НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ

На правах рукописи

УДК 519.6 : 551.465(043.3)

СКЛЯР Сергей Николаевич

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ГИДРОДИНАМИКИ ВОДОЕМОВ

05.13.16. – применение вычислительной техники,
математического моделирования и математических
методов в научных исследованиях

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Бишкек 2001

Работа выполнена в Научно-исследовательском центре математического моделирования и Институте физики и механики горных пород НАН Кыргызской Республики

Научный консультант: д.ф.-м.н., профессор, член-корр. НАН КР **Кочергин В.П.**

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., профессор **Пененко В.В.** (Россия, г. Новосибирск)
д.ф.-м.н., профессор **Рафатов Р.Р.**
д.ф.-м.н., профессор **Асанов А.А.**

Ведущая организация: Морской гидрофизический институт НАН Украины (г. Севастополь)

Защита состоится «_24_» _мая_ 2001 г. в _14^{00}_ час. на заседании Специализированного совета Д 05.98.81 при Институте автоматики НАН Кыргызской Республики по адресу: 720071, г. Бишкек, пр. Чуй, 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Институте автоматики НАН Кыргызской Республики

Автореферат разослан «____»_______________2001 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета
к.т.н., с.н.с. К.А. Пресняков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы обусловлена потребностями математического моделирования, являющегося мощным средством для исследования гидрофизических процессов, протекающих в водоемах различной природы. Особенно велика его роль при изучении полей течений, информацию о которых в настоящее время невозможно получить только из данных наблюдений. Знание структуры течений необходимо для решения целого ряда научных и прикладных задач, связанных с прогнозом погоды, навигацией, рыбным промыслом, распространением загрязняющих субстанций и т.д. Разработка дискретной (численной) модели, теоретическое и экспериментальное исследование её свойств – один из важнейших этапов математического моделирования, от качества его реализации во многом зависит достоверность окончательных результатов моделирования, а значит правильность выводов и рекомендаций. Поэтому высок современный уровень требований, предъявляемых к используемым в гидротермодинамических моделях разностным схемам: он предполагает преемственность основополагающих свойств операторов исходной и отвечающей ей разностной задач. К числу таких свойств относятся прежде всего интегральные законы, присущие исходной дифференциальной задаче и отражающие поведение моделируемого объекта в целом. Способность разностной схемы сохранять в дискретной форме эти интегральные законы особенно значима для нелинейных задач, а также для задач с быстро изменяющимися решениями, если, по тем или иным причинам, шаг разностной сетки не может быть выбран достаточно малым, чтобы обеспечить теоретически обоснованную сходимость. В подтверждение сказанного достаточно упомянуть монографии Г.И. Марчука (1989), А.А. Самарского и Ю.П. Попова (1980), P.J. Roache (1976), Н.М. Булеева (1989). Отметим также необходимость сохранения схемой свойства монотонности, если оно было присуще исходному дифференциальному оператору (А.А. Самарский, 1983; L. Collatz, 1964). Решения многих гидротермодинамических задач обладают особенностями, такими, как пограничные и внутренние переходные слои. Примерами могут служить задачи о переносе тепла с большими числами Пекле, о течениях Навье-Стокса с большими числами Рейнольдса, пограничные слои возникают и в задачах общей циркуляции океана. Наличие относительно малых подобластей с большими градиентами решения делает такие задачи сложными для численной реализации и требует использования разностных схем, учитывающих их специфику (E.P. Doolan, J.J. Miller & W.H.A. Schilders, 1980; P.J. Roache, 1976). Аналогичные проблемы возникают и при решении задач для интегральной функции тока и уровенной поверхности в моделях гидротермодинамики глубоких водоёмов, учитывающих рельеф дна (см., например, Г.И. Марчук, В.П. Кочергин, А.С. Саркисян и др., 1980). Более того, эти задачи требуют качественной аппроксимации не только решения, но и его производных, так как последние входят в определение баротропных составляющих горизонтальных компонент скорости и, тем самым, точность их расчёта существенно влияет на точность расчёта по модели в целом. Напомним также, что краевые условия в задаче для определения уровенной поверхности имеют форму "наклонных" производных, что служит ещё одним аргументом для использования алгоритмов, дающих возможность вычислять в рамках единого подхода как решение задачи, так и его производные.

Таким образом, безусловно актуальной является проблема поиска методов дискретизации, позволяющих автоматически сохранять вышеуказанные свойства при переходе от исходной дифференциальной задачи к её дискретному аналогу и дающих возможность в рамках единого подхода аппроксимировать как решение, так и его производные. К сожалению, ни один из известных нам методов построения разностных схем не обладает такой универсальностью, поэтому в данной работе и была предпринята попытка создания подобной методики.

Цель работы состояла в том, чтобы создать методику дискретизации, позволяющую автоматически сохранять основные свойства дифференциальных задач в их разностных аналогах и дающую возможность в рамках единого подхода аппроксимировать как решение задачи, так и его производные; разработать на базе этой методики дискретные математические модели гидротермодинамики водоемов, эффективно реализуемые на ЭВМ.

Следующие научные задачи потребовалось решить для реализации этой цели.

➢ Формирование идеологии нового метода дискретизации, условно названного "проекционным вариантом интегро-интерполяционного метода" (ПВИИМ), включая методику доказательства оценок сходимости разностных схем, построенных с использованием ПВИИМ, и способы повышения точности этих схем.

➢ Построение на основе ПВИИМ новых разностных схем для решения различных классов сингулярно возмущенных задач с краевыми условиями общего вида. Теоретическое обоснование их свойств, включая исследования вопросов корректности, сходимости, проверку интегральных характеристик.

➢ Создание вычислительного алгоритма и набора тестовых задач для экспериментального исследования новых разностных схем и их сравнения с ранее известными. Проведение вычислительных экспериментов.

➢ Теоретическое исследование модели мелкомасштабной турбулентности, основанной на системе энергетических уравнений ("$b-\varepsilon$" модели) и обоснование вычислительного алгоритма для ее решения.

➢ Разработка на базе новых методов и алгоритмов физически полной, высокого пространственного разрешения численной модели динамики глубокого водоема с параметризацией верхнего квазиоднородного слоя и учетом реальной орографии. Проведение серии численных расчетов по этой модели для бассейна Черного моря с использованием реальных данных и анализ полученных результатов.

➢ Построение дискретной модели для расчета нестационарных турбулентных течений и процессов переноса тепла в водоемах вытянутой формы, обладающей аналогами основных интегральных законов, присущих исходной дифференциальной задаче и допускающей возможность постановки различных краевых условий во входном и выходном сечениях водоема. Численное моделирование термодинамического режима в Нурекском водохранилище с использованием реальной гидрометеорологической информации и анализ полученных результатов.

Основная идея предлагаемой в работе методики дискретизации состоит в конструировании интегро-разностного тождества специального вида, которое позволяет использовать свойства не только исходного дифференциального оператора, но и сопряженного к нему, а также в способе построения тестовых функций. Все это в итоге дает возможность сохранять в разностном аналоге как интегральные свойства исходной задачи, так и ее специфические особенности, а также наряду с решением задачи, если это необходимо, вычислять и его производные. Анализ интегро-разностного тождества позволяет доказывать оценки сходимости построенных разностных схем, а его модификация дает возможность уточнять приближенное решение.

Методика исследований включает:

➢ *теоретический анализ* разностных схем, построенных при помощи ПВИИМ для различных задач, возникающих в гидротермодинамических моделях: с использованием средств и методов современных *анализа* и *вычислительной математики* доказываются оценки сходимости, исследуются качественные свойства новых схем (монотонность, консервативность), параллельно производится их сравнение с известными ранее методами решения этих задач;

- *экспериментальный сравнительный анализ* новых и известных по литературе разностных схем; с этой целью используются тестовые задачи с известными точными решениями и алгоритм вычисления порядка сходимости разностной схемы;
- *вычислительные эксперименты с использованием реальных данных,* которые проводятся с разработанными на основе новых вычислительных методов и алгоритмов двух- и трехмерными моделями гидродинамики водоемов;
- *сравнение результатов* вышеуказанных численных экспериментов как с результатами, полученными при помощи других моделей, так и с данными наблюдений.

Такой подход, на наш взгляд, является методически верным и позволяет сделать объективные выводы о свойствах предлагаемых методов, а значит гарантирует **обоснованность и достоверность** полученных в диссертации результатов.

Научная новизна исследований определяется следующими фактами:

- Предложенный в работе метод построения разностных схем (ПВИИМ) является оригинальным, позволяет аппроксимировать не только решение задачи, но и его производные, последнее принципиально для гидродинамических моделей, использующих интегральные функции. В частности, благодаря ПВИИМ удалось решить проблему аппроксимации краевых условий типа "наклонная производная" и построить новые разностные схемы для уровенной поверхности и функции тока.
- Построены и исследованы новые равномерно-точные разностные схемы для различных классов сингулярно возмущенных задач, традиционно считающихся сложными для численного решения. ПВИИМ позволяет получать как новые, так и многие из известных ранее разностных схем; в этих случаях сопутствующая ПВИИМ методика исследования свойств схемы позволяет доказать оценки сходимости более точные, чем были доказаны ранее, кроме того, удается построить естественные для этих схем варианты аппроксимации производных от решения.
- На основе предложенных в диссертации вычислительных алгоритмов разработаны новые двух- и трехмерные дискретные модели гидротермодинамики водных бассейнов. Результаты численных экспериментов, проведенных с учетом реальных данных, позволяют сделать вывод о том, что эти модели достаточно эффективны и, в некотором смысле, совершеннее использовавшихся ранее.

