НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Специализированный совет Д 01.97.70

На правах рукописи

Омуров Таалайбек Дардайылович

УДК 517.9

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА

01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Бишкек - 2000

Работа выполнена в лаборатории вычислительной математики Института математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики

Научные консультанты: доктор физико-математических наук, академик НАН Кыргызской Республики М.И. Иманалиев, доктор физико-математических наук, профессор А. Асанов.

Официальные оппоненты: член-корр. НАН Республики Казахстан, доктор физико-математических наук, профессор К.А. Касымов, доктор физико-математических наук, профессор С.Н. Алексеенко, доктор физико-математических наук, профессор Г.И. Бижанова.

Ведущая организация: Научно-исследовательский вычислительный центр Московского Государственного университета им. Ломоносова

Защита диссертации состоится "3" июля 2000 г. в 12 00 часов на заседании Специализированного совета Д 01.97.70. по присуждению ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук в Институте математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан "2" июня 2000 г.

Отзыв на автореферат просим прислать по адресу: 720071, Бишкек-71, Проспект Чуй, 265"а", Институт математики НАН Кыргызской Республики, Специализированный совет Д 01.97.70.

Ученый секретарь
Специализированного совета,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник С. Искандаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Широкое приложение интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода в прикладных задачах приводят к интенсивному развитию теории различных классов таких уравнений. Вопросы разрешимости и смежные вопросы, различными способами исследованы в работах Лаврентьева М.М., Иманалиева М.И., Бухгейма А.Л., Аниконова Ю.Е., Романова В.Г., Асанова А., Аниконова Д.С., Апарцина А.С., Денисова А.М., Сергеева В.О., Магницкого Н.А., Янно Я. и в других.

В отмеченных работах были построены вольтерровые регуляризирующие операторы, а также доказаны существование и единственность решения исходных задач с ядром, отличным от нуля или обращающимся в нуль только в некоторых точках на диагонали.

Одним из способов исследования, развитым М.И. Иманалиевым, является приближенная замена исходной задачи сингулярно-возмущенной и ее исследования с помощью погранслойных функций.

Далее, в работе Иманалиева М.И. [а] был разработан подход, связанный с такими функциями, уже для исследования нелинейных уравнений Вольтерра первого рода, так как нельзя "естественно" определить никакую нелинейную функцию в пространстве обобщенных функций.

Одним из важных типов прикладных задач, связанных с вышеуказанными уравнениями, считаются краевые и нелокально-краевые задачи типа Бицадзе-Самарского. Задачи такого характера интенсивно развивались за последние 30 лет в работах Бицадзе А.В., Самарского А.А., Нахушева А.М., Елеева В.А., Кальменова Т.Ш., Ахиева С.С., Салахитдинова М.С., Кумыковой С.К., Керефова А.А., Вабишевича П.Н., Напсо А.Ф. и других авторов. Вышеназванные задачи были исследованы для различных классов уравнений. Например, это задачи типа Трикоми, нелокальные задачи для уравнений типа Лаврентьева и другие классы. В некоторых нелокальных задачах [б, в] возникают уравнения Вольтерра первого и третьего рода. В них эти уравнения приводятся к интегральным уравнениям второго рода с использованием гладкости известных функций (или исключая особенности в определенных точках).

В некоторых математических проблемах встречаются вышеуказанные классы задач, где полученные вспомогательные уравнения являются интегральными уравнениями Вольтерра первого, третьего рода с негладкими (не дифференцируемыми) ядрами и тождественно обращающимися в нуль на диагонали со свободным членом, отличным от нуля при любых значениях аргумента.

а. Иманалиев М.И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. Фрунзе: Илим, 1981. –144 с.

б. Елеев В.А. Обобщенная задача Трикоми для смешанных гипербола-параболических уравнений //Дифференц. уравнения. Т.IX.№1, 1979.-С.41-53.

в. Нахушев А.М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра III рода //Дифференц. уравнения. Т. Х.№1, 1974.-С.100-111.

В этих условиях такие классы задач являются некорректными по Адамару в $C[0,T]$, так как не выполнено необходимое условие разрешимости: $f(0)=0$. В этом случае, когда отсутствует априорная информация о решении, те методы, которые указаны в вышеуказанных работах, не применимы и построение особого решения остается открытым для изучаемых уравнений.

Таким образом, возникает вопрос об построении пространств, в которых существует особые решения различных классов системы интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода, когда ядро обращается в нуль на диагоналях, а свободные члены отличны от нуля и о построении приближенных решений исследуемых уравнений, в частности, при помощи теории сингулярных возмущений при предположении, что особое решение существует.

Цель работы заключается в исследовании единственности особого решения системы интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода и системы уравнений Вольтерра третьего рода, изменяющих свою форму на различных отрезках, когда ядро тождественно обращается в нуль на диагонали, а свободные члены отличны от нуля и о построении особых приближенных решений при помощи теории сингулярных возмущений. А также в построении приближенного решения нелокальных краевых задач типа Бицадзе-Самарского для систем со смешанной структурой.

Нами разработаны методы для построения особых приближенных решений указанных задач с помощью малого параметра с теми условиями, которые упоминаются выше. Изучены обобщенная сходимость решений регуляризирующих систем к решениям эквивалентных задач, когда $\varepsilon \to 0$ и поведение решений в окрестности особой точки.

Приближенное решение понимается в том смысле, что оно слабо сходится к решениям эквивалентных задач, когда параметр регуляризации стремится к нулю.

Используется следующее пространство $Z(U^0)$, введенные в упомянутой книге М.И. Иманалиева, это пространство, элементами которого являются все кусочно-непрерывные с конечным числом разрывов первого рода и суммируемые на $[0,1]$ функции, также $z(x)$ - обобщенная функция, сосредоточенная в начале координат с условием, если пробная функция $\psi(0)=0 \Rightarrow \langle z,\psi \rangle=0$ и его подпространство $Z(U)$ всех кусочно-непрерывных с конечным числом разрывов первого рода и суммируемых на $[0,1]$ функций.

Эти результаты продолжают исследования Иманалиева М.И., Лаврентьева М.М., Асанова А., Бухгейма А.Л., Янно Я., Денисова А.М. и др.

Нелокальные задачи типа Бицадзе-Самарского, также задачи с обратным временем, рассматриваемые в работе, примыкают к исследованиям Нахушева А.М., Иманалиева М.И., Елеева В.А., Кумыковой С.К., Полубариновой - Кочиной П.Я., Керефова А.А. и других.

Методы исследования. Основными являются понятия эквивалентных преобразований и интегральных представлений и методы приближенного решения интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода, при помощи сингулярных возмущений. Также используются следующие специальные пространства.

Для некоторой функции $0 < h(t) \in L^1(0,T)$ и для константы $C_0 > 0$ обозначим $\varphi(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$ и введем линейное пространство $C_\varphi^\gamma[0,T]$ всех функций $u(t)$ на $[0,T]$, удовлетворяющих условиям:
$|u(t) - u(\tau)| \le C_0 |\varphi(t) - \varphi(\tau)|^\gamma$, с нормой:
$||u||_\gamma = \max_{t\in[0,T]} |u(t)| + \sup_{(t,\tau)\in[0,T]} \frac{|u(t)-u(\tau)|}{|\varphi(t)-\varphi(\tau)|^\gamma}, 0 < \gamma \le 1$, (отсюда следует, что $u(0) = 0$), через $L_h^p(0,T)$ - линейное пространство суммируемых функций, удовлетворяющих условиям: $\int_0^T h(t)|u(t)|^p dt < \infty$, и норма определяется в виде: $||u(t)||_{p,h} = (\int_0^T h(t)|u(t)|^p\, dt)^{\frac{1}{p}}$.

Для введенных в обозначений пространств, дополнительно с нижным индексом "n" будем обозначать соответственно пространства n - мерных вектор-функций. Также отметим, что нижний индекс от 1 до n в вектор-функциях указывает соответствующую компоненту функции.

Если функция $h(t)$ - ограниченная и $h(t) \ge \alpha > 0$, то $C_\varphi^\gamma[0,T] = C^\gamma[0,T]$ - пространство Гельдера.

<u>Научная новизна</u>. Получены следующие основные результаты:

а.1) Для интегральных уравнений типа Вольтерра первого и третьего рода сформулированы эквивалентные задачи, дающие возможность использования теорию резольвент.

а.2) На основе эквивалентных задач, построены регуляризирующие системы (РС) без учета априорной информации о исходных данных и о решении.

а.3) Установлена структура решений (РС), включающая в себя специфическую функцию типа погранслойной.

а.4) Доказана сходимость решений (РС) к решениям эквивалентных задач при $\varepsilon \to 0$ и установлено поведение этих решений в окрестности особой точки.

а.5) Построено особое приближенное решение с малым параметром для интегральных уравнений Вольтерра третьего рода, изменяющее свою форму на различных отрезках.

а.6) Получен модифицирующий вариант основного метода для построения особого приближенного решения системы интегральных уравнений Вольтерра - Урысона;

а.7) разработанный способ применен для построения решения граничных задач типа Гурса с обратным временем и задач Бицадзе-Самарского для систем интегро-дифференциальных и интегральных уравнений смешанной структурой.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы для построения приближенных решений с малым параметром:

а) для функциональных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода,

б) для полуявных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с краевыми задачами нелокального характера и условием Гурса с обратным временем, включающим в себя уравнения Вольтерра первого и третьего рода, а также могут быть применены к задачам интегральной геометрии.

Апробация работы. Результаты работы доказывались на республиканских, всесоюзных, международных конференциях (Респ. научн. конф. "Дифференц. уравнения и их приложения". - Фрунзе: КГУ, 1989; Респ. научн. конф. "Дифференц. уравнения и их приложения". - Ош: ОшГУ, 1993; Всесоюз. конф. "Асимптотические методы теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач".-Бишкек, 1991; Междунар. конф. "Некорректно поставленные задачи в естественных науках". - Москва, 1991; Междунар. научно-практ. конф. "Проблемы механики и прикладной математики". - Бишкек, 1995; Междунар. научно-теор. конф. "Проблемы развития суверенного Кыргызстана". - Бишкек: Чуйск. ун-т, 1997; Междунар. научно-теор. конф., посв. 5 летию Чуйск. ун-та. - Бишкек: Чуйск. ун-т, 1999; Междунар. научно-практ. конф. "Современные технологии образования в высшей школе". -Бишкек: КГНУ, 1999) и доложены на семинарах Института математики НАН КР в 1993, 1996, 1998 (руководитель семинара академик НАН КР Иманалиев М.И.), на семинаре лаборатории численного анализа ВЦ МГУ в 1991, 1997 (руководитель семинара профессор Морозов В.А.), на семинаре лаборатории обратных задач Института математики НАН КР в 1995, 1999 (руководитель профессор Асанов А.), на семинарах факультета математики и кафедры математического анализа (в 1996 - КГНУ, руководитель профессор Саадабаев А.С., в 1999 - КГНУ, юбилейный семинар кафедры математического анализа).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-26]. Работы [1-5] опубликованы совместно с консультантами академиком Иманалиевым М.И. и доктором физико-математических наук, профессором Асановым А. Консультантам принадлежит подстановка задач и обсуждение задач с теми условиями, которые введены для известных функций, автору - идея разработки методов и доказательство теорем.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы и списка литературы, содержащего 111 наименований. Объем текста 215 страниц.

