НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.01.123

На правах рукописи

Джураев Абубакир Мухтарович

УДК 517.9

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Бишкек – 2001

информатики Кыргызско-Узбекского университета.

Научный консультант: академик НАН КР, член-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор Иманалиев М.И.

Официальные оппоненты: член-корр. НАН Республики Казахстан, доктор физико-математических наук, профессор Касымов К.А.
доктор физико-математических наук, с.н.с. Алексеенко С.Н.
доктор физико-математических наук, профессор Сопуев А.

Ведущая организация: Ульяновский государственный университет

Защита диссертации состоится ~~19 декабря 2001 г.~~ 18 января 2002г. в 14.00 часов на заседании Диссертационного совета Д 01. 01. 123 по присуждению ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук при Институте математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан «15» ноября 2001 г.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу: Кыргызская Республика, 720071, Бишкек – 71, проспект Чуй, 265 – а, Институт математики НАН Кыргызской Республики, Диссертационный совет Д 01. 01. 123.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 01.01.123,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Во многих работах были получены достаточные условия для асимптотической устойчивости или (реже) неустойчивости решений сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений и систем. Для практики желательно, чтобы для некоторых классов уравнений были найдены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости, которые реально можно проверить для конкретных уравнений. Однако, поскольку ранее не формулировались в общем виде требования на то, что является исходными данными в таких условиях, их проверка может быть еще затруднительной, чем непосредственное решение уравнения или системы.

Рассмотрим более общий вид операторно-дифференциального уравнения, как было предложено в работах М.И.Иманалиева, П.С.Панкова, Г.М.Кененбаевой

$$F(\varepsilon, y^{(n)}(.), y^{(n-1)}(.), \ldots, y(.), x)=0, \quad 0<\varepsilon<<1. \qquad (1)$$

Соответствующее невозмущенное уравнение имеет вид

$$F(0, y^{(n)}(.), y^{(n-1)}(.), \ldots, y(.), x)=0. \qquad (2)$$

А.Н.Тихоновым были получены результаты для систем сингулярно-возмущенных уравнений (1),(2).

В работах А.Б.Васильевой и В.Ф.Бутузова получены асимптотические разложения для сингулярно-возмущенных уравнений в частных производных.

В работах М.И.Иманалиева, П.С.Панкова, потом К.Какишова изучен случай, когда функции входящие в уравнение (2) имеют разрывы 1 рода.

Однако эти отдельные результаты не давали путь для исследования других случаев. Поэтому М.И.Иманалиев разработал свой метод асимптотических разложений. Им, его учениками и другими были получены ряд лучших результатов, включая начальный скачок и другие.

Также С.А.Ломов предложил свой метод регуляризации, при помощи которого он сингулярно-возмущенную задачу свел к регулярно-возмущенной.

В упомянутых работах накладывались существенные ограничения на решения вырожденного уравнения (2). В связи с этим в работе М.И.Иманалиева, П.С.Панкова был предложен метод исследования (2) как точечного множества (без производных, когда это удается). Таким образом, были получены явления всплеска, вращающегося и удаляющегося пограничных слоев.

В работах М.И.Иманалиева, П.С.Панкова, Г.М.Кененбаевой был предложен алгоритм, который автоматически, путем проверки для заданных функций некоторых неравенств, определяет асимптотические решения систем уравнений определенного вида.

Однако и в этих работах алгоритм определяет только достаточные условия. Если ни для каких испытываемых прямоугольников разбиения не выполняется неравенство, то алгоритм конкретного результата не дает.

Цель работы сформулировать в общем виде требования для устойчивости решений систем сингулярно-возмущенных уравнений, развить теорию асимптотических методов так, чтобы можно было получить конкретные условия для различных классов уравнений и найти такие необходимые и достаточные условия, для некоторых классов уравнений, которые могут быть записаны в алгоритмической форме.

Методы исследования. В работе основными методами исследования являются методы М.И. Иманалиева, С.А. Ломова и алгоритмический подход к задачам с аналитическими функциями.

Научная новизна работы.

1. Введены понятия квадратично-аналитических и локально-монотонных функции.
2. Получен критерий локальной устойчивости аналитических решений начальной задачи для систем двух сингулярно-возмущенных обыкновенных уравнений.
3. Показано применение метода регуляризации краевым задачам для сингулярно-возмущенных уравнений с кратным спектром.
4. Определены регуляризующие функции для решения систем сингулярно-возмущенных уравнений.
5. Разработан метод асимптотического интегрирования для сингулярно-возмущенных задач с кратным спектром.
6. Сингулярно-возмущенные задачи с помощью метода регуляризации сведены к регулярно-возмущенным уравнениям.
7. Доказана теорема об оценке остаточного члена асимптотического решения сингулярно-возмущенной задачи с кратным спектром.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы теоретический характер. Разработанный критерий устойчивости решения систем сингулярно-возмущенных уравнений и методика применения метода регуляризации могут быть применены для решения интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром и определения устойчивости решений систем сингулярно-возмущенных уравнений.

На защиту выносятся следующие

Основные положения.

1. Определение локальной устойчивости решений систем сингулярно-возмущенных уравнений путем выделения первого ненулевого слагаемого в аналитической функции.
2. Определение квадратично-аналитических и локально-монотонных функций.
3. Применение понятий о квадратично-аналитических и локально-монотонных функциях для установления критерия локальной устойчивости.
4. Определение регуляризующих функций для решения систем сингулярно-возмущенных уравнений.

5. Сведение сингулярно-возмущенных уравнений к регулярно-возмущенным уравнениям.
6. Доказательство теорем о нормальной и об однозначной разрешимости итерационных задач.
7. Применение условий ортогональности для выделения ограниченных решений итерационных задач.
8. Доказательство теоремы об оценке остаточного члена регуляризованного ряда.

Апробация результатов. Материалы работы докладывались на международных и региональных конференциях и симпозиумах:

- Всесоюзная школа молодых ученых «Функциональные методы в прикладной математике и математической физике», Ташкент, 1988;
- First Turkish world mathematics symposium, Elazig. Firat University, Turkia, 1999;
- Всесоюзная научная конференция «Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач», Бишкек, 1991;
- Научно-техническая конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики», Москва, 1988;
- Всесоюзное научное совещание по методам малого параметра, Нальчик, 1987;
- Республиканская научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», Ош, 1993;
- Республиканская конференция математиков и механиков Киргизии, Фрунзе, 1987;
- Республиканская научно-методическая конференция «Проблемы повышения эффективности самостоятельной работы студентов», Пржевальск, 1990;
- Международная научно-практическая конференция «Современные методы и средства информационных технологий», Ош, 1995;
- Международная научно-практическая конференция, Кызыл-Кыя, 1997;
- Международная научно практическая конференция «Проблемы непрерывного образования в условиях обновления общества», Ош, 1999;
- Международная научная конференция «Проблемы математики и информатики в XXI веке », Бишкек, 2000;
- Международная научная конференция, Алматы, 2000;
- Международная научная конференция, Ош, 2001;
- Международная научная конференция «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», Бишкек, 2001;

