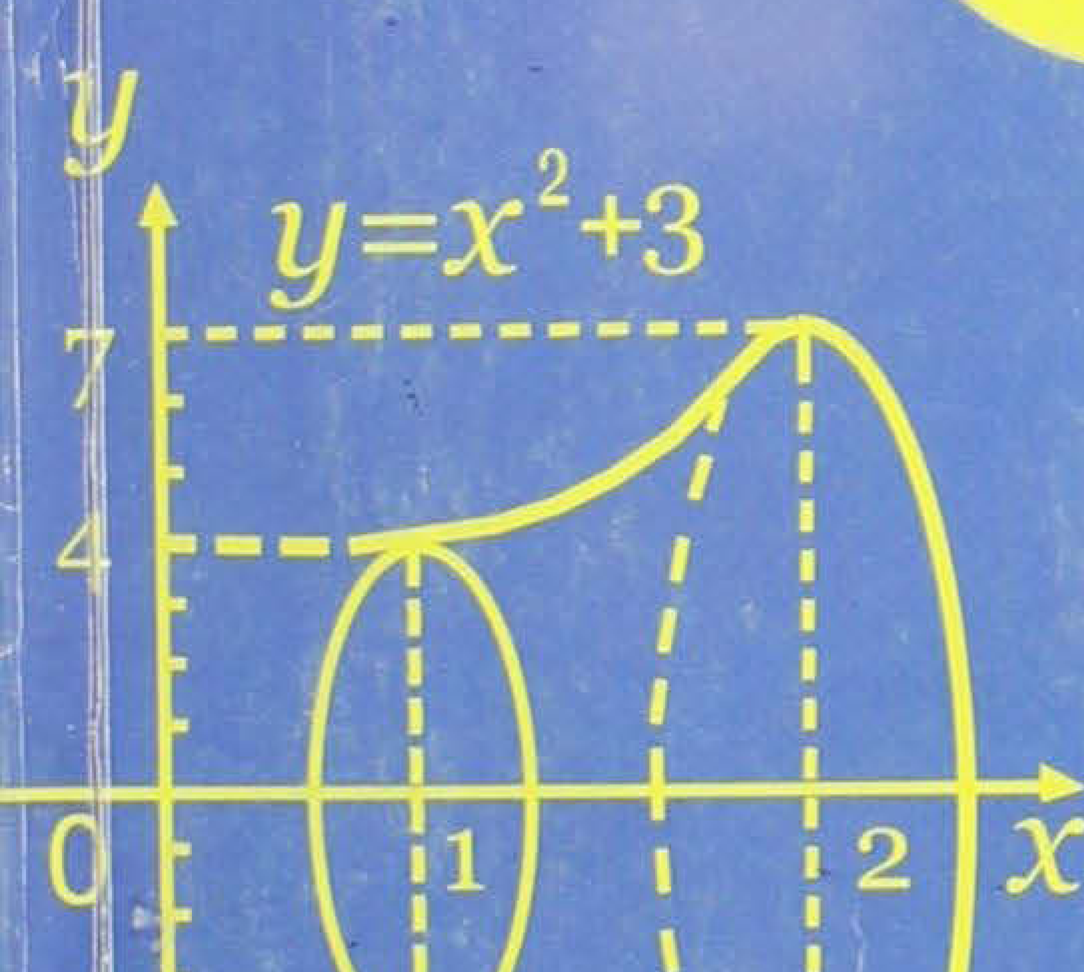
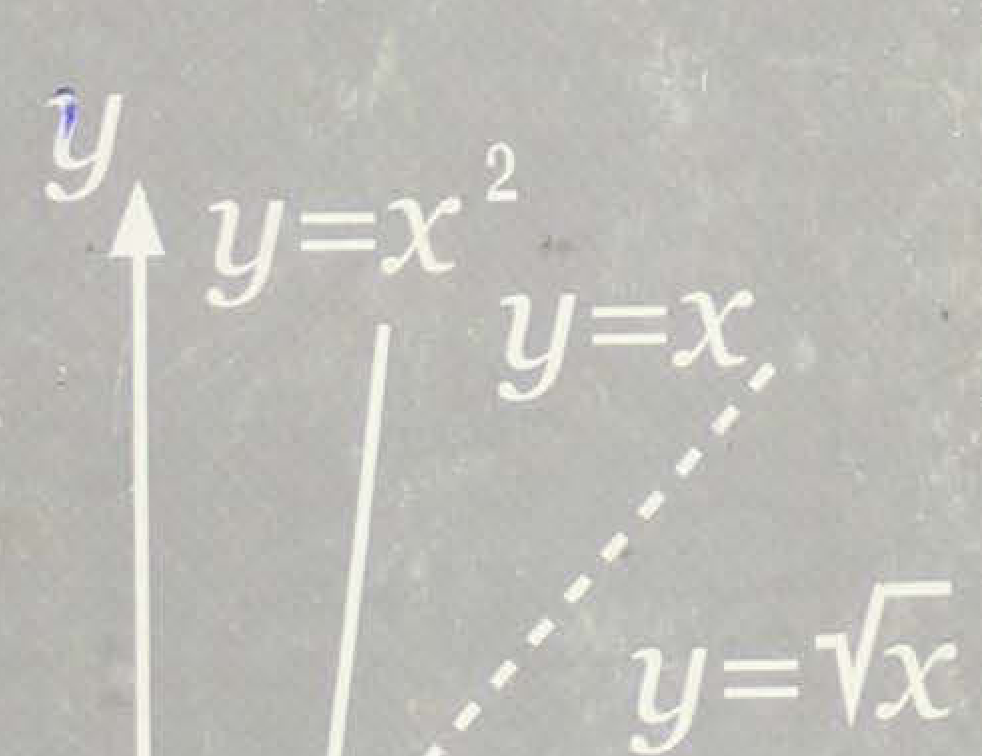
М. Иманалиев, А. Асанов,
К. Жусупов, С. Искандаров

АЛГЕБРА
ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

11





М. Иманалиев, А. Асанов,
К. Жусупов, С. Искандаров

АЛГЕБРА
ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

11

Жалпы билим берүүчү орто мектептин
11-классы үчүн окуу китеби

*Кыргыз Республикасынын Билим берүү
жана илим министрлиги бекиткен*

БИШКЕК – 2009

УДК 512
ББК 22.14
А 14

А 14 **Алгебра жана анализдин башталышы:** Жалпы билим берүүчү орто мектептин 11-кл. үчүн окуу китеби (М. Иманалиев, А. Асанов, К. Жусупов, С. Искандаров. – Б.: Мамл. тил ж-а энциклопедия борбору, 2009. – 288 б.

ISBN 978–9967–14–061–5

«Алгебра жана анализдин башталышы» окуу китеби жалпы билим берүүчү орто мектептердин 11-классы үчүн математика курсунун программасынын негизинде жана окуучулардын математикалык даярдыгына коюлуучу талаптар, окутуунун мазмуну, тематикалык пландаштыруу, предмет аралык байланыштарды эске алуу менен түзүлдү. Мурдагы чыккан окуу китептерден айырмасы – 10-класстын программасын бөлүп, 11-класс – бүтүрүүчү класс үчүн гана даярдалган алгачкы окуу курал. Ошондой эле темаларды бышыктоодо колдонулган көнүгүүлөр окуучулардын деңгээлдерине жараша, кенен жана туура тандалып алынган. Татаал көнүгүүлөр үчүн текстеги чыгарылган мисалдардан сырткары атайын көрсөтмөлөр (кантип чыгаруу керек) берилген. Китептеги ар бир тема теориялык материалдар менен катар айрым мисалдардын чыгарылышы да берилип, бөлүмдөр тест, оозеки көнүгүүлөр жана «тарыхый маалыматтар» менен толукталган.

$А \frac{4306020503}{М\ 454\ (11) - 09}$

УДК 512
ББК 22.14

ISBN 978–9967–14–061–5

Билим инсанга момундук берет. Момундук аркылуу инсан оң сапаттарга ээ болот. Ал сапаттар аркылуу байлык келет. Байлыкты туура жана кайрымдуулукка жумшоо ар бир инсанга бакыт алып келет.

(Байыркы Веда китебинен)

КИРИШ СӨЗ

Бул окуу китеби Кыргыз Республикасынын билим берүү академиясында иштелип чыккан жалпы билим берүүчү орто мектептердин 11-классынын окуу программасына ылайык жазылды.

Китепти жазууда мурдагы класстарда өтүлгөн айрым материалдарга кайталоо жүргүзүлүп, кээ бир материалдарга мурдагы класстарда азыраак көңүл бөлүнгөнү, ошондой эле 11-класс – бүтүрүүчү класс экени да эске алынды.

Китепте ар кандай деңгээлдеги материалдар бар. Демек, ар бир окуучу өзүнө керектүү материалды таба аларына ишенебиз жана куру дегенде материалдардын эң жеңилин билүү керектүү экенин белгилешибиз керек.

Бул окуу куралында көп мисалдар чыгарылышы менен берилип, чыгаруу ыкмалары (жолдору) пайдаланылды. Башка белгилүү китептерден бир айырмасы ушул десек ашыкча болбостур. Көнүгүүлөрдүн көбү ойлонууну талап кылат. Китептин бир максаты – ойлонууга, кырдаалга анализ жасоого, туура чечимге келүүгө жардам берүү. Теориялык материалдар жана көнүгүүлөр «жеңил, орто, татаал» принципте жазылды. Китепти кунт коюп окуган окуучу сунушталган ар бир көнүгүүнү аткара алат, анткени окшош эсеп, маселелердин чыгарылыштары текстте бар жана татаалыраактарына көрсөтмө берилди. Тарыхый маалыматтар «Алгебра-9»дун «Тарыхый маалыматтарынын» уландысы сыяктуу, толукталып жазылды жана бул маалыматтар дагы кошумчаланууга муктаж экенин эскерте кетели.

Кымбаттуу бүтүрүүчүлөр, эгерде элибиздин, үй-бүлөбүздүн жана өзүңөрдүн келечегиңерди ойлосоңор, анда адамдын акыл-эсин төмөндөтүп, денсоолугун начарлатып, келечегин жок кылып, билимдин таасирин жокко чыгара турган алкогольдон, тамекиден жана наркотиктен алыс болушуңарды суранабыз.

Турмушта жогорку ийгиликтерге жетүүдө терең билим, туура аракет жана чың ден соолук негизги ролду ойнойт. Терең билим, тынымсыз аракет жана чың ден соолуктун фундаменти – таза аба, таза суу, өз убагында туура тамактануу, чөйрөдөгүлөр менен жакшы мамиледе болуу жана эрте жатып, эрте туруу менен байланышкан. Окумуштуулардын акыркы изилдөөлөрү боюнча түнкү бир сааттык иш күндүзгү бир сааттык ишке караганда адамдын эки эсе көп энергиясын талап кылары билинген. Ошондой эле, кечки саат 21ден 23кө чейинки уктоодо инсандын акыл-эси эс алары, саат 23төн 1ге чейинки уйку мезгилинде инсандын энергиясынын калыбына келери, ал эми түнкү саат 1ден 3кө чейинки уктоодо инсандын сезиминин эс алышы аныкталган. Муну бардык элдердин макал-лакаптары, айрыкча «эрте жатып, эрте турган инсандын ден-соолугу чың, акыл-эси жогору болот жана ал бай жашайт» деген англис макалы эң жакшы билдирет.

Бүтүрүүчүлөргө дагы кайрылып, адамдын чыдамкай болгону да жакшы демекчибиз. Япондор бекеринен «чыдоо-бул бүт жашоону жете турган байлык» деп айтышпаса керек. Чыдаганда да аябай чыдоо керек. Мисалы, жакпаган китепти кыйналып, аягына чейин окуп чыгуу сыяктуу.

«Көз коркок, кол баатыр» деп элибизде айтылат эмеспи. Мындан «көбүрөөк жазып, оку» деген кеңеш берүүгө болот. Математиканы адабий китеп окугандай эле окуп, өздөштүрүүгө мүмкүн эместигин турмуш өзү далилдеп жүрөт. «Сууда сүзгөндү үйрөнгүң келсе, сууга кирип чумкугун. Ал эми математиканы билгиң келсе, көнүгүүлөр менен маселелерди чыгаргын» деп венгр математиги Д. Пойа айткан. Окуп-жазып, жазып, эсеп-маселе, көнүгүүлөрдү көп-көп, колдон келсе, бирин да калтырбай чыгара, чече берүү керек. Ошондо алдыдагы максатыңарга жетесиңер. 11-классты бүтүргөнүңөрдөн кийин өзүңөрчө болуп, силерге артылган ишенимди актай билсеңер, өзүңөр да бактылуу болосуңар, элибиз да утуштуу болот.

Ардактуу мугалимдер! Кымбаттуу окуучулар! Сиздерге чың ден-соолук, мыкты ийгиликтерди каалайбыз.

Сиздерден китеп тууралуу кат-кабар, сын-пикирлерди күтөбүз.

Китептин кириш сөзү жана I бөлүмү А. Асанов, II бөлүмү К. Жусупов, III бөлүмү С. Искандаров, IV бөлүм жалпы авторлор тарабынан жазылган.

Турмушунда прогрессти каалаган инсан ашыкча уктоо, жалкоолук, тартынчаактык, ачуулануу, энтузиазмдын жетишпегендиги жана жумушту кийинкиге калтыруу сыяктуу кемчиликтерден арылышы керек.

(Байыркы «Хитападеша» китебинен)

I бөлүм

БАШТАПКЫ ФУНКЦИЯ ЖАНА ИНТЕГРАЛ

§ 1. Баштапкы функция

Биз берилген функция боюнча, анын туундусун табуу маселесин б. а. дифференцирлөө операциясын билебиз. Эми тескерисинче функциянын туундусу берилсе, ал функциянын өзүн табуу маселеси менен б. а. интегралдоо операциясы менен таанышабыз.

А н ы к т а м а. Эгерде берилген $(a;\ b)$ интервалындагы ар кандай x чекити үчүн $f(x)$ функциясынын мааниси $F(x)$ функциясынын туундусунун маанисине барабар, б. а. $F'(x)=f(x)$ болсо, анда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын $(a;\ b)$ интервалындагы *баштапкы функциясы* деп аталат.

1-м и с а л. $F(x)=\dfrac{x^4}{2}$ функциясы $f(x)=2x^3$ функциясы үчүн $(-\infty;\ \infty)$ сан огундагы баштапкы функция болот. Себеби ар кандай $x\in(-\infty;\ \infty)$ үчүн

$$F'(x)=\left(\frac{x^4}{2}\right)'=\frac{1}{2}\,(x^4)'=\frac{1}{2}\cdot 4x^3=2x^3=f(x).$$

ц

Бирок $F_1(x)=\dfrac{x^4}{2}+9=F(x)+9$ функциясы да $f(x)=2x^3$ функ иясы үчүн $(-\infty;\ \infty)$ интервалында баштапкы функция болот. Анткени ар кандай $x\in(-\infty;\ \infty)$ үчүн $F_1'(x)=(F(x)+9)'=F'(x)=f(x)$. Ал эми ар кандай C – турактуу саны үчүн анын туундусу $(C)'=0$ болгондуктан, $F(x)+C=\dfrac{x^4}{2}+C$ функциясы да $f(x)=2x^3$ функциясы үчүн $(-\infty;\ \infty)$ интервалында баштапкы функция болот. Мындан, биз баштапкы функцияны табуу маселеси чексиз көп чыгарылышка ээ болорун көрдүк.

2-м и с а л. $f(x)=\sqrt{x}$ функциясы үчүн $F(x)=\dfrac{2}{3}\,(x)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\,x\sqrt{x}$

функциясы $(0;\ \infty)$ аралыгында гана баштапкы функция болот. Анткени, $f(x)=\sqrt{x}$ жана $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ функцияларынын аныкталуу облустары $D(f)=D(F)=[0;\ \infty)$ жана ар кандай $x\in[0;\ \infty)$ үчүн

$$F'(x)=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\sqrt{x}=f(x).$$

3-м и с а л. Ар кандай C – турактуу саны үчүн $F(x)=x^{-2}+C=\frac{1}{x^2}+C$ функциясы $f(x)=-\frac{2}{x^3}$ функциясынын $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$ облусунда баштапкы функциясы болот. Себеби

$$F'(x)=(x^{-2}+C)'=(x^{-2})'+(C)'=-2x^{-3}=f(x).$$

4-м и с а л. $F(x)=tgx$ функциясы $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ функциясынын $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аралыгындагы баштапкы функциясы болот. Себеби

$$F'(x)=(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=f(x),\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

5-м и с а л. $F(x)=\sin(\ln x)$ функциясы $f(x)=\frac{1}{x}\cos(\ln x)$ функциясынын $(0;\ \infty)$ аралыгындагы баштапкы функциясы болот. Себеби $F'(x)=(\sin(\ln x))'=\cos(\ln x))\ (\ln x)'=\frac{1}{x}\cos(\ln x)=f(x),\ x\in(0;\ \infty).$

Көнүгүүлөр

1. F функциясы берилген аралыктарда f функциясы үчүн баштапкы функция экендигин далилдегиле.

а) $F(x)=x^7$,	$f(x)=7x^6$,	$x\in(-\infty;\ \infty)$;
б) $F(x)=x^{-4}$,	$f(x)=-4x^{-5}$,	$x\in(0;\ \infty)$;
в) $F(x)=e^x$,	$f(x)=e^x$,	$x\in(-\infty;\ \infty)$;
г) $F(x)=\mathrm{ctg}x$,	$f(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$,	$x\in(0;\ \pi)$;
д) $F(x)=9^x$,	$f(x)=9^x\ln 9$,	$x\in(-\infty;\ \infty)$;
е) $F(x)=7\sin x+\ln x+9$,	$f(x)=7\cos x+\frac{1}{x}$,	$x\in(0;\ \infty)$.

2. Көрсөтүлгөн аралыкта f функциясы үчүн F функциясы баштапкы функция боло алабы?

а) $F(x)=5+\cos x$, $f(x)=\sin x$, $x\in(-\infty;\infty)$;

б) $F(x)=7-2x^9$, $f(x)=-18x^8$, $x\in(-\infty;\infty)$;

в) $F(x)=3^x+x$, $f(x)=3^x\ln 3+1$, $x\in(-\infty;\infty)$;

г) $F(x)=x^{-3}+5$, $f(x)=\dfrac{1}{3x^4}$, $x\in(0;\infty)$.

3. $R=(-\infty;\infty)$ аралыгында f функциясы үчүн баштапкы функциялардын бирин тапкыла.

а) $f(x)=4,5$; б) $f(x)=1-\cos x$; в) $f(x)=4x$;

г) $f(x)=\sin x+2$; д) $f(x)=e^x$; е) $f(x)=-x+x^6$;

ж) $f(x)=4^x$; з) $f(x)=-5-7^x$.

4. Көрсөтүлгөн аралыкта F функциясы f функциясы үчүн баштапкы функция экендигин далилдегиле.

а) $F(x)=\cos^2 x$, $f(x)=-\sin 2x$, $x\in R$;

б) $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+5^x$, $f(x)=\cos 2x+5^x\ln 5$, $x\in R$;

в) $F(x)=5+3\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$, $f(x)=-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{3}}$, $x\in(-\pi;\pi)$;

г) $F(x)=5\cos 7x-x^2$, $f(x)=-35\sin 7x-2x$, $x\in R$.

5. Көрсөтүлгөн аралыкта f функциясы үчүн F баштапкы функция боло алабы?

а) $F(x)=4x+2\sin\dfrac{x}{2}$, $f(x)=4+\cos\dfrac{x}{2}$, $x\in R$;

б) $F(x)=\sqrt{9-x^2}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$, $x\in(-3;3)$;

в) $F(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, $f(x)=-\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$, $x\in(1;\infty)$;

г) $F(x)=10x^2\sqrt{x}$, $f(x)=25x\sqrt{x}$, $x\in(0;\infty)$.

6. R де f функциясы үчүн анын эки баштапкы функциясын тапкыла.

а) $f(x)=x^2+x+3$; б) $f(x)=(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2$;

в) $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1}{\cos^2 x}$; г) $f(x)=2e^x+3^x+\frac{1}{x}$;

д) $f(x)=\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+7^x$; е) $f(x)=\frac{2}{x^2}+\sqrt{x}$.

7. Берилген үч функциянын ичинен бирөө анын туундусу жана экинчиси ал үчүн баштапкы функция болгон функцияны көрсөткүлө:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=\frac{-1}{x}+1$, $h(x)=-\frac{2}{x^3}$;

б) $f(x)=x^3-\cos x$, $g(x)=6x+\cos x$, $h(x)=3x^2+\sin x$;

в) $f(x)=7$, $g(x)=7x+9$, $h(x)=\frac{7x^2}{2}+9x$;

г) $f(x)=9-2\sin x$, $g(x)=9x+2\cos x$, $h(x)=-2\cos x$.

§ 2. Баштапкы функциялардын негизги касиеттери жана аныкталбаган интеграл

Баштапкы функциялардын негизги касиеттерин төмөнкү эки теорема аркылуу беребиз.

Теорема 1 (функциянын турактуулугунун белгиси). Эгерде кандайдыр бир $(a;\,b)$ аралыгында $F'(x)=0$ болсо, анда F функциясы $(a;\,b)$ аралыгында турактуу чондук болот.

Далилдөө. $(a;\,b)$ аралыгынан каалаган кандайдыр бир x_0 чекитин алалы. Анда бул аралыктын каалаган x саны үчүн Лагранждын формуласынын негизинде $F(x)-F(x_0)=F'(c)(x-x_0)$ барабардыгы аткарылгандай x жана x_0 чекиттеринин арасында жайланышкан c санын табууга болот. $c\in(a;\,b)$ болгондуктан шарт боюнча $F'(c)=0$. Демек $F(x)-F(x_0)=0$. Мындан $F(x)=F(x_0)$, $x\in(a;\,b)$, б.а. ар кандай $x\in(a;\,b)$ үчүн F функциясы турактуу мааниге ээ. Теорема 1 далилденди.

Теорема 2. Эгерде $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын $(a;\,b)$ аралыгындагы баштапкы функциясы болсо, анда $f(x)$ функциясынын $(a;\,b)$ аралыгындагы каалагандай $\Phi(x)$ баштапкы функциясы

$$\Phi(x) = F(x) + C \qquad (1)$$

формуласы менен аныкталат.

Д а л и л д ө ө. Баштапкы функциянын аныктамасы боюнча. Ар кандай $x \in (a;\, b)$ үчүн $F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = f(x)$ болот, б. а. $(\Phi(x) - F(x))' = 0$.

Теорема 1дин жана акыркы теңдештиктин негизинде $\Phi(x) - F(x) = C$ теңдештигин б. а. (1) теңдештикти алабыз. Теорема 2 далилденди.

А н ы к т а м а. Берилген $f(x)$ функциянын бардык баштапкы функцияларынын жыйындысы $f(x)$ функциянын *аныкталбаган интегралы* деп аталат жана ал аныкталбаган интеграл $\int f(x)dx$ менен белгиленет. Мында, $\int$ символу интеграл белгиси, $f(x)$ – интеграл астындагы функция жана x интегралдоонун өзгөрмөсү.

Эгерде берилген $f(x)$ функциянын кандайдыр бир $F(x)$ баштапкы функциясы белгилүү болсо, анда теорема 2 нин негизинде

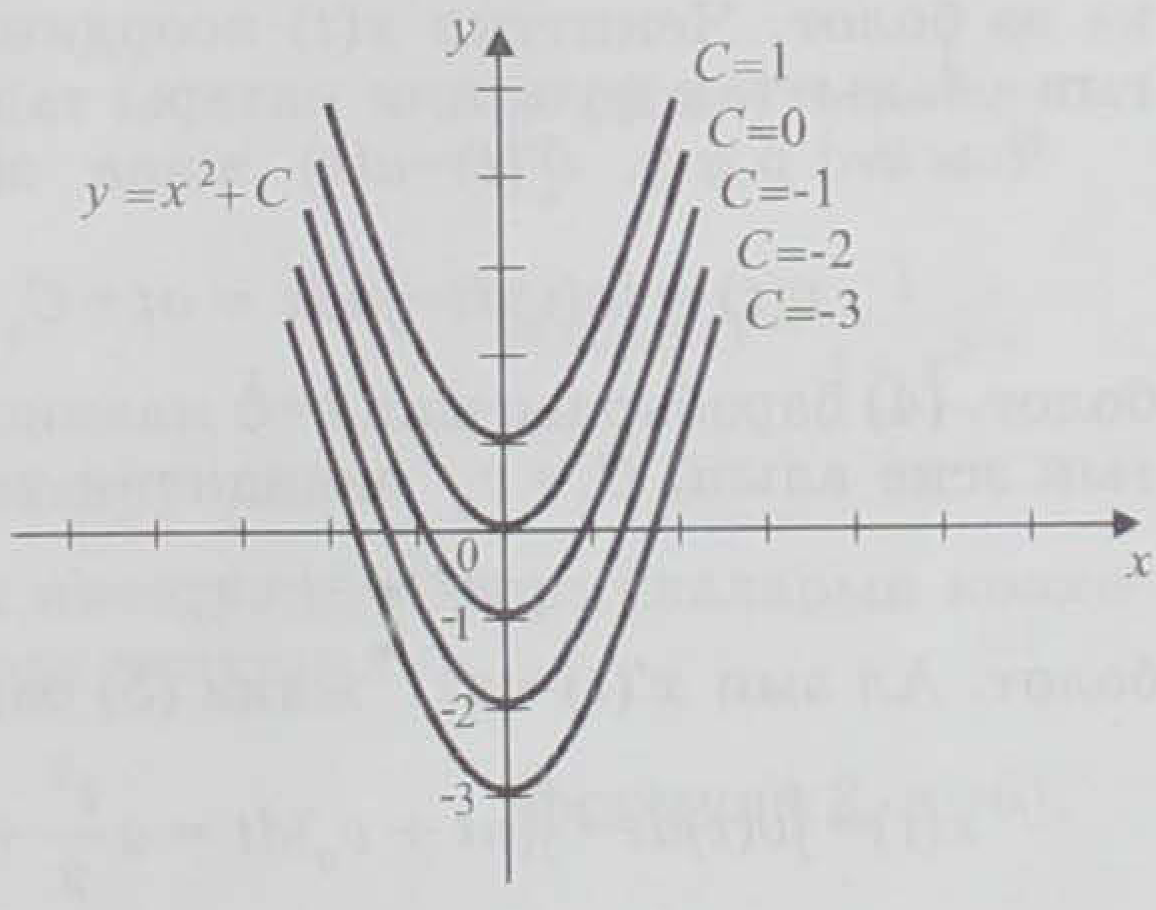
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

мында C – каалагандай турактуу сан. Бул (2) формула төмөнкүдөй окулат: "$f(x)$ функциянын аныкталбаган интегралы $F(x)+C$ болот". Эгерде $F(x) + C$ ны тапсак, анда биз $f(x)$ функциясынын интегралын таптык деп айтабыз.

1-м и с а л. $f(x)=2x$ функциясынын R деги баштапкы функцияларынын жалпы түрүн б. а. $\int f(x)\,dx = \int 2x dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\int 2x dx = x^2 + C$, мында C – каалагандай турактуу сан. Себеби, $F(x) = x^2$ функциясы $f(x) = 2x$ функциясынын баштапкы функция болот, б. а. $(x^2)' = 2x$.

Төмөнкү 1-чиймеде $f(x) = 2x$ функциянын $F(x) = x^2 + C$ баштапкы функцияларынын графиги көрсөтүлгөн.