Автор выносит на защиту:

1. Метод построения разностных схем (ПВИИМ), который включает принципы формирования интегро-разностного тождества и выбора тестовых функций, методику доказательства оценок сходимости и способы повышения точности разностных схем.

2. Оценки устойчивости для решений сеточных уравнений с монотонными операторами различных типов и сопутствующие этим оценкам теоретические разработки.

3. Новые разностные схемы для решения различных классов сингулярно возмущенных краевых задач, построенные при помощи ПВИИМ, и результаты теоретических и экспериментальных исследований качественных свойств этих схем, включая равномерные по малому параметру оценки сходимости.

4. Монотонную разностную схему для расчета уровенной поверхности вместе с основанной на ПВИИМ методикой аппроксимации краевых условий типа "наклонной" производной.

5. Разностные схемы с дозированной счетной вязкостью и аппроксимации решения задачи диффузионно-конвективного переноса, построенные при помощи "$p-h$" версии метода конечных элементов.

6. Результаты теоретических исследований "$b-\varepsilon$" модели турбулентности и метод ее полуаналитической аппроксимации.

7. Дискретную многоуровенную трехмерную модель гидротермодинамики глубокого водоема, основанную на системе примитивных уравнений, с параметризацией верхнего квазиоднородного слоя и учетом реальной орографии, а также результаты численных экспериментов с этой моделью, проведенных для бассейна Черного моря.

8. Численную модель для расчета нестационарных турбулентных течений и процессов переноса тепла в водоемах вытянутой формы, обладающую аналогами основных интегральных законов, присущих исходной дифференциальной задаче и допускающую возможность постановки различных краевых условий во входном и выходном сечениях водоема. Результаты численного моделирования термодинамического режима в Нурекском водохранилище.

Теоретическая и практическая значимость работы. Предложенный в диссертации проекционный вариант интегро-интерполяционного метода (ПВИИМ) апробирован на различных классах задач с пограничными слоями, традиционно считающихся сложными для численной реализации. Результаты работы позволяют сделать вывод о том, что ПВИИМ способен достаточно эффективно учитывать как глобальные свойства дифференциальных задач, так и их специфические особенности, а значит, область его применения может быть существенно расширена, что говорит об определенной *теоретической значимости и о потенциальных возможностях развития полученных результатов.*

На базе предложенных в работе алгоритмов созданы комплексы программ для численного решения задач, возникающих при моделировании гидротермодинамических процессов в водоемах. Разработанные алгоритмы и программы переданы для использования в ряд организаций. В частности, результаты диссертации, связанные с разработкой численной модели гидротермодинамики Черного моря, нашли практическое использование в Морском гидрофизическом институте АН Украины (г. Севастополь), по заказу которого в 1991, 92 г.г. была выполнена работа по теме "Разработка модели и создание пакета программ для расчетов гидротермодинамики Черного моря". Новые разностные схемы для решения задач с пограничными слоями и полуаналитические апроксимации "$b-\varepsilon$" модели турбулентности вошли в работу по теме "Математические модели циркуляции океана", выполненную в 1992 г. для Государственного океанографического института (г. Москва).

ПВИИМ, как один из методов построения разностных схем, вошел в лекционный курс "Методы вычислительной математики", который уже в течение нескольких лет читается студентам Естественно-технического факультета Кыргызско-Российского Славянского университета.

Апробация работы. Основные результаты диссертации опубликованы в 33 научных статьях и, по мере их получения, докладывались на следующих конференциях и семинарах: на Конференции математиков и механиков Киргизии, посвященной 70-летию Октября (Фрунзе, 1987); на 3 Всесоюзной школе-семинаре "Численные методы для высокопроизводительных систем" (Фрунзе, 1988); на Всесоюзной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск, 1990); на Всесоюзной конференции "Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач" (Бишкек, 1991); на международной конференции "Современные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск, 1995); на ежегодных научных конференциях в Кыргызско-Российском Славянском университете (1995-2000); на семинаре академика АН Кыргызстана Иманалиева М.И. в Институте математики АН Кыргызстана и на Ученых советах этого Института (Фрунзе, 1985-92); на семинаре академика АН Казахстана Султангазина У.М. в Институте математики АН Казахстана (Алма-Ата, 1988); на семинаре член-корр. АН

Украины Черкесова Л.В. в Морском гидрофизическом институте АН Украины (Севастополь, 1989); на семинаре академика АН СССР Марчука Г.И. в Институте вычислительной математики Российской АН (Москва, 1990); на семинаре член-корр. АН КР Кочергина В.П. в Научно-исследовательском центре математического моделирования АН КР и на Ученых советах Центра (Бишкек, 1992-95); на семинаре профессора Анзорге Р. в Институте математики Гамбургского университета (Гамбург, ФРГ, 1993); на семинаре профессора Ю.Зюндерманна в Институте мореведения Гамбургского Университета (Гамбург, ФРГ, 1990, 91, 94); на Ученых советах Института физики и механики горных пород НАН Кыргызской Республики (Бишкек, 1995-2000), на семинаре академика НАН КР Шаршеналиева Ж.Ш. в Институте автоматики НАН КР (Бишкек, 2001).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, основного текста, который тематически разделен на две части, заключения, списка литературы, насчитывающего 214 наименований, и приложения. Часть первая основного текста содержит четыре главы, часть вторая – три главы. Диссертация включает 21 таблицу и 17 рисунков, расположенных по тексту, ее полный объем – 404 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждается актуальность темы, формулируются цель и задачи проводимых исследований, определяется их место в общей картине научных разработок по данной теме и дается краткое изложение (по главам и параграфам) основных результатов диссертации.

В работе излагается методика построения разностных схем для решения достаточно широкого круга дифференциальных задач. Предлагаемый метод основан на проекционном принципе Петрова-Галеркина и включает элементы интегро-интерполяционного метода (см. Г.И. Марчук и В.М. Агошков, 1981; А.А. Самарский, 1983), поэтому он условно назван "проекционный вариант интегро-интерполяционного метода" (ПВИИМ). В качестве основного объекта для приложения ПВИИМ в диссертации выбран класс так называемых сингулярно возмущенных краевых задач или задач для дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных (см., например, А.Б. Васильева и В.Ф. Бутузов, 1973; R.E. O'Malley, Jr. 1974 и др.). Известно, что такие задачи возникают в гидротермодинамических моделях и, как уже отмечалось выше, предъявляют повышенные требования к разностным схемам, осуществляющим их численную реализацию. Одним из основных критериев качества разностной схемы, аппроксимирующей сингулярно возмущенную краевую задачу, является требование равномерной по малому параметру сходимости приближенного решения к точному. Принято считать (см., например, E.P. Doolan, J.J. Miller & W.H.A. Schilders, 1980), что наличие равномерной сходимости свидетельствует о том, что разностная схема в достаточной степени отражает специфику сингулярно возмущенной задачи. Реализация этого критерия существенно сужает класс подходящих разностных схем и усложняет технику получения оценок сходимости, так как требует априорной информации об асимптотических свойствах решения исходной задачи и детального отслеживания параметрических зависимостей в константах этих оценок. Тем не менее, схемы, обладающие свойством равномерной по малому параметру сходимости, являются в некотором смысле универсальными: они гарантируют достаточную точность решения при любых соотношениях между малыми параметрами и размерами сеточных ячеек.

Можно выделить два основных подхода к конструированию равномерно сходящихся численных алгоритмов для сингулярно возмущенных краевых задач. Первый – связан с построением разностных схем "специального" вида на равномерных сетках и берет свое начало с работы А.М. Ильина (1969). Второй подход основан на использовании неравномерных сеток, адаптирующихся к особенностям решения, и исторически связан с именем Н.С. Бахвалова (1969). Построенные на основе ПВИИМ разностные аппроксимации используют неравномерные сетки, однако, в данной работе мы не касаемся методов адаптации этих сеток, учитывающих свойства решения. Тем не менее, ПВИИМ, на наш взгляд, не исключает возможности дополнительного применения некоторых методов адаптации сетки и даже может быть использован для выработки критериев такой адаптации. Учет специфики исходной дифференциальной задачи в предлагаемом подходе осуществляется методом дискретизации автоматически, таким образом, схемы, построенные при помощи ПВИИМ, можно отнести к схемам специального вида.

