a_3)^{3/2} / (t+c)] / 3a_3 \quad (25)$$

$$V(x,r,t) = \{ [x + a_2 / 3a_3(t+c)]^3 + [4(c_1 - 3)a_3 x + (c_1 - 4)(t+c)] / 12a_3^2(t+c)^2 \} \gamma'$$

Полученные результаты совпадают с выводами С.В.Фальковича для стационарного потока, где утверждается о возможности существования шести видов течения в зависимости от дискриминанта $D = a_2^2 + 2a_2 - 3a_1 a_3$. При $D=0$ получается дозвуковое течение в сопле с прямой звуковой линией, причем переход обеспечивается уже до оси $x=0$. Подбором коэффициентов a_i указана эволюция формы звуковой линии. Причем, длина участка сопла от некоторого x , имеющие нули до абсциссы точки пересечения стенки с линией $r=0$, стремиться к нулю (рис.7).

Далее рассматривается задача теории сопла с двумя сужениями (рис.8), причем относительно оси абсцисс оно имеет симметрию. Такой канал можно изучать как два последовательно расположенных сопла.

Для профилирования сопла с двумя сужениями, при неустановившемся режиме скоростей, исследуемым уравнением является уравнение Л.Р.Т. Если это уравнение продифференцировать по x и взять $U = \varphi_x$, то получим

$$-[UU_{xx} + U_x^2] + U_{rr} + vU_r / r - 2U_{xt} = 0 \quad (26)$$

Рассматривается следующая задача: Найти решение уравнения (26) с начально-краевыми условиями

$$U(x,0,t) = F(x,t) = d_0 + d_1 D_1(t)x^2 + \dots$$

$$U(x,r,0) = F_0(x,r) \quad (27)$$

Решение исследуемого уравнения ищется в виде

$$U(x, r, t) = A_1(r, t) + A_2(r, t)x^2 \quad (28)$$

в результате получается система из двух уравнений, решения которых найдены в форме степенных рядов и в функциях Бесселя для осесимметричного случая. Для плоского потока решение для функции A_2 найдено в функциях Вейерштрасса, а вторая функция $B_1(r)$ найдена из уравнения Ламэ $B_1'' = 2\gamma \cdot B_1$.

Таким образом, продольный компонент скорости в целом имеет вид

$$U(x, r, t) = x^2\gamma + c_1 \left[[\gamma' + 2(-d_1)^{3/2}]^{1/3} + [\gamma' - 2(-d_1)^{3/2}]^{1/3} \right] \cdot c_2 / (e^{-\alpha} + c_3), \quad (29)$$

откуда можно определить две звуковые линии при $U=0$, причем они расположены от оси $x=0$ на расстоянии $x = \pm d_0 / d_1$.

Нами изучен случай, когда горловины сопла равны друг другу. Если величина $d_0 / d_1 = \pm 0,8$, то наши выводы хорошо согласуются с работой японских ученых и Г.Рослякова - У.Пирумова (рис.8).

Теперь рассмотрим нестационарную задачу для сопла Лавала с прямой звуковой поверхностью, где исходным уравнением является полное уравнение для потенциала скоростей

$$\left[\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} \varphi_x^2 - \frac{\gamma-1}{2} \varphi_r^2 - (\gamma-1)\varphi_t \right] \varphi_{xx} - 2[\varphi_x \varphi_r \varphi_{xr} + \varphi_x \varphi_{rt} + \varphi_r \varphi_{xt}] + \left[\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} \varphi_x^2 - \frac{\gamma+1}{2} \varphi_r^2 - (\gamma-1)\varphi_t \right] \varphi_{rr} + v \frac{\varphi_r}{r} - \varphi_{tt} = 0 \quad (30)$$

начально-краевые условия задаются так

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_x &= U = 1 + a_0 A_0(t)x^2 + a_1 A_1(t)x^3 + a_2 A_2(t)x^4 + \dots \\ \dot{\varphi}_r &= V = b_0 B_0(t)x^3 + b_1 B_1(t)x^4 + b_2 B_2(t)x^5 + \dots \\ U(x, r, 0) &= F_0(x, r) \end{aligned} \quad (31)$$

Такие течения возможны в специальных соплах, с достаточно плавным изменением формы стенок в окрестности критического сечения, с очень крутыми стенками или с изломом контура стенки. А в аналитических осесимметричных течениях газа условия $U=a$, $U_x=0$ не приводят к тому, что проходящая через центр поверхность перехода становится плоскостью. Это возможно только при наложении дополнительного требования о всестороннем сжатии или расширении потока в окрестности плоскости $x=0$, расположенной по любую её сторону. В этом случае вдоль плоскости $x=0$ скорость по величине равна скорости звука, а поперечные скорости исчезают, кроме того, обращаются в нуль производные U_x , V_x , V_{xx} .

Решение уравнения (30) будем искать в виде

$$\varphi(x, r, t) = x + \varphi_0(r, t)x^3 + \varphi_1(r, t)x^4 + \varphi_2(r, t)x^5 + \varphi_3(r, t)x^6 + \dots \quad (32)$$

в результате имеем следующую систему из четырех уравнений

$$\begin{aligned} 1. \varphi_0 &= \varphi_0(t), & 2. \varphi_{0rr} + \varphi_{0r} / r &= 6\varphi_0^2 - 3\varphi_{1t} / 2, \\ 3. \varphi_{1rr} + \varphi_{1r} / r - 2\varphi_0 \varphi_{1r} - 3(\gamma+1)\varphi_{1t} &= 10\varphi_{2t}, \\ 4. \varphi_{2rr} + \varphi_{2r} / r - 10\varphi_0 \varphi_{2r} - 3(\gamma+1)\varphi_{2t} - (16\varphi_1^2 + 20\varphi_0 \varphi_1 + 9\varphi_0^3) - & \\ - 24(\varphi_0 \varphi_{1t} + \varphi_{0t} \varphi_1) + 3[(\gamma-1)\varphi_0 \varphi_{0rr} + 2\varphi_{0r}^2] &= 12\varphi_{3t}. \end{aligned} \quad (33)$$

Предположим, что существует связь вида $\varphi_{1t} = -2\varphi_{0r} / 3r$. (34)

тогда используя общеизвестные соотношения между функцией Вейерштрасса и её производными, а также правило Лопиталя, находим искомые функции φ_0 , φ_1 , φ_2 , φ_3 . Они определяются через двоякопериодическую функцию Вейерштрасса, которая мероморфна, с двумя периодами и регулярна во всяком параллелограмме

$$\varphi_0 = \gamma(\tau + c_2), \quad \varphi_1 = -4\gamma^2(t - c), \quad \varphi_2 = -2\gamma(t - c)^2 / 3, \quad \varphi_3 = [4(7\gamma^3 - c_1)\gamma(t - c)^2 + 11(10\gamma^3 - c_1)(t - c) + (9/4)(6\gamma - 11)\gamma^3 + 2c_1](t - c) / 9 \quad (35)$$

Функция Вейерштрасса является вещественной при вещественном и при чисто мнимом значениях своего аргумента, имеет особенности в виде нулей и полюсов второго порядка. Возможные типы для стационарных плоскопараллельных течений с прямой звуковой линией были установлены Л.В.Овсянниковым. Нам удалось, применяя условие вида (34) привести решение уравнений для нестационарного осесимметричного течения к этой же двоякопериодической функции и выделить пять видов возможных течений в сопле, которые подчиняются условиям Гёртлера о прямолинейности звуковой линии, где расчет является наиболее простым (рис. 9, рис. 10).

