ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Ж. БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д.01.12.001

На правах рукописи

УДК 517.9

Матанова Калыскан Базарбаевна

Обратные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Бишкек - 2012

Работа выполнена на кафедре Информатики Ошского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Асанов А.**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, с.н.с. **Байзаков А.Б.**, кандидат физико-математических наук **Эгембердиев Ш.А.**
Ведущая организация	Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б.Н. Ельцина, 720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44

Защита состоится 24 апреля 2012 года в 14.00 часов на заседании Диссертационного Совета Д.01.12.001 по защите диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж.Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан «____»_______________2012 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета, доктор физико-математических наук, с.н.с. Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Как известно, одним из эффективных способов изучения процессов, протекающих в окружающем нас мире математическими методами является моделирование этих процессов в виде дифференциальных уравнений. Значительное число задач естественно-научных исследований приводят к изучению различных типов начально-краевых, прямых и обратных задач для уравнений в частных производных.

В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, использованием криогенных жидкостей в технике и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики неоднородных, и в частности, стратифицированных жидкостей, которые приводят к начально-краевым задачам для уравнений четвертого порядка с частными производными.

Возросший в последние годы интерес к уравнениям со смешанными производными, и в частности к псевдопараболическому уравнению объясняется, с одной стороны, потребностями механики, других прикладных дисциплин, с другой, потребностями собственно математической науки. Известно, что решение многих практически важных задач, возникающих при исследовании процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах, переноса влаги, тепла и солей в пористых средах и др. связано с необходимостью исследования краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего и более высокого порядков.

Широкие классы краевых и начально-краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего и четвертого порядка исследованы М.Х. Шхануковым, Н.И. Бакиевичем, Э.Р. Атамановым, О.Ш. Мамаюсуповым, С.П. Шишатским, В.А. Водаховой, Б.С. Аблабековым, В.И. Жегаловым, Е.А. Уткиной, И.Г. Мамедовым, С.А. Габовым, А.Г. Свешниковым и др. Краевые и начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа рассмотрены в работах А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, М.И. Иманалиева, А.Б. Байзакова, Е.А. Уткиной, Т.Д Джураева, А.С. Сопуева и его учеников: Т.Д. Асылбекова, А.Б. Осмоналиева и А.З. Пирматова.

Обычно в основе получаемых дифференциальных уравнений лежат физические законы, которые позволяют сформулировать общий вид дифференциальных соотношений. Как правило, в них присутствует некоторое число произвольных функций, определяющие свойства физической среды. Если свойства среды известны, то дифференциальное уравнение в сочетании с краевыми и начальными условиями позволяет предсказать развитие физического явления в пространственно-временной области. В теории обратных задач подобные задачи называются «прямыми».

В современном естествознании часто возникают следующие обратные задачи: известен общий вид дифференциального уравнения, но характеристические свойства среды неизвестны, их требуется определить по наблюдаемым решениям дифференциального уравнения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. К настоящему времени теория обратных краевых задач находит приложение в таких областях науки, как аэродинамика, гидродинамика, теория фильтрации, теория взрыва, сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, компьютерная томография, контроль качества промышленных изделий и т.д., что ставит обратные задачи в ряд актуальных проблем современной математики.

Обратные задачи для псевдопараболических уравнений возникают, например, при определении фильтрационных параметров грунтов по некоторой информации о решении уравнения фильтрации. Подобная информация может быть получена в результате наблюдения за режимом эксплуатации нефтяных месторождений или фильтрацией грунтовых вод, а также проведении специально организованных экспериментов.

Исследования по обратным задачам для дифференциальных уравнений четвертого и более высокого порядков велись в следующих работах.

Б.С. Аблабеков методом интегральных уравнений доказал однозначную разрешимость обратной задачи восстановления правой части (компоненты $f(x)$) уравнения Буссинеска-Лява для одномерного случая $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx} - u) + u_{xx} = f(x)$ и многомерного случая $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u - u) + \Delta u = f(x)h(x,t) + g(x,t)$.

Г.А. Кириллова, А.И. Кожанов рассмотрели обратную задачу для параболического уравнения четвертого порядка

$$u_t(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + \lambda u(x,t) + q(x)u(x,t) = f(x,t),\ u(x,0) = 0$$

с неизвестным коэффициентом $q(x)$. Более общая обратная задача для уравнения $u_t(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + \lambda u(x,t) + c(x,t)q(x)u(x,t) = f(x,t)$ была рассмотрена Л.Ф. Борисовой.

А.С. Сопуев обратную задачу для гиперболического уравнения высокого порядка $\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^n \partial y} + \alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + \sum_{k=0}^{n} a_k(x,y)\frac{\partial^{n-k}u}{\partial x^{n-k}} = f(x,y)w(x)$ с неизвестным источником $w(x)$ с помощью функции Римана свел к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Г.К. Намазов и Я.Т. Мегралиев с помощью метода Фурье доказали теоремы существования и единственности решений задачи об определении неизвестного коэффициента и свободного члена дифференциального псевдопараболического уравнения высокого порядка только со старшими производными по обеим переменным с несамосопряженными краевыми условиями и коэффициентной нелокальной обратной задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с интегральным граничным условием.

Т.Д. Асылбеков, М.К. Чамашев рассмотрели уравнение вида

$$u_{xxxy} + \alpha(x,y)u_{xxy} + \beta_1(x,y)u_{xx} + \beta_2(x,y)u_{xy} + \gamma_1(x,y)u_x + \gamma_2(x)u_y + h(x,y)u = f(x,y),$$

где искомыми функциями являются $\gamma_2(x)$ и $u(x,y)$, и методом функции Римана доказали существование единственного решения.

Как видно, обратные задачи для псевдопараболических уравнений четвертого порядка не были исследованы, кроме последних двух работ. Следует отметить, что ранее не изучались интегро-дифференциальные псевдопараболические уравнения указанного порядка, которые исследованы в настоящей работе.

Связь с государственными программами. Работа по теме диссертации выполнялась в связи с проектами Института теоретической и прикладной математики НАН КР «Разработка методов решений интегральных уравнений математической физики и их приложения» (2005-2007) № гос. регистрации 0003849, «Методы решения некорректных задач математической физики и анализа» (2008-2010) № гос. регистрации 0005169, «Методы решения обратных задач и интегральных уравнений» (2011-2013) № гос. регистрации 0006226. Результаты включены в отчеты по проектам.

