МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ
Д.01.01.133

На правах рукописи
УДК 620.10

ДУЙШЕНАЛИЕВ ТУРАТБЕК БОЛОТБЕКОВИЧ

О ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИИ СТАТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Специальность 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

БИШКЕК 2002

Диссертационная работа выполнена в Кыргызском техническом университете им. И. Раззакова

Научные консультанты: член-корреспондент Национальной Академии Наук Кыргызской Республики, доктор технических наук, профессор **ОРМОНБЕКОВ Т. О.**,

доктор физико-математических наук, профессор **ВЛАСОВ Б. Ф.**

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор **ТРУШИН С. И.**,

доктор физико-математических наук, профессор **КУЗНЕЦОВ С. В.**,

доктор физико-математических наук, профессор **ТЮРЕХОДЖАЕВ А. Н.**

Ведущая организация: **Государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций им. В. А. Кучеренко», г. Москва**

Защита диссертации состоится 17 мая 2002 г. в 10 часов на заседании Межведомственного диссертационного Совета Д. 01.01.133 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук в Кыргызском техническом университете им. И. Раззакова по адресу: 720044, Кыргызская Республика, г. Бишкек, пр. Мира, 66.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Кыргызского технического университета им. И. Раззакова.

Автореферат разослан 16 апреля 2002 г.

Ученый секретарь Межведомственного диссертационного Совета канд. техн. наук, доц. Ж. Д. РАБИДИНОВА

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследований. Статическая краевая задача сформулирована давно и являлась предметом исследований многих известных ученых. Ведь большинство того, что создается человеком, рассчитывается в виде статической краевой задачи. И ныне она приковывает к себе пристальное внимание. Решение статической задачи является одной из основных проблем механики деформируемого твердого тела, а также имеет огромное теоретическое и практическое значение.

Тем не менее, оказалось, что общепринятый подход к решению такой задачи не соответствует ее постановке и является источником противоречий и осложнений. Статическая задача математически не определена и механически некорректна. В данной работе такое положение вещей анализируется всесторонне и предлагается новый нетрадиционный подход, который строго соответствует ее общепринятой постановке.

Исследования, где рассматриваются меры деформирования, имеют большое значение для механики деформируемого тела. В этой науке их роль подобна роли ускорения в механике Ньютона. Здесь показано, что тензор Коши, считающийся годным только для малых деформаций, на самом деле является полновесной характеристикой деформированного состояния при любых величинах деформаций.

Цель работы. В механике деформируемого тела статическая краевая задача имеет при формулировании одну постановку, а при решении – уже другую. Достаточно написать эти постановки и их различие будет явным. Для краткости, первую постановку можно назвать общепризнанной постановкой, а вторую – постановкой задачи классического подхода. Отсюда вытекают следующие цели и задачи.

- Анализ общепризнанной постановки статической краевой задачи и постановки задачи классического подхода.
- Показание математической нерешаемости задачи классического подхода и ее противоречия с основами механики. Анализ оговорок, применяемых при решении задачи классического подхода.
- Доказательство применимости теоремы Бетти и формул Сомильяны только при правильном решении.
- Приведение правильного решения задач сопротивления материалов, строительной механики и механики деформируемого тела.
- Исследование тензора Коши.

Методика исследований. Приводится детальный анализ уравнений равновесия и их механический смысл. Все расчеты проводятся компьютерными программами и сопровождаются графикой.

Научная новизна диссертации. Проведен тщательный анализ постановки статической краевой задачи и показана ошибочность существующего подхода к ее решению. Предлагается новое нетрадиционное решение, которое строго соответствует общепризнанной постановке такой задачи. Показано, что тензор Коши является полной характеристикой деформированного состояния.

Обоснованность и достоверность. Защищаемые в диссертации новые положения в статической краевой задаче и мерах деформирования обоснованы на общих принципах механики. Их достоверность иллюстрируется на многочисленных примерах, сопровождается компьютерной графикой.

Теоретическая и практическая ценность. Предлагаемое в работе новое решение статической краевой задачи строго соответствует ее общепризнанной постановке. Оно не нуждается в оговорках о близости начального и конечного состояний, и о статическом приложении действия.

Тензор деформации имеет такое же основополагающее место в механике деформируемого тела, какое имеет ускорение в теоретической механике. Приводимое в диссертации доказательство того, что тензор деформации Коши является полной характеристикой деформированного состояния при любых уровнях деформации, имеет большое значение. Новое воззрение на тензор Коши вводит в механику простоту, избавляя ее от деления на линейную и нелинейную теории.

Личный вклад. Подробно рассмотрено и анализировано несоответствие существующего подхода к решению статической краевой задачи с ее общепризнанной постановкой. Предложено новое решение, которое проиллюстрировано достаточным количеством примеров и компьютерной графикой.

Тщательному анализу подвергнут один из сложных вопросов механики деформируемого тела - меры деформирования. Здесь показано, что линейный тензор Коши является полной характеристикой деформированного состояния при малых и больших уровнях деформаций. Автором оставлены компьютерные программы в системе MathCAD и MATLAB.

Апробация работы. Основные результаты диссертации доложены на Всесоюзном координационном совещании «Экономичное армирование железобетонных конструкций» (Фрунзе, 1990 г.), XXII и XXIII Международной конференции в области бетона и железобетона (Иркутск, 1990 г. и Москва, 1991г.), научном семинаре кафедры строительной механики Пражского технического университета (Прага, Чешская Республика, 1995 г.), научном семинаре кафедры теории пластичности Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (Москва, 1996 г.), объединенном научном семинаре кафедр сопротивления материалов и строительной механики Московского государственного строительного университета (Москва, 1997 г.), Международной конференции «Традиции и новации в культуре университетского образования» (Бишкек, 1998 г.), научных семинарах члена-корреспондента НАН Кыргызской Республики, профессора Т.О. Ормонбекова (Бишкек, 2000 г.) и профессора С.А.Абдрахманова (Бишкек, 2000 г.), научном семинаре кафедры прикладной механики Брэдфордского университета (Брэдфорд, Великобритания, 2001 г.), XIX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов» (Санкт-Петербург, 2001 г.), научных семинарах кафедры механики Кыргызского технического университета им. И. Раззакова (1997-2002).

Публикации. По теме диссертационной работы опубликованы две монографии (соавтор А.Б. Жакыпбеков): «Некоторые основные вопросы механики

деформируемого тела» (1995), «Новое воззрение на некоторые основы механики деформируемого тела» (1999). А также 24 научные статьи в сборниках трудов Фрунзенского политехнического института, Кыргызского государственного университета транспорта, строительства и архитектуры, Кыргызского технического университета имени И. Раззакова, Трудах XIX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов» (Санкт-Петербург, 2001).

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 208 страницах машинописного текста, состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 155 наименований и приложений. Иллюстративный материал представлен рисунками, компьютерными графиками.

Автор защищает следующие основные положения:

1. Анализ общепризнанной постановки статической краевой задачи и постановки задачи классического подхода.

2. Обоснование математической неопределенности задачи классического подхода и ее противоречия с основами механики. Анализ оговорок, применяемых при решении задачи классического подхода.

3. Новый подход и нетрадиционное решение статической краевой задачи механики деформируемого твердого тела.

3. Доказательство применимости теоремы Бетти и формул Сомильяны при новом нетрадиционном решении статических краевых задач.

4. Решения задач сопротивления материалов, строительной механики и механики деформируемого тела с позиций нового подхода.

5. Исследование тензора Коши.

6. Новое воззрение на линейный тензор деформаций Коши.

Краткое содержание работы.

Во введении изложены направление исследований, их актуальность и цель.

Первая глава посвящена анализу общих и численных методов решения задач упругостатики. Рассмотрены различные формы представления этого общего решения: Б.Г.Галеркина, П.Ф.Папковича-Г.Нейбера и Б.Ф.Власова. Здесь же приведен гранично-элементный метод решения задач упругостатики и численная реализация МГЭ.

Во второй главе всесторонне анализируется статическая краевая задача.

Две постановки статической краевой задачи

Общепризнанная постановка. *Тело с заданными силами внутри своего объема V и на его поверхности S находится в равновесии. Найти напряжения и деформации внутри тела.* Тут объем тела V и его поверхность S, разумеется, должны быть заданы, в противном случае внешние силы не указываемы.

Статическая краевая задача общепризнанной постановки.

Пусть f_i и p_i соответственно внешние силы, заданные в V и на S. Обозначая через σ_{ij} компоненты напряжения, представим постановку математически

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \; x_i \in V \tag{1}$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\, f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0, \; x_i \in V \tag{2}$$

$$\sigma_{ji}\, n_j = p_i, \; x_i \in S, \tag{3}$$

где ν коэффициент Пуассона.

На рис.1 данная постановка проиллюстрирована графически. Приведенная выше постановка статической краевой задачи является общепризнанной. Все единодушно ее сначала формулируют так, но все, так же единодушно, решают задачу, имеющую совершенно другую постановку, которая приведена ниже. Это историческая коллизия.

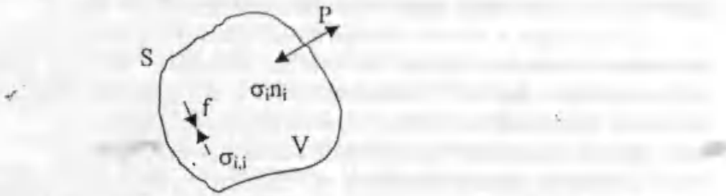

Рис.1. Иллюстрация уравнений статической краевой задачи. В любой точке внутри V и на S внешние усилия уравновешены внутренними напряжениями. σ_j –вектор напряжения на площадке с нормалью x_j.

Постановка задачи классического подхода. Известно начальное состояние тела (объем V_0, поверхность S_0). К нему прикладываются внешние силы и оно, двигаясь и деформируясь, переходит в другое состояние (V, S), в котором обретает равновесие. Найти конечное состояние равновесия и, появившиеся в нем, напряжения, деформации.

Статическая краевая задача классического подхода. Уравнения статической краевой задачи имеют силу только в состоянии равновесия. В постановке задачи классического подхода это состояние неизвестно, оно ищется. Уравнения этой задачи можно написать только в неопределенном виде

$\sigma_{ji,j} + f_i = 0,\ \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ x_i \in V$ (4)

$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij} f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0,\ x_i \in V$ (5)

$\sigma_{ji}\, n_j = p_i,\ x_i \in S$ (6)

Тут область определения уравнений (V, S) неизвестна. Для тела неизвестной конфигурации невозможно указать координаты точек приложения массовых сил, а так же сил на поверхности, следовательно, в уравнениях (4)-(6) неизвестны и **f**, **p**.

Математическая неопределенность и механическая некорректность задачи классического подхода. В задаче (4)-(6) неизвестны не только V, S, но и внешние силы **f**, **p**. Тут задача эта приобретает следующее содержание – найти решение дифференциальных уравнений равновесия и совместности с неизвестными силами в неизвестной области V, удовлетворяющее неизвестным условиям на неизвестной поверхности S. Математически нелепость такой задачи очевидна. Задача эта некорректна и с точки зрения механики. Здесь начальное состояние нагружается внешними силами и оно, двигаясь и деформируясь, переходит в некое состояние равновесия, которое надо найти. Этот процесс принципиально не описываем на основе уравнений равновесия.