1-чийме.

2-м и с а л. $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ функциясынын $(0;\, \infty)$ аралыгындагы баштапкы функцияларынын жалпы түрүн б. а. $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + C$, C – каалагандай турактуу сан. Себеби, $F(x) = \sqrt{x}$ функциясы $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ функциясынын баштапкы функцияларынын бири болот, б. а. $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3-м и с а л. $R = (-\infty; \infty)$ аралыгында аныкталган $f(x) = 3\cos x$ функциясынын баштапкы функцияларынын арасынан $x = \frac{\pi}{2}$ болгондо мааниси 5 болгон $F_0(x)$ баштапкы функциясын тапкыла.

Ч ы г а р у у Берилген $f(x) = 3\cos x$ функциянын баштапкы функцияларынын жалпы түрү $F(x) = \int f(x)dx = \int 3\cos x dx$ интегралы менен аныкталат, б. а.

$$F(x) = 3\sin x + C, \tag{3}$$

C – каалагандай турактуу сан. Шарт боюнча $F(\frac{\pi}{2}) = 5$ болгондуктан, (3) формуладан C га карата, $3\sin\frac{\pi}{2} + C = 5$ түрүндөгү теңдемени алабыз. Мындан $C = 2$. Демек $F_0(x) = 3\sin x + 2$ функциясы биз издеген баштапкы функция болот.

4-м и с а л. Чекит түз сызык боюнча a турактуу ылдамдануу менен кыймылдайт. Чекит убакыттын баштапкы $t_0 = 0$ моментинде x_0 баштапкы координатага жана v_0 баштапкы ылдамдыкка ээ болот. Чекиттин $x(t)$ координатасын жана $v(t)$ ылдамдыгын убакыттан функция катары тапкыла.

Ч ы г а р у у. $v'(t) = a(t)$ жана $a(t) = a$ барабардыктарынан

$$v(t) = \int a(t)dt = \int adt = at + C_1 \tag{4}$$

болот. (4) барабардыгына $t = 0$ маанисин коюп жана $v(0) = v_0$ шартын эске алып, $C_1 = v_0$ экендигин табабыз. Анда

$$v(t) = at + v_0 \tag{5}$$

болот. Ал эми $x'(t) = v(t)$ жана (5) барабардыктарынан

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (at + v_0)dt = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2 \tag{6}$$

экендиги келип чыгат. (6) барабардыгына $t = 0$ маанисин коюп жана $x(0) = x_0$ шартын эске алып, $C_2 = x_0$ ду алабыз. Ошентип, $x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$ болот.

Демек, аныкталбаган интеграл дифференцирлөө операциясына тескери болгон операцияны мүнөздөйт.

Төмөндө кээ бир функциялардын баштапкы функцияларынын таблицасы б. а. интегралдоо формулалары көрсөтүлгөн.

Аныкталбаган интеграл	Себеби
1. $\int 0dx = C$	$C'=0$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + C$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x)' = e^x$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$
6. $\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C, \quad k \neq 0$	$\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)' = \sin kx$
7. $\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C,$	$\left(\frac{\sin kx}{k}\right)' = \cos kx$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$(-\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

мында C – каалагандай турактуу сан.

5-м и с а л. Жогорудагы интегралдоо формулаларын колдонуп, чыгарылган көнүгүүлөрдү келтирели:

а) $\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$ (формула 2, $n=6$),

б) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C,$ (формула 2, $n=-\frac{1}{3}$),

в) $\int \sin 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C,$ (формула 6, $k=3$), г) $\int\cos\frac{x}{4}dx=\int\cos\frac{1}{4}xdx=\frac{\sin\left(\frac{1}{4}\right)x}{\left(\frac{1}{4}\right)}+C=4\sin\frac{x}{4}+C$ (формула 7, $k=\frac{1}{4}$),

д) $\int 9^x dx=\frac{9^x}{\ln 9}+C,$ (формула 5, $a=9$).

Көнүгүүлөр

Берилген f функциясы үчүн анын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн б. а. аныкталбаган интегралын тапкыла (8–10).

8. а) $f(x)=7x-2;$ б) $f(x)=-2;$

в) $f(x)=4x^3;$ г) $f(x)=1+\frac{2}{\cos^2 x}.$

9. а) $f(x)=\frac{1}{x^4};$ б) $f(x)=\frac{1}{x}-\sin x;$

в) $f(x)=7^x+x^9;$ г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sin^2 x}.$

10. а) $f(x)=x^2-4\sqrt{x};$ б) $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

в) $f(x)=x^{-\frac{5}{2}}+\frac{2}{1+x^2};$ г) $f(x)=x-\frac{1}{\sin^2 x}.$

Төмөнкү аныкталбаган интегралдарды тапкыла (11–13).

11. а) $\int(3-x^5)dx;$ б) $\int(x^3+\cos x)dx;$

в) $\int 7dx;$ г) $\int\sqrt{x}dx.$

12. а) $\int\frac{1}{x^2}dx;$ б) $\int t^{-\frac{1}{3}}dt;$

в) $\int\sin\frac{s}{7}ds;$ г) $\int\cos 9y dy.$

13. а) $\int\frac{3}{\sqrt{1-u^2}}du;$ б) $\int\left(\frac{3}{1+v^2}-v\right)dv;$

в) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\sqrt{r}\right)dr;$ г) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}+\sin\theta\right)d\theta.$

14. Көрсөтүлгөн чекитте берилген мааниге ээ болгон f тин баштапкы функциясы F ти тапкыла:

а) $f(x)=x^2,\quad F(-2)=3;$ б) $f(x)=\frac{1}{x^2},\quad F\left(\frac{1}{3}\right)=1;$

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\quad F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0;$ $\qquad$ *г)* $f(x)=\cos x$, $\quad F(\pi)=4.$

15. Графиги берилген M чекити аркылуу өткөн жана f тин баштапкы функциясы болгон функцияны тапкыла:

а) $f(x)=3\sin x$, $\qquad M\left(\dfrac{\pi}{2};\ 1\right);$

б) $f(x)=4-x^3$, $\qquad M(2;\ 7);$

в) $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\qquad M\left(\dfrac{\pi}{4};\ -3\right);$

г) $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$, $\qquad M\left(\dfrac{1}{2};\ 4\right).$

16. Чекит $a(t)$ ылдамдануу менен түз сызык боюнча кыймылга келет. Чекит убакыттын баштапкы t_0 моментинде x_0 баштапкы координатага жана v_0 баштапкы ылдамдыкка ээ болот. Убакыттын ар кандай t маанисинде чекиттин $x(t)$ координатасын жана $v(t)$ ылдамдыгын тапкыла.

а) $a(t)=\cos t$, $\qquad t_0=\dfrac{\pi}{2},\ x_0=3,\ v_0=1;$

б) $a(t)=-3t$, $\qquad t_0=1,\ x_0=2,\ v_0=4;$

в) $a(t)=7t$, $\qquad t_0=0,\ x_0=4,\ v_0=1;$

г) $a(t)=\sin t$, $\qquad t_0=\pi,\ x_0=1,\ v_0=2.$

§ 3. Аныкталбаган интегралды табуунун эрежелери

Бул эрежелер туунду табуунун тиешелүү эрежелерине окшош. Эрежелер:

1. Эгерде $f(x)$ функциясы $(a;\ b)$ аралыгында баштапкы функцияга ээ болсо, анда ар кандай $k\in R$ үчүн $kf(x)$ функциясы дагы $(a;\ b)$ да баштапкы функцияга ээ болот жана

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

барабардыгы орун алат.

Д а л и л д ө ө. Турактуу көбөйтүүчүнү туунду белгисинин сыртына чыгарууга мүмкүн болгондуктан $(k\int f(x)dx)' = k(\int f(x)dx)' = k\,f(x)$ болот.

2. Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $(a;\ b)$ аралыгында баштапкы функцияларга ээ болсо, анда $f(x)+g(x)$ жана $f(x)-g(x)$ функциялары дагы $(a;\ b)$ аралыгында баштапкы функцияларга ээ болот жана

$$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

барабардыктары орун алат.

Д а л и л д ө ө. Сумманын же айырманын туундусун эсептөө эрежеси боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$(\int f(x) \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x).$$

3. Эгерде $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын R аралыгында баштапкы функциясы болсо, б. а. $\int f(x)dx = F(x) + C$ болсо, анда ар кандай $k \in R$, $b \in R$, $k \neq 0$ үчүн $\frac{1}{k}F(kx+b)$ функциясы $f(kx+b)$ функциясынын R аралыгындагы баштапкы функциясы болот, б. а.

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$$

барабардыгы орун алат. Мында C – каалагандай турактуу сан.

Д а л и л д ө ө. Чындыгында эле татаал функциянын туундусун эсептөө эрежеси боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$(\frac{1}{k}F(kx+b))' = \frac{1}{k}F'(kx+b)(kx+b)' = f(kx+b).$$

Бул эрежелерди колдонууга мисалдар келтирели.

1-м и с а л. Төмөнкү $\int 4x^5dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. 1-эрежени колдонуп, $\int 4x^5dx = 4\int x^5dx = 4\cdot\frac{x^{5+1}}{5+1} + C = = \frac{2}{3}x^6 + C$ жообун алабыз.

2-м и с а л. Төмөнкү $\int\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. Биринчи 2-эрежени колдонуп, андан кийин $\frac{x^3}{3}$ функциясы x^2 тын жана $\frac{x^{-2}}{(-2)}$ функциясы $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ функциясынын баштапкы функциялары экендигин эске алып, $\int\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)dx = \int x^2\,dx + \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{-2}}{2} + C$ жообун алабыз.

3-м и с а л. Төмөнкү $\int\cos(7x-3)\,dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. Биз $\int\cos x\,dx = \sin x + C$ экендигин эске алсак, анда берилген интегралды табуу үчүн 3-эрежени $k=7$, $b=-3$, $F(x)=\sin x$ болгондо колдонобуз.

Анда $\int \cos(7x-3)\,dx = \frac{1}{7}F(7x-3)+C = \frac{1}{7}\sin(7x-3)+C$ жообун алабыз.

4-м и с а л. Массасы 3 *кг* болгон материалдык чекит Ox огу боюнча багытталган күчтүн аракети менен кыймылга келет. Убакыттын t моментинде бул күч $F(t)=2t-1$ ге барабар. Эгерде $t=1$*сек* кезинде чекиттин ылдамдыгы 4 *м/сек* га барабар, ал эми координатасы $x=2$ экени белгилүү болсо, чекиттин $x(t)$ координатасын жана $v(t)$ ылдамдыгын тапкыла. Мында F – күч *Ньютон* менен, t – убакыт *секунда* менен, x – жол *метр* менен туюнтулган.

Ч ы г а р у у. Ньютондун экинчи закону боюнча $F=ma$ болот. Мында a – ылдамдануу. Бул формуладан $a(t)=\frac{F}{m}=\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}$. Ал эми $a(t)$ ылдамдануунун баштапкы функциясы болуп чекиттин $v(t)$ ылдамдыгы эсептелет.

Ошондуктан $v(t)=\int a(t)\,dt=\int\left(\frac{2t}{3}-\frac{1}{3}\right)dt=\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{3}t+C_1$ болот. Берилген $v(1)=4$ шартынан турактуу C_1 ди табабыз: $\frac{1}{3}\cdot 1^2-\frac{1}{3}\cdot 1+ +C_1=4$, б. а. $C_1=4$.

Демек $v(t)=\frac{1}{3}(t^2-t)+4$ болот. Бул $v(t)$ ылдамдыгы үчүн баштапкы функциясы болуп $x(t)$ координатасы эсептелет, б. а.

$x(t)=\int v(t)\,dt=\int\left[\frac{1}{3}(t^2-t)+4\right]dt=\frac{1}{9}t^3-\frac{1}{6}t^2+4t+C_2$ болот. Берилген $x(1)=2$ шартынан турактуу C_2 ни табабыз: $\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+4+C_2=2$, $C_2=-\frac{35}{18}$.

Демек, чекиттин кыймылдоо закону $x(t)=\frac{1}{9}t^3-\frac{1}{6}t^2+4t-\frac{35}{18}$ формуласы менен аныкталат.

5-м и с а л. Төмөнкү $\int(9x+7)^{20}dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. Бул учурда $\int x^{20}dx=\frac{x^{21}}{21}+C$ болгондуктан, берилген интегралды табуу үчүн 3-эрежени $k=9$, $b=7$, $F(x)=\frac{x^{21}}{21}$ болгондо колдонобуз. Анда $\int(9x+7)^{20}\,dx=\frac{1}{9}F(9x+7)+C=\frac{1}{189}(9x+ +7)^{21}+C$ болот.

6-м и с а л. Төмөнкү $\int\frac{dt}{\sqrt{5t+4}}$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{t} + C$ экендигин

эске алсак, анда берилген интегралды табуу үчүн 3-эрежени $k=5$, $b=4$, $F(t)=2\sqrt{t}$ болгондо колдонобуз. Анда

$$\int \frac{1}{\sqrt{5t+4}}dt = \frac{1}{5}F(5t+4) + C = \frac{2}{5}\sqrt{5t+4} + C$$ болот.

7-м и с а л. Төмөнкү $\int \frac{dy}{1+(7y+9)^2}$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. Бул учурда $\int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y + C$ болгондуктан, берилген интегралды табуу үчүн 3-эрежени $k=7$, $b=9$, $F(y)=\operatorname{arctg} y$ болгондо колдонобуз. Анда $\int \frac{dy}{1+(7y+9)^2} = \frac{1}{7}F(7y+9) + C = \frac{1}{7}\operatorname{arctg}(7y+9) + C$ болот.

8-м и с а л. Төмөнкү $\int \sin^2 x dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ формуласын эске алсак, анда

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + C$$ болот.

9-м и с а л. Төмөнкү $\int \cos^2 x dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ формуласын эске алсак, анда

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$ болот.

Көнүгүүлөр

17. Берилген функциялардын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x)=3-x^2+\dfrac{2}{x^2}$; б) $f(x)=2x+\dfrac{3}{x^4}+7\sin x$;

в) $v(t)=(5t-4)^{16}$; г) $f(s)=\dfrac{3}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}-s\right)}$;

д) $g(y)=\dfrac{3}{y^6}-\dfrac{4}{\cos^2(4y-3)}$; е) $f(x)=\dfrac{7}{\sqrt{1-(10x-3)^2}}$.

18. Төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int(3x^3-4x+\dfrac{9}{x})dx$; б) $\int\dfrac{9x^7+4}{x^3}dx$;

в) $\int(4x^2-x+5)dx$; г) $\int\left(\dfrac{3}{\cos^2 x}+\dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

д) $\int 3x\sqrt{x}dx$; е) $\int\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}}dx$.

19. Төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int\sin(4x+5)dx$; б) $\int(2x-4)^{12}dx$;

в) $\int\cos(3t-1)dt$; г) $\int\left(\dfrac{4}{\cos^2(2x+1)}\right)dx$;

д) $\int\dfrac{dx}{(6x-9)^4}$; е) $\int\dfrac{5dx}{1+(9x-2)}dx$.

20. Төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int[5-\sin 4x+6\cos(\frac{\pi}{4}-x)]dx$;

б) $\int(\dfrac{2}{\cos^2 3x}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}-4x^3)dx$;

в) $\int[\dfrac{4}{\sin^2(5x-1)}+7\cos(6-x)+9x]dx$.

21. Эгерде f функциясынын баштапкы функциясы болгон F тин графиги M чекити аркылуу өтсө, анда F функциясын тапкыла.

а) $f(x)=7x+9,$ $M(0;\ 1);$

б) $f(x)=4x^2+x,$ $M(1;\ 3);$

в) $f(x)=x+4,$ $M(2;\ 4).$

22. Түз сызык боюнча кыймылда болгон чекиттин ылдамдыгы $v(t)$ га барабар. Эгерде $t=t_0$ болгондо чекиттин координатасы x_0 гө барабар болсо, анда $x(t)$ нын t убакыттан болгон көз карандылыгынын формуласын тапкыла.

а) $v(t)=t^2+3t-2,$ $t_0=0,$ $x_0=7;$

б) $v(t)=4\cos\frac{t}{2},$ $t_0=\frac{\pi}{3},$ $x_0=9;$

в) $v(t)=3\sin t,$ $t=\frac{\pi}{2},$ $x_0=4.$

23. Түз сызыктуу кыймылдагы чекиттин ылдамдануусу $a(t)$ га барабар. Эгерде $t=t_0$ болгондо чекиттин координатасы x_0гө, ал эми ылдамдыгы v_0гө барабар болсо, анда чекиттин кыймылынын законун тапкыла:

а) $a(t)=6t^2+2,$ $t_0=1,$ $x_0=4,$ $v_0=5;$

б) $a(t)=8t+9,$ $t_0=0,$ $x_0=6,$ $v_0=3.$

24. f тин F_1 баштапкы функциясынын графиги M чекити аркылуу, ал эми F_2 баштапкы функциясынын графиги N чекити аркылуу өтөт. Бул F_1 жана F_2 функцияларынын кайсынысынын графиги жогору жайгашкан? F_1-F_2 ни тапкыла.

а) $f(x)=6x^2-4x+3,$ $M(1;\ -1),$ $N(1;\ 3);$

б) $f(x)=-3x^2+2x-4,$ $M(1;\ 2),$ $N(0;\ 4);$

в) $f(x)=2x-x^3;$ $M(2;\ -1),$ $N(-2;\ 2);$

г) $f(x)=(3x+2)^2,$ $M(0;\ 1),$ $N(-1;\ 1).$

25. Массасы m болгон материалдык чекит Ox огун бойлото багытталган күчтүн аракети астында ушул ок боюнча кыймылга келет. Бул күч убакыттын t моментинде $F(t)$ га барабар. Эгерде $t=t_0$ болгондо чекиттин ылдамдыгы v_0 гө, ал эми координатасы x_0 гө барабар болсо, $x(t)$ нын t убакыттан болгон көз карандылыгынын формуласын тапкыла ($F(t)$ – *ньютон*. t – *секунда*, v – *метр/сек*, m – *килограмм* менен ченелет):

а) $F(t)=4t+2,\quad t_0=1,\quad v_0=3,\quad x_0=-4,\quad m=2;$

б) $F(t)=21\sin t,\quad t_0=\pi,\quad v_0=2,\quad x_0=3,\quad m=7;$

в) $F(t)=20\cos t,\quad t_0=\frac{\pi}{2},\quad v_0=4,\quad x_0=6,\quad m=5;$

г) $F(t)=12t+12,\quad t_0=2,\quad v_0=9;\quad x_0=7,\quad m=6.$

26. Төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int t^{-\frac{1}{3}}dt$; б) $\int (2-5y^{-2})^{12}dy$;

в) $\int \left(\frac{z^3}{4}+\frac{z^2}{2}\right)dz$; г) $\int \sqrt{36s^3}\,ds$;

д) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{u}}+\sqrt{u}\right)du$; е) $\int \frac{s^3-1}{s-1}ds$.

27. а) $\int (\theta+3\cos\theta)d\theta$; б) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\sin t\right)dt$;

в) $\int \cos\frac{t}{4}dt$; г) $\int \left(\frac{3}{\sin^2 x}-\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$;

д) $\int 5\sin^2\theta\, d\theta$; е) $\int 6\cos^2 t\,dt$.

28. а) $\int \sin y\cos y\,dy$; б) $\int (2-\cos^2 u)du$;

в) $\int (1+\mathrm{tg}^2 x)dx$; г) $\int \frac{1+\mathrm{ctg}^2 t}{2}dt$.

Төмөнкү интегралдык формулалардын туура экендигин туунду алуунун жардамы менен көрсөткүлө (29–30).

29. а) $\int (7x-2)^3dx=\frac{(7x-2)^4}{28}+C,$

б) $\int \frac{dx}{\cos^2 6x}=\frac{\mathrm{tg}6x}{6}+C,$

в) $\int \frac{dx}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{x+1}+C;$

г) $\int \cos(9x+4)dx=\frac{1}{9}\sin(9x+4)+C.$

30. *а)* $\int \frac{9}{(x+9)^2}dx = \frac{-9}{x+9} + C$, б) $\int \frac{1}{\sin^2 7x}dx = \frac{-\text{ctg}7x}{7} + C.$

Төмөнкү формулалардын туура же ката экендигин көрсөткүлө (31–32).

31. *а)* $\int (3x+2)^2 dx = \frac{(3x+2)^3}{3} + C,$

б) $\int 3(3x+2)^2 dx = (3x+2)^3 + C,$

в) $\int 9(3x+2)^2 dx = (3x+2)^3 + C.$

32. *а)* $\int x\sin x dx = \frac{x^2}{2}\sin x + C,$

б) $\int x\sin x dx = -x\cos x + C,$

в) $\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x + C.$

33. Эгерде $f(x) = \frac{d}{dx}(1-\sqrt{x})$, $g(x) = \frac{d}{dx}(x+2)$ болсо, анда төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int f(x)\,dx;$ *б)* $\int g(x)\,dx;$

в) $\int (-f(x))\,dx;$ *г)* $\int (-g(x))\,dx;$

д) $\int [f(x)+g(x)]\,dx;$ *е)* $\int [f(x)-g(x)]\,dx.$

34. Эгерде $f(x) = \frac{d}{dx}e^x$, $g(x) = \frac{d}{dx}(x\sin x)$ болсо, анда төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int [-f(x)]\,dx;$ *б)* $\int [-g(x)]\,dx;$

в) $\int [f(x)+g(x)]\,dx;$ *г)* $\int [f(x)-g(x)]\,dx;$

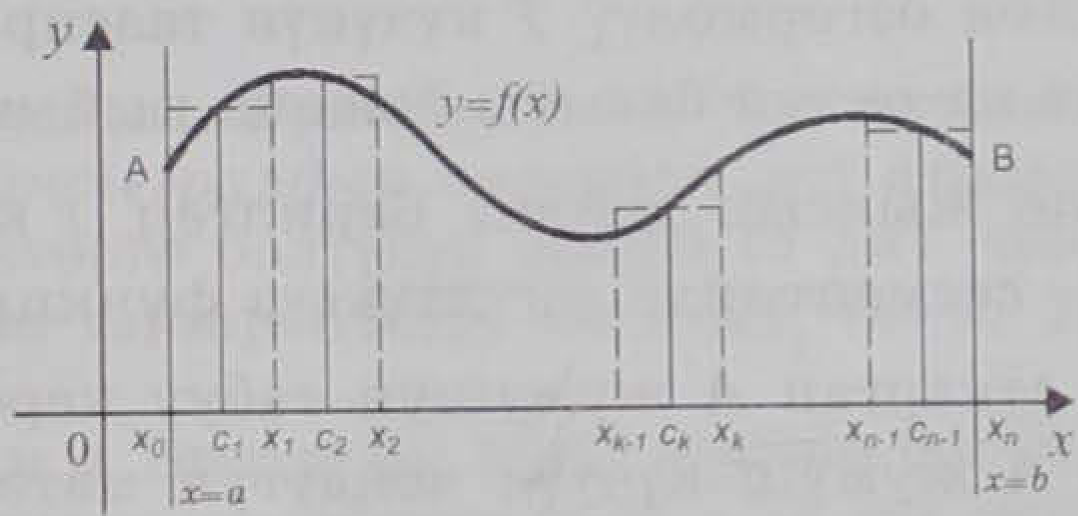
д) $\int [x+f(x)]\,dx;$ *е)* $\int [g(x)-4]\,dx.$

§ 4. АНЫКТАЛГАН ИНТЕГРАЛ

4.1. Аныкталган интеграл түшүнүгүнө келүүчү маселелер

Илимдин түрдүү тармактарындагы көптөгөн маселелер аныкталган интеграл түшүнүгүнүн жардамы менен чечилет. Төмөндө, аныкталган интеграл түшүнүгүнө келүүчү геометрия жана механиканын эки маселесине токтололу.

1. Ийри сызыктуу трапеция жана анын аянты. $y=f(x)$ функциясы $[a; b]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция жана ар кандай $x\in [a; b]$ үчүн $f(x) \geq 0$ болсун. Анда $x=a$, $x=b$, $y=0$ түз сызыктары жана $y=f(x)$ функциянын графиги менен чектелген фигураны *ийри сызыктуу трапеция* деп айтабыз (2-чийме, $aABb$ фигурасы). Эгерде $f(a)=0$ болсо, A чекити $(a; 0)$ менен дал келет, ал эми $f(b)=0$ болсо, B чекити $(b; 0)$ менен дал келет. Мында $A(a; f(a))$; $B(b; f(b))$.



2-чийме.

2-чиймедеги $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянтын табыш керек болсун.

Ал аянтты табуу үчүн $[a; b]$ сегментин x_k $(k=0,1,...,n)$ чекиттери менен n бөлүккө бөлөбүз, мында $a=x_0 < x_1 < x_2 <...< x_{k-1} < x_k <...< x_{n-1} < x_n = b$ жана ушул x_i $(i=1, 2,...,n-1)$ бөлүү чекиттеринен Ox огуна перпендикулярларды жүргүзүп, аларды AB ийри сызыгы менен кесилишкенче созобуз. Анда берилген ийри сызыктуу трапеция n бөлүккө бөлүнөт. Анын k – бөлүгүн T_k $(k=1, ...,n)$ менен белгилесек, анда ал $x= x_{k-1}$, $x= x_k$, $y=0$ түз сызыктары жана AB ийри сызыгы менен чектелген ийри сызыктуу трапеция болот. Ар бир $[x_{k-1}; x_k]$ сегменттин $(k=1,...,n)$ каалаган c_k элементи үчүн $(c_k, f(c_k))$ чекитинен Ox огуна жарыш түз сызык жүргүзсөк, анда $x= x_{k-1}$, $x= x_k$, $y=0$ жана $y=f(c_k)$ түз сызыктары менен чектелген B_k тик бурчтугун алабыз. Ал B_k тик бурчтугунун аянты $f(c_k)\Delta x_k$ санына барабар, мында $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Эми берилген $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянтын S менен белгилеп жана B_k тик бурчтугунун аянты T_k ийри сызыктуу трапециянын аянтынын жакындаштырылган маанисин берерин эске алсак, анда

$$S \approx f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \qquad (1)$$

болот. Мында $\sum$ – белгиси суммалоо дегенди билдирет жана сумма деп окулат. Мисалы

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1,\ \sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2,\ \sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3,\ \sum_{k=3}^{5} a_k = a_3 + a_4 + a_5$$

болот. Эгерде $[a;\,b]$ сегментин бөлүктөргө бөлүүнүн санын (n ди) чексиз чоңойтсок б. а. $[x_{k-1};\,x_k]$ сегментинин узундугун чексиз кичирейтсек ($\Delta x_k \to 0$), анда (1) сумма биз издеген аянттын так маанисин берет:

$$S = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

2. Өзгөрмөлүү күчтүн жумушу. Сан огунда Ox огунун багыты менен дал келген өзгөрмөлүү $\bar{F}$ күчүнүн таасири астында материалдык чекит ал октун багыты боюнча кыймылдап a чекитинен b чекитине жылсын дейли. Берилген $\vec{F}$ күчүнүн $|\vec{F}| = F(x)$ чоңдугу $[a;\,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болсун. Максат, $\bar{F}$ күчүнүн аткарган A жумушун табуу керек. Турактуу $\bar{F}$ күчү аткарган A жумуш күчтүн чоңдугун материалдык чекиттин басып өткөн жолунун узундугу $(b-a)$ га көбөйткөнгө барабар экендиги физикадан белгилүү, б. а. $A = |\vec{F}|(b-a)$ болот.