Цель работы. Найти условия существования и единственности решений обратных задач для линейных и нелинейных дифференциальных, интегро-дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка.

Методика исследования. В работе использованы следующие методы: метод интегральных уравнений, метод функции Грина, метод сжимающих отображений.

Научная новизна работы. Основные научные результаты:

1. Найдены достаточные условия существования и единственности решения задачи об источнике для линейного дифференциального псевдопараболического уравнения четвертого порядка.
2. Найдены достаточные условия существования и единственности решения коэффициентной обратной задачи для билинейного и нелинейного дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка.
3. Найдены достаточные условия существования и единственности решения задач восстановления ядер интегро-дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка. Получена оценка устойчивости решения.
4. Найдены достаточные условия существования и единственности решения задач восстановления ядер и правых частей интегро-дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка.
5. Найдены достаточные условия существования и единственности решения задачи восстановления ядер и коэффициентов для интегро-дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка.
6. Найдены достаточные условия существования и единственности решения задачи восстановления нелинейного ядра интегро-дифференциального псевдопараболического уравнений четвертого порядка.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер. Развитые в ней методы могут быть использованы для решения других классов обратных задач, а также при решении прикладных задач, приводящихся к рассмотренным уравнениям.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту. Установлены достаточные условия:

– существования и единственности решения задачи об источнике для линейного дифференциального псевдопараболического уравнения четвертого порядка;

- существования и единственности решения коэффициентных обратных задач для нелинейных дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка;
- существования и единственности решения коэффициентных обратных задач для интегро-дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка;
- существования и единственности решения задачи восстановления ядер и правой части интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения четвертого порядка;
- существования и единственности решения задачи восстановления нелинейного ядра интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения четвертого порядка.

Личный вклад соискателя. Постановка задач и обсуждение полученных результатов проводились при непосредственном участии научного руководителя – д.ф.-м.н., профессора А. Асанова. Сами результаты получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Результаты работы докладывались и обсуждались на: семинарах кафедры математики факультета естественных наук Кыргызско-Турецкого университета «Манас» (2006-2011), международной научно-практической конференции «Непрерывное образование в новом информационном пространстве» (Бишкек, 2001); международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (Бишкек, 2001); международной научно-теоретической конференции «Проблемы образования, науки и культуры в начале 21 века» (Ош, 2001); XIII Байкальской международной школе-семинаре «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск-Северобайкальск, 2005); 12-ой межвузовской конференции по математике, механике и информатике (Алматы, 2008); Международной юбилейной научной конференции, посвященной 15-летию образования КРСУ "Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений" (Бишкек, 2008); III конгрессе всемирного математического общества тюркоязычных стран (Алматы, 2009); IV конгрессе всемирного математического общества тюркоязычных стран (Баку, 2011), IV международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (Бишкек, 2011).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в статьях [1-11] и в четырех тезисах докладов [12-15], приведенных в конце автореферата. В совместных работах с А. Асановым [2, 4-7] постановки задачи принадлежат ему, а результаты - автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из списка используемых обозначений и определений, введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения, списка использованных источников из 88 названий и приложения - вывода явного выражения функции Грина $G(x,\xi)$ для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. (Во всей работе в обозначении $G'''_{xxx}(x,\xi)$ принимается $x \neq \xi$.) Работа изложена на 111 страницах текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано обоснование тематики и общая характеристика работы. Работа состоит из трех глав. Начиная со второй главы, в постановках задач задаются постоянные $a_0 \neq 0$, a_1, α_1, α_2, α_3, рассматривается прямоугольная область $G=\{(t,x)\colon \ 0\le t\le T,\ 0\le x\le 1\}$, $T\in R$, $T>0$, для функции $u(t,x)$ определен дифференциальный оператор $Au=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\alpha_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha_2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha_3 u$.

В первой главе приведены определение и свойства функции Грина, нужные для дальнейшего, и дается краткий обзор литературы по обратным задачам для псевдопараболических уравнений менее четвертого порядка и уравнений с частными производными четвертого порядка.

Вторая глава посвящена исследованию обратных задач для линейных и нелинейных дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка. Параграф 2.1 изложим более подробно, а в остальных параграфах данной главы ограничимся изложением постановок задач и полученных результатов.

В §2.1 рассматривается задача об источнике для линейного дифференциального псевдопараболического уравнения. Требуется найти функции $u(t,x)\in C^{1,3}(G)$ и $\varphi_i(t)\in C[0,T]$ $(i=1..n)$, удовлетворяющие уравнению

$$\begin{gathered} u_t(t,x)=a_0(Au)_t(t,x)+a_1(Au)(t,x)+b_0(t,x)\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}+b_1(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+ \\ +b_2(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+b_3(t,x)u(t,x)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)f_i(t,x)+F(t,x),\quad \forall (t,x)\in G \end{gathered} \tag{1}$$

начальному и краевым условиям

$$u(0,x)=u_0(x), \qquad x\in[0,1], \tag{2}$$

$$u(t,0)=u(t,1)=u_x(t,0)=0,\ t\in[0,T], \tag{3}$$

по следам решения

$$u(t,x_i)=g_i(t),\ i=1..n,\ t\in[0,T], 0<x_1<x_2<\ldots<x_n<1, \tag{4}$$

где $b_0(t,x)$, $b_1(t,x)$, $b_2(t,x)$, $b_3(t,x)$, $f_i(t,x)$, $F(t,x)\in C(G)$, $u_0(x)\in C^3[0,1]$, $g_i(t)\in C^1[0,T]$, выполняются условия согласования

$$u_0(0)=u_0(1)=u_0'(0)=0,\ g_i(0)=u_0(x_i),\quad i=1..n. \tag{5}$$

Вводя новую неизвестную функцию $v(t,x)=u_t(t,x)$, используя перестановочность операторов A и интегрального по переменной t, уравнение (1) и краевые условия (3) запишем в виде

$$Av=-\frac{a_1}{a_0}\int_0^t Av(s,x)ds+\frac{1}{a_0}v-\frac{a_1}{a_0}Au_0(x)-\frac{1}{a_0}\int_0^t\left\{\frac{\partial^3 v(s,x)}{\partial x^3}b_0(t,x)+\frac{\partial^2 v(s,x)}{\partial x^2}b_1(t,x)+\right.$$