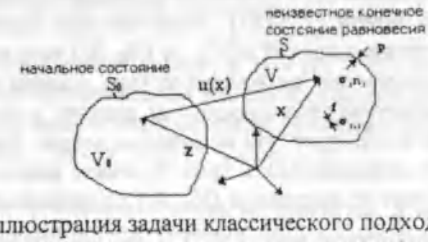

Рис.2. Иллюстрация задачи классического подхода. К начальному состоянию (V_0, S_0) прикладываются внешние силы и тело, двигаясь и деформируясь, переходит в конечное состояние (V, S), где обретает равновесие.

Математическая неопределенность и механическая некорректность задачи классического подхода вынуждают делать оговорки.

Оговорки, используемые в задаче классического подхода.

Оговорка, обусловленная математической неопределенностью.

В задаче классического подхода (V_0, S_0) - начальное состояние. Для него справедливы уравнения

$\sigma_{ji,j} = 0,\ \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ \ x_i \in V_0$ (7)

$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} = 0,\ \ x_i \in V_0$ (8)

$\sigma_{ji}\, n_j = 0,\ x_i \in S_0$. (9)

Эти уравнения и их решение $\sigma_{ij} \equiv 0$ имеют простое толкование, – начальное состояние без внешних сил и напряжений находится в равновесии.

В задаче классического подхода (4)-(6) неизвестны не только V, S, но и внешние силы **f**, **p**. Эта задача математически корректна в том и только в том случае, когда заданы эти величины. Как это сделать? Различие друг от друга состояний (V_0, S_0) и (V, S) может быть малым или большим.

Следуя классическому подходу, допустим, что это различие мало. Но областей (V, S), мало отличающихся от (V_0, S_0), бесконечное множество. Которой из них отдать предпочтение? Опять та же неопределенность. Обоснованного выхода из нее нет. Из этого тупика классический подход выходит крайне просто - в задаче (4)-(6) неизвестные V, S заменяются известными V_0, S_0

$\sigma_{ji,j} + f_i = 0,\ \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ x_i \in V_0$ (7*)

$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij} f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0,\ x_i \in V_0$ (8*)

$\sigma_{ji}\, n_j = p_i,\ x_i \in S_0$ (9*)

На деле, как видим, эта оговорка осталась не использованной, ибо она не введена в уравнения, следовательно, на их решение не оказывает никакого влияния. Однако она оказывает влияние на наше воображение, и мы, словно завороженные, принимаем (V_0, S_0) как за начальное, так и за конечное состояние тела. Осознаем, что это нелепо и выдвигаем еще одну оговорку - определяемые решением функции перемещений $u_i(x)$ и их градиенты должны быть малыми. Так появляется на свет линейная теория. Однако каково конечное состояние тела? Оно определяется с помощью функций перемещений $u_i(x)$, соответствующих решению задачи (7*)-(9*). Этим мы еще более усугубляем противоречие. Если внять уравнениям (7*)-(9*), то (V_0, S_0) есть состояние равновесия. Это равновесие, несомненно, не зависит от того, решена эта задача или нет. Поэтому, решение не отвергает равновесие - не двигает и не деформирует тело. Классический подход игнорирует это положение вещей. Он наделяет решение свойством двигать и деформировать тело. В задаче классического подхода решение перемещает тело из состояния (V_0, S_0) до положения (V, S). Это явное противоречие.

А в случае так называемых конечных деформаций, краевую задачу не только решить, но и написать невозможно. В задаче (4)-(6) неизвестны не только V, S, но и внешние силы **f**, **p**.

Оговорка, обусловленная механической некорректностью задачи классического подхода. Для замаливания механической некорректности вводится понятие о статическом приложении действия. Согласно ему, действие и вызванное им движение происходят настолько медленно, что на любом этапе можно говорит о том, что тело находится в равновесии. Это, якобы, открывает путь для описания процесса движения и деформирования тела уравнениями равновесия. Однако, дело в том, что у уравнений (4)-(6) нет одушевленности. Им, к примеру, не скажешь о том, что действительная область их определения (V, S) пока неизвестна и это вынуждает представлять их приблизительно в виде (7*)-(9*). Они не уловят и тот зов к криминалу, который содержится во второй оговорке - двигайте и деформируйте тело настолько медленно, чтобы все думали, что вы сохраняете равновесие добросовестно. Сговор с ними невозможен. Но оговорки эти легко принимаются на веру. Вместе с ними появляются линейная и нелинейная теории, и понятие о неопределенно долгом времени и осуществляемые за такое время нагружения, последовательность нагружений, разгрузка, последовательность разгрузки. Целая история.

Туратово решение статической краевой задачи. Вернемся к общепризнанной постановке статической краевой задачи. Решение, которое строго соответствует этой постановке названо Туратовым. Этим решением подразумеваются функции $\sigma_{ij}(x)$, удовлетворяющие уравнениям (1)-(3). Рассмотрим подробнее некоторые положения, вытекающие из статической краевой задачи.

Недвижимость материальных точек находящегося в равновесии тела. Равновесие в статической краевой задаче декларируется **a priory**, оно составляет ее суть. Это то, что не может быть предметом спора. Итак, рассматриваемое тело находится в равновесии. Мысленно вырежем некоторый объем тела V_ε с поверхностью S_ε. Главный вектор и главный момент приложенных к нему усилий определяются в виде

$$\int_{S_\varepsilon}\sigma_j n_j\,ds+\int_{V_\varepsilon}f\,dv,\qquad \int_{S_\varepsilon}r\times\sigma_j n_j\,ds+\int_{V_\varepsilon}r\times f\,dv, \tag{10}$$

где r - радиус вектор, σ_j - вектор напряжения на площадке с нормалью x_j.
Преобразование Остроградского - Гаусса позволяет написать эти выражения в виде

$$\int_{V_\varepsilon}(\sigma_{j,j}+f)\,dv,\qquad \int_{V_\varepsilon}(r\times(\sigma_{j,j}+f)+r_{,j}\times\sigma_j)\,dv. \tag{11}$$

Здесь ($\sigma_{j,j}$ + **f**) - главный вектор, а (**r** × ($\sigma_{j,j}$ + **f**) + $\mathbf{r}_{,j} \times \sigma_j$) - главный момент в точке. Это надо принимать так же, как и точечное определение массовых сил.
Для того чтобы выделенный объем не двигался и не вращался, необходимо

$$\int_{V_\varepsilon}(\sigma_{j,j}+f)\,dv=0,\qquad \int_{V_\varepsilon}(r\times(\sigma_{j,j}+f)+r_{,j}\times\sigma_j)\,dv=0.$$

Расширим это требование - пусть не двигается, и не вращается не только этот объем, но и всякий другой. В этом случае вышеприведенные уравнения должны удовлетворяться в любом произвольном объеме V_ε, что возможно только тогда, когда в каждой точке тела имеет место

$$\sigma_{j,j}+\mathbf{f}=0,\quad \mathbf{r}\times(\sigma_{j,j}+\mathbf{f})+\mathbf{r}_{,j}\times\sigma_j=0.\ x_i\in V. \tag{12}$$

Учтя первое во втором, окончательно напишем

$$\sigma_{j,j}+\mathbf{f}=0,\quad \mathbf{r}_{,j}\times\sigma_j=0.\ x_i\in V. \tag{13}$$

Эти уравнения присутствуют в краевой задаче в виде уравнений (1). Любой обособленный элементарный объем тела V_ε в пространстве имеет шесть степеней свободы. Шесть уравнений (13) являются шестью условиями, отнимающими эти степени свободы. Этот объем недвижим, он не перемещается в пространстве (главный вектор равен нулю) и не вращается (главный момент равен нулю).

Недвижимость находящегося в равновесии тела, как единого целого. Покажем, что приложенные к рассматриваемому телу внешние силы эквивалентны нулевому вектору и нулевому моменту. Главный вектор и главный момент этих сил

$$\int_S p\,ds+\int_V f\,dv,\qquad \int_S r\times p\,ds+\int_V r\times f\,dv. \tag{14}$$

Из (13) $\mathbf{f}=-\sigma_{j,j}$. Подставив это в интегралы по объему, и пользуясь преобразованием Остроградского-Гаусса, находим

$$\int_S(p-\sigma_j n_j)\,ds,\qquad \int_S r\times(p-\sigma_j n_j)\,ds+\int_V r_{,j}\times\sigma_j\,dv. \tag{15}$$

Учтя второе из уравнений (13), эти выражения напишем в окончательном виде

$$\int_S(p-\sigma_j n_j)\,ds,\qquad \int_S r\times(p-\sigma_j n_j)\,ds. \tag{16}$$

Величины этих интегралов равны нулю

$$\int_S(p-\sigma_j n_j)\,ds=0,\qquad \int_S r\times(p-\sigma_j n_j)\,ds=0, \tag{17}$$

так как в любой точке поверхности S удовлетворены условия (3). Таким образом, внешние силы (14) эквивалентны нулевому вектору и нулевому моменту. Тело, как единое целое, в пространстве имеет 6 степеней свободы, которые уничтожаются 6-ю условиями (17), следовательно, оно недвижимо.
Выше показано, что и все материальные точки этого тела также недвижимы.
Таким образом, рассматриваемое в краевой задаче тело неподвижно и неизменяемо геометрически.

Величины внешних сил и напряженность тела. Величины внешних сил в статической краевой задаче могут быть разными. Рассмотрим n состояний равновесия с внешними силами f^k, p^k (k=1,…,n). Причем $f^1 \equiv 0$, $p^1 \equiv 0$, а далее силы состояния k+1 по абсолютной величине больше сил состояния k. С точки зрения общепризнанной постановки рассматриваемое тело находится в равновесии при любом из этих состояний и имеет одну и ту же конфигурацию (V, S). При k=1 решение задачи (1)-(3) имеет вид $\sigma^1_{ij}(x) \equiv 0$. В этом случае в (V, S) находится в равновесии не напряженное тело. В других состояниях внешние силы не равны нулю и решением задачи (1)-(3) будут уже тождественно не равные нулю функции $\sigma^k_{ij}(x)$, которые имеют тем большие величины, чем больше k. Во всех этих случаях конфигурация тела одна и та же, но напряженность в нем разная.

Отметим одно существенное обстоятельство. Допустим, в статической краевой задаче указаны внешние силы f^n, p^n. С точки зрения общепризнанной постановки, тело, занимая область (V, S), находится в равновесии при этих величинах внешних сил. Указание же этих величин внешних сил в задаче классического подхода означает, что они возрастают от нуля и выше, принимая все промежуточные значения F^{mk}, p^k. При этом, тело, двигаясь и деформируясь, будет занимать разные области (V^k, S^k). Это, несомненно, процесс, имеющий начало и конец, и протекающий под действием изменяющихся во времени сил. Он, этот процесс, принципиально не описываем уравнениями статической краевой задачи, где ничто не изменяется во времени. Однако классический подход пытается этот процесс проследить на основе статических уравнений как в сторону возрастания внешних сил до их наибольших величин (k=1,2,…,n), так и в сторону их убывания до нуля (k=n, n-1, …,1). В уравнениях (1)-(3) в качестве области их определения обычно указывается начальное состояние тела (V_0, S_0) и величины внешних сил **f**, **p**. При этом эти уравнения понимают, что (V_0, S_0) начальное состояние, в нем нет никаких деформаций, а **f**, **p** возрастают от нуля и выше настолько медленно, что тело, находится все время в равновесии, но в то же время двигается и деформируется. Они понимают не только это. Они способны прослеживать этот процесс в обратном порядке. Если в них укажем, что **f**≡0, **p**≡0, то они понимают это как разгрузку. Те перемещения и деформации тела, которые происходили при росте внешних сил, полностью исчезают, ибо при **f** ≡ 0, **p** ≡ 0 задача имеет решение $\sigma_{ij}(x) \equiv 0$, из которого следует $u_i(x) \equiv 0$. Отсюда делается широко эксплуатируемый вывод о том, что обобщенный закон Гука описывает только упругие деформации. Наперекор табу на движение, составляющее ее суть, статическая задача должна не только описать этот процесс, но и помнить его последовательность, а также с понятием относиться к оговоркам, с помощью которых затушевываются противоречия.