на научных семинарах кафедры специальных курсов высшей математики МЭИ (ТУ), факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, Института математики НАН Кыргызской Республики, кафедры математического анализа

ИГУ, кафедры прикладной математики Ош ТУ, кафедры прикладной математики и информатики КУУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в монографии [20], статьях [1],[5-6],[11-12],[14-19],[21-37] и тезисах докладов [2-4],[7-10],[13]. В [14],[24-25] М.И. Иманалиеву принадлежит постановка проблемы, а соискателю – получение конкретных результатов. В [2],[5] С.А. Ломову принадлежит постановка задачи, а соискателю - разработка схемы метода и его реализация. В [3] соискателю принадлежит постановка задачи и разработка метода, а А.Г. Елисееву – вывод математических результатов. В [33] соискателю принадлежит постановка проблемы и разработка схемы метода, а М. Джураеву – получение конкретного результата по этому методу. В [16],[28] соискателю принадлежит постановка проблемы, а С.К. Атабаеву – вывод конкретных результатов. В [18],[21],[23],[29] соискателю принадлежит постановка задачи, а С.Д. Туратову вывод результатов. В [27],[30] соискателю принадлежит постановка проблемы и разработка схемы метода, а У.А. Аблакимову – получение конкретных результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения, списка использованных источников, содержащего 108 наименований и трех приложений. Объем текста 174 страниц.

Краткое содержание работы.

Введение посвящено обзору содержания диссертации, приводиться обоснование постановки проблемы.

В первой главе сформулированы проверяемые условия и базовые операции в теории сингулярных возмущений

В § 1.1. приведены известные результаты по теории сингулярных возмущений.Эти результаты изложены на примере более общего операторно-дифференциального уравнения, как было предложено в работе Иманалиева-Панкова-Кененбаевой

$$F(\varepsilon, y^{(n)}(.), y^{(n-1)}(.), \ldots, y(.), x)=0,\ 0<\varepsilon<<1. \qquad (1.1)$$

Уравнению (1.1) соответствует следующее невозмущенное уравнение

$$F(0, y^{(n)}(.)\ y^{(n-1)}(.), \ldots, y(.), x)=0. \qquad (1.2)$$

Начиная с работ А.Н.Тихонова, затем М.И.Иманалиева, П.С.Панкова, К.Какишева изучено уравнение (1.2).

60-е годы М.И.Иманалиев разработал свой метод. При его помощи им, его учениками и другими были получены ряд лучших результатов, включая начальный скачок и другие.

Также С.А.Ломов предложил свой метод «подъема в пространство большей размерности», при помощи которого он и его ученики получили ряд интересных результатов.

В упомянутых работах накладывались существенные ограничения на решения вырожденного уравнения (1.2). В связи с этим в работе М.И.Иманалиева, П.С.Панкова был предложен метод исследования (1.2) как точечного множества (без производных, когда это удается).

В § 1.2. изложены алгоритмически проверяемые условия.

При исследовании упомянутых методов для каждого уравнения вида (1.1) требуется отдельные исследования.

В работах М.И.Иманалиева, П.С.Панкова, Г.М.Кененбаевой был предложен алгоритм, который автоматически, путем проверки для заданных функций некоторых неравенств, определяет асимптотические решения систем уравнений определенного вида.

Однако и в этих работах алгоритм определяет только достаточные условия. Если ни для каких испытываемых прямоугольников разбиения не выполняется неравенство, то алгоритм конкретного результата не дает.

Поэтому перед нами, при изучении упомянутых работ М.И.Иманалиева, С.А.Ломова и других авторов возникли следующие задачи:

- сформулировать в общем виде требования;
- развить теорию асимптотических методов так, чтобы можно было получить конкретные условия для различных классов уравнений;
- найти такие необходимые и достаточные условия, для некоторых классов уравнений, которые могут быть записаны в алгоритмической форме.

В § 1.3. приведены основные алгоритмические операции:

Вторая глава посвящена изучению системы сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В § 2.1. рассматривается краевая задача для системы сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть изучается следующая задача

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y' - A(t)\,y = h(t), \qquad (2.1)$$

$$Gy \equiv \left\{y_1(0,\varepsilon), \ldots, y_{n_0}(0,\varepsilon), y_{n_0+1}(1,\varepsilon), \ldots, y_n(1,\varepsilon)\right\} = y^0 \quad (2.2)$$

при $\varepsilon \to 0$. Здесь $n_0=[n/2]$, где [ ]- целая часть.

Работа посвящена изучению сингулярно возмущенных задач (2.1), (2.2) с кратным спектром предельного оператора (или: в случае кратных корней соответствующего характеристического уравнения, если речь идет о системах дифференциальных уравнений).

Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения с кратным спектром предельного оператора изучались Я. Д. Тамаркиным, где было установлено, что асимптотическое разложение решения однородной линейной дифференциальной системы второго порядка содержит дробные степени малого параметра. Для дифференциальных уравнений n-го порядка такой результат были получены Трджинским и Территиным. Система $x'(t, \varepsilon) = A(\tau,\varepsilon)x$ где $\tau = \varepsilon t$, в случае, когда уравнение det $[\lambda E - A(\tau, 0)] = 0$ имеет кратные корни и матрица эквивалентна жордановой клетке, изучались в работе Н. И. Шкиля. Регуляризованная асимптотика решения задачи Коши для системы с кратным спектром дифференциальных уравнений в случае предельного оператора жордановой структуры получена С.А.Ломовым и А. Г. Елисеевым.

В этой главе изучается решение краевой задачи (2.1), (2.2), когда предельная матрицы $A(t)$ имеет тождественно кратный спектр и разрабатывается алгоритм асимтотического интегрирования краевой задачи (2.1), (2.2), в случае выполнения условия стабильности.

Для изучения задачи (2.1), (2.2) при достаточно малых ε потребуем выполнение следующих условий:

1^0. $A(t)\in C^{\infty}([0,1],L(H)),h(t)\in C^{\infty}([0,1],H)$,

2^0. Спектр $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^{n}$ матрицы $A(t)$ при каждом $t\in[0,1]$ удовлетворяет требованиям:

1) $\lambda_k(t)=\lambda(t),k=1..n;$

2) $\operatorname{Re}\lambda(t)\equiv 0;$

3) $\lambda(t)\neq 0$.