$$+\frac{\partial v(s,x)}{\partial x}b_2(t,x)+v(s,x)b_3(t,x)\Big\}ds-\frac{1}{a_0}\left(\frac{d^3u_0(x)}{dx^3}b_0(t,x)+\frac{d^2u_0(x)}{dx^2}b_1(t,x)+\right.$$

$$\left.+\frac{du_0(x)}{dx}b_2(t,x)+u_0(x)b_3(t,x)\right)-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)f_i(t,x)-\frac{1}{a_0}F(t,x), \tag{6}$$

$$v(t,0)=v(t,1)=v_x(t,0)=0. \tag{7}$$

Применяя к (6) резольвенту $R(t,s)=-\frac{a_1}{a_0}\exp\left(-\frac{a_1}{a_0}(t-s)\right)$ ядра-константы $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$ и используя формулу Дирихле перестановки порядка интегрирования, получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка относительно $v(t,x)$ с краевыми условиями (7). С применением функции Грина, получим

$$v(t,x)+\sum_{i=1}^{n}P_i(t,x)\varphi_i(t)=\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)\,\{r_3(s,t,\xi)v(s,\xi)+r_2(s,t,\xi)v_1(s,\xi)+$$

$$+r_1(s,t,\xi)v_2(s,\xi)+r_0(s,t,\xi)v_3(s,\xi)\}\,d\xi ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_i(s,t,x)\varphi_i(s)ds+F_2(t,x), \tag{8}$$

$$r_0(s,t,\xi)=-\frac{1}{a_0}\left[b_0(t,\xi)+\int_s^t R(t,\tau)b_0(\tau,\xi)d\tau\right],\qquad r_1(s,t,\xi)=-\frac{1}{a_0}\left[b_1(t,\xi)+\int_s^t R(t,\tau)b_1(\tau,\xi)d\tau\right],$$

$$r_2(s,t,\xi)=-\frac{1}{a_0}\left[b_2(t,\xi)+\int_s^t R(t,\tau)b_2(\tau,\xi)d\tau\right],\ r_3(s,t,\xi)=\frac{1}{a_0}\left[R(t,s)-b_3(t,\xi)-\int_s^t R(t,\tau)b_3(\tau,\xi)d\tau\right],$$

$$K_i(s,t,x)=-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)R(t,s)f_i(s,\xi)d\xi,\quad P_i(t,x)=\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)f_i(t,\xi)d\xi,\ i=1..n,$$

$$F_2(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)F_1(t,\xi)d\xi,\ F_1(t,x)=-\frac{a_1}{a_0}Au_0(x)-\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{4}\frac{d^{3-i}u_0(x)}{dx^{3-i}}b_i(t,x)-\frac{a_1}{a_0}\int_0^t R(t,s)Au_0(x)ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}F(t,x)-\frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,s)\left(\sum_{i=0}^{4}\frac{d^{3-i}u_0(x)}{dx^{3-i}}b_i(s,x)+F(s,x)\right)ds,\ v_j(t,x)=\frac{\partial^j v(t,x)}{\partial x^j},\quad j=1..3.$$

Дифференцируя (8) по x три раза и используя (4), получим:

$$P(t,x)y(t,x)=\int_0^t\int_0^1 B(s,t,\xi,x)y(s,\xi)d\xi ds+\int_0^t C(s,t,x)y(s,x)ds+D(t,x), \tag{9}$$

где $y(t,x)=colon\,(v(t,x),v_1(t,x),v_2(t,x),v_3(t,x),\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$, $P(t,x)=\begin{pmatrix}E_{4\times4} & P_{12}\\ 0_{n\times4} & P_{22}\end{pmatrix}$,

$P_{12}=\left(\frac{\partial^i P_j(t,x)}{\partial x^i}\right)$, $i=0..3$, $j=1..n$, $P_{22}=(P_j(t,x_i))$, $i=1..n$, $j=1..n$,

$B(s,t,\xi,x)=\begin{pmatrix}G_{11} & 0_{4\times n}\\ G_{21} & 0_{n\times n}\end{pmatrix}$, $G_{11}=\left(\frac{\partial^i G(x,\xi)}{\partial x^i}r_{3-j}(s,t,\xi)\right)$, $i=0..3$, $j=0..3$,

$G_{21}=(G(x_i,\xi)r_{3-j}(s,t,\xi))$, $i=1..n$, $j=0..3$,

$C(s,t,x)=\begin{pmatrix} 0_{3\times4} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \\ 0_{n\times4} & K_{32} \end{pmatrix}$, $K_{12}=\left(\dfrac{\partial^i K_j(s,t,x)}{\partial x^i}\right)$, $i=0..2$, $j=1..n$, $K_{21}=\left(K_{3-j}(s,t,x)\right)$,

$j=0..3$, $K_{22}=\left(\dfrac{\partial^3 K_i(s,t,x)}{\partial x^3}\right)$, $i=1..n$, $K_{32}=\left(K_j(s,t,x_i)\right)$, $i=1..n$, $j=1..n$,

$D(t,x)=colon\left(F_2(t,x),\, F'_{2x}(t,x),\, F''_{2xx}(t,x),\, F'''_{2xxx}(t,x),\, F_2(t,x_1)-g'_1(t), \ldots, F_2(t,x_n)-g'_n(t)\right)$.

Теорема 2.1.1. Пусть выполняются: 1) условия, наложенные на заданные функции; 2) $\det P(t,x)\neq 0$ $\forall(t,x)\in G$. Тогда обратная задача (1)-(4) имеет единственное решение $\left(u(t,x), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right)$ в пространстве $C^{1,3}(G)\times C_n[0,T]$ (уравнение (9) эквивалентно системе линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода).

