МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
им.М.УЛУГБЕКА

На правах рукописи
УДК 514.7

ШАРИПОВ АНВАРЖОН СОЛИЕВИЧ

ПОВЕРХНОСТИ, ИЗОМЕТРИЧНЫЕ ПО СЕЧЕНИЯМ, И ИХ СВОЙСТВА

Специальность 01.01.04 - Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ташкент - 2000

Работа выполнена на кафедре геометрии и истории математики Национального Университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека

Научный руководитель - доктор физико-математических наук **А.Артыкбаев**

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор **Н.Н.Ганиходжаев**
-кандидат физико-математических наук **Г.М.Аллаев**

Ведущая организация - Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им.М.В.Ломоносова

Защита диссертации состоится 16 ноября 2000 г. в 14 ч. 00 м. на заседании объединенного специализированного совета К 067.02.03 в Национальном Университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека по адресу: 700174, г.Ташкент, ВУЗ городок, Национальный Университет Узбекистана, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Национального Университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат разослан «16» октября 2000 г.

Ученый секретарь специализированного совета доктор физико-математических наук К.С. **К.С.Фаязов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. В классической дифференциальной геометрии выделяются два направления. Одно из них, называемое геометрией «в малом», изучает локальные свойства геометрических объектов, а второе - исследует геометрические объекты на всем их протяжении и называется геометрией «в целом».

В 1813 году О.Коши доказал, что два замкнутых многогранника, одинаково составленные из конгруэнтных граней, равны. Этот результат является одним из первых среди решенных задач геометрии «в целом». Многие задачи геометрии «в целом» связаны с изометрией поверхностей. Если поверхности изометричны, можно выбрать координатные линии так, что они будут иметь одинаковую метрику. Исходя из этого Г.Вейль поставил и наметил решение задачи существования замкнутой выпуклой поверхности с данной метрикой. Это проблема получила исчерпывающее решение в самой общей постановке для метрик положительной кривизны, А.Д. Александровым, А.В. Погореловым и их учениками.[1] В 1951 году А.В. Погорелов доказал, что замкнутая выпуклая поверхность однозначно определена своей метрикой в классе общих замкнутых выпуклых поверхностей. То есть, замкнутые изометричные выпуклые поверхности равны.

Установлена связь между понятием выпуклости поверхности и метрикой положительной кривизны, причем метрика отрицательной кривизны представляется седловыми поверхностями. Как показал Д.Гильберт в 1901 году, среди поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве не существует регулярной полной поверхности постоянной отрицательной кривизны. Этот результат обсбщен в классической работе

[1] Шикин Е.В. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии «в целом» М.:Мир, 1996, 192 с.

Н.В.Ефимова[1] который доказал, что полные метрики отрицательной, отделенной от нуля кривизны, не допускают регулярной реализации «в целом» в евклидовом пространстве. Задача о не полной реализации поверхности отрицательной кривизны имеет различные применения.[2]

Между тем, нерегулярные поверхности также заслуживают внимания.[3] Например, любые многогранники, конусы или поверхность линзы с острыми краями не являются регулярными полностью. Теория многогранников и связанные с нею геометрические методы интересны не только сами по себе. Они имеют широкий выход в общую теорию поверхностей. Конечно, не всегда из теоремы о многогранниках можно получить путем предельного перехода соответствующую теорему о поверхностях, но теоремы о многогранниках дают направления для поисков соответствующих теорем относительно поверхностей. В случае многогранников раскрывается элементарно-геометрическая основа более общих результатов.

А.Д. Александровым построен (1950 г.) метод, с помощью которого доказано, что замкнутый выпуклый многогранник однозначно определен своей метрикой в классе замкнутых выпуклых многогранников. Проблема однозначной определенности замкнутых выпуклых многогранников получила окончательное решение в работе С.П.Оловянишникова.[4] В настоящее время существует несколько доказательств этой теоремы, основанных на совершенно различных идеях. Первое доказательство основано на методе Коши и принадлежит А.Д.Александрову. Другие

---

[1] Аминов Ю.А. Проблемы вложений: геометрические и топологические аспекты. Проблемы геометрии. Т.13, М.1982, с.119-156

[2] Борисенко А.А. Внешняя геометрия сильно параболических многомерных подмногообразий.// Успехи мат. наук-1997,-52,N:6-с.3-52.