Рассмотрим режим течения газа с местной сверхзвуковой зоной на стенке в окрестности самого узкого места осесимметричного сопла, когда скачок уплотнения является очень слабым и течение можно считать безударным. Для уравнений, описывающих нестационарные околосредовые течения, получены точные частные решения, на базе которых изучается такое течение.

Рассмотрим уравнение (26) со следующим условием Коши

$$U(x, r, 0) = F(x, r) \quad \text{и краевым условием на оси} \quad U(x, 0, t) = F_1(x, t).$$

Рассмотрим решения видов

$$\begin{aligned} \text{I. } U(x, r, t) &= A_2(t) \cdot [2x + B_1(r) + A_1(t)] + r^2 A_3(t). \\ \text{II. } U(x, r, t) &= A_1(t) + A_2(S) + B_1(r), \quad S = B_0(t) + ax + br^2 \end{aligned} \quad (36)$$

Для первого решения (36) при различных соотношениях между A_2 и A_3 получены разные уравнения, которые подробно исследованы и аналитически определен профиль сопла, а также характерные поверхности потока.

Более подробно остановимся на втором решении (36). Подставляя его в уравнение (26) получим уравнение

$$FF'' + F'^2 - a_3 F - a_3^2 S = 0, \quad FF' - a_3 F - a_3^2 S = 0 \quad (37)$$

Последнее уравнение не интегрируется в явном виде, тем не менее, найдено его решение в неявном и в параметрическом видах

$$[A_2 + \alpha_1 S]^{\beta_1} \cdot [A_2 + \alpha_2 S]^{\beta_2} = c \quad (38)$$

$$A_2 = (\alpha_2 / (\alpha_2 - \alpha_1)) \eta - \alpha_1 \lambda \eta^k, \quad S = (-1 / (\alpha_2 - \alpha_1)) \eta + \lambda \eta^k, \quad k = -\beta_2 / \beta_1$$

Анализируя полученные решения (интегральные кривые) приходим к выводу, что они описывают течение в сопле с местными сверхзвуковыми зонами, которые изменяются с течением времени. Варьированием коэффициентов можно добиться такого положения, когда малые сверхзвуковые зоны с течением времени увеличиваются. Картина развития местных сверхзвуковых зон во времени, когда производится запуск сопла, имеет именно такой вид.

Если в плоскую звуковую струю поместить некоторый профиль, то на его поверхности может появиться сверхзвуковая зона, оканчивающаяся внутри струи. Эта задача, в какой-то мере идентична вышерассмотренной задаче. Ниже получено аналитическое неавтономное решение обтекания тела плоским околосзвуковым нестационарным потоком идеального газа, когда на его поверхности появляется локальная сверхзвуковая зона. Первые теоретические исследования трансзвуковых задач были выполнены для течений $M_{\infty} \leq M_{\infty} \leq 1$, после прохождения, которого на профиле развивается местная сверхзвуковая зона, оканчивающаяся скачком уплотнения (иногда нет). Проведя очень сложное исследование Моравец утверждала, что решение с местной сверхзвуковой зоной без ударной волны обычно не имеет стационарных решений. Это утверждение в течении многих лет служило предметом полемики среди исследователей. В настоящее время, свойства трансзвукового течения пытаются использовать для увеличения подъемной силы при одновременном утолщении профилей. Эта цель стимулировала интенсивное развитие методов расчета для стационарных потоков. Но для нестационарных течений многие задачи для трансзвукового режима еще не решены и требуют своего исследования.

Система уравнений плоского неустановившегося околосзвукового течения идеального газа записывается в виде

$$UU_x + 2U_y = V_y, \quad U_y = V_x \quad (39)$$

Соответствующее решение для этой системы найдено как

$$\begin{cases} U(x, y, t) = yF(\eta) + y^4 + e^{-kt}, & \eta = x + y^3 / 3 + e^{-kt} / 2k \\ V(x, y, t) = (F^2 / 8 - 3\eta^2 / 2) + (F + 4\eta)y^3 - 2y^3 / 3 - 2ke^{-kt} + (3 / 32)e^{-2kt} / k^2 \end{cases} \quad (40)$$

В ходе вычисления получены дифференциальные уравнения

$$FF'' + F'^2 - 4F' - 12 = 0, \quad FF' - 4F - 12\eta = 0 \quad (41)$$

решения, которых в параметрическом виде, записываются

$$\eta = C_1 Z^6 + C_2 Z^{-2}, \quad F = 6C_1 Z^3 - 2C_2 Z^{-2}, \quad Z = e^{\eta}$$

Полученная интегральная кривая показывает изменение функции U на оси $y=0$. Сначала дозвуковая скорость на оси растет, затем уменьшается, а на достаточно далеком расстоянии от границы струи функция U может стать положительной, т.е. появляются локальные сверхзвуковые зоны на профиле тела. Уравнения звуковой линии определяется из $U=0$.

$$F(\eta) = -y^3 - e^{-kt} / y, \quad x = \eta - y^3 / 3 - e^{-kt} / 2k \quad (42)$$

Отметим, что все искомые функции записаны в параметрическом виде, которые удобны для расчетов. При $C_1 = C_2 = 0$ получаем асимптоты кривых, а при $t \rightarrow \infty$, $F = x$ имеем решение стационарной задачи, которую можно сравнить с работой Ф.Франкля (рис.11).

Четвертая глава состоит из трех параграфов, где на основании предложенной математической модели исследуются эти уравнения в околосзвуковом приближении как для плоского, так и для осесимметричных течений идеального газа.

В начале рассматривается уравнение двумерного безвихревого течения газа, когда величина скорости мало отличается от звуковой, т.е.

$$k(\sigma) \approx \sigma, \quad \varphi_{\psi} = \theta_{\sigma}, \quad \varphi_{\sigma} = (\theta_{\sigma}^2 + \sigma) / \theta_{\sigma} \quad (43)$$

Уравнения точно решаются если принять

$$\begin{aligned} 1. \theta(\sigma, \psi) &= F_0(\sigma) \cdot F_1(\psi), & 2. \theta(\sigma, \psi) &= F(U), \quad U = a\sigma^n + b\psi^k, \\ 3. \theta(\sigma, \psi) &= F_0(\psi) + F_1(\psi)\sigma^n, & 4. \theta(\sigma, \psi) &= [F_0(\sigma) + F_1(\sigma)F_2(\psi)]^{1/2} \end{aligned} \quad (44)$$

Эти решения найдены в явной форме, которые описывают различные виды течения и они подробно исследованы (течения в различных каналах, соплах, обтекание тел и т.д., рис.12, рис.13, рис.14).