Пример 2.1.1. Пусть $a_0=1$, $a_1=0$, $b_0=b_1=b_2=b_3=0$, $n=1$, $f_1(t,x)=t+1$, $F(t,x)=2tx$, $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\alpha_3=1$, $u_0(x)=x^3-x^2$, $x_1=\dfrac{1}{2}$, $g_1(t)=t-\dfrac{1}{8}$. Тогда задача примет вид: $u_t=u_{xxxt}+u_t+(t+1)\varphi_1(t)+2tx$, $u(t,0)=u(t,1)=u_x(t,0)=0$, $u(0,x)=x^3-x^2$, $u\left(t,\dfrac{1}{2}\right)=t-\dfrac{1}{8}$. Здесь выполнено условие 1) теоремы 2.1.1. Для этого случая функция Грина имеет вид

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{\xi^2}{2}-x\xi-x^2\left(\dfrac{\xi^2}{2}-\xi\right), & 0\le\xi\le x\le 1,\\ -x^2\left(\dfrac{\xi^2}{2}-\xi+\dfrac{1}{2}\right), & 0\le x\le\xi\le 1. \end{cases}$$

Тогда $P(t,x)=\begin{pmatrix} 1 & P_1(t,x) \\ 0 & P_1(t,x_1) \end{pmatrix}$, $P_1(t,x)=(t+1)\int\limits_0^1 G(x,\xi)d\xi=\dfrac{1}{6}(t+1)(x^3-x^2)$,

$\det P(t,x)=P_1(t,x_1)=-\dfrac{t+1}{48}\neq 0$ для $\forall(t,x)\in G$. Тем самым, для рассматриваемого примера выполняются все условия теоремы 2.1.1 и решение задачи существует и принадлежит пространству $C^{1,3}(G)\times C[0,T]$. Таким решением будет $u(t,x)=x^3-x^2+8x^3t+\dfrac{x^3t^2}{48}-\dfrac{t^2x^4}{24}$, $\varphi_1(t)=-\dfrac{t+192}{4(t+1)}$.

Построены также пример, где для $\det P(t,x)$ получается достаточно сложное выражение и условие 2) теоремы 2.1.1 доказывается с помощью доказательных вычислений, и пример, показывающий существенность этого условия.

В §2.2 исследована обратная коэффициентная задача для билинейного дифференциального псевдопараболического уравнения

$$u_t(t,x)=a_0(Au)_t+a_1(Au)+\sum_{i=0}^{3}b_i(t,x)\frac{\partial^{3-i}u}{\partial x^{3-i}}+a(t,x)\lambda(t)u(t,x)+f(t,x), \qquad (10)$$

с условиями (2), (3) и условиями согласования

$$u_0(0)=u_0(1)=u_0'(0)=0\,,\ g(0)=u_0(x_0)\,. \qquad (11)$$

Требуется найти функции $u(t,x)\in C^{1,3}(G)$ и $\lambda(t)\in C[0,T]$ по следу решения

$$u(t,x_0)=g(t)\,,\quad 0<x_0<1,\quad t\in[0,T]\,. \qquad (12)$$

С введением новой неизвестной функции $u_t(t,x)=v(t,x)$, обратная задача методом интегральных уравнений, эквивалентных преобразований и функции Грина сведена к системе из пяти нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода вида $y=Sy$ с неизвестным вектором $y=colon(v,\partial v/\partial x,\partial^2 v/\partial x^2,\partial^3 v/\partial x^3,\lambda)$. Введено банахово пространство $X=C_4(G)\times C[0,\mathrm{T}]$ с нормой $\|y\|=\|v(t,x)\|_{C(G)}+\|\partial v(t,x)/\partial x\|_{C(G)}+\left\|\partial^2 v(t,x)/\partial x^2\right\|_{C(G)}+$ $+\left\|\partial^3 v(t,x)/\partial x^3\right\|_{C(G)}+\|\lambda(t)\|_{C[0,T]}$. Показано, что для достаточно малых T отображение S переводит некоторый шар в X в себя и является сжимающим:

Теорема 2.2.1. Пусть: 1) $b_i(t,x)\in C(G)$, $i=0..3$, $f(t,x)\in C(G)$, $u_0(x)\in C^3[0,1]$, $g(t)\in C^1[0,T]$; 2) $\int_0^1 G(x_0,\xi)a(t,\xi)u_0(\xi)d\xi\neq 0$. Тогда для достаточно малых T решение обратной задачи (10), (2), (3), (12) существует в пространстве $C^{1,3}(G)\times C[0,T]$, в некотором шаре этого пространства оно единственно.

В §2.3 рассмотрена обратная коэффициентная задача для нелинейного дифференциального уравнения

$$u_t(t,x)=a_0(Au)_t+a_1(Au)+\sum_{i=0}^{3}b_i(t,x)\frac{\partial^{3-i}u}{\partial x^{3-i}}+F(t,x,u)\lambda(t)+f(t,x), \qquad (13)$$

с условиями (2), (3), (11) и неизвестными функциями $u(t,x)$ и $\lambda(t)$ по дополнительной информации (12). Доказана

Теорема 2.3.1. Если выполнено условие 1) теоремы 2.2.1, функция $F(t,x,u)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной u с коэффициентом L и $\int_0^1 G(x_0,\xi)F(t,\xi,u_0(\xi))d\xi\neq 0$, то для достаточно малых T решение обратной задачи (13), (2), (3), (12) существует в пространстве $C^{1,3}(G)\times C[0,T]$, в некотором шаре этого пространства оно единственно.

В третьей главе исследованы обратные задачи для интегро-дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка с неизвестными коэффициентами и с неизвестной правой частью. Параграф 3.1 изложим более подробно, в остальных параграфах ограничимся постановкой задач и формулировкой доказанных теорем.

В §3.1 исследована задача восстановления ядра для интегро-дифференциального уравнения

$$u_t(t,x)=a_0(Au)_t+a_1(Au)+b(t,x)u+\int_0^t K(t-s)u(s,x)ds+f(t,x)\,, \qquad (14)$$

с начальным условием (2) и краевыми условиями

$$u(t,0)=u_x(t,0)=u_x(t,1)=0\,, \qquad (15)$$

выполняются условия согласования $u_0(0)=u_0'(0)=u_0'(1)=0,\ g(0)=u_0(x_0)$. Необходимо найти функции $u(t,x)\in C^{2,3}(G)$, $K(t)\in C[0,T]$ по следу решения (12).