Однако это разумеется не так. Механический смысл задачи прост и ясен, допускает только однозначное толкование. В статической краевой задаче тело неподвижно и геометрически неизменяемо. В ней внешние силы уравновешены напряжениями, которые должны быть найдены решением. У этой задачи нет ни прошлого, ни будущего. Равновесие, которое выражается ее уравнениями, можно сказать, вечное. Ничто в ней не изменяется во времени, в том числе и внешние силы.

Определение деформаций и перемещений. Пусть, известно Туратово решение статической краевой задачи. Из него легко определяются деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}(-\nu\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk} + (1+\nu)\,\sigma_{ij}), \qquad (18)$$

где E модуль Юнга. Далее определяем перемещения $u_i(x)$ по формулам Чезаро

$$u_i(x)=u_i(x^0)+\omega_{ij}(x^0)(x_j-x_j^0)+ \frac{1}{E}\int_\ell(\varepsilon_{ik}(y)+(x_j-y_j)(\varepsilon_{ki,j}(y)-\varepsilon_{kj,i})))dy_k$$

где ℓ - линия в области V, x^0 – начальная точка этой линии, $u_i(x^0)$, $\omega_{ij}(x^0)$ - постоянные интегрирования.

Вообще говоря, более удобно пользоваться не этой формулой, а ее преобразованным видом

$$u_i(x)= u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0)\,(x_j- x_j^{\,0}) +$$
$$+\frac{1}{E}\int_\ell(-\nu\delta_{ik}\sigma_{ll} + (1+\nu)(\sigma_{ik} + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\sigma_{ll,j} - \delta_{kj}\sigma_{ll,i}) + (1+\nu)(\sigma_{ki,j} - \sigma_{kj,i})))dy_k .$$

В этих выражениях величины $u_i(x^0)$, $\omega_{ij}(x^0)$ - произвольные постоянные. Они соответствуют не вызывающим деформации перемещениям (параллельному переносу и жесткому повороту тела). В дальнейшем исключим из рассмотрения такие перемещения. В этом случае

$$u_i(x)=\frac{1}{E}\int_\ell(-\nu\delta_{ik}\sigma_{ll} + (1+\nu)(\sigma_{ik} + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\sigma_{ll,j} - \delta_{kj}\sigma_{ll,i}) + (1+\nu)(\sigma_{ki,j} - \sigma_{kj,i})))dy_k . \qquad (19)$$

Сравниваемое состояние. Как показано на рис. 3, векторы

$$z_i = x_i - u_i(x),\ x_i \in V, \quad z_i = x_i - u_i(x),\ x_i \in S \qquad (20)$$

определяют некоторую область V_0 и ее поверхность S_0. (V_0, S_0), очевидно, состояние равновесия без внешних сил. Далее, для краткости, (V_0,S_0) назовем сравниваемым состоянием статической краевой задачи.

Решение не перемещает тело на величину векторов **u(x)**. Положение тела, заданное в уравнениях (1)-(3), незыблемо. Оно занимало область V, ограниченную поверхностью S, до решения и остается там же и после решения. Определяемое координатами z_i (20) сравниваемое состояние есть некое математическое преобразование области (V, S). Поле $u_i(x)$ определяет относительные изменения координат, компонент деформации, вращения и напряжения этих состояний. Эту относительность можно представить в виде

$$x_i-z_i = u_i(x),\ \ \varepsilon_{ij}(x) -\varepsilon_{ij}(z) =(u_{i,j} +u_{j,i})/2,\ \ \ \omega_{ij}(x)-\omega_{ij}(z) =(u_{i,j} -u_{j,i})/2,$$
$$\sigma_{ij}(x) = \lambda\delta_{ij}\,u_{k,k}+\mu\,(u_{i,j} +u_{j,i}). \qquad (21)$$

Тут x_i ,$\varepsilon_{ij}(x)$, $\varphi_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ относятся к положению равновесия с внешними силами, а z_i, $\varepsilon_{ij}(z)$, $\omega_{ij}(z)$ - к положению равновесия без внешних сил. Поле $u_i(x)$ только преобразует (V, S) в (V_0, S_0), следовательно, оно определяет только относительные изменения координат, деформаций и напряжений этих сравниваемых состояний.

Когда и как произошли перемещения $u_i(x)$, какие силы при этом действовали, и как они изменялись во времени? Статической краевой задаче это не ведомо. Что будет, если разгрузить тело? Какие-то деформации исчезнут, какие-то останутся. И этот вопрос статическая краевая задача оставляет без ответа.

Она при нулевых значениях внешних сил имеет решение $\sigma_{ij}(x)\equiv 0$, из которого следует $u_i(x)\equiv 0$. Ненагруженное тело находится в равновесии. Сравниваемое состояние совпадает с заданным.

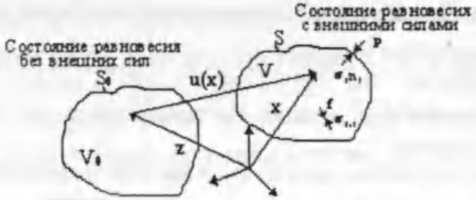

Рис. 3. Состояние равновесия и сравниваемое состояние.

Неопределенность остаточных деформаций. Пусть (V_k, S_k), где $k = 1, 2,.., n$, состояния одного того же тела с различными уровнями остаточных деформаций, которые находятся в равновесии без внешних сил. Мысленно вырежем из этих состояний один и тот же объем V тела, ограниченный поверхностью S. Эти объемы, отличающиеся друг от друга величинами остаточных деформаций $\varepsilon^k_{ij}(x), \omega^k_{ij}(x)$, находятся в равновесии и, поэтому, для каждого из них справедлива одна и та же краевая задача

$$\sigma^k_{ji,j} = 0,\ \sigma^k_{ij} = \sigma^k_{ji},\ \sigma^k_{ij,nn} + \frac{1}{1+\nu}\sigma^k_{nn,ij} = 0,\ x_i \in V,\ \sigma^k_{ji}n_j = 0,\ x_i \in S. \quad (22)$$

Каждая такая задача имеет единственное решение

$$\sigma^k_{ij}(x) \equiv 0, x_i \in V. \quad (23)$$

Из (19) следует $u^k_i(x) \equiv 0$. Сравниваемое состояние каждой из задач (20) совпадает с заданным состоянием и представление (21) будет иметь вид.

$$x_i - z_i = 0),\ \varepsilon^k_{ij}(x) - \varepsilon^k_{ij}(z) = 0,\ \omega^k_{ij}(x) - \omega^k_{ij}(z) = 0. \quad (24)$$

Решение констатирует только то, что каждое из состояний (V, S) относительно самого себя не имеет различия. Но каждое из них имеет остаточные деформации разных величин.

Ошибочность выводов, сделанных из задачи классического подхода

В задаче классического подхода рассматривается процесс, с изменяющимися во времени силами, которые двигают и деформируют тело. Этот процесс имеет начало и конец, и должен изучаться уравнениями движения

$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho u_{i,tt}$, где ρ - объемная плотность тела.

Тут выдвигается довод, что $\rho u_{i,tt}$ ничтожно мало по сравнению с величинами напряжений и внешних сил, и, поэтому, силой инерции можно пренебречь. Однако это не корректно. Величина силы инерции $\rho u_{i,tt}$ должна сравниваться не с величинами самих $\sigma_{ji,i}$, f_i , p_i , а с величиной суммы $\sigma_{ji,i} + f_i$. В первом случае довод, кажется вполне приемлемым, а во втором он сомнителен, ибо, если величина $\rho u_{i,tt}$ ничтожно мала, то, как следует из уравнения движения, в такой же мере мала и сумма $\sigma_{ji,i} + f_i$, которая представляет двигающую частицу тела силу. Пусть сила эта и ничтожно мала, но она двигает частицу тела с ничтожно малым ускорением.

Если в уравнении движения $\sigma_{ji,i} + f_i = \rho u_{i,tt}$ положим $\rho u_{i,tt} = 0$, то это означает, что нет никакой силы, которая бы двигала эту частицу. В таком случае, эта и любая другая частица тела (ибо $\sigma_{ji,i} + f_i = 0,\ x \in V$) находится в состоянии покоя (равномерное и прямолинейное движение тела, в котором оно не деформируется, исключим из рассмотрения). Это позиция закона Ньютона.

В статической краевой задаче классического подхода упрощение $\rho u_{i,tt}=0$, $x \in V$ равносильно утверждению об отсутствии двигающих материальные точки сил во всем объеме тела, что присутствует в ней в виде уравнений $\sigma_{ji,i} + f_i = 0,\ x \in V$. Если верить закону Ньютона, то все материальные точки тела неподвижимы. Однако эта задача изучает движение тела из начального состояния в конечное уравнениями $\sigma_{ji,i} + f_i = 0,\ x \in V$, тем самым, опровергает закон Ньютона. Здесь движение частиц тела из начального состояния в конечное имеет место не в силу этого основного закона механики, а в угоду нашему желанию.

Это одна сторона дела. Есть и другая его сторона – представление внешних сил в виде $\mathbf{f}(x)$, $x \in V$, $\mathbf{p}(x)$, $x \in S$ означает, что они не изменяются во времени, таковыми они указываются в уравнениях статической краевой задачи. Если мы принимаем эти уравнения всерьез, то величины указанных в них внешних сил постоянны. Но в задаче классического подхода эти силы медленно возрастают от нуля и выше, и тело, так же медленно двигаясь и деформируясь, переходит из начального состояния в некое конечное состояние. Если нам угодно, эти силы будут убывать медленно от этого «выше» до нуля и, и тело, так же медленно двигаясь назад, и, теряя деформации, переходит из некоего конечного состояния в начальное состояние. Какая услужливость и угодливый нрав у этих $\mathbf{f}(x)$, $\mathbf{p}(x)$, хотя время не входит в число их аргументов, однако они могут изменять свои величины во времени в ту или в другую сторону, согласно нашей прихоти.

Но это такой же абсурд, какой мы имели перед этим. С точки зрения механики, задача классического подхода, несомненно, динамическая. Решение задачи классического подхода в динамической постановке с начальными и граничными условиями описывало бы движение тела в виде функций $u_i(x,t)$. Но такого решения нет.

Изучение процесса, имеющегося в задаче классического подхода, уравнениями равновесия ошибочно. К примеру, из задачи

$$\sigma_{ji,j}=0,\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ \sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} = 0,\ x_i \in V,\ \sigma_{ji}n_j = 0,\ x_i \in S \quad (25)$$

и ее решения $\sigma_{ij} \equiv 0,\ u_i \equiv 0$ (26)

делается вывод, что обобщенный закон Гука описывает только упругие деформации. Обозначим через W так называемую работу деформации, которую определяют в виде

$$W = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv = \int_V (\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2_{nn})dv, \quad (27)$$

где $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}u_{n,n} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$.

