

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Ж. БАЛАСАГЫНА

**Диссертационный Совет Д. 01.12.001**

*На правах рукописи*

**УДК 519.633**

**ШЕЙШЕНОВА ШААРБУБУ КЫШТООБАЕВНА**

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
ПРИ ОТСУТСТВИИ СПЕКТРА ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА**

01.01.02 - дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Бишкек - 2012**

Диссертационная работа выполнена в Институте социального развития и предпринимательства при Министерстве молодежи, труда и занятости Кыргызской Республики.

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, доцент  
**Омуралиев Асан Сыдыгалиевич**

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук, профессор  
**Какишов Каныбек Какишович**  
кандидат физико-математических наук  
**Туркманов Жылдызбек Каныбекович**

**Ведущая организация:** Ошский государственный университет,  
723500, г. Ош, ул. Ленина, 331

Защита диссертации состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2012 года в \_\_\_ часов на заседании Диссертационного совета Д.01.12.001 при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук по адресу: 720071, Кыргызстан, г. Бишкек, просп. Чуй 265а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики, по адресу: 720071, Кыргызстан, г. Бишкек, просп. Чуй 265а.

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2012 г.

Ученый секретарь  
Диссертационного совета  
д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

С. Искандаров

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Математика изучает процессы, происходящие в реальном мире, с помощью математических моделей этих процессов. При развитии науки и техники математические модели реального мира усложняются. Многие физические процессы, связанные с неравномерными переходами, описываются уравнениями с большими или малыми параметрами. Возникающие при их исследовании трудности можно преодолеть с помощью асимптотического анализа исследуемой задачи, проводимого на основе методов построения разложений по параметрам для решения задачи. Когда исследуемый процесс описывается дифференциальными уравнениями с малыми параметрами при старших производных, то такие уравнения называются сингулярно возмущенными. Такие задачи возникают естественным образом там, где имеются неравномерные переходы от одних физических характеристик к другим.

Асимптотический анализ для некоторых классов сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и дифференциальных уравнений в частных производных (ДУ в ЧП) имеет развитую теорию. Ранее была создана теория асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных краевых задач для ОДУ – линейных и нелинейных, для линейных уравнений в частных производных и для некоторых линейных операторных уравнений. Основным содержанием излагаемой теории являются метод регуляризации сингулярных возмущений. Например: в задачах, связанных с решением уравнений Навье-Стокса при малой вязкости, эти неравномерности создают зону пограничного слоя. Без тщательного асимптотического анализа трудно создать математическую теорию пограничного слоя или вести численный счет сингулярно возмущенных задач.

В данной диссертационной работе, изучается асимптотика решения параболических уравнений в частных производных при отсутствии спектра предельного оператора, когда свободный член и коэффициент являются быстроосциллирующими функциями.

**Цель работы.** В работе решаются следующие задачи:

- разработать алгоритм построения регуляризованной асимптотики решения первой краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными параболического типа с малым параметром при отсутствии спектра предельного оператора и быстроосциллирующим свободным членом;
- разработать алгоритм асимптотического интегрирования первой краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром с аддитивным быстроосциллирующим свободным членом;
- разработать алгоритм построения регуляризованной асимптотики решения первой краевой задачи для дифференциального уравнения с частными

производными параболического типа с угловым пограничным слоем и быстроосциллирующим свободным членом;

- обобщить способ регуляризации на краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа с быстроосциллирующим коэффициентом;

- обобщить результаты, полученные для скалярных задач, на многомерные задачи.

**Научная новизна.** Впервые идея регуляризации применяется для выделения особенностей в решении сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, при отсутствии спектра предельного оператора и когда свободный член и коэффициент являются быстроосциллирующими функциями. Предлагаемая методика обобщается на многомерные аналоги перечисленных задач и с аддитивным свободным членом и коэффициентом.

**Методика исследования.** При построении регуляризованной асимптотики решения задач, изучаемых в диссертационной работе, используется метод С.А. Ломова, модифицированный Омуралиевым А.С. для исследования сингулярно возмущенных параболических задач. Обоснование асимптотической сходимости формальных решений осуществляется "принципом максимума".

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на научных семинарах Кыргызско-Турецкого университета "Манас", на международной научно-практической конференции "Казахстанский путь в Европу"-Талды-Корган, 2010, на четвертом Международном конгрессе математиков стран тюркского мира-Баку, 2011.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 8 работ. В пяти совместных работах научному руководителю принадлежит постановка задачи.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, четырех глав, разбитых на параграфы и пункты, выводы и списка использованной литературы из 89 источников. Работа изложена на 119 страницах машинописного текста.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**В I главе** производится обзор литературы по теме диссертации, приводятся некоторые известные результаты, многократно используемые в работе, дается краткий обзор полученных автором результатов.

**II глава,** состоящая из двух параграфов, посвящена разработке алгоритмов построения асимптотического решения сингулярно возмущенной параболической задачи, когда свободный член является быстроосциллирующей функцией.

Приведем многократно используемые обозначения и предположения:

$$\pi = x, t : x \in [0, 1], t \in [0, T], i = \overline{-1}, \varepsilon > 0 \text{ -малый параметр,}$$

$$\Delta \text{- оператор Лапласа, } \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \exp -s^2 ds,$$

- 1)  $a(x), h \in C^\infty [0, 1], b(x, t), f(x, t) \in C^\infty \pi, \theta(t) \in C^\infty [0, 1];$
- 2)  $a(x) > 0; \forall x \in [0, 1];$
- 3)  $\theta'(t) \neq 0; \forall t \in [0, 1];$
- 4) условия согласования начальных и граничных условий.