Введем новую неизвестную функцию

$$v(t,x)=u_t(t,x) \tag{16}$$

и перепишем уравнение (14) и краевые условия (15) в виде

$$Av(t,x)=-\frac{a_1}{a_0}\int_0^t Av(s,x)ds+\frac{1}{a_0}v(t,x)-\frac{1}{a_0}\int_0^t[b(t,x)v(s,x)+u_0(x)K(s)]ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^s K(t-s)v(\tau,x)d\tau\, ds+F(t,x),$$

$$v(t,0)=v_x(t,0)=v_x(t,1)=0, \tag{17}$$

где $F(t,x)=-\frac{1}{a_0}\left[a_1Au_0(x)+b(t,x)u_0(x)+f(t,x)\right]$. Из последнего уравнения определим Av:

$$Av-\frac{1}{a_0}v=\frac{1}{a_0}\int_0^t\left\{[R(t,s)-b(t,x)]v(s,x)ds-u_0(x)K(s)\right\}ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^s\left\{K(t-s)v(\tau,x)+R(t,s)[b(s,x)v(\tau,x)+u_0(x)K(\tau)]\right\}d\tau\, ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^s\int_0^\tau R(t,s)K(s-\tau)v(\nu,x)\,d\nu\, d\tau\, ds+F(t,x)+\int_0^t R(t,s)F(s,x)\,ds\,.$$

Если пока рассматривать правую часть полученного равенства как известную функцию, тогда эквивалентным этому уравнению вместе с краевыми условиями (17) будет интегральное уравнение

$$v(t,x)=\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)\left\{\int_0^t\left\{[R(t,s)-b(t,\xi)]v(s,\xi)ds-u_0(\xi)K(s)\right\}ds+\right.$$

$$+\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^s\left\{K(t-s)v(\tau,\xi)+R(t,s)[b(s,\xi)v(\tau,\xi)+u_0(\xi)K(\tau)]\right\}d\tau\, ds+$$

$$\left.+\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^s\int_0^\tau R(t,s)K(s-\tau)v(\nu,\xi)d\nu\, d\tau\, ds+F(t,\xi)+\int_0^t R(t,s)F(s,\xi)ds\right\}d\xi.$$

При t=0 из последнего находим

$$v(0,x)=u_t(0,x)=F_1(x)=\int_0^1 G(x,\xi)F(0,\xi)\,d\xi\,. \tag{18}$$

Продифференцируем (14) по t:

$$u_{tt}(t,x)=a_0(Au)_{tt}+a_1(Au_t)+b(t,x)u_t+b_t(t,x)u+u_0(x)K(t)+\int_0^t K(t-s)u_s(s,x)ds+f_t(t,x)\,. \tag{19}$$

Введем еще одну неизвестную функцию

$$w(t,x)=u_{tt}(t,x)\,,\ \left(u_t(t,x)=\int_0^t w(s,x)ds+u_t(0,x)\right) \tag{20}$$

и перепишем (19) и (15) в виде

$$Aw = -\frac{a_1}{a_0}\int_0^t Aw(s,x)ds + \frac{1}{a_0}w(t,x) - \frac{1}{a_0}\int_0^t \left\{\left[b(t,x) + (t-s)b_t(t,x)\right]w(s,x) + \right.$$

$$\left. + F_1(x)K(s)\right\} ds - \frac{1}{a_0}u_0(x)K(t) - \frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^s w(\tau,x)K(t-s)d\tau\, ds + F_2(t,x),$$

$$w(t,0) = w_x(t,0) = w_x(t,1) = 0\,, \qquad (21)$$

где $F_2(t,x) = -\frac{1}{a_0}\left[a_1 AF_1(x) + b(t,x)F_1(x) + b_t(t,x)\left(u_0(x) + F_1(x)t\right) + f_t(t,x)\right]$. Из полученного уравнения с помощью резольвенты $R(t,s)$ определим Aw, далее, применяя функцию Грина с краевыми условиями (21), получим

$$w(t,x) + m(x)K(t) = \int_0^t\int_0^1 r_1(s,t,\xi,x)w(s,\xi)d\xi\, ds - \frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 G(x,\xi)w(\tau,\xi)K(t-s)d\xi\, d\tau\, ds +$$

$$+ \int_0^t r_3(s,t,x)K(s)ds + \int_0^t\int_0^s\int_0^\tau\int_0^1 r_2(s,t,\xi,x)w(\nu,\xi)K(s-\tau)d\xi\, d\nu\, d\tau\, ds + F_3(t,x), \qquad (22)$$

где $r_1(s,t,\xi,x) = -\frac{1}{a_0}G(x,\xi)\left[b(t,\xi) + (t-s)b_t(t,\xi) - R(t,s) + \int_s^t R(t,\tau)\left[b(\tau,\xi) + (\tau-s)b_\tau(\tau,\xi)\right]d\tau\right]$,

$r_3(s,t,x) = -\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)\left[F_1(0,\xi)\int_s^t R(t,\tau)d\tau + u_0(\xi)R(t,s) + F_1(0,\xi)\right]d\xi$, $r_2(s,t,\xi,x) = -\frac{1}{a_0}G(x,\xi)R(t,s)$,

$$m(x) = \frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)u_0(\xi)d\xi\,, \quad F_3(t,x) = \int_0^1 G(x,\xi)\left\{F_2(t,\xi) + \int_0^t R(t,s)F_2(s,\xi)ds\right\}d\xi.$$

Если обозначить $y(t,x) = \begin{pmatrix} w(t,x) \\ K(t) \end{pmatrix}$, $D(x) = \begin{pmatrix} 1 & m(x) \\ 0 & m(x_0) \end{pmatrix}$, то при $x = x_0$ в силу условия (12) имеем $w(t,x_0) = g''(t)$ и из (22) получим систему

$$D(x)y(t,x) = \begin{pmatrix} \int_0^t\int_0^1 r_1(s,t,\xi,x)w(s,\xi)d\xi\, ds - \frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 G(x,\xi)w(\tau,\xi)K(t-s)d\xi\, d\tau\, ds + \\ + \int_0^t r_3(s,t,x)K(s)ds + \int_0^t\int_0^s\int_0^\tau\int_0^1 r_2(s,t,\xi,x)w(\nu,\xi)K(s-\tau)d\xi\, d\nu\, d\tau\, ds + F_3(t,x) \\ \int_0^t\int_0^1 r_1(s,t,\xi,x_0)w(s,\xi)d\xi\, ds - \frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 G(x_0,\xi)w(\tau,\xi)K(t-s)d\xi\, d\tau\, ds + \\ + \int_0^t r_3(s,t,x_0)K(s)ds + \int_0^t\int_0^s\int_0^\tau\int_0^1 r_2(s,t,\xi,x_0)w(\nu,\xi)K(s-\tau)d\xi\, d\nu\, d\tau\, ds + F_3(t,x_0) - g''(t) \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Предположим, что

$$m(x_0) \neq 0\,. \qquad (24)$$

Тогда существует обратная матрица $D^{-1}(x)$ и система (23) эквивалентна системе вида

$$y = Qy\,. \qquad (25)$$

Таким образом, обратная задача (14), (2), (15), (12) эквивалентна системе (25).