Выше исследовали уравнение, используя гипотетический газ, приближающийся к реальному только в окрестности звуковой линии. Для такого газа фундаментальное уравнение (43) проще по форме и отдельных случаях, точно решается. Но этот газ имеет тот недостаток, что он заменяет реальный газ с изэнтропическим законом состояния только в узком диапазоне околосзвуковых течений. Ниже предлагается аппроксимация вида

$k(\sigma) \approx e^{h\sigma} - 1$, в результате получаемое уравнение более сложное по форме и точнее к реальному газу (рис. 15). Для этого уравнения приведены два точных решения при помощи классического метода разделения переменных.

В газовой динамике существуют специальные классы дифференциальных уравнений в частных производных, а также системы уравнений инвариантные относительно специальных преобразований. Применение методов теории групп, позволяет обозреть с единой точки зрения свойства различных классов точных частных решений ряда прикладных наук, среди них немаловажное значение имеют групповые преобразования, в частности автомодельные - симметричные. В понятиях групп даны строгие математические определения. Под инвариантами групп преобразований подразумеваются различные алгебраические, дифференциальные и другие математические выражения, не изменяющие их при применении той или иной группы преобразований. Теория групп позволяет уменьшить число независимых переменных. Проиллюстрируем эффективность вышеуказанного метода на уравнении вида (43). Будем искать решение этой системы в автомодельной форме

$$\theta(\sigma, \psi) = \sigma^{3/2} f(\xi), \quad \varphi(\sigma, \psi) = \psi \sigma^{3/2} f_1(\xi), \quad \xi = \psi / \sigma^n \quad (45)$$

в результате имеем обыкновенное нелинейное уравнение второго порядка. Если поменять местами функцию f_n независимую переменную ξ , ввести другую независимую переменную z , то получим гипергеометрическое уравнение Гаусса, где двумя независимыми решениями будут

$$\begin{aligned} y_1 &= A_0 F \left[\begin{matrix} -2n/3, -2(n-1)/3; \\ (5-4n)/6; \end{matrix} z \right] \\ y_2 &= D_0 z^{(1+4n)/6} F \left[\begin{matrix} 1/6, 5/6; \\ (7+4n)/6; \end{matrix} z \right] \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь возможно два случая: А. Общий интеграл в целом представляется в виде алгебраической функции. В. Один из двух линейно-независимых решений является алгебраическим многочленом, а другое не может быть приведено к алгебраической функции.

Условие А. выполняется, если выполняется, когда модуль разности показателей $\lambda = 1 - n$, $\mu = b - c$, $\nu = c - a - b$ вычисленный с точностью до целой части, укладывается в известную таблицу Шварца и найдены четыре семейства решений. Условие В. выполняется, когда n принимает значения $3k$, $3k + 1$, $3k + 3/2$, $3k + 5/2$ и $-(3k + 1/2)$, $-(3k + 3/2)$, $-(3k + 2)$, $-(3k + 3)$. Приведены примеры для А. при различных значениях n , а также другие решения и их графики. Отметим, что полученные частные решения не все описывают реальную картину на физической плоскости - именно об этом утверждает теория групп. Другими словами, очевидная симметрия математической постановки задачи не обязательно должна приводить к симметрии реального физического решения. Среди вышеуказанных частных решений есть решения, найденные другими авторами (рис. 16, рис. 17).

Идеей линейризации околосвуковых уравнений, путем замены нелинейного члена некоторой постоянной величиной, были заражены многие ученые. Приближенные методы исследования перехода газа через скорость звука были предложены многими авторами. Например, уравнение Кармана для плоского стационарного потока Бербом заменил линейным уравнением теплопроводности. И, как утверждает К.Осватич, параболическое уравнение дает поразительно хорошие результаты не только в непосредственной близости звуковой линии, но и в основной части поля течения. И хотя в области линейризации существуют ряд хороших исследований, достижений, но математически удовлетворительного обоснования этой теории не существует.

Рассмотрим уравнение (43). Если ввести потенциальную функцию $\sigma = U_\sigma$, $\theta = U_\psi$ и переменную $t = \frac{1}{\gamma + 1} \int_0^z G(z) dz$ то получим линейное уравнение параболического типа

$$\theta_\sigma = \theta_{\psi\psi}, \quad U_t = U_{xx}, \quad t \sim \varphi, \quad x \sim \psi, \quad U \sim \theta, \quad (47)$$

и которое нами исследуется. Вначале предположим, что есть решение вида

$$U(x, t) = f_0(t) \cdot f_1(\xi), \quad \xi = x^2 / t \quad (48)$$

тогда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение - вырожденное гипергеометрическое уравнение, имеющее два линейно-независимых решения. При $k=0; 1; 2; n, k=1/2; 3/2; \dots (2n-1)/2$ - первое и второе независимые решения могут быть представлены в виде конечного полинома, соответственно. Приведены четыре класса частных решения, причем одно из решений описывает сопловое решение Мейеровского типа. Далее предложены еще два вида решений уравнения (53)

$$\begin{aligned} 1. \theta(\varphi, \psi) &= f_0(\psi) f_1(z) + f_2(\psi) f_3(\varphi), \quad z = \psi + b\varphi \\ 2. \theta(\varphi, \psi) &= \mu(\varphi) \omega(z) + \gamma(\varphi), \quad z = \alpha(\varphi) \{ \psi - \beta(\varphi) \} \end{aligned} \quad (49)$$

которые образуют целые классы решений, записанных в полиномах Чебышева-Эрмита, интеграла ошибок, через параметры вырожденной гипергеометрической функции Гаусса, конечные значения которых известны. Предлагаемые методы исследования могут применяться и для других уравнений. В частности, здесь исследовано уравнение для осесимметричного течения, где решение найдено в функциях Бесселя и подтверждается высказывание К.Осватича, что линейризованные уравнения в околосвуковом приближении, хорошо описывают обтекание тел. течения в криволинейных каналах и в соплах с криволинейной звуковой линией.

Пятая глава, состоящая из пяти параграфов, посвящена изучению нестационарных течений. Исследование течений удобнее вести опираясь не на

систему уравнений, а на одно уравнение второго порядка для её потенциала. Выше было проведено исследование частного случая полного уравнения-классической околозвуковой уравнения Лия-Рейснера-Тзяна (Л.Р.Т.). Сравнение указывает, что для уравнения Л.Р.Т. характеристической поверхностью для точечного источника является параболоид вращения, а для полного уравнения сфера, радиус, которого растет пропорционально времени. Задача Коши в моменты времени $t = t_0$ для уравнения Л.Р.Т. будет некорректно поставленной, сигналы вниз по потоку передаются с бесконечной скоростью, образуются характеристические плоскости $t = \text{const}$. Чтобы уйти от этих недостатков приближенного уравнения, исследуем, в качестве модельного уравнения и понимания основных закономерностей нестационарных явлений, следующее уравнение

$$-(\varphi_x + b_0 \varphi_t) \varphi_{xx} + \varphi_{\tau\tau} + \varphi_r / r - 2\varphi_{\tau r} - \varphi_{\tau\tau} = 0 \quad (50)$$

$\varphi_x + b_0 \varphi_t = 0$ - уравнение звуковой поверхности;

$-(\varphi_x + b_0 \varphi_t) F_x^2 + F_t^2 - 2F_x F_t - F_t^2 = 0$ - уравнение характеристик.