3^0. Матрица имеет жорданову цепочку векторов длины n, т.е.

$$\forall t\in[0,1]\qquad A(t)\varphi_1(t)=\lambda(t)\varphi_1(t),$$

$$A(t)\varphi_i(t)=\lambda(t)\varphi_i(t)+\varphi_{i-1}(t),i=2..n.$$

4^0. Каноническая структура матрицы $A(t)$, т.е. $A(t)=\lambda(t)E+T(t)$, не меняется на отрезке [0,1];

Производные от собственного и присоединенных векторов разложим по базису $\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)$:

$$\varphi_i'(t)=\sum_{k=1}^{n}C_i^k(t)\varphi_k(t).$$

Из коэффициентов разложения составим "структурную" матрицу

$$B=\begin{pmatrix} C_1^1(t) & C_2^1(t) & \dots & C_n^1(t)\\ C_1^2(t) & C_2^2(t) & \dots & C_n^2(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ C_1^n(t) & C_2^n(t) & \dots & C_n^n(t)\end{pmatrix}\qquad(2.3)$$

и будем требовать, чтобы для нее выполнялось условие

$$\forall t\in[0,1]\qquad \operatorname{Re}\sqrt[n]{-C_1^n(t)}\xi^k<0,k=1..n_0,$$

5^0.

$$\operatorname{Re}\sqrt[n]{-C_1^n(t)}\xi^k>0,k=n_0+1..n,$$

где ξ –первообразный корень n-ой степени из единицы.

В соответствии с методом регуляризации, введем дополнительные независимые переменные по формулам:

$$\tau_k=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left[\lambda(x)+\sqrt[n]{\varepsilon}g_{1,k}(x)+...+\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}(x)\right]dx\equiv\psi_k(t,\varepsilon),k=1..n_0,$$

$$\tau_k=\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\left[\lambda(x)+\sqrt[n]{\varepsilon}g_{1,k}(x)+...+\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}(x)\right]dx\equiv\psi_k(t,\varepsilon),k=n_0+1..n.$$

где функции $g_{i,k}(t)$, $i=1..n-1$, $k=1..n$ определяется из итерационных уравнений. Введя обозначения

$$\tau=(\tau_1,...,\tau_n),\psi(t,\varepsilon)=(\psi_1(t,\varepsilon),...,\psi_n(t,\varepsilon)),$$

вместо искомого решения $y(t,\ \varepsilon)$ задачи (2.1), (2.2) будем изучать новую "расширенную" функцию $u(t,\tau,\varepsilon)$ такую, что

$$u(t,\tau,\varepsilon)\big|_{\tau=\psi(t,\varepsilon)}\equiv y(t,\varepsilon).$$

Выделим две точки $M_0=M_0(0,\psi(0,\varepsilon)),M_1=M_1(1,\psi(1,\varepsilon))$ и определения функции $u(t,\tau,\varepsilon)$ поставим следующую задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda+\sqrt[n]{\varepsilon}g_{1,k}+...+\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}\right)\frac{\partial u}{\partial\tau_k}-Au=h,\qquad(2.4)$$

$$G_0u(M_0,\varepsilon)+G_1u(M_1,\ \varepsilon)=y^0\qquad(2.5)$$

при $\varepsilon\to 0$. Так как задача (2.4), (2.5) является регулярной по ε при $\varepsilon\to 0$, то естественно ее решение будем определять в виде ряда

$$u(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{s=-n_1}^{\infty}\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,s}u_s(t,\tau),\qquad(2.6)$$

с коэффициентами из пространства безрезонансных решений

$$U=\left\{\begin{aligned}&u(t,\tau):u=\sum_{i,k=1}^{n}u_{i,k}(t)\varphi_i(t)e^{\tau_k}+\\&+\sum_{i=1}^{n}u_i(t)\varphi_i(t),u_{i,k}(t),u_i(t)\in C^{\infty}([0,1],C)\end{aligned}\right\}.$$

В пространстве безрезонансных решений U зададим следующие операторы

$$\begin{cases}L_0\equiv A(t)-\lambda(t)\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial\tau_k},\\ L_j\equiv\sum\limits_{k=1}^{n}g_{j,k}(t)\dfrac{\partial}{\partial\tau_k},j=1..n-1,\\ G_0\equiv diag\{\underbrace{1,...,1}_{n_0}.\underbrace{0,....0}_{n-n_0}\},G_1\equiv diag\{\underbrace{0,....0}_{n_0}.\underbrace{1,...,1}_{n-n_0}\}.\\ Gu\equiv G_0u(M_0,\varepsilon)+G_1u(M_1,\varepsilon)\end{cases}\qquad(2.7)$$

Используем операторы (2.7) и расширенную задачу (2.4), (2.5) перепишем в виде

$$L_0 u=\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,j} L_j u+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-h, \tag{2.8}$$

$$Gu=y^0. \tag{2.9}$$

Степенной ряд (2.6) подставим в задачу (2.8), (2.9) и получим следующие итерационные задачи для определения коэффициентов $u_s(t,\tau)$ ряда (2.6):

$$L_0 u_{-n_1}=0, \qquad Gu_{-n_1}=0, \tag{2.10}$$

$$L_0 u_{s-n_1}=\sum_{j=1}^{s} L_j u_{s-j-n_1}-\delta_{n_1}^s h, Gu_{s-j-n_1}=\delta_{n_1}^s y^0, s=1..n-1, \tag{2.11}$$

$$L_0 u_{s-n_1}=\sum_{j=1}^{n-1} L_j u_{s-j-n_1}+\frac{\partial u_{s-n-n_1}}{\partial t}, Gu_{s-n_1}=0, s=n..\infty, \tag{2.12}$$

где $\delta_{n_1}^s$ –символ Кронекера. Оператор L_0 назовем основным.

Рассмотрим итерационные задачи (2.10)-(2.12). Для этих задач справедливы следующие теоремы о нормальной и об однозначной разрешимости.

Теорема 2.1. Пусть в пространстве U дано уравнение

$$L_0=f(t,\tau), \tag{2.13}$$

где L_0–основной оператор, определенной в (1.7), $f(t,\tau)\in U$ и пусть выполнены условия 1^0, 2^0. $1,3^0$, 4^0. Тогда для разрешимости уравнения (2.13) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы правая часть $f(t,\tau)$ была ортогональна (тождественно по $t\in[0,1]$) ядру сопряженного оператора L_0^*.

Теорема 2.2. Пусть в пространстве U дана задача

$$L_0 u_1=0, \tag{2.14}$$

$$Gu_1=0, \tag{2.15}$$

где L_0, G–операторы, определенные в (1.7). Пусть выплнены условия 1^0-5^0 и функции $g_{i,k}(t), j=1..n-1, k=1..n$ являются корнями следующих уравнений тождественных по $t\in[0,1]$:

$$P_{n+s,n,k}+P_{s,s,k}(C_1^{n-s}+...+C_{s+1}^n)+P_{s,s-1,k}(C_1^{n-s+s}+...+C_s^n)+$$
$$+...+P_{s,1,k}(C_1^{n-s}+C_2^n)+P_{s,0,k}C_1^n=0, \quad s=0..n-2,$$

где C_i^k - элементы матрицы, определенные в (2.3).