Введем банахово пространство $X = C(G)\times C[0,T]$ с нормой $\|y(t,x)\|_X = \sup\limits_{(t,x)\in G}|w(t,x)| + \, + \sup\limits_{t\in[0,T]}|K(t)|$. Обозначим $r = \|Q(0)\|_X$. Оценка оператора Q дает

$$\|Qy\|_X \le 4d_0T\left(1 + rT + \frac{1}{3}rT^2\right)r + r \le 2r\,,\ d_0 = const > 0\,. \qquad (26)$$

Для любых двух элементов y_1, y_2, принадлежащих некоторому шару радиуса $2r$ в X, из (25) получим

$$\|Qy_1 - Qy_2\|_X \le 2d_0T\left(1 + rT + \frac{1}{3}rT^2\right)\|y_1 - y_2\|_X\,. \qquad (27)$$

Из (26), (27) следует, что для достаточно малых T таких, что

$$4d_0T\left(1 + rT + \frac{1}{3}rT^2\right) \le 1, \qquad (28)$$

оператор Q отображает шар радиуса $2r$ в X в себя и является сжимающим. Дифференцируя правую часть первого уравнения системы (25) по x три раза, получим, что $w\in C^{0,3}(G)$, тогда по формуле (20) $u\in C^{2,3}(G)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.1.1. Пусть: 1) $b(t,x)$, $f(t,x)\in C^{1,0}(G)$, $u_0(x)\in C^3[0,1]$, $g(t)\in C^2[0,T]$; 2) выполняются условия (24), (28). Тогда решение $\{u(t,x), K(t)\}$ обратной задачи (14), (2), (15), (12) существует в пространстве $C^{2,3}(G)\times C[0,T]$, в некотором шаре этого пространства оно единственно.

Пример 3.1.1. Пусть $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $b(t,x) = 1$, $f(t,x) = x + t$, $u_0(x) = 3x^2 - 2x^3$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $g(t) = \frac{e^t}{2}$. Тогда задача примет вид:

$$u_t = (Au)_t + Au + u + \int_0^t K(t-s)u(s,x)ds + x + t\,, \qquad (29)$$

$$u(0,x) = 3x^2 - 2x^3,\ x\in[0,1],\ u(t,0) = u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0\,,\ u\left(t,\frac{1}{2}\right) = \frac{e^t}{2}\,,\ t\in[0,T] \qquad (30)$$

Здесь выполняются условия согласования и условие 1) теоремы 3.1.1. Функция Грина имеет вид:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{2} + \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)\xi, & 0 \le \xi \le x \le 1, \\ -\dfrac{x^2}{2}(1-\xi), & 0 \le x \le \xi \le 1. \end{cases}$$

Найдем функцию

$$m(x) = \int_0^1 G(x,\xi)u_0(\xi)d\xi = \int_0^x \left(\frac{\xi^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\xi\right)(3\xi^2 - 2\xi^3)d\xi - \frac{x^2}{2}\int_x^1 (1-\xi)(3\xi^2 - 2\xi^3)d\xi =$$

$= -\frac{1}{60}x^6 + \frac{1}{20}x^5 - \frac{3}{40}x^2$, $m\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{67}{3840} \ne 0$. Таким образом, обратная задача (29)-(30) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1.1 и имеет решение в пространстве $C^{2,3}(G)\times C(0,T)$.

Пусть $\left(u^i(t,x), K^i(t)\right)$, i=1, 2 – два решения обратной задачи (14), (2), (15), (12) с данными $f^i(t,x)$, $u_0^i(x)$, $g^i(t)$. Тогда

$$(u^i)_t(t,x) = a_0(Au^i)_t + a_1(Au^i) + b(t,x)u^i + \int_0^t K^i(t-s)u^i(s,x)ds + f^i(t,x),$$

$$u^i(0,x) = u_0{}^i(x),\quad x\in[0,1],\quad u^i(t,0) = u^i(t,1) = u^i{}_x(t,0) = 0,\quad u^i(t,x_0) = g_i(t),\ t\in[0,T].$$

Проведя построение, аналогичное вышеизложенному, при $f(t,x)=f^i(t,x)$, $u_0(x)=u_0{}^i(x)$, $g(t)=g_i(t)$, i=1, 2, получим системы вида

$$y^i = Q^i(f^i(t,x), u_0{}^i(x), g_i(t))y^i.$$

Из (25) имеем

$$y^1 = Q^1y^1,\ y^2 = Q^2y^2,\qquad \|y^1-y^2\| \le \|Q^1\|\cdot\|y^1-y^2\| + \|Q^1-Q^2\|\cdot\|y^2\|,$$

$$\|y^1-y^2\| \le \frac{\|y^2\|}{1-\|Q^1\|}\|Q^1-Q^2\|. \qquad (31)$$

Имеет место

Теорема 3.1.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.1.1 и ($u^1(t,x)$, $K^1(t)$), ($u^2(t,x)$, $K^2(t)$) – два решения обратных задач вида (14), (2), (15), (12) из пространства $C^{2,3}(G)\times C[0,T]$ при различных заданных функциях. Тогда справедлива оценка устойчивости (31).

В §3.2 рассмотрена обратная задача восстановления n ядер $K_i(t)$ $(i=1..n)$ и функции $u(t,x)$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t = a_0(Au)_t + a_1(Au) + \sum_{j=0}^{3} b_j(t,x)\frac{\partial^{3-j}u}{\partial x^{3-j}}(t,x) + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} K_i(t-s)\sum_{j=0}^{3} d_{ij}(s,x)\frac{\partial^{3-j}u}{\partial x^{3-j}}(s,x)ds + f(t,x), \quad (32)$$

с условиями (2), (3), (4) и условиями согласования (5). По приведенной выше методике доказана

Теорема 3.2.1. Пусть $b_j(t,x)$, $d_{ij}(t,x)$ $(j=0..3,\ i=1..n)$, $f(t,x)\in C^{1,0}(G)$, $u_0(x)\in C^3[0,1]$, $g_i(t)\in C^2[0,T]$ и $\det\left(G_{ij}\right)\ne 0$, где $G_{ij} = \int_0^1 G(x_i,\xi)\sum_{k=0}^{3} d_{jk}(0,\xi)u_0^{(3-k)}(\xi)d\xi$, $i=1..n$, $j=1..n$. Тогда для достаточно малых T решение обратной задачи (32), (2), (3), (4) существует в пространстве $C^{2,3}(G)\times C_n[0,T]$ и в некотором шаре этого пространства оно единственно.