Начально-краевые условия таковы

$$\varphi(x, r, 0) = F_0(x, r), \quad \varphi(x, 0, t) = F_1(x, r) = x + A_0(t)x^2 + A_1(t)x^3 + \dots$$

Решение уравнения (50) найдено в виде

$$\varphi(x, r, t) \approx (2x^2 + 4xr^2 + r^4) \cdot (1 + c_1 e^{2t}) / (1 - c_1 e^{2t}) \quad (51)$$

$$x = -r^2 - 1/T_1 \pm \sqrt{r^4/2 + 1/T_2} - \text{звуковая поверхность:}$$

$$y = [4r_0 x^2 + 4r_0^3 x + c(r_0)] \Gamma(t) - \text{профиль сопла.}$$

Геометрическое место точек, в которых вектор скорости горизонтален определяется из $\varphi_r = 0$, которая расположена ниже звуковой поверхности. Вышеуказанное решение (51) нами получено впервые. Здесь звуковая поверхность имеет одно положение остановки на оси, а именно в самом узком месте сопла. Но это решение не имеет произвольную постоянную, которая могла бы изменять характеристики сопла и потока. Ниже предлагается другой подход при исследовании уравнения (50), находится решение, которое является наиболее общим чем (51), а также полученными другими авторами.

Пусть решение исследуемого уравнения представляется в форме

$$\varphi(x, r, t) = F_0(x, t) + r^2 F_1(x, t) + r^4 T(t) \quad (52)$$

тогда получим систему из четырех уравнений. Разрешая эту систему, получим искомую функцию в видах:

$$\varphi(x, r, t) = \frac{\lambda x^2}{2b_0} + c_3(t)x + c_4(t) + r^2[a_1(t)x + a_2(t)] + r^4 \left[\frac{-c_1}{\lambda} e^{-\lambda t} + c_2 \right]$$

$$\varphi(x, r, t) = \frac{\lambda x^2}{2b_0} + c_3(t)x + c_4(t) + r^2[a_1(t)x + a_2(t)] + r^4$$

$$\varphi(x, r, t) = \frac{e^{2t}}{16c_2} + r^2 e^t + c_2 r^4, \quad \xi = b_0 x - t$$

Анализ полученных решений указывает на то, что они описывают сопловые течения с криволинейной звуковой поверхностью, которая вогнута вверх по потоку. Профиль сопла и характеристики потока определяются как и в вышеприведенной задаче.

Далее основное уравнение Л.Р.Т. линеаризуется и предлагаются методы его решения. Допуская наличие тех или иных априорных допущений о малости, постоянстве и ограниченной зависимости составляющих нелинейных членов в уравнениях околозвуковых течений. Эти допущения иногда не дают возможности математически обосновать метод и оценить решение, и тем не менее, этим методом можно получить ряд интересных результатов. Такие методы разрабатывали К.Осватич, Ф.Кейне, Дж.Спрейтер и другие. Идея заключается в замене нелинейного члена постоянной, а после получения решения она заменяется первоначальным значением.

Итак, уравнение Л.Р.Т. заменой по Осватичу запишется

$$-\lambda \varphi_x + \varphi_{\tau\tau} + \varphi_r / r - 2\varphi_{\tau r} = 0 \quad (53)$$

Решения этого уравнения найдены в виде двух классов решений

$$\varphi(x, r, t) = B(x, r) \cdot \exp z, \quad z = at + bx \quad (54)$$

$$1. B(x, r) = B_0(x) \cdot V_1(r), \quad 2. B(x, r) = f_0(x) \cdot f_1(\xi), \quad \xi = r^2 / x$$

где $B_0(x)$ -любая функция, $V_1(x)$ -определяется в функциях Бесселя. Широкий класс решений определен при $b=0$. Используя один из рядов Куммера определили еще четыре класса решений, рекуррентные относительно параметра k . Используя преобразование Уиттекера-Ватсона получаем уравнение, которое разрешается в функциях Уиттекера. Отмечены другие решения: при $b=2a$ решения находятся в функциях Бесселя, при $b=1/2$ -в функциях параболического цилиндра (полиномы Эрмита), при $a=1$ -в неполных гамма функциях, при $a=-n$ -в полиномах Лаггера. Вышеуказанные специальные функции расширяют классы решений и они общеизвестны. Один из классов решений содержит сопловое решение Мейеровского типа. Таким образом, здесь развита идея К.Спрейтера, найдены и расширены классы новых решений, в том числе и сопловые.

Далее, снова обратимся к уравнению (50), где решение найдено в виде

$$\varphi(x, r, t) = x^2 / b_0 + a_4(t)x + a_5(t) + r^2[a_1(t)x + a_2(t)] \quad (55)$$

которое используется при расчете течений в криволинейном канале, заданием условий на оси. Следующий шаг исследования уравнения (50) таков. Предположим, что существует обычное допущение о малости нестационарных возмущений по сравнению со стационарными, т.е. существует неравенство

$$|\text{grad } \varphi_{\text{H}}| \ll |\text{grad } \varphi_{\text{C}}|, \text{ тогда } \varphi(x, r, t) = \varphi_{\text{C}}(x, r) + \varepsilon \varphi_{\text{H}}(x, r, t) \quad (56)$$

Тогда относительно стационарного потенциала скоростей получаем уравнение Кармана, а нестационарная часть записывается в виде линейного уравнения

$$-\varphi_{\text{Cxx}} \varphi_{\text{Hxx}} + \varphi_{\text{Hrr}} + \varphi_{\text{Hr}} / r - 2\varphi_{\text{Hrx}} - \varphi_{\text{Hr}} - (b_0 \varphi_{\text{H}} + \varphi_{\text{Hx}}) \varphi_{\text{Cxx}} = 0 \quad (57)$$

Решение последнего уравнения ищем комбинированным методом-разделения переменных и автомодельным

$$\varphi_{\text{H}}(x, r, t) = r^n f_1(\xi) \cdot e^{\lambda t}, \quad \xi = x / r^2 \quad (58)$$

в результате получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение, которое при помощи некоторого преобразования независимого переменного переходит в гипергеометрическое уравнение Гаусса. Это уравнение имеет решение, для γ не равное целому числу. При различных значениях n получаем алгебраические полиномы различных степеней, а при $t \rightarrow \infty$ имеем решения для стационарного потока.

