НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Ж. Баласагына

Диссертационный совет Д 01.12.001

На правах рукописи
УДК 517.9

Рыспаев Амантур Орозалиевич

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ, СВОДЯЩИХСЯ К УРАВНЕНИЯМ ВОЛЬТЕРРА И ВОЛЬТЕРРА-ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Бишкек -2012

Работа выполнена в Кыргызском национальном университете им.Ж.Баласагына

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Омуров Т.Д.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Саадабаев А.

кандидат физико-математических наук,
доцент Сулайманов Б.Э.

Ведущая организация: Научно-исследовательский институт математики и механики Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

Кзахстан, 050012, г. Алматы, ул. Масанчы, 39/47

Защита диссертации состоится « » _________ 2012 года в _______ часов на заседании диссертационного совета Д 01.12.001 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата физико-математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: 720071, Бишкек, проспект Чуй, 265а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан « » __________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., с.н.с. **Искандаров С.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. В настоящее время интенсивно развивается раздел математической физики, связанный с обратно-нелокальными задачами. Впервые нелокальные краевые задачи были исследованы в работах А.Б. Бицадзе и А.А. Самарского. Далее, рассматривались и обратно-нелокальные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных.

Обратные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, рассматривались в работах Алифанова О.М., Аниконова А., Ахиева С.С., Аверьянова С.Ф., Бухгейма А.Л., Денисова А.М., Дмитриева В., Елеева В.А., Иванова В.К., Иманалиева М.И., Искандерова А., Кривошеина Л.Е., Лаврентьева М.М., Магницкого Н.А., Нахушева А.М., Борисова В.Н., Омурова Т. Д., Сергеева В.О., Чудновского А.Ф. В указанных работах не были рассмотрены условно-корректные задачи со свободной неизвестной границей с интегральной зависимостью и обратно-нелокальные задачи в неограниченной области.

В связи с этим, в данной работе изучаются обратно-нелокальные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, сводящиеся к корректным и условно-корректным уравнениям Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма первого рода. Рассматриваемые классы задач порождаются в задачах электромагнитных методов геофизики, слоистых сред, в чем и заключаются актуальность данной тематики.

Объекты исследования: Исследуются обратно-нелокальные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа в неограниченных областях. Полученные результаты обобщены к многомерным обратным задачам с равномерной и неравномерной метрикой.

Целью работы является: исследование обратно-нелокальных задач для дифференциальных уравнений гиперболического типа, где вырождаются одномерные и двумерные интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма первого рода; разработка аналитико-регуляризационных и численных методов решения указанных задач.

Методика исследования. Основными методами исследования являются методы регуляризации, численные методы, а также методы интегральных преобразований, последовательных приближений, метод сеток.

Научная новизна работы:

1. на основе метода системной регуляризации получены условия единственности устойчивости и условной устойчивости решения обратно-нелокальных задач для дифференциальных уравнений гиперболического типа в пространствах с равномерной и неравномерной метрикой;
2. построен и реализован численный метод решения одномерных интегральных уравнений Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма первого рода на основе разработанных системных алгоритмов, доказана его сходимость;
3. с помощью разработанных аналитико-регуляризационных методов получены условия единственности и устойчивости решений многомерных обратно-нелокальных задач со свободной неизвестной границей для дифференциальных уравнений в частных производных;
4. построен численный метод решения двумерных уравнений Вольтерра-Фредгольма первого рода на основе метода системной регуляризации, доказана его сходимость.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы носят в основном теоретический характер и могут быть применены для решения обратно-нелокальных задач для дифференциальных уравнений более высокого порядка и численного решения уравнений Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма первого рода, возникающие в задачах геофизики, в теории электромагнитных зондирований, слоистых сред и др.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Аналитико-регуляризационные методы для решения обратно-нелокальных задач гиперболического типа в неограниченной области.
- Обоснование регуляризации для интегральных уравнений Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма первого рода с равномерной и неравномерой метрикой.

-Численные методы для приближенного решения уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма первого рода.

- Системный метод регуляризации и численный алгоритм для решения многомерных обратных задач, где вырождаются соответствующие двумерные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма первого рода.

Личный вклад соискателя. Постановка задач и обсуждение полученных результатов проводились при непосредственном участии научного руководителя д. ф.-м. н., проф. Омурова Т.Д. Сами результаты получены автором.

Апробация результатов диссертации. Результаты работы докладывались на: семинаре Центра информационных систем и технологий в управлении КНУ им Ж. Баласагына (2005-2007гг.) под руководством профессора Баячоровой Б.Ж. и доцента Байзакова А.Б.; семинаре Института теоретической и прикладной математики НАН КР 2010 г. под руководством д.ф.-м.н. Искандарова С. в лаборатории интегро-дифференциальных уравнений; Международной научно-технической конференции ИВМиМГ СОРАН, 2008; научно-практическом семинаре МИиК КНУ, посвященном 95-летию со дня рождения профессора Л. Е. Кривошеина, под руководством проф. Омурова Т.Д.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 10 научных статей, в том числе 2 статьи опубликованы в зарубежных изданиях и 3 работы написаны единолично. В совместных работах [1-7] постановка задач и обсуждение выводов принадлежит руководителю, и обсуждение выводов принадлежат другим соавторам. Разработка методов и их доказательства принадлежат автору работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из списка используемых обозначений и определений, введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения, список использованной литературы из 71 наименования и листинга программы на языке C#. Объем текста 85 страниц.

В работе в формулах введены обозначения с трехзначными и четерыхзначными знаками, разделенные между точками. Например, (1.1.1.1) - первое число - номер главы, второе число - номер параграфа, третье число - номер пункта, а четвертое - номер формулы. Если в параграфах нет пунктов, то ведется трехзначное обозначение.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано обоснование тематики и общая характеристика работы.

В первой главе приведен общий обзор по прямым и обратным задачам для дифференциальных уравнений в частных производных в ограниченной и неограниченной областях. Здесь учитывается дополнительная информация, по теории интегральных, дифференциальных уравнений, которые вырождаются из изучаемых обратных задач на основе информации о решении исходных задач.

В главе 2 исследованы обратные задачи с нелокальными условиями в неограниченной области по координатной переменной. Установлены достаточные условия разрешимости исходных задач в пространствах $C_n^{1,1}(\Omega)$, $L_n^{\,2}(\Omega)$ и их регуляризируемость в этих пространствах. Построен численный метод решения уравнений Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма первого рода.

Отметим, что численные алгоритмы введены на основе аналитико-регуляризационных методов, которые разработаны в диссертационной работе. Реализован численный пример с составлением программы на языке C#.

В § 2.1 исследуем гранично-обратную задачу в неограниченной области, где вырождается интегральное уравнение Вольтерра первого рода.

Задача 2.1. Найти пару функций $(u(y,x), u(0,x) = z(x))$ из задачи

$$Lu \equiv u_{yx} + a(y)u_x + b_1u_y + b_2\frac{\partial(u^n)}{\partial y} = f(y,x), \forall\ (y,x)\in\Omega = R_+\times[0,T], \tag{2.1.1}$$

$$u_y(y,0) + a(y)u(y,0) = \varphi(y), \quad \forall y\in R_+ = [0,\infty), \tag{2.1.2}$$

$$\tilde{a}(x)u(0,x) + \beta(x)[u(y_0,x) + u(y_1,x)] = g(x), \quad \forall x\in[0,T], \tag{2.1.3}$$

$$\tilde{a}(x) + \left(\exp(-\int_0^{y_0} a(\tau)d\tau) + \exp(-\int_0^{y_1} a(\tau)d\tau)\right)\cdot\beta(x)\neq 0, \quad \forall \mathrm{x}\in[0,T],\ \ y_0,y_1\in R_+\setminus\{0\} = R_+^0, \tag{2.1.4}$$

где $n\geq 2$, $b_i = const$, $i = 1,2$; $f(y,x)$, $\varphi(y), g(x)$ – известные n-мерные векторные функции, $\tilde{a}(x), a(y)$, $\beta(x)$– известные непрерывные функции, кроме того $a(y)\geq\alpha_0 > 0$, $a(y)$, $\varphi(y)$, $f(y,x)$ интегрируемы в R_+, Ω.

Задача 2.2. Найти пару функций $(u;z)$ из системы (2.1.1)-(2.1.3), с условием

$$u(0,x) = \varphi_0(x) \equiv \int_0^x K(x,s)[z(s) + (Nu)(s)]ds, \qquad (Nu)(s) = \int_0^\infty e^{-\eta}u(s,\eta)d\eta, \tag{2.1.5}$$

где $K(x,s)$ - $n\times n$-мерная известная матричная функция, с требованием, что:

а) $K(x,s)\in C_n^{1,1}(D_*)$, $D_* = \{0\leq s\leq x\leq T\}$, $K_x^{(i)}(x,s)\big|_{x=s}\equiv 0$, $(i = 0,1)$; $K_{xs}(x,x)\equiv 1$;

б) $K_2(x,s)\equiv K_{xs}(x,s) - K_{xs}(s,s)$, $\left\|K_2(x,s) - K_2(\bar{x},s)\right\|\leq L(s)\left|x-\bar{x}\right|$, $(0 < L(x)\in C[0,T])$.