**В параграфе 2.1.** изучается первая краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$L_\varepsilon u \equiv \partial_t u(x, t, \varepsilon) - \varepsilon^2 a(x) \partial_x^2 u(x, t, \varepsilon) - b(x, t) u(x, t, \varepsilon) = f(x, t) \exp \frac{i\theta(t)}{\varepsilon},$$

$$x, t \in \pi, u(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = h(x), u(x, t, \varepsilon)|_{x=l-1} = 0, l=1, 2, \quad (1)$$

при выполнении условий 1)-4).

Введем регуляризующие переменные

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon^2}, \quad \eta = \frac{\theta(t) - \theta(0)}{\varepsilon}, \quad \zeta_l = \frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon^2}, \quad \xi_l = \frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon}, \quad \varphi_l = \int_{l-1}^x \frac{ds}{a(s)}. \quad (2)$$

Наряду с независимыми переменными  $x$  и  $t$ , эти переменные объявим независимыми переменными расширенной функции  $\tilde{u}(M, \varepsilon)$ , такой что

$$\tilde{u}(M, \varepsilon)|_{v=\psi(x, t, \varepsilon)} \equiv u(x, t, \varepsilon), \quad (3)$$

$$M = (x, t, v), v = (\tau, \eta, \zeta, \xi), \zeta = (\zeta_1, \zeta_2), \xi = (\xi_1, \xi_2),$$

$$\Psi(x, t, \varepsilon) = \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{\theta(t) - \theta(0)}{\varepsilon}, \frac{\varphi_1(x)}{\varepsilon^2}, \frac{\varphi_2(x)}{\varepsilon} \right), \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)),$$

с учетом (2) из (3) найдем

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t, \varepsilon) &= \partial_t u(M, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_\tau u(M, \varepsilon) + \frac{\theta'(t)}{\varepsilon} \partial_\eta u(M, \varepsilon) \Big|_{v=\Psi(x, t, \varepsilon)}, \\ \partial_x u &= \partial_x u(M, \varepsilon) + \sum_{l=1}^2 \left[ \frac{\varphi'_l(x)}{\varepsilon^2} \partial_{\zeta_l} u(M, \varepsilon) + \frac{\varphi'_l(x)}{\varepsilon} \partial_{\xi_l} u(M, \varepsilon) \right] \Big|_{v=\Psi(x, t, \varepsilon)}, \\ \partial_x^2 u(x, t, \varepsilon) &= \partial_x^2 u(M, \varepsilon) + \sum_{l=1}^2 \left[ \frac{\varphi'_l(x)}{\varepsilon^2} \partial_{\zeta_l}^2 u(M, \varepsilon) + \frac{\varphi'_l(x)}{\varepsilon} \partial_{\xi_l}^2 u(M, \varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} L_{\zeta, l} u(M, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} L_{\xi, l} u(M, \varepsilon) \right] \Big|_{v=\Psi(x, t, \varepsilon)}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$L_{\zeta,l} \equiv 2\varphi'_l x \partial_{x,\zeta}^2 + \varphi''_l x \partial_\zeta, \quad L_{\xi,l} \equiv 2\varphi'_l x \partial_{x,\xi}^2 + \varphi''_l x \partial_\xi.$$

На основании (1), (3), (4), поставим расширенную задачу

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u &= \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_t u M, \varepsilon - \Delta_\zeta u M, \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \theta' t \partial_\eta u M, \varepsilon + \partial_t u M, \varepsilon - \\ &- \Delta_\xi u M, \varepsilon - L_\zeta u M, \varepsilon - \varepsilon L_\xi u M, \varepsilon - \varepsilon^2 L_x u M, \varepsilon = \\ &= f(x, t) \exp i\eta + \frac{i\theta_0}{\varepsilon}, \quad M \in v, \end{aligned} \quad (5)$$

$$u M, \varepsilon \Big|_{t=\tau=\eta=0} = h(x), \quad u M, \varepsilon \Big|_{\xi_l=0, x=l-1} = 0,$$

$$v = M: x, t \in \pi, \tau, \zeta, \xi \in [0, \infty), \quad \eta \in (-\infty, \infty),$$

$$L_\zeta \equiv a x \Big|_{l=1} \quad L_{\zeta,l} a x, \quad L_\xi \equiv a x \Big|_{l=1} \quad L_{\xi,l} a x, \quad L_x = a x \partial_x^2.$$

При этом имеет место тождество

$$L_\varepsilon u M, \varepsilon \Big|_{v=\psi(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x, t, \varepsilon). \quad (6)$$

Задача (5) регулярна по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , поэтому решение этой задачи будем определять в виде ряда

$$u M, t = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k M. \quad (7)$$

Относительно коэффициентов этого ряда получим итерационные задачи, которые будем решать в классе функций:

$$\begin{aligned} U &= \{u M : u M = v(x, t) + \exp i\eta [c(x, t) + \sum_{l=1}^2 Y_l N_l] + \\ &+ \sum_{l=1}^2 w_l(x, t) \operatorname{erfc} \left( \frac{\xi_l}{2\sqrt{t}} \right)\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$v(x, t), c(x, t), w_l(x, t) \in C^\infty \pi, \quad Y_l N_l < \exp -\frac{\zeta_l^2}{8\tau}, \quad N_l = x, t, \tau, \zeta_l.$$