Остановимся кратко на методах, обычно используемых при построении схем специального вида. Метод экспоненциальной подгонки используется в большой группе работ, представленных монографией E.P. Doolan, J.J. Miller & W.H.A. Schilders (1980), а также в работах А.М. Ильина (1969), В.Н. Игнатьева и А.М. Задорина (1980, 81). При исследовании вопросов сходимости здесь применяется метод двух сеток, восходящий к уже упоминавшейся работе А.М. Ильина (см. также J.J. Miller, 1978), либо метод двухсторонних оценок (R.B. Kellog & A. Tsan, 1978). Некоторыми авторами при построении аппроксимаций для двухточечных сингулярно возмущенных краевых задач используется метод усечения точной разностной схемы, предложенной А.А. Самарским (М.В. Алексеевский, 1981; К.В. Емельянов, 1980, 83; Г.И. Шишкин, 1982). Имеются работы, в которых применяется аппроксимация сплайнами, например, J.E. Flaherty & W. Mathon (1980), K. Surla (1987), K. Surla & Uzelac (1990). И, наконец, большая группа работ посвящена исследованию проекционно-сеточных методов и, в частности, метода конечных элементов: I. Babuska et al. (1980, 82, 84), P.P.N.de Groen & P.W. Hemker (1979), J.W. Barret & K.W. Morton (1980, 81), A.R. Mitchell et a1. (1981), E. O'Riordan (1984), P. Bar-Yoseph & M. Israeli (1986), D. Givoli (1988), R.E. Bank et a1. (1990), Б.М. Багаев и В.В. Шайдуров (1977), Б.М. Багаев (1988). Однако, в ситуациях, когда наряду с решением сингулярно возмущенной краевой задачи требуется вычислять и его производные, вышеперечисленные методы, на наш взгляд, оказываются недостаточно эффективными. Кроме того, эти методы, за исключением метода конечных элементов, недостаточно удобны для обобщения на многомерный случай и для краевых условий, включающих значения производных на границе области. Предлагая ПВИИМ, мы надеемся на, хотя бы частичное, решение этих проблем.

Часть первая (Ч.I) диссертации содержит четыре главы, в ней обсуждаются методы построения разностных схем для решения задач с пограничными слоями.

В главе I (Ч.I) рассматривается круг вопросов, связанных с понятиями "монотонность" и "принцип максимума". В применении к разностным задачам эти понятия дают эффективный инструмент исследования их корректности и доказательства оценок сходимости в сильной сеточной норме. Многие результаты, связанные с принципом максимума для сеточных операторов, хорошо известны по монографиям А.А. Самарского и А.В. Гулина (1973), А.А. Самарского (1983). Однако они, вообще говоря, не применимы в случаях, когда разностная задача получена после аппроксимации дифференциальной с оператором дивергентного вида. Этот пробел восполняют работы Е.И. Голанта (1978), Н.В. Каретkиной (1980), В.П. Ильина и Г.Я. Перекрестовой (1981), С.Н. Скляра и Л.А. Алтынниковой [15]. В **§1.1** введены и исследованы классы сеточных операторов монотонного вида (см. L. Collatz, 1964), обобщающие те, что рассмотрены А.А. Самарским и Е.И. Голантом. В **§1.2** для уравнений с операторами из этих классов доказаны оценки устойчивости. В этом же параграфе рассмотрены уравнения специального вида относительно неизвестных значений сеточных функций $u_h \equiv \{u_i\}_{i=0}^N$ и $\psi_h \equiv \{\psi_i\}_{i=0}^N$.

$$
\begin{cases}
\varsigma_0 u_0 - \eta_0 \psi_0 = \varphi_0, \\
\psi_i + M_i u_i - E_i u_{i+1} = F_i^{(0)}, \quad i = 0,1,2,\dots,N-1; \\
-\psi_{i+1} + G_{i+1} u_{i+1} - H_{i+1} u_i = F_{i+1}^{(1)}, \\
\varsigma_1 u_N + \eta_1 \psi_N = \varphi_1,
\end{cases} \tag{1}
$$

возникающие при использовании проекционного варианта интерго-интерполяционного метода. При определенных условиях на коэффициенты системы (1) доказаны оценки вида:

$$
\|u_h\|_{h,\infty} \le K_0 \,|\, \eta_0 F_0^{(0)} + \varphi_0 \,|\, + K \sum_{k=1}^{N-1} |\, F_k^{(0)} + F_k^{(1)} \,| + K_N \,|\, \eta_1 F_N^{(1)} + \varphi_1 \,|, \tag{2}
$$

в сеточной норме $\|u_h\|_{h,\infty} = \max\{\,|u_i|: \; i = 0,1,\dots,N\}$; аналогичные оценки получены и для сеточной функции Ψ_h. В **§1.3** предложен прямой метод решения системы (1) основанный на сведении задачи (1) к задаче с начальными условиями. Результаты главы 1 и, в частности, оценки вида (2) играют ключевую роль при исследовании сходимости разностных схем в главе 2.

Глава 2 (Ч.I) посвящена систематическому применению ПВИИМ при построении разностных аппроксимаций для различных классов сингулярно возмущенных задач с краевыми условиями общего вида: рассмотрены одномерные уравнения первого и второго порядков, причем последние как с самосопряженным, так и с несамосопряженным дифференциальными операторами, в консервативной и неконсервативной формах; в двумерном случае рассматривались эллиптические уравнения второго порядка с градиентной и дивергентной формой младших членов; предложены различные безусловно устойчивые варианты аппроксимации по времени в параболических задачах.

Идеология излагаемого в данной главе ПВИИМ предложена в работах автора [6-9], развивалась в статьях [26, 30, 32], а для двумерного случая реализована в [12, 19, 29]. Отметим также работу В.В. Пененко (1993), в которой использован близкий к ПВИИМ метод дискретизации адвективно-диффузионных уравнений.

В нескольких словах опишем сущность предлагаемой методики. Для каждой сеточной ячейки конструируется интегро-разностное тождество, в которое входят: искомое решение, произвольная тестовая функция и набор параметров, аппроксимирующих данные задачи. Следующим шагом – осуществляется выбор достаточного количества линейно-независимых тестовых функций: выбирая их из ядра некоторого дифференциального оператора специального вида (его можно трактовать как сопряженный к оператору, аппроксимирующему исходный дифференциальный оператор) мы, с одной стороны, избавляемся от "главного" интегрального члена в тождестве, а с другой стороны, привносим специфику задачи в разностную схему. Теперь, отбрасывая ошибку аппроксимации, выделяемую в процессе построения интегро-разностного тождества, в одномерном случае сразу приходим к семейству разностных схем, в случае двумерной задачи необходимо дополнительно позаботиться об аппроксимации оставшихся в тождестве одномерных интегралов. На этом этапе некоторые известные схемы могут быть получены в рамках ПВИИМ, в этих случаях удается либо уточнить доказанные для них ранее оценки скорости сходимости, либо доказать их для более широкого класса сеток и краевых условий общего вида. Построенные при помощи ПВИИМ аппроксимации производных, на наш взгляд, служат естественным дополнением для этих схем. Кроме того, для различных классов двухточечных задач получены новые аппроксимации как решения, так и соответствующего потока, гарантирующие второй порядок равномерной по малому параметру сходимости на произвольной неравномерной сетке. Эти аппроксимации построены на пути уточнения схем первого этапа, используемая при этом априорная информация об асимптотических свойствах решения была получена не выходя за рамки ПВИИМ.

В **§2.1** рассмотрена начальная задача для уравнения первого порядка с малым параметром при производной. При помощи ПВИИМ для нее построено семейство разностных схем, гарантирующих второй порядок равномерной по малому параметру сходимости на произвольной неравномерной сетке. В частности, в рамках ПВИИМ получена схема E.P. Doolan, & W.H.A. Schilders, (1980) и для нее доказана оценка скорости сходимости, характеризующая асимптотические свойства схемы. Подобная оценка ранее не была известна. Результаты этого параграфа опубликованы в [30] и используются при построении аппроксимаций по времени для параболических задач в §2.8.

В **§§2.2, 2.3** рассматривается задача:

$$
\varepsilon u''(x) + a u'(x) - b(x) u(x) = f(x), \quad x \in (0,1); \tag{3}
$$

$$
\varsigma_0 u(0) - \eta_0 \varepsilon u'(0) = \varphi_0, \quad \varsigma_1 u(1) + \eta_1 \varepsilon u'(1) = \varphi_1, \tag{4}
$$

для которой ε – малый положительный параметр, $b(x) \ge 0$ при $x \in [0,1]$, а коэффициенты в граничных условиях (4) удовлетворяют неравенствам:

$$
\varsigma_0, \varsigma_1, \eta_0, \eta_1 \ge 0; \quad \varsigma_0 + \eta_0 > 0, \varsigma_1 + \eta_1 > 0.
$$

Задача (3), (4) при $b(x) = 0$ является простейшей математической моделью диффузионно-конвективного процесса, и, как правило, используется многими авторами при разработке новых разностных схем для задач тепло-массо-переноса. При записи формул, во избежание их громоздкости, ограничимся лишь этим случаем (он рассмотрен в **§2.2**). Применяя к задаче (3), (4) вышеописанный процесс ПВИИМ, на первом этапе получаем разностную задачу вида (1) со следующими значениями коэффициентов ($i = 0,1,\dots N-1$):

$$\begin{cases} E_i \equiv M_i \equiv \dfrac{\varepsilon}{h_{i+1/2}}\left[1+\overline{R}\mu(\overline{R})+\overline{R}\right]_{i+1/2}, \\ H_{i+1} \equiv G_{i+1} \equiv \dfrac{\varepsilon}{h_{i+1/2}}\left[1+\widetilde{R}\mu(\widetilde{R})-\widetilde{R}\right]_{i+1/2}, \\ F_i^{(0)} \equiv -\overline{f}_{i+1/2}\, h_{i+1/2}\, \dfrac{1+\mu(\overline{R}_{i+1/2})}{2} \\ F_{i+1}^{(1)} \equiv -\widetilde{f}_{i+1/2}\, h_{i+1/2}\, \dfrac{1-\mu(\widetilde{R}_{i+1/2})}{2} \end{cases} \tag{5}$$