Тогда:

1) существует решение в системы уравнений

$$L_0 u_s=\sum_{j=1}^{s-1} L_j u_{s-j}, s=2..n,$$

$$L_0 u_s=\sum_{j=1}^{s-1} L_j u_{s-j}+\frac{\partial u_{s-n}}{\partial t}, s=n+1..2n-1;$$

2) задача (2.14), (2.15) имеет только нулевое решение, если выполнены условия

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n-1} L_j u_{2n-j}+\frac{\partial u_n}{\partial t}, \vartheta_k^* \right\rangle \equiv 0, k=1..n,$$

$$G_0 u_s(M_0)=0, s=2..n_0, G_1 u_s(M_1)=0, s=2..n_1+1.$$

На основании теорем 2.1, 2.2. последовательно решим итерационные задачи (1.10)-(1.12).

Теорема 2.3. Пусть для задачи (2.1), (2.2) выполнены условия 1^0-5^0 и решения задач (2.8), (2.9) определены в виде степенного ряда (2.6) из пространства U. Тогда сужение ряда (2.6) при $\tau=\psi(t,\varepsilon)$ и $\varepsilon\to 0$ является асимптотическим рядом для решения задачи (2.1), (2.2).

В § 2.2. исследуется краевая задача с кратным нестабильным спектром.

Рассмотрим следующую задачу

$$L\varepsilon y\equiv\varepsilon y'-A(t)y=h(t), \tag{2.16}$$

$$Gy\equiv\left\{y_1(0,\varepsilon),...,y_{n_0}(0,\varepsilon),y_{n_0+1}(1,\varepsilon),...,y_n(1,\varepsilon)\right\}=y^0 \tag{2.17}$$

при $\varepsilon\to 0$.

Задача (2.16), (2.17) изучается при выполнении следующих условий:

1^0. $A(t)\in C^\infty([0,1],L(H)), h(t)\in C^\infty([0,1],H)$,

2^0. Спектр $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^n$ матрицы $A(t)$ при каждом $t\in[0,1]$ удовлетворяет требованиям:

1) $\lambda_k(t)=\lambda(t), k=1..n$ 2) $\operatorname{Re}\lambda(t)\equiv 0$;

3) $\lambda(t)=a(t)\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_s}, a(t)\neq 0$;

3^0. Матрица имеет жорданову цепочку векторов длины n, т.е.

$\forall t\in[0,1] \qquad A(t)\varphi_1(t)=\lambda(t)\varphi_1(t)$,

$A(t)\varphi_i(t)=\lambda(t)\varphi_i(t)+\varphi_{i-1}(t), i=2..n$

4^0. Каноническая структура матрицы $A(t)$, т.е.

$$A(t)=\lambda(t)E+T(t),$$

не меняется на отрезке [0,1];

Производные от собственного и присоединенных векторов разложим по базису $\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)$:

$$\varphi_i'(t) = \sum_{k=1}^{n} C_i^k(t)\varphi_k(t), i = 1..n.$$

Из коэффициентов разложения составим "структурную" матрицу B и будем требовать, чтобы для нее выполнялось условие

$$5^0. \quad \forall t \in [0,1] \qquad \mathrm{Re}\sqrt[n]{-C_1^n(t)}\xi^k < 0, k = 1..n_0,$$
$$\mathrm{Re}\sqrt[n]{-C_1^n(t)}\xi^k > 0, k = n_0+1..n,$$

где ξ –первообразный корень n-ой степени из единицы.

Разложим правую часть $h(t)$ по базису

$$\varphi_1(t),..., \varphi_n(t): h(t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(t)\varphi_k(t).$$

$$h_n(0) = 0,$$

$$6^0. \lim_{t \to t_j} \frac{d^i}{dt^i} \sum_{k=0}^{n-s} (-1)^k \frac{h_{k+s}(t)}{\lambda^k(t)} = 0, s = 1..n-1, j = 0..r, i = 0..k_j - 1.$$

Введем матрицы

$$G_0 \equiv diag\{\underbrace{1,...,1}_{n_0}, \underbrace{0,...,0}_{n-n_0}\}, G_1 \equiv diag\{\underbrace{0,...,0}_{n_0}, \underbrace{1,...,1}_{n-n_0}\}.$$

7^0. $G_0\varphi_1(0) \neq 0$, $G_1\varphi_1(1) \neq 0$.

Предположим, что векторы $\varphi_k(t) = (\varphi_{1,k}(t),...,\varphi_{n,k}(t)), k = 1..n$, такие, что $\varphi_{i,k}(t) \equiv 0, i < k, k = 1..n.$ Задача (2.16),(2.17) при выполнении условия 2^0.3. является сингулярной возмущенной задачей с нестабильным спектром.

При построении асимптотических решений задач типа (2.16), (2.17) с нестабильным спектром, исключительно важную роль играют так называемые полиномы Лагранжа-Сильвестра, построенные по узлам $(t_j; f^{(s)}(t_j))$ функции $f(t)$ и ее производных до определенного порядка в точках t_j нестабильности спектра оператора $A(t)$.

Пусть даны функция $f(t) \in C^\infty[0,1]$ и многочлен $P(t) \equiv \prod_{j=0}^{r}(t - t_j)^{k_j}$.

Многочлен $r(t) \equiv r(t:f)$ назовем полиномом Лагранжа-Сильвестра функции $f(t)$ относительно многочлена $P(t)$, если степень многочлена меньше $r(t)$ многочлена $P(t)$ и имеются итерационные равенства

$$r^{(s)}(t_j) = f^{(s)}(t_j), j = 0..r, s = 0..k_j - 1.$$

Справедлива следующая

Лемма 2.1. Пусть $r(t)$ –полином Лагранжа-Сильвестра функции $f(t)$ относительно многочлена $P(t)$. Тогда существует единственная функция $a(t)$ такая, что

$f(t)$-$r(t) \equiv a(t)P(t)$.

Для построения полиномов Лагранжа-Сильвестра используется следующая

Лемма 2.2. Для функции $f(t)$ существует единственный полином Лагранжа-Сильвестра $r(t)$ относительно многочлена $P(t)$ в виде

$$r(t) = \prod_{j=0, j\neq i}^{r} (t - t_j)^{k_j} \sum_{j=0}^{r} \left[\frac{A_{k_j}^{(j)}}{(t - t_j)^{k_j}} + ... + \frac{A_1^j}{t - t_j} \right],$$

где

$$A_{k_j}^{(j)} = \frac{f(t_j)}{\alpha_j(t_j)}, ..., A_{k_j - i}^{(j)} = \frac{1}{i!}\left[\frac{f(t)}{\alpha_j(t)}\right]^{(i)}\Bigg|_{t=t_j},...$$

$$..., A_1^{(j)} = \frac{1}{(k_j - 1)!}\left[\frac{f(t)}{\alpha_j(t)}\right]^{(k_j - 1)}\Bigg|_{t=t_j},$$

$$\alpha_j(t) \equiv P(t)/(t - t_j)^{k_j}, j = 0..r, i = 0..k_j - 1.$$

Базисной системой полиномов Лагранжа-Сильвестра относительно многочлена $P(t)$ называется система полиномов $\{K_{ji}(t)\}(i = 0..r, j = 0..k_j - 1)$, если степень системы полиномов $\{K_{ji}(t)\}$ меньше степени многочлена $P(t)$ и для функции ее полином Лагранжа-Сильвестра относительно представляется в виде

$$r(t) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{k_j - 1} f^{(i)}(t_j) K_{ji}(t)$$