В §3.3 исследована обратная задача восстановления ядра и правой части интегро-дифференциального уравнения

$$u_t(t,x) = a_0(Au)_t + a_1(Au) + b(t,x)u + \int_0^t K(t-s)u(s,x)ds + \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)f_i(t,x) + f(t,x), \qquad (33)$$

с условиями (2), (15) по следам решения

$$u(t,x_i) = g_i(t),\ t\in[0,T],\ i=0..n,\ 0<x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n<1 \qquad (34)$$

и условиями согласования $u_0(0) = u_0'(0) = u_0'(1) = 0,\ g_i(0) = u_0(x_i)$, i=0..n.

Теорема 3.3.1. Пусть $b(t,x)$, $f(t,x)\in C^{1,0}(G)$, $f_i(t,x)$ $(i=1..n)\in C(G)$, $u_0(x)\in C^3[0,1]$, $g_i(t)$ $(i=1..n)\in C^1[0,T]$ и $\det\left(G_1 \quad G_2\right)\ne 0\ \forall t\in[0,T]$, где

$$G_1 = colon\left(\int_0^1 G(x_i,\xi)u_0(\xi)d\xi\right),\ \ i=0..n,\ \ G_2=\left(\int_0^1 G(x_i,\xi)f_j(t,\xi)d\xi\right),\ \ i=0..n,\ \ \ j=1..n.$$

Тогда решение $\{u(t,x),K(t),\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)\}$ обратной задачи (33), (2), (15), (34) для достаточно малых T существует в пространстве $C^{1,3}(G)\times C_{n+1}[0,T]$, в некотором шаре этого пространства оно единственно.

В §3.4 исследована обратная задача восстановления ядер и правой части интегро-дифференциального уравнения

$$u_t(t,x)=a_0(Au)_t+a_1(Au)+b(t,x)u+\int_0^t\sum_{i=1}^m K_i(t-s)u(s,x)ds+\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)f_i(t,x)+f(t,x), \quad (35)$$

с условиями (2), (15) по следам решения

$$u(t,x_i)=g_i(t),\ i=1..m+n,\ t\in[0,T],\ 0<x_1<x_2<\ldots<x_{m+n}<1. \quad (36)$$

Также выполняются условия согласования

$$u_0(0)=u_0'(0)=u_0'(1)=0,\ \ g_i(0)=u_0(x_i),\ i=1..m+n. \quad (37)$$

Теорема 3.4.1. Пусть $b(t,x)$, $f(t,x)\in C^{1,0}(G)$, $f_i(t,x)\in C(G)$, $i=1..n$, $u_0(x)\in C^3[0,1]$, $g_i(t)\in C^1[0,T]$ ($i=1..m+n$) и $\det M(t)\neq 0\ \ \forall\, t\in[0,T]$, где $(m+n)\times(m+n)$-мерная матрица $M(t)=(M_{ij}(t))$ определяется следующим образом:

$$M_{ij}(t)=\begin{cases} m(x_i),\ j\le m,\\ c_{j-m}(t,x_i),\ j>m,\end{cases}\quad m(x)=\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)u_0(\xi)d\xi,\ \ c_i(t,x)=\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)f_i(t,\xi)d\xi,$$

$i=1..n$. Тогда для достаточно малых T решение $\{u(t,x), K_1(t), K_2(t), \ldots, K_m(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ обратной задачи (35), (2), (15), (36) существует в пространстве $C^{1,3}(G)\times C_{m+n}[0,T]$, в некотором шаре этого пространства оно единственно.

В §3.5 рассмотрена обратная задача восстановления ядер и коэффициентов нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} u_t(t,x)&=a_0(Au)_t+a_1(Au)+\sum_{j=1}^m \lambda_j(t)(P_ju)(t,x)+\sum_{i=1}^n\int_0^t K_i(t-s)(Q_iu)(s,x)ds+\\ &+f\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+F(t,x),\quad (t,x)\in G,\end{aligned}\quad (38)$$

с условиями (2), (15), (36). Имеют место условия согласования (37). Здесь заданы дифференциальные операторы $(P_ju)(t,x)=\sum_{k=0}^3 b_{jk}(t,x)\frac{\partial^{3-k}u}{\partial x^{3-k}}(t,x)$, $(Q_iu)(t,x)=\sum_{k=0}^3 d_{ik}(t,x)\frac{\partial^{3-k}u}{\partial x^{3-k}}(t,x)$.

Теорема 3.5.1. Пусть $F(t,x)\in C(G)$, $u_0(x)\in C^3[0,1]$, $b_{jk}(t,x)\in C(G)$ ($j=1..m$, $k=0..3$), $d_{ik}(t,x)\in C^1[0,T]\times C[0,1]$ ($i=1..n$, $k=0..3$), $g_i(t)\in C^1[0,T]$ ($i=1..m+n$), функция $f(t,x,u,u_1,u_2,u_3)\in C(G\times R^4)$ и по аргументам u, u_1, u_2, u_3 удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом L, определитель $(m+n)\times(m+n)$-мерной матрицы $N=(N_{ij})$, где $N_{ij}=\begin{cases} m_j(x_i),\ j\le m,\\ n_{j-m}(t,x_i),\ j>m,\end{cases}$ $m_j(t,x)=\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)(P_ju_0)(t,\xi)d\xi$,

$j = 1..m$, $n_i(x) = \dfrac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)(Q_i u_0)(0,\xi)d\xi$, $i = 1..n$, отличен от нуля. Тогда для достаточно малых T решение обратной задачи (38), (2), (15), (36) существует в пространстве $C^{1,3}(G)\times C_{m+n}[0,T]$ и в некотором шаре этого пространства оно единственно.

В §3.6 исследована обратная задача восстановления нелинейного ядра интегро-дифференциального уравнения

$$u_t(t,x) = a_0(Au)_t + a_1(Au) + \sum_{i=0}^{3} b_i(t,x)\frac{\partial^{3-i}u(t,x)}{\partial x^{3-i}} + \int_0^t F(t,x,u(s,x))\lambda(t-s)ds + f(t,x), \quad (39)$$

с условиями (2), (3), (12), (10) и (11).