Содержание работы

Основным объектом исследования первой главы является система интегральных уравнений Вольтерра третьего рода, т.е.

$$p(x)u(x)+(Lu)(x)=f(x),\ x\in D=[0,\ T], \tag{1.1}$$

где

$$Lu=\int_0^x K(x,\tau)u(\tau)d\tau+\int_0^{M(x)} K_0(x,\tau,u(\tau))d\tau\ . \tag{1.2}$$

Если $p(x)\equiv 0$, то получим уравнения Вольтерра первого рода. Как обычно в теории уравнений типа Вольтерра введем множество $D_1=\{(x,\tau)\ /\ 0\le\tau\le x\le T\}$.

Известные данные удовлетворяют следующим условиям:

A$_1$) $C_n^1[0,T]\ni f(x)$ и $f(x)\neq 0,\ \forall x\in D$.

A$_2$) $p(x),\ M(x)$ - неубывающие функции с условиями: $C[0,T]\ni p(x)\big|_{x=0}=0;$
$p(x)>0,\ \forall x\in(0,T],\ \ M(0)=0,\ (0\le M(x)\le x\le T,\ \forall x\in D)$.

A$_3$) $K(x,\tau)\in C_n(D_1),\ K(x,\tau)\big|_{\tau=x}\equiv 0,\ K(x,0)=0.$

A$_4$) Существуют такие константы α_0, β, d_0 и функция $0<h(x)\in L^1(0,T)$, что

$$M(x)\in C_\varphi^{\,1}(D)\quad \text{для}\quad \varphi(x)=\int_0^x h(\tau)d\tau,\ \text{а}\ \ \|K(x,\tau)-K(y,\tau)\|\le C_1(\varphi(\tau))^\beta\times$$
$$\times|\varphi(x)-\varphi(y)|;\ \ p(x)\le q_0(\varphi(x))^\beta,\ \forall x\in D,\ 0<C_1,\ 2+\alpha_0<\beta,0<\alpha_0<1,$$
$$(p(x))^{-1}h(x)=M_0(x)\in L^1(0,T);\ \ 0<d_0\min_{[i=1,n]} f_i^2(x)=1.$$

A$_5$) $K_0(x,\tau,u)\in C_n^{\,0,0,1}(D_0),\ K_0(x,\tau,u)\big|_{\tau=x}\equiv 0,\ K_{0u}(x,\tau,u)\big|_{\tau=x}\equiv 0,\ D_0=D_1\times R^n,$
$K_0(x,0,u)=0,\ \ K_{0u}(x,0,u)=0$, причем

$$\|K_0(x,\tau,u)-K_0(y,\tau,u)\|\le C_{01}(\varphi(\tau))^\beta\ |\varphi(x)-\varphi(y)|,$$
$$\|K_{0u}(x,\tau,u)-K_{0u}(y,\tau,u)\|\le C_{02}(\varphi(\tau))^\beta\ |\varphi(x)-\varphi(y)|,\ 0<C_{01},\ C_{02}.$$

В (1.1) $Z_n(U)\ni u(x)$ - искомая векторная функция и предпологается, что это решение существует.

В условиях (**A$_1$** - **A$_5$**) требуется:

1) построить регуляризирующую систему, решение которой принимается в качестве приближенного особого решения,

2) построить решение регуляризированной задачи, **3)** изучить поведение построенной функции $u_\varepsilon(x)$ в окрестности особой точки $x=0$, когда $\varepsilon\to 0$ и доказать сходимость к решению эквивалентной задачи.

В основном, вопросы исследования, связанные с проблемами (1-3), в случае $f(0)=0$, $(M(x)\equiv x)$ и $K(x,\ x)\neq 0$ были изучены в пространствах $C_n(D),\ C_n^\gamma(D),\ C_{\varphi,\,n}^\gamma(D),\ L_n^p(0,T),\ (p>1,\ 0<\gamma\le 1)$. Полученные результаты по указанным проблемам отражены в работах Иманалиева М.И., Асанова А., Денисова А.М., Янно Я., Апарцина А.С. и других. Уравнение (1.1), когда заданные функции дифференцируемы по x и $p(x)\equiv 0$, в работах

Горошко О.А., Савина Г.Н., Елеева В.А. и других приведено к уравнению Вольтерра второго рода и решено в $C_n(D)$. Подобные задачи в случае $f(0)\neq 0$ в работах Иманалиева М.И. ($M(x)\equiv x$, $p(x)\equiv 0$) с известными гладкими функциями исследованы с учетом погранслойных функций.

В работах Иманалиева М.И., Асанова А., в случае $M(x)\equiv x$, $f(0)=0$ для изучения разрешимости и вывода априорных оценок регуляризированных задач использована теория резольвент с учетом ядра $(-\frac{1}{\varepsilon}K(\tau,\tau))$.

Но, если в классе не гладких (не дифференцируемых) функций ядро тождественно обращается в нуль на диагонали, то вышеотмеченный метод не применим, так как $K(\tau,\tau)\equiv 0$.

В работе доказана:

Лемма 1.1. При условиях (**A$_1$ - A$_5$**) уравнение (1.1) эквивалентно уравнению

$$p(x)u(x)+\int_0^x H_0(s)u(s)ds-\int_0^x H(s)(Qu)(s)ds+(Lu)(x)=f(x), \quad (1.3)$$

где $H_0(x)=diag(H_{01}(x),\ldots,H_{0n}(x))$, $H_{0i}(x)-d_0h(x)f_i^{\,2}(x)$, $(i=\overline{1,n})$;
$H(x)\equiv diag(H_1(x),\ldots,H_n(x))$, $H_i(x)-d_0h(x)f_i(x)$, $(i=\overline{1,n})$, а
$(Qu)(x)=colon(Q_1(u_1,\ldots,u_n),\ldots,Q_n(u_1,\ldots,u_n))$, $Q_1(u_1,\ldots,u_n)\equiv u_1(x)[p(x)u_1(x)+$ $+L_1(u_1,\ldots,u_n)],\ldots,Q_n(u_1,\ldots,u_n)\equiv u_n(x)[p(x)u_n(x)+L_n(u_1,\ldots,u_n)]$.

Для уравнения (1.3) нами предлагается регуляризованная задача

$$(\varepsilon+p(x))u_\varepsilon(x)+\int_0^x H_0(s)u_\varepsilon(s)ds-\int_0^x H(s)(Qu_\varepsilon)(s)ds+(Lu_\varepsilon)(x)=f(x), \quad (1.4)$$

$u_\varepsilon(0)=\frac{1}{\varepsilon}f(0)$, $((0,1)\ni\varepsilon$ - малый параметр), (1.5)

для которой можно использовать теорию резольвент, т.е. для матричного ядра $(-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}H_0(\tau))$ можно найти в явном виде резольвенту $R(x,\tau,\varepsilon)$, которая имеет форму $R(x,\tau,\varepsilon)=-W_0(x,\tau,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon+p(x)}H_0(\tau)$, $(\tau\le x)$, где

$W_0(x,\tau,\varepsilon)=exp(-\int_\tau^x\frac{H_0(s)ds}{\varepsilon+p(s)})$, причем $\|W_0(x,\tau,\varepsilon)\|\le\sqrt{n}\,exp(-\int_\tau^x\frac{h(s)ds}{\varepsilon+p(s)})$, $\tau\le x$.

Если $p(x)\equiv 0$, то $W(x,\tau,\varepsilon)=exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x H_0(s)ds)$, $\tau\le x$.

Далее, решение системы (1.4) ищется в виде

$$u_\varepsilon(x)=v(x)+\xi(x,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi(x,\varepsilon), \quad (1.6)$$

где $v(x)$, $\xi(x,\varepsilon)$, $\Pi(x,\varepsilon)$ - новые искомые n - мерные векторные функции с условиями: $v(0)=0$, $\xi(0,\varepsilon)=0$, $\Pi(0,\varepsilon)=f(0)$. Тогда для определения этих функций, используя теорию резольвент, получим систему уравнений вида:

$$\Pi(x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x W(x,\tau,\varepsilon)H_0(\tau)f(0)d\tau+f(0)=W(x,0,\varepsilon)f(0); \quad (1.7)$$

$$\xi(x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x W_0(x,\tau,\varepsilon)H_0(\tau)\{\frac{1}{\varepsilon+p(\tau)}\int_0^\tau H(s)[(Q(v+\xi+\frac{1}{\varepsilon}\Pi))(s)-$$

$$-(Qv)(s)]ds-\frac{1}{\varepsilon+p(\tau)}[(L[v+\xi+\frac{1}{\varepsilon}\Pi])(\tau)-(Lv)(\tau)+\varepsilon v(\tau)+\frac{1}{\varepsilon}p(\tau)\times$$

$$\times\Pi(\tau,\varepsilon)]\}d\tau+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x H(s)\{(Q[v+\xi+\frac{1}{\varepsilon}\Pi])(s)-(Qv)(s)\}ds-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\times$$

$$\times[\varepsilon v(x)+\frac{1}{\varepsilon}p(x)\Pi(x,\varepsilon)+(L[v+\xi+\frac{1}{\varepsilon}\Pi](x)-(Lv)(x)]\equiv(P[\xi,v,\Pi])(x,\varepsilon); \quad (1.8)$$

$$(\overline{L}v)(x)\equiv p(x)v(x)+\int_0^x H_0(s)v(s)ds-\int_0^x H(s)(Qv)(s)ds+(Lv)(x)=$$

$$=f(x)-f(0). \qquad (1.9)$$

Доказана:

Лемма 1.2. В условиях ($\mathbf{A_1}$ - $\mathbf{A_5}$) функция $\Pi(x,\varepsilon)$ единственна на D, причем имеет место оценка: $\|\Pi(x,\varepsilon)\|\le\sqrt{n}\,\|f(0)\|\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(x)}$.