Заменяя $\vartheta(y,x) = u_y(y,x) + a(y)u(y,x) - (y)$, $\vartheta(y,0)\equiv 0$, получаем

$$u(x,y) = \exp(-\int_0^y a(\tau)d\tau)\left(\tilde{a} + \exp(-\int_0^{y_0} a(\tau)d\tau)\beta + \beta\int_0^{y_1}\exp(-\int_0^{y_1} a(\tau)d\tau)\right)^{-1}\times\left\{g(x) - \int_0^{y_0}\exp(-\int_\eta^{y_0} a(\tau)d\tau)\times\right.$$
$$\left.\times[\varphi(\eta) + \vartheta(\eta,x)]d\eta - \beta\int_0^{y_1}\exp(-\int_\eta^{y_0} a(\tau)d\tau)[\varphi(\eta) + \vartheta(\eta,x)]d\eta\right\} + \int_0^y\exp(-\int_\eta^y a(\tau)d\tau)[\varphi(\eta) + \tag{2.1.1.5}$$
$$+\vartheta(\eta,x)]d\eta\equiv(Q\vartheta),$$

$$\vartheta(y,x) = \int_0^x f(y,s)ds - \int_0^x b_1(Q\vartheta)_y(y,s)ds - b_2n\int_0^x b_2[(Q\vartheta)(y,s)]^{n-1}(Q\vartheta)'_y(y,s)ds\equiv \tag{2.1.1.6}$$
$$\equiv(H\vartheta)(y,x), \ \ \forall(y,x)\in\Omega,$$

уравнение Вольтерра II рода. Отсюда следует

Лемма 2.1.1. При условиях задачи 2.1 система (2.1.1.6) корректна в $C_n^{0,1}(\Omega)$.

Теорема 2.1.1. Если выполняются условия леммы 2.1.1, то задача 2.1 корректна в $C_n^{1,1}(\Omega)$.

В задаче 2.2 для восстановления функций (u,z) имеем:

$$\int_0^x K_x(x,s)z(s)ds = f_2(x), \qquad (2.1.2.1)$$

где $f_2(x)=(H_0\vartheta)'_x(x)-\int_0^x K_x(x,s)(Nu)(s)ds, \quad x\in[0,T], \quad f_2(0)=0, \quad f_2\in C_n^1[0,T].$ (2.1.2.2)

Пусть функция $u(y,x)$ является решением задачи (2.1.1)-(2.1.4) с условием (2.1.5). Тогда изучение корректности задачи 2.2 по Адамару сводится к исследованию вопроса устойчивости уравнения (2.1.2.1). Преобразуем уравнение следующим образом

$$\int_0^x K_{xs}(s,s)\psi(s)ds = -f_2(x)+\int_0^x K_2(x,s)\psi(s)ds, \qquad (2.1.2.3)$$

$$\int_0^x z(s)ds = \psi(x), \quad \psi(0)=0, \qquad (2.1.2.4)$$

где $K_2(x,s)\equiv -[K_{xs}(x,s)+K_{xs}(s,s)]$, $K_{xs}(s,s)\equiv 1$, $K_x(x,s)$ удовлетворяет условиям (а, б).

Далее, для изучения уравнений вида (2.1.2.3), (2.1.2.4) введем систему вида

$$\varepsilon\psi_\varepsilon(x)+\int_0^x \psi_\varepsilon(s)ds = f_2(x)+\int_0^x K_2(x,s)\psi_\varepsilon(s)ds, \quad x\in[0,T], \qquad (2.1.2.5)$$

$$\delta z_\varepsilon(x)+\int_0^x z_\delta(s)dx = \psi(x), \qquad (2.1.2.6)$$

$\delta,\ \varepsilon\in(0,1)$ - малые параметры и для простоты $z(0)=0$.

Лемма 2.1.2. Пусть решение уравнения (2.1.2.3) $\psi(x)\in C_n[0,T]$. Тогда при выполнении условий (а, б), система (2.1.2.5), (2.1.2.6) имеет единственное непрерывное решение $(\psi_\varepsilon(x);\ z_\delta(x))$, $x\in[0,T]$, причем $\psi_\varepsilon(x)$, $z_\delta(x)$ равномерно сходятся при $\varepsilon\to 0\ (\frac{Q(\varepsilon)}{\delta}\to 0, \delta\to 0)$ к решениям $\psi(x),\ z(x)$, соответственно.

Теорема 2.1.2. В условиях исходной задачи и леммы 2.1.2 обратная задача Гурса (2.1.1.1)-(2.1.1.3) корректна в $C_n^{1,1}(\Omega)$, при этом

$$\|u_\delta(0,x)-u(0,x)\| = \|\varphi_\varepsilon-\varphi_0\| \le \sqrt{n}K^0(Q_1(\varepsilon,\delta)T+\Delta(\delta)T), \quad \forall x\in[0,T].$$

В §2.1.3 изучается регуляризируемость задачи 2.2 в классе $M^*_{(u,z)} = u(x,y),z(x)$: $u\in C_n(\Omega), u_x,u_y,u_{xy}\in L_n^2(\Omega),\ z(x)\in L_n^2(0,T)$. Из (2.1.1) получим системы вида (2.1.1.5), (2.1.1.6), относительно функций $\vartheta, u,$ которые однозначно решаются в классе $M^*_{(u,z)}$. Поэтому докажем регуляризируемость уравнения (2.1.2.1) в $L_n^2(0,T)$.

С этой целью, относительно (2.1.2.1) введем

$$\begin{cases} L_1\psi \equiv -\int_0^x \psi(s)ds - f_2(x)+\int_0^x K_2(x,s)\psi(s)ds = 0,\ x\in[0,T], \\ L_2 z \equiv -\int_0^x z(s)ds+\psi(x)=0, \psi(0)=0,\ z(0)=0, \end{cases} \qquad (2.1.3.1)$$

и систему с малыми параметрами

$$\begin{cases} \varepsilon\psi_\varepsilon(x) = L_1\psi_\varepsilon, \\ \delta z_\delta(x) = L_2 z_\delta. \end{cases} \qquad (2.1.3.2)$$

Здесь $f_2(x)\in L_n^2(0,T)$, $f_2(0)=0.$ Тогда

$$\psi_\varepsilon(x)=\psi(x)+\eta_\varepsilon(x), z_\varepsilon(x)=z(x)+\xi_\delta(x), \quad \forall\, x\in[0,T]. \qquad (2.1.3.3)$$

Подставляя (2.1.3.3) в исходное уравнение, имеем:

$$\begin{cases} \eta_\varepsilon(x)=-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \eta_\varepsilon(s)ds+\dfrac{1}{\varepsilon}\int_0^x K_2(x,s)\eta_\varepsilon(s)ds-\psi(x), \\ \xi_\delta(x)=-\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^x \xi_\delta(s)ds-z(x)+\dfrac{1}{\delta}(\psi_\varepsilon(x)-\psi(x)). \end{cases} \qquad (2.1.3.4)$$

Лемма 2.1.3. Если имеют место условия (а,б), существуют функции $\eta_\varepsilon(x)$, $\xi_\delta(x)$, которые определяются из уравнения (2.1.3.4), то эти функции ограничены и единственны в пространстве $L_n^2(0,T)$, причем $\eta_\varepsilon(x)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$, $\xi_\delta(x)\xrightarrow[\delta\to 0]{}0$ в $L_n^2(0,T)$.

Теорема 2.1.3. При условиях леммы 2.1.3 задача (2.1.1)-(2.1.5) регуляризируема в $M^*_{(u,z)}$.

В §2.2 изучаются обратно-нелокальные задачи для дифференциальных уранений в частных производных третьего порядка в неограниченной области. Исследуется регуляризируемость изучаемой задачи в $C_n^{2,1}(\Omega)$.

Задача 2. Пусть

$$Lu\equiv u_{x^2t}+au_{xt}+b_0u_t+b_1u_x+b_2\frac{\partial(u^2)}{\partial x}=f(x,t), \qquad (2.2.1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \forall x\in R_+, \quad u_t(0,t)=\varphi_0(t), \quad \forall t\in[0,T], \qquad (2.2.2)$$

$$u_x(0,t)=\lambda(t), \quad \forall t\in[0,T], \ \lambda(0)=\varphi'(0), \qquad (2.2.3)$$

$$u_x(x_0,t)=\psi(t), \quad x_0\in R_+^0.$$

Задача 2.2.1. В условиях (2.2.2), (2.2.3) необходимо найти пару векторных функций (u,z) из системы (2.2.1), где $f(x,t)\equiv f_0(x,t)z(t)$; $a(t)\ge\alpha_0>0-$заданная функция, интегрируемая в R_+, $b_i=const, i=0,1,2$; $\varphi(x), \psi(t), \varphi_0(t)$- известные векторные функции, $f_0(x,t)-$ заданная диагонально-матричная функция; $\varphi(x), f_0(x,t)$ интегрируемы в R_+, $\Omega=R_+\times[0,T]$.

Задача 2.2.2. Найти пару функций $(u(x,t),\ u_x(0,t))=\lambda(t)$, из системы (2.2.1) с условиями (2.2.2) и:

$$\sum_{i=1}^{3}\beta_i u_x(x_i,t)=g(t), \quad \forall t\in[0,T], \ x_i\in R_+^0, \ i=\overline{1,3}, \qquad (2.2.2.1)$$

$$N_0=\sum_{i=1}^{3}\beta_i\exp\Big(-\int_0^{x_i}a(\eta)d\eta\Big)\ne 0, \qquad (2.2.2.2)$$

где $\beta_i=const,\ i=\overline{1,3},\ C_n^1[0,T]\ni g(t)-$заданная векторная функция.