Өзгөрмөлүү $\vec{F}$ күчү аткарган A жумушун табуу үчүн $[a;\,b]$ сегментин x_k $(k=1,\ldots,n)$ чекиттери менен n бөлүккө бөлөбүз, мында $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Бөлүүнүн санын көбөйтүү (n ди чоңойтуу) аркылуу $[x_{k-1};\,x_k]$ $(k=1,\ldots,n)$ сегментинин узундугун каалагандай кичирейте алабыз. Ушул себептүү жана $\bar{F}$ күчүнүн чоңдугунун $[a;\,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз экендигин эске алсак, анда ал күчтүн чоңдугунун жакындаштырылган мааниси $[x_{k-1};\,x_k]$ сегментинде турактуу чоңдук болот. Анда ар кандай $c_k \in [x_{k-1};\,x_k]$ үчүн $\bar{F}$ күчүнүн ар бир $[x_{k-1};\,x_k]$ $(k=1,\ldots,n)$ сегментинде аткарган жумушунун жакындаштырылган мааниси $F(c_k)\,\Delta x_k$, $(\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$ болот. Ал эми $\bar{F}$ күчүнүн $[a;\,b]$ сегментинде аткарган A жумушунун жакындаштырылган мааниси

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\,\Delta x_k,\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \qquad (3)$$

формуласы менен табылат. Эгерде $[a;\,b]$ сегментин бөлүктөргө бөлүүнүн санын (n ди) чексиз чоңойтсок б. а. $[x_{k-1};\,x_k]$ аралыгы-нын узундугун чексиз кичирейтсек ($\Delta x_k \to 0$), анда (3) сумма биз издеген жумуштун так маанисин берет:

$$A = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\,\Delta x_k. \qquad (4)$$

4.2. Аныкталган интегралдын аныктамасы жана анын касиеттери

Бизге $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болгон каалаган $y=f(x)$ функциясы берилсин. Аныкталган интеграл түшүнүгүн аныкташ үчүн $[a; b]$ кесиндисин x_k ($k=1, 2, ..., n$) чекиттери менен n бөлүккө бөлөбүз, мында $a=x_0 < x_1 < x_2 <...< x_{k-1} < x_k <...< x_{n-1} < x_n = b$. Эми $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k=1, 2, ..., n$) жана $\delta = max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$ белгилөөлөрүн киргизип, каалаган $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$ үчүн

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \qquad (5)$$

суммасын аныктайлы. Бул (5) сумма $f(x)$ функциясынын $[a; b]$ сегментиндеги *интегралдык суммасы* деп аталат. Эгерде $[a; b]$ сегментин бөлүктөргө бөлүүнүн санын (n ди) чексиз чоңойтсок б. а. δ ны чексиз кичирейтсек, анда Δx_k ($k=1, 2, ..., n$) чексиз кичирейет.

А н ы к т а м а. Эгерде $[a; b]$ сегментин бөлүктөргө бөлүүнүн санын (n ди) чексиз чоңойткондо б. а. δ ны чексиз кичирейткенде (5) интегралдык суммасы чектүү I пределине ээ болсо жана ал предел x_k менен c_k ($k=1, 2, ..., n$) чекиттерин тандоодон көз каранды болбосо, анда I саны $f(x)$ функциясынын $[a; b]$ сегментиндеги *аныкталган интегралы* деп аталат жана ал интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ менен белгиленет. Демек,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = I \in R. \qquad (6)$$

Бул учурда $f(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде *интегралдануучу* (Риман боюнча) *функция* деп аталат. Мында a саны аныкталган интегралдын төмөнкү, b саны анын жогорку предели, өзгөрүлмө чоңдук x интегралдоо өзгөрмөсү, функция $f(x)$ интеграл астындагы функция деп аталат. Ал эми $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралын табуу маселеси $f(x)$ функциясын $[a; b]$ кесиндисинде *интегралдоо* деп аталат.

Аныкталган интегралдын аныктамасынан аныкталган интегралдын a, b менен $f(x)$ тен көз карандылыгы, ал эми интегралдоо өзгөрмөсүнөн көз каранды эместиги келип чыгат б. а.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ldots = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Белгилөөлөрүнүн окшоштугуна карабастан $\int f(x)\,dx$ аныкталбаган интегралы функциялардын көптүгүн, ал эми $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы белгилүү санды аныктарын эске салабыз.

Жогорудагы геометриянын жана механиканын эки маселесине кайрылсак, анда аныкталган интегралдын аныктамасынын негизинде (2) жана (4) формулалардан төмөнкү формулаларды алабыз:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (7)$$

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (8)$$

Мында S – ийри сызыктуу трапециянын (2-чийме) аянты, A саны $\vec{F}$ күчүнүн ($|\vec{F}| = F(x)$) аткарган жумушу. Бул учурда каалагандай $x \in [a; b]$ үчүн $f(x) \geq 0$ жана $F(x) \geq 0$ болот.

Ар кандай функция интегралдануучу функция болбойт. Бирок, төмөнкү теорема туура болот.

Т е о р е м а 1. Эгерде $y = f(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда ал функция $[a; b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болот.

Эми аныкталган интегралдын төмөнкү негизги касиеттерине токтолобуз. Ал касиеттердин далилдөөсүн аныкталган интегралдын аныктамасы же геометриялык сүрөттөлүш аркылуу көрсөтсө болот.

1. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда ар кандай турактуу чоңдук $c \in R$ үчүн

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

барабардыгы аткарылат б. а. турактуу чоңдукту интегралдын сыртына чыгарууга болот.

2. Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $[a; b]$ сегментинде интегралдануучу функция болсо, анда

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

барабардыгы аткарылат б. а. эки функциянын суммасынын интегралы ал функциялардын интегралдарынын суммасына барабар.

3. Эгерде $f(x)$, $g(x)$ функциялары $[a; b]$ сегментинде интегралдануучу функция болсо жана ар кандай $x\in[a; b]$ үчүн $f(x)\le g(x)$ барабарсыздыгы туура болсо, анда

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

барабарсыздыгы да аткарылат.

4. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда кандайдыр бир $c\in[a; b]$ үчүн $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$ барабардыгы аткарылат.

5. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда ар кандай $c\in(a; b)$ үчүн

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

болот. Мындан $\int_a^a f(x)\,dx=0$ барабардыгы келип чыгат.

6. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда ал функция $[a; b]$ сегементинде чектелген функция болот, б. а. ар кандай $x\in[a; b]$ үчүн $|f(x)|\le M$ барабарсыздыгы аткарылгандай $0<M$ саны табылат.

Мисалдар: Төмөнкү аныкталган интегралдарды аныктаманын негизинде б. а. (6) формула менен эсептегиле.

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx;\quad 2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx;\quad 3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(3x-4\cos x)\,dx.$$

Чыгаруу: 1) $f(x)=x$ функциясы $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгондуктан, ал функция $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ сегментинде интегралдануучу функция. Демек, берилген функциянын интегралдык суммасы s_n ди (5) формула боюнча аныктоодо x_k менен c_k (k=0, 1, 2, ..., n) чекиттерин каалагандай тандай алабыз. Бул эркиндикке таянып $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ сегментин $x_k=\frac{k\pi}{2n}$ (k=0,1,...,n) чекиттери менен бөлүп, c_k чекитин $\left[\frac{(k-1)\pi}{2n}, \frac{k\pi}{2n}\right]$ сегментинин оң учуна барабарлайлы б. а. $c_k=\frac{k\pi}{2n}$ (k=1,2,...,n) болсун дейли. Мында $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{\pi}{2n}$ (k=1,2,...,n). Эми (5) формуланы колдонуп, берилген функция үчүн интегралдык сумманы түзөлү:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n} = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k =$$

$$=\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 (1+2+3+...+n) = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \frac{n+1}{2}\cdot n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right). \qquad (9)$$

Мында арифметикалык прогрессиянын формуласын колдонуп, $1+2+3+...+n = \frac{(n+1)n}{2}$ суммасын таптык. Анда (6) жана (9) формулалардын негизинде

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad (10)$$

болот.

2) Бул учурда да $f(x)=\cos x$ функциясы $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ сегментинде үзгүлтүксүз болгондуктан, ал функция $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ сегментинде интегралдануучу функция. Анда, берилген функциянын интегралдык суммасы s_n ди аныктоодо, x_k менен c_k (k=0, 1, 2,...,n) чекиттерин каалагандай тандай алабыз. Бул эркиндикке таянып $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ сегментин $x_k=\frac{k\pi}{2n}$ (k=1,...,n) чекиттери менен бөлүп, c_k чекитин $\left[\frac{(k-1)\pi}{2n}, \frac{k\pi}{2n}\right]$ сегментинин оң учуна барабарлайлы б. а. $c_k=\frac{k\pi}{2n}$ (k=1,2,...,n) болсун дейли. Мында $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{\pi}{2n}$ (k=1,2,...,n).

Эми (5) формуланы колдонуп берилген функция үчүн интегралдык сумманы түзөлү:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n}\,\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}.$$

Мындан

$$s_n\cdot\sin\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}\left[\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n} + \cos\frac{n\pi}{2n}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4n}\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{2n} \qquad (11)$$

формуланы алабыз. Эми

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\alpha - \sin\beta$$

формуласын $\alpha=\frac{2k+1}{4n}\pi$, $\beta=\frac{2k-1}{4n}\pi\,(k=1,2,\ldots,n)$ үчүн эске алсак, анда $2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{2n} = \sin\frac{2k+1}{4n}\pi - \sin\frac{2k-1}{4n}\pi$, $(k=1,2,\ldots,n)$ формулаларын алабыз. Бул акыркы формулаларды (11) формулага колдонсок, анда $s_n\cdot\sin\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{4n}\pi - \sin\frac{2k-1}{4n}\pi\right) = \frac{\pi}{4n}\cdot$

$$\cdot\left[\left(\sin\frac{3}{4n}\pi - \sin\frac{1}{4n}\pi\right) + \left(\sin\frac{5}{4n}\pi - \sin\frac{3}{4n}\pi\right) + \left(\sin\frac{7}{4n}\pi - \sin\frac{5}{4n}\pi\right) + \ldots +\right.$$

$$\left. + \left(\sin\frac{2n-1}{4n}\pi - \sin\frac{2n-3}{4n}\pi\right) + \left(\sin\frac{2n+1}{4n}\pi - \sin\frac{2n-1}{4n}\pi\right)\right] = \frac{\pi}{4n}\left(\sin\frac{2n+1}{4n}\pi - \right.$$

$\left.-\sin\frac{\pi}{4n}\right) = \frac{\pi}{4n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right) - \sin\frac{\pi}{4n}\right]$ барабардыгы келип чыгат.

Мындан $$s_n = \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right) - \sin\frac{\pi}{4n}\right] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right) - \sin\frac{\pi}{4n}}{\dfrac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}}.$$

Эми $n\to\infty$ болгондогу пределге өтсөк, анда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right) - \sin\frac{\pi}{4n}}{\dfrac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}} =$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)-\sin\frac{\pi}{4n}\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}}=1$$ болот. Мында ($n\to\infty$ үчүн $\alpha=\frac{\pi}{4n}\to 0$)

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ формуласын (биринчи сонун пределди) колдондук.

Демек $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = 1.$ (12)

3) Интегралдын 2-касиетин колдонуп берилген интегралды төмөнкүдөй жазабыз:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(3x-4\cos x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[3x+(-4)\cos x]dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}3x\,dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-4)\cos x dx.$$

Бул барабардыктын оң жагындагы эки интегралдын ар бирине интегралдын 1-касиетин колдонуп берилген интеграл үчүн төмөнкү формуланы алабыз:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(3x-4\cos x)dx=3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx+(-4)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

Мындан (10) жана (12) формулаларын пайдалансак, анда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(3x-4\cos x)dx=3\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+(-4)\cdot 1=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-4$$ болот.

Жогорудагы мисалдардан аныкталган интегралды интегралдык сумма аркылуу эсептөө жолунун татаал экендигин көрдүк. Демек, бизге аныкталган интегралды эсептөөнүн жеңил жана жөнөкөй жолу керек. Андай жолдордун бири Ньютон-Лейбництин формуласы аркылуу аныкталган интегралды эсептөө жолу болот. Бул формула менен биз төмөндө таанышабыз.

4.3. Жогорку пределi өзгөрүлмө интеграл жана Ньютон-Лейбництин формуласы

Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде интегралдануучу функция болсо, анда ар кандай $x\in[a; b]$ үчүн, берилген функция $[a;\ x]$ сегментинде дагы интегралдануучу функция болот, б. а. ар кандай $x\in [a;\ b]$ үчүн $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ интегралы аныкталат. Бул интеграл *жогорку предели өзгөрүлмө интеграл деп аталат* жана x тен көзкаранды болгон функция болот б. а.

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt \tag{13}$$

функциясы $[a;\ b]$ сегментинде аныкталат.

Жогорку предели өзгөрүлмө интегралдын төмөнкү эки касиетине токтололу.

Т е о р е м а 1. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ сегментинде интегралдануучу функция болсо, анда (13) формула менен аныкталган $F(x)$ функциясы $[a;\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болот.

Д а л и л д ө ө. Ар кандай $x\in [a;\ b]$, $x+\Delta x\in [a;\ b]$ үчүн $\Delta x\to 0$ болгондо, $\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)\to 0$ экендигин көрсөтөбүз. Ал үчүн (13) формулага аныкталган интегралдын 5-касиетин колдонуп

$$\Delta F(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int\limits_a^x f(t)\,dt=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \tag{14}$$

барабардыгын алабыз. Бул (14) барабардыкка аныкталган интегралдын 4-касиетин жана 3-касиетин пайдалансак анда кандайдыр бир $c\in [x;\ x+\Delta x]$ чекити үчүн $|\Delta F(x)|\le |f(c)||\Delta x|$, $c\in [x;\ x+\Delta x]$ барабарсыздыгы келип чыгат. Эми интегралдануучу функциянын чектелген функция экендигин эске алсак, анда акыркы барабарсыздыктан $\Delta x\to 0$ болгондо $\Delta F(x)\to 0$ экендигин көрөбүз б. а. $F(x)$ функциясы ар кандай $x\in [a;\ b]$ чекитинде үзгүлтүксүз. Демек, $F(x)$ функциясы $[a;\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция болот.

Т е о р е м а 2. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болсо анда бул $[a;\ b]$ сегментинде $f(x)$ функциясы баштапкы функцияга ээ болот жана ал баштапкы функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x\in [a;\ b]$ формуласы менен аныкталат б. а. ар кандай $x\in [a;\ b]$ үчүн $F'(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$ (15)

барабардыгы аткарылат.

Д а л и л д ө ө. Ар кандай $x\in [a;\ b]$, $x+\Delta x\in [a;\ b]$, $\Delta x\neq 0$ үчүн $\Delta x\to 0$ болгондо $\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}[F(x+\Delta x)-F(x)]\to f(x)$ экендигин көрсөтөбүз. Ал үчүн (14) барабардыкка аныкталган интегралдын 4-касиетин колдонсок, анда кандайдыр бир $c \in [x; x+\Delta x]$ үчүн

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(c), \tag{16}$$

барабардыгын алабыз. Эми $f(x)$ функциянын $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз экендигин эске алсак, анда (16) барабардыктан

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

барабардыгын б. а. (15) барабардыкты алабыз.

Н а т ы й ж а. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болсо, анда

$$\int f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+C, \tag{17}$$

мында C – каалагандай турактуу сан.

Азыр аныкталган интегралды эсептөөнүн оңой жолу болгон Ньютон-Лейбництин формуласы менен таанышабыз.

Т е о р е м а 3. (Ньютон-Лейбництин формуласы) Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болсо жана $F(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде $f(x)$ функциянын каалагандай баштапкы функциясы болсо, анда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b=F(b) - F(a) \tag{18}$$

формуласы орун алат. Бул (18) формула *Ньютон-Лейбництин формуласы* деп аталат.

Д а л и л д ө ө. $F(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде $f(x)$ функциянын каалаган баштапкы функциясы болсун. Теорема 2-нин негизинде $\int_a^x f(t)\,dt$ функциясы $f(x)$ функциянын баштапкы функциясы болот. Демек кандайдыр турактуу C чондугу үчүн

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C \tag{19}$$

барабардыгы аткарылат. Бул акыркы барабардыкка $x=a$ ны койсок, анда $C=F(a)$ болот. Анда (19) барабардыктан $\int_a^x f(t)\,dt=F(x) - F(a)$ формуласын алабыз. Бул акыркы барабардыкка $x=b$ ны койсок, анда (18) формуланы алабыз.

Эми Ньютон-Лейбництин формуласын колдонуп аныкталган интегралды эсептөөнүн схемасына токтолобуз:

1. Интеграл алдындагы $f(x)$ функциянын баштапкы функцияларынын кандайдыр бири болгон $F(x)$ти табуу үчүн аныкталбаган интегралды табуунун таблицасы же ыкмасы колдонулат да, анда каалаган турактуу чоңдук C га кандайдыр бир сандык маани беребиз, мисалы $C=0$ деп алабыз.

2. Табылган $F(x)$ баштапкы функциясына Ньютон-Лейбництин формуласын колдонобуз б. а. (18) формуланы колдонобуз.

Эми Ньютон-Лейбництин формуласын колдонуп аныкталган интегралдарды эсептөөнүн мисалдарына токтололу:

Мисалдар: Төмөнкү аныкталган интегралдарды Ньютон-Лейбництин формуласын колдонуп эсептегиле.

$$4)\ \int_{-1}^{3} x^2\,dx; \qquad 5)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx; \qquad 6)\ \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx; \qquad 7)\ \int_{1}^{3} \frac{1}{x}\,dx.$$

Чыгаруу: 4) $f(x)=x^2$ функциясы $[-1;\ 3]$ сегментинде үзгүлтүксүз жана x^2 функциясы үчүн $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ функциясы баштапкы функция болот. Анда Ньютон-Лейбництин формуласы менен эсептеп $\int_{-1}^{3} x^2\,dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_{-1}^{3}=\dfrac{3^3}{3}-\dfrac{(-1)^3}{3}=\dfrac{9+1}{3}=\dfrac{10}{3}$ барабардыгын алабыз.

5) $f(x)=\cos x$ функциясы $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ сегментинде үзгүлтүксүз жана $f(x)=\cos x$ функциясы үчүн $F(x)=\sin x$ функциясы баштапкы функция болот. Анда Ньютон-Лейбництин формуласы менен эсептеп

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=\sin x\left|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right.=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$$ барабардыгын алабыз.

6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ функциясы $[1;\ 2]$ сегментинде үзгүлтүксүз жана $f(x)=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$ функциясы үчүн $F(x)=-x^{-1}=-\dfrac{1}{x}$ функциясы баштапкы функция болот. Анда Ньютон-Лейбництин формуласын колдонуп $\int_{1}^{2} \dfrac{1}{x^2}\,dx=\left.\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right|_{1}^{2}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\left(-\dfrac{1}{1}\right)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ барабардыгын алабыз.

7) $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясы [1; 3] сегментинде үзгүлтүксүз жана $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясы үчүн $F(x) = \ln x$ функциясы баштапкы функция болот. Анда Ньютон-Лейбництин формуласы менен эсептеп

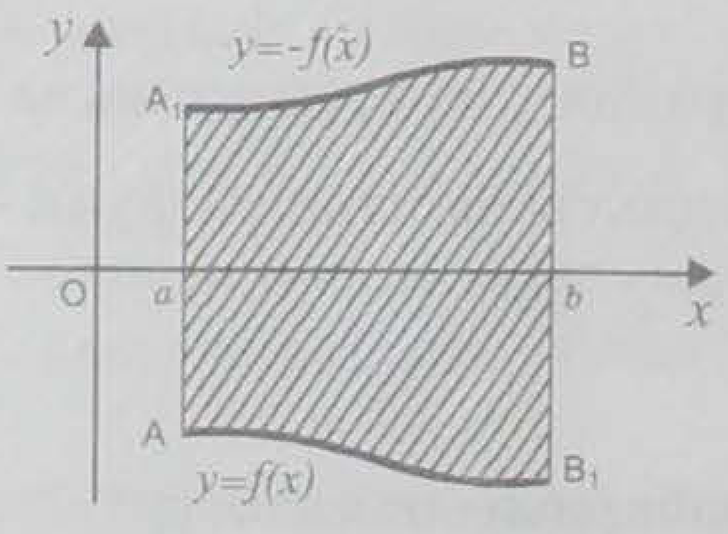
$\int_1^3 \frac{1}{x}\, dx = \ln x\Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$ барабардыгын алабыз.

Жогорудагы көрсөтүлгөн мисалдардан, биз аныкталган интегралдарды Ньютон-Лейбництин формуласы менен эсептөө жолунун ыңгайлуу жана эффективдүү жол экендигине ынанабыз.

4.4. Аныкталган интегралдын колдонулушу

1. Тегиздиктеги фигуранын аянты (жалпак фигуранын аянты). Эгерде ар кандай $x\in [a; b]$ үчүн $f(x) \geq 0$ болсо, анда 2-чиймедеги (4.1-пункт) $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын S аянты (7) формула менен аныкталат б. а. $S=\int_a^b f(x)\, dx$ болот.

а) Эми ар кандай $x\in[a; b]$ үчүн $f(x) \leq 0$ болсун дейли. Биздин максат 3-чиймедеги $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянты S ти табыш керек. Мында $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$. Бул учурда биз терс эмес $y=-f(x)$ функциясын карайбыз.

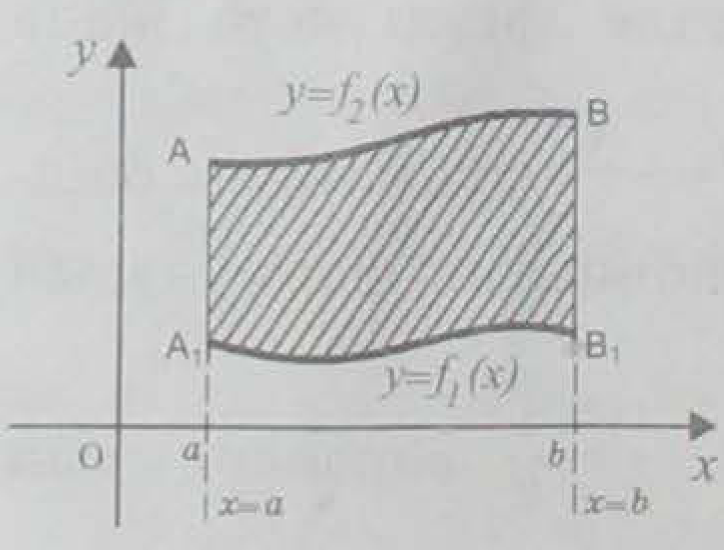


3-чийме.

Анда 3-чиймедеги $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянты aA_1B_1b ийри сызыктуу трапециянын аянтына барабар. Себеби, aA_1B_1b ийри сызыктуу трапециясы берилген $aABb$ ийри сызыктуу трапециясын Ox огуна карата симметриялуу чагылдыруудан пайда болот. Демек $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянты

$$S=\int_a^b [-f(x)]\, dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (20)$$

формула менен аныкталат.



4-чийме.

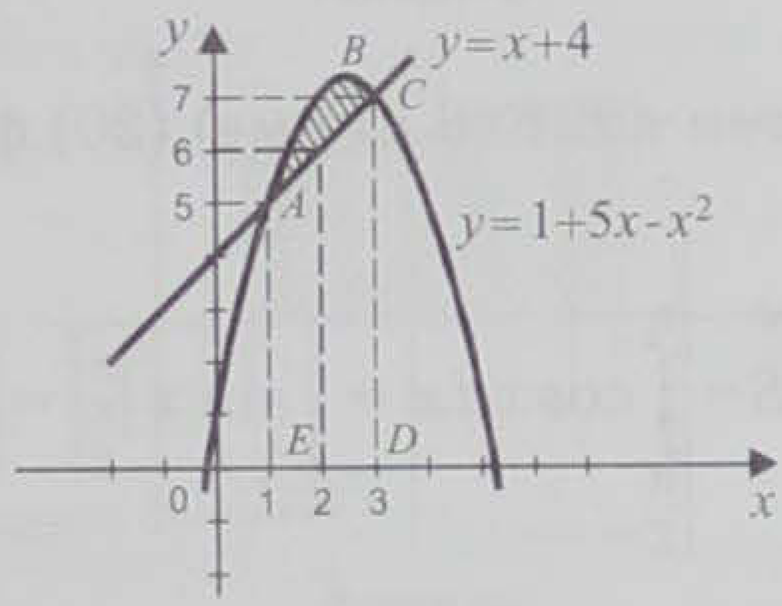
б) Эми [*a*; *b*] сегментинде үзгүлтүксүз $y=f_1(x)$ жана $y=f_2(x)$ функциялары берилсин жана ар кандай $x\in [a; b]$ үчүн $f_1(x) \leq f_2(x)$ болсун дейли. Биздин максат, каптал жактарынан $x=a$, $x=b$ түз сызыктары менен чектелген, төмөн жагынан $y=f_1(x)$ функциясынын графиги жана жогору жагынан $y=f_2(x)$ функциясынын графиги менен чектелген A_1ABB_1 фигурасынын (4-чийме) аянты S ти табыш керек. Мында $A_1(a;\ f_1(a))$, $A(a;\ f_2(a))$, $B(b;\ f_2(b))$, $B_1(b;\ f_1(b))$. Бул учурда A_1ABB_1 фигуранын аянты $aABb$ жана aA_1B_1b ийри сызыктуу трапецияларынын аянттарынын айырмасына барабар болот б. а.

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx. \qquad (21)$$

Э с к е р т ү ү: Кээде A чекити A_1 чекити менен, ал эми B чекити B_1 чекити менен дал келиши мүмкүн. Бул учурда a жана b сандарын $f_1(x)=f_2(x)$ теңдемесин чыгарып өзүбүз табабыз.

1-м и с а л: $y=x+4$ жана $y=1+5x-x^2$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

Ч ы г а р у у. Берилген функциялардын графиктеринин кесилишкен чекиттеринин абсциссаларын $x+4=1+5x-x^2$ теңдемеден табабыз. Бул теңдемени чыгарып, $x=1$ жана $x=3$ чыгарылыштары экендигин билебиз. Эми берилген функциялардын [1; 3] сегментиндеги графиктерин сызабыз (5-чийме). Биз аныктаган [1; 3] сегментинде $y=1+5x-x^2$ функциясынын графиги $y=x+4$ функциясынын графигине караганда жогору жайланышканы төмөнкү таблицадан белгилүү болот.