Для второго случая $\varepsilon \rightarrow 1$ имеем систему уравнений, в котором первое уравнение также есть уравнение Кармана, а второе как нелинейное уравнение в частных производных обобщающее, все другие уравнения и наиболее близкое к полному уравнению для потенциала скоростей

$$-[\varphi_{\text{Hx}} + b_0 \varphi_{\text{H}} + \varphi_{\text{Cxx}}] \varphi_{\text{Hxx}} + \varphi_{\text{Hrr}} + \varphi_{\text{Hr}} / r - 2\varphi_{\text{Hrx}} - \varphi_{\text{Hr}} - \varphi_{\text{Cxx}} (\varphi_{\text{Hx}} + b_0 \varphi_{\text{H}}) = 0 \quad (59)$$

С учетом (56, 58) для уравнения (59) имеем одно из решений вида

$$\varphi(x, r, t) = ax^2 + a^2 xr^2 + a^3 r^4 / 8 + x[b(2a + b)r^2 + (c_1 e^{\lambda t} + c_2)] + [c_3 r^4 + (c_4 + c_7 e^{\lambda t})r^2 + (c_5 + c_6) e^{\lambda t} + c_8] \quad (60)$$

Это решение можно использовать как нестационарное течение в симметричном, а также в несимметричном сопле Мейеровского типа, которое обобщает все предыдущие решения.

И, наконец, рассматривается другой прием линеаризации уравнения Л.Р.Т., а следовательно, исследуются другие виды автомодельных решений, описывающие широкий класс возможных физических явлений. Предложенная математическая модель проще чем уравнение Л.Р.Т., подчиняющаяся строгой теории околосзвуковых течений. Поэтому возникает вопрос об обосновании соответствующего подхода и, не менее важно, нахождение решений, а также указания соответствия между решениями линеаризованного уравнения и классическим уравнением Линя-Рейснера-Тзяна.

Рассмотрим следующее уравнение

$$-x\varphi_{\text{Cxx}} + \varphi_{\text{Crr}} + \varphi_{\text{Cr}} / r - 2\varphi_{\text{Crx}} = 0 \quad (61)$$

Продифференцировав его по x и приняв $\varphi_x = U$ имеем

$$-[U_x + xU_{\text{Cxx}}] + U_{\text{Crr}} + U_{\text{Cr}} / r - 2U_{\text{Crx}} = 0 \quad (62)$$

которое является объектом наших исследований.

Решение уравнения (62) представимо в виде

$$U(x, r, t) = r^k f(\xi, \eta), \quad \xi = x \cdot r^n, \quad \eta = t \cdot r^m \quad (63)$$

тогда имеем следующее уравнение в частных производных второго порядка

$$-\xi(1 - 4\xi)f_{\xi\xi} + [-1 - 4(k - 1)\xi]f_{\xi}^2 + k^2 f - 2f_{\xi\eta} = 0 \quad (64)$$

одним из решений, которого есть

$$U(x, r, t) = B(t)x + [2B'(t) + B(t)]r^2 / 4$$

сопловое решение с криволинейной звуковой поверхностью.

Приведены решения в виде квадратного полинома, а также в полиномах произвольной степени n .

Применен другой метод решения, из которого получаем гипергеометрическое уравнение Гаусса, обладающее рядом решений зависящих от своих параметров α , β и γ . Свойства этого уравнения известны, причем два линейно-независимых решения могут быть неограниченно аналитически продолжаемы на всю Z плоскость за исключением, быть может, трех точек: $z=0$; 1 ; ∞ , которые являются точками ветвления. Произвольное значение параметра b позволяет получить новые классы решений, а две линейно-независимые решения являются аналитическими выражениями.

Основные выводы проведенных исследований сводятся к следующему:

1. Предложена новая система дифференциальных уравнений для осесимметричного потенциального течения идеального газа в модульной плоскости - модуль скорости σ и функция тока ψ , которая позволяет более эффективно находить аналитические решения задач теории сопла Лавала, является наиболее универсальным и эффективным по сравнению с другими системами дифференциальных уравнений, дает возможность с одинаковой точки зрения исследовать большинство задач околосзвуковой газовой динамики.
2. При помощи симбиоза асимптотического метода малых возмущений и автомодельного метода решена «прямая» задача сопла, заданием краевых условий на стенке и определены все характерные поверхности потока с учетом трех приближений.

3. Решены две задачи профилирования сопла в модульной плоскости, а именно, задача с местными сверхзвуковыми зонами в окрестности критического сечения и с прямой звуковой линией.
4. Развита асимптотический метод малого параметра, для этого решена нестационарная задача теории сопла Лавала с криволинейной звуковой поверхностью и задача профилирования осесимметричного сопла с локальными сверхзвуковыми зонами в окрестности критического сечения
5. Для основного квазилинейного уравнения газодинамики в околосредовом приближении, определены специальным образом выбранные частные решения и четыре класса автомодельных решений. Полученные решения описывают различные виды течения в криволинейных каналах, соплах, диффузорах, при обтекании различных тел, углов и т.д.
6. Разработаны и изучены виды линеаризации классического уравнения Кармана и Линя-Рейснера-Тзяна. Построены классы частных решений этих уравнений и указаны сопловые течения Мейеровского типа.
7. Для обобщенного нестационарного околосредового течения разработан класс точных решений, которые являются наиболее общими, описывающие нестационарные течения в криволинейных каналах и в осесимметричных соплах.
8. Конечные результаты исследований получены в формульном виде, удобные для практического применения и дают хорошие совпадения с известными экспериментальными и численными работами, что говорит об их надежности.

**Основное содержание диссертации опубликовано
в следующих работах:**

1. Бийбосунув И.Б., Табышов Р., Туганбаев У.М., Чечейбаев Б. Плоские и осесимметричные течения газа в сопле Лавала. V Всесоюзный съезд по теор. и приклад. механике. Аннот. докл. Алма-Ата: Наука, 1981. -с.61.
2. Туганбаев У.М. Осесимметричная задача теории сопла Лавала. Исследования по теории плоских и осесимметричных течений жидкости и газа. Фрунзе: Илим, 1981. -с.36-47.
3. Туганбаев У.М. Плоское трансзвуковое течение идеального газа в сопле Лавала. Исследования по теории плоских и осесимметричных течений жидкости и газа. Фрунзе: Илим, 1981. -с. 48-55.
4. Туганбаев У.М., Чечейбаев Б. Сопло с прямой звуковой линией перехода. I республиканская научно-техническая конференция молодых ученых Киргизии, секция «физико-математические науки». Фрунзе, 1981. -с. 46-48.
5. Туганбаев У.М. Метод решения прямой задачи теории сопла Лавала. I республиканская научно-техническая конференция молодых ученых Киргизии, секция «физико-математические науки». Фрунзе, 1981. -с. 48.
6. Бийбосунув И.Б., Туганбаев У.М. Об одном методе решения плоской и осесимметричной задачи теории сопла Лавала. Исследование по спец. задачам