[3] Александров А.Д. Выпуклые многогранники. М-Л.Гостехиздат,1950,282с.

[4] Оловянишников С.П. Обобщенные теоремы Коши о выпуклых многогранниках. Матем. сб. 1946, т.18, вып 3-с.441-446.

доказательства принадлежат Е.П.Сенькину и А.В.Погорелову.[1]

Многие задачи геометрии «в целом» связаны с существованием и единственностью поверхностей с заданными геометрическими характеристиками. Геометрическими характеристиками могут быть внутренняя кривизна, внешняя или гауссова кривизны и другие функции, связанные с поверхностью. Существование многогранника с данными кривизнами вершин или с данной разверткой,[2] также является задачей геометрии «в целом».

Во многих задачах геометрии «в целом», относящихся к многомерному случаю, выделяется определенный подход, который оказывается плодотворным при решении таких задач.[3] Понятие изометрии по сечениям введено А.Артыкбаевым и оно отличается от изометрии поверхностей. Из изометрии поверхностей не следует изометрия по сечениям, а также наоборот. Введенное понятие изометрии поверхностей по сечениям эквивалентно изометрии поверхностей в пространстве с вырожденной метрикой, в частности, Галилеевом пространстве.[4]

Возможность определения изометричности поверхностей при требовании более слабых условий является актуальной задачей современной геометрии.[5] Известно, что при изометрии гауссова кривизна поверхности сохраняется, т.е. выпуклые поверхности изометричны выпуклым поверхностям, а седловые - седловым поверхностям. Однако образ выпуклой поверхности при

---

[1] Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М:Наука, 1969,-759с.

[2] Бураго Ю.Д.,Залгаллер В.А. Реализация разверток в виде многогранников. Вестник ЛГУ. 7(1960),с.66-80.

[3] Дудкин А.А. Вектор кручения двумерной поверхности в данном направлении.//Геом. многомерных пространств./Алт.гос.ун-т,Барнаул,1991-с. 11-15.

[4] Артыкбаев А.,Соколов Д.Д. Геометрия «в целом» в плоском пространстве времени. Ташкент, «Фан»,1991,180с.

[5] Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». М. Наука, 1973- 440с.

изометрии по сечениям может оказаться не выпуклым. В связи с этим возникает естественный вопрос: при каких условиях поверхности изометричные по сечениям, будут изометричными между собой? Поэтому одной из актуальных задач является найти связь между изометрией по сечениям и изометрией поверхностей.

Известно, что замкнутые выпуклые изометричные поверхности равны. Существуют ли условия, которые обеспечивают справедливость аналогичной теоремы для поверхностей, изометричных по сечениям.

Следовательно задача, нахождения инвариантов поверхностей, изометричных по сечениям, и решение задачи существования и единственности поверхности, имеющей заданные значения инвариантов, является актуальными.

Цель работы. Цель работы определяется ее актуальностью. Основной целью работы является изучение свойств поверхностей изометричных по сечениям. Найти условие изометриности поверхностей изометричных по сечениям.

Определить инвариантную геометрическую характеристику для поверхностей изометричных по сечениям так, чтобы по этой характеристике можно было восстановить поверхность.

Научная новизна. Понятие изометричности по сечениям является новым понятием, поэтому все результаты диссертации новые:

- исследованы свойства поверхностей, изометричных по сечениям;
- установлена связь между классом поверхностей $W\{\bar{e}\}$ и одномерным слоением на двумерном многообразии;
- доказана изометричность поверхностей класса C^2, являющиеся изометричными по сечениям относительно трех некомпланарных направлений;
- получены некоторые достаточные условия изометричности поверхностей изометричных по сечениям;

- рассмотрена развертка выпуклых многогранников, сохраняющая изометрию по сечениям;
- определен инвариант многогранников изометричных по сечениям связанный с вершиной выпуклого многогранного угла и назван его условной кривизной;
- доказано, что этот инвариант обладает свойством монотонности;
- с помощью инварианта определено понятие условной кривизны выпуклого многогранника и получены условия существования и единственности выпуклого многогранника с заданной условной кривизной.