5-чийме.

x	1	2	3
$y=x+4$	5	6	7
$y=1+5x-x^2$	5	7	7

Изделип жаткан S аянты (штрихтелген) ийри сызыктуу $ABCDE$ жана $ACDE$ трапеция аянттарынын айырмасына барабар, б. а. (21) формуладан

$$S=S_{ABCDE}-S_{ACDE} \qquad (22)$$

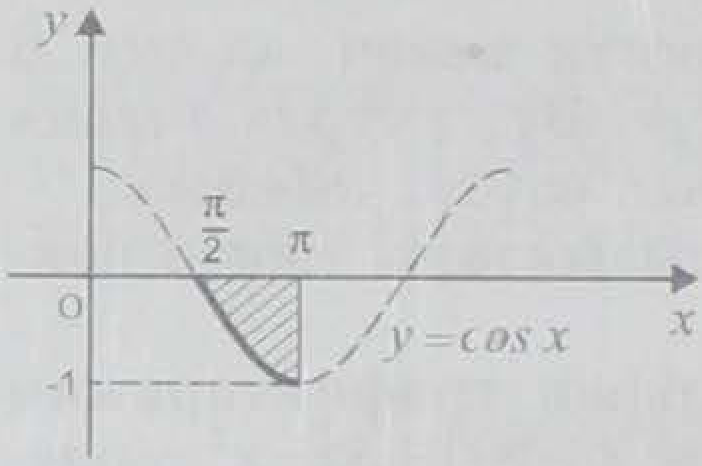
Эми (7) формуланы жана Ньютон-Лейбництин формуласын колдонсок, анда

$$S_{ABCDE}=\int_1^3 (1+5x-x^2)\,dx=\left(x+5\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=\left(3+5\cdot\frac{3^2}{2}-\frac{3^3}{3}\right)-$$

$$-\left(1+5\cdot\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)=\frac{33}{2}-\frac{19}{6}=\frac{40}{3},$$

$S_{ACDE}=\int\limits_1^3 (x+4)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_1^3=\left(\frac{3^2}{2}+4\cdot 3\right)-\left(\frac{1^2}{2}+4\cdot 1\right)=\frac{33}{2}-\frac{9}{2}=12$ болот. Анда (22) формуладан $S=\frac{40}{3}-12=\frac{4}{3}$. Демек, штрихтелген фигуранын аянты $\frac{4}{3}$ квадрат бирдигине барабар.

2-м и с а л. $y=\cos x$ функциясынын $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ сегментиндеги графиги, $x=\pi$ түз сызыгы жана $0x$ огу менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.



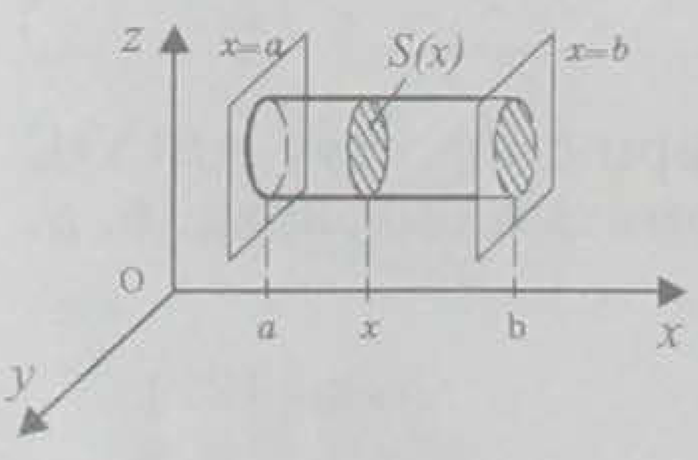
6-чийме.

Ч ы г а р у у. Ар кандай $x\in\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ үчүн $\cos x\le 0$ болгондуктан, биз издеген аянт (6-чийме) (20) формула менен табылат б. а.

$$S=\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx\right|=\left|\sin x\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|=\left|\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right|=|-1|=1 \text{ (квадрат бирдиги).}$$

2. Көлөмдү эсептөө.

а) Берилген кесилиш аянты боюнча нерсенин көлөмүн аныктоо. Бизге мейкиндикте туюк бет менен чектелген кандайдыр бир Ω геометриялык нерсе берилсин. Бул нерсе сол жана он жактарынан $0x$ огуна перпендикулярдуу болгон $x=a$ жана $x=b$ тегиздиктери менен чектелсин (7-чийме). Ар кандай $x\in[a;\,b]$ үчүн $A(x;\,0;\,0)$ чекити аркылуу өтүп жана xOy тегиздигине ($z=0$) перпендикуляр болгон тегиздик менен берилген нерсенин кесилишинен пайда болгон жалпак фигуранын аянты белгилүү $S(x)$ (7-чийме) санына барабар болсун. Ошондой эле $S(x)$ функцияны $[a;\,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз деп эсептейли.



7-чийме.

Т е о р е м а 4. Эгерде жогоруда аныкталган $S(x)$ функциясы $[a;\,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда Ω нерсенин көлөмү

$$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx \qquad (22)$$

формуласы менен эсептелет.

Д а л и л д ө ө. Каалаган $n \in N$ саны үчүн берилген $[a;\ b]$ сегментин $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b = x_n$ чекиттери менен бирдей узундуктагы n кесиндиге бөлөбүз. Мында $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$, $k=1,\ 2,\ ...,\ n$. Бул учурда

$$V \approx S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + ... + S(x_{n-1})\,\Delta x = V_n$$

болот. Мындан $n \to \infty$ болгондо $V_n \to V$ экендиги келип чыгат. Ал эми аныкталган интегралдын аныктамасы боюнча

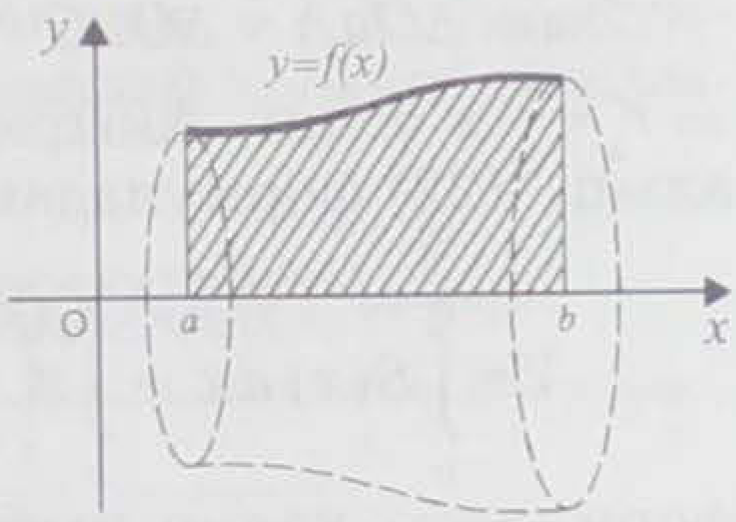
$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = = \int_a^b S(x)\,dx \text{ болот.}$$

б) Жалпак фигуранын айлануусунан пайда болгон нерсенин көлөмү.

Т е о р е м а 5. Эгерде мейкиндиктеги Ω нерсеси xOy тегиздигиндеги $y=0$, $x=a$, $x=b$ жана үзгүлтүксүз $y=f(x)$ сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын Ox огунун айланасында айлануусунан (8-чийме) пайда болсо, анда Ω нерсенин көлөмү

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (23)$$

формуласы менен эсептелет.



8-чийме.

Д а л и л д ө ө. Каалаган $n \in N$ саны үчүн берилген $[a;\ b]$ сегментин $x_0 = a < x_1 < ... < x_{n-1} < b = x_n$ чекиттери менен бирдей узундуктагы n кесиндиге бөлөбүз. Мында $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$, $k=1,\ 2,\ ...,\ n$. Бул учурда

$$V \approx \pi f^2(x_0)\Delta x + \pi f^2(x_1)\Delta x + ... + \pi f^2(x_{n-1})\,\Delta x = V_n$$

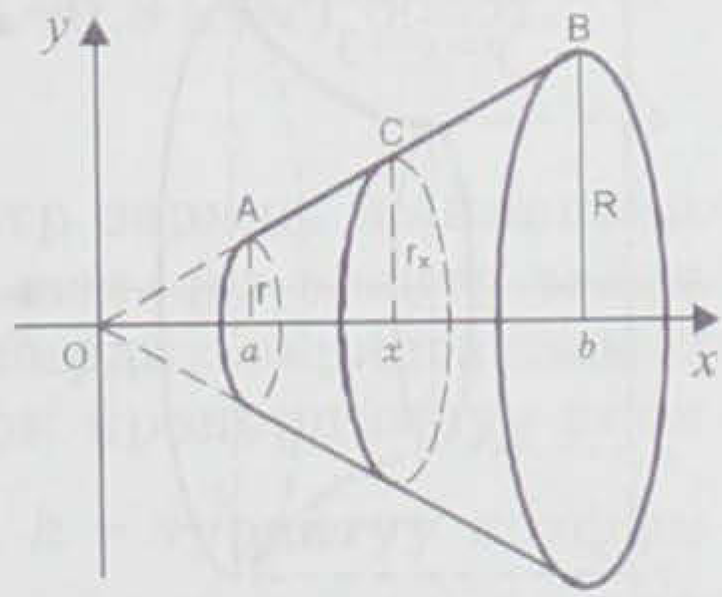
болот. Мындан $n \to \infty$ болгондо $V_n \to V$ экендиги келип чыгат. Бирок аныкталган интегралдын аныктамасы боюнча

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

болот.

3-м и с а л. Бийиктиги h, негиздеринин радиустары r жана R болгон кесилген конустун көлөмү V ны эсептегиле.

Ч ы г а р у у. xOy – координат системасынын O чекити аркылуу берилген конустун негизине перпендикуляр кылып Ox огун жүргүзөбүз (9-чийме). Кесилген конустун негиздери Ox огун a



9-чийме.

жана b чекиттеринде кесишет. Мында

$$h=b-a, \quad b=a+h. \qquad (24)$$

$\Delta OaA \sim \Delta ObB$ болгондугун жана (24) формуланы колдонуп

$\frac{r}{a}=\frac{R}{b} \Rightarrow \frac{r}{a}=\frac{R}{a+h} \Rightarrow$

$$a=\frac{rh}{R-r} \qquad (25)$$

экендиги келип чыгат. Каалаган $x\in[a;b]$ үчүн x чекитинен Ox огуна перпендикуляр болгон тегиздик жүргүзүп, ал тегиздик менен кесилген конустун кесилишинин аянтын $S(x)$ менен белгилейли. Анда

$$S(x)=\pi r_x^2 \qquad (26)$$

формуласын алабыз.

Эми $\Delta OaA - \Delta OxC$ болгондугун эске алсак, анда $\frac{r_x}{x}=\frac{r}{a} \Rightarrow$ $\Rightarrow r_x=\frac{r}{a}x$ болот. Акыркы формуланы жана (26) формуланы эске алып, (22) формуладан

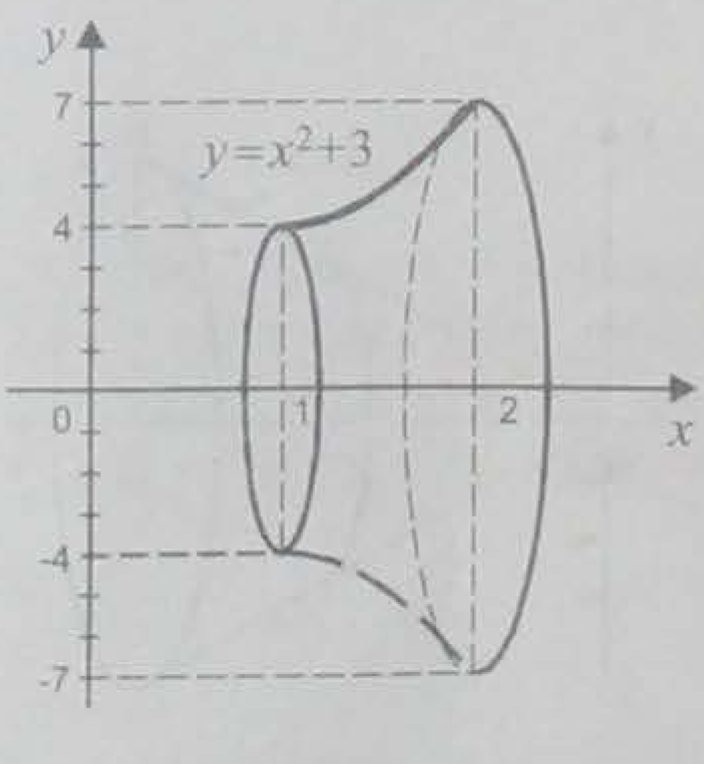
$$V=\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b \pi\left(\frac{r}{a}\right)^2 x^2dx=\pi\left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{a}\right)^2(b^3-a^3)$$

формуласы келип чыгат. Мындан (24) жана (25) формулалардын негизинде

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{(R-r)^2}{h^2}[(h+a)^3-a^3]=\frac{1}{3}\pi\frac{(R-r)^2}{h^2}(h^3+3h^2a+3ha^2)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\frac{(R-r)^2}{h^2}h^3\left[1+3\frac{r}{R-r}+3\frac{r^2}{(R-r)^2}\right]=\frac{1}{3}\pi h[(R-r)^2+3r(R-r)+3r^2]=$$

$=\frac{1}{3}\pi h[R^2-2Rr+r^2+3Rr-3r^2+3r^2]=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$ формуласын алабыз. Демек $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$ болот.



10-чийме.

4-мисал. Тегиздиктеги $x=1$, $x=2$, $y=0$ жана $y=x^2+3$ сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын Ox огунун айланасында айлануусунан (10-чийме) пайда болгон нерсенин көлөмү Vны эсептегиле.

Чыгаруу. $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=$

$$\pi\int_1^2(x^2+3)^2dx=\pi\int_1^2(x^4+6x^2+9)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}+6\cdot\frac{x^3}{3}+9x\right)\Bigg|_1^2=\pi\left[\left(\frac{2^5}{5}+2\cdot 2^3+9\cdot 2\right)-\left(\frac{1}{5}+2+9\right)\right]=\pi\left(\frac{31}{5}+23\right)=$$

$=\dfrac{146}{5}\pi$ (куб. бирдик).

3. Өзгөрмөлүү күчтүн аткарган жумушу. Эгерде сан огунда Ox огунун багыты менен дал келген өзгөрмөлүү $\overline{F}(x)$ күчүнүн таасири астында материалдык чекит ал октун багыты боюнча кыймылдап a чекитинен b чекитинде жылса жана $F(x)=|\overline{F}(x)|$ функциясы $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болсо, анда $\overline{F}(x)$ күчүнүн аткарган A жумушу (8) формула менен табыларын биз билебиз б. а.

$$A=\int_a^b F(x)\,dx \qquad (27)$$

болот.

5-м и с а л. Пружинаны 9 *см* ге чоюш үчүн 5,4 *Н* күч жумшалат. Пружинаны 10 *см* ге чоюш үчүн кандай жумуш аткарыларын эсептегиле (11-чийме).

11-чийме.

Ч ы г а р у у. Механикадагы Гуктун закону боюнча, пружинаны x ке чоюш үчүн жумшалуучу F күчү $F=kx$ формуласы менен эсептелет, мында k – турактуу коэффициент, О чекити пружинанын эркин абалына туура келет. Бул формулада x тин узундугу метр менен алынган. Эми k коэффициентин маселенин шартын пайдаланып табабыз. Пружинаны $x=9$ *см* же $x=0,09$ *м* ге чоюш үчүн $F=5,4$ *Н* күчү сарп кылынган. Демек, $5,4=k\cdot 0,09$ же $k=60$. Мындан $F(x)=60x$, $a=0$, $b=10$ *см* $=0,1$ *м*. Анда (27) формула боюнча биз издеген жумуш

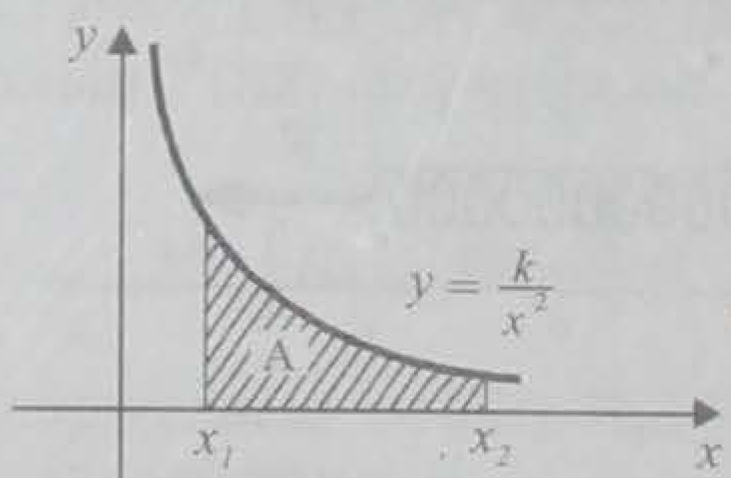
$$A=\int_0^{0,1}F(x)\,dx=\int_0^{0,1}60x\,dx=60\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,1}=30\cdot 0,01=0,3\ (Дж) \text{ болот.}$$

6-м и с а л. *О* чекитинде бирдик электр заряды жайланышсын дейли. Ал электр талаасын пайда кылат. Ал электр талаанын x чекитинде жайланышкан башка бирдик зарядга таасир эткен күчү аралыктын квадратына тескери пропорциялуу экендигин биз билебиз. б. а. $F(x)=\dfrac{k}{x^2}$, мында k – турактуу коэффициент. Электр талаанын бирдик зарядды x_1 чекитинен x_2 чекитине жылдыргандагы A жумушун тапкыла.

Ч ы г а р у у. Бул учурда (27) формула боюнча биз издеген жумуш $A=\int_{x_1}^{x_2}\frac{k}{x^2}\,dx=k\int_{x_1}^{x_2}x^{-2}\,dx$. Ал эми $F(x)=\frac{k}{x^2}$ функциянын баштапкы функциясы $U(x)=-\frac{k}{x}$ болот. Анда $A=k\int_{x_1}^{x_2}x^{-2}\,dx=U(x)\Big|_{x_1}^{x_2}=$ $=-\frac{k}{x}\Big|_{x_1}^{x_2}=\frac{k}{x_1}-\frac{k}{x_2}$. Функция $U(x)=-\frac{k}{x}$ электр талаанын потенциалы деп аталат. Жумуш $U(x)$ функциянын өсүндүсүнө барабар.

Аныкталган интегралдын геометриялык маанисин эске алсак, анда жумушту $F(x)=\frac{k}{x^2}$ функциянын графигинин алдындагы ийри сызыктуу трапециянын аянты катарында көрсөтсө болот (12-чийме).

4. Массанын борбору. Эми массанын борборун табуу маселелерине токтолобуз.



12-чийме.

а) Эгерде Ox сан огунда жайланышкан $A_1, A_2,..., A_n$ материалдык чекиттердин системасынын массалары $m_1, m_2,..., m_n$ жана координаталары $x_1, x_2,..., x_n$ болсо, анда ал массалардын системасынын борборунун x' координатасы

$$x'=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n} \qquad (28)$$

формуласы менен табылат.

б) Берилген ичке стержен Ox огунун $[a;\, b]$ кесиндисинде жайланышсын жана ал стержендин тыгыздыгы $\rho(x)$ болсун дейли, мында $\rho(x)$ функциясы $[a;\, b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция. Анда стержендин m массасы

$$m=\int_a^b\rho(x)\,dx \qquad (29)$$

формуласы менен, ал эми стержендин массасынын борборунун координатасы

$$x'=\frac{1}{m}\int_a^b x\rho(x)\,dx \qquad (30)$$

формуласы менен аныкталат.

Бул (29) жана (30) формулаларды далилдеш үчүн $[a;\, b]$ сегментин $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ чекиттери менен бирдей узундуктагы n кесиндиге бөлөбүз. Мында $\Delta x=\frac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}$, $k=1, 2, ..., n$. Бул учурда чоң n үчүн ар бир $[x_{k-1};\, x_k]$ кесиндисиндеги стержен-

дин тыгыздыгы $\rho(x_{k-1})$ ге жакын болгондугун жана (28) формуланы эске алсак, анда $m \approx \rho(x_0)\Delta x+\rho(x_1)\Delta x+...+\rho(x_{n-1})\Delta x=m_n$,

$x' \approx \dfrac{1}{m_n}[x_0\rho(x_0)\Delta x + x_1\,\rho(x_1)\Delta x+ ...+ x_{n-1}\,\rho(x_{n-1})\Delta x]= x_n'$ болот. Мындан $n \to \infty$ болгондо $m_n \to m$ жана $x_n' \to x'$ экендиги келип чыгат. Ал эми аныкталган интегралдын аныктамасы боюнча

$$m=\lim_{n\to\infty} m_n = \int_a^b \rho(x)\,dx,\; x' = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{m}\int_a^b x\rho(x)\,dx$$

болот.

Эскертүү: Жогорудагыдай жол менен төмөнкү формулаларды көрсөтсө болот.

1) Эгерде убакыттын $[t_1;\ t_2]$ аралыгында $N(t)$ кубаттуулугу аныкталса, анда ал кубаттуулуктун $t_2 - t_1$ убакытта аткарган A жумушу

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt \tag{31}$$

формуласы аркылуу табылат;

2) Эгерде убакыттын $[t_1;\ t_2]$ аралыгында $I(t)$ токтун күчү аныкталса, анда электр токтун $t_2 - t_1$ убакытта алып өткөн q электр заряды

$$q= \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt \tag{32}$$

формуласы менен табылат;

3) Эгерде материалдык чекит убакыттын $[t_1;\ t_2]$ аралыгында $v(t)$ ылдамдыгы менен кыймылдаса, анда ал материалдык чекиттин $t_2 - t_1$ убакытта басып өткөн s жолу

$$s= \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \tag{33}$$

формуласы менен табылат;

4) Эгерде убакыттын $[t_1;\ t_2]$ аралыгында $c(t)$ сыйымдуулугу аныкталса, анда $t_2 - t_1$ убакыттагы Q жылуулуктун саны

$$Q= \int_{t_1}^{t_2} c(t)\,dt \tag{34}$$

формуласы менен табылат.

Көнүгүүлөр

Ньютон-Лейбництин формуласын пайдаланып төмөнкү аныкталган интегралдарды эсептегиле (35–45).

35. а) $\int\limits_0^1 x^5\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; г) $\int\limits_1^2 x^3\,dx$.

36. а) $\int\limits_{-1}^2 dx$; б) $\int\limits_0^3 7\,dx$; в) $\int\limits_{-2}^5 x\,dx$; г) $\int\limits_0^1 (x^3 - x)\,dx$.

37. а) $\int\limits_1^4 (3 - 2x)\,dx$; б) $\int\limits_0^1 (x^2 + 1)\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^0 (x^2 + 2x)\,dx$;

г) $\int\limits_0^1 (2x^3 - x + 1)\,dx$.

38. а) $\int\limits_{-1}^1 (2x^2 - 5x - 7)\,dx$; б) $\int\limits_2^7 \frac{dx}{x^2}$; в) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{3x^6}$; г) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx$.

39. а) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x^2}\,dx$; б) $\int\limits_2^8 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int\limits_1^2 \frac{2x^3 + 3x - 2}{x^5}\,dx$; г) $\int\limits_1^8 \frac{2x^2 + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

40. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$; г) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

41. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} (\sin x - 3\cos x - x)\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{tg}^2 x\,dx$.

42. а) $\int\limits_0^2 |x - 1|\,dx$; б) $\int\limits_{-2}^1 \frac{dx}{x + 3}$; в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx$; г) $\int\limits_{-1}^0 x^3\,dx$.

43. а) $\int\limits_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^1 x^2\,dx$; г) $\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$;

44. а) $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$; б) $\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x}\,dx$; в) $\int\limits_3^8 \frac{dx}{\sqrt{x + 1}}$; г) $\int\limits_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\,dx$.

45. а) $\int\limits_0^2 (x^3 - 1)\,dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(2x + 1)^2}$; в) $\int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; г) $\int\limits_0^2 \sqrt{4x + 1}\,dx$.

Төмөнкү функциялардын туундуларын тапкыла (46–49).

46. а) $y=\int\limits_1^x \frac{t^2+1}{t}\,dt;$ б) $y=\int\limits_{-1}^x \frac{t^2-1}{t}\,dt.$

47. а) $y=x\int\limits_0^x (8^3+3)\,ds;$ б) $y=(\sin x)\int\limits_0^x \sin t\,dt.$

48. а) $F(x)=\frac{\int\limits_0^x (s+1)ds}{x+1};$ б) $F(x)=\frac{\int\limits_0^x \cos x dx}{2\sin x}.$

49. а) $F(t)=\frac{1}{t}\int\limits_1^t \frac{ds}{\sqrt{8+s}};$ б) $F(t)=e^{3t}\int\limits_0^t (e^{-3s}+1)\,ds.$

Теңдемелери берилген сызыктар менен чектелген фигуралардын аянттарын (адегенде сүрөттөрүн чийгиле) эсептегиле (50–66).

50. $y=2x+1,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=3.$

51. $y=x^3,\quad y=8,\quad x=1.$

52. $y=2\cos x,\quad y=1,\quad x=-\frac{\pi}{3},\quad x=\frac{\pi}{3}.$

53. $y=x^2-2x+4,\quad y=3,\quad x=-1.$

54. $y=x^2+1,\quad y=0,\quad x=-1,\quad x=2.$

55. $y=1-x^2,\ y=0.$

56. $y=x^2+1,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=2.$

57. $y=x^2-x-5,\quad y=x-2.$

58. $y=\sin x,\quad x=\frac{\pi}{2},\quad x=\pi,\quad y=0.$

59. $y=\frac{1}{x},\quad x=1,\quad x=3,\quad y=0.$

60. $y=x^2-x-5,\quad y=x-5.$

61. $y=x^2+x-4,\quad y=6-x^2.$

62. $y=-x^2+4,\quad y=2-x.$

63. $y=x^2+2,\quad y=x+4.$

64. $y=x-x^2$, $\quad y=x^2-x$.

65. $y=2^x-1$, $\quad y=\sqrt{x}$.

66. $y=x^2$, $\quad y=x^3$.

67. Координат тегиздигиндеги чекиттеринин координаталары үчүн $y\geq x^2$ жана $x\geq y^2$ барабарсыздыктары орун алган фигуранын аянтын эсептегиле.

68. Координат тегиздигиндеги чекиттеринин координаталары үчүн $15-7x\leq y\leq 7-3x$, $y\geq 0$ барабарсыздыктары орун алган фигуранын аянтын эсептегиле.

69. Фирма $y=3x^2$, $y=3$ сызыктары менен чектелген жер участогун (мында x менен y тин узундуктары *км* менен берилген) сатып алды. Фирма канча гектар жер сатып алды?

70. Дыйкан чарба $y=3x^2$, $y=6x$ сызыктары менен чектелген жер участогуна (мында x менен y тин узундуктары *км* менен берилген) буудай эгишип, ал участоктун ар бир гектарынан 25 *центнер* буудай алууну пландашты. План боюнча ал участоктон канча *тонна* буудай алса болот?

Төмөнкү теңдемелери менен берилген сызыктар менен чектелген фигураны $0x$ огунун айланасында айландыруудан пайда болгон нерсенин көлөмүн тапкыла (71–79):

71. $y=x^2+1$, $x=0$, $x=1$, $y=0$.

72. $y=\sqrt{x}+2$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

73. $y=x^2$, $y=x$.

74. $y=x+2$, $y=1$, $x=0$, $x=2$,

75. $y=2x$; $y=x+3$, $x=0$, $x=1$.

76. $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $y=0$.

77. $y=1-x^2$, $y=0$.

78. $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

79. $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

80. Пружинаны 1 *см* ге кысыш үчүн 2*Н* күч жумшалса, пружинаны 4 *см* ге кыскан учурдагы аткарылган жумушту тапкыла.

81. Пружинаны 9 *см* ге чоюу үчүн 7,2*Н* күч жумшалды. Бул күчтүн аткарган жумушун тапкыла.

82. Пружинаны 30 *см* ге чоюу үчүн аткарылган жумуш 18 *Дж* болду. Эгерде 32 *Дж* жумуш аткарылса, анда пружина канча узундукка чоюлду?

83. Негизинин радиусу R жана бийиктиги H болгон конус формасындагы цистернада толо суу бар. Цистернанын чокусу аркылуу бардык суу алынгандагы жумушту тапкыла жана бул жумуштун R=3 *м*, H=5 *м* болгондогу маанисин эсептегиле (суунун тыгыздыгы $\rho=1$ $г/см^3$).