Переходим к изучению краевой задачи (2.16), (2.17). Введем регуляризующие переменные по формулам

$$\tau_k = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[\lambda(x) + \sqrt[n]{\varepsilon}\, g_{1;k}(x) + \ldots + \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1} g_{n-1,k}(x)\right] dx \equiv \psi_k(t,\varepsilon), k = 1..n_0,$$

$$\tau_k = \frac{1}{\varepsilon}\int_1^t \left[\lambda(x) + \sqrt[n]{\varepsilon}\, g_{1,k}(x) + \ldots + \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1} g_{n-1,k}(x)\right] dx \equiv \psi_k(t,\varepsilon), k = n_0 + 1..n.$$

Пусть $K_{ji}(t), j = 0..r, i = 0..k_j - 1$ базисная система полиномов Лагранжа-Сильвестра относительно многочлена

$$P(t) \equiv \lambda(t)/\alpha(t) = \prod_{j=0}^{r}(t - t_j)^{k_j}.$$

Для описания существенно особых сингулярностей, содержащихся в решении задачи (2.16), (2.17) из-за условия 2^0.3. введем дополнительные независимые переменные по формулам

$$\sigma_{kji} = e^{\psi_k(t,\varepsilon)} \int_0^t e^{-\psi_k(t,\varepsilon)} K_{ji}(x)dx \equiv \theta_{kji}(t,\varepsilon),$$

$$k = 1..n_0, i = 0..k_j - 1, j = 0..r,$$

$$\sigma_{kji} = e^{\psi_k(t,\varepsilon)} \int_1^t e^{-\psi_k(t,\varepsilon)} K_{ji}(x)dx \equiv \theta_{kji}(t,\varepsilon),$$

$$k = n_0 + 1..n, i = 0..k_j - 1, j = 0..r.$$

Введя обозначения

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n), \psi(t,\varepsilon) = (\psi_1(t,\varepsilon), \ldots, \psi_n(t,\varepsilon)),$$

$$\{\sigma_{kji}\} = \sigma, \{\theta_{kji}(t,\varepsilon)\} = \theta(t,\varepsilon),$$

вместо искомого решения $y(t,\varepsilon)$ задачи (2.16), (2.17) изучим "расширенную" функцию $u(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$ для которой

$$u(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\Big|_{\substack{\tau=\psi(t,\varepsilon)\\ \sigma=\theta(t,\varepsilon)}} \equiv y(t,\varepsilon).$$

Выделим

$$M_0 = M_0(0,\psi(0,\varepsilon),\theta(0,\varepsilon)), M_1 = M_1(1,\psi(1,\varepsilon),\theta(1,\varepsilon))$$

и для определения расширенной функции $u(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$ получаем следующую задачу

$$\varepsilon\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} K_{ji}(t)\frac{\partial u}{\partial \sigma_{kji}}\right] + \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda + \sqrt[n]{\varepsilon}\, g_{1,k} + \ldots + \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1} g_{n-1,k}\right) \mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\left[\frac{\partial u}{\partial \tau_k} + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} \sigma_{kji}(t)\frac{\partial u}{\partial \sigma_{kji}}\right] - Au = h, \qquad (2.18)$$

$$G_0 u(M_0,\varepsilon) + G_1 u(M_1,\varepsilon) = y^0 \qquad (2.19)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Задача (2.18), (2.19) является регулярной по малому параметру ε, и ее решение определим в виде степенного ряда

$$u(t,\tau,\sigma,\varepsilon) = \sum_{s=-n_1}^{\infty} \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,s}\, u_s(t,\tau,\sigma), \qquad (2.20)$$

с коэффициентами из пространстве безрезонансных решений

$$U = \left\{\begin{array}{l} u(t,\tau,\sigma) : u = \sum\limits_{m,k=1}^{n} u_{m,k}(t)\varphi_m(t)e^{\tau_k} + \\ + \sum\limits_{m,k=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{r}\sum\limits_{i=0}^{k_j-1} u_{m,k,j,i}(t)\varphi_m\sigma_{kji} + \\ + \sum\limits_{m=1}^{n} u_m(t)\varphi_m(t), u_{m,k}(t), u_{m,k,j,i}(t), u_m(t) \in C^\infty([0,1],C) \end{array}\right\}$$

В пространстве без резонансных решений U зададим следующие операторы

$$\begin{cases} L_0 \equiv A(t) - \lambda(t)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k} + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=o}^{k_j-1}\sigma_{kji}\frac{\partial}{\partial\sigma_{kji}}\right), \\ L_m \equiv \sum_{k=1}^{n} g_{m,k}(t)\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k} + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=o}^{k_j-1}\sigma_{kji}\frac{\partial}{\partial\sigma_{kji}}\right), m = 1..n-1, \\ L_n \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} K_{ji}(t)\frac{\partial}{\partial\sigma_{kji}}, Gu \equiv G_0 u(M_0,\varepsilon) + G_1 u(M_1,\varepsilon), \\ G_0 \equiv diag\left\{\underbrace{1,...,1}_{n_0}, \underbrace{0,...,0}_{n-n_0}\right\}, G_1 \equiv diag\left\{\underbrace{0,...,0}_{n_0}, \underbrace{1,...,1}_{n-n_0}\right\}. \end{cases}$$

Переходим к задаче

$$L_0 u = \sum_{m=1}^{n-1} \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,m} L_m u + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - h, \qquad (2.21)$$

$$Gu = y^0. \qquad (2.22)$$

Для определения коэффициентов степенного ряда (2.20) подставим его в задачу (2.21), (2.2) и получаем следующие итерационные задачи

$$L_0 u_{1-n_1} = 0, \qquad Gu_{1-n_1} = 0, \qquad (2.23)$$

$$L_0 u_{s-n} = \sum_{m=1}^{s-1} L_m u_{s-m-n} - \delta_{n_1}^s h, Gu_{s-n} = \delta_n^s y^0, s = 2..n, \qquad (2.24)$$

$$L_0 u_s = \sum_{m=1}^{n} L_m u_{s-m} + \frac{\partial u_{s-n}}{\partial t},\ Gu_s = 0,\ s = 1..\infty. \qquad (2.25)$$

Для задач (2.23)- (2.25) разработаем теорию разрешимости и однозначной разрешимости в пространстве U.

Справедливы следующие теоремы разрешимости задач (2.23)- (2.25).