Доказана теорема об асимптотическом характере построенного решения:

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1)-4). Тогда разложение

$$u_\varepsilon(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k M \Big|_{v=\psi(x,t,\varepsilon)},$$

является асимптотическим решением задачи (1), т.е. справедлива оценка

$$u(x, t, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, t, \varepsilon) < c\varepsilon^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**В параграфе 2.2.** изучается задача

$$L_\varepsilon u(x, t, \varepsilon) \equiv \partial_t u - \varepsilon^2 \Delta u - b(x, t) u = f(x, t) \exp \frac{i\theta t}{\varepsilon}, \quad x, t \in \Omega_1, \\ u(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = h(x), \quad u(x, t, \varepsilon)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (9)$$

где  $\Omega_1 = \Omega \times (0, T]$ ,  $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0, 1]\}$ .

Предположим выполненными следующие условия:

1. функции  $b(x, t), f(x, t) \in C^\infty(\Omega_1)$ ,  $h(x) \in C^\infty(\Omega)$ ,  $\theta t \in C^\infty(0, T)$ ;
2.  $h(x)|_{\partial\Omega} = 0$ .

Введем регуляризующие переменные

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}, \quad \xi_2 = \frac{1-x_1}{\varepsilon}, \quad \eta_1 = \frac{x_2}{\varepsilon}, \quad \eta_2 = \frac{1-x_2}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}, \\ v = \frac{\theta t - \theta_0}{\varepsilon}, \quad \zeta_l = \frac{\xi_l}{\varepsilon}, \quad q_l = \frac{\eta_l}{\varepsilon}$$

и объявим их, наряду с  $(x_1, x_2, t)$ , независимыми переменными расширенной функции  $u(M, \varepsilon)$ ,  $M = (x, t, \xi, \eta, \zeta, q, \tau, v)$ , для которой поставим задачу

$$L_\varepsilon u(M, \varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon^2} T_1 u(M, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \theta' t \partial_v u(M, \varepsilon) + T_2 u(M, \varepsilon) - [L_\zeta - L_q] u(M, \varepsilon) + \\ + \varepsilon [L_\xi - L_\eta] u(M, \varepsilon) - \varepsilon^2 \Delta u(M, \varepsilon) = f(x, t) \exp \left( iv + \frac{i\theta_0}{\varepsilon} \right), \quad M \in Q, \\ u(M, \varepsilon)|_{t=\tau=v=0} = h(x), \quad u(M, \varepsilon)|_{\partial Q_1} = 0, \quad (10)$$

здесь введены обозначения

$$Q = Q_1 \times D \times \tau \geq 0 \times v \in R, \quad D = \{\xi, \eta, \zeta, q \geq 0\}, \quad Q_1 = Q \times D, \\ T_1 \equiv \partial_\tau - \Delta_\zeta - \Delta_q, \quad T_2 \equiv \partial_t - \Delta_\xi - \Delta_\eta - b(x, t), \\ L_\zeta \equiv \sum_{l=1}^2 L_{\zeta, l}, \quad L_q \equiv \sum_{l=1}^2 L_{q, l}, \quad L_\xi \equiv \sum_{l=1}^2 L_{\xi, l}, \quad L_\eta \equiv \sum_{l=1}^2 L_{\eta, l}.$$

Решение расширенной задачи (10) ищем в виде ряда (7).

Итерационные задачи, для коэффициентов ряда (7), будем решать в классе функций:

$$U = u(M) : u(M) = v(x, t) + \exp(iv) c(x, t) + \sum_{l=1}^2 (Y_l(x, \tau, \zeta_l) + Z_l(x, \tau, q_l)) + \\ + \sum_{j=1}^2 w_{l, j}(x, t, \zeta_l, q_j) + \sum_{l=1}^2 [y_l(x, t) \operatorname{erfc} \frac{\xi_l}{2\sqrt{t}} + d_l(x, t) \operatorname{erfc} \frac{\eta_l}{2\sqrt{t}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \omega_{l,j}(x,t) \operatorname{erfc} \frac{\xi_j}{2\sqrt{t}} \operatorname{erfc} \frac{\eta_l}{2\sqrt{t}} ], \quad (11)$$

$$Y_l N_l < c \exp -\frac{\zeta_l^2}{8\tau}, \quad Z_l P_l < c \exp -\frac{q_l^2}{8\tau}, \quad P_l = x, t, \tau, q_l,$$

$$v(x,t), c(x,t), y_l(x,t), d_l(x,t), \omega_{l,j}(x,t) \in C^\infty(\Omega_1) \}.$$

Как видно из (11), в данном многомерном случае, структура решения содержит угловые функции в виде произведения параболических погранслоных функций по пространственным переменным.

Доказана теорема об асимптотическом характере построенного решения.

**ГЛАВА III** посвящена асимптотике решения параболических уравнений с аддитивным быстроосциллирующим свободным членом.

**В параграфе 3.1.** изучается скалярная сингулярно возмущенная задача, когда правая часть состоит из суммы быстроосциллирующих функций.

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u &\equiv \partial_t u(x,t,\varepsilon) - \varepsilon^2 a(x) \partial_x^2 u(x,t,\varepsilon) - b(x,t) u(x,t,\varepsilon) = \\ &= \sum_{k=1}^m f_k(x,t) \exp \frac{i\theta_k t}{\varepsilon}, \quad x,t \in \pi, \quad (12) \\ u(x,t,\varepsilon)|_{t=0} &= h(x), \quad u(x,t,\varepsilon)|_{x=l-1} = 0, \quad l=1,2. \end{aligned}$$

Относительно заданных функций, предполагаются выполненными условия 1)-4).