Теорема 1.1. Если уравнение (1.9) имеет решение в $C_n(D)$ (или $C^{\gamma}_{\varphi,n}(D)$) и известные данные удовлетворяют условиям ($\mathbf{A_1}$ - $\mathbf{A_5}$). То:

а) уравнение

$$(L_1^0 v_\delta)(x)\equiv(\overline{L}\ v_\delta)(x)+\delta v_\delta(x)=f(x)-f(0),\ \ \forall x\in D, \qquad (1.10)$$

однозначно разрешимо в классе $C_n(D)$ для достаточно малых $\delta\ \ 0$;

б) при $\delta\to 0$, решение $v_\delta(x)$ сходится к решению $v(x)\in C_n(D)$ с оценкой:

$$\|v(x)-v_\delta(x)\|_C\le 2e^{Q_2T}[e^{-1}(2N_0+1)\sqrt{n}\delta^{1-\beta_0}\|v(x)\|_C+(N_0+1)\sqrt{n}w^0_v(\delta^{\beta_0})];$$

в) если $v(x)\in C^{\gamma}_{\varphi,n}(D)$, $(v(0)=0)$, то имеет место

$$\|v(x)-v_\delta(x)\|_C\le 2e^{Q_2T}[(N_0+1)\sqrt{n}M_0C_4+N_0M_0\sqrt{n}\gamma_0]\delta^{\gamma},$$

где $0<Q_2=const$, $C_4=\sup_{\tau\in[0,\infty)}\tau^{\gamma}e^{-\tau}$, $\gamma_0=\gamma\int_0^\infty e^{-v}v^{\gamma-1}dv$, $0<\beta_0<1$,

$M_0=\sup_{(x,\tau)\in D}(\|v(x)-v(\tau)\|)(|\varphi(x)-\varphi(\tau)|)^{-\gamma}$, $\|v(x)\|\le r, \forall x\in D$,

$w^0_v(\delta')=\sup_{|y-s|\le\delta'}\|v(\varphi^{-1}(y))-v(\varphi^{-1}(s))\|$ - модуль непрерывности, $\varphi^{-1}(y)$- обратная относительно $\varphi(x)$, $(y=\varphi(x), y\in[0,\varphi(T)], x\in[0,T])$.

Следствие 1.1. При условиях теоремы 1.1 следует, что задача (1.9) может иметь не более одного решения в $C_n(D)$ (или $C^{\gamma}_{\varphi,n}(D)$).

Теорема 1.2. При условиях леммы (1.1; 1.2), теоремы 1.1 уравнение (1.8) однозначно разрешимо в классе функций $C_n(D)$ и при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходится к нулю на D с оценкой:

а) $\|\xi(x,\varepsilon)\|_C \le 2e^{Q_2T}\{e^{-1}(2N_0+1)\sqrt{n}\varepsilon^{1-\beta_0}\|v(x)\|_C + (N_0+1)\sqrt{n}w_v^0(\varepsilon^{\beta_0}) +$
$+\ \varepsilon^{\alpha_0}Q_3\}$, когда $v(x) \in C_n(D)$;

б) если $v(x) \in C^{\gamma}_{\varphi,n}(D)$, то имеет место

$\|\xi(x,\varepsilon)\|_C \le 2e^{Q_2T}([(N_0+1)\sqrt{n}M_0C_4 + N_0M_0\sqrt{n}\gamma_0]\varepsilon^{\gamma} + \varepsilon^{\alpha_0}Q_3)$,
$(0 < Q_2, Q_3 = const$, см. гл. 1, параграф 1.1$)$.

Теорема 1.3. Пусть выполняются условия (**A_1 - A_5**), лемм (1.1, 1.2), теорем 1.1, 1.2. Тогда система нелинейных уравнений (1.4) имеет единственное решение, представимое в виде (1.6) и это решение при $\varepsilon \to 0, 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 < 1$ на $(0,T]$ сходится к решению уравнения (1.9) с оценкой:

а) $\|v(x)-u_\varepsilon(x)\| \le 2e^{Q_2T}\{e^{-1}(2N_0+1)\sqrt{n}\varepsilon^{1-\beta_0}\|v(x)\|_C + (N_0+1)\sqrt{n}w_v^0(\varepsilon^{\beta_0}) +$

$+\varepsilon^{\alpha_0}Q_3\} + \dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{n}\|f(0)\|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(x)}$, когда $v(x) \in C_n(D)$;

б) если $v(x) \in C^{\gamma}_{\varphi,n}(D)$, то $\|v(x)-u_\varepsilon(x)\| \le 2e^{Q_2T}([(N_0+1)\sqrt{n}M_0C_4 +$

$+\ N_0M_0\sqrt{n}\gamma_0]\varepsilon^{\gamma} + \varepsilon^{\alpha_0}Q_3) + \dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{n}\|f(0)\|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(x)}$, $\forall x \in (0,T]$.

Далее рассматривается уравнение для функций от двух переменных:

$$p(t)u(x,t) + (L_0u)(x,t) = f(x,t), \qquad (1.11)$$

где $L_0u = \int\limits_0^t K(x,t,\eta)u(x,\eta)d\eta + \int\limits_0^{M(t)}\int\limits_0^x K_0(x,t,\eta,\tau,u(\tau,\eta))d\tau d\eta$,

A_1) $C_n^{1,1}(D) \ni f(x,t) \ne 0$, $\forall (x,t) \in D = [0,X] \times [0,T]$. А относительно $M(t)|_{t=0} = 0$, $(0 \le M(t) \le t \le T,\ \forall t \in [0,T])$, $C[0,T] \ni p(t)\big|_{t=0} = 0$, $C_n(D_2) \ni K(x,t,\eta)\big|_{\eta=t} \equiv 0$, $K(x,t,0) = 0$, $p(t) \le q_0(\varphi(t))^{\beta}$, $\forall t \in [0,T], (2+\alpha_0 < \beta, 0 < \alpha_0 < 1)$, $C_n^{0,0,0,0,1}(D_3) \ni K_0(x,t,\eta,\tau,u)$ и $K_0(x,t,\eta,\tau,u)|_{\eta=t} \equiv 0$, $K_{0u}(x,t,\eta,\tau,u)|_{\eta=t} \equiv 0$, $K_0(x,t,0,\tau,u) = 0$, $K_{0u}(x,t,0,\tau,u) = 0$, $D_2 \ \{(x,t,\eta) / 0 \le x \le X, 0 \le \eta \le t \le T\}$, $D_3 = D \times D \times R^n$, выполняются условия типа (**A_2 - A_5**).

В рамках условий (**A_1-A_5**), получены результаты, подобные к результатам лемм 1.1, 1.2 и теорем 1.1-1.3.

В этой же главе рассмотрены другие варианты уравнений (1.1), (1.11).

В §1.1,1.3 приведены и изучены иллюстративные примеры.

При вышеуказанных исследованиях одним из важных аспектов считается вопрос, в каком смысле регуляризирующие системы дают приближение решение уравнения (1.1), т.е. можем ли получить условие вида

$||(\Phi u_\varepsilon)(x) - f(x)||_{L^q} \le \delta,\ \forall x\in[0,T]$, ($0<\delta$ -сколь угодно малое число, $1<q<\beta$),

где $(\Phi u_\varepsilon)(x) \equiv \int\limits_0^x K_\Omega(t,f(t))u_\varepsilon(t)dt - \int\limits_0^x H(t,f(t))(Qu_\varepsilon)(t)dt + p(x)u_\varepsilon(x) +$ $+ (Lu_\varepsilon)(x)$. Как ответом поставленного вопроса получены леммы вида:

Лемма 1.3. Если $(\varphi(x))^{-\beta}\in L^1(0,T)$, то имеют место:

а) $||\Pi(x,\varepsilon)||_{L^q} \le (\gamma_2 T_0)^{\frac{1}{q}}\varepsilon^{\frac{\beta}{q}}$; $\gamma_2 = \gamma\beta^\beta e^{-\beta}q^{-\beta}$, $T_0 = \sup\limits_{[0,T]} |\int\limits_0^x(\varphi(t))^{-\beta}dt|$, $1<q<\beta$;

б) $||u_\varepsilon(x) - v(x)||_{L^q} \le (2^q T M_1^q(\varepsilon) + \gamma_1 T_0\varepsilon^{\beta-q})^{\frac{1}{q}}$; $||\xi(x,\varepsilon)||_C \le M_1(\varepsilon)$, ($M_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$), $\gamma_1 = 2^q\gamma_0 q^{-\beta}\beta^\beta e^{-\beta}$, $\gamma_0 = (\sqrt{n}\,||f(0)||)^q$.

Лемма 1.4. При условиях леммы 1.3 выражение $(\Phi u_\varepsilon)(x) - f(x)$ сходится к нулю в смысле $L^q(0,T)$, т.е. имеет место оценка вида:

$$||(\Phi u_\varepsilon)(x) - f(x)||_{L^q} \le [2^q\gamma_3^q(2^q T M_1^q(\varepsilon) + \gamma_1 T_0\varepsilon^{\beta-q}) + 4^q(\varepsilon r + M_0(\varepsilon))^q T + 4^q\gamma_2 T_0\varepsilon^\beta]^{\frac{1}{q}} + \varepsilon(r + M_1(\varepsilon))T^{\frac{1}{q}} + (\gamma_2 T_0)^{\frac{1}{q}}(\varepsilon^\beta)^{\frac{1}{q}} = M_2(\varepsilon),\ \forall x\in[0,T];$$

$\gamma_3 = \varepsilon + p(T)$, ($M_0(\varepsilon), M_2(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$).

В главе 2 изучаются системы интегральных уравнений Вольтерра третьего рода вида:

$$p(x)U(x) + (LU)(x) = f(x), \tag{2.1}$$

где $LU = \int\limits_0^x K(x,\tau)g(\tau,U(\tau))d\tau$, а функция $p(x)$ определяется по правилу

$$p(x) = \begin{cases} 0,\ x\in A = [0,x_0], \\ p_0(x),\ x\in B = [x_0, X], \end{cases} \tag{2.2}$$

Б$_1$) $p_0(x_0) = 0$, $C(B)\ni p_0(x) > 0$, $\forall x\in(x_0,X]$, $p_0(x)$ - неубывающая функция.