Методика исследования. В диссертации используются методы дифференциальной геометрии выпуклых многогранников, развитой А.Д. Александровым, а также использован экстремальный метод А.В.Погорелова о восстановлении многогранника.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер и ее результаты можно рекомендовать для использования специалистами, занимающимися в области геометрии и топологии, а также эти исследования можно рекомендовать как спец.курс для математических факультетов университетов.

Практическая значимость состоит в возможности применения этих результатов в задачах физики и механики.

Публикация и апробация работы. Основное содержание диссертации отражено в десяти статьях автора, одна из которых является совместной. В ней соавтору принадлежит постановка задачи и определение изометричности по сечениям.

Результаты диссертации регулярно докладывались на семинаре кафедры «геометрии и истории математики» Национального Университета Узбекистана им.Мирзо Улугбека (1994-2000 г.г.), на городском семинаре ИМ им. В.И.Романовского АНРУз под руководством акад.Ш.А.Аюпова (1997,1999), на городском семинаре Национального Университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека под руководством проф.Г.Худойберганова (1999,2000), на 1-ой Республиканской научной конференции молодых ученых физиков и математиков(г.Ташкент,1995), на международной конференции «Актуальные проблемы теоретической и прикладной математики» (г.Самарканд, ноябрь 1997), на Третьем Сибирском Международном конгрессе ИНПРИМ-98(г.Новосибирск,июнь 1998).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав, которые в свою очередь разбиты на 10 параграфов, список литературы состоит из 46 наименований. Объем работы - 99 страниц машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается общая характеристика работы и обзор диссертации по главам.

В первом параграфе главы I вводится класс $W\{\bar{e}\}$ и приводится определение изометричности поверхностей по сечениям.

В трехмерном евклидовом пространстве R^3 рассмотрим поверхность F и вектор $\bar{e}$. Поверхность F пересекаем всевозможными плоскостями Π^i, перпендикулярными вектору $\bar{e}$. Множество точек сечения обозначим через γ^i. Класс поверхностей, для которых сечения γ^i гомеоморфны отрезку, прямой либо окружности обозначим через $W\{\bar{e}\}$.

Определение 1.1 Поверхности F_1 и F_2 называются изометричными по сечениям, если существуют направления e_1 и e_2 ,перпендикулярно которым проводятся сечения и гомеоморфизм f поверхностей F_1 и F_2 удовлетворяющий следующим условиям:

а) точкам поверхности F_1 , принадлежащим одному сечению, сопоставляются точки, принадлежащие одному сечению поверхности F_2. Образы точек, лежащих на разных сечениях лежат на разных сечениях;

в) расстояния между плоскостями, содержащими кривые γ^1 и γ^2 ,и плоскостями, содержащими кривые $f(\gamma^1)$ и $f(\gamma^2)$, равны;

с) длина дуги кривой $\gamma \in \Pi^i$ между двумя точками равна длине дуги кривой $f(\gamma)$ между соответствующими точками. (Первоначально понятие изометрии по сечениям было названо «частичной изометрией»).

В параграфе 2 главы I изучаются некоторые свойства поверхностей изометричных по сечениям. В частности, любая односвязная однозначно проектирующаяся на плоскость XOY поверхность F с границей изометрична по сечениям некоторой плоской области. Здесь же определено понятие цилиндрической поверхности.

Поверхность называется цилиндрической, если произвольное сечение поверхности плоскостью перпендикулярной вектору $\bar{e}$ гомеоморфно окружности. Доказывается, что для любой ограниченной цилиндрической поверхности $F \in W\{\bar{e}\}$ существует изометричная ей поверхность вращения и показывается равенство поверхностей вращения изометричных по сечениям (относительно оси вращения). Также приведены необходимые и достаточные условия изометричности по сечениям и с помощью цилиндрического изображения даётся условие совпадения знак гауссовой кривизны поверхностей, изометричных по сечениям.