Вводим регуляризующие переменные:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{\varepsilon^2}, \quad \eta_k = \frac{\theta_k t - \theta_k 0}{\varepsilon}, \quad k = 1, m, \\ \xi_l &= \frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon^2}, \quad \zeta_l = \frac{-1}{\varepsilon} \int_{l-1}^x \frac{ds}{a(s)} \equiv \frac{\varphi_l(x)}{\xi}. \quad (13) \end{aligned}$$

Наряду с  $x$  и  $t$ , введенные переменные объявим независимыми переменными расширенной функции  $\tilde{u}(M,\varepsilon)$ , для которой поставим расширенную задачу

$$\begin{aligned} Lu &\equiv \partial_t u + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_\tau u + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^m \theta'_k t \partial_{\eta_k} u - \Delta_\xi u - \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_\zeta u - b(x,t) u - L_\zeta u - \\ &- \varepsilon L_\xi u - \varepsilon^2 L_x u = \sum_{k=1}^m f_k(x,t) \exp i\eta_k + \frac{i\theta_k 0}{\varepsilon}, \quad M \in Q, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u|_{t=\tau=0} &= h x, \quad u|_{x=l-1, \xi_l=\zeta_l=0} = 0, \\
L_{l,1} &\equiv 2\varphi_l' x \partial_{x,\zeta_l}^2 + \varphi_l'' x \partial_{\zeta_l}, \\
L_\zeta &\equiv a x \prod_{l=1}^2 L_{l,1}, \quad L_\xi \equiv a x \prod_{l=1}^2 L_{l,2}, \quad L_\zeta(x) \equiv a x \partial_x^2, \\
L_{l,2} &\equiv 2\varphi_l' x \partial_{x,\xi_l}^2 + \varphi_l'' x \partial_{\xi_l}, \\
Q &= \{M: x, t \in \pi, \tau, \zeta, \xi \in [0, \infty), \eta \in (-\infty, \infty)\},
\end{aligned}$$

причем

$$Lu_{v=\psi} x, t, \varepsilon \equiv L_\varepsilon u x, t, \varepsilon. \quad (15)$$

Решение задачи (14) будем определять в виде ряда (7).

Коэффициенты ряда (7) определяются из итерационных задач, которые будем решать в следующем классе функций:

$$\begin{aligned}
U &= \{u M : u M = v x, t + \\
&+ \sum_{k=1}^n \exp i\eta_k [c_k x, t + \sum_{l=1}^2 Y_{l,k}(N_l)] + \sum_{l=1}^2 w_l x, t \operatorname{erfc}(\frac{\xi_l}{2t})\}, \quad (16) \\
&v x, t, c_k x, t, w_l x, t \in C^\infty \pi.
\end{aligned}$$

Решение данной задачи содержит такое количество погранслойных функций, имеющих быстроосциллирующий характер изменения, каков вид свободного члена исходного уравнения.

Доказана теорема об асимптотическом характере построенного решения.

**В параграфе 3.2.** изучается задача

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon u x, t, \varepsilon &\equiv \partial_t u - \varepsilon^2 \Delta u - b x, t u = \sum_{k=1}^m f_k x, t \exp \frac{i\theta_k t}{\varepsilon}, \quad x, t \in \Omega_1, \\
u x, t, \varepsilon|_{t=0} &= h x, \quad u x, t, \varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (17)
\end{aligned}$$

где  $\Omega_1 = \Omega \times [0, T]$ ,  $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0, 1]\}$ .

Предположим выполненными условия 1)-3) и  $h x|_{\partial\Omega} = 0$ .

Произведем расширение исходной задачи. Для чего введем регуляризующие переменные

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}, \quad \xi_2 = \frac{1-x_1}{\varepsilon}, \quad \eta_1 = \frac{x_2}{\varepsilon}, \quad \eta_2 = \frac{1-x_2}{\varepsilon}, \quad \zeta_l = \frac{\xi_l}{\varepsilon}, \quad q_l = \frac{\eta_l}{\varepsilon},$$

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon^2}, \quad v_k = \frac{\theta_k t - \theta_k 0}{\varepsilon}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

и объявим их, наряду с  $(x_1, x_2, t)$ , независимыми переменными расширенной функции  $u M, \varepsilon$ ,  $M = x, t, \xi, \eta, \zeta, q, v$ .

Для расширенной функции  $u M, \varepsilon$  поставим задачу

$$L_\varepsilon u M, \varepsilon \equiv \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^m \theta'_k t \partial_{v_k} u M, \varepsilon + T_2 u M, \varepsilon - [L_\zeta - L_q] u M, \varepsilon +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} T_1 u - \varepsilon L_\xi - L_\eta u M, \varepsilon - \varepsilon^2 \Delta u M, \varepsilon =$$

$$= \sum_{k=1}^m f_k x, t \exp i v_k + \frac{i \theta_k 0}{\varepsilon}, \quad M \in Q,$$

$$u M, \varepsilon \Big|_{t=\tau=v=0} = h x, \quad u M, \varepsilon \Big|_{\partial Q_1} = 0, \quad (18)$$

здесь введены обозначения

$$Q = \Omega_1 \times D \times \tau \geq 0 \times v \in R, \quad D = \xi, \eta, \zeta, q \geq 0, \quad Q_1 = \Omega \times D,$$

$$T_1 \equiv \partial_\tau - \Delta_\zeta - \Delta_q, \quad T_2 \equiv \partial_t - \Delta_\xi - \Delta_\eta - b x, t.$$

Решение расширенной задачи (18) ищем в виде ряда (7).