84. Эки $+10^{-4}$ *кл* жана -10^{-4} *кл* электр заряддарынын арасындагы аралык 10 *см* ге барабар. Алардын арасындагы аралыкты 10 *км* ге жеткирген жумушту тапкыла.

Кайталоо үчүн суроолор

1. Баштапкы функция деген эмне?
2. Баштапкы функциянын касиеттерин айтып бергиле.
3. Бир функциянын эки баштапкы функциясынын кандай байланышы бар?
4. Аныкталбаган интегралдын аныктамасын бергиле.
5. Аныкталбаган интеграл менен баштапкы функциянын кандай байланышы бар?
6. Аныкталбаган интегралды интегралдоонун таблицасын айтып бергиле.
7. Аныкталбаган интегралды табуунун негизги эрежелерин айткыла.
8. Ар кандай даражалуу функциянын аныкталбаган интегралы да даражалуу функция болобу?
9. Кандай фигура ийри сызыктуу трапеция деп аталат?
10. Аныкталган интегралдын аныктамасын бергиле.
11. Аныкталган интегралдын аныкталбаган интегралдан кандай айырмасы бар?
12. Ийри сызыктуу трапециянын аянтын кандай эсептейбиз?
13. Өзгөрмөлүү күчтүн жумушун кандай формула менен эсептейбиз?
14. Аныкталган интегралдын мааниси эмнеден көз каранды?
15. Аныкталган интегралдын кандай касиеттери бар?
16. Жогорку предели өзгөрүлмө интеграл жана анын туундусу жөнүндө айтып бергиле.
17. Ньютон-Лейбництин формуласын жазып, ал формуланы колдонгонго мисал келтиргиле.
18. Аныкталган интегралдын геометриядагы жана физикадагы колдонулуштары (аянт, көлөм, жумушту ж.б. эсептөө формулалары) жөнүндө айтып бергиле.

ТАРЫХЫЙ МААЛЫМАТТАР

Интеграл жөнүндөгү түшүнүктөрдүн алгачкы кадамдары Байыркы Греция менен Римдик математиктеринин эмгектери менен байланышкан. Байыркы Греция математиги Евдокс Книдск (болж.алг.б.э.ч. 408–355) жалпак фигуралардын аянттарын (квадратураларын) жана нерселердин көлөмдөрүн (кубатураларын) эсептөө үчүн аягына чыгуу методун сунуш кылган. Бул методдун жардамы менен ал көптөгөн теоремаларды далилдеген. Мисалы, конустун көлөмү ошондой эле негизге жана бийиктикке ээ болгон цилиндрдин көлөмүнүн $\frac{1}{3}$ не барабар экендигин, ал эми эки тегеректин аянттарынын катышы алардын диаметрлеринин квадраттарынын катышындай катышарын далилдеген.

Евдокстун методунун андан аркы өркүндөшү математик, механик жана инженер Архимед (болж.алг.б.э.ч. 287–212) менен байланышкан. Өзүнүн өркүндөтүлгөн методунун жана башка идеяларынын жардамы менен Архимед көп маселелерди чечкен. Ал π санынын чектерин ($3\frac{10}{11} < \pi < 3\frac{1}{7}$), шардын жана эллипсоиддин көлөмүн, параболанын сегментинин аянтын тапкан. Геометриядан белгилүү болгон тегеректин аянтынын формуласы да Архимеддин идеясынын негизинде табылган. Бул учурда, Архимеддин методун мүнөздөөчү негизги этаптар төмөнкүдөй: 1) тегеректин аянты анын сыртынан сызылган ар кандай туура көп бурчтуктун аянтынан кичине, ал эми ичинен сызылган ар кандай туура көп бурчтуктун аянтынан чоң экендиги далилденет; 2) алардын жактарын чексиз эки эселентүүдө бул туура көп бурчтуктардын аянттарынын айырмасы нөлгө умтулаары далилденет; 3) тегеректин аянтын эсептөө үчүн бул эки туура көп бурчтуктун аянттарынын катышы алардын жактарын чексиз эки эселенткенде эмнеге умтулаарын табуу жетиштүү.

Интегралдык эсептөөлөр боюнча көп ачылыштарга ээ болгон XVII кылымдын математиктери да Архимеддин илимий эмгектери менен тааныш болушкан. Архимеддин идеяларын андан ары улантып, И. Кеплер (1571–1630) «Жаңы астрономия»

(1609-ж.) жана «Вино бочкаларынын стереометриясы» (1615-ж.) деген илимий эмгектеринде бир топ фигуралардын аянттарын (мисалы, эллипс менен чектелген фигуранын аянтын) жана нерселердин көлөмдөрүн туура эсептеген. И.Кеплер өзүнүн планеталардын кыймылы жөнүндөгү закондорун ачууда, азыркы жакындатып интегралдоонун идеясына таянган. Ушул сыяктуу изилдөөлөр италиялык математиктер Б.Кавальери (1598–1647) менен Э. Торричелли (1608–1648) тарабынан да улантылган. П. Ферма 1629-жылы $y=x^n$ (мында n бүтүн сан) ийри сызыгынын квадратурасы жөнүндөгү маселени чыгарып (б. а. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, $n \neq -1$, формуласын таап), анын негизинде оордук борборлорду табууга байланышкан бир топ маселелерди чечкен. Ньютондун окутуучусу И.Барроу (1630–1677) интегралдоо жана дифференцирлөө менен байланышкан түшүнүккө жакын барган.

Бирок XVII кылымдын математиктеринин көптөгөн ачылыштарына карабастан, интегралдык жана дифференциалдык эсептөөлөр боюнча изилдөөлөр толук аягына чыкпады. Ал үчүн дифференцирлөө жана интегралдоо операцияларынын ортосундагы эң негизги байланышты табыш керек эле. Муну И. Ньютон (1643–1727) менен Г. Лейбниц (1646–1716) ар бири өз алдынча таап, интегралдык жана дифференциалдык эсептөөлөрдүн негизин иштеп чыгышкан. Бул байланыш бизге Ньютон-Лейбництин формуласы деген ат менен белгилүү. Ошентип, интегралдоо менен дифференцирлөө эсептөөлөрүнүн негизи түзүлгөн.

Интегралдык эсептөөнүн методдору кийинки кылымдарда да өнүктү. Элементардык функцияларды изилдөөдө швейцариялык математик жана механик Л. Эйлер (1707–1783) менен И. Бернулли чоң салым кошушту. Интегралдык эсептөөнүн өнүгүшүнө орус математиктери М. В. Остроградский (1801–1862), В. Я. Буняковский (1804–1889), П. Л. Чебышев (1821–1894) да катышышты. Чебышев элементардык функциялар аркылуу туюнтулбай турган интегралдардын болушун далилдеген.

Интеграл теориясынын калыптанышы немис математиги Б.Римандын (1826–1866), француз математиктери О. Коши (1789–1857) менен Г. Дарбунун (1842–1917) илимий эмгектери менен тыгыз байланышкан.

К. Жордан аянт жана көлөм түшүнүктөрү менен байланышкан көп маселелердин талабына ылайыктап, өлчөм теориясын кийирди.

Интеграл түшүнүктөрүнүн ар кандай жалпыланышы француз математиктери А. Лебег (1875–1941), А. Данжуа (1884–1974) жана Т. Стилтьес жана советтик математик А. Я. Хинчин (1894–1959) тарабынан сунуш кылынган.

Эми терминдердин жана белгилөөлөрдүн келип чыгышына токтололу. Интеграл деген терминди Я. Бернулли (1690-жылы) киргизген. Ал сөз integro же integer деген латын сөзүнөн келип чыгышы мүмкүн. Мында integro деген сөз «баштапкы абалына келтирүү», «калыптандыруу» деп которулат. Ал эми integer деген сөз «бүтүн» дегенди билдирет. Интегралды $\int$ символу менен белгилөөнү Лейбниц 1675-жылы киргизген. Бул белги латын тамгасы S тин (summa деген сөздүн баш тамгасы) өзгөрүшү болот. Математиканын бул жаңы тармагын интегралдык эсептөөлөр (calculus integrals) деп И. Бернулли атаган. **Баштапкы функция** деген терминди француз математиги Лагранж 1797-жылы киргизген. Азыркы учурда $f(x)$ функциясынын бардык баштапкы функцияларынын көптүгүн аныкталбаган интеграл деп аташат. Лейбниц бир функциянын ар кандай эки баштапкы функциясы бири биринен турактуу санга гана айырмаланаарын байкап, ал аныкталбаган интеграл түшүнүгүн киргизген. Ал эми аныкталган интегралды $\int_a^b f(x)dx$ менен белгилөө француз математиги Ж. Б. Ж. Фурье (1768–1830) тарабынан сунуш кылынган.

I БӨЛҮМГӨ КОШУМЧА КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөндө берилген мисалдардын жоопторунун арасынан f функциянын R облусундагы F баштапкы функциясын тапкыла (85–94):

85. $f(x)=3x+4$.

а) $F(x)=4x^2+x$; б) $F(x)=1,5x^2+4x$; в) $F(x)=-1,5x^2+4x+1$;

г) $F(x)=x^2+7x$; д) $F(x)=3x^2+4x$.

86. $f(x)=4\cos 2x+6x+\dfrac{4}{x}$.

а) $F(x)=2\sin 2x+3x^2+4\ln x+6$;

б) $F(x)=4\sin 2x+x^2+7$;

в) $F(x)=4\cos 12x+6x^2+4\ln x+7$;

г) $F(x)=2\cos 2x+3x^2+4\ln x+10$;

д) $F(x)=2\sin x+3x^2+4\ln x+11$.

87. $f(x)=-12x^5+\dfrac{3}{x^3}+7$.

а) $F(x)=2x^6+\dfrac{3}{x^3}+7x+1$; б) $F(x)=-2x^6+\dfrac{3}{x^3}+7x+8$;

в) $F(x)=-2x^6+\dfrac{3}{x}+7x+3;$ *г*) $F(x)=2x^6+\dfrac{3}{x}+7x+4;$

д) $F(x)=-2x^6-\dfrac{3}{2x^2}+7x+9.$

88. $f(x)=4\sin\dfrac{x}{2}+e^x+3^x.$

а) $F(x)=4\cos\dfrac{x}{2}+e^x+3^x;$ *б*) $F(x)=-4\cos\dfrac{x}{2}+e^x+\dfrac{3^x}{\ln 3};$

в) $F(x)=-8\cos\dfrac{x}{2}+e^x+\dfrac{3^x}{\ln 3};$ *г*) $F(x)=8\cos\dfrac{x}{2}+e^x+\dfrac{3^x}{\ln 3};$

д) $F(x)=-8\cos\dfrac{x}{2}+e^x+3^x.$

89. $f(x)=\dfrac{4}{\cos^2 x}+\dfrac{3}{1+x^2}-\dfrac{5}{\sqrt{1-x^2}}.$

а) $F(x)=4\operatorname{tg}x+3\operatorname{arctg}x-5\arcsin x;$

б) $F(x)=4\operatorname{ctg}x+3\operatorname{arctg}x-5\arcsin x;$

в) $F(x)=4\operatorname{tg}x+3\operatorname{arcctg}x-5\arcsin x;$

г) $F(x)=4\operatorname{tg}x+3\operatorname{arctg}x-5\arccos x;$

д) $F(x)=4\operatorname{ctg}x+3\operatorname{arcctg}x-5\arccos x.$

90. $f(x)=\dfrac{5}{\sin^2 x}-\dfrac{4}{1+x^2}+\dfrac{6}{\sqrt{1-x^2}}+7^x.$

а) $F(x)=5\operatorname{tg}x-4\operatorname{arctg}x+6\arcsin x+\dfrac{7^x}{\ln 7};$

б) $F(x)=-5\operatorname{ctg}x-4\operatorname{arctg}x+6\arcsin x+\dfrac{7^x}{\ln 7};$

в) $F(x)=5\operatorname{ctg}x-4\operatorname{arctg}x+6\arccos x+\dfrac{7^x}{\ln 7};$

г) $F(x)=5\operatorname{ctg}x-4\operatorname{arcctg}x+6\arcsin x+\dfrac{7^x}{\ln 7};$

д) $F(x)=5\operatorname{tg}x+4\operatorname{arctg}x+6\arcsin x+\dfrac{7^x}{\ln 7}.$

91. $f(x)=12e^{4x}+5^{-2x}+\dfrac{6}{\cos^2 3x}$.

а) $F(x)=3e^{4x}-\dfrac{5^{-2x}}{\ln 5}+6\mathrm{tg}3x$; *б)* $F(x)=3e^{4x}+\dfrac{5^{-2x}}{\ln 5}+6\mathrm{tg}3x$;

в) $F(x)=3e^{4x}-\dfrac{1}{2}5^{-2x}+6\mathrm{tg}3x$; *г)* $F(x)=3e^{4x}-\dfrac{1}{2\ln 5}5^{-2x}+2\mathrm{tg}3x$;

д) $F(x)=3e^{4x}-\dfrac{1}{2\ln 5}5^{-2x}+6\mathrm{tg}3x$.

92. $f(x)=6e^{-2x}+7^{3x}+\dfrac{4}{\sin^2 4x}$.

а) $F(x)=3e^{-2x}+\dfrac{7^{3x}}{\ln 7}+4\mathrm{ctg}4x$;

б) $F(x)=3e^{-2x}+\dfrac{7^{3x}}{3\ln 7}+4\mathrm{ctg}4x$;

в) $F(x)=-3e^{-2x}+\dfrac{7^{3x}}{7\ln 3}-\mathrm{ctg}4x$;

г) $F(x)=-3e^{-2x}+\dfrac{7^{3x}}{3\ln 7}-\mathrm{ctg}4x$;

д) $F(x)=-3e^{-2x}+\dfrac{7^{3x}}{\ln 3}-\mathrm{ctg}4x$.

93. $f(x)=\dfrac{2}{1+4x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$.

а) $F(x)=2\mathrm{arctg}x-3\arcsin x$; *б)* $F(x)=\mathrm{arctg}2x-\arcsin 3x$;

в) $F(x)=2\mathrm{arctg}x-\arcsin 3x$; *г)* $F(x)=\mathrm{arctg}2x-3\arcsin x$;

д) $F(x)=2\mathrm{arctg}2x-3\arcsin 3x$.

94. $f(x)=\dfrac{4}{1+2x^2}+\dfrac{5}{\sqrt{1-3x^2}}$.

а) $F(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}x(\sqrt{2}x)+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\arcsin x(\sqrt{3}x)$;

б) $F(x)=4\mathrm{arctg}(\sqrt{2}x)+5\arcsin(\sqrt{3}x)$;

в) $F(x)=4\mathrm{arcctg}(\sqrt{2}x)+5\arccos(\sqrt{3}x)$;

г) $F(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arcctg}x(\sqrt{2}x)+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\arccos x(\sqrt{3}x)$;

д) $F(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}x(\sqrt{2}x)+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\arccos(\sqrt{3}x)$.

Төмөндө берилген мисалдардын жоопторунун арасынан f функциянын F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла (95–99).

95. $f(x)=\dfrac{3}{\cos^2 x}+3\sqrt{x}$.

а) $F(x)=3\mathrm{tg}x+2x\sqrt{x}+C$; ($C$ – каалагандай турактуу сан);

б) $F(x)=3\mathrm{ctg}x+2x\sqrt{x}+C$; в) $F(x)=3\mathrm{ctg}x+2x\sqrt{x}+C$;

г) $F(x)=3\mathrm{tg}x+2x\sqrt{x}+1$; д) $F(x)=3\mathrm{tg}x+2x\sqrt{x}+8$.

96. $f(x)=kx+b$, (k жана b – каалагандай турактуу сандар).

а) $F(x)=kx^2+bx+C$; б) $F(x)=\dfrac{k}{2}x^2+b+C$;

в) $F(x)=\dfrac{k}{2}+x^2+bx+4$; г) $F(x)=\dfrac{k}{2}x^2+bx+C$;

д) $F(x)=\dfrac{k}{2}x^2+b+3$.

97. $f(x)=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{3}{x^2}$.

а) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}+C$; б) $F(x)=\dfrac{x^3}{9}-\dfrac{3}{x}+C$;

г) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}+2$; д) $F(x)=\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{3}{x}+C$.

98. $f(x)=x^n$ (n – бүтүн сан, $n\neq-1$).

а) $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+4$; б) $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$;

в) $F(x)=x^{n+1}+C$; г) $F(x)=x^{n+1}+2$; д) $F(x)=\dfrac{x^n}{n+1}+C$.

99. $f(x)=3\sqrt{x+9}$.

а) $F(x)=3(x+9)^{\frac{3}{2}}+C$; б) $F(x)=3(x+9)^{\frac{3}{2}}+1$;

в) $F(x)=2(x+9)^{\frac{3}{2}}+1$; г) $F(x)=2(x+9)\sqrt{x+9}+C$;

д) $F(x)=2(x+9)\sqrt{x+9}+6$.

Төмөндө берилген f функциясы үчүн берилген чекитте берилген мааниге ээ болгон F баштапкы функцияны тапкыла (100–103):

100. $f(x)=6x+9$, $F(1)=15$.

а) $F(x)=3x^2+9x+1$; б) $F(x)=3x^2+9$;

в) $F(x)=3x^2+9x-1$; г) $F(x)=3x^2+9x+3$;

д) $F(x)=3x^2+12$.

101. $f(x)=2\sin x+3\cos x$, $F(\pi)=9$.

а) $F(x)=3\sin x+2\cos x+11$; б) $F(x)=3\sin x-2\cos x+10$;

в) $F(x)=3\sin x-2\cos x+7$; г) $F(x)=3\sin x-2\cos x+8$;

д) $F(x)=3\sin x-3\cos x+6$.

102. $f(x)=3x^2-\frac{2}{x^2}$, $F(1)=10$.

а) $F(x)=x^3-\frac{2}{x}+11$; б) $F(x)=x^3+\frac{2}{x}+7$;

в) $F(x)=x^3-\frac{2}{x}+4$; г) $F(x)=x^3+\frac{2}{x}+5$;

д) $F(x)=x^3-\frac{2}{x^2}+12$.

103. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+9}}$, $F(0)=9$.

а) $F(x)=\sqrt{x+9}+6$; б) $F(x)=3\sqrt{x+9}-3$;

в) $F(x)=\sqrt{x+9}+4$; г) $F(x)=2\sqrt{x+9}+4$;

д) $F(x)=2\sqrt{x+9}+3$.

Төмөндө берилген f функциясы үчүн графиги M чекити аркылуу өткөн F баштапкы функцияны тапкыла (104–107):

104. $f(x)=6x^2-4x+1$, $M(2;\,4)$.

а) $F(x)=2x^3+2x^2+x+1$; б) $F(x)=2x^3-2x^2+x+1$;

в) $F(x)=2x^3+2x^2+9$; г) $F(x)=2x^3-2x^2+x-6$;

д) $F(x)=2x^3-2x^2+x+6$.

105. $f(x)=3\cos 3x-4\sin 2x$, $M(\frac{\pi}{6}; 5)$.

а) $F(x)=\sin 3x+2\cos 2x+3$; б) $F(x)=\sin 3x-2\cos 2x+3$;

в) $F(x)=\sin 3x+2\cos 2x+4$; г) $F(x)=\sin 3x-2\cos 2x+4$;

д) $F(x)=\sin 3x+4\cos 2x+2$.

106. $f(x)=\frac{3}{\cos^2 3x}-\frac{4}{\sin^2 4x}$, $M(\frac{\pi}{4}; 2)$.

а) $F(x)=3\mathrm{tg}3x-2\mathrm{ctg}2x+1$; б) $F(x)=\mathrm{tg}3x+2\mathrm{ctg}2x+3$;

в) $F(x)=\mathrm{tg}3x-2\mathrm{ctg}2x+3$; г) $F(x)=\mathrm{tg}3x+2\mathrm{ctg}2x+4$;

д) $F(x)=\mathrm{tg}3x-2\mathrm{ctg}2x+4$.

107. $f(x)=4e^{2x}-2e^{-2x}$, $M(0; 1)$.

а) $F(x)=2e^{2x}-e^{-2x}$; б) $F(x)=2e^{2x}-e^{-2x}-1$;

в) $F(x)=2e^{2x}+e^{-2x}-2$; г) $F(x)=2e^{2x}+e^{-2x}+2$;

д) $F(x)=4e^{2x}-2e^{-2x}-1$.

Төмөнкү аныкталбаган интегралдарды тапкыла (108–116):

108. а) $\int(3x^5-2x^3+4x)dx$; б) $\int\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x}\right)dx$; г) $\int\left(\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}\right)dx$;

д) $\int(6\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x})dx$; е) $\int(9x^2-2x+7)dx$.

109. а) $\int(4\cos x-2\sin x)dx$; б) $\int(7\sin x+3\cos x)dx$;

в) $\int(e^x-3\cos 4x)dx$; г) $\int(3e^{-x}-4\sin x)dx$;

д) $\int(7+e^{-2x}+4\cos 2x)dx$; е) $\int(3+4e^{2x}-6\sin\frac{1}{2}x)dx$.

110. а) $\int(6\sqrt[3]{2x}-\frac{4}{x}+5\cdot 2^{-x})dx$; б) $\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-4e^{4x}\right)dx$;

в) $\int(x+2)^5dx$; г) $\int(x-2)^7dx$;

д) $\int\frac{4}{\sqrt{x-3}}dx$; е) $\int\frac{6}{\sqrt[4]{x+1}}dx$;

ж) $\int\left[\frac{2}{x+1}+5\cos(x+3)\right]dx$; з) $\int\left[\frac{2}{x-1}-3\sin(x-2)\right]dx$.

111. а) $\int\cos(4x+5)dx$; б) $\int\sin(3x+1)dx$;

в) $\int\cos(\frac{x}{3}+1)\,dx$; г) $\int(\sin\frac{x}{5}+2)dx$;

д) $\int e^{\frac{x+3}{2}}\,dx$; е) $\int e^{6x-7}\,dx$.

112. а) $\int e^{5x-2}\,dx$; б) $\int\frac{5}{4x-2}dx$;

в) $\int\frac{1}{3x}\,dx$; г) $\int(e^{2x}-3\cos4x)dx$;

д) $\int(e^{\frac{x}{5}}+3\sin3x)dx$; е) $\int(2\cos\frac{x}{4}-2e^{2x-\frac{1}{3}})dx$.

113. а) $\int\left[\sqrt[4]{\frac{x}{2}}+6\cos(7x+2)\right]dx$; б) $\int\left[\sqrt{\frac{x}{3}}-2\sin(3x-1)\right]dx$;

в) $\int\left(\frac{4}{\sqrt{3x-2}}+\frac{3}{2-x}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2x+1}}-\frac{5}{3x-4}\right)dx$;

д) $\int(6\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x})dx$; е) $\int(9x^2-2x+7)dx$.

114. а) $\int\frac{6x^5-4x^3+2x}{4}dx$; б) $\int\frac{5x^4+6x^2-4x+1}{6}dx$;

в) $\int(3+x)(2x-1)dx$; г) $\int(3x-2)(4+5x)dx$.

115. а) $\int(3x+2)\sqrt[3]{x}\,dx$; б) $\int(2x-1)\sqrt{x}\,dx$;

в) $\int\frac{x+2}{\sqrt[4]{x}}dx$; г) $\int\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)dx$;

д) $\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt[4]{x}}dx$; е) $\int\frac{x^2+x+3}{\sqrt[3]{x}}dx$.

116. а) $\int\sin x\cos x\,dx$; б) $\int(\sin x\cos2x-\cos x\sin2x)dx$;

в) $\int\sin3x\cos3x\,dx$; г) $\int(\sin4x\sin5x-\cos4x\cos5x)dx$.

Төмөнкү аныкталган интегралдарды эсептегиле (117–124):

117. *а)* $\int_0^2 x dx$ *б)* $\int_0^1 x^2 dx$; *в)* $\int_{-1}^2 4x dx$; *г)* $\int_1^2 3x^2 dx$;

д) $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$; *е)* $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$; *ж)* $\int_1^9 \sqrt{x} dx$; *з)* $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

118. *а)* $\int_0^{\ln 3} e^x dx$; *б)* $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$; *в)* $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$; *г)* $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$;

д) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$; *е)* $\int_0^{\pi} (3\sin 2x - 2\cos 3x) dx$.

119. *а)* $\int_{-2}^1 (3x-1) dx$; *б)* $\int_{-1}^2 (4-3x) dx$;

в) $\int_{-2}^2 (1-4x^2) dx$; *г)* $\int_{-1}^1 (3x^2+2) dx$.

120. *а)* $\int_0^1 (3x^2+2x+4) dx$; *б)* $\int_{-1}^1 (6x^2-2x+1) dx$;

в) $\int_0^9 (x-2\sqrt{x}) dx$; *г)* $\int_1^4 (2x-\frac{4}{\sqrt{x}}) dx$;

д) $\int_0^3 e^{2x} dx$; *е)* $\int_1^2 6e^{3x} dx$.

121. *а)* $\int_0^3 x(x+1)(3x-2) dx$; *б)* $\int_{-1}^0 (x+2)(x^2-1) dx$;

в) $\int_1^2 (x+\frac{1}{x})^2 dx$; *г)* $\int_2^3 \frac{3}{x^2}(1+\frac{3}{x}) dx$.

122. *а)* $\int_1^3 \frac{4x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; *б)* $\int_1^2 \frac{2x-1}{\sqrt{x}} dx$;

в) $\int_0^5 \frac{7}{\sqrt{3x+1}} dx$; *г)* $\int_2^7 \frac{9}{\sqrt{x+2}} dx$.

123. *а)* $\int\limits_{1}^{3}\frac{4}{3x-2}dx$; *б)* $\int\limits_{0}^{1}\frac{3}{2x+1}dx$;

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin(3x-\frac{\pi}{4})dx$; *г)* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x+\frac{\pi}{3})dx$.

124. *а)* $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx$; *б)* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cos x dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 2x-\sin^2 2x)dx$; *г)* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$;

д) $\int\limits_{2}^{3}\frac{x^2-3x+3}{x-1}dx$; *е)* $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2-3x+2}{x+1}dx$.

125. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $\int\limits_{0}^{x}(2t-3)dt \geq x-3$; 2) $\int\limits_{1}^{x}(2t-2)dt<1$.

Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла (126–129):

126. *а)* $y=x^2+4x$ параболасы жана Ox огу;

б) $y=x^2-3x+2$ параболасы жана Ox огу;

в) $y=(x+1)^2$ параболасы, $y=1-x$ түз сызыгы жана Ox огу.

127. *а)* $y=4-x^2$ параболасы, $y=x+2$ түз сызыгы жана Ox огу;

б) $y=4x-x^2$ параболасы, $y=4-x$ түз сызыгы жана Ox огу;

в) $y=3x^2$ параболасы, $y=1{,}5x+4{,}5$ түз сызыгы жана Ox огу.

128. *а)* $y=\sqrt{x}$ менен $y=(x-2)^2$ функцияларынын графиктери жана Ox огу;

б) $y=x^3$ менен $y=2x-x^2$ функцияларынын графиктери жана Ox огу;

в) $y=\sqrt{x}$ функциянын графиги жана $y=x$ түз сызыгы.

129. *а)* $y=x^2+1$ параболасы жана $y=3-x$ түз сызыгы;

б) $y=(x+2)^2$ параболасы жана $y=x+2$ түз сызыгы;

в) $y=\sqrt{x}$ функциянын графиги жана $y=x^2$ параболасы.