Теорема 2.4. Пусть в пространстве U дано уравнение

$$L_0 u = f(t,\tau,\sigma), \qquad (2.26)$$

где оператор L_0–основной оператор, $f \in U$ и пусть выполнены условия $1^0, 2^0.1, 3^0, 4^0$. Тогда для разрешимости уравнения (2.26) в U необходимо и достаточно, чтобы

1) $$\left\langle f, KerL_0^* \right\rangle = 0,$$

2) $$\lim_{t\to t_j}\frac{d^i}{dt^i}\sum_{k=0}^{n-s}(-1)^k\left\langle f,\varphi_{k+s}^*\right\rangle / \lambda^k(t) = 0,$$
$$s = 1..n, j = 0..r, i = 0..k_j - 1.$$

Теорема 2.5. Пусть в пространстве U дана задача

$$L_0 u_1 = 0,, \qquad (2.27)$$

$$Gu_1 = 0,, \qquad (2.28)$$

Пусть выполнены условия 1^0-7^0 и $g_{i,k}(t), j = 1..n-1, k = 1..n$ являются корнями следующих уравнений тождественно по $t \in [0,1]$:

$$P_{n+s,n,k} + P_{s,s,k}(C_1^{n-s}(t) + ... + C_{s+1}^n(t)) +$$

$$+ P_{s,s-1,k}(C_1^{n-s+s}(t) + ... + C_s^n(t)) + ... + P_{s,1,k}(C_1^{n-s}(t) + C_2^n(t)) +$$

$$+ P_{s,0,k}C_1^n = 0, \quad s = 0..n-2,$$

где $P_{m,j,k}$ –многочлены, определяемые по формулам

$$P_{m,j,k}(g_{1,k}(t),..., g_{m-j+1,k}(t)) = \sum_{s_1+...+s_j=m} g_{s_1,k}(t)...g_{s_j,k}(t).$$

Тогда: 1) существует решение U в системе уравнений

$$L_0 u_s = \sum_{m=1}^{s-1} L_m u_{s-m}, s = 2..n,$$

$$L_0 u_s = \sum_{m=1}^{n} L_m u_{s-m} + \frac{\partial u_{s-n}}{\partial t},\ s = n+1..2n-1;$$

2)Задача (2.27), (2.28) имеет только нулевое решение, если выполнены условия

$$\begin{cases} \lim_{t\to t_j}\frac{d^i}{dt^i}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\left\langle L_n u_{1+s} + \frac{\partial u_{1+s}}{\partial t}, \varphi_k^*\right\rangle / \lambda^k(t) = 0, \\ m = 1..n, j = 0..r, i = 0..k_j - 1, s = 0..n + n_0 - 1, \\ \left\langle \sum_{m=1}^{n} L_m u_{2n-m} + \frac{\partial u_n}{\partial t}, KerL_0^* \right\rangle \equiv 0, \\ G_0 u_s(M_0) = 0, s = 2..n_0, G_1 u_s(M_1) = 0, s = 2..n_1 + 1. \end{cases}$$

С помощью теорем 2.4, 2.5. последовательно решим итерационные задачи (2.23)- (2.25).

Справедлива следующая

Теорема 2.6. Пусть выполнены условия 1^0-7^0. Тогда сужение ряда (2.20) является асимптотическим рядом при $\varepsilon \to 0$ для решения $y(t,\varepsilon)$ задачи (2.16), (2.17), т.е. для достаточно малых $\varepsilon \in [0,\varepsilon^0]$ (ε^0-достаточно мало) справедлива оценка

$$\left\| y(t,\varepsilon) - \sum_{s=1-n}^{N} \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,s} u_s(t,\psi(t,\varepsilon),\theta(t,\varepsilon) \right\| \le c \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,N+1} .$$

В § 2.3. устанавливается критерий локальной устойчивости аналитического решения начальной задачи.

Пусть дана задача

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y' - A(t)y = h(t), \qquad (2.29)$$

$$y(0,\varepsilon) = y^0. \qquad (2.30)$$

Пусть матрица – функция

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

и вектор-функция $h(t) = \mathrm{colon}\ \{ h_1(t), h_2(t)\}$

- заданные аналитические функции в некоторой окрестности точки $t=0$ и $y^0 = \mathrm{colon}\ \{y_1^0, y_2^0\}$ заданный постоянный вектор.

Для изучения решения задачи (2.29), (2.30) используем следующее

Определение 2.1. Решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (2.29), (2.30) называется локально устойчивым в некоторой окрестности точки $t=0$ при $\varepsilon \to 0$, если $(\exists \varepsilon_0 > 0)$ $(\exists t_0 > 0)$ $(\exists c > 0)$ такие, что $(\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ $(\forall t: t \le t_0)$ справедлива оценка

$$\| y(t, \varepsilon) \| < c$$

Потребуем выполнения следующего условия:

А). $A(t), h(t)$ - аналитичны в некоторой окрестности точки $t = 0$;

Проведем подробный анализ для установления критерия локальной устойчивости решения задачи (2.29), (2.30). Обозначим через k_{ij} – номера первых ненулевых слагаемых в разложениях функций $a_{ij}(t)$ соответственно и через m_i – номера первых ненулевых слагаемых в разложениях функций $h_i(t)$ соответственно.

Пусть $k_0 = \min (k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22})$, $m_0 = \min (m_1, m_2)$ (если функции $a_{ij}(t) \equiv 0$, $h_i(t) \equiv 0$ то положим $k_{ij} \equiv \infty$, $m_i \equiv \infty$)

Очевидны следующие утверждения:

1. Если $k_0 = m_0 = \infty$, то решение задачи (2.29), (2.30) имеет вид $y(t,\varepsilon) = y^0$ и оно устойчиво при $\varepsilon \to 0$;

2. Если $k_0 = \infty$, $m_0 < \infty$, то решение задачи (2.29), (2.30) неустойчиво при $\varepsilon \to 0$;

Основу данной работы составляет:

3. Если $k_0 < \infty$, то рассмотрим матрицы

$$A_m(t) = \begin{pmatrix} \sum_{s=0}^{m} a_{11s}t^s & \sum_{s=0}^{m} a_{12s}t^s \\ \sum_{s=0}^{m} a_{21s}t^s & \sum_{s=0}^{m} a_{22s}t^s \end{pmatrix}, \quad m = 0..\infty,$$

где $a_{ij}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{ijs}t^s$, $i,j = 1,2$.

Пусть $\lambda_i(t), \lambda_{im}(t)$ – собственные значения матриц $A(t), A_m(t)$), $m = 0..\infty$.

Определение 2.2. Функция $\varphi(t)$ называется квадратично-аналитической по t при $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$, если она представима в виде $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \sqrt{(t)}\ \varphi_2(t)$, где $\varphi_i(t)$, $i = 1,2$ – аналитические функции по t при $t \in [0, t_0]$.

Лемма 2.3. Собственные значения $\lambda_i(t), \lambda_{im}(t)$ матриц $A(t), A_m(t)$, $m = 0..\infty$ являются квадратично-аналитическими функциями по t при $t \in [0, t_0]$.

Определение 2.3. Функция $\varphi(t)$ называется локально-монотонной, если при $t \to 0$ функция $\varphi(t)$ имеет определенный знак.