8. Туганбаев У.М. Сопло с плоской звуковой поверхностью. Плоские и пространственные задачи механики сплошной среды. Фрунзе: Илим, 1983. -с.63-68.
9. Сулайманова С., Табышов Р., Туганбаев У.М., Чечейбаев Б. Одно- и двухфазные течения в соплах. Конференция молодых математиков. Свердловск, 1987. -с.40-41.
10. Сулайманова С., Туганбаев У.М., Чечейбаев Б. Исследование газовых течений в трансзвуковом режиме скоростей. Конференция молодых математиков. Свердловск, 1987. -с.38-39.
11. Туганбаев У.М., Чеховская Р. А. Исследование некоторых частных решений уравнений околосредового газодинамики. Моделирование процессов гидрогазодинамики и энергетики: Труды Всесоюзной конференции молодых ученых и специалистов. Новосибирск, 1985. -с.136.
12. Туганбаев У.М. Численное решение задачи теории сопла Лавала с осевой симметрией. Кырг. мугал. даярдоонун айрым маселелери. Бишкек, 1992. -с.58.
13. Туганбаев У.М. К вопросу о разложении функции скорости. Жыйынтыкт. илимий конф. тезистери. Бишкек, 1993. -с.90а.
14. Туганбаев У.М. Метод решения осесимметричной задачи сопла Лавала. Жыйынтыкт. илимий конф. тезистери. Бишкек, 1993.-с.90.
15. Туганбаев У.М. К решению уравнения диффузии. Жыйынтыкт. илимий конф. тезистери. Бишкек, 1993.-с.90в.
16. Бийбосунув И., Туганбаев У.М. Автомодельные решения квазилинейного уравнения околосредового течения идеального газа. Депониров. в РНТБ РК. Бишкек, 1993. -с.31.
17. Туганбаев У.М. О частных решениях уравнения околосредового плоского течения идеального газа. Депониров. в РНТБ РК. Бишкек, 1993. -с.16.
18. Туганбаев У.М. Алгоритм численного решения одной краевой задачи. Депониров. в РНТБ РК. Бишкек, 1993. -с.7.
19. Туганбаев У.М. Аналитическое решение нелинейного уравнения диффузии. Дифф. уравнения и их приложения. Ош, 1993. -с.106.
20. Туганбаев У.М. Вывод и решение уравнения Трикоми в плоскости (σ, φ) Илимий конф. материалдары жана тезистери. Бишкек, 1996. -с.52.
21. Туганбаев У.М. Нестационарные течения газа в сопле с криволинейной звуковой поверхностью. Науч. консульт. и кадр. обеспеч. аграрной реформы в Кыргызской Республике. Сб. научных трудов. Вып.1. Бишкек, 1997. -с.49-53.
22. Туганбаев У.М. Неустановившиеся околосредовые течения в сопле типа Тейлора. Науч. консульт. и кадр. обеспеч. аграрной реформы в Кыргызской Республике. Сб. научных трудов. Вып.1. Бишкек, 1997. -с.60-67.
23. Туганбаев У.М. К линеаризации уравнения смешанного типа. Традиции инновации в культуре университет. образования. Ч.2, Бишкек, 1998.-с.74-78.
24. Туганбаев У.М. Об автомодельных решениях линеаризованного уравнения Кармана. Вестник технического университета «Дастан». Вып.1. Бишкек, 1998. -с.128-131.

25. Туганбаев У.М. О решениях уравнения параболического типа. Вестник технического университета «Дастан». Вып.1. Бишкек, 1998. –с.123-127.
26. Туганбаев У.М. Нестационарные течения газа в сопле с прямолинейной звуковой поверхностью. Проблемы и достижения в образовании и научно-исслед. работе. Сб. научных трудов. Вып.2. Бишкек, 1999. –с.126-130.
27. Туганбаев У.М. Аналитические решения уравнения околозвукового плоского течения газа. Сб. науч. трудов. Вып.1, БВКК. Бишкек, 1999. –с.349-353.
28. Бийбосунов И.Б., Туганбаев У.М. Современные аналитические и приближенно-аналитические методы плоских и осесимметричных течений газовой динамики. Бишкек: Илим, 1999. –с.195.
29. Туганбаев У.М. Асимптотическое исследование течения в сопле. Проблемы вычислительной математики и информационных технологий. Матер. международной научно-практической конференции (25-26 марта 1999), Алматы, 1999. –с.360-361.
30. Туганбаев У.М., Дыйканова А.Т. Осесимметричное сопло с прямой звуковой линией. Проблемы вычислительной математики и информационных технологий. Матер. междунар. научно-практич. конф. (25-26 марта 1999), Алматы, 1999. –с.361-362.
31. Туганбаев У.М. О возможных течениях в соплах для нестационарных потоков. Сб. науч. трудов КГПУ им. Арабаева, вып. IV. Бишкек, 2000. –с.196-199.
32. Туганбаев У.М. Мейеровское течение в сопле для нестационарного потока газа. Сб. науч. трудов КГПУ им. Арабаева, вып. IV, Бишкек, 2000. –с.200-203.
33. Туганбаев У.М. О частных решениях уравнения Трикоми. Сб. научных трудов КГПУ им. Арабаева, вып. IV, Бишкек, 2000. –с.203-207.
34. Туганбаев У.М. Автомодельные решения линейного нестационарного уравнения газодинамики. Сб. научных трудов КГПУ им. Арабаева, вып. IV, Бишкек, 2000. –с.207-211.
35. Туганбаев У.М. О нестационарных околозвуковых течениях в соплах Лавала. Вестник КГНУ, Проблемы математики и информ. в XXI веке. Труды Междунар. науч. конф. Вып.4, серия 3, Бишкек, 2000. –с.228-231.
36. Туганбаев У.М., Дыйканова А.Т. Исследование несимметричных течений в осесимметричных соплах // Проблемы строительства и архитектуры на пороге XXI века. Часть 3, Бишкек «Илим»:2000. –с.145-149.
37. Туганбаев У.М. Нестационарные течения в соплах с двумя сужениями. Вестник КГНУ, Сер.3. Вып.5 Естеств.-технические науки, Бишкек, 2001. –с.197-200.
38. Туганбаев У.М. Сверхзвуковая зона на профиле тела для нестационарного потока. Современ. проблемы механ. сплошных сред. Вып.1, Гидроаэромеханика и газовая динамика. Бишкек: 2001, –с.60-64.
39. Туганбаев У.М. Прямая звуковая линия в сопле для нестационарного течения газа // Современ. проблемы механ. сплошных сред. Вып.1, Гидроаэромеханика и газовая динамика. Бишкек, 2001. –с.84-92.