130. Төмөнкү сызыктар менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын Ox огунун айланасында айландыруудан келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла:

а) $y=3x^2+2$, $x=0$, $x=1$, $y=0$; *б)* $y=2\sqrt{x}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$;

в) $y=3\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$; *г)* $y=4-x^2$, $y=0$.

Тест

I вариант.

1. $f(x)=x^2-\sin 2x$ функциянын F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\cos 2x+C$; *б)* $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{\cos 2x}{2}+C$;

в) $F(x)=-\dfrac{\cos 2x}{2}+C$; *г)* $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$;

д) $F(x)=\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

2. $f(x)=\sqrt{3x-1}$ функциянын $(\dfrac{1}{3};\infty)$ интервалындагы F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\dfrac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1}+C$; *б)* $F(x)=\dfrac{2}{3}(3x-1)\sqrt{3x-1}+C$;

в) $F(x)=\dfrac{1}{3}(3x-1)\sqrt{3x-1}+C$; *г)* $F(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}+C$;

д) $F(x)=\dfrac{2}{3\sqrt{3x-1}}+C$.

3. $f(x)=\dfrac{6}{(4-3x)^2}$ функциянын $F(1,5)=1$ шартын канааттандырган F баштапкы функциясын тапкыла.

а) $F(x)=\dfrac{2}{(3x-4)^2}-1,5$; *б)* $F(x)=\dfrac{2}{4-3x}+5$;

в) $F(x)=\dfrac{2}{3x-4}-3$; *г)* $F(x)=\dfrac{4}{(4-3x)^2}+3$;

д) $F(x)=\dfrac{2}{4-3x}+3$.

4. $f(x)= 3x^2-2x+4$ функциянын F баштапкы функциясы үчүн $F(0)=1$ болсо, анда $F(1)$ ди тапкыла.

а) 0,5; *б)* 2; *в)* 3,5; *г)* 5; *д)* 6,5.

5. $f(x)=\cos x$ функциянын баштапкы функциясы $F(x)+C$, $g(x)=F(x)+C-f'(x)$ жана $g(0)=2$ болгондогу $g(x)=0$ тендемесин чыгаргыла.

а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; *б)* $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; *в)* $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$;

г) $-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; *д)* $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

6. Материалдык чекит координат түз сызыгы менен $a(t)=2t+3$ ылдамданууда кыймылдасын жана $v(1)=5$, $s(0)=3$ болсун. $s(1)$ ди тапкыла.

а) $\frac{35}{6}$; *б)* $\frac{40}{6}$; *в)* $\frac{45}{6}$; *г)* $\frac{50}{6}$; *д)* 10.

7. $f(x)=2x+4$, $F(0)=3$ үчүн $\begin{cases} F(x)<0 \\ F'(x)\ge 0 \end{cases}$ барабарсыздыктар системасын чыгаргыла.

а) $(-3;\,-1)$; *б)* $(-2;\,-1)$; *в)* $[-3;\,-1)$; *г)* $(-2;\,-1]$;

д) $[-2;\,-1)$.

8. $\int_{-2}^{2}(x^2-4x+3)dx$ интегралын эсептегиле

а) $\frac{52}{3}$; *б)* $\frac{20}{3}$; *в)* $\frac{23}{3}$; *г)* $\frac{26}{3}$; *д) интеграл жашабайт.*

9. $\int_{0}^{1}\frac{1}{(4x-1)^3}dx$ интегралын эсептегиле.

а) 1; *б)* 2; *в)* 3; *г)* 4; *д) интеграл жашабайт.*

10. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2x\,dx$ интегралын эсептегиле.

а) −2; *б)* −1; *в)* 0; *г)* 1; *д)* 2.

11. $\int_{0}^{1}\sqrt{5x+4}\,dx$ интегралын эсептегиле.

а) $\frac{38}{15}$; *б)* $\frac{41}{15}$; *в)* $\frac{44}{15}$; *г)* $\frac{47}{15}$; *д)* $\frac{50}{15}$.

12. $y=-x^2+3x-2$ функциянын графиги жана $y=0$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

а) $\frac{7}{6}$; *б)* $\frac{10}{6}$; *в)* $\frac{1}{6}$; *г)* $\frac{8}{3}$; *д)* $\frac{19}{6}$.

13. $\int\limits_{x}^{2x}(1-2t)dt=4x$ теңдемесин чыгаргыла.

а) $\{1; 0\}$; *б)* $\{-1; 1\}$; *в)* $\{1; 2\}$; *г)* $\{-1; 2\}$; *д)* $\{-1; 0\}$.

14. $\int\limits_{0}^{2}e^{0,5x}dx$ интегралын эсептегиле.

а) $\frac{1}{2}(e-1)$; *б)* $(e-1)$; *в)* $2(e-1)$; *г)* $3(e-1)$; *д)* $4(e-1)$.

15. $y=\sin x$, $y=\cos x$ функцияларынын графиктери жана $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ түз сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

а) $\sqrt{2}-1$; *б)* $\sqrt{2}$; *в)* $\sqrt{2}+1$; *г)* 2; *д)* 1.

16. $y=x\sqrt{x}$ функциянын графиги, $x=1$, $x=2$, $y=0$ түз сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапецияны $0x$ огунун айланасында айландыруудан келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла.

а) $\frac{3\pi}{2}$; *б)* $\frac{9\pi}{4}$; *в)* 3π; *г)* $\frac{15\pi}{4}$; *д)* $\frac{9\pi}{2}$.

II Вариант.

1. $f(x)=x^2+\cos 3x$ функциянын F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\frac{x^3}{3}+\sin 3x+C$; *б)* $F(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{\sin 3x}{2}+C$;

в) $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{\sin 3x}{3}+C$; *г)* $F(x)=3x^2-\frac{1}{3}\sin 3x+C$;

д) $F(x)=x^3-\frac{1}{2}\sin 3x+C$.

2. $f(x)=\sqrt{4x-1}$ функциянын $(\frac{1}{4}; \infty)$ интервалындагы F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\frac{1}{3}(4x-1)\sqrt{4x-1}+C$; *б)* $F(x)=\frac{1}{6}(4x-1)\sqrt{4x-1}+C$;

в) $F(x)=\frac{1}{2}(4x-1)\sqrt{4x-1}+C$; *г)* $F(x)=\frac{1}{4\sqrt{4x-1}}+C$;

д) $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{4x-1}}+C$.

3. $F(x)=\frac{4}{(5-2x)^2}$ функциянын $F(1,5)=1$ шартын канааттандырган F баштапкы функциясын тапкыла.

а) $F(x)=\frac{4}{5-2x}-1$; б) $F(x)=\frac{4}{2x-5}+3$;

в) $F(x)=\frac{2}{2x-5}$; г) $F(x)=\frac{2}{2x-5}+2$;

д) $F(x)=\frac{2}{5-2x}$.

4. $f(x)=3x^2-4x+3$ функциянын F баштапкы функциясы үчүн $F(0)=2$ болсо, анда $F(1)$ ди тапкыла

а) 2; *б)* 3; *в)* 4; *г)* 5; *д)* 6.

5. $f(x)=\sin x$ функциянын баштапкы функциясы $F(x)+C$, $g(x)=$ $=F(x)+C-f'(x)$ жана $g(\frac{\pi}{2})=2$ болгондогу $g(x)=0$ теңдемесин чыгаргыла.

а) $2n\pi,\ n\in Z$; *б)* $n\pi,\ n\in Z$; *в)* $\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in Z$;

г) $\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z$; *д)* $-\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z$.

6. Материалдык чекит координат түз сызыгы менен $a(t)=3t+2$ ылдамдануудa кыймылдасын жана $v(1)=4$, $s(0)=2$ болсун. $s(1)$ ди тапкыла.

а) 1; *б)* 2; *в)* 3; *г)* 4; *д)* 5.

7. $f(x)=2x+6$, $F(0)=5$ үчүн $\begin{cases} F(x)<0 \\ F'(x)>0 \end{cases}$ барабарсыздыктар системасын чыгаргыла.

а) $(-5;\ -3)$; *б)* $[-5;\ -3)$; *в)* $(-3;\ -1)$; *г)* $(-5;\ -1)$;

д) $(-5;\ -1]$.

8. $\int\limits_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx$ интегралын эсептегиле.

а) 2; *б)* 4; *в)* 6; *г)* 8; *д) интеграл жашабайт.*

9. $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{(3x-1)^2}dx$ интегралын эсептегиле.

а) 2; *б)* 3; *в)* 4; *г)* 5; *д) интеграл жашабайт.*

10. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 2x dx$ интегралын эсептегиле.

а) −2; *б)* −1; *в)* 0; *г)* 1; *д)* 2.

11. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{9-5x}dx$ интегралын эсептегиле.

а) $\frac{32}{15}$; *б)* $\frac{7}{3}$; *в)* $\frac{38}{15}$; *г)* $\frac{41}{15}$; *д)* $\frac{44}{15}$.

12. $y=-x^2+4x-3$ функциянын графиги жана $y=0$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

а) $\frac{7}{6}$; *б)* $\frac{11}{6}$; *в)* $\frac{1}{3}$; *г)* $\frac{2}{3}$; *д)* $\frac{4}{3}$.

13. $\int\limits_{x}^{2x}(2-2t)dt=5x$ тендемесин чыгаргыла.

а) $\{-1; 0\}$; *б)* $\{-1; 13\}$; *в)* $\{2; -1\}$; *г)* $\{2; 0\}$; *д)* $\{-1; 3\}$.

14. $\int\limits_{0}^{3}e^{\frac{1}{3}x}dx$ интегралын эсептегиле.

а) $\frac{1}{3}(e-1)$; *б)* $\frac{1}{2}(e-1)$; *в)* $e-1$; *г)* $2(e-1)$; *д)* $3(e-1)$.

15. $y=\sin x$, $y=\cos x$ функцияларынын графиктери жана $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{2}$ түз сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

а) 3; *б)* 2; *в)* $3-\sqrt{2}$; *г)* $2-\sqrt{2}$; *д)* $\sqrt{2}-1$.

16. $y=x\sqrt{x}$ функциянын графиги $x=2$, $x=3$, $y=0$ түз сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапецияны Ox огунун айланасында айландыруудан келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла.

а) $\frac{61}{4}\pi$; *б)* $\frac{65}{4}\pi$; *в)* $\frac{69}{4}\pi$; *г)* $\frac{73}{4}\pi$; *д)* $\frac{77}{4}\pi$.

III Вариант.

1. $f(x)=x^3-\sin 4x$ функциянын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\frac{x^3}{3}+\cos 4x+C$; *б)* $F(x)=x^4+\cos 4x+C$;

в) $F(x)=\frac{x^4}{4}+\cos 4x+C$; *г)* $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x+C$;

д) $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{1}{4}\cos 4x+C$.

2. $f(x)=\sqrt{2x-1}$ функциянын $(\frac{1}{2};\infty)$ интервалындагы F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\frac{1}{2}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$; *б)* $F(x)=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$;

в) $F(x)=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$; *г)* $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}+C$;

д) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+C$.

3. $F(x)=\frac{4}{(3-2x)^2}$ функциянын $F(1)=1$ шартын канааттандырган F баштапкы функциясын тапкыла.

а) $F(x)=\frac{2}{3-2x}-1$; *б)* $F(x)=\frac{3}{3-2x}-2$;

в) $F(x)=-\frac{1}{3-2x}+2$; *г)* $F(x)=-\frac{2}{3-2x}+3$;

д) $F(x)=\frac{1}{3-2x}$.

4. $f(x)=3x^2-4x+1$ функциянын F баштапкы функциясы үчүн $F(0)=3$ болсо, анда $F(-1)$ ди тапкыла

а) -1; *б)* 0; *в)* 1; *г)* 2; *д)* 3.

5. $f(x)=\cos x$ функциянын баштапкы функциясы $F(x)+C$, $g(x)=F(x)+C-2f'(x)$ жана $g(0)=-3$ болгондогу $g(x)=-4$ теңдемесин чыгаргыла.

а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; *б)* $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; *в)* $-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$;

г) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$;   *д)* $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

6. Материалдык чекит координат түз сызыгы менен $a(t)=4t+3$ ылдамдануудa кыймылдасын жана $v(1)=4$, $s(0)=1$ болсо, $s(1)$ ди тапкыла.

а) $\frac{5}{2}$;   *б)* $\frac{10}{3}$;   *в)* $\frac{13}{6}$;   *г)* 5;   *д)* $\frac{35}{6}$.

7. $f(x)=2x+6$, $F(0)=5$ үчүн $\begin{cases} F(x)\le 0 \\ F'(x)>0 \end{cases}$ барабарсыздыктар системасын чыгаргыла.

а) $(-3;\,-1)$;   *б)* $(-2;\,-1)$;   *в)* $[-3;\,-2)$;   *г)* $(-3;\,-1]$;   *д)* $(-2;\,-1]$.

8. $\int\limits_{-1}^{1}(x^2-6x+2)dx$ интегралын эсептегиле.

а) $\frac{11}{3}$;   *б)* $\frac{14}{3}$;   *в)* $\frac{17}{3}$;   *г)* $\frac{20}{3}$;   *д)* $\frac{23}{3}$.

9. $\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{(2x-1)^3}dx$ интегралын эсептегиле.

а) 2;   *б)* 2,5;   *в)* 3;   *г) интеграл жашабайт;*   *д)* -1.

10. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 4x dx$ интегралын эсептегиле.

а) $-\frac{1}{2}$;   *б)* -1;   *в)* 0;   *г)* $\frac{1}{2}$;   *д)* 1.

11. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{8x+1}dx$ интегралын эсептегиле.

а) $\frac{13}{6}$;   *б)* $\frac{17}{6}$;   *в)* $\frac{49}{6}$;   *г)* $\frac{52}{6}$;   *д)* $\frac{55}{6}$.

12. $y=-x^2-3x-2$ функциянын графиги жана $y=0$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

а) $\frac{1}{6}$;   *б)* $\frac{5}{6}$;   *в)* $\frac{1}{3}$;   *г)* $\frac{13}{6}$;   *д)* $\frac{8}{3}$.

13. $\int\limits_{2x}^{3x}(1-2t)dt=6x$ теңдемесин чыгаргыла.

а) $\{-1;\ 1\}$; *б*) $\{-1;\ 0\}$; *в*) $\{1;\ 0\}$; *г*) $\{0;\ 2\}$; *д*) $\{1;\ 2\}$.

14. $\int_0^4 e^{\frac{1}{4}x}dx$ интегралын эсептегиле.

а) $4(e-1)$; *б*) $2(e-1)$; *в*) $(e-1)$; *г*) $3(e-1)$; *д*) $(e-1)$.

15. $y=\sin x$, $y=\cos x$ функцияларынын графиктери жана $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\pi$ түз сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

а) $\sqrt{2}-1$; *б*) 1; *в*) $\sqrt{2}$; *г*) $1+\sqrt{2}$; *д*) $2+\sqrt{2}$.

16. $y=x\sqrt{x}$ функциянын графиги, $x=0$, $x=1$, $y=0$ түз сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапецияны $0x$ огунун айланасында айландыруудан келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла.

а) $\frac{\pi}{6}$; *б*) $\frac{\pi}{5}$; *в*) $\frac{\pi}{4}$; *г*) $\frac{\pi}{3}$; *д*) $\frac{\pi}{2}$.

Айрым тез-тез кездешип туруучу транцендентгик функциялардын ичинен көп изилдөөлөргө, адегенде көрсөткүчтүү функция жол ачат.

Л. Эйлер

II бөлүм

КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМАЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

§ 1. Көрсөткүчтүү функция

1. Көрсөткүчтүү функция түшүнүгү. Көрсөткүчтүү функциянын аныкталышы даража түшүнүгүнүн негизинде келип чыгат. Ал түшүнүк менен VII–IX класстарда таанышып, анын касиеттерин тактап өткөнбүз. Анда биз a^n туюнтмасы a – оң санынын даражасы деп аталарын аныктаганбыз, мында n – каалагандай чыныгы сан.

Даражанын негизги касиеттерин эске түшүрөлү. Каалаган r, s сандары жана ар кандай a, b оң сандары үчүн төмөнкү барабардыктар орун алат:

$$a^r a^s = a^{r+s} \qquad (1),$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad (2),$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \qquad (3),$$

$$(ab)^r = a^r b^r \qquad (4),$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad (5),$$

$$a^r > 0 \qquad (6),$$

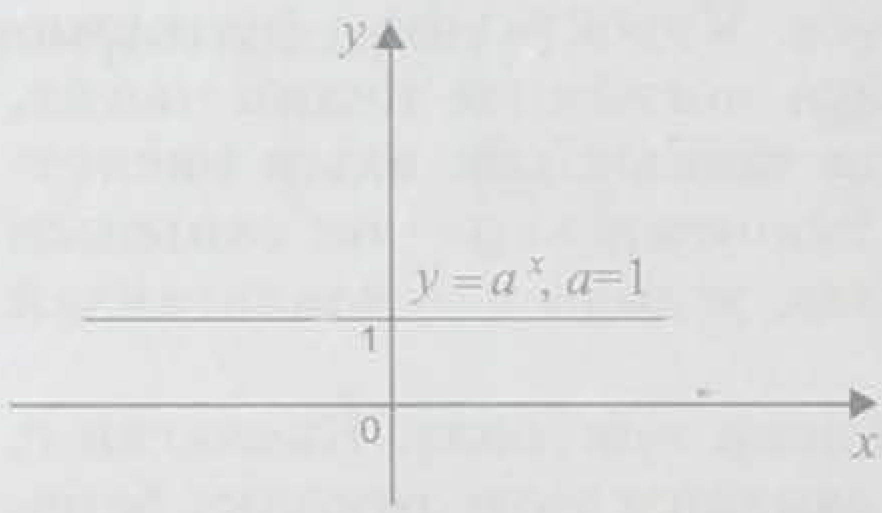
эгер $a > 1$, $r > 0$ болсо, анда $a^r > 1$ (7).

Мындан тышкары $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{3}}$ *ж. б. жалпылап айтканда $y = x^{\alpha}$ түрүндөгү даражалуу функцияларды үйрөнгөнбүз, мында α – берилген оң сан, ал эми x – өзгөрүлмө чоңдук.*

Турмушта дагы: у $= 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ж. б., жалпылап айтканда $y = a^x$ түрүндөгү функциялар колдонулат, мында a – берилген оң сан, ал эми x – өзгөрмө чоңдук. Мындай функциялар *көрсөткүчтүү* функциялар деп аталат, анткени, көрсөткүчтүү функцияда аргумент даража көрсөткүч катары каралып, ал эми даражанын негизи болуп берилген оң сан алынгандыгы менен түшүндүрүлөт.

А н ы к т а м а: **a – бирге барабар эмес кандайдыр бир берилген оң сан (б. а. $a > 0$, $a \neq 1$) болгондо $y = a^x$ туюнтмасы менен берилген функция *көрсөткүчтүү функция* деп аталат.**

Көрсөткүчтүү функциянын аныктамасында a – саны оң деп көрсөтүлдү. Бул каалагандай даража көрсөткүчү бар терс сан аныкталбай тургандыгын түшүндүрөт. Маселен, качан $a = -1$ жана $x = \frac{1}{2}$ болгондо, $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ болуп, a^x чыныгы мааниге ээ болбойт. Ал эми $a = 1$ болгон учурда $y = a^x$ функциясы $y = 1$ түрүнө ээ болот, б. а. x тин бардык чектүү маанилеринде $a^x = 1^x = 1$ болуп, дайыма турактуу болгондуктан $a \neq 1$ деп алынат. Мындай функция өзгөчө айырмаланбайт (1-чийме). Ошондуктан, мындан ары $y = a^x$ көрсөткүчтүү функциясы жөнүндө сөз болгондо ар дайым $a > 0$ жана $a \neq 1$ деп кабыл алабыз.



1-чийме.

2. Көрсөткүчтүү функциянын касиеттери. Көрсөткүчтүү функция төмөнкү касиеттерге ээ.

1°. a^x функциясынын *аныкталуу облусу* бардык чыныгы сандардын R көптүгү.

Бул касиет a^x тин даражасы каалаган $x \in R$ үчүн аныктала тургандыгы менен түшүндүрүлөт.

2°. a^x функциясынын *маанилеринин облусу* – бардык оң сандардын R_+ көптүгү $-\infty < x < \infty$ болгондо $0 < y < \infty$, мындайча айтканда функция *жалаң оң маанилерге гана ээ болот.*

Буга ишениш үчүн $a^x = b$ теңдемеси, качан $b \leq 0$ болгондо тамырга ээ болбостугун жана качан $b > 0$ болгондо тамырга ээ болоорун көрсөтүш керек, мында $a > 0$, $a \neq 1$. Бул теңдеме $b > 0$ болгон учурда тамырга ээ болору жогорку математиканын курсунда далилденет.

Геометриялык жактан болсо бул $y = a^x$ функциясынын графиги качан $a > 1$ болгон учурда x огунан жогору жайланышкандыгын жана ал окко жарыш болуп, андан жогору жаткан каалаган $y = b$ түз сызыгы ал графикти кесип өтө тургандыгын түюндурат.

3°. a^x функциясы жогорку жалпы эки касиеттен башка дагы $a > 1$ жана $0 < a < 1$ үчүн өзүнчө касиеттерге ээ. *Биринчиден,* a^x функциясы качан $a > 1$ болгондо (2-чийме):

а) функция өсөт;

б) качан $x = 0$ болгондо функциянын мааниси 1 ге барабар;

в) эгер $x>0$ болсо, анда $a^x > 1$;

г) эгер $x<0$ болсо, анда $0 < a^x < 1$.

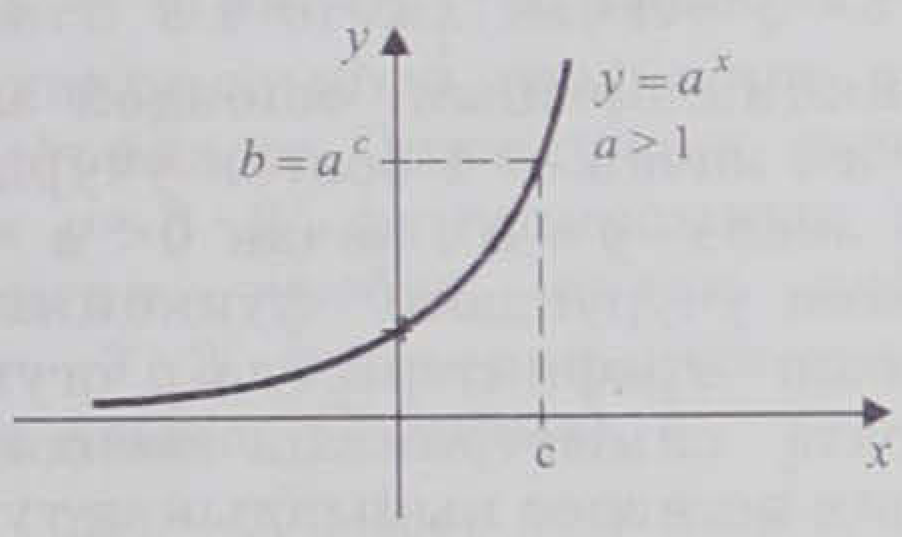
Экинчиден, a^x функциясы качан $0<a<1$ болгондо (3-чийме):

а) функция кемийт;

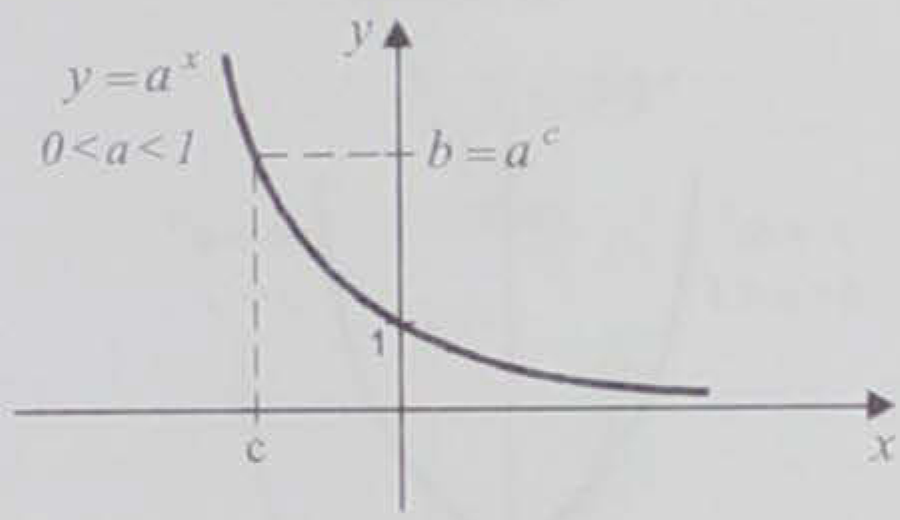
б) качан $x = 0$ болгондо функциянын мааниси 1 ге барабар;

в) эгер $x>0$ болсо, анда $0 < a^x < 1$;

г) эгер $x<0$ болсо, анда $a^x > 1$.



2-чийме.

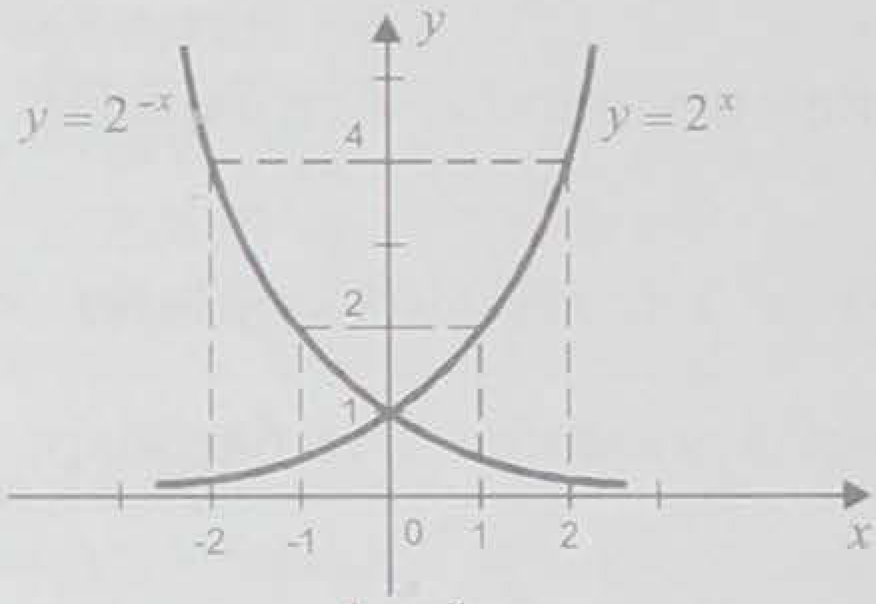


3-чийме.