Задача 2.2.3. Найти пару функций (u,z) из задачи (1.2.1), (1.2.2), (2.2.2.1), когда

$$u_x(0,t)=Hz\equiv\left[\int_0^t K(t,s)z(s)ds+\mu\int_0^T K_1(t,s)z(s)ds\right], \quad \mu-\text{ параметр}. \qquad (2.2.3.1)$$

I. Рассмотрим задачу (2.2.1)-(2.2.3).

Заменим

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,\tau)dsd\tau+\varphi(x)+\varphi(x)(\varphi(0))^{-1}\int_0^t\varphi_0(\tau)d\tau\equiv A\vartheta, \quad \forall(x,t)\in\Omega, \qquad (2.2.4)$$

где $\vartheta(x,t)-$новая искомая функция. Тогда

$$\begin{cases} u_x(x,t) = \int\limits_0^t \vartheta(x,\tau)d\tau + \varphi'(x) + \varphi'(x)(\varphi(0))^{-1}\int\limits_0^t \varphi_0(\tau)d\tau \equiv (P_0\vartheta)(x,t), \quad \forall (x,t)\in\Omega, \\ u_t(x,t) = \int\limits_0^x \vartheta(s,t)ds + \varphi(x)(\varphi(0))^{-1}\varphi_0(t); u_{xt}(x,t) = \vartheta(x,t) + \varphi'(x)(\varphi(0))^{-1}\varphi_0(t), \\ u_{x^2t}(x,t) = \vartheta_x(x,t) + \varphi''(x)(\varphi(0))^{-1}\varphi_0(t), \quad \forall (x,t)\in\Omega. \end{cases} \tag{2.2.4$_1$}$$

Следовательно из системы (2.2.1) получим

$$\vartheta(x,t) = \exp(-\int\limits_0^x a(\eta)d\eta)\theta(t) + \int\limits_0^x \exp(-\int\limits_s^x a(\eta)d\eta)\{ f_0(s,t)z(t) - (H(\vartheta))(s,t) - \\ -F(s,t)\}ds \equiv (P[\vartheta,z])(x,t), \tag{2.2.5}$$

где

$$\vartheta(0,t) = \lambda'(t) - \varphi'(0)(\varphi(0))^{-1}\varphi_0(t) \equiv \theta(t);\ \vartheta(x_0,t) = \psi'(t) - \varphi'(x)(\varphi(0))^{-1}\varphi_0(t) \equiv \psi_0(t), \tag{2.2.6}$$

$$F(x,t) \equiv \varphi''(x)(\varphi(0))^{-1}\varphi_0(t) + a(x)\varphi'(x)(\varphi(0))^{-1}\varphi_0(t) + b_0\varphi(x)(\varphi(0))^{-1}\varphi_0(t) + b_1[\varphi'(x) + \\ +\varphi'(x)(\varphi(0))^{-1}\int\limits_0^t \varphi_0(\tau)d\tau] + \frac{1}{2}b_2[(\varphi(x) + \varphi(x)(\varphi(0))^{-1}\int\limits_0^t \varphi_0(\tau)d\tau)(\varphi'(x) + \varphi'(x)(\varphi(0))^{-1}\int\limits_0^t \varphi_0(\tau)d\tau)],$$

$$H\vartheta = b_0\int\limits_0^x \vartheta(s,t)ds + b_1\int\limits_0^t \vartheta(x,\tau)d\tau + \frac{1}{2}b_2[\int\limits_0^t\int\limits_0^x \vartheta(s,\tau)d\tau ds \times \int\limits_0^t \vartheta(x,\tau)d\tau + (\varphi(x) + \varphi(x)(\varphi(0))^{-1} \times \\ \times\int\limits_0^t \varphi_0(\tau)d\tau) \times \int\limits_0^t \vartheta(x,\tau)d\tau + (\varphi'(x) + \varphi'(x)(\varphi(0))^{-1}\int\limits_0^t \varphi_0(\tau)d\tau) \times \int\limits_0^t\int\limits_0^x \vartheta(s,\tau)d\tau ds], \forall (x,t)\in\Omega. \tag{2.2.7}$$

Поэтому с учетом (2.2.3)-(2.2.6) определим функцию $z(t)$:

$$z(t) = F_0^{-1}(t)\{\psi_0(t) - exp(-\int\limits_0^{x_0} a(\eta)d\eta)\theta(t) - \int\limits_0^{x_0} exp(-\int\limits_s^{x_0} a(\eta)d\eta)[-(H\vartheta)(s,t) - \\ -F(s,t)]ds\} \equiv (Q\vartheta)(x_0,t), \tag{2.2.8}$$

так как $F_{0i}(t) \equiv \int\limits_0^{x_0} exp(-\int\limits_s^{x_0} a(\eta)d\eta) f_{0i}(s,t)ds, (i = 1,...,n),$

$$0 \neq F_{0i}(t),\ \forall t\in[0,T],\ F_0(t) = diag(F_{01},...,F_{0n}). \tag{2.2.9}$$

Тогда с учетом (2.2.8) из системы (2.2.5), получим

$$\vartheta(x,t) = (P[\vartheta, Q\vartheta])(x,t), \quad \forall (x,t)\in\Omega \tag{2.2.10}$$

- уравнение Вольтерра второго рода по переменной $t\in[0,T]$.

Лемма 2.2.1. Если выполняются условия (2.2.2), (2.2.3), (2.2.9), то система (2.2.10) корректна в $C_n^{1,0}(\Omega)$.

Теорема 2.2.1. Пусть выполняются условия леммы 2.2.1. Тогда задача (2.2.1)-(2.2.3) корректна в $C_n^{2,1}(\Omega)$.

II. Для решения задачи 2.2.2 на основе (2.2.4) получим систему (2.2.5): $\vartheta(x,t) = (P[\vartheta,\theta])(x,t),$ где требуется найти пару функций $(\vartheta(x,t), \vartheta(0,t) = \theta(t))$.

Для этого, учитывая (2.2.1), (2.2.4)-(2.2.6), получим

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i\{\int\limits_0^t \vartheta(x_i,\tau)d\tau + \varphi'(x_i) + \varphi'(x_i)(\varphi(0))^{-1}\int\limits_0^t \varphi_0(\tau)d\tau\} =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \beta_i\{\int\limits_0^t [\exp(-\int\limits_0^{x_i} a(\eta)d\eta)\theta(\tau) + \int\limits_0^{x_i} \exp(-\int\limits_s^{x_i} a(\eta)d\eta)[f(s,\tau) - (H(\vartheta))(s,\tau) -$$

$$-F(s,\tau)]ds]d\tau+\varphi'(x_i)+\varphi'(x_i)(\varphi(0))^{-1}+\int_0^t\varphi_0(\tau)d\tau\}=g(t),\forall t\in[0,T]. \qquad (2.2.11)$$

Так как имеет место (2.2.2.2), то получим

$$\begin{cases}\theta(t)=N_0^{-1}\{g'(t)-\sum_{i=1}^3\beta_i\{\int_0^{x_i}\exp(-\int_s^{x_i}a(\eta)d\eta)[f(s,t)-(H(\vartheta))(s,t)-F(s,t)]ds+\\ +\varphi_0(t)\}\equiv(N\vartheta)(t),\\ \lambda(t)=\lambda(0)+\int_0^t[\varphi'(0)(\varphi(0))^{-1}\varphi_0(\tau)+\theta(\tau)\,]d\tau,\ \lambda(0)=\varphi'(0),\end{cases} \qquad (2.2.12)$$

$$\vartheta(x,t)=(P[\vartheta,N\vartheta])(x,t),\ \ \forall(x,t)\in\Omega, \qquad (2.2.13)$$

- уравнение Вольтерра второго рода. Отсюда имеем:

Лемма 2.2.2. В условиях задачи 2.2.2 система (2.2.13) корректна в $\vartheta\in C_n^{1,0}(\Omega)$.

Теорема 2.2.2. При выполнении условий леммы 2.2.2, задача 2.2.2 корректна в $C_n^{2,1}(\Omega)$.

III. Пусть имеют место условия задачи 2.2.3. Из (2.2.4$_1$) имеем $u_x(0,t)=(P_0\vartheta)(x,t)\big|_{x=0}$. Используя (2.2.3.1), получим

$$\int_0^t K(t,s)z(s)ds+\mu\int_0^T K_1(t,s)z(s)ds=f_2(t), \qquad (2.2.15)$$

где: а) $f_2(t)\equiv(P_0\vartheta)(0,t),\ \ f_2(t)\in C_n^1[0,T];$ б) $K_t^{(i)}\big|_{s=t}=0,\ (i=0,1),\ \mathrm{M}(t)\equiv K_{ts}(t,t)-n\times n-$ матричная функция, $\lambda_i(t)-$собственные значения $\mathrm{M}(t)$:$\lambda_i(t)\ge d>0,\ (i=1,n);\ K_0(t,s)\equiv K_{ts}$, $K(t,s)\in C_n^{1,1}(D_0),\ D_0=\{(t,s):\ 0\le s\le t\le T\};\ K(t,s)\in C_n^{1,1}(D_0),\ D_0=\{(t,s):\ 0\le s\le t\le T\};$
в) $K_1(t,s)\le C_n^{1,1}(D_1),\ \ D_1=[0,T]\times[0,T],\ \ K_{1ts}(\mathrm{t,s})\equiv K_2(\mathrm{t,s}),\ K_{1t}(t,T)\equiv 0$.