В параграфе 3 рассматриваются многогранники из класса $W\{\bar{e}\}$ и дано определение развертки, сохраняющей изометрию по сечениям (т.е. развертки многогранника на плоскость, при которой точки, лежащие на одном сечении, сохраняют принадлежность к этому сечению).

Развертка, сохраняющая изометрию по сечениям, отличается от евклидовой развертки, так как способ разрезания граней и способ склейки ребер зависит от направления вектора $\bar{e}$ и так как допускаются деформации грани многогранника, сохраняющие изометрию по сечениям (такая деформация не является движением евклидова пространства). При этом исключаются разрезы по направлению, перпендикулярному вектору $\bar{e}$, и требуется, чтобы образ всякого треугольника был треугольником.

Аналогично [2] от развертки требуем следующее:

1) от каждого многоугольника к другому можно перейти идя по многоугольникам имеющим склеенные стороны;

2) каждая сторона многоугольника либо не склеивается ни с какой стороной, либо склеивается только с одной стороной;

3) любые отождествляемые при склеивании отрезки сторон всегда имеют равные ширины по направлению $\bar{e}$.

В четвертом параграфе диссертации излагаются многомерные аналоги изометрии поверхностей по сечениям.

Определение 4.1. Гиперповерхности F_1 и F_2 называются изометричными по сечениям, если существуют направления e_1 и e_2, перпендикулярно которым проводятся сечения поверхностей F_1 и F_2, так что выполнены следующие условия:

а) каждому сечению $P_1 \subset F_1$ изометрично сопоставляется сечение $P_2 \subset F_2$;

в) расстояние между гиперплоскостями, соответствующими сечениям P_1 и P_1', и гиперплоскостями соответствующими сечениям P_2 и P_2', равны.

Основным результатом четвертого параграфа является следующая теорема.

Пусть M^2-двумерное C^r - многообразие с краем или без края и пусть оно C^r - вложено как двумерная поверхность в евклидово пространство R^5.

Теорема 4.1. Для того чтобы M^2 можно было вложить в R^3 как C^r - поверхность из класса $W\{\bar{e}\}$ необходимо и достаточно существование одномерного C^{r-1} - распределения P, сопоставляющего каждой точке $x\in M^2$ касательную прямую, параллельную некоторой двумерной плоскости П.

Вторая глава разделена на три параграфа. Основными здесь являются следующие результаты.

Теорема 5.1. Поверхности класса C^2, изометричные по сечениям относительно трех некомпланарных направлений изометричны.

Теорема 5.1. доказана с помощью лемм 5.1 и 5.2.

Лемма 5.1. Изометрия по сечениям поверхностей из класса C^2 относительно трёх некомпланарных направлений сохраняет углы между соответствующими сечениями.

Лемма 5.2. Пусть R,Q близкие точки поверхности F из класса C^2, лежащие на одном сечении. Тогда справедливо следующее равенство:

$$l(R,Q)=\rho_F(R,Q)+o(\rho_F(R,Q))$$

где $l(R,Q)$-длина дуги сечения, $\rho_F(R,Q)$-расстояние по поверхности между точками R и Q, $o(\rho_F(R,Q))$- бесконечно малая величина высшего порядка, чем бесконечно малая $\rho_F(R,Q)$. Требование изометричности по сечениям относительно трёх некомпланарных направлений является минимальным. Построен пример поверхностей изометричных по сечениям относительно двух неколлинеарных направлений, но не изометричных между собой.

Приведены некоторые достаточные условия изометрии поверхностей, изометричных по сечениям.

Теорема 5.2. Если у поверхностей изометричных по сечениям длины проекций нормалей по соответствующим направлениям равны, то эти поверхности изометричны.

Теорема 5.3. Если у поверхностей, изометричных по сечениям углы между нормалями и соответствующими направлениями равны, то эти поверхности изометричны.