40. Туганбаев У.М. О решениях параболизированного уравнения трансзвукового течения газа // Современ. проблемы механ. сплошных сред. Вып.1, Гидроаэромеханика и газовая динамика. Бишкек, 2001. –с.115-120.
41. Туганбаев У.М. Точные аналитические решения нестационарного трансзвукового уравнения. // Современ. проблемы механ. сплошных сред. Вып.1, Гидроаэромеханика и газовая динамика. Бишкек, 2001. –с.141-147.
42. Туганбаев У.М. Изменение местных сверхзвуковых зон в сопле для неустановившегося течения газа // Современ. проблемы механ. сплошных сред. Вып.1, Гидроаэромеханика и газовая динамика. Бишкек, 2001. –с.156-161.
43. Туганбаев У.М., Дыйканова А.Т. Некоторые решения для полного уравнения потенциала скоростей // Проблемы матем. моделирования и информационных технологий. Докл. Межд. научн. конф., Бишкек, 2001. –с.145-148.
44. Туганбаев У.М. О классах автомодельных решений квазилинейного уравнения околозвукового течения газа // Вестник КГНУ, сер. 7, Естеств. – технич. науки. Бишкек, 2001 –с. 106-110.
45. Туганбаев У.М. Пример численного решения краевой задачи сопла Лавала, с осевой симметрией // Вестник КГНУ, сер. 7, Естеств. – технич. науки. Бишкек, 2001 –с.110-114.
46. Туганбаев У.М. К методике исследований околозвуковых течений // Материалы научно-практической конференции, Социально-экон. механизмы реализ. прогр. КОР Кырг. Республики (21-22 декабрь 2001) Часть 2, Бишкек, 2001. –с.260-268.
47. Туганбаев У.М., Дыйканова А.Т., Кыдырмаева С.С. К течению типа Мейера и Тейлора // Материалы научно-практической конференции, Социально-экон. механизмы реализ. прогр. КОР Кырг. Республики (21-22 декабрь 2001) Часть 2, Бишкек, 2001. –с.253-260.
48. Туганбаев У.М. К аппроксимации функции Чаплыгина // Проблемы реформирования и стратегия аграрной науки на рубеже XXI века. Матер. научно-практич. семинара посв. I съезду ученых Кырг. Республики. Наука Кырг. в XXI веке. Вып. 3, часть 2, Бишкек, 2001. –с.171-175.
49. Туганбаев У.М., Дыйканова А.Т., Калысова Н.А. К теории решений нестационарных околозвуковых уравнений // Вестник института экологии и природопользования при КГПУ им. И.Арабаева. Мат. Республ. науч. конф. посвящ. 50-летию КГПУ им. И.Арабаева. Вып.1, Бишкек, 2002. –с.171-175.

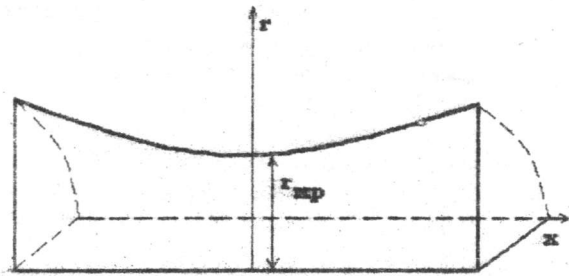


Рис. 1. Осесимметричное сопло.

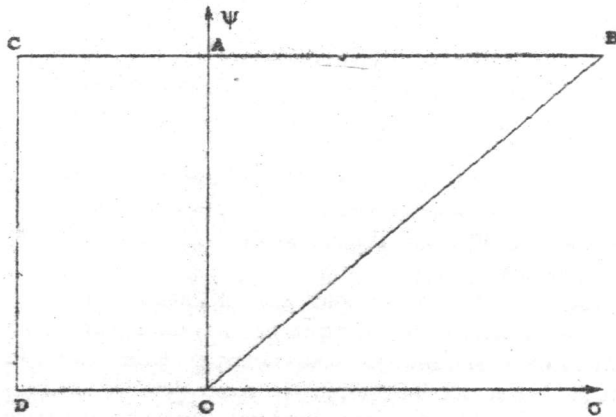


Рис. 2. Осесимметричное сопло в плоскости (σ, ψ) .

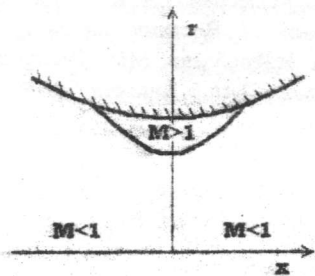


Рис. 3. Течение типа Тейлора.

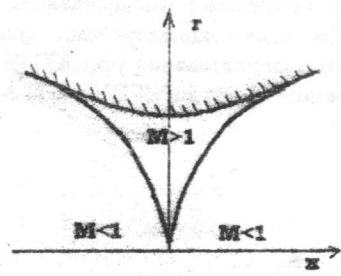


Рис. 4. Течение с сомкнувшимися сверхзвуковыми зонами

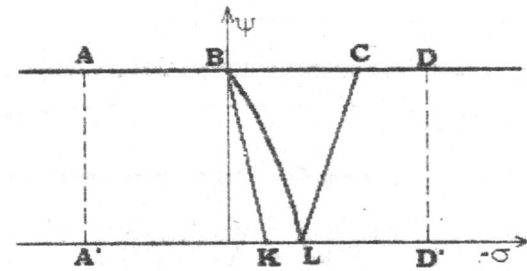


Рис. 5. Течение в плоскости (σ, ψ) .

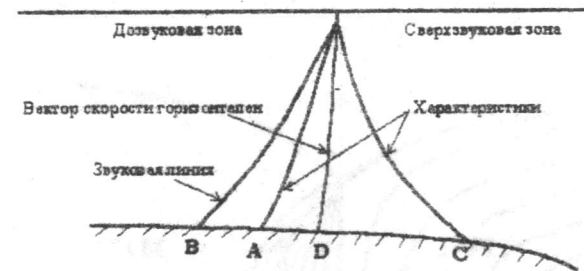


Рис. 6. Течение в сопле Лаваля Мейеровского типа.

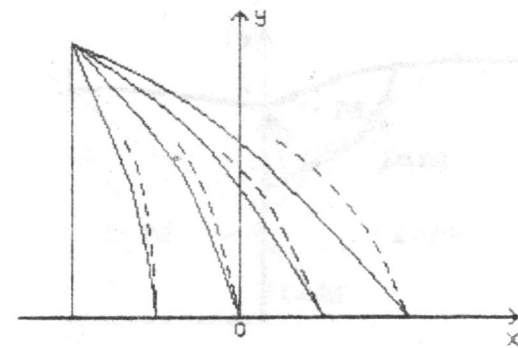


Рис. 7.

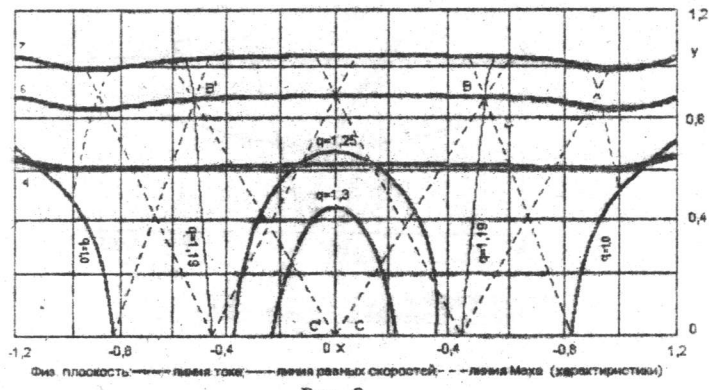


Рис. 8.