Проведя некоторые математические операции, из (2.2.15) получим

$$\begin{cases}L_1\psi\equiv\int_0^t K_0(t,s)\psi(s)ds+\mu\int_0^T K_2(t,s)\psi(s)ds=-f_2'(t),\\ \int_0^t z(s)ds=\psi(t),\ \psi(0)=0,\ (z(0)=q_0=const).\end{cases} \qquad (2.2.16)$$

Введем систему с малыми параметрами

$$\begin{cases}\varepsilon\psi_\varepsilon(t)+(L_1\psi_\varepsilon)(t)=-f_2'(t),\\ \delta z_\delta(t)+\int_0^t z_\delta(s)ds=\psi_\varepsilon(t)+\delta z(0).\end{cases} \qquad (2.2.17)$$

Учитывая $\psi_\varepsilon=\psi+\Im_\varepsilon,\ z_\delta=z+\eta_\delta$, из (2.2.17) получим

$$\Im_\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t W(t,s,\varepsilon)M(s)\{-\int_0^s K_0(s,\tau)\Im_\varepsilon(\tau)d\tau+\int_0^t K_0(t,\tau)\Im_\varepsilon(\tau)d\tau-\mu\cdot\int_0^T[K_2(s,\tau)-K_2(t,\tau)]\times$$

$$\times\Im_\varepsilon(\tau)d\tau\}ds+\frac{1}{\varepsilon}W(t,0,\varepsilon)\{-\int_0^t K_0(t,\tau)\Im_\varepsilon(\tau)d\tau-\mu\int_0^T K_2(t,\tau)\Im_\varepsilon(\tau)d\tau\}+\Delta(\varepsilon,\psi)\equiv(H_0\Im)(t),$$

$$\eta_\delta=-\frac{1}{\delta^2}\int_0^t W_1(t,s,\delta)\{\psi_\varepsilon(s)-\psi(s)\}ds+\frac{1}{\delta}(\psi_\delta(t)-\psi(t))+\Delta_1(\delta,z), \qquad (2.2.19)$$

здесь $\psi,z-$удовлетворяют условию Липшица по t, а $L_{H_0}-$коффициент Липшица оператора H_0, причем

$$\|\Delta(\varepsilon,\psi)\|_C\le Q_0(\varepsilon),\ \|\Delta_1(\delta,z)\|_C\le Q_1(\delta). \qquad (2.2.20)$$

Лемма 2.2.3. В условиях исходной задачи, когда выполняется (2.2.20) и $L_{H_0}<1$, то система (2.2.16) регуляризируема в $C_n[0,T]$, причем

$$\Im_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,\ \ \eta_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0,\ \ \forall\, t\in[0,T],\ \frac{Q(\varepsilon)}{\delta}\to 0, Q(\varepsilon)=Q_0(\varepsilon)(1-L_{H_0})^{-1}.$$

Теорема 2.2.3. Если выполняются условия леммы 2.2.1 и задачи 2.2.2, то обратная задача (2.2.1), (2.2.2), (2.2.2.1), (2.2.2.2) корректна в $C_n^{2,1}(\Omega)$.

В §2.3 на основе метода системной регуляризации построен численный алгоритм для решения уравнений Вольтерра I рода.

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^x K(x,t)z(t)dt = f(x),\quad 0\le x\le 1. \tag{2.3.1}$$

Предположим, что оно имеет решение $z(t)$, $z(0)=0$ (если $z(0)=q$, то заменим $z=V+q$, получим $V(0)=0$) и потребуем, чтобы:

a$_1$) $K(x,t)\big|_{t=x}=0,\quad K_t(t,t)\ge\alpha>0,\ \forall(x,t)\in G\{0\le t\le x\le 1\}$;

a$_2$) В численных методах будем предпологать (как это имеет место практически), что правая часть интегральных уравнений ($f(x)$ или $f(t,x)$) известна с некоторой погрешности , то есть в место f задана такая (дифференцируемая) функция $f_{\tilde\delta}$, что $\|f_{\tilde\delta}-f\|_C\le c_1\tilde\delta.$ Тогда из (2.3.1), обозначая a$_3$) $N(x,t)\equiv K_t(x,t)-K_t(t,t),\ K_0(t)\equiv K_t(t,t),$ получим:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^x K_0(t)\psi(t)dt+\int_0^x N(x,t)\psi(t)dt=-f(x),\\ \displaystyle\int_0^x z(t)dt=\psi(x),\quad \psi(0)=0.\end{cases} \tag{2.3.2}$$

Предлагается следующий численный метод приближенного решения системы (2.3.2) с использованием малых параметров:

1) по формуле правых прямоугольников заменяем ее на СЛАУ:

$$\begin{cases}\displaystyle\varepsilon\psi_i+\sum_{j=1}^i K_{0j}\psi_j h+\sum_{j=1}^i N_{ij}\psi_j h=-f_{\tilde\delta i}, & (2.3.3_1)\\ \displaystyle\delta z_i+\sum_{j=1}^i z_j h=\psi_{\varepsilon i},\quad i=\overline{1,n}. & (2.3.3_2)\end{cases}$$

2) Вместо (2.3.3$_1$) решаем СЛАУ

$$\varepsilon\psi_{i-1}+\sum_{j=1}^i K_{0\,j-1}\psi_{j-1}h+\sum_{j=1}^i N_{ij-1}\psi_{j-1}h=-f_{\tilde\delta i},\quad (i=\overline{1,n}), \tag{2.3.3}$$

и обозначив через $\tilde\psi^{\varepsilon,h}=\ \tilde\psi_{i-1}^{\varepsilon,h}\ ,\ \ (i=\overline{1,n})$ решение (2.3.3), введем вектор $\tilde\beta^{\varepsilon,h}=\ \tilde\beta_{i-1}^{\varepsilon,h}\ \equiv\ \psi(s_{i-1})-\tilde\psi_{i-1}^{\varepsilon,h}\ ,\ \ i=\overline{1,n}.$ Чтобы оценить $\|\tilde\beta^{\varepsilon,h}\|_{C_n}$, имеем:

$$\varepsilon\psi(s_{i-1})+\sum_{j=1}^i K_{0\,j-1}\psi(s_{j-1})h+\sum_{j=1}^i N_{i\,j-1}\psi(s_{j-1})h=-f(s_i)-R_i+\varepsilon\psi(s_{i-1})\,, \tag{2.3.4}$$

где R_i - остаточный член квадратуры правых прямоугольников. Тогда

$$[\varepsilon+hK_{0i\,j-1}+hN_{i,j-1}]\tilde\beta_{i-1}^{\varepsilon,h}+h\sum_{j=1}^{i-1}K_{0i\,j-1}\tilde\beta_{i-1}^{\varepsilon,h}+h\sum_{j=1}^{i-1}N_{i,j-1}\tilde\beta_{j-1}^{\varepsilon,h}=-f(s_i)+f_{\tilde\delta i}-R_i+\varepsilon\psi(s_{i-1}). \tag{2.3.6}$$

Следовательно, учитывая $\left\|\tilde{\beta}^{\varepsilon,h}\right\|_{C_n} \le \mu_i, i=\overline{1,n},$ получим

$$\left|\tilde{\beta}_{i-1}^{\varepsilon,h}\right| \le \frac{C_0[\tilde{\delta}+h^2+\varepsilon h]}{\varepsilon+h(K_1+K_2)}, \quad i=\overline{1,n},\ 0<C_0=\max(C_1,C_2,C_3), \tag{2.3.20}$$

т.е. получена искомая оценка погрешности регуляризованного каркаса приближенного решения уравнения (2.3.2). Найдем квазиоптимальные зависимости $h(\tilde{\delta})$ и $\varepsilon(\tilde{\delta})$. Легко видеть, что $\left\|\tilde{\beta}^{\varepsilon_{\text{к.о.с.}},h_{\text{к.о.с.}}}\right\|_{C_{n\ \text{к.о.с.}}} = \mathrm{O}(\tilde{\delta}^{\frac{1}{2}})$, когда $h_{\text{к.о.с.}}(\tilde{\delta}) \approx \tilde{\delta}, \quad \varepsilon_{\text{к.о.с.}}(\tilde{\delta}) \approx \tilde{\delta}^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 2.3.1. Для $\varepsilon-$регуляризированного каркаса приближенного решения уравнения (2.3.2), удовлетворяющего СЛАУ (2.3.3), при $\varepsilon \to 0$ справедлива оценка:
$\left|\psi(s_{i-1})-\psi_{i-1}^{\varepsilon(\tilde{\delta}),h(\tilde{\delta})}\right| = \mathrm{O}(\tilde{\delta}^{\frac{1}{2}}), \quad i=\overline{1,n},$ если $h(\tilde{\delta}) \approx \tilde{\delta}^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon(\tilde{\delta}) \approx \tilde{\delta}^{\frac{1}{2}}.$

Рассмотрим уравнение (2.3.3$_2$). Так как по условию $z(0)=0$ и $z(t)-$ точное решение уравнения (2.3.1), то справедлива оценка [Денисов А.М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности//Вест. МГУ. - Вычисл. матем. и киберн.-1980.- №3.- С.49-52]: $\left\|z(t)-\tilde{z}^{\varepsilon,\delta}(t)\right\|_{C_n} \le d_1\delta + d_2\dfrac{\varepsilon}{\delta} \le \mathrm{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$, где $d_1, d_2 - const$, $\delta(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 2.3.2. При условиях теоремы 2.3.1, если $\delta(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, то допускаемая погрешность численного алгоритма будет порядка $O(\tilde{\delta}^{\frac{1}{4}})$.