где: $\mu(\mathrm{R}) = \mathrm{cth R} - 1/\mathrm{R}$, $\overline{\mathrm{R}} = \overline{\mathrm{a}}\mathrm{h}/(2\varepsilon)$, $\widetilde{\mathrm{R}} = \widetilde{\mathrm{a}}\mathrm{h}/(2\varepsilon)$. В случае, когда параметры задачи (1), (5) удовлетворяют условиям:

$$\left|\overline{f}_{i+1/2} - f(x)\right| + \left|\overline{a}_{i+1/2} - a(x)\right| + \left|\widetilde{f}_{i+1/2} - f(x)\right| + \left|\widetilde{a}_{i+1/2} - a(x)\right| \le Ch,$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0,1,\dots N-1,\ h \equiv \max_i \{h_{i+1/2}\}$$

и коэффициент $a(x)$ уравнения (3) не обращается в нуль, доказана оценка:

$$\left\|u_h - u\right\|_{h,\infty} + \left\|\psi_h - \varepsilon u'\right\|_{h,\infty} \le Ch \tag{6}$$

с константой "С" не зависящей от ε и параметров сетки.

Отметим, что известная схема А.М. Ильина (см. также D.N.de G. Allen & R.V. Southwell, 1955) может быть получена из системы (1), (5), если положить:

$$\overline{a}_{i+1/2} = a(x_i),\ \widetilde{a}_{i+1/2} = a(x_{i+1}),\ \overline{f}_{i+1/2} = f(x_i),\ \widetilde{f}_{i+1/2} = f(x_{i+1}),\ \text{при } i = 0,1,\dots N-1.$$

Схема T.M.El-Mistikawy & M.J.Werle (1978), сходимость которой в случае первой краевой задачи и для равномерной сетки была исследована в работах A.E.Berger et al. (1981), E.C.Gartland Jr. (1988), входит в (1), (5) при

$$\overline{a}_{i+1/2} = \widetilde{a}_{i+1/2} = [a(x_i) + a(x_{i+1})]/2 \equiv a_{i+1/2}$$

$$\overline{f}_{i+1/2} = \widetilde{f}_{i+1/2} = [f(x_i) + f(x_{i+1})]/2 \equiv f_{i+1/2}.$$

При $b(x) \neq 0$ в аналогичной ситуации, семейство схем, полученное при помощи ПВИИМ в **§2.3**, содержит различные варианты схем полной экспоненциальной подгонки, исследовавшиеся в работах Г.М. Шишкина и В.А. Титова (1976), J. Carroll & и. J.J. Miller (1980), A.E. Berger et al. (1984), Lin Peng-cheng & Sun Guangfu (1990). Краевые задачи со смешанными граничными условиями для уравнения диффузии-конвекции изучались К.В. Емельяновым (1975), А.М. Задориным и В.Н. Игнатьевым (1986), O. Axelson & G.F. Carey (1985), результаты в этом направлении имеются в монографии E.P. Doolan, J.J. Miller & W.H.A. Schilders (1980). Заметим, однако, что аппроксимации для краевых условий и производных решения, даваемые системой (1),(5), отличаются от предложенных в упомянутых выше работах.

Если рассматриваемое семейство сеток является квазиравномерным, то оценка (6) для задачи (1),(5) может быть уточнена; связанные с этим уточнением результаты также приведены в **§§2.2, 2.3.** Далее, в рамках ПВИИМ, производится модификация схемы (1),(5); с этой целью на основе формул ПВИИМ, полученных на предыдущем этапе, исследуются асимптотические свойства ошибки аппроксимации и главная ее часть сохраняется в разностных уравнениях. Построено несколько вариантов модифицированных схем, приведем один из них, он имеет вид (1) с коэффициентами ($i = 0,1,\dots N-1$):

$$\begin{cases} E_i \equiv M_i \equiv \varepsilon \dfrac{\rho_{i+1/2}}{h_{i+1/2}}\left[1+R\mu(R)+R\right]_{i+1/2}, \\ H_{i+1} \equiv G_{i+1} \equiv \varepsilon \dfrac{\rho_{i+1/2}}{h_{i+1/2}}\left[1+R\mu(R)-R\right]_{i+1/2}, \\ F_i^{(0)} \equiv -\rho_{i+1/2}\left[fh\dfrac{1+\mu(R)}{2} - \dfrac{h^2}{4}\nu(R)D_x f\right]_{i+1/2}, \\ F_{i+1}^{(1)} \equiv -\rho_{i+1/2}\left[fh\dfrac{1-\mu(R)}{2} + \dfrac{h^2}{4}\nu(R)D_x f\right]_{i+1/2} \end{cases} \tag{7}$$

Здесь: $\nu(R) \equiv \mu(R)/R$ и $\rho_{i+1/2} \equiv \left[1 + \dfrac{h^2}{4\varepsilon}\nu(R)D_x a\right]_{i+1/2}^{-1}$.

В работе доказано, что задача (1),(7) порождает сеточный оператор монотонного вида и, при определенных условиях на коэффициенты уравнения (3), гарантирует равномерную по ε сходимость со вторым порядком на произвольной неравномерной сетке:

$$\|u_h - u\|_{h,\infty} + \|\psi_h - \varepsilon u'\|_{h,\infty} \le Ch^2.$$

Таким образом, в отличие от схем А.М .Ильина и T.M.El-Mistikawy & M.J. Werle, схема (1), (7) обладает равномерной по малому параметру supra-сходимостью (H.O. Kreiss et al.,1986; J.A. Mackenzie & K.W. Morton, 1992), что играет существенную роль при аппроксимации динамического оператора в задачах циркуляции жидкости в водоеме (см. В.П. Кочергин, 1988).

В **§2.4** рассматривается самосопряженный вариант уравнения (3): $a(x) = 0$, $b(x) > 0$. В случае первой краевой задачи равномерно точные разностные схемы для этого уравнения были построены в работе A.P. Hegarty, J.J. Miller & E. O'Riordan (1980), третья краевая задача изучалась А.М. Задориным (1989). В настоящей работе для самосопряженной задачи реализуется вышеописанная методология ПВИИМ: построено семейство схем, гарантирующих первый порядок равномерной сходимости на произвольной неравномерной сетке, оно включает, в частности, вышеупомянутую схему A.F. Hegarty el al., и схему с переменным подгоночным параметром, описанную у E.P. Doolan, J.J. Miller & W.H.A. Schilders (1980); исследована сходимость этих схем для случая квазиравномерных сеток; получены модифицированные схемы, обладающие вторым порядком равномерной сходимости на произвольной неравномерной сетке.

Первая и третья краевые задачи для уравнения (3) в консервативной форме (слагаемое au' заменено на $(au)'$) рассматривается в **§2.5**. При помощи ПВИИМ построено семейство аппроксимаций вида (1); на классе квазиравномерных сеток для него доказана сходимость типа $h^2/(\varepsilon + h)$, а также проверено выполнение дискретных аналогов основных интегральных законов, присущих исходной задаче. Отметим, что разностные аппроксимации несамосопряженного уравнения в консервативной форме получены и исследованы также в работах R.B. Kellogg et al. (1980), A.E. Berger (1980), и в монографии E.P. Doolan, J.J. Miller & W.H.A. Schilders (1980), однако, вариант, предложений в настоящей работе, отличается от схем из указанных источников, кроме того, он позволяет получить аппроксимацию производной.