При задании функции $p(x)$ в виде (2.2) система (2.1) меняет форму на отрезке A, переходя к системе интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В связи с этим рассматриваются две задачи. В частности, первая задача для (2.1) ставится следующим образом:

Первая задача: Построить решение системы

$$p_0(x)u(x) + (\overline{L}u)(x) = F(x),\ x\in B, \tag{2.3}$$

где $(\overline{L}u)(x) \equiv \int\limits_{x_0}^x K(x,\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau$, если известно точное решение системы

$$(Lz)(x) = f_0(x),\ x\in A, \tag{2.4}$$

Б$_2$) $F(x)\ne 0, \forall x\in B, F(x) = f(x) - \int\limits_0^{x_0} K(x,t)g(t,z_T(t))dt$.

Точнее, в параграфе 2.1 система (2.1) имеет правую часть, определенную по правилу $f(x)=\begin{cases} f_\varepsilon(x),\ x\in A, \\ f_1(x),\ x\in B, \end{cases}$ где $f_\varepsilon(x)$ представима в виде:

$$f_\varepsilon(x)=f_0(x)+\varepsilon\, Q(x,z_T(x),\varepsilon),\ (Q(x,z_T,\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0). \qquad (2.5)$$

В правой части параграфа 2.1 при дифференцируемой по t матричной функции $K(x,t)$ такой, что, $K(x,t)\,|_{t=x}\equiv 0,\ K_t(x,t)\,|_{t=x}\equiv 0$ для системы (2.4) с правой частью $f_\varepsilon(x)$ доказывается, что решение цепочек систем:

$$z_\delta(x)=G(x,v_\delta(x)),\delta\, v_\delta(x)+\int_0^x v_\delta(t)dt=w_\varepsilon(x)+\delta v(0),\ x\in A;$$

$$\varepsilon\, w'_\varepsilon(x)+\int_0^x K_t(x,t)w_\varepsilon(t)dt=f_\varepsilon(x),\ x\in A,\ w_\varepsilon(0)=0,$$

сходится по метрике пространств $C_n(A),\ L_n^p(A)$ при $\varepsilon\to 0$ к известному точному решению $z_T(x),\ x\in A$ системы (2.4), т.е. имеем:

Теорема 2.1. Пусть $K(x,t)\in C_n^{0,1}(A),\ g(x,z)\in C_n^{0,1}(D_0)$ и $g_z(x,z)\geq\alpha>0$, $\forall(x,z)\in D_0=A\times R^n$, $z_T(x)$-точное решение системы (2.4). Тогда если $f_\varepsilon(x)$ представимо в виде (2.5), то при достаточно малом $\varepsilon\in(0,b_1=(2M_0C_0)^{-1})$ таком, что $\varepsilon=\varepsilon(\delta)\to 0$ и $\dfrac{\varepsilon^2(\delta)}{\delta}\to 0$ при $\delta\to 0$, имеет место оценка

$$\|z_T(x)-z_\delta(x)\|_{C_n}\leq L_G[4\alpha_1\frac{\varepsilon^2(\delta)}{\delta}+4\|v(x)\|_{C_n}e^{-\frac{1}{\delta^{1-\beta_0}}}+\overline{W}_v(\delta^{\beta_0})].$$

Лемма 2.1. Если выполняются условия теоремы 2.1 и $z_T(x)\in L_n^q(A)$, то справедлива оценка

$$\|z_T(x)-z_\delta(x)\|_{L_n^q}\leq L_G\varepsilon^{\frac{1}{q}+1}(\frac{1}{q})^{\frac{1}{q}}(1+2M_0\varepsilon)\alpha_1,\ \forall x\in A,$$ где $1\quad q$.

Из постановки первой задачи видно, что приближенным решением (2.3) является функция $u_\varepsilon(x)$ и это решение ищется в виде $u_\varepsilon(x)=v(x)+\xi(x,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi(x,\varepsilon)$. Для этого, на основе леммы 1.1, система (2.1) приводится к виду аналогичному (1.3), который допускает построение регуляризирующей системы вида:

$$(\varepsilon+p_0(x))u_\varepsilon(x)=-\int_{x_0}^x H_0(t)u_\varepsilon(t)dt+\int_{x_0}^x H(t)(Qu_\varepsilon)(t)dt-(\overline{L}(u_\varepsilon)(x)+$$

$$+F(x),\quad u_\varepsilon(x_0)=\frac{1}{\varepsilon}F(x_0), \qquad (2.6)$$

при этом $\Pi(x,\varepsilon),\ \xi(x,\varepsilon),\ v(x)$ определяются из уравнений типа (1.7)-(1.9), а ε - малый параметр, $(Qu)(x)=colon(Q_1(u_1,\dots,u_n),\dots,Q_n(u_1,\dots,u_n))$.

Чтобы использовать такую методику необходимо, кроме выше допущенных предположений, выполнение следующих условий, т.е.

Б$_3$) существуют такие константы α_0, β, d_0 и функция $0 < h(x) \in L^1(x_0, X)$,

что $p(x) \le q_0(\varphi(x))^\beta$, $\forall x \in B$, $2 + \alpha_0 < \beta, 0 < \alpha_0 < 1$, $\varphi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} h(\tau)d\tau$,

$(p(x))^{-1} h(x) = M_0(x) \in L^1(x_0, X)$; $0 < d_0 \min\limits_{[i=1,n]} F_i^2(x) = 1$.

Б$_4$) $K(x,t) \in C_n^{0,1}(D)$, $K(x,t)|_{t=x} \equiv 0$, $K(x,x_0) = 0$, $g(x,z) \in C_n^{0,1}(D_2)$ и $g_z(x,z) \ge \alpha > 0$, $\forall (x,z) \in D_2 = D \times R^n$, $\| K(x,\tau) - K(y,\tau) \| \le C_1(\varphi(\tau))^\beta |\varphi(x) - \varphi(y)|$, $0 < C_1$.
При условиях (Б$_1$-Б$_4$) доказывается, что решение $u_\varepsilon(x)$ системы (2.6) для всех $x \in (x_0, X]$, сходится к решению системы (2.4) с правой частью $F(x) - F(x_0)$.

Для решения первой задачи для системы:

$$p(t)U(x,t) + (L_0 U)(x,t) = f(x,t), \qquad (2.7)$$

с кусочно-непрерывной правой частью предполагаем, что

$$p(t) = \begin{cases} 0, \ t \in A = [0, t_0], \\ p_0(t), \ t \in B = [t_0, T], \end{cases} \qquad (2.8)$$

$p_0(t_0) = 0$, $C(B) \ni p_0(t) > 0$, $\forall t \in (t_0, T]$ и является неубывающей функцией,

где $L_0 U = \int\limits_0^t K(x,t,\eta) U(x,\eta) d\eta + \int\limits_0^t \int\limits_0^x K_0(x,t,\eta,\tau) g(\eta,\tau,U(\tau,\eta)) d\tau d\eta$, а

диагонально-матричные функции $K(x,t,\eta)$, $K_0(x,t,\eta,\tau)$ порядка $n \times n$, обращаются в нуль на диагонали.

Далее, производится регуляризация системы интегральных уравнений Вольтерра третьего рода на D_1, с учетом, что известно точное решение системы (2.7) на $D_0 = [0,X] \times A$, а вектор функция $C_n^{1,1}(D_1) \ni F(x, t) \ne 0$, $\forall (x,t) \in D_1 = [0, X] \times [t_0, T]$. Эти результаты содержатся в §2.2.

В третьем и четвертом параграфах изучается другая задача, которая для системы (2.1) ставится следующим образом:

<u>**Вторая задача**</u>: При правой части $f_0(x) \ne 0$ найти решения системы (2.4) на части A отрезка $[0,X]$, если известно точное решение $z_T(x)$ системы (2.3) на части B отрезка $[0,X]$, при этом предполагается выполнение условий (Б$_1$ - Б$_4$).

В этой задаче $f(x)$ задается по правилу: $f(x) = \begin{cases} f_0(x), \ x \in A, \\ f_\varepsilon(x), \ x \in B. \end{cases}$

В вышесказанных условиях регуляризированная система, строящаяся на основе леммы 1.1, имеет вид:

$$\varepsilon u_\varepsilon(x) = -\int\limits_0^x H_0(s) u_\varepsilon(s) ds + (\overline{L}_2 u_\varepsilon)(x) + f_0(x), \qquad (2.9)$$

где $\overline{L}_2 u_\varepsilon = \int\limits_0^x H(s)(Qu_\varepsilon)(s) ds - (Lu_\varepsilon)(x)$, $(Qu_\varepsilon)(x) = colon(Q_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, Q_n(u_1, \ldots, u_n))$, а $Q_1(u_1, \ldots, u_n) = u_1(x)(L_1(u_1, \ldots, u_n))(x), \ldots, Q_1(u_1, \ldots, u_n) = u_2(x)(L_n(u_1, \ldots, u_n))(x)$, при этом решение (2.9) ищется в виде

$$u_\varepsilon(x) = \upsilon(x) + \xi(x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\Pi(x,\varepsilon). \qquad (2.10)$$

Теорема 2.5. При выполнении условий ($Б_1$ - $Б_4$) и

$K_1=(N_1C_0 + \frac{1}{2}e^{-1})\sqrt{n}Q_4 < 1$, где $Q_4 = 2C_1q_1L_g\int_0^{x_0}(\varphi(s))^\beta ds$, $C_0 = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau d\tau = 1$,

$0 < N_1 = const$, решение регуляризированной системы (2.9) единственным образом представимо в виде (2.10) для любого $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 < 1$. Причем $u_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon}f_0(0)$ и при всех $x \in (0, x_0]$ это решение $u_\varepsilon(x)$ сходится к решению системы с правой частью $f_0(x) - f_0(0)$, когда $\varepsilon \to 0$.

Лемма 2.6. Пусть $f_\varepsilon(x)$ представима в виде (2.5) и имеют место условия ($Б_1$-$Б_4$), $N_0(x) = (p(x))^{-1}(\varphi(x))^\beta \in L^1(x_0, X)$, $z_T(x) \in C^1{}_n(B)$. Тогда, если $\frac{a(\delta)}{\delta} \to 0$ при $\delta \to 0$, то справедлива оценка $\| z_T(x) - z_\delta(x) \| \le \frac{a(\delta)}{\delta}M_1$.