Следствие 5.3. Если у поверхностей изометричных по сечениям соответствующие площади равны, то они изометричны.

В параграфе 6 изучается изометричность регулярных поверхностей, изометричных по сечениям в R^4 и R^n.

Доказаны многомерные обобщении теорем 2.7, 5.2 и 5.3 в пространстве R^4 и обобщены эти результаты для n - мерного евклидова пространства R^n.

Основным результатом параграфа 7 является

Теорема 7.1. Пусть поверхности $F_1, F_2 \in W\{\bar{e}\}$ изометричны по сечениям и видны из точек O_1 и O_2 соответственно. Тогда, если углы видимости в соответствующих при изометрии точках O_1 и O_2 соответственно равны, то равны F_1 и F_2.

Глава 3 посвящена изучению свойств многогранников, изометричных по сечениям, и восстановлению многогранника по заданным значениям условной кривизны вершин.

В параграфе 8 введен условный полный угол по направлению $\bar{e}$ для трехгранных углов, не имеющих ребер и опорных плоскостей, перпендикулярных вектору $\bar{e}$. Используя определение условного полного трёхгранного угла, определяется условный полный угол для многогранного угла, не имеющего ребер и опорных плоскостей, перпендикулярных вектору $\bar{e}$. Доказывается, что он инвариантен относительно преобразования

$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=\alpha x+y\cos\psi-z\sin\psi \\ z'=\beta x+y\sin\psi+z\cos\psi \end{cases}$$

Приводится геометрический смысл условного полного угла, т.е. если задан многогранник из класса $W\{\bar{e}\}$, то условный полный угол в вершине многогранника определяет раствор ребер развёртки многогранника отстоящий от вершины на единичном расстоянии по направлению $\bar{e}$. С помощью условного полного угла определяется условная кривизна для открытых граней, открытых ребер и точек.

В параграфе 9 доказываются свойства монотонности и положительной определенности условной кривизны многогранного угла.

Параграф 10 посвящен доказательству существования и единственности многогранника с заданными значениями условной кривизны в вершинах.

Рассмотрим на плоскости XOY некоторый выпуклый многоугольник G. Внутри G фиксируем точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Пусть γ- замкнутая ломаная в пространстве, которая прямыми, параллельными оси OZ однозначно проектируется на плоскость XOY в выпуклую ломаную γ, ограничивающую многоугольник G, причем вершина ломаной γ соответствуют вершины γ.

Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_n$ - любая конечная система прямых, параллельных оси OZ, и пересекающих многоугольник G в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ -любые положительные числа, μ-условная кривизна многогранника, обращенного выпуклостью в сторону $Z>0$ и вершинами A_k' на прямых g_k. Обозначим через Ω_p – совокупность многогранников P с краем γ, однозначно проектирующихся на плоскость XOY, обращенных выпуклостью в сторону $Z>0$ и с вершинами на прямых g_k (предполагается, что других вершин многогранник не имеет).

Теорема 10.1. Если в области G отмечены точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и точкам поставлены в соответствие положительные числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, тогда существует выпуклый многогранник $P \in \Omega_p$ с условными кривизнами в вершинах A_i' равными ω_i по направлению $\bar{e}$ соответственно.

Доказательство теоремы опирается на леммы 10.1 и 10.2.

Лемма 10.1. Пусть задан выпуклый многогранник $P \in \Omega_p$ и $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ – условные кривизны внутренних вершин многогранника. Если вершину A_k' с кривизной ω_k будем деформировать в сторону $Z>0$ по прямой g_k так чтобы не появился новые вершины, то ω_k возрастает, условные кривизны других вершин не увеличивается.