Итерационные задачи относительно  $u_k M$ , будем определять в классе функций:

$$U = \left\{ u M : u M = v x, t + \sum_{k=1}^n \exp i v_k \left[ c_k x, t + \sum_{l=1}^2 (Y_{k,l} N_l + Z_{k,l} P_l) + \sum_{l,j=1}^2 W_{l,j}^k K \right] + \right.$$

$$+ \sum_{l=1}^2 \left[ y_l x, t \operatorname{erfc} \frac{\xi_l}{2 \sqrt{t}} + d_l x, t \operatorname{erfc} \frac{\eta_l}{2 \sqrt{t}} \right] +$$

$$\left. + \sum_{l,j=1}^2 \omega_{l,j} x, t \operatorname{erfc} \frac{\xi_j}{2 \sqrt{t}} \operatorname{erfc} \frac{\eta_l}{2 \sqrt{t}} \right\}, \quad (19)$$

$$Y_{k,l} N_l < c \exp -\frac{\zeta_l^2}{8\tau}, \quad Z_{k,l} P_l < c \exp -\frac{q_l^2}{8\tau}, \quad P_l = x, t, \tau, q_l,$$

$$K = x, t, \tau, \zeta_l, q_j, \quad v x, t, c x, t, y_l x, t, d_l x, t,$$

$$\omega_{l,j} x, t \in C^\infty \Omega_1, \quad N_l = x, t, \tau, \zeta_l \}.$$

В данном случае количество погранслойных функций увеличивается на такое число, каково количество слагаемых в свободном члене.

Доказана теорема об асимптотическом характере построенного решения.

**ГЛАВА IV** посвящена асимптотике решения параболических уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами.

**В параграфе 4.1.** изучается первая краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$L_\varepsilon u \equiv \partial_t u(x, t, \varepsilon) - \varepsilon^2 a(x) \partial_x^2 u(x, t, \varepsilon) - b(x, t) u(x, t, \varepsilon) - \varepsilon \exp\left(\frac{i\theta t}{\varepsilon}\right) u(x, t, \varepsilon) = f(x, t), \quad (20)$$

$$u(x, t, \varepsilon)|_{t=1} = u(x, t, \varepsilon)|_{x=0} = u(x, t, \varepsilon)|_{x=1} = 0.$$

Задача решается при выполнении условий 1)-3).

Вводим регуляризующие переменные

$$\eta = \frac{\theta t - \theta_0}{\varepsilon}, \quad \xi_l = \frac{\varphi_l x}{\varepsilon}.$$

Тогда, для расширенной функции

$$u(M, \varepsilon), M = (x, t, \xi, \eta), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \\ u(M, \varepsilon)|_{\zeta=\Psi(x, t, \varepsilon)} \equiv u(x, t, \varepsilon), \\ \zeta = (\xi, \eta), \quad \Psi(x, t, \varepsilon) = \left(\frac{\theta x - \theta_0}{\varepsilon}, \frac{\varphi_1 x}{\varepsilon}, \frac{\varphi_2 x}{\varepsilon}\right),$$

поставим задачу

$$L_\varepsilon u(M, \varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon} \theta' t \partial_\eta u + \partial_t u - D_\xi u - b(x, t) u - \varepsilon \exp\left(i\eta + \frac{i\theta_0}{\varepsilon}\right) u - \varepsilon L_\xi u - \varepsilon^2 L_x u = f(x, t), \quad M \in Q, \quad (21)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u(M, \varepsilon)|_{x=l-1, \xi_l=0} = 0,$$

$$Q = M: x, t \in \Omega, \eta \in R, \xi_l \in R_+,$$

$$D_\xi \equiv \sum_{l=1}^2 \partial_{\xi_l}^2, \quad L_\xi \equiv a(x) \sum_{l=1}^2 [2\varphi_l' x \partial_{x, \xi_l}^2 + \varphi_l''(x) \partial_{\xi_l}], \quad L_x \equiv a(x) \partial_x^2.$$

Решение расширенной задачи (21) будем искать в виде ряда (7), для коэффициентов этого ряда получим итерационные задачи, которые будем решать в классе функций:

$$U = u(M) : u(M) = \sum_{m=0}^{\infty} \exp(im\eta) v_m(x, t) + \sum_{l=1}^2 \omega_{l,m}(x, t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right).$$

Отметим, что количество быстроосциллирующих погранслойных функций увеличивается с ростом номера итерации.

Доказана теорема об асимптотическом характере построенного решения.

**Следующий параграф 4.2.** посвящен регуляризации сингулярно возмущенной параболической задачи с аддитивным быстроосциллирующим коэффициентом:

$$L_\varepsilon u(x, t, \varepsilon) \equiv \partial_t u - \varepsilon^2 a(x) \partial_x^2 u + b(x, t) u + \sum_{m=-q}^q c_m(x, t) \exp \frac{im\theta t}{\varepsilon} u = f(x, t), \quad x, t \in \pi, \\ u(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = h(x), \quad u(x, t, \varepsilon)|_{x=0} = u(x, t, \varepsilon)|_{x=1} = 0. \quad (22)$$

Предположим, что относительно заданных функций выполнены условия 1)-4).