Пример 2.3.1. Уравнение $\displaystyle\int_0^x [(x-t)+\frac{(x-t)^2}{2}]z(t)dt = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^3,$

где $K(x,t) \equiv x-t+\dfrac{(x-t)^2}{2}$, $f(x) \equiv \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$. Тогда эти функции удовлетворяют условиям (a_1,a_2), причем $z(0)=1,\ z(t)=1.$ Поэтому введем систему:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^x \psi(t)dt + \int_0^x (x-t)\psi(t)dt = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^3, \\ \displaystyle\int_0^x z(t)dt = \psi(t), \quad z(0)=1, \quad f(0)=0. \end{cases}$$

Введем функцию: $f_\varepsilon \equiv \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\varepsilon x,$ тогда $f_\varepsilon - f = \varepsilon x, \forall x \in [0,1];\ K_0 \equiv 1,\ N \equiv x-t.$

Алгоритм решения системы (2.3.3$_1$), (2.3.3$_2$) с этими данными был реализован на языке С#.

В **§ 2.4** рассматривается система Вольтерра-Фредгольма первого рода:

$$\int_0^x K(x,t)z(t)dt + \lambda\int_0^T M(x,t)z(t)dt = f(x), \tag{2.4.1}$$

или

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^x K_0(t)\psi(t)dt + \int_0^x N(x,t)\psi(t) + \lambda\int_0^T M^0(x,t)\psi(t)dt = -f(x), \\ \displaystyle\int_0^x z(t)dt = \psi(t),\ K(x,t)\big|_{t=x} \equiv 0,\ M(x,t)\big|_{t=x} \equiv 0, \psi(0)=0,\ z(0)=0, \end{cases} \tag{2.4.1$_1$}$$

где $K, M, f, M^0(x,t) \equiv M_t(x,t), K_0(t) \equiv K_t(t,t), N(x,t) \equiv K_t(x,t)-K_t(t,t)-$ известные функции, $0<\lambda-$ параметр (не является характеристическим значением (2.4.1)). В предыдущих параграфах уравнение (2.4.1) с условием вида (a_2) было решено на основе метода регуляризации с равномерной метрикой. Здесь на основе метода регуляризации, с использованием малых параметров введем численно-системный алгоритм вида:

$$\begin{cases} \varepsilon\psi_i + \sum_{j=1}^{i}(K_{0j}\psi_j + N_{ij}\psi_j)h + \lambda\sum_{j=1}^{n} M_{ij}^0\psi_j h = -f_{\tilde{\delta}i}, \\ \delta z_i + \sum_{j=1}^{i} z_j h = \psi_{\varepsilon i},\ i = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (2.4.2)$$

Используя в качестве базовой квадратуры формулу средних прямоугольников, рассмотрим сеточное уравнение:

$$\varepsilon\psi_{i-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{i} K_{0j-\frac{1}{2}}\psi_{j-\frac{1}{2}} h + N_{ij-\frac{1}{2}}\psi_{j-\frac{1}{2}} h + \lambda\sum_{j=1}^{n} M^0_{ij-\frac{1}{2}}\psi_{j-\frac{1}{2}} h = -f_{\tilde{\delta}i},\ i = \overline{1,n}. \qquad (2.4.3)$$

Обозначим через $\psi^{\varepsilon,h} = \left\{\tilde{\psi}^{\varepsilon,h}_{i-\frac{1}{2}}\right\},\ (i = \overline{1,n})$ решение (2.4.3) и введем вектор

$\tilde{\beta}^{\varepsilon,h} = \left\{\tilde{\beta}^{\varepsilon,h}_{i-\frac{1}{2}}\right\} \equiv \left\{\psi(s_{i-\frac{1}{2}}) - \tilde{\psi}^{\varepsilon,h}_{i-\frac{1}{2}}\right\}\ \ i = \overline{1,n}.$ При этом учитывая: $\mu_i \le \dfrac{C_0[\tilde{\delta} + h^3 + \varepsilon h]}{\varepsilon + h(K_1 + K_2 + \lambda K_3)}, i = \overline{1,n},$

$0 < C_0 = \max C_j,\ j = 1,2,3,$ имеем: $\left|\tilde{\beta}^{\varepsilon,h}_{i-\frac{1}{2}}\right| \le \dfrac{C_0[\tilde{\delta} + h^3 + \varepsilon h]}{\varepsilon + h(K_1 + K_2 + \lambda K_3)},\ i = \overline{1,n},$

т.е. искомая оценка погрешности $\varepsilon-$регуляризированного каркаса приближенного решения уравнения ($2.4.1_1$) получена. Найдем квазиоптимальные зависимости $h(\tilde{\delta})$ и $\varepsilon(\tilde{\delta})$. Очевидно, что $\left\|\beta^{\varepsilon_{\text{к.о.с.}},h_{\text{к.о.с.}}}\right\|_{C_{h_{\text{к.о.с.}}}} = O(\tilde{\delta}^{\frac{2}{3}}),$ когда $h_{\text{к.о.с.}}(\tilde{\delta}) \approx \tilde{\delta}^{\frac{1}{3}},\ \varepsilon_{\text{к.о.с.}}(\tilde{\delta}) \approx \tilde{\delta}^{\frac{2}{3}}$.

Теорема 2.4.1. Если $\varepsilon-$регуляризируемый каркас приближенного решения уравнения ($2.4.1_1$) удовлетворяет СЛАУ (2.4.3) при $\varepsilon \to 0$, то справедлива оценка:

$$\left|\psi(s_{i-\frac{1}{2}}) - \psi^{\varepsilon(\tilde{\delta}),h(\tilde{\delta})}_{i-\frac{1}{2}}\right| = O(\tilde{\delta}^{\frac{2}{3}}),\ \text{если}\ h(\tilde{\delta}) \approx \tilde{\delta}^{\frac{1}{3}},\quad \varepsilon(\tilde{\delta}) \approx \tilde{\delta}^{\frac{2}{3}}.$$

Далее, так как по условию $z(0) = 0$ и $z(t)$ - точное решение, то с учетом (2.4.2) справедлива оценка: $\left\|z(t) - \tilde{z}^{\varepsilon,\delta}(t)\right\|_{C_n} \le d_1\delta + d_2\dfrac{\varepsilon}{\delta} \le O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}),$ где $d_1, d_2 = const$, $\delta(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 2.4.2. При условиях теоремы 2.4.1, если $\delta(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, то погрешность численного алгоритма будет порядка $O(\tilde{\delta}^{\frac{1}{3}})$.

В третьей главе изучаются многомерные обратные задачи в неограниченной области с интегральной зависимостью, где вырождается двумерное уравнение Вольтерра-Фредгольма первого рода. Регуляризируемость изучаемых задач рассматриваются в § 3.1, §3.2 в пространствах $C_n^{1,1,1}(\Omega), L_n^{\,2}(\Omega),\ \Omega = [0,X] \times R_+ \times [0,T]$.

В §3.1 рассматриваются обратные задачи в неограниченной области вида:

$$u_{xyt}(x,y,t) + a(y)u_{xt} = f(x,y,t,u,u_y), \qquad (3.1.1)$$

$$u(x,0,t) = \psi(x,t); (u_y + au)\big|_{x=0} = \varphi(y,t); (u_y + au)\big|_{t=0} = 0, \qquad (3.1.2)$$

$$u(x,y,t)\big|_{y=y_0} = g(x,t), \qquad (3.1.3)$$

где требуется найти пару функций (u,z), так как:

$$\psi \equiv G_0 z \equiv \int_0^t K(x,t,s)z(x,s)ds + \int_0^t\int_0^x H\left(x,t,s,\tau,\int_0^s z(\tau,s')ds'\right)d\tau ds,\ z(x,0) = q. \qquad (3.1.4)$$

При этом $q-const$, $f,a,\varphi,g-$известные непрерывные векторные функции, $C_n^{0,0,0,1,1}(\Omega\times R\times R)$, a,φ интегрируемы по y в R_+, кроме того $a(y)\ge\alpha>0$, $K,H:K\in C_{n\times n}^{1,1,1}(D_3),\, K_t^{(i)}(x,t,t)\equiv 0,\,(i=0,1),\, K_{ts}(x,t,t)\equiv K_0(x,t)$, $n\times n-$матричная функция $K_0(x,t)\in C_n(D_0)$ и $\lambda_i(t)-$собственные значения матрицы $K_0,(\overline{1,n})$, причем $\lambda_i(t)\ge\alpha>0$, $D_3=D_0\times\{0\le s\le t\le T\},\, H(x,t,s,\tau)\in C_n^1(D_4),\, D_4=D_3=D_0\times\{0\le\tau\le X\},H\big|_{s=t}\equiv 0, H_{\tau=x}\equiv 0.$