В **§§2.6, 2.7** ПВИИМ используется для дискретизации двумерных эллиптических уравнений, рассмотрены уравнения как с градиентной

(**§2.6**), так и с дивергентной (**§2.7**) формой младших членов. Основные результаты этих параграфов опубликованы в работе [29]. Обсуждению вопросов, связанных с аппроксимацией двумерных сингулярно возмущенных эллиптических краевых задач, посвящено достаточно много работ. В этом множестве выделим работы Б.М. Багаева (1989), Н.И. Булеева (1989), В.А. Гущина и В.В. Щенникова (1974), В.Ф. Козлова (1977), В.П. Кочергина (1978), В.Д .Лисейкина (1983), Г.М. Шишкина (1979), G.O. Ghen et al. (1993), M.E. Fiadero & G. Veronis (1977), P.W. Hemker (1982), R.B. Kellogg (1980), E.O E.O'Riordan el al. (1991), M.E. Rose (1975). В рамках предлагаемого в диссертации подхода могут быть получены как новые, так и некоторые из ранее известных разностных схем, при этом обеспечивается возможность аппроксимации производных, что, как уже отмечалось, имеет принципиальное значение для вычисления баротропных составляющих движения в моделях циркуляции жидкости в водоеме. Если одномерный случай характерен тем, что различные варианты выбора тестовых функций из ядра оператора, сопряженного к аппроксимирующему исходный, не влияют на получающуюся в итоге схему (различие в схемах определялось различиями в выборе констант, аппроксимирующих коэффициенты уравнения, либо процессом модификации исходной разностной задачи), то в многомерном случае ситуация принципиально иная: ядро соответствующего оператора уже имеет бесконечную размерность. Выбор тестовых функций здесь оказывает существенное влияние как на вид, так и на качественные свойства разностной схемы. Предлагается два способа построения тестовых функций в рамках ПВИИМ для многомерного случая. Первый - может быть охарактеризован как квазиодномерный (в каждой сеточной ячейке тестовая функция является произведением одномерных); второй, на наш взгляд, является по существу двумерным. Приведем вид разностной схемы, получающейся для тестовых функций, выбранных вторым способом в случае уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varepsilon(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\sigma(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] + $$
$$+ a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y).$$

Для каждой сеточной ячейки $(x_i, x_{i+1}) \times (y_i, y_{i+1})$ имеем (полуцелые индексы опущены):

$$\begin{cases} \varphi_i - \varepsilon\left[1 + A\mu(A) + A\right] D_x u = -\Delta x \dfrac{1+\mu(A)}{2} M_y, \\ -\varphi_{i+1} + \varepsilon\left[1 + A\mu(A) - A\right] D_x u = -\Delta x \dfrac{1-\mu(A)}{2} M_y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_j - \sigma\left[1 + B\mu(B) + B\right] D_y u = -\Delta y \dfrac{1+\mu(B)}{2} M_x, \\ -\psi_{j+1} + \sigma\left[1 + B\mu(B) - B\right] D_y u = -\Delta y \dfrac{1-\mu(B)}{2} M_x, \end{cases}$$

Здесь: $\varphi \cong \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial x}, \ \psi \cong \sigma \dfrac{\partial u}{\partial y}, \ A \equiv \dfrac{a\Delta x}{2\varepsilon}, \ B \equiv \dfrac{b\Delta y}{2\sigma};$

$$M_x \equiv \theta^{-1}\left[\frac{(\Delta x)^2}{4\varepsilon}\nu(A) f + S_y^\mu u - S_x^\mu u\right],$$

$$M_y \equiv \theta^{-1}\left[\frac{(\Delta y)^2}{4\sigma}\nu(B) f + S_x^\mu u - S_y^\mu u\right];$$

$$S_x^\mu u \equiv \frac{1+\mu(A)}{2} u_{i+1} + \frac{1-\mu(A)}{2} u_i, \ S_y^\mu u \equiv \frac{1+\mu(B)}{2} u_{j+1} + \frac{1-\mu(B)}{2} u_j;$$

$$\theta \equiv \frac{(\Delta x)^2}{4\varepsilon}\nu(A) + \frac{(\Delta y)^2}{4\sigma}\nu(B).$$

В **§2.8** рассматривается следующая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой обычно сводятся параболические задачи после дискретизации по пространственным переменным с использованием метода конечных разностей:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d\,u(\varsigma,t)}{d\,t} + \mathrm{A}(t) u(\varsigma,t) = g(\varsigma,t), \ \varsigma \in \omega, 0 < t < \mathrm{T}; \\ u(\varsigma,0) = \varphi(\varsigma), \ \varsigma \in \omega. \end{cases} \qquad (8)$$

Здесь: $\varepsilon > 0$, ω – пространственная сеточная область, состоящая из конечного числа узлов, A(t)-оператор, при фиксированном $t \in (0,T)$, действующий в пространстве сеточных функций над $\bar{\omega}$ и являющийся дискретным аналогом эллиптического оператора, при этом считается, что краевые условия учтены оператором A(t) и функцией $g(\varsigma,t)$. С использованием результатов **§2.1** (см. также [15, 30]) для задачи (8) построены различные варианты безусловно устойчивых аппроксимаций, среди которых и аппроксимации, обобщающие известные схемы I.C. Chien (1976), S.V. Patankar & B.R. Baliga (1978); исследованы вопросы их сходимости; изложение опирается на работы [13, 31].

В главе 3 (Ч.I) изучаются возможности "$p-h$" версии метода конечных элементов (МКЭ) при ее использовании для дискретизации задач с пограничными слоями. В традиционном МКЭ пространства аппроксимантов обычно состоят из полиномов максимальная степень которых фиксирована. В результате применения такого МКЭ для дискретизации сингулярно возмущенной краевой задачи получается разностная схема с алгебраической аппроксимационной вязкостью, которая не гарантирует равномерной по малому параметру сходимости приближенного решения к точному. Сходимость в традиционном МКЭ обеспечивается за счет уменьшения верхней границы "h" площадей элементов триангуляции, поэтому его иногда называют "h" версией МКЭ. В отличие от "h" версии, "$p-h$" версия МКЭ обладает дополнительным рычагом ускорения сходимости, им является увеличение максимальной степени "p" полиномов, используемых при построении пространств аппроксимантов. Такие методы изучались в работах I. Babuska et al (1981, 87, 88, 89), B.Q.Guo (1988), M.R.Door (1986), однако, нам не известны приближенные методы, автоматически использующие этот рычаг, т.е. самостоятельно осуществляющие выбор пространства аппроксимантов с целью обеспечения нужного порядка сходимости. Такие методы, самонастраивающиеся по "степени сингулярности", могли бы оказаться полезными при решении сингулярно возмущенных задач. В настоящей главе предлагается численный алгоритм вышеуказанного типа. Рассматривается одномерная задача диффузионно-конвективного переноса. Приближенное решение строится на основе вариационного принципа Бубнова-Галеркина и "$p-h$" версии МКЭ. Для его определения во внутренних точках сеточных ячеек используются пространства полиномов Лежандра; для вычисления значений этого решения в узлах сетки (вообще говоря, неравномерной) получается монотонная разностная схема с "дозированной" алгебраической аппроксимационной вязкостью, насчитывающейся рекуррентно при помощи цепной дроби (**§§3.1, 3.2**). Доказаны равномерные оценки сходимости метода в сеточной (**§3.3**), интегральной "энергетической" норме и норме пространства непрерывных функций (**§3.4**). Излагаемые результаты опубликованы в работах [10, 11].

В главе 4 (Ч.I) приведены результаты численных расчетов для задач с известными решениями, иллюстрирующие работу предложенных в главе 2 новых схем. Для сравнения рассмотрены также некоторые классически известные аппроксимации. Сравнение различных методов проводилось в рамках численных экспериментов по определению порядка равномерной сходимости. Эти эксперименты, требующие, по существу, набора некоторой статистики, позволяют достаточно эффектно проиллюстрировать работу разностной схемы, а при наличии отработанной методики (набор тестовых задач и алгоритм, обеспечивающие "хорошее совпадение" теоретических и экспериментальных оценок для широкого круга известных схем) могут служить инструментом для предварительной оценки качества новых методов. Используемый в настоящей работе алгоритм является модификацией алгоритма, предложенного P.A. Farrell (1988). В **§4.1** приведены результаты расчетов для несамосопряженных тестовых задач, а в **§4.2** рассмотрены самосопряженные уравнения.

Часть вторая (Ч.II) диссертации состоит из трех глав, в ней приведены математические модели динамики жидкости в водоемах. При разработке этих моделей были использованы результаты Части первой работы.

К настоящему времени построены математические модели, при помощи которых проведены исследования важные для понимания природы фундаментальных процессов, происходящих в мировом океане и его частях (K. Bryan, 1969; M.D. Cox, 1985; Ю.Л. Демин и Р.А. Ибраев, 1988; С.Г. Демышев и Г.К. Коротаев 1992; В.И. Климок, В.П. Кочергин и Г. Фридрих, 1987; В.И. Кузин, 1984; Э.Н. Михайлова и Н.Б. Шапиро, 1992). Однако, как было отмечено А.С. Саркисяном при подведении итогов калибрации моделей в рамках программы "Разрезы" (1992), работа по усовершенствованию этих моделей, прежде всего в алгоритмическом плане, еще далека от своего завершения. Важным моментом в усовершенствовании моделей общей циркуляции является также достаточная проработанность используемых в них параметризаций процессов подсеточных масштабов, таких как мелкомасштабная турбулентность.

В главе 1 (Ч.II) рассмотрена модель мелкомасштабной турбулентности в океане (В.П. Кочергин, В.А. Сухоруков и Е.А. Цветова, 1974; Г.И. Марчук, В.П. Кочергин и др., 1977), основанная на системе энергетических уравнений турбулентности: уравнении баланса кинетической энергии турбулентных пульсации (b) и уравнении скорости ее диссипации (ε):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b}{\partial t} = A_1 \nu - B_1 \varepsilon + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu \dfrac{\partial b}{\partial z}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = A_2 \dfrac{\varepsilon}{b} \nu - B_2 \dfrac{\varepsilon}{b} \varepsilon + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\nu}{\delta} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right) \end{cases} \tag{9}$$

Коэффициент вертикального турбулентного обмена "ν" определяется соотношением:

$$\nu = C_\mu \frac{b^2}{\varepsilon} \tag{10}$$

$$\mathrm{A}_1 \equiv \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right], \quad B \equiv 1,$$

$$\mathrm{A}_2 \equiv C_1\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - C_3\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right], \quad B_2 \equiv C_2,$$

u, v – горизонтальные составляющие скорости течения; ρ, ρ_0 – плотность и средняя плотность морской воды, g – ускорение свободного падения. Система (9), (10) дополняется соответствующими начальными и граничными условиями. Эмпирические константы $C_{1\text{-}3}$, δ, C_μ не являются универсальными и варьируются различными авторами: известны варианты W.Rodi (1980), A.Omstedt et al (1983), В.П.Кочергин и др. (1976).