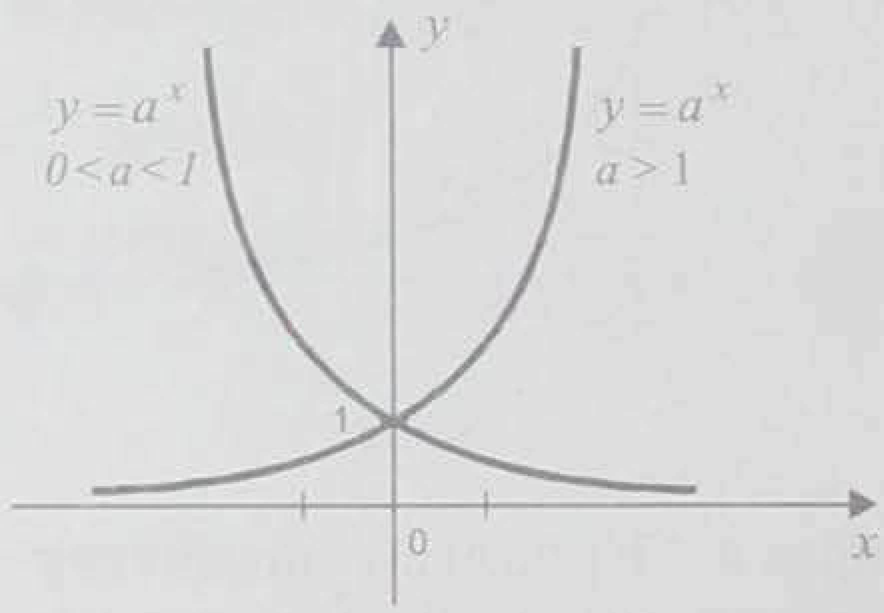
3. Көрсөткүчтүү функциянын графиги. Каралган касиеттерди пайдаланып, көрсөткүчтүү функциянын графигин түзөлү. Мисал катары бир эле чиймеге $y = 2^x$ жана $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларынын графиктерин сызалы. Ал үчүн алдынала бул функциялардын маанилеринин таблицаларын түзүп алабыз. x тин маанилери катары $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ чекиттерин тандап, y тин тиешелүү маанилерин таап, таблицага түшүрөбүз:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...

Таблицанын негизинде $y = 2^x$ *функциясынын графиги* (0; 1) *чекити аркылуу өтүп Ох огунан жогору жайланышкандыгын көрөбүз.* Эгер $x<0$ болуп жана кемий берсе, анда график *Ох* огуна тез жакындайт (бирок аны кесип өтпөйт); эгер $x > 0$ болуп жана өсүп турса, анда график жогору карай тез өсүүчү болот (4-чийме). Каалаган $y = a^x$ функциясынын графиги да, качан $a>1$ болсо ушундай эле түргө ээ болорун айтканбыз (5-чийме). $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *функциясынын графиги да* (0; 1) *чекити аркылуу өтүп жана 0х огунан жогору жайланышкан болот.* Эгер $x>0$ болуп жана өсүп турса, анда график *Ох* огуна (аны кесип өтпөстөн) тез жа-



4-чийме.



5-чийме.

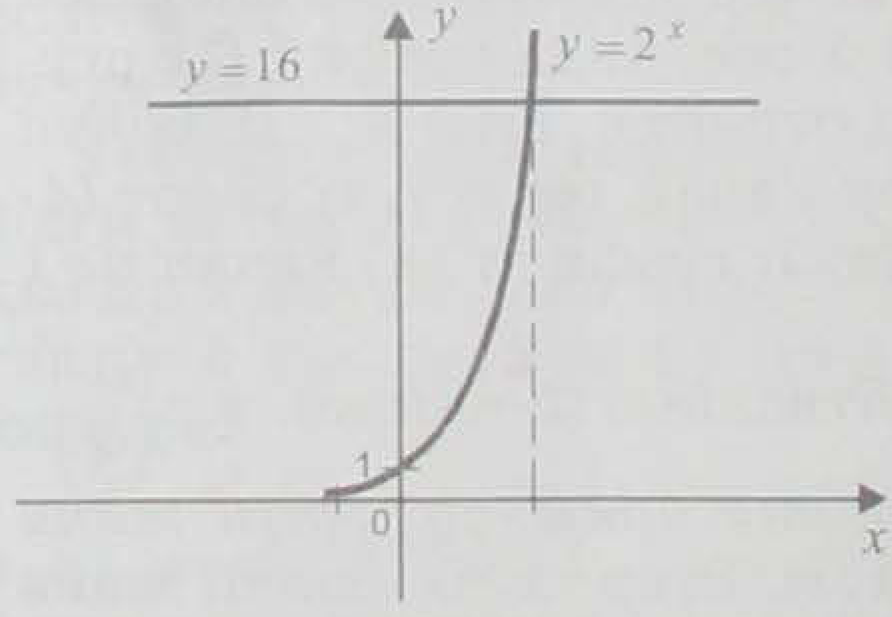
кындай берет; эгер $x<0$ болуп жана кемий берсе, анда график жогору карай тез өсүүчү болот (2-чийме). Каалаган $y=a^x$ функциясынын да графиги, качан $0<a<1$ болсо ушундай эле түргө ээ боloорун билебиз (5-чийме).

Эскертүү: Каралып өткөн $y=2^x$ жана $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ же $y=2^{-x}$ функцияларынын, ошондой эле $y=a^x$, качан $a>1$ болгон учурдагы жана $y=a^x$, качан $0<a<1$ болгон учурундагы функцияларынын графиктери да y огуна карата симметриялаш экендиктерин негиздөө кыйындыкка турбайт. Аны өз алдынарча негиздеп чыгууга аракеттенгиле.

Жаратылыштын: реактивдүү ажыроо, дененин муздашы, абанын басымынын бийиктикке көз карандылыгы ж. б. у. с. көптөгөн кубулуштарынын жүрүшүн математикалык жол менен негиздөөдө көрсөткүчтүү функция колдонулат.

Алсак, жандуу организмдердин колониялары, жекече алганда бактериялар тукумдоонун негизинде көбөйүшөт. Эгер бирдей эле убакыт ичинде жандуу организмдер бирдей эле санга көбөйүп турса, анда N организм саны, байкоо башталгандан тартып t убактысы өткөндөн кийин $N=na^t$ формуласы аркылуу туюнтулат, мында n – организмдин убакыттын алгачкы учурундагы саны, a – туруктуу чоңдук, бул ($a>1$) сан берилген колониянын тез көбөйүшүн мүнөздөйт. Ал организмдин биологиялык түрүнө жана сырткы шарттарга көз каранды болот. Маселен, холераны пайда кылуучу бактерия үчүн a саны төрткө жакын.

1-маселе: $2^x=16$ теңдемесин чыгаргыла.



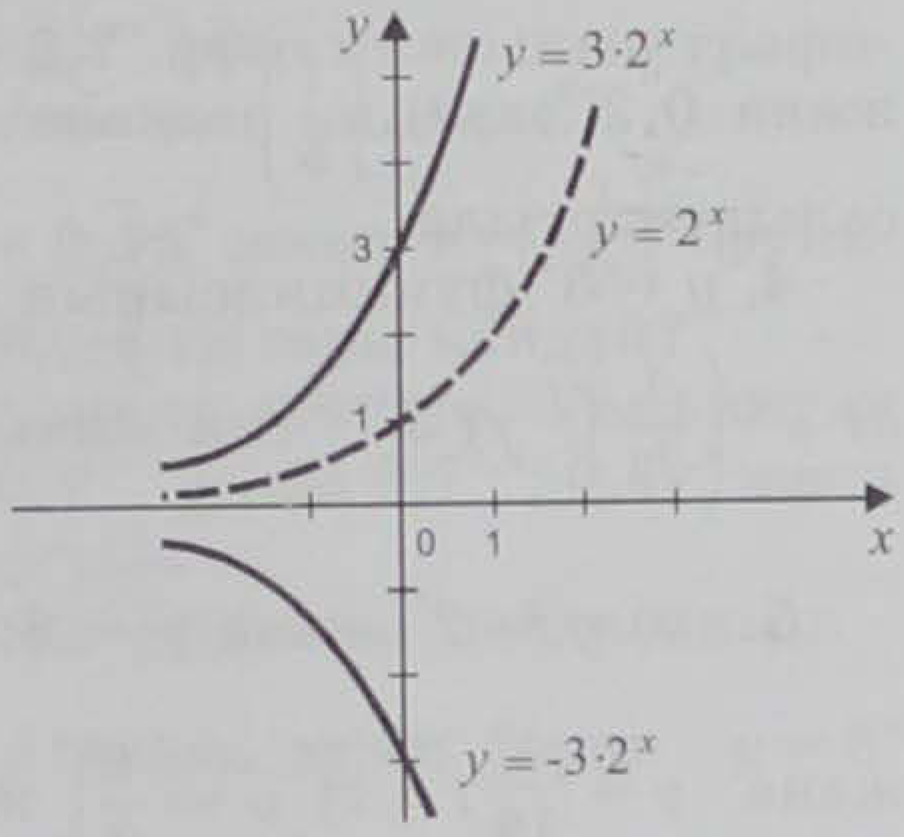
6-чийме.

Чыгаруу. Көрсөткүчтүү функциянын касиети боюнча берилген теңдеме тамырга ээ, анткени $16>0$. Тамырларынын бири болуп $x=4$ эсептелет, себеби $2^x=16$. Башка тамырлары жок, анткени $y=2^x$ функциясы бүтүндөй сан огунда өсөт жана ошондуктан, качан $x>4$ болгондо $2^x=16$ жана качан $x<4$ болгондо $2^x<16$ (6-чийме).

2-м а с е л е: а) $y=-3\cdot 2^x$; б) $y=2^{|x|}$ функцияларынын графиктерин чийип көрсөткүлө.

Ч ы г а р у у. а) $y=-3\cdot 2^x$. $a=2>1$ болгондуктан $y=2^x$ өсүүчү функция. Анын графиги 7-чиймеде штрихтелген сызык аркылуу көрсөтүлгөн.

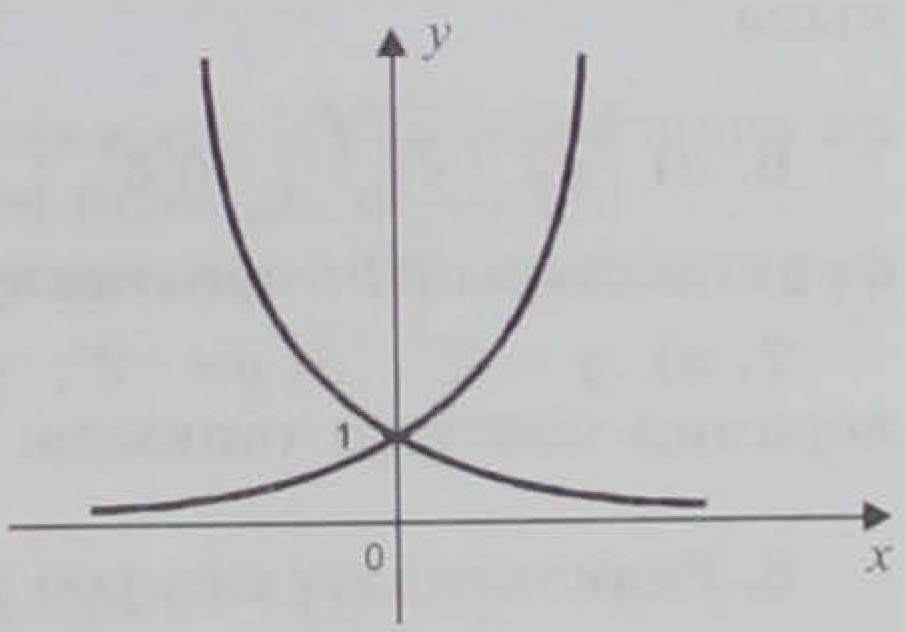
$y=-3\cdot 2^x$ функциясынын графиги Ox огуна карата $y=3\cdot 2^x$ функциясынын графигине симметриялаш. Ошондуктан, адегенде $y=3\cdot 2^x$ функциясынын графигин түзөбүз, андан кийин $y=-3\cdot 2^x$ функциясынын графиги алынат (7-чийме).



7-чийме.

б) $y=2^{|x|}$. Эгер $x\geq 0$ болсо, анда $y=2^x$. Качан $x\geq 0$ болгон учурдагы $y=2^x$ функциясынын графиги 2-чиймеде көрсөтүлгөн.

$y=2^{|x|}$ жуп функция болгондуктан анын графиги Oy огуна карата симметриялуу болот. Ал 8-чиймеде көрсөтүлгөн.



8-чийме.

3-м а с е л е: а) $0{,}13^{0,5}$; б) $3{,}7^{-0,4}$ сандарын бир менен салыштыргыла.

Ч ы г а р у у. а) $y=0{,}13^x$ кемүүчү функция, анткени $0<0{,}13<1$ (5-чиймени кара). Эгер $x>0$ болсо, анда $y<1$, ошондуктан $0{,}13^{0,5}<1$.

б) $y=3{,}7^x$ өсүүчү функция (5-чиймени кара). Эгер $x<0$ болсо, анда $y<1$, ошондуктан $3{,}4^{-0,4}<1$.

Көнүгүүлөр

1. а) $y=3^x$; б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; в) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ функцияларынын графигин түзгүлө.

2. а) $y=4^x$; б) $y=0{,}4^x$; в) $y=0{,}2^x$; г) $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$; д) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ функцияларынын касиеттерин аныктагыла жана алардын графиктерин чийгиле.

3. Көрсөткүчтүү функциянын өсүүчү жана кемүүчү касиеттерин пайдаланып (ооз эки):

а) $1{,}7^3$ жана 1; б) $0{,}3^2$ жана 1; в) $3{,}2^{1,5}$ жана $3{,}2^{1,6}$; г) $0{,}2^{-3}$

жана $0{,}2^{-2}$; *д)* $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ жана $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$; *е)* 3^{π} жана $3{,}2^{3,14}$ сандарын салыштыргыла.

4. $y = 3^x$ функциясынын графигин пайдаланып: *а)* $\sqrt{3}$, *б)* $3^{\frac{2}{3}}$; *в)* $y=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; *г)* $3^{-1,5}$ тин жакындатылган маанилерин тапкыла.

5. *а)* $y = 2^x$ жана $y = 8$; *б)* $y = 3^x$ жана $y = \frac{1}{3}$; *в)* $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ жана $y = \frac{1}{16}$; *г)* $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ жана $y = 9$ функцияларынын графиктеринин кесилиш чекиттеринин координаталарын тапкыла.

6. *а)* $\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^x$; *б)* 3^{x-1}; *в)* $2^{\sqrt{x-1}}$; *г)* $2^{\frac{1}{x}}$; *д)* $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$; *е)* $3^{\sqrt{1-x^2}}$ функцияларынын аныкталуу облусун тапкыла.

7. *а)* $y = 2^{|x|}$; *б)* $y= -2^x$; $y = |3^x - 3|$ функцияларынын маанилеринин көптүгүн тапкыла.

8. Радиактивдүү ажыроо закону $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ формуласы аркылуу аткарылат, мында m – радиактивдүү заттын t убактысындагы массасы, m_0 – анын $t = 0$ учурундагы массасы жана T – жарым ажыроо мезгили.

Идишке массалары 50 *г* жана 20 *г* болгон эки бөлүк радиактивдүү заттар салынган. Биринчи заттын жарым ажыроо мезгили – 1 *с*, ал эми экинчисиники – 2 *с*.

а) Ар бир заттын массасынын өзгөрүү графигин чийгиле.

б) Бул заттардын кошулган массасынын өзгөрүү графигин чийгиле.

9. Косманавтиканын негиздөөчүсү К. Э. Циалковскийдин ойлоп тапкан закону боюнча массасы (күйүүчүсү жок) m болгон ракета v ылдамдыгын алыш үчүн күйүүчүнүн саны

$$M = m\left(10^{0,43\frac{v}{v_1}} - 1\right)$$

формуласы аркылуу туюнтулат, мында v_1 – күйүүчүнүн күйүп бүтүп, ракетанын кыймылдаткычынын сопласынан (конус сымал чоргосунан) чыккан жалынынын ылдамдыгы (абанын каршылыгын жана жердин тартуу күчүн эсепке албаганда). Эгер күйүүчү зат күйүп бүтүп, сопладан чыгып жаткан жалындын ылдамдыгы 4,5 *км/сек* болсо, массасы 1,2 т болгон ракетага экинчи космостук 11,2 *км/сек* ылдамдыгын бериш үчүн канча күйүүчү зат кетерин эсептегиле.

10. Бир чиймеге $y = 2^x$ жана $y = 3^x$ функцияларынын графиктерин схемалап көрсөткүлө. $y = 2,7^x$ функциясынын графиги анда кандай жайланышаарын болжолдоп чийгиле.

11. *а)* $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ жана $y = 1,5^x$; *б)* $y = 0,75^x$ жана $y = \left(1\frac{1}{3}\right)^x$ функцияларынын графиктери өз ара жайланыштары кандай?

12. $y = 0,7^x$ функциясынын графигин түзгүлө. Графиктин жардамы менен $0,7^{-3,2}$ жана $0,7^{-1,7}$; $0,7^{-1,5}$ жана $0,7^{1,6}$; $0,7^{0,3}$ жана $7^{2,3}$ туюнтмаларын салыштырып көргүлө.

13. $y = a^x$ функциясынын жалпы касиетин пайдаланып:

а) x ке -2; -1; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$; 1; 2 маанилерин берип $y = 3^x$ жана $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функцияларынын графиктерин бир чиймеге чийип чыккыла.

б) Бул жогорку эки функцияга тең жалпы касиетти жана ар биринин өзүнө тиешелүү касиеттерин баяндап бергиле.

в) $y = 2^{-x}$; $y = 2^{2x}$; $y = 2^{x-1}$ функцияларынын графиктерин түзгүлө.

Суроолор

1. Көрсөткүчтүү деп кандай функция аталат?
2. Эмне үчүн a терс болгондо көрсөткүчтүү функция $y=a^x$ аныкталбайт?
3. Эмне үчүн, качан $a=0$ жана $a=1$ болгондо көрсөткүчтүү функция $y= a^x$ аныкталбайт?
4. Көрсөткүчтүү функциянын аныкталуу облусу деп эмнени түшүнөбүз?
5. Эмне үчүн көрсөткүчтүү функциянын маанилеринин облусу жалан гана оң болот?
6. $y = a^x$ функциясынын, качан $a=1$ болгондогу касиеттерин санап жана графигин сызып көрсөт.
7. $y = a^x$ функциясынын, качан $0< a<1$ болгондогу касиеттерин санап жана графигин сызып көрсөт.
8. $y = 2^x$ функциясы өсүүчү экендигин далилде.

§ 2. Көрсөткүчтүү теңдемелер жана барабарсыздыктар

Көрсөткүчтүү теңдемелерге жана барабарсыздыктарга б. а. белгиси даража көрсөткүчүндө камтылган тендемелерге жана барабарсыздыктарга чыгаруу ыкмалары колдонулган айрым мисалдар келтиребиз.

1. Көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгаруу

$$a^x=b$$

түрүндөгү тендеме көрсөткүчтүү теңдеменин эң жөнөкөйү, мында x – белгисиз чоңдук, a – бирге барабар эмес берилген оң сан (кыскача $a \neq 1$, $a>0$).

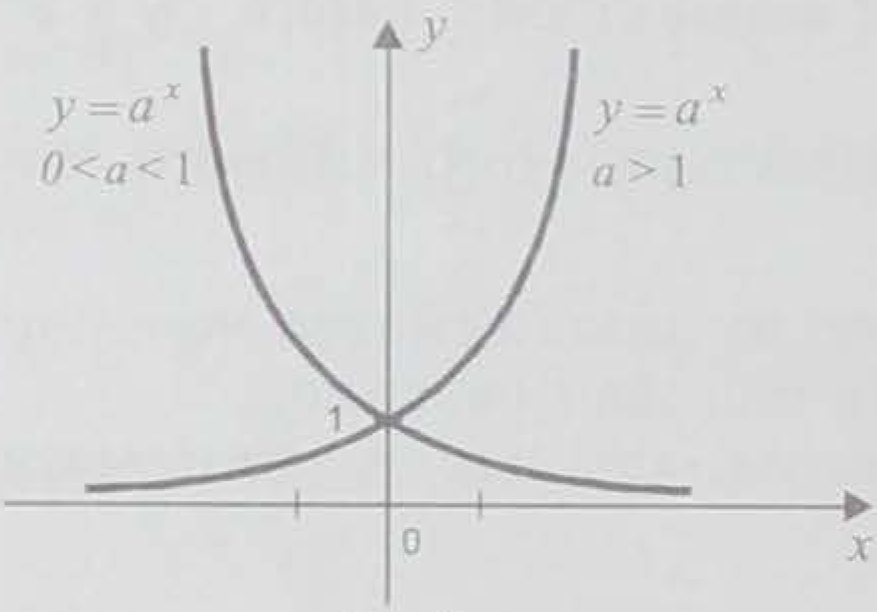
Эгер $b \le 0$ болсо, анда бул теңдеме чыгарылышка ээ болбойт, анткени a^x дайыма оң мааниде болот дегенбиз.

Эгер $b > 0$ болсо, анда x тин бул теңдемени канааттандыруучу бир гана мааниси болот.

Эгер b санын a^c түрүнө келтирип алсак анда көпчүлүк учурда көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгаруу

$$a^x = a^c$$

түрүндөгү теңдемелерди чыгарууга алып келет. Жогорку корутундуга ылайык бул теңдеме $x = c$ деген жалгыз гана чыгарылышка ээ экендигин аныктайт. Анын график түрүндөгү чыгарылышы 9-чиймеде чагылдырылган.



9-чийме.

Жалпысынан алганда, эгер $a > 0$, $a \neq 1$ болсо, анда

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

теңдемесин $f(x) = g(x)$ теңдемеси менен алмаштырууга болот. Чынында эле көрсөткүчтүү функция монотондуу бир калыпта өсүүчү же бир калыпта кемүүчү болгондуктан алардын негиздеринин барабардыгынан көрсөткүчтөрүнүн барабардыгы келип чыгат. Тескерисинче, эгер $f(x) = g(x)$ болсо, анда $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ аткарылат.

а) Бирдей негизге келтирип чыгаруу

1-м а с е л е. $5^{3x-2} = 5^{10-x}$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Бул сыяктуу теңдемелердин чыгарылыштары даражанын мындайча касиетине негизделген: *эгер бирден айырмаланып турган бир эле оң сандын эки даражасы барабар болсо, анда алардын көрсөткүчтөрү да барабар болушат.* Маселеде негиздери бирдей болгондуктан даражанын бул касиети төмөнкүнү берет: $3x - 2 = 10 - x$, мындан $x = 3$.

Т е к ш е р ү ү. $x = 3$ болгондо $5^{3x-2} = 5^7 = 46875$, $5^{10-x} = 5^7 = 46875$.

Демек, $x = 3$ берилген теңдеменин тамыры.

Жообу: $x = 3$.

2-м а с е л е. $49^x = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Бул теңдемени бир негизге келтирип жогоркудай эле чыгарабыз. Чынында эле $49^x = (7^2)^x = 7^{2x}$, $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} = \left(7^{-1}\right)^{x^2} = 7^{-x^2}$ болгондуктан $7^{2x} = 7^{-x^2}$, мындан $2x = -x^2$, же $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Т е к ш е р ү ү. x тин бул эки мааниси тең берилген теңдемени канагаттандыраары көрүнүп турат.

Жообу: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

3-м а с е л е. $2^{3x} \cdot 3^x = 576$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Мында $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$, $576 = 24^2$ болгондуктан берилген теңдемени $8^x \cdot 3^x = 24^2$ түрүнө келтирип алсак болот, же $24^x = 24^2$, мындан $x = 2$.

Жообу: $x = 2$.

б) Жаңы өзгөрүлмө киргизүү жолу менен чыгаруу. Бул учурда көрсөткүчтүү теңдеме алгебралык теңдемеге келтирилет.

4-м а с е л е. $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Мында $2^{2+x} = 2^2 \cdot 2^x$, $2^{2-x} = 2^2 \cdot 2^{-x} = \frac{2^2}{2^x}$ болгондуктан берилген теңдемени $4 \cdot 2^x - \frac{4}{2^x} - 15 = 0$ же $4 \cdot 2^{2x} - 15 \cdot 2^x - 4 = 0$ түрүндө жазып алууга болот. $2^x = y$ деп жаңы өзгөрүлмө киргизебиз. Анда $4y^2 - 15y - 4 = 0$ деген квадраттык теңдемеге ээ болобуз. Бул теңдеме $y_1 = 4$, $y_2 = -\frac{1}{4}$ деген эки тамырды берет.

Бирок, $y = 2^x$. Демек, эгер бул теңдеме тамырга ээ болсо, анда ал же $2^x = 4$ теңдемесин, же $2^x = -\frac{1}{4}$ теңдемесин канааттандырмак. Бул теңдемелердин биринчиси гана $x = 2$ деген тамырга ээ. Экинчи теңдеме болсо чыгарылышка ээ болбойт, себеби x тин каалаган маанисинде 2^x туюнтмасы терс мааниге ээ болушу мүмкүн эмес. Ошентип, $x = 2$ деп алабыз.

Т е к ш е р ү ү. $x = 2$ болгондо $2^{2+2} - 2^{2-2} - 15 = 16 - 1 - 15 = 0$. Демек, $x = 2$ – берилген теңдеменин тамыры.

Жообу: $x = 2$.

5-м а с е л е. $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Мурункудай эле $y = 2^x$ өзгөрүлмөсү менен алмаштырабыз. $4^x = (2^x)^2 = y^2$ экендигин эске алып, берилген теңдемени $y^2 - 5y + 4$ түрүндө алабыз.

Бул квадраттык теңдемени чыгарсак: $y_1 = 1$ жана $y_2 = 4$. Эми $2^x = 1$ жана $2^x = 4$ теңдемелерин чыгарып, $x = 0$ жана $x = 2$ ни алабыз.

Жообу. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

в) Жалпы көбөйтүүчүсүн кашаадан алып чыгуу жолу менен чыгаруу

6-м а с е л е. $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Бул теңдемени $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$ түрүндө жазып алабыз, мындан $2^{x-2}(3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2}(5^2 - 2)$, $2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$, демек, $x - 2 = 0$.

Жообу: $x = 2$

7-м а с е л е. $5^{2x-1} - 5^{2x} + 2^{2x} + 2^{2x+2} = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Бул теңдемени $2^{2x}+2^{2x+2}=5^{2x}-5^{2x-1}$ деп жазып алабыз, мындан $2^{2x}(1+2^2)=5^{2x}(1-5^{-1})$, $2^{2x}\cdot 5=5^{2x}\cdot\frac{4}{5}$, же $\frac{2^{2x}}{5^{2x}}=\frac{4}{25}$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}=\left(\frac{2}{5}\right)^2$. Акырында $2x=2$, $x=1$.

Жообу: $x=1$.

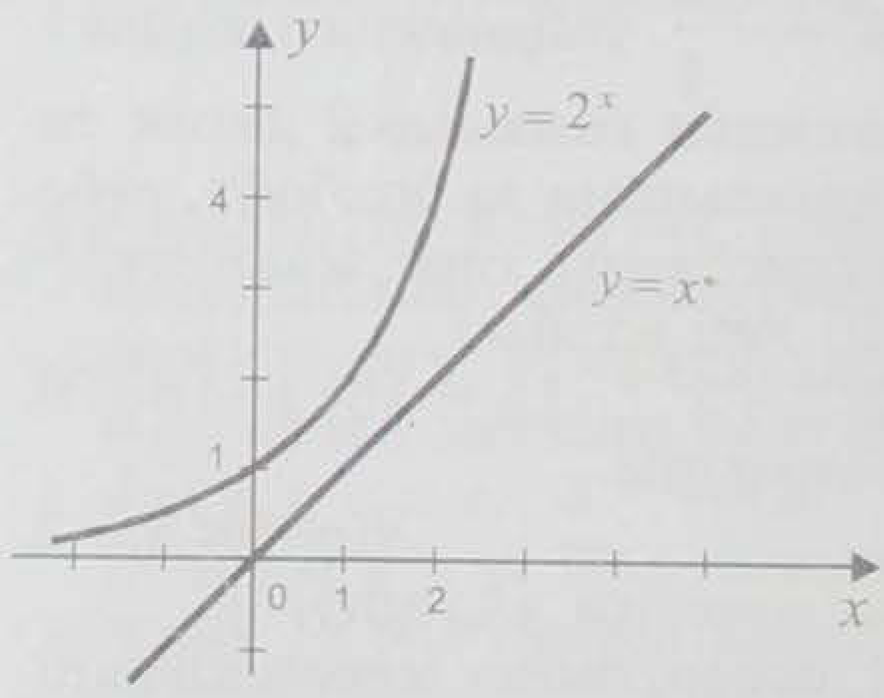
г) График жолу менен чыгаруу.