Здесь использованы обозначения вида:

$M_1 = N_3 \exp(C_1L_gT_1\int_{x_0}^{X}N_0(s)ds)$, $\quad \| \int_{x_0}^{x}h(s)ds \| \le T_1$, $0 < L_g = \sup_{D_0}\| g_u(x,u) \|$,

$N_3 = X - x_0$, $\quad \| f_2(x) - \overline{f}_\delta(x) \| \le a(\delta)$, $\forall x \in B$, а $z_\delta(x)$ -решение задачи

$$\begin{cases} \delta z'_\varepsilon(x) + p(x)z_\delta(x) = -(\overline{L}z_\delta)(x) + F_\delta(x), \ \ x \in B, \\ F_\delta(x) = \overline{f}_\delta(x) - \int_0^{x_0}K(x,t)g(t,v(t))dt + \delta\ z'_T(x), \ \ z_\delta(x_0) = 0. \end{cases}$$

Аналогичные результаты в параграфе §2.4 получены при решении второй задачи для системы уравнений Вольтерра (2.7).

В главе 3 исследованы системы уравнений Вольтерра первого рода вида:

$$\int_0^x K(x,\tau,u(\tau))d\tau = f(x), \qquad (3.1)$$

в которых известные функции удовлетворяют условиям:

A_1) $f(x) \in C_n^1(D)$, $D = [0, X]$; $f(0) \neq 0$;

A_2) $K(x,\tau,u) \in C_n^{0,0,1}(D_0)$: $K(x,\tau,u)\big|_{\tau=x} \equiv 0$, $K_u(x,\tau,u)\big|_{\tau=x} \equiv 0$.

A_3) Существуют такие функции $0 < \lambda_0(x)$, $h(x) \in L_1(0, X)$ и такие константы α_0, β, $(2 + \alpha_0 < \beta, 0 < \alpha_0 < 1)$, что

$\| K(x,\tau,u) - K(y,\tau,u) \| \le C_{01}\lambda_0(\tau) |\varphi(x) - \varphi(y)|$, $\lambda_0(x)(\varphi(x))^{-\beta} \in L_1(0,X)$,

$\| K_u(x,\tau,u) - K_u(y,\tau,u) \| \le C_{02}\lambda_0(\tau) |\varphi(x) - \varphi(y)|$, $0 < C_{01}$, C_{02},

$\varphi(x) = \int_0^x h(t)dt$, $D_0 = \{(x,\tau,u) / 0 \le \tau \le x \le X,\ R^n \ni u\}$.

A_4) Пусть $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$ и пусть существуют константы d_0, d_1 такие, что

$C_n^1(D) \ni f_0(x) \neq 0,\ \forall x \in D$, а $C_n^1(D) \ni f_1(x),\ \| f_1(x) \| \leq d_1(\varphi(x))^\beta,\ \forall x \in D$ и $d_0 \min\limits_{[i=1,n]} f_{0i}^2(x) = 1$.

В работе Иманалиева М.И. [а] был использован метод для приближенного особого решения уравнения (3.1), основанный на теореме:

Теорема 1.6.1. Если функции $K(x,\tau,u)$ и $f(x)$ непрерывны по своим аргументам и непрерывно дифференцируемы по x, u и $K_u(x,\tau,u) \geq \lambda > 0$, функция $K_x(x,\tau,u)$ удовлетворяет условию Липщица по u, то уравнение $\int\limits_0^x K(x,\tau,u_\varepsilon)d\tau = f(x) - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} f(0)$, имеет единственное решение, представимое

в виде: $u_\varepsilon(x) = G(x, \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + w(x,\varepsilon)), |w(x,\varepsilon)| \leq C_0, |u_\varepsilon(x)| \leq C_1 + \frac{C_2}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$,

где $C, C_i = const,\ (i = \overline{0,2})$, не зависящие от ε, $G(x, u)$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица по u.

Для доказательства этой теоремы использованы соотношения вида:

$$K(x,x,u_\varepsilon(x)) + \int\limits_0^x K_x(x,\tau,u_\varepsilon(\tau))d\tau = f'(x) + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} f(0), \qquad (3.2)$$

$$K(x,x,u) = v(x),\ u(x) = G(x,v(x)),\ w_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x) - \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} f(0),$$

$$w_\varepsilon(x) = -\int\limits_0^x K_x(x,\tau,G(\tau,w_\varepsilon(\tau) + \frac{f(0)}{\varepsilon} e^{-\frac{\tau}{\varepsilon}}))d\tau + f'(x). \qquad (3.3)$$

Отметим, что при выполнении условия вида $K(x, x, u) \equiv 0$, непосредственно метод доказательства этой теоремы не применим, т.е. нельзя построить соотношение вида (3.2). Следовательно, ставится вопрос, как построить решение уравнения (3.1) в условиях (A_1 - A_4).

Нами доказана:

Лемма 3.1. Пусть выполняются условия (A_1 - A_4). Тогда уравнение (3.1) эквивалентно уравнению

$$\int\limits_0^x H_0(s)u(s)ds - \int\limits_0^x H(s)\{(Qu)(s) - H_1(s)u(s)\}ds + \int\limits_0^x K(x,s,u(s))ds = f(x), \qquad (3.4)$$

где $H_0(x) = diag(H_{01}(x), \dots, H_{0n}(x)),\ H_{0\,i}(x) = d_0 h(x) f_{0\,i}^{\,2}(x),\ (i = \overline{1,n})$,

$H(x) \equiv diag(H_1(x), \dots, H_n(x)),\ H_i(x) = d_0 h(x) f_{0\,i}(x),\ (i = \overline{1,n})$,

$H_1(x) \equiv diag(H_{11}(x), \dots, H_{1n}(x)),\ H_{1\,i}(x) = f_{1\,i}(x),\ (i = \overline{1,n})$, а

$(Qu)(x) = colon(Q_1(u_1, \dots, u_n), \dots, Q_n(u_1, \dots, u_n)),\ Q_1(u_1, \dots, u_n) = u_1(x) \times$ $\times \int\limits_0^x K_1(x,s,u_1, \dots, u_n)ds, \dots, Q_n(u_1, \dots, u_n) = u_n(x) \int\limits_0^x K_n(x, s, u_1, \dots, u_n)ds$.

Лемма 3.1 является модифицированным вариантом леммы 1.1.

Далее, введена регуляризирующая система вида:

$$\begin{cases} \varepsilon u_\varepsilon(x) + \int\limits_0^x H_0(\tau)u_\varepsilon(\tau)d\tau = \int\limits_0^x H(\tau)\{(Qu_\varepsilon)(\tau) - H_1(\tau)u(\tau)\}d\tau - \int\limits_0^x K(x,\tau, \\ u_\varepsilon(\tau))d\tau + f(x), \qquad (3.5) \\ u_\varepsilon(0) = \dfrac{f(0)}{\varepsilon}, \qquad (3.6) \end{cases}$$

и решение представлено по правилу: $u_\varepsilon(x) = \upsilon(x) + \xi(x,\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi(x,\varepsilon)$.

Применив, относительно полученных систем, теорию резольвент, получим для определения векторных функций $\Pi(x,\varepsilon)$, $\xi(x,\varepsilon), \upsilon(x)$, систему уравнений:

$$\Pi(x,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x W(x,\tau,\varepsilon)H_0(\tau)f(0)d\tau + f(0) = W(x,0,\varepsilon)f(0), \qquad (3.7)$$

$$\Pi(0,\varepsilon) = f(0);$$

$$\xi(x,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x W(x,\tau,\varepsilon)H_0(\tau)\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau H(s)\{[(Q[\upsilon + \xi + \frac{1}{\varepsilon}\Pi])(s) - (Q\upsilon)(s)] -$$

$$- H_1(s)[\xi(s) + \frac{1}{\varepsilon}\Pi(s,\varepsilon)]\}ds - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau (K(\tau,s,\upsilon(s)) + \xi(s,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\Pi(s,\varepsilon)) - K(\tau,s,$$

$$\upsilon(s)))ds - \upsilon(\tau)\}d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x H(s)\{[(Q[\upsilon + \xi + \frac{1}{\varepsilon}\Pi])(s) - (Q\upsilon)(s)] - H_1(s)\times$$

$$\times[\xi(\tau,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\Pi(\tau,\varepsilon)]\}ds - \upsilon(x) - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x (K(x,\tau\upsilon(\tau)) + \xi(\tau,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\Pi(\tau,\varepsilon)) -$$

$$- K(x,\tau,\upsilon(\tau)))d\tau, \ (\xi(0,\varepsilon) = 0), \qquad (3.8)$$

$$\int\limits_0^x H_0(s)\upsilon(s)ds - \int\limits_0^x H(s)\{(Q\upsilon)(s) - H_1(s)\upsilon(s)\}ds + \int\limits_0^x K(x,s,\upsilon(s))ds =$$

$$= f(x) - f(0), \ \upsilon(0) = 0. \qquad (3.9)$$

Доказана:

Лемма 3.2. Пусть уравнение (3.9) имеет решение в $C_n(D)$, причем имеют место условия (A_1-A_4) и леммы 3.1. Тогда уравнение (3.9) имеет единственное решение в $C_n(D)$.

Лемма 3.3. При условиях (A_1 -A_4), леммы 3.1 функция $\Pi(x,\varepsilon)$ определена единственным образом по правилу (3.7) и допускает ограничение: $\|\Pi(x,\varepsilon)\| \le M_0 \|f(0)\| e^{-\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}}$.

Лемма 3.4. Если выполняются условия (A_1 - A_4) и лемм 3.2, 3.3, то уравнение (3.8) однозначно разрешимо в $C_n(D)$ и векторная функция $\xi(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ на $[0,X]$ сходится к нулю по норме пространства $C_n(D)$.

Теорема 3.1. Пусть имеют место условия (A_1 - A_4), лемм 3.1-3.4. Тогда уравнение (3.5) с условием (3.6) имеет единственное решение $u_\varepsilon(x)$ и при

$\varepsilon \to 0$ сходится к решению $\upsilon(x)$ уравнения (3.9) на $(0,X]$ с оценкой:

$$||u_\varepsilon(x) - \upsilon(x)|| \leq \frac{M_0}{\varepsilon} \, || f(0)|| e^{-\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} + ||\xi(x, \varepsilon)||_C .$$

Отметим, что полученные результаты при исследованиях уравнения (3.1) применимы и интегральным уравнениям Вольтерра первого рода, где искомые функции зависят от двух переменных.