В **§1.2** система (9), (10) рассматривается без диффузионных слагаемых; найдены и выписаны в аналитическом виде все ее решения в случае произвольных постоянных $A_{1,2}$, $B_{1,2}$. Анализ этих решений, проведенный в **§1.3,** позволил дать рекомендации по выбору констант $C_{1\text{-}3}$, при использовании однородной (бездиффузионной) "$b - \varepsilon$" модели. В рамках этого же анализа может быть получена модифицированная формула А.М. Обухова (1946), используемая для параметризации мелкомасштабной турбулентности в некоторых моделях динамики океана (В.П. Кочергин и В.А. Сухоруков, 1975; В.И. Климок, В.П. Кочергин и Г.Фридрих. 1987). На основе найденных решений бездиффузионной системы (9), (10) в **§1.4** построены полуаналитические аппроксимации полной "$b - \varepsilon$" модели.

Отметим, что отдельные решения бездиффузионной системы (9), (10) были найдены также В.Н. Лыкосовым (1992) и H. Baumert (устное сообщение). Основные результаты **главы I (Ч.II)** опубликованы в работах [20, 21].

В главе 2 (Ч.II) обсуждаются некоторые вычислительные аспекты моделирования гидродинамических процессов в глубоком водоеме. В **§2.1** изучено влияние аппроксимации по времени в уравнении для функции тока на изменение кинетической энергии баротропного движения; предложен новый вариант вычисления производных функции тока, основанный на интерполяции с использованием точных решений вспомогательных двумерных задач диффузии-конвекции. Представлены результаты тестовых расчетов, дополняющие качественный анализ. Изложение соответствует работам [22, 25, 27].

Параграф 2.2 посвящен описанию дискретной гидротермодинамической модели глубокого водоема, основанной на системе полных нелинейных уравнений гидротермодинамики океана, записанных с учетом традиционных приближений: Буссинеска, гидростатики и несжимаемости. В декартовой системе координат (ось x направлена на восток, y – на север, z – вертикально вниз) эти уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial wu}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right)-l\mathrm{v}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(P^s+g\int_0^z\rho dz'\right)+F(u), \qquad (11)$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+\frac{\partial w\mathrm{v}}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right)+lu=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(P^s+g\int_0^z\rho dz'\right)+F(\mathrm{v}), \qquad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial wT}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\text{æ}_{\mathrm{T}}\frac{\partial T}{\partial \mathrm{z}}\right)=\mathrm{A}_T\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial uT}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{v}T}{\partial y}, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial wS}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\text{æ}_{\mathrm{S}}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{z}}\right)=\mathrm{A}_S\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial uS}{\partial x}-\frac{\partial vS}{\partial y}, \qquad (15)$$

$$\rho=\rho(\mathrm{T},\mathrm{S})\,. \qquad (16)$$

В (11) - (16) использованы обозначения:

$$F(\varphi)\equiv A\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial u\varphi}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{v}\varphi}{\partial x},\quad \varphi=u,\mathrm{v};$$

u, v, w – компоненты вектора скорости, соответствующие осям x, y и z; T – температура, S – соленость; ρ, ρ_0 – аномалия и среднее значение плотности, P^S – давление на невозмущенной поверхности, l – параметр Кориолиса; A, ν; A_T, A_S, æ_T, æ_S – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости, диффузии тепла и соли, соответственно.

Система уравнений (11)-(16) дополняется начальными и граничными условиями. На невозмущенной поверхности задаются температура и соленость (либо их потоки), поток импульса и используется условие "жесткой крышки" для вертикальной скорости. На дне принимаются условия отсутствия потоков тепла и соли, а для скорости может быть выбрано либо условие прилипания, либо условие обтекания с трением. На боковой границе ставятся условия отсутствия потоков тепла и соли, а также условие прилипания для скорости.

Предлагаемый в работе метод решения системы уравнений (11)-(16) предполагает разделение горизонтальной части вектора скорости на баротропную и бароклинную составляющие (K. Bryan, 1969). Баротропная составляющая находится с использованием функции тока, причем вычисление функции тока и ее производных базируется на методах, предложенных в предыдущих разделах диссертации. Общий алгоритм модели основан на двухслойной аппроксимации по времени, позволяющей использовать различные варианты явно-неявного представления адвективных и кориолисовых слагаемых в уравнениях движения. Метод решения задачи для бароклинной составляющей позволяет осуществить полное обращение разностного оператора по вертикальной координате, подобное предложенному ранее В.П. Кочергиным (1970, 88). Для решения этой задачи разработан новый вариант матричной прогонки для уравнений в дивергентной форме, дающий возможность вычислять придонное трение (в случае условий прилипания) одновременно с бароклинными составляющими вектора горизонтальной скорости. Пространственные аппроксимации и учет граничных условий в модели осуществлены в рамках подхода, изложенного в **Части первой** работы. Основные фрагменты модели представлены в [23].

Качество модели иллюстрируется расчетами для бассейна Черного моря. В работе представлены результаты расчетов, проведенных для зимнего сезона в рамках адаптационного подхода (А.С. Саркисян и др., 1986), который состоит в восстановлении полей течений с одновременной гидродинамической фильтрацией известных из наблюдений полей температуры и солености с помощью прогностической модели, интегрируемой на относительно короткий срок. Поскольку, в частности, решалась задача сравнения представленной выше модели, с моделью В.И. Климок, В.П. Кочергин и Г. Фридрих (1987), адаптированной для бассейна Черного моря (В.М. Климок и К.К. Макешов, 1991, 92; далее: К-М), то данные о температуре и солености (Э.Н. Альтман и др., 1987), о касательном напряжении ветра (S.Hellerman & M.Rosenstein, 1983), а также процедура их интерполяции в узлы расчетной сетки полностью соответствовали работам К-М. Как и в модели К-М использовались модифицированная формула Обухова для параметризации мелкомасштабной турбулентности и уравнение состояния в форме Эккарта. Результаты расчетов показали определенное совпадение как с результатами, полученными по модели К-М, так и с данными наблюдений (G. Neuman 1942; Д.М. Филиппов, 1986). Однако, результаты расчетов по двум моделям имеют и некоторые различия. Так, в отличие от модели К-М, установление кинетической энергии в расчетах по представленной в работе модели происходит достаточно быстро (в течение трех суток), и этот период может служить соответствующим периодом адаптации. Отметим также регулярный характер поведения вертикальной скорости, полученной по новой модели, который сохраняется вплоть до больших глубин с соответствующим изменением поведения вертикальных движений.

В **§2.3** построена монотонная разностная схема для расчета уровенной поверхности. Уровенная поверхность редко используется в качестве интегральной функции в полных моделях крупномасштабной циркуляции (Ю.Л. Демин и А.С. Саркисян, 1977; Ю.Л. Демин и Р.А. Ибраев, 1988). Одна из причин- необходимость решать задачу с краевыми условиями типа "наклонной" производной и малыми параметрами при старших производных в уравнении, что делает ее сложной для численной реализации. Тем не менее, использование уровня в качестве вспомогательной функции в модели имеет определенные перспективы: это, по-видимому, единственный путь для перехода от условия "жесткой крышки" к кинематическому условию на поверхности; кроме того, уровень океана может быть измерен как непосредственно на побережье, так и со спутников. Методы решения задач для уровня были предложены в работах Г.И. Марчука (1969), В.П. Кочергина и А.В. Щербакова (1976), А.С. Саркисяна и др. (1986). В настоящем параграфе представлены результаты работ [12, 18, 19], в которых дискретизация задачи для уровня осуществлена при помощи ПВИИМ в форме, близкой к методу конечных элементов, со специальным выбором базисных функций. Проведены тестовые расчеты по сравнению со схемой Кочергина-Щербакова (1976), подтвердившие эффективность предлагаемого метода.