Лемма 2.4. Квадратично-аналитические функции являются локально-монотонными функциями по t при $t \to 0$.

Вопросы локальной устойчивости аналитического решения начальной задачи для систем двух сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений полностью решаются в следующих двух теоремах.

Теорема 2.7.. Пусть дана задача (2.29), (2.30), выполнено условие А) и $\lambda_i(t)$, $\lambda_{im}(t)$ -собственные значения матриц $A(t)$, $A_m(t)$, $m = 0..\infty$.

Тогда решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (2.29), (2.30) локально устойчиво в некоторой окрестности точки $t=0$ при $\varepsilon \to 0$ тогда и только тогда, когда если выполнено одно из условий:

1) $Re\ \lambda_{10} < 0$, $Re\ \lambda_{20} < 0$;
2) $Re\ \lambda_{10} < 0$ и $(\exists m > 0)$ $(\exists t_0 > 0)$, что $\forall t \in (0,t_0)$ $Re\ \lambda_{2s}(t) \equiv 0$, $s = 0..m-1$, $Re\ \lambda_{2m}(t) < 0$;
3) $Re\ \lambda_{10} < 0$, $Re\ \lambda_2(t) \equiv 0$;
4) $(\exists m, p > 0)$, $(\exists t_0 > 0)$, что $\forall t \in (0,t_0)$ $Re\ \lambda_{1s}(t) \equiv 0$, $s = 0..m-1$, $Re\ \lambda_{1m}(t) < 0$, $Re\ \lambda_{2k}(t) \equiv 0$, $k = 0..p-1$, $Re\ \lambda_{2p}(t) < 0$ и $\lambda_1(t) \ne \lambda_2(t)$;
5) $(\exists m, p > 0)$, $(\exists t_0 > 0)$, что $\forall t \in (0,t_0)$ $Re\ \lambda_{1s}(t) \equiv 0$, $s = 0..m-1$, $Re\ \lambda_{1m}(t) < 0$, $Re\ \lambda_{2k}(t) \equiv 0$, $k = 0..p-1$, $Re\ \lambda_{2p}(t) < 0$, $\lambda_1(0) = \lambda_2(0)$ и $|a_{12}(t)| + |a_{21}(t)| \equiv 0$;
6) $Re\ \lambda_1(t) \equiv 0$ и $(\exists m > 0)$ $(\exists t_0 > 0)$, что $\forall t \in (0,t_0)$ $Re\ \lambda_{2s}(t) \equiv 0$, $s = 0..m-1$, $Re\ \lambda_{2m}(t) < 0$ и $\lambda_1(t) \ne \lambda_2(t)$;
7) $Re\ \lambda_1(t) \equiv 0$ и $(\exists m > 0)$ $(\exists t_0 > 0)$, что $\forall t \in (0,t_0)$ $Re\ \lambda_{2s}(t) \equiv 0$, $s = 0..m-1$, $Re\ \lambda_{2m}(t) < 0$, $\lambda_1(0) = \lambda_2(0)$ и $|a_{12}(t)| + |a_{21}(t)| \equiv 0$;
8) $Re\ \lambda_1(t) \equiv 0$, $Re\ \lambda_2(t) \equiv 0$ и $\lambda_1(t) \ne \lambda_2(t)$;
9) $Re\ \lambda_1(t) \equiv 0$, $Re\ \lambda_2(t) \equiv 0$, $\lambda_1(0) = \lambda_2(0)$ и $|a_{12}(t)| + |a_{21}(t)| \equiv 0$.

Теорема 2.8. Пусть дана задача (2.29), (2.30) и выполнено условие А) и $\lambda_i(t)$, $\lambda_{im}(t)$ - собственные значения матриц $A(t)$, $A_m(t)$, $m = 0..\infty$.

Тогда решение $y(t, \varepsilon)$ задачи (2.29), (2.30) неустойчиво при $\varepsilon \to 0$ тогда и только тогда, когда если выполнено одно из условий:

1) $Re\,\lambda_{10} > 0,\ \lambda_{20} \in C;$
2) $(\exists\, m > 0)\ (\exists\, t_0 > 0)$, что $\forall\, t \in (0,t_0)\ Re\,\lambda_{1s}(t) \equiv 0,\ s=0..m-1,\ Re\,\lambda_{1m}(t) > 0$ и $\lambda_{20} \in C;$
3) $Re\,\lambda_1(t) > 0,\ \lambda_{20} \in C;$
4) $(\exists\, m, p > 0),\ (\exists\, t_0 > 0)$, что $\forall\, t \in (0,t_0)\ Re\,\lambda_{1s}(t) \equiv 0,\ s=0..m-1,\ Re\,\lambda_{1m}(t) < 0,$ $Re\,\lambda_{2k}(t) \equiv 0,\ k=0..p-1,\ Re\,\lambda_{2p}(t) < 0,\ \lambda_1(0) = \lambda_2(0)$ и $|a_{12}(0)| + |a_{21}(0)| \neq 0;$
5) $Re\,\lambda_1(t) \equiv 0$ и $(\exists\, m > 0)\ (\exists\, t_0 > 0)$, что $\forall\, t \in (0,t_0)\ Re\,\lambda_{2s}(t) \equiv 0,\ s=0..m-1,$ $Re\,\lambda_{2m}(t) < 0,\ \lambda_1(0) = \lambda_2(0)$ и $|a_{12}(0)| + |a_{21}(0)| \neq 0;$
6) $Re\,\lambda_1(t) \equiv 0,\ Re\,\lambda_2(t) \equiv 0,\ \lambda_1(0) = \lambda_2(0)$ и $|a_{12}(0)| + |a_{21}(0)| \neq 0.$

В третьей главе построены алгоритмы для определения асимптотического поведения решений систем линейных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений.

Основные результаты по локальной устойчивости аналитических решений систем двух уравнений приведены в § 3.1.

В § 3.2. приведен алгоритм для определения асимптотического поведения решений для систем двух линейных сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В качестве приложения приведены основные идеи метода М.И.Иманалиева и метода С.А.Ломова, а также результаты компьютерного расчета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы надеемся, что с помощью развитой методики также можно будет алгоритмизировать другие теории динамических систем. Также с помощью разработанной теории асимптотического интегрирования краевой задачи с кратным спектром исследовать сингулярно-возмущенные интегро-дифференциальные уравнения.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному консультанту академику НАН Кыргызской Республики М. И. Иманалиеву за полезные обсуждения при выполнении данной работы.