В главе 4 изучены два вида краевых задач для нелинейных систем, которые содержат интегро-дифференциальные уравнения и интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода. Первый тип краевых задач - это задачи типа Гурса с обратным временем, а второй тип задач - это задачи типа Бицадзе-Самарского. Аналогичные задачи исследованы в работах Иманалиева М.И., Нахушева А.М., Лаврентьева М.М., Вабищевича П.Н., Музылева Н.В., Напсо А.Ф. и других, т.е. исследуются граничные обратные задачи, состоящие: **а)** в определении неизвестного граничного условия на одном из концов отрезка, или **б)** в определении некоторых неизвестных функций в граничных условиях с дополнительным условием о зависимости решения от времени. Их методы решения основаны на нелокальном возмущении дополнительного условия или методах, основанные на экстремальных значениях искомых функций.

Такие задачи встречаются в теории теплообмена, в модельных задачах теории изучения "нерва", в часности, это системы типа Ходжкин-Хаксли-Фидзуха. В задачах первого и второго вида, когда в системах участвуют интегральные уравнения Вольтерра первого или третьего рода с недифференцируемыми ядрами, которые некорректны по Адамару в $C[0,T]$ и отсутствует априорная информация о решении, то методы, использованные вышеназванных работах не применимы. Поэтому в рамках указанных проблем отмеченные классы задач требуют изучения. Этим вопросам посвящены исследования, которые содержатся в §4.1- 4.3.

В параграфах 4.1, 4.2 исследованы задачи вида:

$$(Lu)(x, t) = f(x, t, u(x, t)) + (L_0[u, \varphi])(x, t), \tag{4.1}$$

$$(L_1\varphi)(x) = f_0(x) + \int_0^x\int_0^T M_0(x, \eta, \tau, u(\eta, \tau), u(\eta, 0))d\tau d\eta, \tag{4.2}$$

$$u(0, t) = 0, \; u(x, T) - \int_0^x\int_0^T M_1(x, \eta, \tau, u(\eta, \tau), u(\eta, 0))d\tau d\eta, \tag{4.3}$$

где $(Lu)(x, t) \equiv u_{xt}(x, t) + b(x)u_t(x, t) + a(t)u_x(x, t)$, $(L_0[u, \varphi])(x, t) \equiv \int_0^x\int_0^t K_1(x, t, \eta, \tau, u(\eta, \tau), \varphi(\eta))d\tau d\eta$;

а) $$(L_1\varphi)(x) \equiv p(x)\varphi(x) + \int_0^x K_0(x, \eta, \varphi(\eta))d\eta, \tag{4.4}$$

б) или $(L_1\varphi)(x) = \int\limits_0^{M(x)} K(x,\eta)\varphi(\eta)d\eta + \int\limits_0^{x} K_0(x,\eta,\varphi(\eta))d\eta$. При этом относительно

заданных функций $f_0(x)\in C_n^{\,1}(D_0)$, $C(D_0)\ni p(x)|_{x=0}=0$, $M(x)|_{x=0}=0$,
$C_n(D_6)\ni K(x,\ \eta)|_{\eta=x}\equiv 0$, $C_n^{\,0,0,1}(D_3)\ni K_0(x,\ \eta,\ \varphi(\eta))|_{\eta=x}\equiv 0$, $K_{0\varphi}(x,\eta,\varphi(\eta))|_{\eta=x}\equiv 0$,
$K_1(x,t,\eta,\tau,u,\varphi)\in C^{0,0,0,0,1,1}(D_1)$, $M_0(x,\eta,\tau,u,\bar u)\in C^{0,0,0,1,1}(D_2)$, $M_1(x,\eta,\tau,u,\bar u)\in$
$\in C^{1,0,0,1,1}(D_2)$ налагаются условия вида (A_1 - A_5), а $b(x)\in C(D_0)$, $a(t)\in C(D_4)$,
$f(x,\ t,\ u)\in C_n^{\,0,0,1}(D_5)$, где $D_0=[0,\ X]$, $D_1=D\times D\times\{R^n\times R^n,\ u\in R^n,\ \varphi\in R^n\}$,
$D_2=D_0\times D_0\times[0,T]\times\{R^n\times R^n,\ u\in R^n\}$, $D_3=D_0\times D_0\times R^n$, $D_4=[0,\ T]$, $D_5=D\times R^n$,
$D_6=\{(x,\ \eta)\ /\ 0\le\eta\le x\le X\}$, $(\,0\le M(x)\le x\le X,\ \forall x\in D_0$.
В (4.1), (4.2) $u(x,\ t)\in C_n^{\,1,1}(D)$, $\varphi(x)\in Z_n(U)$ - искомые векторные функции, при этом предполагаются, что решения этих систем существуют.

Отметим, что все результаты §4.1,4.2 получены в случае, когда $N_0(x,t)$, $\bar N_0(x,t)$, где $N_0(x,t)=\int\limits_0^x\int\limits_0^t K_1(x,t,\eta,\tau,u(\eta,\tau),\varphi(\eta))d\tau d\eta$, $\bar N_0(x,t)=\int\limits_0^x\int\limits_0^t K_1(x,t,\eta,\tau,$ $u(\eta,\tau),\upsilon(\eta))d\tau d\eta$, $\forall(x,t)\in D$, удовлетворяют требованиям следующей леммы:

Лемма 4.1. Пусть для любого $0<\varepsilon_0$ -малого числа существует $0<\delta_0$ - малое число и при этом пусть выполняется условие $\sup\limits_D \|N_0(x,t)-\bar N_0(x,t)\|<\delta_0$.
Тогда имеет место неравенство вида $\|z(x,t)\ -\ V(x,t)\|<\varepsilon_0$, $\forall(x,t)\in D$, где $z(x,t)$- решение системы (4.5), а $V(x,\ t)$ - решение системы (4.6), $\upsilon(x)\in C_n(D_0)$.

Здесь (4.5), (4.6) определяются по правилу:

$$z(x,\ t)=\int\limits_0^t e^{-\int\limits_\tau^t a(v)dv}(a(\tau)\int\limits_0^x e^{-\int\limits_\eta^x b(s)ds} z(\eta,\ \tau)d\eta+f(x,\tau,\int\limits_0^x e^{-\int\limits_\eta^x b(s)ds} z(\eta,\ \tau)d\eta\,)+\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau K_1(x,$$
$$\tau,\ \eta,\ v,\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_s^\eta b(s')ds'} z(s,v)ds,\ \varphi(\eta\,))dvd\eta)d\tau+e^{\int\limits_t^T a(v)dv}\,[\int\limits_0^x\int\limits_0^T M_1(x,\eta,\tau,\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_s^\eta b(\mu)d\mu}\times$$
$$\times\ z(s,\tau)ds,\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_s^\eta b(\mu)d\mu} z(s,0)ds)d\tau d\eta+\int\limits_0^x\int\limits_0^T M_{1x}(x,\eta,\tau,\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_s^\eta b(\mu)d\mu} z(s,\tau)ds,\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_s^\eta b(\mu)d\mu}\times$$
$$\times z(s,\ 0)ds)d\tau d\eta-\int\limits_0^T e^{-\int\limits_\tau^T a(v)dv}(a(\tau)\int\limits_0^x e^{-\int\limits_\eta^x b(s)ds} z(\eta,\ \tau)d\eta+f(x,\tau,\int\limits_0^x e^{-\int\limits_\eta^x b(s)ds} z(\eta,\tau)d\eta)+$$
$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau K_1(x,\tau,\eta,v,\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_s^\eta b(s')ds'} z(s,v)ds,\varphi(\eta))dvd\eta)d\tau]\equiv(B[z,\ \varphi])(x,\ t),$$

$$p(x)\varphi(x)+\int\limits_0^x K_0(x,\eta,\varphi(\eta))d\eta+\int\limits_0^x H_0(\eta)\varphi(\eta)d\eta-\int\limits_0^x H(\eta)(Q[\varphi,z])(\eta)d\eta=f_0(x)+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^T M_0(x,\eta,\tau,\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_\mu^\eta b(s)ds} z(\mu,\tau)d\mu,\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_\mu^\eta b(s)ds} z(\mu,0)d\mu)d\tau d\eta, \qquad (4.5)$$

$$\begin{cases} V(x,t)=(B[V,\upsilon])(x,t), \forall (x,t)\in D, \\ p(x)\upsilon(x)+\int\limits_0^x H_0(\eta)\upsilon(\eta)d\eta+(P[\upsilon,V])(x)=f_0(x)-f_0(0) \end{cases} \qquad (4.6)$$

и введены относительно (4.1)-(4.3) с учетом (4.4).

Далее, обсуждая аналогично, как в предыдущих главах, т.е. в условиях (A_1 - A_5) и лемм 1.1, 4.1, чтобы найти решение системы (4.5), (4.6) введем регуляризованную систему вида:

$$\begin{cases} z(x,t,\varepsilon)=(B[z,\varphi])(x,t,\varepsilon), \\ (\varepsilon+p(x))\varphi(x,\varepsilon)+(P[\varphi,z])(x,\varepsilon)+\int\limits_0^x H_0(\eta)\varphi(\eta,\varepsilon)d\eta=f_0(x), \end{cases} \qquad (4.7)$$

$$\varphi(0,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}f_0(0), \qquad (4.8)$$

где $(P[\varphi,z])(x,\varepsilon)\equiv\int\limits_0^x K_0(x,\eta,\varphi(\eta,\varepsilon))d\eta-\int\limits_0^x H(\eta)(Q[\varphi,z])(\eta,\varepsilon)d\eta-$

$-\int\limits_0^x\int\limits_0^T M_0(x,\eta,\tau,\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_\mu^\eta b(s)ds} z(\mu,\tau)d\mu,\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_\mu^\eta b(s)ds} z(\mu,0)d\mu)d\tau d\eta$, $(0,1)\ni\varepsilon$ - малый параметр и решение этой системы ищем в виде

$$z(x,t,\varepsilon)=z(x,t)+\aleph(x,t,\varepsilon), \varphi(x,\varepsilon)=\upsilon(x)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi(x,\varepsilon)+\xi(x,\varepsilon), \qquad (4.9)$$

где $\upsilon(0)=0$, $\Pi(0,\varepsilon)=f_0(0)$, $\xi(0,\varepsilon)=0$ и $\aleph(x,t,\varepsilon)$, $\upsilon(x)$, $\Pi(x,\varepsilon)$, $\xi(x,\varepsilon)$ - искомые функции, являющиеся решениями системы уравнений, которые получаются из (4.7). Обсуждая аналогично, как это сделали в предыдущих главах, получим следующие результаты:

Лемма 4.2. Если система уравнений (4.6) имеет решение $z(x,t)\in C_n^{0,1}(D)$, $\upsilon(x)\in C_n(D_0)$, (или $\upsilon(x)\in C^\gamma_{\psi,n}(D_0)$) и выполняются условия (A_1 - A_5), леммы 4.1. То существует единственная пара n - мерных вектор-функций $(z_\delta(x,t),\upsilon_\delta(x))$, которая является решением системы уравнений

$$\begin{cases} z_\delta(x,t)=(B[z_\delta,\upsilon_\delta])(x,t), \forall (x,t)\in D, \\ (\delta+p(x))\upsilon_\delta(x)=-\int\limits_0^x H_0(\eta)\upsilon_\delta(\eta)d\eta+(P[\upsilon_\delta,z_\delta])(x)+F(x), \end{cases}$$

и при $\delta\to 0$ равномерно сходится к решению (z,υ) системы (4.6) на D, при этом имеет место:

а) $\| z_\delta(x,t)-z(x,t)\|_C \le Q_1(1-\overline{Q})^{-1}[e^{-1}(2N_0+1)\sqrt{n}\,\delta^{1-\beta_0}\|\upsilon(x)\|_C +$

$+ (N_0+1)\sqrt{n}\,\omega_{0\bar{\upsilon}}(\delta^{\beta_0})]$,

$\|\upsilon_\delta(x)-\upsilon(x)\|_C \le (Q_2(1-\overline{Q})^{-1}+1)[e^{-1}(2N_0+1)\sqrt{n}\,\delta^{1-\beta_0}\|\upsilon(x)\|_C +$

$+ (N_0+1)\sqrt{n}\,\omega_{0\bar{\upsilon}}(\delta^{\beta_0})]$, когда $\upsilon(x)\in C_n(D_0)$;

б) $\|z_\delta(x,t)-z(x,t)\|_C \le Q_1(1-\overline{Q})^{-1}[(N_0+1)\sqrt{n}\,C_7T_0+T_0N_0\sqrt{n}\,\gamma_0]\,\delta^\gamma$,

$\|\upsilon_\delta(x)-\upsilon(x)\|_C \le (1+Q_2(1-\overline{Q})^{-1})[(N_0+1)\sqrt{n}\,C_7T_0+T_0N_0\sqrt{n}\,\gamma_0]\,\delta^\gamma$,

если $\upsilon(x)\in C^\gamma_{\psi,n}(D_0)$, где $(0,1)\ni\delta$ - малый параметр, $C_7=\sup\limits_{\tau\in[0,\infty)}\tau^\gamma e^{-\tau}$,

$\gamma_0=\gamma\int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau,\ 0<\beta_0<1,\ T_0=\sup\limits_{(x,\eta)\in D_0}(\|\upsilon(x)-\upsilon(\eta)\|/|\psi(x)-\psi(\eta)|^\gamma)$,

$0<\overline{Q}=Q_1+Q_2<1,\quad \omega_{0\bar{\upsilon}}(\delta')=\sup\limits_{|y-s|\le\delta'}\|\upsilon(\psi^{-1}(y))-\upsilon(\psi^{-1}(s))\|$, $\psi^{-1}(y)$ - обратная к

$\psi(x)$, $\|\upsilon(x)\|\le r,\ \forall x\in D_0$.

Лемма 4.3. При условиях (A_1 - A_5) функции $\Pi(x,\varepsilon)$, $\xi(x,\varepsilon)$, $\aleph(x,t,\varepsilon)$ единственно определены на D_0 и D, причем:

$$\|\Pi(x,\varepsilon)\|\le\sqrt{n}\,\|f_0(0)\|e^{-\int\limits_0^x\frac{h(s)ds}{\varepsilon}}=\sqrt{n}\,\|f_0(0)\|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\psi(x)}.$$

$G_\varepsilon\le(1-\overline{Q})^{-1}[\varepsilon^{\alpha_0}(Q_1^0+Q_2^0)+e^{-1}(2N_0+1)\sqrt{n}\varepsilon^{1-\beta_0}\|\upsilon(x)\|_C+(N_0+1)\sqrt{n}\times$

$\times\omega_{0\bar{\upsilon}}(\varepsilon^{\beta_0})]$, если $\upsilon(x)\in C_n(D_0)$;

$G_\varepsilon\le(1-\overline{Q})^{-1}[\varepsilon^{\alpha_0}(Q_1^0+Q_2^0)+\varepsilon^\gamma((N_0+1)\sqrt{n}C_7T_0+T_0N_0\sqrt{n}\gamma_0)]$, когда

$\upsilon(x)\in C^\gamma_{\psi,n}(D_0)$, а $G_\varepsilon\equiv\|\aleph(x,t,\varepsilon)\|_C+\|\xi(x,\varepsilon)\|_C$, где $\overline{Q}<1$. (4.10)

Теорема 4.1. Пусть для функций $f_0(x)$, $p(x)$, $K_1(x,t,\eta,\tau,u,\varphi)$, $M_0(x,\eta,\tau,u,\bar{u})$, $M_1(x,\eta,\tau,u,\bar{u})$, $K_0(x,\eta,\varphi)$, $b(x)$, $a(t)$, $f(x,t,u)$ имеют место условия (A_1-A_5) и лемм 1.1, 4.1-4.3. Тогда нелинейная система интегральных уравнений (4.7) с условием (4.8) имеет единственное решение, представимое в виде (4.9). Причем, это решение сходится к решению (u,υ) системы (4.6) на $(0,X]\times[0,T]$, когда $\varepsilon\to0$, $(0<\varepsilon\le\varepsilon_0<1)$, при этом имеют место оценки:

а) $\|z(x,t,\varepsilon)-z(x,t)\|\le\Delta_0(\varepsilon)$, $\|\varphi(x,\varepsilon)-\upsilon(x)\|\le\Delta_1(\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{n}\,\|f_0(0)\|e^{-\frac{\psi(x)}{\varepsilon}}$,

$\forall x\in(0,X]$, если $\upsilon(x)\in C_n(D_0)$;

б) $\|z(x,t,\varepsilon)-z(x,t)\|\le\Delta_2(\varepsilon)$, $\|\varphi(x,\varepsilon)-\upsilon(x)\|\le\Delta_3(\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{n}\,\|f_0(0)\|e^{-\frac{\psi(x)}{\varepsilon}}$,

$\forall x\in(0,X]$, когда $\upsilon(x)\in C^\gamma_{\psi,n}(D_0)$, где $Q_*=\max(Q_1,Q_2)$, $Q_*^0=\max(Q^0_1,Q^0_2)$,

$\Delta_0(\varepsilon)=Q_*(1-\overline{Q})^{-1}[\varepsilon^{\alpha_0}(Q_1^0+Q_2^0)+e^{-1}(2N_0+1)\sqrt{n}\varepsilon^{1-\beta_0}\|\upsilon(x)\|_C+(N_0+1)\times$

$\times\sqrt{n}\omega_{0\bar{\upsilon}}(\varepsilon^{\beta_0})]+\varepsilon^{\alpha_0}Q_*^0$; $\Delta_1(\varepsilon)=\Delta_0(\varepsilon)+e^{-1}(2N_0+1)\sqrt{n}\varepsilon^{1-\beta_0}\|\upsilon(x)\|_C+(N_0+$

$+1)\sqrt{n}\omega_{0\bar{\upsilon}}(\varepsilon^{\beta_0})$; $\Delta_2(\varepsilon)=Q_*(1-\overline{Q})^{-1}[\varepsilon^{\alpha_0}(Q_1^0+Q_2^0)+\varepsilon^{\gamma}((N_0+1)\sqrt{n}\,C_7T_0+$ $+T_0N_0\sqrt{n}\,\gamma_0)]+\varepsilon^{\alpha_0}Q_*^0$; $\Delta_3(\varepsilon)=\Delta_2(\varepsilon)+\varepsilon^{\gamma}((N_0+1)\sqrt{n}\,C_7T_0+T_0N_0\sqrt{n}\,\gamma_0)$.

Теорема 4.2. Пусть выполняются условия теоремы 4.1 и $z(x,t)\in C^{0,1}{}_n(D)$, $\upsilon(x)\in C_n(D_0)$, (или $\upsilon(x)\in C^{\gamma}{}_{\psi,n}(D_0)$, $\upsilon(0)=0$). Тогда на основе равенства вида $u(x,t)=\int\limits_0^x e^{-\int\limits_\eta^x b(s)ds} z(\eta,t)d\eta$, существует единственная функция $u(x,t)\in C^{1,1}{}_n(D)$, которая является пределом функции $u_\varepsilon(x,t)$, когда $\varepsilon\to 0$ при этом имеют место: **а)** $||u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)||\le N_5\Delta_0(\varepsilon)X$, если $\upsilon(x)\in C_n(D_0)$, **б)** если $\upsilon(x)\in C^{\gamma}{}_{\psi,n}(D_0)$, то $||\,u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)\,||_C\le N_5\Delta_2(\varepsilon)X$.

Теорема 4.3. При условиях теоремы (4.1,4.2) существует единственная пара n -мерных вектор-функций $(u_\varepsilon,\varphi_\varepsilon)$ и при $\varepsilon\to 0$ сходится к функции (u,υ) на $(0,X]\times[0,T]$, где $\upsilon(x)$ решение уравнения Вольтерра третьего рода

$$p(x)\upsilon(x)+\int\limits_0^x K_0(x,\eta,\upsilon(\eta))d\eta+\int\limits_0^x H_0(\eta)\upsilon(\eta)d\eta-\int\limits_0^x H(\eta)(Q[\upsilon,u])(\eta)d\eta-\int\limits_0^x\int\limits_0^T M_0(x,\eta,\tau,u(\eta,\tau),u(\eta,0))\,d\tau\,d\eta=f_0(x)-f_0(0),\ \upsilon(0)=0.$$

Аналогичные результаты получены в параграфе 4.2 при решении задачи (4.1)-(4.3) и (б).