Введем регуляризующие переменные

$$\xi_l = \frac{(-1)^{l-1}}{\varepsilon} \int_{l-1}^x \frac{ds}{a(s)} = \frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{i(\theta t - \theta_0)}{\varepsilon}, \quad l = 1, 2 \quad (23)$$

и вместо искомой функции  $u(x, t, \varepsilon)$  будем рассматривать расширенную функцию  $u(M, \varepsilon)$ ,  $M = (x, t, \xi, \tau)$ .

Для расширенной функции поставим задачу:

$$L_\varepsilon u \equiv \frac{i}{\varepsilon} \theta' t \partial_\tau u + \partial_t u - \Delta_\xi u - b(x, t) u - \sum_{m=-q}^q c_m(x, t) \exp m(\tau + \frac{i\theta_0}{\varepsilon}) u = f(x, t), \quad (24) \\ u|_{t=\tau=0} = h(x), \quad u|_{x=l-1, \xi_l=0} = 0, \quad l = 1, 2.$$

Решение расширенной задачи (24) ищем в виде ряда (7).

Задачи, относительно коэффициентов этого ряда  $u_k(M)$ , будут решаться в классе функций:

$$U = u(M) : u(M) = \sum_{m=-kq}^{kq} \exp m\tau v_m(x, t) + \sum_{l=1}^2 w_{m,l}(x, t) \operatorname{erfc} \frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}, \\ k = 1, 2, \dots, v_m(x, t), w_{m,l}(x, t) \in C^\infty(\pi).$$

Доказана теорема об асимптотическом характере построенного решения.

**В параграфе 4.3.** изучается двумерное сингулярно возмущенное параболическое уравнение в случае, когда коэффициент при искомой функции является быстроосциллирующей функцией.

$$L_\varepsilon u(x, t, \varepsilon) \equiv \partial_t u - \varepsilon^2 \Delta u - b(x, t)u - \varepsilon \exp \frac{i\theta t}{\varepsilon} u = f(x, t), \quad x, t \in Q,$$

$$u(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = u(x, t, \varepsilon)|_{x_1=x_2=0} = u(x, t, \varepsilon)|_{x_1=x_2=1} = 0, \quad (25)$$

где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $Q = \Omega \times [0, T]$ ,  $\Omega = \{x_1, x_2 : x_1, x_2 \in [0, 1]\}$ .

Предположим выполненными условия гладкости заданных функций относительно своих аргументов.

Введем регуляризующие переменные

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}, \quad \xi_2 = \frac{1-x_1}{\varepsilon}, \quad v = \frac{\theta t - \theta_0}{\varepsilon}, \quad \eta_1 = \frac{x_2}{\varepsilon}, \quad \eta_2 = \frac{1-x_2}{\varepsilon} \quad (26)$$

и расширенную функцию  $u(x, t, \xi, \eta, v, \varepsilon)$  такую, что

$$\begin{aligned} u(x, t, \theta, \varepsilon)|_{\theta=\varepsilon^{-1}\psi(x, t)} &\equiv u(x, t, \varepsilon), \\ \theta &= \xi, \eta, v, \quad \xi = \xi_1, \xi_2, \quad \eta = \eta_1, \eta_2, \quad x = x_1, x_2, \\ \psi(x, t) &= x, 1-x, \theta t - \theta_0, \end{aligned} \quad (27)$$

тогда, с учетом (27), из задачи (25) получим расширенную задачу

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u &\equiv \partial_t u(M, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \theta' t \partial_v u(M, \varepsilon) - \Delta_\xi u(M, \varepsilon) - \Delta_\eta u(M, \varepsilon) - b(x, t)u(M, \varepsilon) - \\ &- \varepsilon \exp \left( i v + \frac{i\theta_0}{\varepsilon} \right) u(M, \varepsilon) - \varepsilon L_\xi + L_\eta u(M, \varepsilon) - \varepsilon^2 \Delta u(M, \varepsilon) = f(x, t), \\ M &\in W, \quad u|_{t=v=0} = u|_{\partial D} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $W = Q \times [0, \infty)^2 \times (-\infty, 0)^2 \times [0, +\infty)$ ,  $\Delta_\xi \equiv \partial_{\xi_1}^2 - \partial_{\xi_2}^2$ ,

$$\Delta_\eta \equiv \partial_{\eta_1}^2 - \partial_{\eta_2}^2, \quad L_\xi \equiv 2 \partial_{x_1 \xi_1}^2 - \partial_{x_1 \xi_2}^2, \quad L_\eta \equiv 2 \partial_{x_2 \eta_1}^2 - \partial_{x_2 \eta_2}^2.$$

Задача (28) регулярна по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , поэтому ее решение будем определять в виде ряда (7).

Введем класс функций, в котором будут решаться итерационные задачи.

$$\begin{aligned} U = \{ u(M) : u(M) &= \sum_{m=0}^{\infty} \exp(imv) v_m(x, t) + \sum_{l=1}^2 w_l^m(x, t) \operatorname{erfc} \frac{\xi_l}{2 \frac{t}{\varepsilon}} + \\ &+ \sum_{l=1}^2 [z_l^m(x, t) \operatorname{erfc} \frac{\eta_l}{2 \frac{t}{\varepsilon}} + \sum_{l, j=1}^2 Y_{l, j}^m(x, t) \operatorname{erfc} \frac{\xi_l}{2 \frac{t}{\varepsilon}} \operatorname{erfc} \frac{\eta_j}{2 \frac{t}{\varepsilon}}], \\ &v_m(x, t), v_{l, m}(x, t), z_{l, m}(x, t), Y_{l, j}^m(x, t) \in C^\infty(Q) \}. \end{aligned}$$

Асимптотический характер построенного решения устанавливается принципом максимума, т.е. установлена оценка

$$u(x, t, \varepsilon) - u_{\varepsilon n}(x, t, \varepsilon^{-1}\psi(x, t)) = R_{\varepsilon, n}(x, t, \varepsilon^{-1}\psi(x, t)) < c\varepsilon^{n+1}. \quad (29)$$

Доказана теорема об асимптотическом характере построенного решения.