Лемма 10.2. Пусть выпуклые многогранные углы $P_1, P_2 \in W\{\bar{e}\}$ с общей вершиной O. Если P_1 содержится в P_2 то $\mu(P_1) > \mu(P_2)$

Теорема 10.2. Пусть P_1 и P_2 – выпуклые многогранники с общим краем γ, однозначно проектируются на плоскость XOY, обращены выпуклостью в сторону $Z>0$, причем соответствующие внутренние вершины проектируются в одну и ту же точку плоскости XOY. Пусть условные кривизны принимают одинаковые значения в соответствующих вершинах этих многогранников. Тогда многогранники P_1 и P_2 совпадают.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

1) Шарипов А.С. Об одном свойстве замкнутых выпуклых частично изометричных поверхностей // Материалы 1-ой Респ. науч. конф. молодых физиков и математиков. Таш ГУ,1995 г.,с.118.
2) Шарипов А.С. Об одном условии изометрии частично изометричных гиперповерхностей в E^n // Тезисы докладов Меж. геом. шк.-сем. Ростов- на-Дону,1996 г., с. 73.
3) Шарипов А.С. Частично изометричные поверхности// Мат. меж. кон. по фун. наукам. Вып. 2, МГУ,1998 г., с.164.
4) Шарипов А.С. Об изометрии поверхностей, изометричных по сечениям //ДАН РУз., №3 , 1998 г., с. 5-8.
5) Шарипов А.С. О некоторых свойствах гиперповерхностей изометричных по сечениям в R^4 // Узб. мат. журнал № 3 ,1998 г.,с.98-103.
6) Шарипов А.С. Об одном условии изометрии поверхностей, изометричных по сечениям в R^n // Тезисы докладов ИНПРИМ-98, г. Новосибирск ,1998 г., с. 105-106.
7) Артыкбаев А., Шарипов А. С. Поверхности изометричные по сечениям // Сб.науч.статей мол. ученых и студентов, № 2 , Т.Ун-т 1998 г., с.6-10.
8) Шарипов А.С. О свойстве цилиндрического отображения поверхностей, изометричных по сечениям // Сб. науч. статей мол.ученых и студентов , № 2 , Т. Ун-т 1998 г., с.10-13.
9) Шарипов А.С. О свойствах разверток многогранника, сохраняющих изометрию по сечениям и кривизны// Деп. рукопись, ГФНТИ при ГКНТ РУз. , № 2704-Уз 99, 23 с.
10) Шарипов А.С. Поверхности изометричные по сечениям и их свойства// Деп. рукопись, ГФНТИ при ГКНТ РУз., № 2705-Уз 99, 28 с.

Кесимлари бўйича изометрик сиртлар ва уларнинг хоссалари.

АННОТАЦИЯ

Диссертацияда кесимлари бўйича изометрик сиртлар тушунчаси киритилган.

Биринчи бобда кесимлари бўйича изометрик сиртларнинг хоссалари ўрганилган ва улар кўпхиллик қатламаси бўлишининг зарурий ва етарлилик шартлари келтирилган.

Иккинчи бобда учта нокомпланар йўналишларга нисбатан кесимлари бўйича изометрик бўлган сиртларнинг ўзаро изометриклиги исботланган. Кесимлари бўйича изометрик сиртларнинг изометрик бўлишини таъминловчи баъзи бир етарлилик шартлари топилган.

Учинчи бобда кесимлари бўйича изометрия тушунчаси кўпёқлар учун умумлаштирилган. Бу кўпёқлар ёйилмаларининг инварианти топилиб, унинг монотонлиги исботланган. Инвариантдан фойдаланиб шартли эгрилик тушунчаси киритилган ва унинг хоссалари ўрганилган. Шартли эгрилик бўйича тиклаш масаласи ечилган.

Surfaces with isometries on sections and their properties.

Summary.

In the dissertation the notion of isometry surfaces on section is introduced.

In the first chapter the properties of surfaces with isometries on sections are studied and necessary and sufficient restrictions which give surfaces with isometries on sections which generate the foliation on the manifold are given.

In the second chapter it is proved that the surfaces which have three non-complanar isometric sections ,are mutually isometric. There are given sufficient conditions under which the surfaces, which have isometric sections, are mutually isometric.

In the third chapter the isometry on sections for polyhedrons is generalized. The invariant of the development that preserves the isometry on sections is found and it is monotonicness is proven. The notion of conditional curvature is introduced using invariant and it is properties are studied. The problem of the reconstruction with conditional curvuture is solved.