Теорема 3.6.1. Пусть $b_i(t,x)\ (i = 0..3) \in C^{1,0}(G)$, $f(t,x) \in C^{1,0}(G)$, $u_0(x) \in C^3[0,1]$, $g(t) \in C^2[0,T]$, функция $F(t, x, u)$ и ее производные $F_t(t, x, u)$, $F_u(t, x, u)$ удовлетворяют условию Липшица по переменной u с коэффициентом L и $\int_0^1 G(x_0,\xi)F(t,\xi,u_0(\xi))d\xi \neq 0$. Тогда для достаточно малых T существует решение $\{u(t,x),\ \lambda(t)\}$ обратной задачи (39), (2), (3), (12) в пространстве $C^{2,3}(G)\times C[0,T]$, в некотором шаре этого пространства оно единственно.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность научному руководителю, профессору А.Асанову за постановки задач, ценные советы и постоянное внимание при проведении настоящих исследований.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Матанова, К.Б. Об одной обратной задаче для псевдопараболического уравнения [Текст] / К.Б. Матанова // Научные труды ОшГУ. Физико-матем. науки. Ош, 1999, вып.2. - С.137-145.
2. Матанова, К.Б. Оценка устойчивости и единственность решений обратных задач для интегро-дифференциального уравнения 4-го порядка [Текст]/ А. Асанов, К. Матанова // Материалы международной научно-практической конференции «Непрерывное образование в новом информационном пространстве», 2001, БГУ, Бишкек. – С. 847-855.
3. Матанова, К.Б. Обратная задача для дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка[Текст] / К.Б. Матанова // Вестник ОшГУ. Труды международной научно-теоретической конференции "Проблемы образования, науки и культуры в начале 21 века". 2001. Вып. 4. - С. 94-100.
4. Матанова, К.Б. Восстановление ядер интегро-дифференциального уравнения с частными производными 4-го порядка [Текст] / А. Асанов, К. Матанова // Вестник КГНУ. Труды международной науч. конференции, посвящ. 70-летию акад. М.Иманалиева. - Бишкек, 2001. Серия 3, вып.6. - С. 63-68.

5. Матанова, К.Б. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / А. Асанов, К.Б. Матанова // Методы оптимизации и их приложения. Труды 13-ой Байкальской международной школы-семинара. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. – С.30-35.
6. Матанова, К.Б. Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения [Текст] / А. Асанов, К.Б. Матанова // Табигый илимдер журналы. – Бишкек, КТМУ. 2006. - С. 41-54.
7. Матанова, К.Б. О существовании и единственности решения одной обратной задачи [Текст] / А. Асанов, К.Б. Матанова // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби, №1(56), Алматы, 2008. – С. 56-62.
8. Матанова, К.Б. Об одной обратной задаче для интегро-дифференциальных уравнений с частными производными [Текст] / К.Б. Матанова // Материалы международной юбилейной научной конференции, посвященной 15-летию образования КРСУ. Бишкек, 15-21 сентября 2008 г. - С.213-218.
9. Матанова, К.Б. Об одной обратной задаче для нелинейного дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка [Текст] / К.Б. Матанова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2008. Вып.38. - С.118-124.
10. Матанова, К.Б. Recovering the kernel and right side of fourth-order partial integro-differential equation [Текст] / K. Matanova // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Almaty, June 30 - July 4, 2009. – P. 363-368.
11. Матанова, К.Б. Solution of one inverse problem for fourth-order pseudoparabolic equation [Текст] / K.B. Matanova // Вестник КНУ. Труды IV международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», 2011. – С. 278-282.
12. Матанова, К.Б. Об одной обратной задаче для нелинейного дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка [Текст] / К.Б. Матанова // Тезисы докладов 12-ой Межвузовской конференции по математике, механике и информатике. Алматы, 2008. - С. 100.
13. Матанова, К.Б. Recovering the kernel and right side of fourth-order partial integro-differential equation[Текст] / K.B. Matanova // Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Almaty, June 30 - July 4, 2009. – P.252.
14. Матанова, К.Б. The inverse problem for nonlinear fourth-order partial integro-differential equation [Текст] / K. Matanova // Abstracts of the International Scientific Conference "Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technologies – Al-Khorezmiy 2009", Tashkent, 2009. – P. 38-39.
15. Матанова, К.Б. The coefficient inverse problem for nonlinear fourth-order partial integro-differential equation [Текст] / K. Matanova // Abstracts of the Fourth Congress of the Turkic World Mathematical Society, Baku, 1-3 July 2011. – P. 245.

РЕЗЮМЕ

Матанова Калыскан Базарбаевна

«Төртүнчү тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык псевдопараболалык теңдемелер үчүн тескери маселелер» диссертациясы физика-математика илимдеринин кандидаты даражасын 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу адистиги боюнча алуу үчүн сунушталган

Урунттуу сөздөр: тескери маселе, псевдопараболалык теңдеме, интегро-дифференциалдык теңдеме, чектик шарттар, чыгарылыштын изи, экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемеси, Грин функциясы, резольвента, ядро, чыгарылыш, жашаш, жалгыздык, Липшиц шарты, туруктуулук.

Төртүнчү тартиптеги сызыктуу, сызыктуу эмес дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык псевдопараболалык теңдемелер үчүн тескери маселелер интегралдык теңдемелер методу жана Грин функциясынын жардамы менен экинчи түрдөгү Вольтерра тибиндеги сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер системасына келтирилген. Кысуучу оператор принцибинин негизинде тескери маселелердин чыгарылыштарынын жашашы жана жалгыздыгы далилденген.

РЕЗЮМЕ

Матанова Калыскан Базарбаевна

Диссертация **«Обратные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка»** представлена на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: обратная задача, псевдопараболическое уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, краевые условия, след решения, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, функция Грина, резольвента, ядро, решение, существование, единственность, условие Липшица, устойчивость.

Методом интегральных уравнений и функции Грина обратные задачи для линейных, нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных псевдопараболических уравнений четвертого порядка сводятся к системам линейных и нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. С помощью принципа сжимающих отображений доказаны теоремы существования и единственности решений обратных задач.

SUMMARY
Matanova Kalyskan Bazarbaevna

Dissertation “**Inverse problems for fourth order differential and integro-differential pseudoparabolic equations”** is submitted for scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences, speciality 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: inverse problem, pseudoparabolic equation, integro-differential equation, boundary conditions, trace of solution, Volterra integral equation of second kind, Green function, resolvent, kernel, solution, existence, uniqueness, Lipschitz condition, stability.

The inverse problems for fourth order linear and nonlinear differential and integro-differential pseudoparabolic equations are reduced to linear and nonlinear systems of Volterra integral equations of the second kind using integral equations method and Green function. Existence and uniqueness theorems of solutions of inverse problems are established applying the principle of contracting mappings.