## ВЫВОДЫ

В диссертации получены следующие результаты:

- предложен алгоритм построения асимптотического решения дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром при отсутствии спектра предельного оператора и быстроосциллирующим свободным членом;
- построена регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной параболической задачи, с быстроосциллирующим свободным членом и показано, что асимптотика решения содержит угловые погранслойные функции. Угловые погранслойные функции описываются произведением параболической и быстроосциллирующей погранслойных функций;
- построена регуляризованная асимптотика решения скалярной сингулярно возмущенной параболической задачи с аддитивным быстроосциллирующим свободным членом. Установлено, что асимптотика решения состоит из суммы погранслойных функций имеющих быстроосциллирующий характер изменения, параболических и угловых погранслойных функций;
- построена асимптотика решения двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи, в случае, когда свободный член состоит из одной и аддитивной быстроосциллирующих функций. Асимптотика решения двумерной задачи, в отличии от скалярных задач, имеет сложную структуру, а именно: она кроме угловых погранслойных функций описываемых произведением быстроосциллирующей и параболической погранслойных функций, содержит и угловые параболические погранслойные функции, описываемые произведением параболических погранслойных функций;
- построена асимптотика решения сингулярно возмущенной параболической задачи, с быстроосциллирующим коэффициентом. Как и в случае с быстроосциллирующими свободными членами, асимптотика также содержит быстроосциллирующие и угловые погранслойные функции, но определяемые из уравнений, имеющих другую структуру;
- построена регуляризация сингулярно возмущенной параболической задачи с аддитивным быстроосциллирующим коэффициентом. В данном случае количество быстроосциллирующих погранслойных функций, входящих в асимптотику, увеличивается с ростом номера итераций;
- построена асимптотика решения двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи с аддитивным быстроосциллирующим коэффициентом.

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Шейшенова Ш.К.** Регуляризация сингулярно возмущенной параболической задачи с аддитивной осциллирующей правой частью [Текст] / Ш.К. Шейшенова // Наука и новые технологии. №10.- Бишкек, 2009.- С. 11-17.
2. **Шейшенова Ш.К.** Асимптотика решения параболической задачи при отсутствии спектра предельного оператора и с быстроосциллирующей правой частью [Текст] / А.С. Омуралиев, Ш.К. Шейшенова // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. Выпуск 42.–Бишкек: Илим, 2010.- С.122-128.
3. **Шейшенова Ш.К.** Асимптотика решения задачи с угловым параболическим пограничным слоем и осциллирующей правой частью [Текст] / А.С. Омуралиев, Ш.К. Шейшенова // Материалы Междунар. Научно-практ. конференции. 2 часть. –Талдыкорган, 2010.-С.192-195.
4. **Шейшенова Ш.К.** Асимптотика решения параболического уравнения с быстроосциллирующим коэффициентом [Текст] / Ш.К. Шейшенова // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. Выпуск 43. -Бишкек: Илим, 2010. - С.119-127.
5. **Шейшенова Ш.К.** Регуляризация сингулярно возмущенной параболической задачи с аддитивным быстроосциллирующим коэффициентом [Текст] / А.С. Омуралиев, Ш.К. Шейшенова // Наука и новые технологии. №5. –Бишкек, 2010.- С. 5-8.
6. **Шейшенова Ш.К.** Асимптотика решения параболического уравнения с быстроосциллирующей по пространственной переменной правой частью [Текст] / Ш.К. Шейшенова // Поиск. Казакстан. №3. -Алматы, 2011. -С .154-157.
7. **Sheishenova Sh.K.** Of the asymptotics of optimal control Described by singularly perturbed parabolic equation [Text] / A.S. Omuraliev, Sh.K. Sheishenova // Abstracts of the IV congress of the Turkic world mathematical Society. -Baku, 2011.-P. 393.
8. **Шейшенова Ш.К.** Асимптотика решения параболического уравнения с аддитивной быстроосциллирующей правой частью [Текст] / А.С. Омуралиев, Ш.К. Шейшенова // Известия Вузов. №2.-Бишкек, 2012. - С. 3-11.

## РЕЗЮМЕ

диссертации Шейшеновой Шаарбубу Кыштообаевны на тему: «Асимптотика решения параболических уравнений при отсутствии спектра предельного оператора» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

**Ключевые слова:** Дифференциальные уравнения параболического типа, сингулярно возмущенные параболические задачи, параболический пограничный слой, регуляризованная асимптотика, угловой пограничный слой.

**Цель исследования:** Разработать алгоритм построения регуляризованной асимптотики решения первой краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными параболического типа с малым параметром приотсутствии спектра предельного оператора и когда правая часть и коэффициент являются быстроосцилирующими функциями.

**Объект исследования:** сингулярно возмущенные параболические уравнения при отсутствии спектра предельного оператора и когда свободный член и коэффициент являются быстроосцилирующими функциями.