Подынтегральное выражение можно представить в виде

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) = \sigma_{ij}u_{i,j},$$

где $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$.

Подставляя это в выражение работы, и, пользуясь преобразованием Остроградского - Гаусса, имеем

$$\int_V (\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{nn}^2)dv = \frac{1}{2}(\int_S p_i u_i ds + \int_V f_i u_i dv). \qquad (28)$$

Для краевой задачи (25) правая часть этого соотношения равна нулю. При $\mu>0$, $\lambda>0$, подынтегральное выражение интеграла левой части равенства положительно в любой точке. Следовательно, этот интеграл будет равен нулю только при $\varepsilon_{ij}(x) \equiv 0$. Из этого классический подход делает вывод о том, что тело, подчиняющееся обобщенному закону Гука и описываемое уравнениями (25), не имеет никаких деформаций. Иначе говоря, тело Гука при разгрузке теряет все свои деформации, следовательно, оно упругое.

Такое положение вещей имеет два возражения. Во-первых, тут надо быть более точным - в этой задаче сравниваемое состояние совпадает с заданным состоянием, поле перемещения тождественно равно нулю, и оно не создает никаких деформаций, отличающих эти состояния друг от друга. Выражения (21) тут имеет вид

$x_i - z_i = 0$, $\varepsilon_{ij}(x) - \varepsilon_{ij}(z) = 0$, $\omega_{ij}(x) - \omega_{ij}(z) = 0$, $\sigma_{ij}(x) = 0$.

Внесем первое из этих выражений в остальные

$\varepsilon_{ij}(x) - \varepsilon_{ij}(x) = 0$, $\omega_{ij}(x) - \omega_{ij}(x) = 0$, $\sigma_{ij}(x) = 0$.

Отсюда следует, что уровень остаточных деформаций остается не определенным.

Здесь нельзя упускать из виду, что выражение $\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{nn}^2$ получено из $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} u_{i,j}$, где под $u_{i,j}$ надо подразумевать то поле перемещений, которое является решением задачи (25) в виде $u_i(x) \equiv 0$. Поле перемещения задачи создает деформации и напряжения, которыми различаются друг от друга сравниваемые состояния. В задаче (25) они вырождаются в одно состояние и оно, разумеется, не имеет различия относительно самого себя. Но само оно может иметь, как показано выше, произвольные остаточные деформации.

Во-вторых, краевая задача без внешних сил (25) никакого отношения к так называемой разгрузке не имеет.

Для статической задачи время неведомое понятие. Его у нее нет. Следовательно, у нее нет ни прошлого, ни будущего. Она констатирует лишь то, что тело находится в равновесии и, имеющиеся в нем деформации являются совместимыми. Более ничего. В ней нет никакой информации о том, что было до равновесия. Как деформировалось тело, какие силы при этом действовали и как они изменялись во времени? Имеются ли в теле остаточные деформации или их нет?

На рис.4 показаны три формы равновесия стальной линейки. У них ле

вый конец защемлен, а на правом конце имеется сила. Как они создавались? Прямую стальную линейку можно изгибать сначала у концов, затем в средней части или наоборот. Степень погнутости кое-где уменьшить, кое-где увеличить. Одни операции делать быстро, другие - медленно, а третьи - с перерывами разной продолжительности. Этот процесс продолжать до того, пока она, приняв указанные формы с указанной силой на правом конце, придет в равновесие. Как все это описать статическими уравнениями? Пытаясь сделать это, классический подход действительно строит воздушные замки. Иначе не скажешь.

Рис. 4. Формы равновесия стальной линейки (левый конец защемлен, а на правом имеется внешняя сила p).

У краевой задачи, как сказано выше, нет и будущего. Что будет с телом, если убрать внешние силы? Тело, очевидно, придет в движение, степень деформированности в нем, надо полагать, уменьшится. При мгновенном снятии внешних сил возникнут и колебания. Можно ли этот процесс проследить с позиции статической краевой задачи, где всего лишь говорится о том, что главный вектор и главный момент в любой точке тела равны нулю. Очевидно, что это невозможно. Классический подход весь процесс разгрузки изучает одним махом - приравнивая к нулю величины внешних сил в краевой задаче. При этом имеется в виду, что к начальному состоянию тела прикладывались растущие от нуля до каких-то значений внешние силы, которые двигали и деформировали тело, а затем эти силы уменьшались до нуля, что тоже двигало тело назад и оно теряло приобретенные деформации. Образно говоря, классический подход пишет задачу (25) и говорит ей, что она в прошлом прожила такую жизнь.

Как показано выше, что внешние силы при любых (больших, малых и равных нулю) величинах, указанных в статической краевой задаче, не двигают тело. Они составляют самоуравновешенную систему сил, которая эквивалентна нулевому вектору и нулевому моменту.

В **этой же главе** рассмотрены теорема Бетти, формулы Сомильяны и Буссинеска из позиций нового и классического понимания статической краевой задачи.

Теорема Бетти. Рассмотрим два состояния одного и того же тела. В первом из них (рис. 5) удовлетворяются уравнения

$$\sigma'_{ji,j} + f'_i = 0, \quad \sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}, \; x_i \in V, \; \sigma'_{ji} n_j = p'_i, \; x_i \in S, \qquad (29)$$

а во втором (рис. 6) - уравнения

$$\sigma''_{ji,j} + f''_i = 0, \; \sigma''_{ij} = \sigma''_{ji}, \; x_i \in V, \; \sigma''_{ji} n_j = p''_i, \; x_i \in S. \qquad (30)$$

После того, как произошли перемещения u_i' в первом, и u_i'' во втором состояниях, тело заняло область V с поверхностью S, и находится в ней в равновесии. Внешние силы f_i', p_i' и f_i'', p_i'' являются атрибутами равновесия (они не вызывают перемещения, а лишь поддерживают равновесие, которое установилось после того как произошли перемещения)

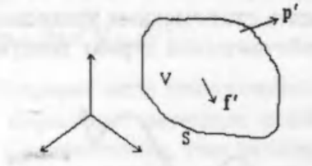

Рис. 5. Тело с массовыми силами **f′** в объеме V и внешними силами **p′** на поверхности S находится в равновесии.

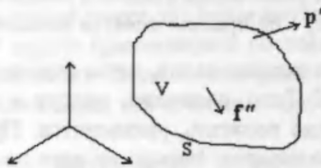

Рис. 6. Тело с массовыми силами **f″** в объеме V и внешними силами **p″** на поверхности S находится в равновесии.

Умножим (29) на u_i'', а (30) на u_i' и проинтегрируем по объему V

$$\int_V(\sigma'_{ji,j}+f'_i)u''_i\,dv=0,\quad \int_V(\sigma''_{ji,j}+f''_i)u'_i\,dv=0.$$

Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, эти уравнения можно привести к виду

$$\int_S p'_i u''_i\,ds+\int_V f'_i u''_i\,dv=\int_V \sigma'_i \varepsilon''_i\,dv,\quad \int_S p''_i u'_i\,ds+\int_V f''_i u'_i\,dv=\int_V \sigma''_i \varepsilon'_i\,dv.$$

В силу обобщенного закона Гука

$$\sigma'_{ji}\varepsilon''_{ij}=\sigma''_{ji}\varepsilon'_{ij}. \qquad (31)$$

Это замечательное равенство легко доказывается непосредственной подстановкой в него выражений напряжений через компоненты деформаций

$$\sigma'_{ij}=\lambda\delta_{ij}\,\varepsilon'_{kk}+2\mu\varepsilon'_{ij},\quad \sigma''_{ij}=\lambda\delta_{ij}\,\varepsilon''_{kk}+2\mu\varepsilon''_{ij}.$$

Равенство (31) позволяет написать в виде

$$\int_S p'_i u''_i\,ds+\int_V f'_i u''_i\,dv=\int_S p''_i u'_i\,ds+\int_V f''_i u'_i\,dv=\int_V \sigma''_i \varepsilon'_i\,dv=\int_V \sigma'_i \varepsilon''_i\,dv. \qquad (32)$$

В классическом подходе в задачах (29) и (30) область V с поверхностью S соответствует начальному состоянию тела. Внешние силы p'_i, f'_i и p''_i, f''_i - статические (медленно растущие от нуля до каких-то величин). Под действием этих сил произойдут перемещения u'_i и u''_i, тело перейдет в область V_1 с поверхностью S_1 в первом состоянии (рис. 7) и в область V_2 с поверхностью S_2 во втором состоянии (рис. 8).

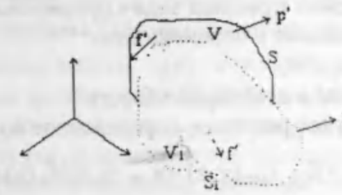

Рис. 7 Тело под действием растущих от нуля до каких-то величин сил **f′**, **p′** переходит из начального (V, S) в конечное (V_1, S_1) состояние равновесия.

Эти новые состояния являются конечными состояниями равновесия, в которых выполняются уравнения

$$\sigma'_{ji,j}+f'_i=0,\quad \sigma'_{ij}=\sigma'_{ji},\ x_i\in V_1,\ \sigma'_{ji}n_j=p'_i,\ x_i\in S_1$$

в первом состоянии и

$$\sigma''_{ji,j}+f''_i=0,\ \sigma''_{ij}=\sigma''_{ji},\ x_i\in V_2,\ \sigma''_{ji}n_j=p''_i,\ x_i\in S_2$$

во втором состоянии.

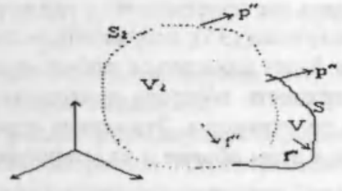

Рис. 8. Тело под действием растущих от нуля до каких-то величин сил **f″**, **p″** переходит из начального (V, S) в конечное (V_2, S_2) состояние равновесия.

Поступая так же, как в первом пункте, эти уравнения можно привести к виду

$$\int_{S_1} p'_i u''_i\,ds+\int_{V_1} f'_i u''_i\,dv=\int_{V_1}\sigma'_i\varepsilon''_i\,dv,\qquad \int_{S_2} p''_i u'_i\,ds+\int_{V_2} f''_i u'_i\,dv=\int_{V_2}\sigma''_i\varepsilon'_i\,dv$$

и здесь остается в силе точечное равенство $\sigma'_{ji}\varepsilon''_{ij}=\sigma''_{ji}\varepsilon'_{ij}$, однако

$$\int_{S_1} p'_i u''_i\,ds+\int_{V_1} f'_i u''_i\,dv\neq\int_{S_2} p''_i u'_i\,ds+\int_{V_2} f''_i u'_i\,dv$$

так как $\int_{V_1}\sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}\,dv\neq\int_{V_2}\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij}\,dv$ из-за $V_1\neq V_2$.

Здесь видим, что в задаче классического подхода пользоваться услугами соотношения Бетти (32) нельзя. Однако ими пользуются, ибо без этих соотношений такую задачу не решить. Как отмечает В.Новацкий, теорема Бетти является самой интересной центральной теоремой в механике деформируемого тела. Соотношение (32) имеет фундаментальное значение в решении задач теории упругости, сопротивления материалов, строительной механики. Оно используется и при выводе общего решения статической краевой задачи.