<u>Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора:</u>

1. Асимптотическое интегрирование краевой задачи с кратным чисто мнимым спектром // Сб. науч. тр. – М.: МЭИ,1987.№ 141. - С.30-34.
2. (совм. с С.А. Ломовым) Ряды Лорана для решений сингулярно возмущенных задач // Тез. докл. конф. мат. и мех. Киргизии. - Фрунзе: Илим.1987. -С.26.
3. (совм. с А.Г. Елисеевым) Асимптотическое интегрирование краевой задачи с кратным спектром с особенностью // Там же. - С.26.
4. Разработка метода регуляризации для некоторых задач с кратным спектром // Тез. кратких науч. сообщ. Всесоюз. совещания: Методы малого параметра. - Нальчик: Кабардино-Балкарский гос. ун-т, 1987. – С.54.
5. (совм. с С.А. Ломовым) Об аналитических решениях сингулярно возмущенных задач с кратным спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим,1988. - Вып.21. - С.240-244.
6. Краевая задача с нестабильным спектром //Там же. - Бишкек: Илим, 1992. Вып.24. - С. 193-197.
7. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач // Тез. докл. науч.-теор. конф. Иссык-Кульского гос. ун-та. - Каракол: ИГУ,1993. - С. 4
8. Об одном признаке сходимости числовых рядов // Там же. - С. 5.
9. Сингулярно возмущенная задача Коши с нестабильным спектром // Тез. докл. республ. науч. конф. - Ош: Ошск. гос. ун-т, 1993. – С. 43.
10. Об одной сингулярно возмущенной задаче Коши // Там же. – С. 44.
11. Сингулярно возмущенная задача Коши с нестабильным спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,1994. - Вып.25. - С. 7-10.
12. Регуляризующие функции, сохраняющие гладкость коэффициентов сингулярно возмущенной системы // Там же. - С. 11-12.
13. Сингулярно возмущенная краевая задача // Тез. докл. междунар. науч.-практ. конф. - Ош: Ошск. высший колледж,1995. - С. 105.
14. (совм. с Иманалиевым) Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенной задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып.27. - С. 11-15.
15. Об одной сингулярно возмущенной нелинейной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка // Там же. - С. 180-184.
16. (совм. с С.К. Атабаевым) Сингулярно возмущенная краевая задача для системы дифференциальных уравнений // Там же. - С. 185-189.
17. Краевая задача в случае спектральных особенностей предельного оператора // Там же. - С.190-194.
18. (совм. с С.Д. Туратовым) Краевая задача с нестабильным кратным спектром // Там же. - С. 195-199.
19. A problem with a multiple pure imaginary spectrum // 1st Turkish world mathematics symposium. – Elazig: Firat University,1999. - P.124-127.
20. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач с кратным спектром. – Ош: Ошск. техн. ун-т, 1999. – 108 с.
21. (совм. с С.Д. Туратовым) Асимптотическое интегрирование краевой задачи с помощью полиномов Лагранжа-Сильвестра // Мат-лы междунар. науч.-практ. конф.. –Ош: Ошский высший колледж, 1999. – С. 180-186.
22. Краевая задача для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с чисто мнимым спектром // Науч. тр. Ошск. гос. ун-та. Физ. - мат. науки. Ош: Ош ГУ, 1999. - Вып.2. – С. 77 - 82.
23. (совм. с С.Д. Туратовым) Сингулярно возмущенная задача Коши для дифференциального уравнения с особыми точками // Там же. – С. 83 - 88.

24.(совм. с М.И. Иманалиевым) Сингулярно возмущенная задача для нелинейного уравнения // Там же. – С. 107 - 111.
25.(совм. с М.И. Иманалиевым) О нелинейной задаче с однородным начальным условием для дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,1999. - Вып.28. - С. 3-7.
26.Краевая задача для дифференциального уравнения с чисто мнимым спектром // Там же. - С. 212-216.
27.(совм. с У.А. Аблакимовым)Ряды Лорана для решений сингулярно возмущенных задач с кратным спектром // Там же. - С. 217-222.
28.(совм. с С.К. Атабаевым) Дифференциальные уравнения с нестабильным спектром // Там же. - С. 223-227.
29.(совм. с С.Д. Туратовым) Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенной задачи для нелинейного дифференциального уравнения // Там же. - С. 228-232.
30.(совм. с У.А. Аблакимовым) Асимптотика вырождающихся сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с начальным условием // Там же. - Бишкек: Илим, 2000. - Вып.29. - С. 67-71.
31.Асимптотическое интегрирование задачи с нестабильным спектром // Там же. - С. 219-223.
32.Развитие метода регуляризации для задач с мнимым спектром // Там же. - С. 224-228.
33. (совм. с М. Джураевым) Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка // Там же. - С. 229-233.
34.Задача Коши для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с нестабильным спектром // Тр. междунар. науч. конференции. - Бишкек: Кыргызск. гос. нац. ун-т, 2000.- С. 152-155.
35.Нелинейная сингулярно возмущенная задача с кратным спектром // Вестн. Кыргызск. гос. нац. ун-та. Серия 3. Естественно-техн. науки. – 2001. - Вып. 5. - С. 189-192.
36.Теоремы разрешимости для нелинейной задачи с кратным спектром // Сб. науч. тр. Кыргызск.-Узбекск. ун-та. - Ош: КУУ,2001. - Вып.2. - С. 171-176.
37.Критерий локальной устойчивости аналитического решения начальной задачи для систем двух сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Кыргызск. гос. нац. ун-та. Серия 3. Естественно-техн. науки. – 2001. - Вып. 6. - С. 177-180.

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАЛАРЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ТУРУКТУУЛУГУНУН КРИТЕРИЙИ

Диссертацияда сингулярдык козголгон теңдемелердин системаларынын аналитикалык чыгарылыштары каралган жана эселүү спектрлүү сингулярдык козголгон теңдемелер үчүн чек аралык маселени асимптотикалык интегралдоо методу иштеп чыгылган.

Сингулярдык козголгон теңдемелердин системаларынын аналитикалык чыгарылыштарынын туруктуулугунун критерийи иштеп чыгылган. Аналитикалык чыгарылыштардын туруктуулугу жана туруктуу эместиги жөнүндөгү теоремалар далилденген. Эселүү спектрлүү чек аралык маселелер үчүн регуляризациялоонун методу негизделген.

ДЖУРАЕВ Абубакир Мухтарович

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

В диссертации рассматривается аналитические решения систем сингулярно-возмущенных уравнений и разрабатывается метод асимптотического интегрирования краевой задачи для сингулярно возмущенных уравнений с кратным спектром. Разработан критерий устойчивости аналитического решения систем сингулярно-возмущенных уравнений. Доказаны теоремы об устойчивости и неустойчивости аналитических решений. Обоснован метод регуляризации для краевых задач с кратным спектром.

JURAEV Abubakir Mukhtarovich

THE CRITERION OF SOLUTION STABILITY OF SINGULAR-INDIGNANT EQUATION SYSTEMS

The dissertation work submits the analytical solution of singular-indignant equations and the method of asymptotic integration of regional problems of singular-indignant equations with multiple specter is being worked up.

The stability criterion of analytical solution of singular-indignant equations system has been worked out. In this work the theorems of stability and unstability of analytical solutions have demonstrated (Q.E.D.). And the method of regularization for regional problems with multiple specters has substantiated.