**Предмет исследования:** Построение алгоритма асимптотического решения дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром при отсутствии спектра предельного оператора

### Научная новизна:

- построена регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной параболической задачи, с быстроосциллирующим свободным членом и показано, что асимптотика решения содержит угловые погранслойные функции;
- построена регуляризованная асимптотика решения скалярной сингулярно возмущенной параболической задачи с аддитивным быстроосциллирующим свободным членом;
- построена асимптотика решения двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи, в случае, когда свободный член состоит из одной и аддитивной быстроосциллирующих функций;
- построена асимптотика решения сингулярно возмущенной параболической задачи, с быстроосциллирующим коэффициентом;
- построена регуляризация сингулярно возмущенной параболической задачи с аддитивным быстроосциллирующим коэффициентом;
- построена асимптотика решения двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи с аддитивным быстроосциллирующим коэффициентом.

Шейшенова Шаарбубу Къшгообаевнанын «Пределдик операторунун спектри болбогон параболалык тендемелердин чыгарылышынын асимптотикасы» -деген темадагы 01.01.02 –дифференциалдык тендемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика–математикалык илимдердин кандидаты илимий даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

## РЕЗЮМЕСИ

**Урунттуу сөздөр:** Параболалык тибиндеги дифференциалдык тендемелер, сингулярдуу козголгон параболалык маселелер, параболалык чек катмар, бурчтук чек катмар, регулярыштырылган асимптотика.

**Изилдөөнүн максаты:** Он жагы жана коэффициенти тез термелген функция жана пределдик оператордун спектри болбогондо кичине параметрлүү параболалык айрым туундулуу дифференциалдык тендемелердин регулярыштырылган асимптотикалык алгоритмдерин иштеп чыгуу.

**Изилдөөнүн объектиси:** Он жагы жана коэффициенти тез термелген функция жана пределдик оператордун спектри болбогондо сингулярдуу козголгон параболалык тендемелер.

**Изилдөөнүн предмети:** Пределдик оператордун спектри болбогондо кичине параметрлүү параболалык дифференциалдык тендемелердин асимптотикасынын алгоритмдерин түзүү.

### Изилдөөнүн илимий жаңылыгы:

- бош мүчөсү тез термелген функция болгондо сингулярдуу козголгон параболалык маселенин регулярыштырылган асимптотикасы тургузулган жана асимптотикалык чыгарылыштын бурчтук чек катмар функцияларды камтыгандыгы көргөзүлгөн;
- бош мүчө жалгыз жана аддитивдүү тез термелген функциялар болгон учурдагы эки ченемдүү сингулярдуу козголгон параболалык маселелердин асимптотикалык чыгарылышы тургузулган;
- аддитивдүү тез термелген бош мүчөсү бар скалярдык сингулярдуу козголгон параболалык маселелердин регулярыштырылган чыгарылыштын асимптотикасы тургузулган;
- коэффициенти тез термелген функция болгондо сингулярдуу козголгон параболалык маселелердин асимптотикалык чыгарылышы тургузулган;
- аддитивдүү тез термелген коэффициенти бар сингулярдуу козголгон параболалык маселелердин регулярыштырылган чыгарылышы тургузулган;
- аддитивдүү тез термелген коэффициенти бар эки ченемдүү сингулярдуу козголгон параболалык маселелердин регулярыштырылган чыгарылыштын асимптотикасы тургузулган.

## SUMMARY

**Dissertation «Asymptotics of solutions of parabolic equations in the absence of a spectrum of the limit operator» of Sheishenova Shaarbubu Kyshtoobaevna is submitted for the scientific degree of the candidate of physical-mathematical sciences by the specialty 01.01.02-differential equations, dynamic systems and optimal control**

**Keywords:** Differential equations of parabolic type, singularly perturbed parabolic problems, regularization of asymptotic solutions, parabolic boundary layer, angular boundary layer.

**Research aim:** to develop an algorithm of construction of regular asymptotic of the first boundary value problem for the partial differential equation of parabolic type with small parameter in the absence of a spectrum of the limiting operator and when the right part and the coefficient are rapid-oscillatory functions.

**Object of research:** singular parabolic equations in the absence of a spectrum of the limit operator and when a right hand member and factor are rapid-oscillate functions.

**Objective of research:** Construction of algorithm asymptotical of the differential equation of parabolic type with small parameter in the absence of a spectrum of the limit operator.

**Scientific novelty:**

- it is constructed regular asymptotical solution of a singularly perturbed parabolic problem, with rapid-oscillate right hand member and it is shown, that asymptotical solutions contains angular boundary layer functions;
- it is constructed regular asymptotical solution of a scalar singularly perturbed problem with additive rapid -oscillate a right hand member;
- there are constructed asymptotic solutions of two-dimensional singular parabolic problem, in a case when the right hand member consists of one and additive rapid -oscillate functions;
- there are constructed asymptotic solutions singularly perturbed parabolic problem, with rapid -oscillate in factor;
- it is constructed regularization of singularly perturbed parabolic problem with additive rapid -oscillate in factor;
- there are constructed asymptotic solutions of two-dimensional singularly perturbed parabolic problem with additive rapid -oscillate in factor.

Сдано в печать 12.11.2012. Формат 60x84 1/16.  
Объем 1,6 п.л. Печать офсетная. Тираж 100 экз.

---

720044, г. Бишкек, просп. Мира, 27  
Типография БГУ им. К.Карасаева