В главе 3 (Ч.II) представлена математическая модель для расчета нестационарных турбулентных течений и процессов переноса тепла в водоемах вытянутой формы. Отправным пунктом при построении модели служат уравнения (11)-(14) (ось x направлена вдоль водохранилища, z-вертикально вниз), к которым добавляется соответствующее уравнение состояния. Краевые условия несколько отличаются от используемых в главе 2: поток импульса и кинематическое условие для вертикальной скорости задаются на уровенной поверхности водоема, на боковой поверхности и на дне ставится условие обтекания с трением. Модель допускает возможность постановки различных краевых условий во входном и выходном сечениях водоема, которые могут состоять из жидких и непроницаемых участков; выбор того или иного варианта зависит от конкретной ситуации, а также от имеющихся в распоряжении данных, что позволяет решать практические задачи широкого круга. Постановка задачи и ее последующие преобразования составляют содержание **§3.1.**

Если к приближениям, сделанным при выводе системы (11)-(14), добавить некоторые ограничения на геометрию водоема (отсутствие

больших градиентов для функций, описывающих топографию русла) и характер течения (распределение температуры и скорости течений достаточно равномерно по ширине в каждом поперечном сечении), то упомянутая система уравнений вместе с граничными условиями без существенных потерь точности сводится к более простой (двумерной) с помощью операции осреднения по ширине водоема. Двумерные в вертикальной плоскости модели, полученные после осреднения по ширине русла трехмерной системы уравнений, разрабатывались и использовались при изучении гидротермодинамических процессов в вытянутых, относительно узких водоемах многими авторами. Отметим прежде всего работы О.Ф. Васильева, В.М. Квона и их учеников. а также монографии Ю.М. Шокина и В.М. Белолипецкого с соавторами (1991, 94), этим же вопросам посвящены работы А.Н. Бугрова и Т.В. Дунец (1991), З.Н. Добровольской и др. (1981), C.B. Vreugdenhll (1974). В настоящей работе осредненная задача преобразуется к задаче в прямоугольной области, используемое при этом преобразование осуществляет одновременное "спрямление" как дна, так и свободной поверхности водоема. Некоторые авторы (Б.В. Архипов, 1998; С.В. Думнов, 1985) ограничиваются спрямлением дна, предполагая малым отклонение уровня от его невозмущенного значения, однако, в случае высокогорных водохранилищ, на которые, в частности, ориентирована предлагаемая модель, наблюдаются большие перепады уровня свободной поверхности.

Дискретная модель обсуждается в **§3.2**. Общий алгоритм модели основан на двухслойной неявной аппроксимации по времени и пространственных аппроксимациях, полученных в Части первой работы. Здесь, также как и в предыдущей главе, реализуется полное обращение разностного оператора по вертикальной координате, предложена оригинальная методика для вычисления уровня и его наклона.

В **§3.3** показано, что дискретная модель обладает интегральными законами изменения основных характеристик (температура и ее квадрат, горизонтальная скорость и кинетическая энергия горизонтального движения), присущими дифференциальной постановке.

В **§3.4** приведены результаты расчетов термодинамического режима верхнего бьефа Нурекской ГЭС на реке Вахш в Таджикистане), проведенных с использованием разработанной модели. Для геометрической схематизации расчетной области, задания граничных условий и описания теплового взаимодействия воды водохранилища с атмосферой использовалась реальная гидрометеорологическая информация за 1977 год, предоставленная УГМС Таджикистана и сотрудниками Среднеазиатского отделения Всесоюзного института "Гидропроект" им. С.Я. Жука. Сопоставительный анализ результатов численных расчетов с осредненными по ширине водоема данными натурных наблюдений показал их достаточно хорошее как качественное, так и количественное согласование. Основные результаты главы 3 опубликованы в работе [24].

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту, в краткой форме приведены в **Заключении.** В **Приложение** включены "Акты приемки" работ, выполненных по заказу некоторых организаций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем **основные результаты** работы, они состоят в следующем.

1. *Предложена оригинальная методика* построения разностных схем для решения широкого круга дифференциальных задач, условно названная "проекционным вариантом интегро-интерполяционного метода" (ПВИИМ). Эта методика позволяет в рамках единого подхода получать аппроксимации как решения, так и его производных, исследовать вопросы сходимости этих аппроксимаций, а также предоставляет широкие возможности улучшения уже построенных схем. ПВИИМ дает возможность автоматически сохранять в дискретной форме многие свойства исходной дифференциальной задачи, например, такие как консервативность и монотонность.

2. *Доказаны не известные ранее оценки устойчивости* для решений сеточных уравнений с монотонными операторами различных типов. Эти оценки играют ключевую роль при исследовании вопросов сходимости разностных схем.

3. При помощи ПВИИМ *построены новые вычислительные алгоритмы* для решения различных классов сингулярно возмущенных задач с краевыми условиями общего вида: исследованы одномерные уравнения первого и второго порядков, последние как с самосопряженным, так и с несамосопряженным дифференциальными операторами, в консервативной и неконсервативной формах; в двумерном случае рассмотрены эллиптические уравнения второго порядка с градиентной и с дивергентной формой младших членов. Изучены вопросы сходимости предложенных аппроксимаций: доказаны равномерные по малому параметру оценки сходимости (с первым и со вторым порядком) для случая произвольной неравномерной сетки. Предложены различные безусловно устойчивые варианты аппроксимации по времени в параболических задачах, для которых также доказаны оценки сходимости.

4. На примере одномерной задачи диффузионно-конвективного переноса *исследованы возможности* "$p-h$" версии метода конечных элементов. Получена монотонная разностная схема с "дозированной" алгебраической аппроксимационной вязкостью. Доказаны равномерные оценки сходимости метода в сеточной, интегральной "энергетической" норме и норме пространства непрерывных функций.

5. *Модифицирован вычислительный алгоритм и предложен набор тестовых задач* для экспериментального исследования новых разностных схем и их сравнения с ранее известными. На их основе проведены численные расчеты, подтвердившие эффективность новых аппроксимаций.

6. *Проведено теоретическое исследование* "$b-\varepsilon$" модели турбулентности, используемой, в частности, для параметризации верхнего квазиоднородного слоя океана. *Впервые найдены все аналитические решения* однородной (бездиффузионной) системы энергетических уравнений турбулентности в случае стационарных источников. На основе анализа этих решений *даны рекомендации по выбору эмпирических констант* при использовании однородной модели. *Построены полуаналитические аппроксимации полной* "$b-\varepsilon$" *модели.*

7. *Построена оригинальная* монотонная разностная схема для расчета уровенной поверхности. В результате использования ПВИИМ в форме близкой к методу конечных элементов, *удалось преодолеть проблему аппроксимации краевых условий типа "наклонной" производной.* Приведены результаты численных экспериментов для тестовых задач, подтверждающие эффективность предлагаемой разностной схемы.

8. *Разработана* дискретная многоуровенная трехмерная модель гидротермодинамики глубокого водоема, основанная на системе примитивных уравнений, с параметризацией верхнего квазиоднородного слоя и учетом реальной орографии. Алгоритмы модели основаны на схемах, построенных при помощи ПВИИМ и, в частности, используют *новые аппроксимации для функции тока и ее производных.* Качество работы предложенной модели подтверждается численными расчетами для бассейна Чёрного моря, результаты которых сравниваются как с данными наблюдений, так и с результатами, полученными по использовавшейся ранее модели (В.И. Климок и К.К.Макешов, 1991-92).

9. *Разработана* математическая модель для расчета нестационарных турбулентных течений и процессов переноса тепла в водоемах вытянутой формы. Основу модели составляют двумерные в вертикальной плоскости уравнения гидротермодинамики. Модель допускает возможность постановки различных краевых условий во входном и выходном сечениях водоема, которые могут состоять из жидких и непроницаемых участков. Выбор того или иного варианта зависит от конкретной ситуации, а также от имеющихся в распоряжении данных, что позволяет решать практические задачи широкого круга. Для дискретизации уравнений модели применяется ПВИИМ, позволяющий сохранить в дискрет-

ной модели ряд интегральных свойств исходных дифференциальных уравнений. Представлены результаты численного моделирования течений и переноса тепла в Нурекском водохранилище, использующие реальную гидрометеорологическую информацию, проведен анализ полученных результатов.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Скляр С.Н. О базисе из собственных функций оператора, связанного с одной задачей С.Л. Соболева //Динамика сплошной среды. – Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1974. – Вып. 17. – С. 81-88.
2. Скляр С.Н. Спектральные свойства пучка дифференциальных операторов, связанного с одной смешанной задачей //Динамика сплошной среды. – Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1976. – Вып. 27. – С. 93-100.
3. Скляр С.Н. О полноте системы собственных функций оператора, связанного с одной смешанной задачей //Сибирский матем. журнал. – 1977. – Т. 18. – № 6. – С. I38I-I392.
4. Скляр С.Н. О базисе из собственных функций одного пучка дифференциальных операторов //Сибирский матем. журнал. – 1978. – Т. 19. – № I. – С. I6I-I7I.
5. Климок В.И., Фридрих Г., Скляр С.Н., Гришняков Б.Ю. Численное моделирование термогидродинамики мирового океана и экваториальной Атлантики. – Препринт /Вычислительный центр СО АН СССР. – Новосибирск, 1985. – № 605. – 32 с.
6. Скляр С.Н. Разложение билинейной формы и его использование при дискретизации сингулярно-возмущенных краевых задач //Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. – 1988. – № I. – С. 3-13.
7. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. I. Несамосопряженное уравнение, первая краевая задача // Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки.-1988. -№ 4. -С. 10-23.
8. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. II. Несамосопряженное уравнение, третья краевая задача //Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. – 1989. – № I. – С. 3-10.
9. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. III. Самосопряженное уравнение //Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. – 1989. – № 4. – С. 3-11.