Общее решение статических краевых задач (формулы Сомильяны).

Напишем уравнения равновесия в перемещениях

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i = 0\ ,\ x_i \in V, \qquad (33)$$

где массовые силы f_i заданы в некоторой области V.

Эти уравнения имеют частное решение, определенное во всем пространстве

$$u_j(y) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V (2(1-\nu)\delta_{jk}\, r_{,tt}(y,z) - r_{,jk}(y,z)) f_k(z)\, dv(z)\ , \qquad (34)$$

где $r=((y_i-z_i)(y_i-z_i))^{1/2}$.

Уравнения (33) выражают условия равенства нулю главного вектора и главного момента усилий, действующих на любой элементарный объем тела. Функции (34) удовлетворяют этим условиям во всем пространстве. Следовательно, создавшееся полем перемещений (34) напряженное состояние пространства является состоянием равновесия. Пусть имеется только одна единичная сосредоточенная массовая сила, приложенная в точке x и имеющая направление по оси x_i $f_k(z) = \delta(z-x)\delta_{ki}$. Подставим в (34) эту силу и, пользуясь свойством функции Дирака, получим

$$u_j^i(y,x) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} (2(1-\nu)\delta_{ji}\, r_{,tt}(y,x) - r_{,ij}(y,x)), \qquad (35)$$

где $r=((y_i-x_i)(y_i-x_i))^{1/2}$. И здесь все пространство с единичной массовой силой и, созданным в нем перемещениями (35), напряженным состоянием находится в равновесии. В равновесии будет находиться любой вырезанный из этого пространства объем, на поверхность которого приложены усилия, заменяющие действие остальной части пространства. Эти усилия определяются полем перемещений (35). Кроме того, в этом объеме и на его поверхности известны перемещения.

Обратимся теперь к какой-либо краевой задаче. Пусть занимающее область V тело находится в равновесии

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i = 0\ ,\ x_i \in V \qquad (36)$$

На поверхности области V задано одно из следующих условий

$$u_i = \varphi_i\ ,\ x_i \in S$$

$$\sigma_{ji} n_j = p_i\ ,\ x_i \in S, \qquad (37)$$

$$u_i = \varphi_i\ ,\ x_i \in S_u\ ,\quad \sigma_{ji} n_j = p_i\ ,\ x_i \in S_\sigma,\quad S = S_u + S_\sigma\ ,$$

где φ_i , p_i - заданные на границе функции.

Состояние тела, описываемого уравнениями (36), (37) назовем первым. Вырежем из бесконечного пространства с одной массовой силой объем V с поверхностью S (единичная сила в этом объеме) и назовем его вторым состоянием тела. Во втором состоянии известно все - перемещения и усилия на поверхности S и перемещения в любой точке внутри объема (эти величины определяются полем (35)). В первом и втором состояниях тело занимает одну и ту же область

и находится в ней в равновесии. В обоих случаях эта область конечного состояния тела. Соотношение (32) приводится к виду

$$u_i(x) = \int_S (u_j^i(y,x)\, p_j(y) - p_j^i(y,x)\, u_j(y))\, ds(y) + \int_V f_j(y)\, u_j^i(y,x)\, dv(y). \quad (38)$$

Эти функции являются общим решением статических краевых задач. В (38) известны V, S. Известно также поле $u_j^i(y,x)$ (см. выражение (35)), которое определяет и $p_j^i(y,x)$. Неизвестными в (38) нем являются: $p_i(y)$ - если заданы на S перемещения (первая краевая задача), $u_j(y)$ - если на S заданы усилия $p_i(y)$ (вторая краевая задача), $p_i(y)$ на части поверхности S_u и $u_j(y)$ на части поверхности S_σ (третья краевая задача). Эти неизвестные граничные условия определяются методом граничных элементов. В классическом подходе, в задаче (36), (37) заданная область V соответствует начальному состоянию тела. Внешние силы статически изменяются от нуля до каких-то величин, вызывая при этом перемещения u_i из области V. В результате этого тело переходит в некое конечное состояние равновесия, в котором займет область V_1 с поверхностью S_1. Следовательно, уравнения равновесия должны удовлетворяться в области V_1

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i = 0\ ,\ x_i \in V_1, \qquad (39)$$

а на границе области V_1 должно выполняться одно из условий (37), например, второе из них

$$\sigma_{ji} n_j = p_i\ ,\ x_i \in S_1. \qquad (40)$$

Это состояние примем за первое. Для того чтобы воспользоваться соотношением Бетти, из неограниченного тела с одной массовой силой надо вырезать объем V_1 и принять его за второе состояние тела. Однако это невозможно из-за неизвестности области V_1. Функции Сомильяны

$$u_i(x) = \int_{S_1} (u_j^i(y,x)\, p_j(y) - p_j^i(y,x)\, u_j(y))\, ds(y) + \int_{V_1} f_j(y)\, u_j^i(y,x)\, dv(y)$$

никакой практической ценности не представляют. Тут неизвестны не только V_1, S_1 , но и все подынтегральные выражения.

В **третьей главе** рассмотрены порядок определение перемещений, а также задачи сопротивления материалов и строительной механики с позиции нового (нетрадиционного) и классического подходов. Рассматривается задача о равновесии прямоугольной плиты. Продемонстрируем корректность выдвинутых в этой работе новых положений на этом, строго решаемом, примере.

Зададимся областью определения уравнений статической краевой задачи в виде указанной на рис. 9 прямоугольной плиты.

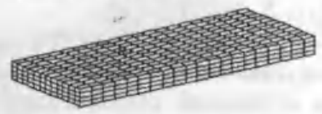

Рис. 9. Прямолинейная плита с усилиями (44) на своей поверхности находится в равновесии.

Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в центре левой торцевой грани. Итак, под V будем подразумевать следующую область

$b/2 \le x_1 \le b/2,\ 0 \le x_2 \le \ell,\ -h/2 \le x_3 \le h/2$. (41)

Рассмотрим вторую краевую задачу без массовых сил

$$\sigma_{ji,j} = 0,\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\quad x_i \in V, \tag{42}$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\,\sigma_{kk,ij} = 0,\quad x_i \in V, \tag{43}$$

$$\sigma_{ji}\, n_j = \delta_{i2}\, c\, x_3,\quad x_i \in S, \tag{44}$$

где V определяется выражениями (41). Из (44) следует, что на четырех гранях плиты нет внешних сил, они приложены на левую и правую торцевые грани, создают изгибающие моменты, равные соответственно

$$m_1 = -\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} c\,x_1^2\,dx_1\,dx_2 = -cbh^3/12,\quad m_2 = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} c\,x_1^2\,dx_1\,dx_2 = cbh^3/12.$$

Задача (42) - (44) математически полностью определена. Она имеет простой механический смысл - прямоугольная плита с усилиями (44) на своей поверхности находится в равновесии. Требуется найти во внутренних точках этой плиты напряжения, деформации и создавшие их перемещения. Как видим, здесь нет никакого отступления от общепринятой постановки статической краевой задачи.

Туратово решение задачи.

$$\sigma_{ij} = \delta_{i2}\,\delta_{j2}\, c x_3 .\ x_i \in V \tag{45}$$

Функции перемещений можно определить, внося (45) в (19)

$$u_i = \frac{1}{E}\int_\ell c(-\nu\delta_{ik}x_3 + (1+\nu)\delta_{i2}\delta_{k2}x_3 + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\delta_{3j} - \delta_{kj}\delta_{3i}) +$$
$$+ (1+\nu)\delta_{k2}(\delta_{i2}\delta_{3j} - \delta_{j2}\delta_{3i})))dy_k,\qquad x_i \in V.$$

Интегрируя это выражение, находим

$$u_i(x) = -c\,(\delta_{i1}\nu\, x_3\,(x_1 - x_1^0) - \delta_{i2}x_3\,(x_2 - x_2^0) + \delta_{i3}\,(x_2^2 + \nu\,(x_3^2 - x_1^2)$$
$$-x_2^0\,(2x_2 - x_2^0) - \nu\,((x_3^0)^2 - x_1^0\,(2x_1 - x_1^0)))\,/\,2)/\,E,\ x_i \in V, \tag{46}$$

где x_i^0 - любая фиксированная точка области V. Приведем развернутый вид функций (46):

$u_1(x) = -c\nu x_3(x_1 - x_1^0)/E,\ x_i \in V,$

$u_2(x) = cx_3(x_2 - x_2^0)/E,\ x_i \in V,$

$u_3(x) = -c((x_2^2 + \nu\,(x_3^2 - x_1^2) - x_2^0(2x_2 - x_2^0) - \nu\,((x_3^0)^2 - x_1^0(2x_1 - x_1^0)))/(2E),\ x_i \in V.$

Функции (46) удовлетворяют уравнениям равновесия в форме Навье.

Наконец, из поля перемещений (46) определим компоненты деформации и вращения

$$\varepsilon_{ij} = cx_3\,(-\nu\,(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i3}\delta_{j3}) + \delta_{i2}\,\delta_{j2})\,/\,E,\ x_i \in V, \tag{47}$$

$$\omega_{ij} = -c\,(\nu(x_1 - x_1^0)\,(\delta_{1i}\delta_{3j} - \delta_{3i}\,\delta_{1j}) - (x_2 - x_2^0)(\delta_{2i}\,\delta_{3j} - \delta_{3i}\,\delta_{2j}))/\,E,\ x_i \in V. \tag{48}$$

По полученным здесь выражениям в любой точке находящегося в равновесии в области V тела можно определить компоненты напряжения, деформации и вращения. Особо отметим то, что во всех выражениях (45)–(48) координаты только области V (41). Здесь нет обычного координатного разночтения. В $u_i(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ одни и те же координаты. Различие между координатами, деформациями, напряжениями сравниваемого и заданного состояний, определяемыми уравнениями (21), имеет вид

$x_i - z_i = -c(\delta_{i1}\,\nu\, x_3(x_1 - x_1^0) - \delta_{i2}\, x_3\,(x_2 - x_2^0) +$
$+\delta_{i3}(x_2^2 + \nu(x_3^2 - x_1^2) - x_2^0(2x_2 - x_2^0) - \nu((x_3^0)^2 - x_1^0(2x_1 - x_1^0)))/2)/E,$
$\varepsilon_{ij}(x) - \varepsilon_{ij}(z) = cx_3\,(-\nu(\,\delta_{i1}\,\delta_{j1} + \delta_{i3}\,\delta_{j3}) + \delta_{i2}\ \delta_{j2})/E,$ (49)
$\omega_{ij}(x) - \omega_{ij}(z) = -c(\nu(x_1 - x_1^0)\,(\delta_{1i}\delta_{3j} - \delta_{3i}\,\delta_{1j}) - (x_2 - x_2^0)(\delta_{2i}\,\delta_{3j} - \delta_{3i}\,\delta_{2j}))/E,$
$\sigma_{ij}(x) = \delta_{i2}\,\delta_{j2}\, cx_3.$

Сравниваемое состояние. Координаты сравниваемого состояния z_i связаны с координатами рассматриваемого состояния равновесия выражениями

$$z_i = x_i - c\,(\delta_{i1}\,\nu\, x_3(x_1 - x_1^0) - \delta_{i2}\, x_3\,(x_2 - x_2^0) + \delta_{i3}(x_2^2 + \nu\,(x_3^2 - x_1^2) -$$
$$-x_2^0(2x_2 - x_2^0) - \nu\,((x_3^0)^2 - x_1^0(2x_1 - x_1^0)))\,/\,2)\,/\,E\quad x_i \in V. \tag{50}$$

В качестве x^0 можно брать координаты любой точки области (41). В дальнейшем положим $x_1^0 = 0,\ x_2^0 = \dfrac{\ell}{2},\ x_3^0 = 0$.