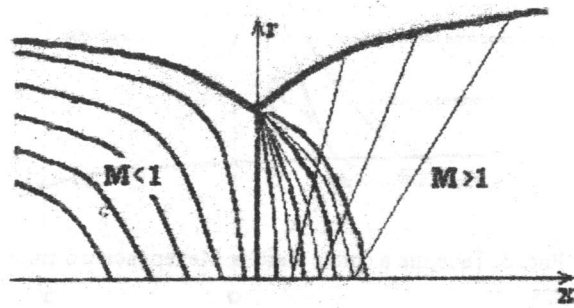


Рис. 9.

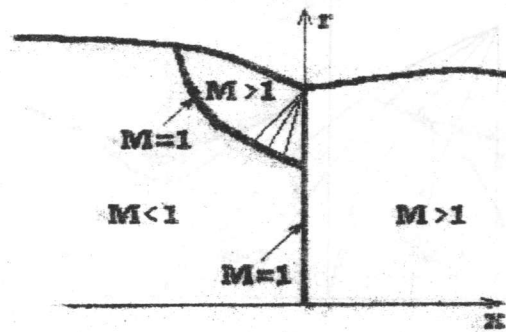


Рис. 10.

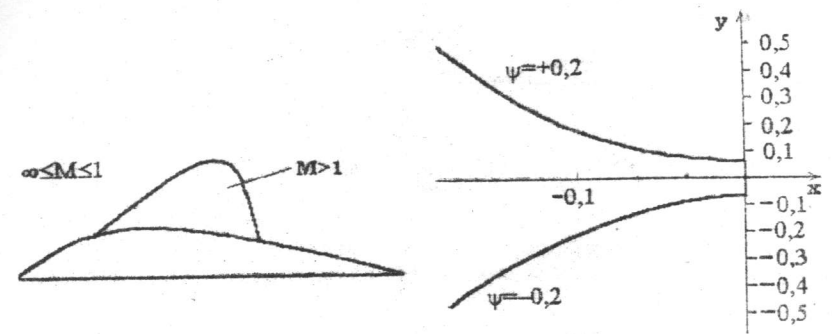


Рис. 11.

Рис. 12.

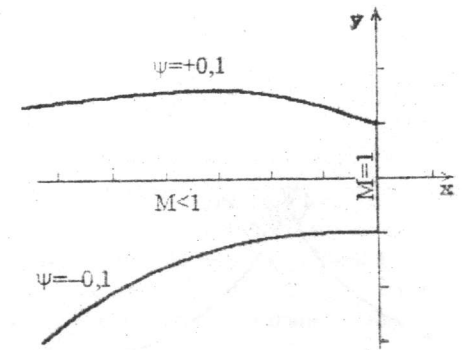


Рис. 13.

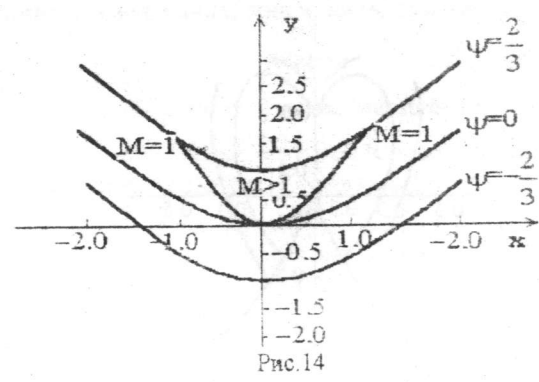


Рис. 14.

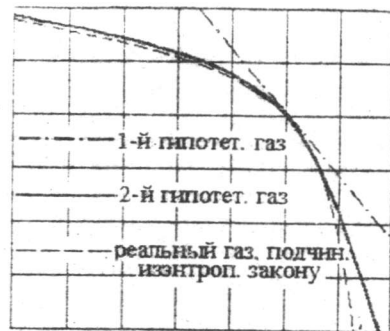


Рис. 15.

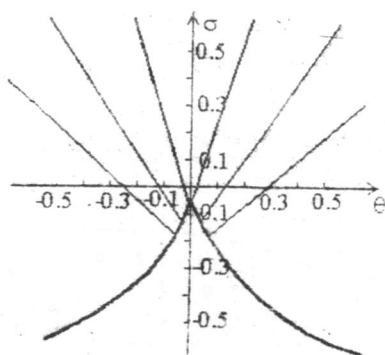


Рис.16

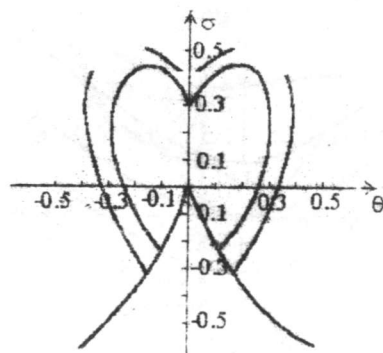


Рис. 17.

Аннотация

Туганбаев Уланбек Мансурович

«Приближенно - аналитическое исследование осесимметричных течений в соплах и в криволинейных каналах»

Диссертационная работа посвящена решению актуальных для науки и техники задач - разработке наиболее совершенных и оптимальных моделей процессов стационарных и нестационарных течений в соплах Лавала, при определении характерных параметров потока и при профилировании стенок сопла.

С помощью современного математического аппарата в ней теоретически исследован и дан обстоятельный анализ обоснования рациональных параметров движущегося потока газа в соплах и технология профилирования самих сопел и других криволинейных каналов.

Аннотация

Туганбаев Уланбек Мансурович

«Соплолор менен ийри сызыктуу каналдардагы окко симметриялык агымдарды аналитикалык жакындаштыруу жолу менен изилдөө»

Диссертациялык иш илим менен техниканын актуалдуу маселелерине - Лавалдын соплолорундагы стационардык жана стационардык эмес газдардын агымынын азыркы убактагы эн оптималдык моделдерин түзүүгө, алардын мүнөздөөчү параметрлерин аныктоого жана соплонун капталдарынын профилдеринин оптималдуу абалын табууга арналган.

Бул иште математикалык аппараттын эң акыркы жетишкендиктерин колдонуу менен соплодогу газдын агымынын рационалдык параметрлери негизделген жана сопло менен ийри сызыктуу каналдардын профилдеринин технологияларынын жаңы түрлөрү каралган.

Resume

Tuganbaev Ulanbek Mansurovich

«Approximate Analytical Research of the Axisymmetrical Flows in Nozzles and Curved Channels»

Tuganbaev's dissertation is devoted to the solution of the urgent scientific and technical problem - development of the most perfect and optimal models of the stationary and unstationary flow processes in Laval gas nozzles for determination of the stream typical parameters and profiling the sides of the nozzles.

The detailed analyses of substantiation of the rational parameters of the gas stream in nozzles and the technology of profiling of nozzles and other curved channels have been given and theoretically investigated on the use of modern mathematical methods.