В §3.1.1 исследуем задачу (3.1.1)-(3.1.3) в $C_n^{1,1,1}(\Omega)$. Проведя подстановку

$$u_y+au=V+\varphi(y,t),\quad \forall(x,y,t)\in\Omega=[0,X]\times R_+\times[0,T], \tag{3.1.1.1}$$

$$x=0:\quad V(0,y,t)=0;\, t=0: V(x,y,0)+\varphi(y,0)=0; V(x,y,0)=0,\ \forall(x,y,t)\in\Omega, \tag{3.1.1.2}$$

получим

$$u(x,y,t)=\exp(-\int_{y_0}^{y}a(s)ds)\left[g(x,t)-\int_0^{y_0}exp(-\int_s^{y_0}a(s')ds')\{V(x,s,t)+\varphi(s,t)\}ds\right]+$$

$$+\int_0^y\exp(-\int_s^y a(s')ds')\ V(x,s,t)+\varphi(s,t)\ ds\equiv(AV)(x,y,t), \tag{3.1.1.5}$$

$$V=\int_0^x\int_0^t f(\eta,y,\tau,AV(\eta,y,\tau),V(\eta,y,\tau)+\varphi(y,\tau)-a\cdot(AV)(\eta,y,\tau))d\tau d\eta\equiv(Q_1V)(x,y,t), \tag{3.1.1.7}$$

где $g(x,t)=\exp(-\int_0^{y_0}a(s)ds)\psi(x,t)+\int_0^{y_0}exp(-\int_s^{y_0}a(s')ds')\{V(x,s,t)+\varphi(s,t)\}ds$,

$$\psi(x,t)=\left[g(x,t)-\int_0^{y_0}exp(-\int_s^{y_0}a(s')ds')\{V(x,s,t)+\varphi(s,t)\}ds\right]\exp(\int_0^{y_0}a(s)ds)\equiv F(x,t). \tag{*}$$

Обозначим: $L_{1f}=\sup\limits_{\Omega}\left\|f_{l_1}(x,y,t,l_1,l_2)\right\|,\, L_{2f}=\sup\limits_{\Omega}\left\|f_{l_2}(x,y,t,l_1,l_2)\right\|, L_f=\max(L_{1f},L_{2f});$

$$W_r=\{V\in C^{1,0,1}(\Omega):|V-V_0|\le r=const,\forall(x,y,t)\in\Omega\};\quad d=\sqrt{n}L_f[2N_0+1+\|a\|_c 2N_0]XT, \tag{3.1.1.8}$$

V_0 – начальное приближение. Следовательно, имеем:

Теорема 3.1.1. Если

$$d<1,\ \|Q_1V_0-V_0\|\le(1-d)r, \tag{3.1.1.9}$$

то уравнение (3.1.1.7) имеет единственное решение в $C^{1,0,1}(\Omega)$.

Далее, учитывая (*) и G_0z для построения функции $z(x,t)$, имеем

$$\int_0^t K_t(x,t,s)z(x,s)d\tau ds+\int_0^t\int_0^x H_t\left(x,t,s,\tau,\int_0^s z(\tau,s')ds'\right)d\tau ds=F_t'(x,t). \tag{3.1.1.11}$$

$$\int_0^t K_{ts}(x,t,s)\int_0^s z(x,s')ds'ds-\int_0^t\int_0^x H_t\left(x,t,s,\tau,\int_0^s z(s')ds'\right)d\tau ds=-F_t'(x,t). \tag{3.1.1.12}$$

Вводим подстановку

$$\int_0^t z(x,s)ds=\theta(x,t),\quad \theta(x,0)=0,\ K_1(x,t,s)\equiv K_{ts}(x,t,s). \tag{3.1.1.13}$$

Тогда получим

$$(G\theta)(x,t)\equiv\int_0^t K_1(x,t,s)\theta(x,s)ds-\int_0^t\int_0^x H_t(x,t,s,\tau,\theta(\tau,s))d\tau ds=-F_t'(x,t). \tag{3.1.1.14}$$

Введем систему

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(x,t)+(G\theta_\varepsilon)(x,t)\equiv -F_t'(x,t),\ \theta_\varepsilon(x,0)=0, \\ \delta z_\delta(x,t)+\int\limits_0^t z_\delta(x,s)ds=\theta_\varepsilon(x,t)+\delta z(x,0), \end{cases} \tag{3.1.1.15}$$

Заменяя $\theta_\varepsilon=\theta+\Im_\varepsilon$, где

$\Delta\equiv -\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t W(x,t,s,\varepsilon)K_0(x,s)(\theta(x,s)+\theta(x,t))ds-W_0(x,t,0,\varepsilon)\theta(x,t),$ причем

$$\|\Delta\|_{C_n}\le\left(L_\theta\cdot T_0\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\alpha^2}+L_0\cdot\sqrt{n}\cdot e^{-1}\frac{1}{\alpha}\right)\varepsilon\equiv Q_0\varepsilon;$$

$$\Im_\varepsilon(x,t)=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t W(x,t,s,\varepsilon)K_0(x,s)\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^s K_1(x,s,s')-K_1(x,s',s')\ \cdot\Im_\varepsilon(x,s')ds+\right.$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t K_1(x,t,s')-K_1(x,s',s')\ \Im_\varepsilon(x,s')ds'+\frac{1}{\varepsilon}\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^x H(x,s,s',\tau,\theta(\tau,s')+\Im_\varepsilon(\tau,s'))-$$

$$-H(x,s,s',\tau,\theta(\tau,s'))\ d\tau ds'-\frac{1}{\varepsilon}\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^x H(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s')+\Im_\varepsilon(\tau,s'))-H(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s'))\ d\tau ds'\ ds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}W(x,t,0,\varepsilon)\left\{\int\limits_0^t K_1(x,t,s')-K_1(x,s',s')\ \Im_\varepsilon(x,s')ds'-\right.$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\int\limits_0^x H(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s')+\Im_\varepsilon(\tau,s'))-H(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s'))\ d\tau ds'\ +\Delta(x,t,\varepsilon,0)\equiv(D\Im_\varepsilon)(x,t,\varepsilon).$$

имеем оценку

$$\|\Im_\varepsilon\|_{C_n}\le(1-h_0)^{-1}\cdot Q_0\cdot\varepsilon=N_0(\varepsilon). \tag{3.1.1.26}$$

Далее, с учетом $z_\delta=z+\eta_\delta$, имеем:

$$\eta_\delta(x,t)=-\frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t(W_0(x,t,s,\delta)\theta_\varepsilon(x,s)-\theta(x,s))ds+\frac{1}{\delta}(\theta_\varepsilon(x,t)-\theta(x,t))-$$
$$-W_0(x,t,0,\delta)(z(x,t)-z(x,0))-\frac{1}{\delta}\int\limits_0^t W_0(x,t,s,\delta)(z(x,t)-z(x,s))ds, \tag{3.1.1.27}$$

и оценивая, получим

$$\|\eta_\delta\|_{C_n}\le\frac{2}{\delta}\sqrt{n}N_0(\varepsilon)+2\sqrt{n}L_z\delta=N_2(\delta,\varepsilon). \tag{3.1.1.28}$$

Если $\dfrac{N_0(\varepsilon)}{\delta_\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to0,\delta\to0]{}0,$ то $z_\delta(x,t)\xrightarrow[\delta\to0]{}z(x,t),\ \forall(x,t)\in[0,X]\times[0,T].$

Отметим, что по условию функция $z(x,t)$ дифференцируема по x. Поэтому и от решения уравнения (3.1.1.12) требуем это условие, а по t функция - непрерывна.

Теорема 3.1.2. При условиях (3.1.1.26), (3.1.1.27) уравнение (3.1.1.12) регуляризируемо в $C_n^{1,0}([0,X]\times[0,T])$.

Теорема 3.1.3. Пусть имеют место условия теорем 3.1.1, 3.1.2. Тогда уравнение (3.1.1) имеет единственное решение в классе $C_n^{1,1,1}(\Omega)$. При этом решение уравнения (3.1.1) устойчиво относительно функции ψ, то есть:

$$\|u_\delta(x,0,t)-u(x,0,t)\|_C\le\sqrt{n}[M_3T+L_HXT^2]\cdot\|z_\delta-z\|_C\le Q_1N_2(\delta,\varepsilon)\xrightarrow[\delta\to0\ \varepsilon\to0]{}0,\ \forall(x,t)\in A.$$

В §3.1.2 Ищем решение в классе функций

$$M^*_{(u,z)}=\ u,z:u\in C_n(\Omega),u_x,u_y,u_t,u_{xy},u_{xt},u_{yt},u_{xyt}\in L_n^2(\Omega);\ z\in L_n^2(\Omega_0)\ .$$