Рассмотрим три случая c = 0, c =30, c = 60.

1. Пусть в (45) c=0. На поверхности S внешних сил нет. Тело занимает область V (41)и находится в равновесии. Выражения (50) принимают вид.

$x_i - z_i = 0,$
$\varepsilon_{ij}(x) - \varepsilon_{ij}(z) = 0,$
$\omega_{ij}(x) - \omega_{ij}(z) = 0,$ (51)
$\sigma_{ij}(x) = 0.$

Сравниваемое состояние совпадает с заданным. Заданное состояние может, иметь любые остаточные деформации или не иметь их. Подставляя первое из уравнений (51) в остальные, приходим к неопределенности

$$\varepsilon_{ij}(x) - \varepsilon_{ij}(x) = 0,\quad \omega_{ij}(x) - \omega_{ij}(x) = 0,\quad \sigma_{ij}(x) = 0.$$

Здесь $\varepsilon_{ij}(x)$, $\omega_{ij}(x)$ остаются неопределенными. Такая неопределенность не противоречит сути краевой задачи, а наоборот, более полно отражает то, что может быть в действительности. Ведь в равновесии может находиться не только тело, которое не имеет никаких остаточных деформаций, но и тело, которое их имеет. Рассматриваемая здесь плита, может быть, ранее имела криволинейную форму, а затем выпрямлена и выточена. Если это так, то в ней есть остаточные деформации.

2. Пусть c= 30. Тело занимает ту же область V (41). Подставим это значение c в (51) и определим сравниваемое состояние (рис. 10).

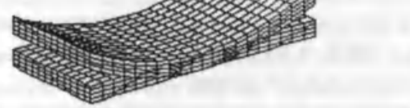

Рис. 10. Сравниваемые состояния при c=30.

3. Теперь пусть c= 60. В этом состоянии равновесия тело занимает то же положение, что и раньше, т.е. имеет форму прямоугольной плиты. Подставим это значение c в (51) и определим сравниваемое состояние (рис.11).

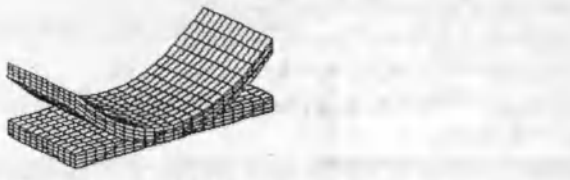

Рис. 11. Сравниваемые состояния при c=60.

Во всех трех случаях тело имеет одну и ту же конфигурацию и занимает одно и то же положение в пространстве. Это положение тела недвижимо и геометрически неизменяемо при любых величинах внешней нагрузки.

Решения $\sigma_{ij}(x) = 0$, $\sigma_{ij}(x) = \delta_{i2}\,\delta_{j2}\,30x_3$, $\sigma_{ij}(x) = \delta_{i2}\,\delta_{j2}\,60x_3$, $x_i \in V$ соответствующие трем рассмотренным случаям, удовлетворяют уравнениям задачи (42)- (44) в одном и том же положении тела, а именно, в его прямолинейном очертании. О том, что граничное условие (44) удовлетворяется на поверхности соответствующих этим решениям сравниваемых состояний (рис. 10 и 11), говорить не приходится.

Внешние силы являются атрибутами декларируемого уравнениями (42) –(44) равновесия и, в связи с этим, они уже никак не могут рассматриваться в роли нарушителей этого равновесия. Условие (44) ничто иное, как условие равновесия точек поверхности тела. Усилия, действующие снаружи поверхности равны усилиям $\sigma_{ji}\,n_j$, действующим изнутри.

Данную задачу представим уравнениями Навье

$$\mu\, u_{i,jj} + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} = 0\ ,\ x_i \in V. \qquad (52)$$

Граничные условия для этих уравнений напишем в трех видах. Заданы перемещения на поверхности S, которые определяются функцией

$$u_i(x) = -c\,(\delta_{i1} \nu x_3\,(x_1 - x_1^0) - \delta_{i2} x_3\,(x_2 - x_2^0) + \delta_{i3}\,(x_2^2 + \nu\,(x_3^2 - x_1^2) -$$
$$- x_2^0\,(2x_2 - x_2^0) - \nu\,((x_3^0)^2 - x_1^0\,(2x_1 - x_1^0)))\,/\,2)/\,E\ ,\ x_i \in V$$

при поочередной подстановке в нее значений координат

$$x_1 = -b/2,\ x_1 = b/2,\ x_2 = 0,\ \ x_2 = \ell,\ \ x_3 = -h/2,\ \ x_3 = h/2. \qquad (53)$$

Заданы внешние силы на поверхности S

$$\sigma_{ji}\,n_j = \delta_{i2}\,c\,x_3,\ \ \ x_i \in S. \qquad (54)$$

Заданы на четырех гранях перемещения, которые определяются функцией

$$u_i(x) = -c\,(\delta_{i1} \nu\, x_3\,(x_1 - x_1^0) - \delta_{i2}\, x_3\,(x_2 - x_2^0) + \delta_{i3}\,(x_2^2 + \nu\,(x_3^2 - x_1^2) -$$
$$- x_2^0(2x_2 - x_2^0) - \nu((x_3^0)^2 - x_1^0(2x_1 - x_1^0)))\,/\,2)\,/\,E,$$

в которую поочередно надо подставить следующие значения координат $x_1 = -b/2$, $x_1 = b/2$, $x_2 = -h/2$, $x_1 = h/2$, а на остальных двух гранях

$$\sigma_{ij}(x_1, 0, x_3)\ =\ -\,\delta_{i2}\,c\,x_3,\ \ \sigma_{ij}(x_1,\ \ell, x_3) = \delta_{i2}\,c\,x_3. \qquad (55).$$

Статическая краевая задача имеет единственное решение. Решение задач (52), (53); (52), (54); (52), (55)

$$u_i(x) = -c\,(\delta_{i1} \nu x_3\,(x_1 - x_1^0) - \delta_{i2} x_3\,(x_2 - x_2^0) + \delta_{i3}\,(x_2^2 + \nu\,(x_3^2 - x_1^2) -$$
$$- x_2^0\,(2x_2 - x_2^0) - \nu\,((x_3^0)^2 - x_1^0\,(2x_1 - x_1^0)))\,/\,2)/\,E\ ,\ x_i \in V \qquad (56)$$

то же самое, что и задачи (42)-(44). Это легко показать. Из (56) находим

$$u_{k,k} = c(1-2\nu)x3/E; \qquad u_{i,j} + u_{j,i} = 2cx3(\delta_{i2}\delta_{j2} - \nu(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i3}\delta_{j3}))/E.$$

Подставим эти величины в выражение для $\sigma_{ij}(x)$

$$\sigma_{ij}(x) = \lambda\delta_{ij}\,u_{k,k} + \mu(\,u_{i,j} + u_{j,i}\,) = cx_3(\delta_{i2}\delta_{j2} + \nu(\delta_{ij} - \delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{i3}\delta_{j3}))/(1+\nu).$$

Далее, учитывая равенство $\delta_{i2}\delta_{j2} = \delta_{ij} - \delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{i3}\delta_{j3}$, находим $\sigma_{ij}(x) = \delta_{i2}\delta_{j2}\,cx_1$.

Механический смысл задач (42)-(44); (52), (53); (52), (54); (52), (55) один и тот же – плита в области V (41) находится в состоянии равновесия. Это состояние равновесия, разумеется, не зависит от того, решена задача или нет. Существующее представление о том, что тело перемещается на величину перемещений, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (52) и граничным условиям, ошибочно. Во всех этих уравнениях координаты не начального, а конечного состояния. Единственно верное математическое толкование таково: найти функции $u_i(x)$, $x_i \in V$, удовлетворяющие уравнениям (52) и любому из трех видов граничных условий. Перемещения, которые заданы в первом и третьем виде граничных условий - уже имеющиеся в теле перемещения (а не те, которые будут происходить!). Решение $u_i(x)$, также представляет те перемещения, которые уже произошли и создали то напряженное состояние, которое уравновешивает внешние силы.

В заключение возвратимся к уравнениям (42)–(44). В них декларируется, что прямолинейная плита (41) с усилиями (44) на своей поверхности находится в равновесии, и определяются не нарушающие это равновесие деформации, напряжения и создавшие их перемещения. Эта задача проста и ясна. Она не стоит перед неразрешимой проблемой поиска решений в неизвестной области с неизвестной границей как задача классического подхода. В ней нет ошибочных приемов линейной постановки. Ненужным оказалось ей и понятие о статическом приложении действий. В ее решении не использовано предположение о близости начального и конечного положений тела и, в виду этого, решение свободно от ограничений, накладываемых на величины перемещений. Наконец, эта задача допускает численное решение, основанное на общем решении в виде формул Сомильяны

$$u_i(x) = \int_S (u_j^i(y,x)\,p_j(y) - p_j^i(y,x)\,u_j(y))\,ds(y)\ ,\ x_i \in V,\ y_i \in S, \qquad (57)$$

где $u_j^i(y,x)$ – поле перемещений в неограниченном пространстве от единичной массовой силы, приложенной в точке x и имеющей направление оси x_i, $p_j^i(y,x)$ – усилия на поверхности S, определяемые полем $u_j^i(y,x)$ (35). В этом неограниченном пространстве известны напряжения, деформации, перемещения в любой точке. Они определяются полем (35). Из этого пространства можно вырезать любой объем, который находится в равновесии, и в котором известны напряжения, деформации, перемещения в каждой точке, а так же внешние силы внутри и на поверхности. В данном случае вырезается прямоугольная плита (41) и она служит вторым состоянием для задачи (42)-(44) в соотношении Бетти. Из этого соотношения следует решение (57). В (57) известны V, S. Известно также поле $u_1^i(y,x)$ (см. выражение (35)), которое определяет и $p_j^i(y,x)$, $x_i \in V$, $y_i \in S$. Неизвестными в (57) являются:

$p_i(y)$ - если заданы на S перемещения (первая краевая задача),

$u_j(y)$ - если на S заданы усилия $p_i(y)$ (вторая краевая задача),
$p_i(y)$ - на части поверхности S_u и
$u_j(y)$ - на части поверхности S_σ (третья краевая задача).
Эти неизвестные граничные условия определяются методом граничных элементов. Отметим, если в правую часть уравнения (56) подставим граничные условия (53) и (54) и выполним интегрирование, то придем к решению (46).

Классический подход. В классическом подходе дело обстоит иначе. Тут от ясной и всеми признаваемой постановки статической краевой задачи ничего не остается. Создается впечатление, что ее формулируют лишь для того, чтобы тут же нарушить. В этом подходе к заданному положению тела, трактуемому как не имеющее деформаций начальное состояние, прикладываются статические внешние силы. Под их действием начальное состояние, двигаясь и деформируясь, переходит в некое конечное состояние (V_1,S_1). Можно говорить что угодно, но описать этот переход статическими уравнениями невозможно.