10. Скляр С.Н. Применение "$p-h$" версии метода конечных элементов к решению сингулярно возмущенных краевых задач //Численное моделирование в проблеме окружающей среды. – Фрунзе: Илим, 1989. – С. 54-82.
11. Скляр С.Н., Бакиров Ж.Ж. О некоторых вопросах аппроксимации сингулярно возмущенных краевых задач //Численное моделирование в проблеме окружающей среды. – Фрунзе: Илим, 1989. – С. 93-97.
12. Кочергин В.П., Скляр С.Н., Султанов Р.К. К вопросу о численном моделировании гидротермодинамических задач океана //Морской Гидрофизический журнал. – 1990. – № 2. – С. 10-18.
13. Скляр С.Н., Алтынникова Л.А. Об устойчивых аппроксимациях по времени в параболических задачах //Моделирование в механике. – Новосибирск, 1990. – Т.4(21). – № 6. – С. 134-145.
14. Скляр С.Н. Достаточные условия равномерной сходимости разностных схем для некоторых классов сингулярно возмущенных краевых задач //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям.– Бишкек: Илим, 1990. – С. 188-206.
15. Скляр С.Н., Алтынникова Л.А. Дискретный принцип максимума и аппроксимация по времени в параболических задачах //Теория и методы математического моделирования задач окружающей среды. – Бишкек: Илим, 1991. – С. 79-93.
16. Скляр С.Н., Бакиров Ж.Ж. Об одной разностной схеме для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной, полученной при помощи теоремы о разложении билинейной формы //Теория и методы математического моделирования задач окружающей среды. – Бишкек: Илим, 1991. – С. 71-78.
17. Скляр С.Н., Бакиров Ж.Ж. О модификации одной классической разностной схемы для решения самосопряженной сингулярно возмущенной краевой задачи //Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. матем. и горно-геологич.науки. – 1991. – № I. – С 10-16.
18. Кочергин В.П., Скляр С.Н. Определение наклонов уровня в задачах динамики водоема //Изв. АН Респ. Кыргызстан. Физ.-техн., матем. и горно-геологич. науки. – 1991. – № 3. - С.15-27.
19. Kochergin V.P., Sklyar S.N., Sultanov R.K. On the problem of numerical ocean hydrodynamics modeling //Soviet Journal of Physical Oceanography. – 1991. – V 2. – № 2. – P. 89-98.
20. Kochergin V.P., Sklyar S.N. Semianalytical version of approximation of system of equations in "$b-\varepsilon$" turbulence model //Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 1992. – V.7. – № 5. – P. 405-418.
21. Кочергин В.П., Скляр С.Н. Аналитические решения, выбор параметров и полуаналитическая аппроксимация системы уравнений в "$b-\varepsilon$"

модели турбулентности //Труды Вычислительного центра СО РАН. Серия: Численное моделирование в задачах атмосферы, океана и окружающей среды. – Новосибирск, 1993. – Вып. I – С. 77-97.

22. Кочергин В.П., Скляр С.Н., Султанов Р.К. О вычислении баротропных составляющих движения в моделях общей циркуляции океана //Морской гидрофизический журнал. – 1994. – № I. - С. 20-25.
23. Кочергин В.П., Скляр С.Н., Султанов Р.К. Многоуровенная модель гидротермодинамики глубокого водоема //Морской гидрофизический журнал. – 1994. – № 3. - С. 3-13.
24. Dunets T.V., Sklyar S.N. Mathematical model for thermodynamics of an elongated reservoir //Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. - 1994. - V. 9. - № 6. – P. 515-533.
25. Kochergin V.P., Sklyar S.N., Sultanov R.K. On the calculation of the barotropic components of motion in models for the general circulation of the ocean //Physical Oceanography. – 1995. – V. 6. – № I. – P. 19-24.
26. Sklyar S.N. A projective version of the Integral Interpolation method and It's application for the discretization of the singular perturbation problems //Advanced Mathematics: Computations and Applications. Proc. of the International Conf. AMCA – 95 (Novosibirsk, Russia, 20-24 June, 1995). Ed. by A.S. Alekseev and N.S. Bakhvalov. – NGC Pabllsher, Novosibirsk, 1995. – P. 380-385.
27. Kochergin V.P., Sklyar S.N., Dunets T.V. Numerical algorithms for solving of hydrodynamic problems with boundary layers //Advanced Mathematics: Computations and Applications. Proc. of the International Gonf. AMGA - 95 (Novosibirsk, Russia, 20-24 June, 1995). Ed. by A.S. Alekseev and N.S. Bakhvalov. - NCC Pabllsher, Novosibirsk, 1995. – P. 330-336.
28. Скляр С.Н., Алтынникова Л.А. О разностных схемах для уравнения диффузии-конвекции, сохраняющих монотонность начального профиля. ДЕП. в ВИНИТИ 20.03.95. – № 738-В95. – 8 с.
29. Скляр С.Н., Бакиров Ж.Ж. Двумерное эллиптическое уравнение: вычисление решения и его производных. ДЕП. в ВИНИТИ 14.06.95. – № I745-В95. – 22 с.
30. Скляр С.Н., Алтынникова Л. А. Проекционный вариант интегро-интерполяционного метода для уравнения первого порядка с малым параметром при производной. ДЕП. в ВИНИТИ 08.08.96. – № 2646-В96. – 30 с.
31. Скляр С.Н., Алтынникова Л.А. Аппроксимация параболических задач, содержащих малый параметр при производной по времени //Изв. НАН Кыргызской Респ.: "Эхо науки". – 1996. – № 3. – С. 18-26.

32. Скляр С.Н., Бакиров Ж.Ж. Проекционный метод построения разностных схем для задач с пограничными слоями //Изв. НАН Кыргызской Респ.: "Эхо науки". – 1997. №2-3. – С. 36-47.
33. Скляр С.Н., Бакиров Ж.Ж. Модификация разностных схем для задач с пограничными слоями в рамках проекционного варианта интегро-интерполяционного метода //Изв. НАН Кыргызской Респ. – 1999. – № 3-4. – С. 5-8.

АННОТАЦИЯ

С.Н. Скляр

Көлмөлөрдүн гидродинамикасын математикалык моделдөөлөрдөгү чет катмарлуу маселелерди, компьютердик изилдөөлөр жана эсептөө ыкмалары. Бишкек ш., 2001 ж., 32 бет.

Диссертация, терең көлмөлөрдөгү гидротермодинамикалык кубулуштарды моделдөөдө келип чыгуучу маселелерди чыгаруунун жаңы эсептөө ыкмаларын жана алгоритмдерин иштеп чыгууга арналган.

Маселенин дискреттик түрүндөгү интегралдык касиеттерин сактай турган жана ошондой эле бирдиктүү жол менен дифференциалдык чыгарылышын жанан анын туундусун табууга жол бере турган айырмалуу схемаларды түргүзуунун ыкмасы сунуш кылынган. Ошол ыкманын жардамы менен ар кандай класстагы сингулярдуу дүүлүккөн чектик маселелер үчүн бир калыптагы так айырмалуу схемалар тургузулган. Жаңы ыкмалардын жана алгоритмдердин негизинде стационардык эмес турбуленттүү агымдарды жана терең көлмөлөрдөгү жылуулуктун өтүш кубулуштарын эсептөө үчүн дискреттүү математикалык моделдер иштелип чыккан.

Сунуш кылынган моделдердин сапатын далилдеген, чыныгы гидрометеорологиялык маалыматтарды пайдаланган эсептөө тажрыйбалары жүргүзүлгөн.

THE SUMMERY

S.N.Sklyar

Computational Methods and Computer Study of Problems with Boundary Layers in Mathematical Models of Hydrodynamics of Pools. Bishkek, 2001, p. 32.

The thesis is dedicated to elaboration of the new computational methods and algorithms for problem solving arising in hydrodynamic processes in deep pools modeling.

The method of constructing of difference schemes is proposed. It allows, within the framework of the single approach, to find both a differential problem solution and its derivatives, and also to save integrated properties of a problem in its discrete analog. With the help of this method the uniformly precise difference schemes for different classes of singular-perturbed boundary problems were constructed. The discrete mathematical models for calculation of non-steady turbulent flows and processes of heat carrying in deep pools were worked out on the basis of the new methods and algorithms. The computational experiments using the real hydro meteorological information and affirming the quality of the proposed models were held.

АННОТАЦИЯ

С.Н.Скляр

Вычислительные методы и компьютерное исследование задач с пограничными слоями в математических моделях гидродинамики водоемов. Бишкек, 2001 г., 32 стр.

Диссертация посвящена разработке новых вычислительных методов и алгоритмов для решения задач, возникающих при моделировании гидротермодинамических процессов в глубоких водоемах

Предложен метод построения разностных схем, который позволяет, в рамках единого подхода, находить как решение дифференциальной задачи, так и его производные, а также сохранять интегральные свойства задачи в ее дискретном аналоге. При помощи этой методики построены равномерно-точные разностные схемы для различных классов сингулярно-возмущенных краевых задач. На основе новых методов и алгоритмов разработаны дискретные математические модели для расчета нестационарных турбулентных течений и процессов переноса тепла в глубоких водоемах. Проведены вычислительные эксперименты, использующие реальную гидрометеорологическую информацию, подтвердившие качество предложенных моделей.

Скляр