Для доказательства регуляризируемости задачи (3.1.1)-(3.1.3) в $M^*_{(u,z)}$, оценивая (3.1.1.23) и (3.1.1.27) в смысле L_n^2, получим:

$$\|\theta_\varepsilon - \theta\|_{L_n^2} = \|\Im_\varepsilon\|_{L_n^2} \le 2e^{\frac{1}{2}T_3T}([\int_0^{\varepsilon^\beta}\|\theta(x,t)\|^2 dt + \|\theta(x,t)\|_{L_n^2}^2 e^{-\frac{2\alpha}{\varepsilon^{1-\beta}}}]^{\frac{1}{2}} + N[\nu_{\bar\theta}^2(\varepsilon^\beta) + 4\|\theta\|_{L_n^2}^2 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^{1-\beta}}}]^{\frac{1}{2}})\sqrt{n} = Q_2(\varepsilon), \quad (3.1.2.7)$$

$$\|z_\delta - z\|_{L_n^2} = \|\xi_\delta\|_{L_n^2} \le 4\left(\|N_1\|_{L_n^2} + \sqrt{n}\frac{1}{\delta}[1+\left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\delta}}]\cdot Q_2(\varepsilon)\right) = Q_*(\delta,\varepsilon), \quad (3.1.2.8)$$

$$\|N_1\|_{L_n^2} \le \left[\int_0^{\delta^\beta}|z(x,t)|^2 dx + \|z(x,t)\|_{L_n^2}^2 e^{-\frac{2}{\delta^{1-\beta}}}\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{n} + N\left[\nu_{\bar z}^2(\delta^\beta) + 4\|z(x,t)\|_{L_n^2}^2 e^{-\frac{1}{\delta^{1-\beta}}}\right]^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{n} = \tilde{Q}(\delta),\ N = \frac{T_0}{\sqrt{\alpha}},$$

$$N_1(z,\delta) \equiv -W_0(x,t,0,\delta)(z(x,t) - z(x,0)) - \frac{1}{\delta}\int_0^t W_0(x,t,s,\delta)(z(x,t) - z(x,s))ds,\ \frac{Q_2(\varepsilon)}{\delta^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0(\delta\to 0)]{} 0.$$

Аналогично оцениваются и функции $\theta_\varepsilon(x,t), z_\delta(x,t)$ в $L_n^2(0,T)$. Следовательно, исходные уравнения регуляризируются в пространстве $L_n^2(\Omega)$, причем

$$\|u_\delta(x,0,t) - u(x,0,t)\|_{L_n^2} \le \frac{1}{a}[K_* Q_*(\delta,\varepsilon) + L_H\frac{2}{3}T^{\frac{3}{2}}XQ_*(\delta,\varepsilon)]T^{\frac{1}{2}}, K_* = (\int_0^T\|K\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.2.9)$$

Теорема 3.1.4. При условиях (3.1.2.7)- (3.1.2.9) задача (3.1.1)-(3.1.4) регуляризируема в $M^*_{(u,z)}$.

В §3.2 изучается задача: (3.1.1)-(3.1.3), когда

$$G_0 z \equiv \int_0^t K(x,t,s)z(x,s)ds + \lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)} H\left(x,t,s,\tau,\int_0^s z(\tau,s')\right)d\tau ds, \quad (3.2.1)$$

где относительно известных данных $a(y), f, \varphi, g, K, H_0$ выполняются те же условия, которые требовалось в §3.1. Кроме того: $0 \le N_0(x) \le x \le X,\ N_0(x) \in C^1[0,X],\ z(x,0) = q = const,\ G_0 -$ оператор типа Вольтерра-Фредгольма.

Ищем решение в классе $u(x,y,t) \in C_n^{1,1,1}(\Omega), z(x,t) \in C_n^{1,0}(A)$. Также $H, f, \varphi, g - n-$ мерные векторные функции, гладкие до требуемого порядка, $K, n\times n -$ мерная матричная функция, причем $K_0(x,t)$ имеет собственные действительные значения $\lambda_i(t) \ge a > 0, (i = \overline{1,n})$.

Для изучения этой задачи воспользуемся результатами §3.1, то есть учитывая $V(x,y,t) \in C_n^{1,0,1}(\Omega)$, получим условия теоремы 3.1.1. Тогда система (3.1.1.7) разрешима в $C_n^{1,0,1}(\Omega)$.

Поэтому, с учетом (3.2.1), имеем

$$\int_0^t K_t(x,t,s)z(x,s)d\tau ds + \lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)} H_t\left(x,t,s,\tau,\int_0^s z(\tau,s')ds'\right)d\tau ds = F_t'(x,t), \quad (3.2.2)$$

или уравнение (3.2.2) приводится к виду:

$$\int_0^t K_{ts}(x,t,s)\int_0^s z(x,s')ds'ds - \lambda\int_0^T\int_0^{N_0(s)}\left(H_t(x,t,s,\tau,\int_0^s z(s')ds'\right)d\tau ds = -F_t'(x,t). \quad (3.2.3)$$

Введя подстановку (3.1.1.13), получим

$$(G_0\theta)(x,t) \equiv \int_0^t K_1(x,t,s)\theta(x,s)ds - \lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)} H_t(x,t,s,\tau,\theta(\tau,s))d\tau ds = -F_t'(x,t). \quad (3.2.5)$$

Использована полученная в § 3.1 возмущенная система вида (3.1.1.15).
Учитывая, $\theta_\varepsilon = \theta + \Im_\varepsilon,\ z_\delta = z + \xi_\delta$, получено

$$\|\Im_\varepsilon\|_{C_n} \le (1-m_0)^{-1}Q_1\varepsilon = M_2(\varepsilon); \quad \|\xi_\delta\|_{C_n} \le \frac{2\sqrt{n}M_2(\varepsilon)}{\delta} + 2L_z\sqrt{n}\delta = Q_0(\varepsilon,\delta),\ L_z > 0,$$

где $\|\Delta\|_{C_n} \le (L_0T_0\sqrt{n}\frac{1}{\alpha^2} + L_0\sqrt{n}\frac{1}{\alpha}e^{-1})\varepsilon \equiv Q_1\varepsilon,$

$$\xi_\delta(x,t) = -\frac{1}{\delta^2}\int_0^T W_0(x,t,s,\delta)(\theta_\varepsilon(x,s)-\theta(x,s))ds + \frac{1}{\delta}(\theta_\varepsilon(x,t)-\theta(x,t)) - W_0(x,t,0,\delta)\times$$

$\times(z(x,t)-z(x,0) - \frac{1}{\delta}\int_0^t W_0(x,t,s,\delta)(z(x,t)-z(x,s))ds.$ Отсюда видно, что

$\Im_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \xi_\delta(x,t) \xrightarrow[\delta\to 0,\varepsilon\to 0]{} 0, \forall (x,t)\in A$. Следовательно: $(\theta_\varepsilon, z_\delta) \xrightarrow[\varepsilon\to 0(\delta\to 0)]{} (\theta; z), \forall (x,t)\in A.$

Теорема 3.2.1. При условиях исходной задачи (3.1.1)-(3.1.3), (3.2.1) и условиях теоремы 3.1.3 существует единственная функция $u(x,y,t)\in C_n^{1,1,1}(\Omega)$, причем

$$\|u_\delta(x,0,t)-u(x,0,t)\|_{C_n} \le r_1\left[M_3T + |\lambda|L_HT^2\cdot\|N_0(x)\|_{C_n}\right]\cdot Q_0(\varepsilon,\delta).$$

В **§3.3** исследуется уравнение Вольтерра-Фредгольма первого рода.

$$\int_0^t K(x,t,s)z(x,s)ds + \lambda\int_0^T\int_0^x H(x,t,s,\tau)(\int_0^s z(\tau,s')ds')d\tau ds = f(x,t),\ 0<\lambda, \tag{3.3.1}$$

$$\begin{cases} L_1\psi \equiv \int_0^t K^0(x,s)\psi(x,s)ds + \int_0^t N^0(x,t,s)\psi(x,s)ds + \lambda\int_0^T\int_0^x H(x,t,s,\tau)\psi(\tau,s)d\tau ds = f(x,t), \\ L_2z \equiv \int_0^t z(x,s)ds = \psi(x,t),\ z(x,0)=0,\quad \psi(x,0)=0, \forall (x,t)\in D_0 = [0,1]\times[0,1], \end{cases} \tag{3.3.1$_1$}$$

где $N^0 \equiv -K_s(x,t,s) - K_s(x,s,s), K_0(x,s) \equiv -K_s(x,s,s),$ с учетом (a_2). Используя малые параметры и формулу средних прямоугольников, введем системный алгоритм вида:

$$\begin{cases} \varepsilon\psi_{i_2-\frac12,i_1-\frac12} + h_1\sum_{j_1=1}^{i_1-1}K^0_{i_2,j_1-\frac12}\psi_{i_2,j_1-\frac12} + h_1\sum_{j_1=1}^{i_1-1}N^0_{i_2,i_1,j_1-\frac12}\psi_{i_2,j_1-\frac12} + \lambda h_1h_2\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{i_2}H_{i_2,i_1,j_1-\frac12,j_2-\frac12}\psi_{j_2-\frac12,j_1-\frac12} = f_{\tilde\delta i_2,i_1}, \\ x_{k,i_k} = i_kh_k, t_{ki-\frac12} = (i_k-\frac12)h_k,\ i_k = \overline{1,N_k}, h_kN_k = T_k, k=1,2,\ |h| = h_1+h_2,\ f_{\tilde\delta i_2,i_1} = f_{\tilde\delta i_2,i_1}(x_{1i_2},x_{2i_1}), \quad (3.3.2_1) \\ \delta z_{i_2,i_1} + h_1\sum_{j_1=1}^{i_1-1}z_{i_2,j_1-\frac12} = \psi_{\varepsilon,i_2,i_1}, (x_1=x, x_2=t, x_3=s, x_4=\tau). \quad (3.3.2_2) \end{cases}$$

При этом

$$\left\{\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{i_2-\frac12,i_1-\frac12}\right\} = \left\{\psi_{i_2-\frac12,i_1-\frac12} - \tilde\psi^{\alpha,\varepsilon}_{i_2-\frac12,i_1-\frac12}\right\},\quad i_k = \overline{1,N_k}, k=\overline{1,2},$$