Здесь не применим и метод граничных элементов. Этот наиболее точный численный метод в классическом подходе стоит тоже перед неразрешимой проблемой, ибо при этом выражение (38) будет иметь вид

$$u_i(x)=\int_{S_1}(u^i_j(y,x)\,p_j(y)-p^i_j(y,x)\,u_j(y))\,ds(y)\,,\quad x_i\in V_1,\ y_i\in S_1.$$

В этом выражении неизвестна поверхность S_1 (поверхность конечного состояния равновесия), следовательно, неизвестны все подынтегральные величины. На неизвестной поверхности S_1 невозможно указать величины
$u_j(y)$, $p_i(y)$, $y_i \in S_1$,
$u_j^i(y,x)$, $p_j^i(y,x)$, $x_i \in V_1$, $y_i \in S_1$.
Более того, в функции $u_i(x)$ координаты x не указываемы, ибо неизвестна область V_1.

В четвертой главе доказывается, что тензор Коши является полной характеристикой деформированного состояния.

Пусть $u_i(x)$ -поле перемещения, удовлетворяющее уравнениям статической краевой задачи в области V и заданным условиям на ее поверхности S.
Вектор относительного перемещения представим в виде

$$du_i = u_{i,j}\, dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})\, dx_j, \tag{58}$$

где $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, $\omega_{ij} = (u_{i,j} - u_{j,i})/2$.
Проекция относительного перемещения на направление вектора dx_i
$du_i\, n_i= \varepsilon_{ij}\, n_i\, dx_j = \varepsilon\, dx$,
где n_i - направляющие косинусы направления вектора dx_i,

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij}\, n_i\, n_j\,,\ dx = (dx_i\, dx_i)^{1/2}. \tag{59}$$

Для краткости далее матрицу $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\, \delta_{ij})$ обозначим через $g=(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\, \delta_{ij})$.
В развернутом виде эта матрица имеет вид

$$g=(g_{ij})=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}-\varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\varepsilon & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\varepsilon\end{bmatrix}.$$

Добавим в правую часть выражения (58) равное нулю слагаемое

$\varepsilon\, dx_i - \varepsilon\, \delta_{ij}\, dx_j$ и напишем его в виде

$$du_i= \varepsilon\, dx_i + (\varepsilon_{ij} - \varepsilon\, \delta_{ij})\, dx_j + \omega_{ij}\, dx_j. \tag{60}$$

Как показано на рис.12, выражение (60) разлагает вектор относительного перемещения на векторы: удлинения в направлении вектора dx_i - $\varepsilon\, dx_i$, сдвига - $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\, \delta_{ij})\, dx_j$, вращения - $\omega_{ij}\, dx_j$. Нетрудно проверить, что векторы сдвига и вращения перпендикулярны к вектору dx_i. Скалярное произведение этих векторов на вектор dx_i

$$(\varepsilon_{ij}-\varepsilon\,\delta_{ij})dx_j dx_i=(\varepsilon_{ij}-\varepsilon\delta_{ij})n_j n_i dx^2=(\varepsilon_{ij}n_j n_i-\varepsilon\delta_{ij}n_j n_i)dx^2=(\varepsilon-\varepsilon)dx^2=0;$$

$$\omega_{ij}dx_j dx=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i})dx_j dx_i=\frac{1}{2}(u_{i,j}dx_j dx_i-u_{j,i}dx_j dx_i)=\frac{1}{2}(u_{i,j}dx_i dx_j-u_{i,j}dx_i dx_j)=0.$$

Квадрат длины вектора сдвига

$$(\varepsilon_{ki}-\varepsilon\delta_{ki})(\varepsilon_{kj}-\varepsilon\delta_{kj})dx_i dx_j=(\varepsilon_{ki}-\varepsilon\delta_{ki})(\varepsilon_{kj}-\varepsilon\delta_{kj})n_i n_j dx^2=(\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj}n_i n_j-\varepsilon^2)dx^2=\gamma^2 dx^2,$$

где $\gamma= (\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj}n_i n_j-\varepsilon^2)^{1/2}$ - относительная деформация сдвига.
Из рис. 13 следует

$$dz_i=dx_i-du_i. \tag{61}$$

Возведем обе части выражения (61) в квадрат и полученное представим в виде

$$dx^2-dz^2 = (2\varepsilon_{ij}-u_{k,i}\,u_{k,j})dx_i dx_j=2a_{ij}dx_i dx_j, \tag{62}$$

$$\text{где}\ \ a_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{k,i}\,u_{k,j}. \tag{63}$$

Выражение (62) ввело в теорию упругости и другие раздели механики деформируемого тела следующее воззрение. Если произведение $u_{k,i} \cdot u_{k,j}$ пренебрежимо мало по сравнению с $u_{k,i}$, то деформированное состояние можно характеризовать в ε_{ij}.

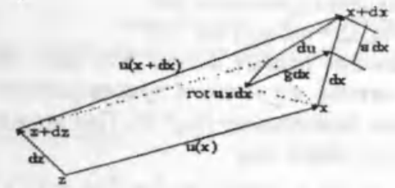

Рис. 12. Разложение вектора относительного перемещения.

В противном случае деформации должны представляться в a_{ij}. В соответствии с этим ε_{ij} стали называть тензором малых и бесконечно малых деформаций, а a_{ij} - тензором конечных деформаций. Это общепринятое, всегда и всеми оговариваемое положение. Как видим, уравнению (62) в механике деформируемого тела отведено основополагающее место.

Однако такое восприятие ошибочно. Можно показать, что деформации, при любых их величинах, описываются только тензором ε_{ij}. Но прежде о тензоре Альманси a_{ij}. Он обязан своим происхождением разности квадратов длин между двумя точками до и после деформации. Разность dx^2-dz^2 не различает виды деформирования. Для нее безразлично то, что ее обусловило - линейное удлинение или сдвиг, или и то, и другое. Это обстоятельство вынудило дополнить уравнение (62) понятием относительной деформации удлинения

$$\lambda = \frac{dx - dz}{dx} \quad \text{или} \quad dz=(1-\lambda)\, dx. \qquad (64)$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат и напишем полученное в

$$dx^2-dz^2 =(2\lambda-\lambda^2)\, dx^2. \qquad (65)$$

Здесь же напишем (62) в виде

$$dx^2-dz^2 =2\, a_{ij}n_in_jdx^2. \qquad (66)$$

Приравнивая правые части (65) и (66) и решая полученное относительно λ, находим

$$\lambda= 1-(1-2\, a_{ij}\, n_i\, n_j\,)^{1/2}. \qquad (67)$$

Здесь надо обратить внимание на следующее обстоятельство. Скалярное равенство (64) допускает толкование, которое приведено на рис.13. Здесь отрезок dz превращается в отрезок dx, только удлинившись на λdx. А в векторном равенстве (61) вектор dz_i превращается в вектор dx_i, не только удлинившись в направлении вектора dx_i, но и получая приращение $\omega_{ij}\, dx_j$ от вращения, и $(\varepsilon_{ij} -\varepsilon\delta_{ij})dx_j$ от сдвига (рис.12).

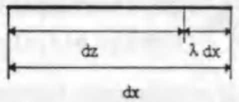

Рис.13. Графическое представление скалярного равенства (64).

Отсюда, разность квадратов выражается в (65) только деформацией удлинения, а в (66) - деформациями удлинения, сдвига и компонентами вращения, что видно из следующего представления уравнения (62)

$$dx^2-dz^2=(2\varepsilon -(\varepsilon^2+ \gamma^2) - (2\omega_{kj}\, \varepsilon_{ki} + \omega_{ki}\, \omega_{kj}\,)\, n_in_j\,)\, dx^2. \qquad (68)$$

В связи с этим, приравнивание правых частей (65), (66) не может считаться корректным. Укажем те случаи, когда такое приравнивание возможно. Пусть поле перемещений является безвихревым ($\omega_{ij} = 0$). При этом вектор относительного перемещения (58) будет иметь вид

$$du_i = \varepsilon_{ij}\, dx_j.$$

Подставим это в (61)

$$dz_i =dx_i - \varepsilon_{ij}\, dx_j. \qquad (69)$$

Возведем обе части в квадрат и напишем полученное в виде

$$dx^2-dz^2=(\, 2\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj})\, dx_idx_j. \qquad (70)$$

Это выражение легко приводится к виду

$$dx^2-dz^2=(\, 2\varepsilon -(\, \varepsilon^2+ \gamma^2))\, dx^2. \qquad (71)$$

Для главных направлений (γ=0) (71) примет вид

$$dx^2-dz^2=(\, 2\varepsilon - \varepsilon^2)dx^2. \qquad (72)$$

Теперь приравнивание правых частей (65), (72) следует считать уместным, ибо разность квадратов как в (65), так и в (72) обусловлена только деформацией удлинения

$$2\lambda -\lambda^2 = 2\varepsilon - \varepsilon^2. \qquad (73)$$

Отсюда выходит

$$\lambda = \varepsilon = \varepsilon_{ij}\, n_i\, n_j\, . \qquad (74)$$

Отметим, (74) следует из (73) независимо от того, близко ли λ к единице или к нулю. Иначе говоря, в безвихревом поле главные относительные деформации удлинения при любых уровнях деформирования выражаются только в ε_{ij} .

Также обстоит дело и в неглавных направлениях. Для любого направления вектор относительного перемещения в $du_i = \varepsilon_{ij}\, dx_j$ и разность квадратов в (70) определяются только в ε_{ij} . Итак, в безвихревом поле выдвинутое выше утверждение не вызывает сомнений.

Тензор Коши является полной характеристикой деформированного состояния при любых уровнях деформации и в общем случае вихревого поля. Это, оказывается, можно доказать легко и быстро. В (60) и (68) все, за исключением ω_{ij} , определяется в ε_{ij} . Тут нетрудно указать то, что и ω_{ij} являются функциями только ε_{ij} . Действительно, эти величины связаны между собой соотношением

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i}\, . \qquad (75)$$

Учитывая это можно сказать, что вектор относительного перемещения (60) и разность квадратов (68) являются только функцией от ε_{ij} , что и требовалось доказать.

Рассмотрим это доказательство и так. Обратимся к следующей статической краевой задаче

$$\sigma_{ji,j} +f_i=0, \;\; \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad x_i \in V, \qquad (76)$$

$$\sigma_{ij,kk}+ \frac{1}{1+\nu}\, \sigma_{kk\,,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\, \delta_{ij}\, f_{k\,,k} +f_{i,j}+f_{j,i} =0\, , \;\; x_i \in V, \qquad (77)$$

$$\sigma_{ji}\, n_j =p_i\, , \; x_i \in S. \qquad (78)$$

Допустим, найдены $\sigma_{ij}(x)$, удовлетворяющие уравнениям (76) - (78). В таком случае, компоненты линейного тензора Коши находятся легко

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}(-\nu\, \delta_{ij}\, \sigma_{kk} + (1 + \nu)\, \sigma_{ij}\,). \qquad (79)$$

Внося (79) в формулы Чезаро

$$u_i(x)= u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0)\, (x_j- x_j^{\,0}) + \int_1 \, (\varepsilon_{ik}(y)+(x_j-y_j\,)\, (\varepsilon_{k,ij}(y)- \varepsilon_{k,ji}\, (y)))\, dy_k, \qquad (80)$$

определим поле перемещения. Это поле далее определяет все-разность квадратов (62), элементы тензора Альманси (63), компоненты вращения. Таким образом, преобразование одной области в другую определяется только тензором Коши. При этом произведение градиентов $u_{k,i}u_{k,j}$ в (63) может иметь малые и большие по сравнению с ε_{ij} величины. В задаче (42)-(44), а так же в приведенном в приложении преобразовании прямоугольной области в сферическую область, величина $u_{k,i}\, u_{k,j}$ не только сравнима с величиной ε_{ij}, но превышает ее в несколько раз.