Параграф 4.3 посвящен исследованию системы вида:

$$u_{x^2t}(x,t)-\mu u_t(x,t)=f(x,t,u(x,t))+\int\limits_0^t\int\limits_0^x K_1(x,t,\eta,\tau,u(\eta,\tau),\varphi(\tau))d\eta d\tau,\quad (4.11)$$

$$(L_1\varphi)(t)\equiv p(t)\varphi(t)+\int\limits_0^t K_0(t,\tau,\varphi(\tau))d\tau+\int\limits_0^{M(t)}K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f_0(t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^X M_0(t,\tau,\eta,u(\eta,\tau),u(0,\tau))d\eta d\tau,\quad (4.12)$$

$$u(x,t)|_{t=0}=0,\quad \forall x\in[0,X]=D_0,\quad u(0,t)=\sum_{i=1}^n a_i(t)u(x_i,t),\ t\in[0,T],\quad (4.13)$$

$$u(X,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^X M_1(t,\tau,\eta,u(\eta,\tau),u(0,\tau))d\eta d\tau,\quad (4.14)$$

где $a_i(t)$ - известные функции, $\sum\limits_{i=1}^n|\,a_i(t)\,|\le\mu_0$, $\forall t\in[0,T]$ и $0<x_1<x_2<\ldots<x_n<X$, $\mu_0+\mu X^2<1$, $0<\mu$ – const.

В прикладных задачах встречаются простые случаи задачи (4.11)-(4.14), т.е.: $L_0(u,\varphi)\equiv 0$, $f(x,t,u)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\Pi_0(x,t)$, $\Pi_0(x,t)$ - поток почвенной влаги в точке x в момент времени $t\ge 0$. В зависимости от задания $\Pi_0(x,t)$ на поверхности почвы, т.е. при $x=0$ для $\forall t\in[0,T]$, уравнения Аллера:

$$u_t(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}(Du_x+Au_{xt})\equiv\frac{\partial}{\partial x}\Pi_0(x,t), \tag{4.15}$$

имеют различные формы, которые зависят от D, A - достаточно гладкие положительные функции, а $u(x,t)$ - распределение влаги в почвенном слое $0\le x\le b$ для всех t из $[0,T]$. Например, в работах Нахушева А.М. и Борисова В.Н. уравнение (4.15) изучена при условиях $A\equiv 0, D=const>0$, (или $D\equiv 0, A=const>0$) и вместо (4.14) рассмотрено условие $u(b,t)=0$, $\forall t\in[0,T]$, без уравнения (4.12). Задача (4.11)-(4.14) является более общим, чем вышеуказанная задача и если: $f_0(t)\ne 0, \forall t\in[0,T]$, то решение уравнения (4.12) не лежит в $C_n[0,T]$ и те методы, которые вышесказаны не применимы. Поэтому в этой главе для решения исследуемых задач, нами разработаны и изучены методы, когда отсутствует априорная информация о решении,а полученные результаты пополняют исследования по нелокальным задачам типа Бицадзе - Самарского.

В заключение автор выражает благодарность академику НАН КР Иманалиеву М.И., доктору физико-математических наук, проф. Асанову А. и доктору физико-математических наук, проф. Панкову П.С. за ценные советы, способствующее обсуждение задач и их методов решения.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Иманалиев М.И., Асанов А., Омуров Т.Д. Единственность и приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра первого рода с недифференцируемым ядром //Изв. НАН РК. -Бишкек: Илим, 1997. -Вып.1-С.18-23.
2. Иманалиев М.И., Омуров Т.Д. Регуляризация, единственность системы интегральных уравнений Вольтерра III рода с ядрами, тождественно обращающиеся в нуль на диагонали //Сб.научн.тр. КГПУ им. И.Арабаева. - Бишкек, 1997. - Вып.2. - С.20-25.
3. Иманалиев М.И., Омуров Т.Д. Обобщенное интегральное уравнение Волтерра III рода с негладкими функциями //Мат-лы 3 научно-теор. конф. “Проблемы развития суверенного Кыргызстана”. Сер. мат. и физ. Чуйск. ун-т - Бишкек, 1997.-С. 51-57.
4. Иманалиев М.И., Омуров Т.Д. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра III рода с ядрами, тождественно обращающимися в нуль на диагонали //Изв. НАН РК -Бишкек: Илим, 1998.-№2-3.-С.5-9.
5. Асанов А., Омуров Т.Д. Единственность и приближенное решение нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с негладкими ядрами. //Проблемы механики и прикладной математики: Мат-лы Междунар. научно-практ. конф. -Бишкек, 1995. - Т.11. - С.12-13.

6. Омуров Т.Д. Решения неявных интегральных уравнений типа Фредгольма и их приложения к некоторым задачам. Бишкек: Илим, 1991. - 134с.
7. Омуров Т.Д. Условия разрешимости нестандартно заданных уравнений с краевыми условиями //Исслед. по интегро - дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1994. - Вып.25. - С.145-149.
8. Омуров Т.Д. Приближенное решение нелинейной смешанной системы с нелокальными краевыми условиями //Там же. -Бишкек: Илим, 1999.- Вып.28. - С.290-300.
9. Омуров Т.Д. Об одном методе построения приближенного решения уравнения Вольтерра первого рода //Вестн. КГНУ. Естествен.-техн. науки.- 1995. - Вып.1.-С.96-98.
10. Омуров Т.Д. Приближенное решение задачи типа Гурса для смешанной нелинейной системы //Мат-лы 4 научно-теор. конф., посв. 5 летию Чуйск. ун-та - Бишкек, 1999.-С.186-199.
11. Омуров Т. Д. Решение системы нелинейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода свободным членом отличного от нуля //Там же.- Бишкек, 1999. - С.200-206.
12. Омуров Т.Д. Решения интегральных уравнений Вольтерра типа стыка с особыми ядрами //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.-Бишкек: Илим, 1998. - Вып.27.- С. 149-153.
13. Омуров Т.Д. Регуляризация, единственность системы интегральных уравнений Вольтерра стыкущего типа //Там же. - Бишкек: Илим, 1997. - Вып.26. - С. 128-133.
14. Омуров Т.Д. Регуляризация, единственность решения интегральных уравнений Вольтерра I рода с недифференцируемыми ядрами //Вестн. КГНУ. Естествен. -техн. науки. - Бишкек, 1997. - Вып.1. - С.130-134.
15. Омуров Т.Д. Некоторые способы решения интегральных уравнений и их приложения //Там же. -Бишкек, 1994. -Вып.1.-С.117-123.
16. Омуров Т.Д. Приближенное решение системы обобщенных интегральных уравнений ВольтерраIII рода//Там же. -Бишкек,1998.-С.88-93.
17. Омуров Т.Д. Приближенное решение задачи типа Гурса для нелинейных дифференциальных уравнений с обратным временем //Мат-лы 4 научно-теор. конф., посв. 5 летию Чуйск. ун-та - Бишкек, 1999.-С.166-171.
18. Омуров Т.Д. Регуляризация и единственность решения нелинейной системы особых интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1999.- Вып. 28. - С.179-184.
19. Омуров Т.Д. Обратные задачи типа Гурса для дифференциальных уравнений //Там же. - Бишкек, Илим, 1998. - Вып. 27. - С. 257-261.
20. Омуров Т.Д. Единственность и приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с ядрами типа Абеля //Там же.- Бишкек: Илим, 1997.-Вып.26.-С.123-128.

21. Омуров Т. Д. Регуляризация и единственность решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода не согласованным стыком в смысле обратных задач //Сб. научн. тр.-Бишкек: БВКК, 1999. - Вып.1.-С. 297-307.
22. Омуров Т.Д. Решение одного класса интегро - дифференциальных уравнений в частных производных //Исслед. по теории и приб. методам решения дифференц. и интегро. - дифференц. уравнений. -Фрунзе: КГУ, 1989. - С.48-50.
23. Омуров Т.Д. Решение неявных интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с условием Гурса //Асимптотические методы теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: Тез. докл. Всесоюз. конф. -Бишкек, 1991.-С.82.
24. Омуров Т.Д. Системный алгоритм решения неявного интегрального уравнения типа Фредгольма //Некорректно поставленные задачи в естественных науках: Тез. докл. Междунар. конф. -Москва, 1991.- С. 208.
25. Омуров Т.Д. Решение обратной задачи в смысле задачи минимизации //Респ. научн. конф. "Дифференц. уравнения и их приложения": Тез. докл. - Ош: ОшГУ, 1993. - С.84.
26. Омуров Т.Д. Решение одного класса интегро-дифференциальных уравнений //Респ. научн. конф. "Дифференц. уравнения и их приложения": Тез. докл. - Фрунзе, 1989. - С.76.

Тираж 100. Обьем 1,5 п.л. Формат 60 x 84/16

Отпечатано в ОсОО "Элпек", г.Бишкек, ул.Тоголока Молдо, 60

ОМУРОВ ТААЛАЙБЕК ДАРДАЙЫЛОВИЧ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА

В диссертационной работе исследованы системы интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода, а также уравнений Вольтерра, изменяющих свою форму на различных отрезках. Доказаны единственность особых решений исследуемых уравнений и разработаны методы для построения этих решений.

Введены понятия о слабых решениях регуляризирующих систем.

В работе также показано применение разработанных методов для решения систем со смешанной структурой.

ОМУРОВ ТААЛАЙБЕК ДАРДАЙЫЛОВИЧ

СЫЗЫКТУУ ЭМЕС БИРИНЧИ ЖАНА ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ВОЛЬТЕРРА ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ТЕОРИЯСЫНДАГЫ БОЛЖОЛДОП ЧЫГАРУУ ЫКМАЛАРЫ

Диссертацияда биринчи жана үчүнчү түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемелер системасы, ошондой эле ар кандай аралыктагы түрүн өзгөртүүчү, Вольтерра теңдемелеринин учурлары изилденген. Каралган теңдемелердин өзгөчө чыгарылыштарынын жалгыздыгы далилденген, ошону менен бирге эле ушул чыгарылыштарды болжолдоп табуу ыкмалары иштелип чыккан.

Регуляризациалоочу системалардын начар чыгарылыштары жөнүндөгү түшүнүк киргизилген.

Иштелип чыккан болжолдоп эсептөө ыкмаларынын кээ бир аргындаштырылган системаларды чыгаруудагы колдонулуштары көрсөтүлгөн.

TAALAYBEK D. OMUROV

THE APPROXIMATE METHODS IN THE THEORY OF VOLTERRA NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST AND THE THIRD TYPES

The systems of nonlinear integral equations of the Volterra nonlinear integral equations of the first and the third type changing their forms on the different segments are investigated in this thesis. The uniqueness of the special solution of researched equations is proved and the methods for the construction of this solution are developed.

The concept a weak solution of the regularizied systems is given.

Also the application of developed methods for the solution of system with mixed structure is shown.