где

$$\varepsilon\psi_{i_2-\frac12,i_1-\frac12} + h_1\sum_{j_1=1}^{i_1-1}K^0_{i_2,j_1-\frac12}\psi_{i_2,j_1-\frac12} + h_2\sum_{j_1=1}^{i_1-1}N^0_{i_2,i_1,j_1-\frac12}\psi_{i_2,j_1-\frac12} +$$

$$+\lambda h_1h_2\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{i_2}H_{i_2,i_1,j_1-\frac12,j_2-\frac12}\psi_{j_2-\frac12,j_1-\frac12} = f_{i_2,i_1} - r_{i_1,i_2} + \varepsilon\psi_{i_2-\frac12,i_1-\frac12}; i_k = \overline{1,N_k}, k=1,2.$$

Следовательно: $\left|\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{i-\frac12,i_2-\frac12}\right| \le \frac{C_0[\tilde\delta + h^3 + \varepsilon h_1]}{\varepsilon + h_1(K_1+K_2) + \lambda h_1h_2K_3}$. Поэтому имеем

$$h_{\text{к.о.с.}}(\tilde\delta) \approx \tilde\delta^{\frac13},\quad \varepsilon_{\text{к.о.с.}}(\tilde\delta) \approx \tilde\delta^{\frac23},\quad \left\|\tilde\beta^{\varepsilon_{\text{к.о.с.}}h_{\text{к.о.с.}}}\right\|_{C_{h_{\text{к.о.с.}}}} = O(\tilde\delta^{\frac23}). \tag{3.3.20}$$

Теорема 3.3.1. При условии (3.3.20) справедлива оценка для ε – регуляризируемого каркаса приближенного решения уравнения ($3.3.1_1$) и удовлетворяет СЛАУ ($3.3.2_1$) при $\varepsilon \to 0$:

$$\left| \tilde{\psi}_{i_1-\frac{1}{2}, i_2-\frac{1}{2}} - \tilde{\psi}^{\varepsilon(\tilde{\delta}), h(\tilde{\delta})}_{i_1-\frac{1}{2}, i_2-\frac{1}{2}} \right| = O(\tilde{\delta}^{\frac{2}{3}}), \quad i_k = \overline{1, N_k},\ k = \overline{1,2}, \text{ если } h(\tilde{\delta}) \approx \tilde{\delta}^{\frac{1}{3}}, \quad \varepsilon(\tilde{\delta}) = \tilde{\delta}^{\frac{2}{3}}. \quad (3.3.21)$$

Далее, учитывая оценку (3.3.21) и ($3.3.2_2$), имеем

$$\left\| z(x,t) - \tilde{z}^{\delta\varepsilon}(x,t) \right\|_{C_n} \le d_1\delta + d_2 \frac{\varepsilon}{\delta} \le O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \text{ где } d_1, d_2 = \text{const},\ \delta(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3.3.2. При условиях теоремы 3.3.1 если $\delta(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, то допускаемая погрешность численного алгоритма будет порядка $O(\tilde{\delta}^{\frac{1}{3}})$.

ВЫВОДЫ

В работе системным методом регуляризации установлены достаточные условия разрешимости уравнений Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма первого рода в пространствах с равномерной и неравномерной метрикой. Этот метод позволил доказать регуляризируемость обратно-нелокальных задач для уравнений гиперболического типа в неограниченной области.

Обоснован численный алгоритм приближенного вычисления задач. Построенные разностные (сеточные) аналоги схемы являются устойчивыми и позволяют производить вычисления приближенных решений исследуемых задач.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Омурову Таалайбеку Дардайыловичу за ценные советы, способствовавшие успешному завершению работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Рыспаев, А.О. Обратно-нелокальные задачи типа Бицадзе-Самарского для уравнения параболического типа [Текст]/Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев. //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 35. – С.173-177.
2. Рыспаев, А.О. Обратные задачи типа Бона-Махони в неограниченной области [Текст] /Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2009. Вып. 41. – С.111-115.
3. Рыспаев, А.О. Многомерные обратные задачи в неограниченной области [Текст] /Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев, А.К. Айдарбекова. //Вестник КНУ им.Ж.Баласагына. - 2010. Серия 3. Естественно-технические науки, - Вып. 4. – С.28-36.
4. Рыспаев, А.О. Численно-системный алгоритм решения уравнения Вольтерра-Фредгольма I рода [Текст] /Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев, У.Б. Чаначев //Поиск. научный журнал МОиН РК, серия естественных и технических наук, №3, Алматы, 2010. – С.142-147.
5. Рыспаев А.О. Численный алгоритм решения уравнения Вольтерра I рода [Текст] /Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев. // Известия Вузов. 2010. - №4. – С.12-16.
6. Рыспаев, А.О. Обратные задачи для гиперболических уравнений, вырождающихся в уравнениях Вольтера третьего рода[Текст]/ Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев, Т.Ж. Мудунов // Труды ИВМиМГ СОРАН, Новосибирск, 2008. Вып. 8. – С.94-101.

7. Рыспаев, А. О. Обратная задача для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа [Текст]/ А.О. Рыспаев, А.М. Алыбаев. //Вестник КНУ. 2005. Труды ЦИСТУ. Сер. 6. Вып. 5. – С.120-125.
8. Рыспаев А.О. Решение обратной задачи для уравнений гиперболического типа в неограниченной области [Текст] /А.О. Рыспаев. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2009. Вып. 40 – С.205-209.
9. Рыспаев А.О. Двумерные интегральные уравнения Вольтерра-Фредгольма I рода [Текст] /А.О. Рыспаев. //Наука и новые технологии. 2010. - №4. - С.16-19.
10. Рыспаев А.О., Метод регуляризации двумерных интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма первого рода [www.nakkr.kg]/ А.О. Рыспаев.// Интернет журнал, №1, 2011.

РЕЗЮМЕ

Рыспаев Амантур Орозалиевич

«Биринчи түрдөгү Вольтерра жана Вольтерра-Фредгольм теңдемелерине келтирилүүчү тескери маселелерди чыгаруу» диссертациясы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн сунушталган.

Урунттуу сөздөр: регулярдаштыруу, Вольтерра жана Вольтерра-Фредгольм теңдемеси, тескери маселе, локалдуу эмес тескери маселе, айрымдуу схема, квадратуралык формула, системдүү регулярдаштыруу ыкма, сандык ыкма, сандык алгоритм, сандык системалуу алгоритм, корректүү эмес маселе.

Диссертациялык иште гиперболалык типтеги дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери локалдык эмес маселелер изилденген. Дал келген биринчи түрдөгү Вольтерра жана Вольтерра-Фредгольм интегралдык теңдемелери кубулат. Каралган маселелердин чыгарылымдуулугунун жетиштүү шарттарын көрсөтүүдө бир тектүү жана бир тектүү эмес ченеминдеги мейкиндиктерде системалык-регулярдаштыруу ыкма иштелип чыккан.

Системалык регулярдаштыруу ыкмасынын негизинде маселенин чыгарылыштарынын изилденишине сандык ыкма киргизилген жана жакындаштырылган чыгарылыштан так чыгарылышты баалоону талдоого мүмкүнчүлүк түзүлгөн. Жүргүзүлгөн сандык эксперименттер тургузулган айырымдуу (торчолук) схеманын аналогдордун туруктуулугун көрсөттү.

РЕЗЮМЕ

Рыспаева Амантура Орозалиевича

Диссертация «Решение обратных задач, сводящихся к уравнениям Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма первого рода» представлена на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: регуляризация, уравнение Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма, обратная задача, обратно-нелокальная задача, разностные схемы, квадратурная формула, системный метод регуляризации, численный метод, численный алгоритм, численно-системный алгоритм, некорректная задача.

В диссертационной работе, исследованы некорректные и корректные дифференциальные уравнение в частных производных гиперболического типа, где вырождаются соответствующие уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма I рода.

Разработаны системно-регуляризационные методы для доказательства достаточных условий разрешимости изучаемых задач.

На основе метода системной регуляризации построены численные алгоритмы, позволяющие провести анализ оценки отклонения приближенного решения от точного. Проведенные численные эксперименты установили, что построенные разностные (сеточные) аналоги схемы являются устойчивыми.

Resume

of Ryspaev Amantur Orozalievich

The dissertation "Solving of inverse problems, reducible to the Volterra and Volterra - Fredholm first kind equations" presented at the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences in specialty 01.01.02 for Differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: regularization, Volterra and Volterra-Fredholm equations, inverse problem, inverse-nonlocal problem, difference schemes, the quadrature formula, systematic method of regularization, numerical method, numerical algorithm, numerical systematic algorithm, ill-posed problem.

In this thesis inverse-nonlocal problems for equation of hyperbolic type are studied, where corresponding Volterra and Volterra-Fredholm first kind equation are degenerate. The system defined regularization methods for proof of sufficient conditions for the solvability of the studied problems in spaces with uniform and non-uniform metric developed.

Based on the systematic regularization defined the numerical algorithms which allow to provide the estimated deviation analysis of the approximate solutions from exact. The numerical experiments have established that the construction of difference (network) analogs of the scheme are stable, effectively implemented, and allow us to perform calculations of the approximate solutions of the problem.