Основные выводы.

1. Исторически сложилось так, что статическая краевая задача имеет две постановки – одну при формулировании, другую при решении:

а). Тело, занимающее область V, ограниченную поверхностью S, находится в равновесии с заданными массовыми силами в V и граничными условиями на S. Найти деформации, напряжения и создавшие их перемещения внутри тела.

б). Прикладывая к заданному начальному состоянию тела (V_0, S_0) массовые силы и граничные условия, найти его конечное положение и имеющиеся в нем деформации, напряжения.

Все дело здесь в том, что эти постановки представляют собой две совершенно разные проблемы. Для того чтобы их различать, в этой работе вторая постановка названа задачей классического подхода, а решение, строго соответствующее первой постановке - Туратовым.

2. Задача классического подхода принципиально не решаема. Она не определена математически и некорректна с точки зрения механики. Переход тела из начального состояния в деформированное конечное положение является процессом, протекающим под действием изменяющихся во времени усилий, и он не может быть описан статическими уравнениями.

3. Предлагаемый нами Туратов подход решает статическую краевую задачу в строгом соответствии с общепризнанной формулировкой. Здесь задачу можно решить, она математически определена и не имеет противоречий с точки зрения механики.

4. Тензор Коши является полной характеристикой деформированного состояния при любых уровнях деформации. Приведенное в работе доказательство этого положения должно, на наш взгляд, занять центральное место в теории деформаций. Оно дает ей простоту, единообразие и избавляет ее от осложнений, возникающих при делении уровней деформации на бесконечно малые, малые и конечные величины и их изучении различающимися друг от друга приемами.

Основные положения диссертации опубликованы в работах:

1. Дуйшеналиев Т.Б., Жакыпбеков А.Б. Определение упругих констант материалов // XXIII Международная конференция в области бетона и железобетона. - М.: Стройиздат, 1991, с. 123-127.

2. Жакыпбеков А.Б., Дуйшеналиев Т.Б. О краевых задачах теории упругости и их решении: Сб. Науч. Тр. КыргызНИИПстроительства. - Бишкек: Илим, 1993, с. 36-46.

3. Жакыпбек А.Б., Дуйшеналиев Т.Б. Некоторые основные вопросы механики деформируемого тела. - Бишкек: Илим, 1995, 110 с.

4. Дуйшеналиев Т.Б. Новое решение статических граничных задач. В кн. Исследования по напряженно-деформированному состоянию, устойчивости и разрушению деформируемых сред (часть 2). - Бишкек: Илим, 1996, с.164-180.

5. Дуйшеналиев Т.Б. Теорема Бетти и формулы Сомильяны с позиции нового подхода к статическим задачам. В кн. Исследования по напряженно-деформированному состоянию, устойчивости и разрушению деформируемых сред (часть 2). - Бишкек: Илим, 1996, с.180-190.

6. Дуйшеналиев Т.Б. Определение перемещений. - Бишкек: Труды Кыргызского технического университета им. И.Раззакова, выпуск №1, 1997, - с.71-78.

7. Дуйшеналиев Т.Б. Нетрадиционная постановка статических краевых задач. - Бишкек: Труды Кыргызского технического университета им. И. Раззакова, выпуск № 1, 1997, с. 85-92.

8. Дуйшеналиев Т.Б., Власов Б.Ф., Попов Б.Г. Представление в триортогональной криволинейной системе координат общего решения задач упругостатики. В кн. Механика деформируемого твердого тела. Упругость, пластичность, колебания, композиты. - Бишкек: Изд. Кыргызского технического университета, 1997, с. 25-34.

9. Дуйшеналиев Т.Б. Определение перемещений. - Бишкек: Труды Кыргызского технического университета им. И.Раззакова, выпуск №1, 1997, с.71-78.

10. Жакыпбеков А.Б., Дуйшеналиев Т.Б. Тензор Коши полная характеристика деформированного состояния. - Бишкек: Труды Кыргызского технического университета им. И. Раззакова, выпуск № 1, 1997, с. 78-85.

11. Дуйшеналиев Т.Б. Нетрадиционная постановка статических краевых задач. - Бишкек: Труды Кыргызского технического университета им. И. Раззакова, выпуск № 1, 1997, с. 85-92.

12. Дуйшеналиев Т.Б., Власов Б.Ф., Жакыпбеков А.Б. Общее решение статических краевых задач // Сборник трудов Международной научной конференции «Традиции и новации в культуре университетского образования» (Часть 2). - Бишкек, 1998, с. 181-185.

13. Дуйшеналиев Т.Б., Жакыпбеков А.Б. Независимость решения Чезаро от пути интегрирования // Сборник трудов международной научной конференции «Традиции и новации в культуре университетского образования» (Часть 2). - Бишкек, 1998, с. 189-193.

14. Дуйшеналиев Т.Б. Гранично-элементный метод решения задач упругостатики // Материалы 3-й научно-технической конференции профессорско-преподовательского состава и студентов КАСИ. - Бишкек, 1999, с. 99-103.

15. Жакыпбек А.Б., Дуйшеналиев Т.Б. Новое воззрение на некоторые основы механики деформируемого тела. - Бишкек: Билд, 1999, 236 с.

16. Дуйшеналиев Т.Б., Никиткова О.А. Метод граничных интегральных уравнений без сингулярностей. - Бишкек: Вестник Кыргызского технического университета им. И.Раззакова, выпуск №2, 1999, с.71-78.

17. Дуйшеналиев Т.Б., Тологонов К.Т., Усенов А. О связях между нагрузкой и деформацией.- В кн. Кадры XXI века. – Бишкек: Технология, 1999, с.326-328.

18. Дуйшеналиев Т.Б. Общие решения задач теории упругости в криволинейных координатах. В кн. Материалы научного семинара кафедры механики. – Бишкек, Изд-во Кыргызского технического университета, 2000, с.35-42.

19. Дуйшеналиев Т.Б. О статически неопределимых системах. В кн. Материалы научного семинара кафедры механики. - Бишкек, Изд-во Кыргызского технического университета, 2000, с.11-24

20. Дуйшеналиев Т.Б. Задача о равновесии прямоугольной плиты. В кн. Материалы научного семинара кафедры механики. – Бишкек, Изд-во Кыргызского технического университета, 2000, с. 24-35.

21. Дуйшеналиев Т.Б. О статической краевой задаче теории упругости// Наука и новые технологии. - 2000. - №5, с.116-120.

22. Дуйшеналиев Т.Б. Статическая краевая задача и уровни деформаций. - В кн. Строительная наука: проблемы и решения. – Бишкек: Илим, 2000, с. 55-68.

23. Дуйшеналиев Т.Б., Ормонбеков Т.О., Нитченко Л.А. Нетрадиционный подход к решению статических краевых задач. Труды XIX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов».- Санкт-Петербург, 2001, с. 155-162.

24. Жакыпбеков А.Б., Дуйшеналиев Т.Б., Койчуманов К.Т. Уравнение диаграммы нагрузка-деформация. Труды XIX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов».-Санкт-Петербург, 2001, с.174-179.

25. Дуйшеналиев Т.Б., Мекенбаев Б.Т. К уравнению диаграмм «нагрузка-деформация» //Материалы международной научной конференции «Современные технологии и управление качеством в образовании, науке и производстве: опыт адаптации и внедрения». Бишкек, КТУ, 2001, с. 202-215.

26. Дуйшеналиев Т.Б., Жакыпбеков А.Б. и др. Исключение сингулярностей при решении задач математической физики методом граничных элементов. //Материалы международной научной конференции «Современные технологии и управление качеством в образовании, науке и производстве: опыт адаптации и внедрения». Бишкек, КТУ, 2001, с. 278-282.

Annotation

Statical boundary problem has one common statement at formulating, but when solving it has another one, called the problem of classic approach. Common statement based on mechanics is mathematically stated and correct. Classic approach problem isn't stated mathematically and contradicts the basics of mechanics. This causes two limitations: about closelyness of starting and ending conditions and statistic action attachment. The work proves that these limitations cause ralaxy and condradictions. Statical boundary problem must be solved in strict order with common statement. This solution, as it is shown in this work, brings easyness and gets rid of its false direction in deformated matter mechanics. The questions on deformation meassurements are also touched in dissertation. It is shown that tenzov Koshi considered to be useful for small defomations realy fulfils the conditions of any deformation numbers.

Аннотация

Статикалык чет маселе формулировкаланганда бир, ал эми чыгарууда башка, классикалык чыгаруу деп аталган коюлушка ээ. Жалпыга таанылган коюлуш, механикалык көз караштa математикалык анык жана корректүү. Классикалык чыгарылыш математикалык анык эмес жана механиканын негиздерине каршылаш. Бул, баштапкы жана

акыркы абалдардын жакындыгы жана аракеттердин статикалык жасалышы жөнүндө эки эскертүү жасоо мажбурлайт. Жумушта, бул эскертүүлөр, каршылыктарды түзүүчү куру сөздөр экендиги көрсөтүлгөн.

Статикалык чет маселе жалпыга таанымал коюлуш негизинде так чыгарылышы керек. Мындай чыгаруу, жумушта көрсөткөндөй, деформацияланган телолордун механикасына жөнөкөйлүктү киргизет жана аны карама-каршылыктардан жана туура эмес багыттардан бошотот.

Диссертацияда деформациялардын өлчөмдөрү жөнүндө суроолор да каралган. Кичи деформацияларда колдонулган Коши тензору, деформациялардын ар кандай чондуктарында, деформация абалынын толук мүнөздөмөсү экендиги көрсөтүлгөн.

Аннотация

Статическая краевая задача имеет при формулировании одну постановку (общепризнанную), а при решении другую, которую назовем задачей классического подхода. Общепризнанная постановка математически определена и корректна с точки зрения механики. Задача классического подхода математически не определена и противоречит основам механики. Это вынуждает делать две оговорки: **о близости начального и конечного состояний и статическом приложении действия.** В работе показано, что эти оговорки остаются пустыми словами, создающими иллюзии и противоречия. Статическая краевая задача должна решаться в строгом соответствии с общепризнанной постановкой. Такое решение, как показано в работе, вводит в механику деформируемого тела, простоту и избавляет ее от противоречий и ложных направлений.

В диссертации рассмотрены и вопросы о мерах деформирования. Показано, что тензор Коши, считающийся годным только для малых деформаций, на самом деле является полновесной характеристикой деформированного состояния при любых величинах деформаций.

Тех. редактор Исраилов К. Б.

Подписано в печать 15.04.2002 г. Формат бумаги 60х84 1/16.
Бум. офс. Печ. офс. Объем 2.00 п.л. Тир. 150 экз. Заказ 150.

720044, г. Бишкек, ул. Сухомлинова 20, ИЦ «ТЕКНИК», т. 42-14-55.