8-м а с е л е. $2^x=x$ теңдемесин чыгаргыла.

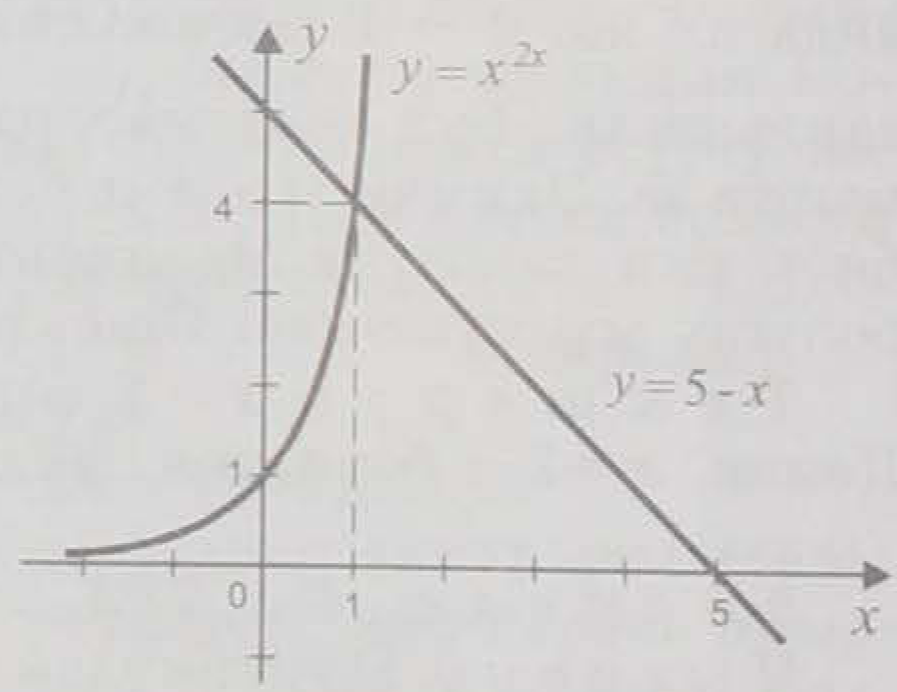
Ч ы г а р у у. $y=2^x$ жана $y=x$ функцияларынын графиктерин тургузабыз (10-чийме). $y=2^x$ жана $y=x$ функцияларынын графиктери жалпы чекитке ээ болушпайт. Демек, $2^x=x$ теңдемеси чыгарылышка ээ болбойт.

9-м а с е л е. $2^{2x}+x-5=0$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Адегенде теңдемени $2^x=5-x$ түрүнө келтирип алабыз. Мында $y=2^{2x}$ өсүүчү, ал эми $y=5-x$ кемүүчү функция болгондуктан алар, бирден ашык жалпы чекитке ээ боло алышпайт. Демек, ошол жалпы чекиттин абциссасы берилген теңде-



10-чийме.



11-чийме.

менин тамыры болуп эсептелет. Ал $x=1$ болоорун билүү кыйын эмес (11-чийме).

Жообу: $x=1$.

2. Көрсөткүчтүү барабарсыздыктарды чыгаруу.

Көрсөткүчтүү барабарсыздыктарды чыгаруу көпчүлүк учурларда $a^x>a^c$ же $a^x<a^c$ сызыктуу барабарсыздыктарды чыгарууга алынып келет. Мындай жөнөкөй барабарсыздыктар көрсөткүчтүү функциянын өсүүчү жана кемүүчү касиеттеринин жардамы менен чыгарылат. Б. а. $a^{f(x)}<a^{\varphi(x)}$ (мында $a>0$, $a\neq1$) түрүндөгү барабарсыздыктарды чыгаруу: эгер $a>1$ болсо, анда $a^{f(x)}<a^{\varphi(x)}$ болгондуктан $f(x)<\varphi(x)$ болот жана эгер $0<a<1$ болсо, анда $a^{f(x)}<a^{\varphi(x)}$ тан $f(x)>\varphi(x)$ болот деген ырастоолорго негизделет (бул качан $a>1$ болгондо көрсөткүчтүү функция өсүп, ал эми $0<a<1$ болгондо ал кемип турушунан келип чыгат).

10-м а с е л е. $5^x<125$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Барабарсыздыкты $5^x < 5^3$ түрүндө жазып алабыз. 5>1 болгондуктан $y = 5^x$ өсүүчү функция. Демек, качан $x > 3$ болгондо $5^x < 5^3$ барабарсыздыгы, ал эми качан $x \geq 3$ болгондо $5^x \geq 5^3$ барабарсыздыгы аткарылмак. Ошентип, $5^x < 5^3$ барабарсыздыгы качан $x < 3$ болгондо туура, ал эми $x \geq 3$ болгондо туура эмес, б. а. $5^x < 125$ барабарсыздыгы качан $x < 3$ болгондо гана аткарылат.

Жообу: $x < 3$.

11-м а с е л е. $0{,}5^{7-3x} < 4$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. $0{,}5^{-2} = 4$ экендигин пайдаланып барабарсыздыкты $0{,}5^{7-3x} < 0{,}5^{-2}$ түрүндө жазып алабыз.

$0{,}5 < 1$ болгондуктан $y = 0{,}5^x$ кемүүчү функция. Ошондуктан берилген барабарсыздык $7 - 3x > -2$ барабарсыздыгы аткарылганда гана аткарылат. Мындан $x < 3$ келип чыгат.

Жообу: $x < 3$.

12-м а с е л е. $2^{4x} + 4^x > 2$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

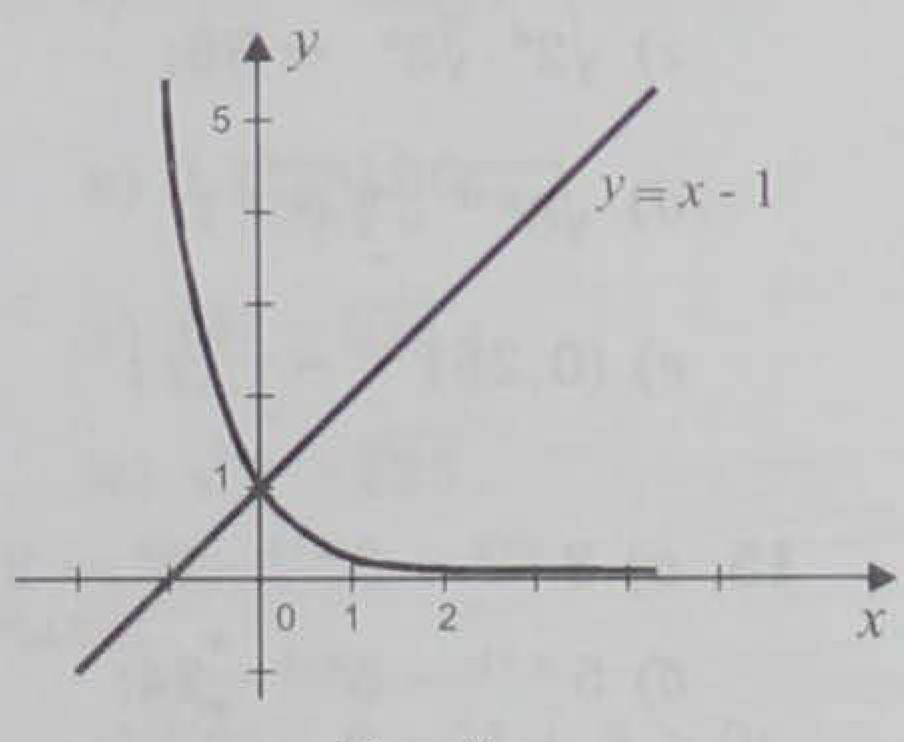
Ч ы г а р у у. $z = 4^x$ деп белгилеп алсак, $z^2 + z - 2 > 0$ деген квадраттык барабарсыздыкка келебиз. Бул барабарсыздык, качан $z < -2$ жана качан $z > 1$ болгон учурларда аткарылат. $z = 4^x$ болгондуктан $4^x > -2$, $4^x > 1$ деген эки барабарсыздыкты алабыз. Биринчи барабарсыздык чыгарылышка ээ болбойт. Себеби x тин бардык маанилери үчүн $4^x > 0$. Экинчи барабарсыздыкты $4^x > 4^0$ түрүндө жазып алсак болот. Мындан $x > 0$.

Жообу: $x > 0$.

13-м а с е л е. $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq x + 1$ барабарсыздыгын график жолу менен чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ жана $y = x + 1$ функцияларынын графиктерин тургузабыз. Чиймеден бул функциялар абциссасы $x = 0$ болгон чекитте кесилишээри көрүнүп турат. Демек, $x \geq 0$ аралыгы барабарсыздыктын чыгарылышы болуп эсептелет (12-чийме)

Жообу: $x \geq 0$.



12-чийме.

14-м а с е л е. $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \frac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. $z = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ деп белгилеп алсак, анда $\left(\frac{1}{9}\right)^x = z^2$ болот жана барабарсыздык $z^2 - \frac{28}{3}z + 3 < 0$ түрүндө жазылат, мында $\frac{1}{3} < z < 9$. Бул барабарсыздыктын чыгарылышы болуп, б. а. $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$ барабарсыздыгын канааттандырган сан эсептелет. Бирок, $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$, $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, ал эми $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функциясы кемүүчү, себеби $\frac{1}{3} < 1$.

Демек, $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$ барабарсыздыгынын чыгарылышы болуп $-2 < x < 1$ барабарсыздыгын канааттандырган x саны эсептелет.

Жообу: $(-2;\ 1)$.

Көнүгүүлөр

Тендемелерди чыгаргыла (14–16):

14. *а)* $3^x = 9^{x+1}$;

б) $3^x = 5^{2x-3} = 45$;

в) $3^{x^2-5x-10} = 1$;

г) $\sqrt{2^x \cdot \sqrt{3^x}} = 36$;

д) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$;

е) $(0{,}25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$;

ё) $25^x = 5^{3-x}$;

ж) $49^x = \frac{1}{7}$;

з) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$;

и) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$;

к) $2^{x^2+x-0,5} = 4\sqrt{2}$;

л) $4^{\sqrt{x+4}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$;

15. *а)* $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x = 21$;

б) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$;

в) $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$;

г) $5^{x-1} + 5^{x-2} + 5^{x-3} = 155$;

д) $7 \cdot 5^x + 90 = 5^{x+2}$;

е) $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} = 56$;

ё) $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$;

ж) $10^x + 10^{x-1} = 0{,}11$.

16. *а)* $9^x - 3^x - 6 = 0$;

б) $4^x - 2^{x+3} + 16 = 0$;

в) $2^{2+x} - 2^{2-x} = 6$;

г) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$;

д) $3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$;

е) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$;

ё) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}=1{,}2;$ ж) $25^{\sqrt{x-2}}-5\cdot5^{\sqrt{x-2}}-500=0.$

17. Графиктин жардамы менен төмөнкү теңдемелерди чыгаргыла:

а) $2^x=0{,}5;$ ё) $2^{x-2}=1;$

б) $2^x=x^2;$ ж) $3^x=\frac{1}{3}x^2;$

в) $2^x=2{,}5;$ з) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x-\frac{1}{2};$

г) $2^x=x+4;$ и) $3^x=11-x;$

д) $2^{x+2}=6+x;$ к) $2^x=-x-\frac{7}{4};$

е) $2^x=\frac{1}{x};$ л) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+1.$

18. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $3^x>9;$ ё) $0{,}5^{2x}<1;$

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\frac{1}{4};$ ж) $0{,}7^x>0{,}49;$

в) $2^x>\frac{1}{2};$ з) $0{,}3^x>11\frac{1}{9};$

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^x<2;$ к) $0{,}1^x>100;$

д) $(0{,}3)^x>0{,}09;$ л) $11^x>\sqrt[5]{11};$

е) $(0{,}2)^x>\frac{1}{25};$ м) $\sqrt{5^x}>\sqrt[3]{25}.$

19. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $4^x-10\cdot2^x+16<0;$ е) $72^x-6\cdot7^x+5>0;$

б) $25^x-4\cdot5^x-5\geq0;$ ж) $9^x-6\cdot3^x<27;$

в) $2^{x+1}+4^x\geq80;$ з) $5^{\frac{2}{x}}-4\cdot5>525;$

г) $3^x+3^{1-x}>\frac{28}{3};$ к) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}-10\cdot3^{-x}+3<0;$

д) $3^{2x-1}-3^{x-1}\geq2;$ л) $\left(\frac{1}{36}\right)^x-5\cdot6^{-x}-6\leq0.$

20. Барабарсыздыктарды график жолу менен чыгаргыла:

а) $3^x > x^2$;

б) $3^x \geq x^2$;

в) $\frac{1}{2^x} > \frac{1}{x}$;

г) $\frac{1}{2^x} < -\frac{1}{x}$;

д) $\frac{1}{2^x} > 2 - x$;

е) $\frac{1}{2^x} < 2 - x$;

ё) $\frac{1}{2^{|x|}} \leq -x$;

ж) $\frac{1}{2^{|x|}} \geq -x$;

з) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 2x + 5$;

к) $3^x \geq 4 - x$.

Суроолор

1. Көрсөткүчтүү деп кандай теңдемени айтабыз?
2. Эмне үчүн көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгарууда $a > 0$, $a \neq 1$ деп алабыз?
3. $a^{f(x)} = 1$ деген теңдеме берилсе, $f(x) = 0$ болот деп айта алабызбы?
4. $a^{f(x)} = a^t$ деген теңдеме берилсе, $f(x) = t$ болот деп кайсы учурда айта алабыз?
5. Көрсөткүчтүү деп кандай барабарсыздыкты айтабыз?
6. $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$ деген барабарсыздык берилсе, кайсы учурда $f(x) < \varphi(x)$ жана кайсы учурда $f(x) < \varphi(x)$ болот деп айта алабыз?
7. Көрсөткүчтүү барабарсыздыктарды көрсөткүчтүү функциянын кандай касиеттерине таянып чыгарууга болот?

Тест

I вариант

1. $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 42$ теңдемесин чыгаргыла

а) 3; *б)* 1; *в)* 9; *г)* 2.

2. $\frac{1}{9^x} = \frac{4}{3^x} - 3$ теңдемесин чыгарып, анын тамырларынын суммасын тапкыла.

а) 2; *б)* −1; *в)* 4; *г)* −2.

3. $2^{x^2-6x+0,5} = \frac{1}{16\sqrt{2}}$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 3; 1; *б)* 1; 5; *в)* $\frac{1}{2}$; 0; *г)* 2; 3,5.

4. $2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} = 896$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 0; *б)* 3; *в)* 2; *г)* 1.

5. $3 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-3x} < \dfrac{1}{9}$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $\left(-\infty;\ \dfrac{3}{5}\right)$; *б)* $\left(-\infty;\ \dfrac{4}{3}\right)$; *в)* $\left(-\dfrac{3}{6};\infty\right)$; *г)* $\left(-10;\ 8\dfrac{1}{2}\right)$.

6. $\dfrac{1}{\sqrt{27^x}} < \dfrac{3}{9^x}$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(-\infty;\ 0)$; *б)* $(4;\ \infty)$; *в)* $(-\infty;\ 4)$; *г)* $(0;\ \infty)$.

7. $7^{4\sqrt{x}} - 8 \cdot 7^{\sqrt{4x}} + 7 = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 3; $\dfrac{1}{3}$; *б)* 0; $\dfrac{1}{4}$; *в)* 1; $\dfrac{3}{8}$; *г)* 4; $\dfrac{1}{2}$.

8. $3 \cdot 9^x = 2 \cdot 15^x + 5 \cdot 25^x$ теңдемесин чыгаргыла.

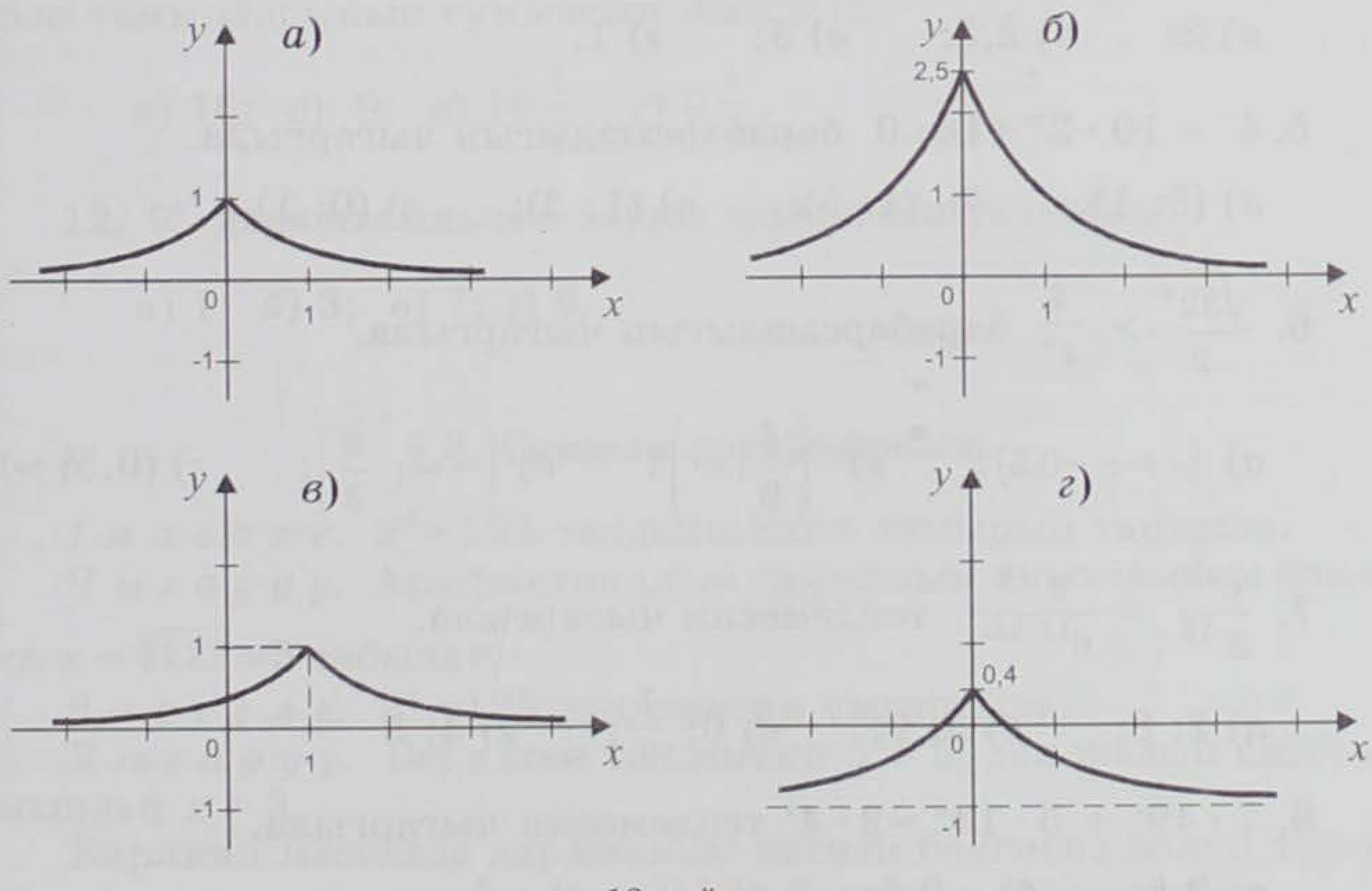
а) 0,5; *б)* –1; *в)* –2; *г)* – 0,5.

9. $2^x - 2^{3-x} > 2$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(2;\ \infty)$; *б)* $(-\infty;\ -1) \cup (2;\ \infty)$; *в)* $(-\infty;\ -2)$;

г) $(-\infty;\ -2) \cup (1;\ \infty)$.

10. $y = 0{,}4^{|x|-1}$ функциясынын графигин көрсөткүлө (13-чийме).



13-чийме

11. $x^{-\frac{2}{3}} = 0{,}04$ жана $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ теңдемелерин чыгарып, алардын тамырларынын суммасын жазгыла.

а) 2,08; *б*) 2,8; *в*) 4,008; *г*) 4,8.

12. 3^{3^3} даражасынын акыркы цифрасын тапкыла.

а) 1; *б*) 7; *в*) 9; *г*) 3.

II вариант

1. $2^{x+3} - 4 \cdot 2^{x-1} = 9{,}5$ теңдемесин чыгаргыла.

а) −1; *б*) 4; *в*) $\frac{1}{2}$; *г*) −2.

2. $\frac{1}{4^x} = \frac{3}{2^x} - 2$ теңдемесин чыгарып, анын тамырларынын суммасын жазгыла.

а) −1; *б*) 1,5; *в*) −2; *г*) 1.

3. $5^{2x-1} + 2^{2x} = 5^{2x} - 5^{2x+2}$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 3; *б*) 1; *в*) 3; *г*) −2.

4. $16^x - 50 \cdot 2^{2x} = 896$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 2; *б*) 2,5; *в*) 3; *г*) 1.

5. $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) (3; 1); *б*) (1; 5); *в*) (1; 3); *г*) (0; 1).

6. $\frac{\sqrt{32^x}}{2} > \frac{2}{4^x}$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(-\infty;\ -0{,}5)$; *б*) $\left(\frac{4}{9}; \infty\right)$; *в*) $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right)$; *г*) $(0{,}5; \infty)$.

7. $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 2; 8; *б*) 3; 9; *в*) 0; $\frac{1}{2}$; *г*) 4; 5.

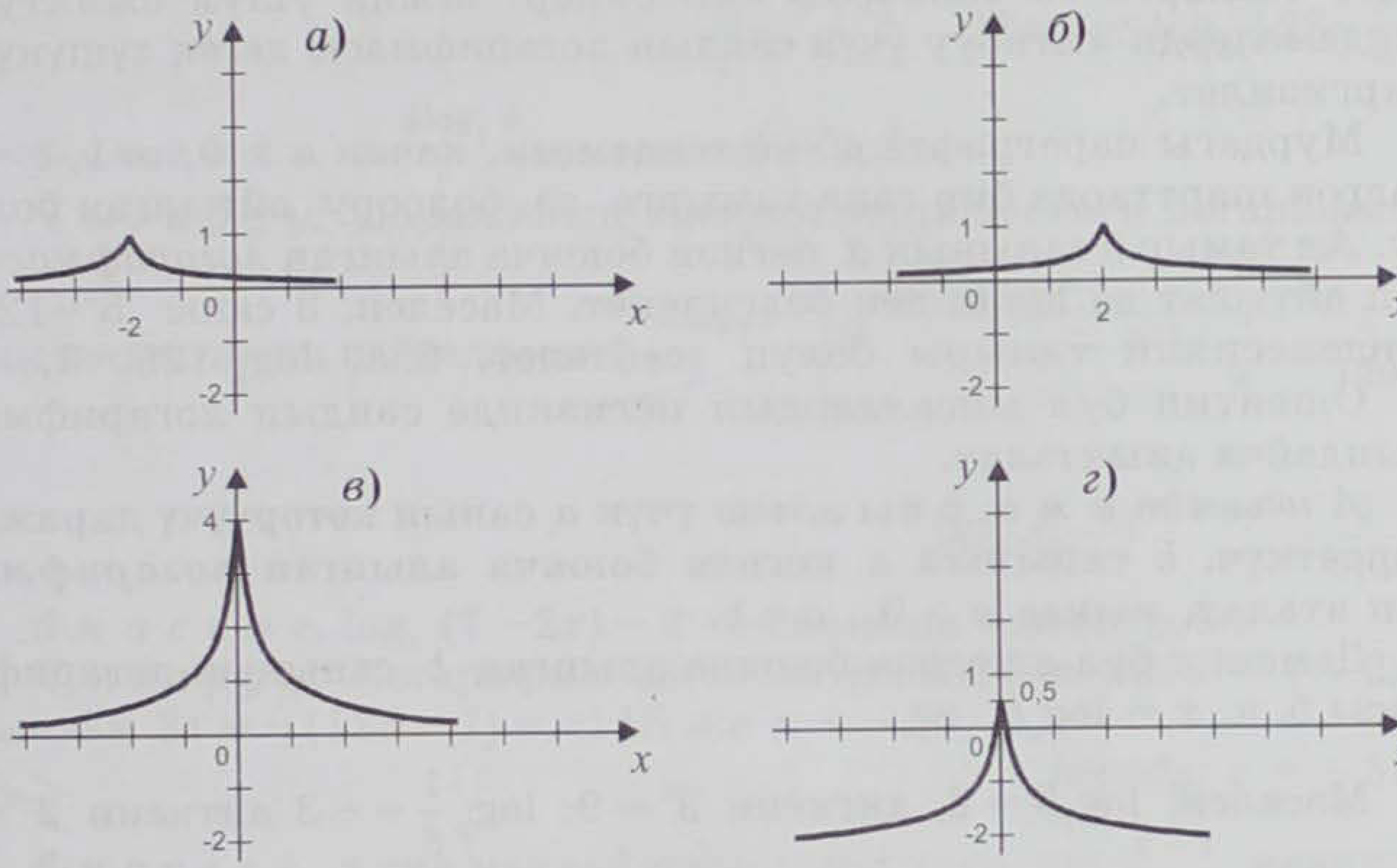
8. $7 \cdot 49^x + 5 \cdot 14^x = 2 \cdot 4^x$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 0,5; *б*) − 0,5; *в*) 1; *г*) − 1.

9. $3^{1+x} + 3^{2-x} < 28$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(-\infty;\ 1)$; *б)* $(-1;\ 2)$; *в)* $(-2;\ 1)$; *г)* $(-2;\ \infty)$.

10. $y = 0{,}5^{|x|-2}$ функциясынын графигин көрсөткүлө (14-чийме).



14-чийме.

11. $x^{-1,5} = 27$ жана $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{25}$ теңдемелерин чыгарып, алардын тамырларынын суммасын жазгыла.

а) 16; *б)* 9; *в)* $16\dfrac{1}{9}$; *г)* $9\dfrac{1}{4}$.

12. 9^{9^9} даражасынын акыркы цифрасын тапкыла.

а) 1; *б)* 3; *в)* 7; *г)* 9.

§ 3. Сандын логарифмасы

1-м а с е л е. $x^3 = 125$ теңдемесинин тамырын тапкыла.

Ч ы г а р у у. Арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча $x = \sqrt[3]{125} = 5$ табылат.

2-м а с е л е. $5^x = 125$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Берилген теңдемени $5^x = 5^3$ деп жазып алабыз, мындан $x = 3$.

Биринчи маселеде даражанын негизи белгисиз болуп турса, экинчи маселеде даража көрсөткүч белгисиз болуп турат.

Экинчи маселени теңдеменин эки жагын тең 5 деген бирдей негизге келтирүү жолу менен чыгардык.

Ал эми, мисалы, $5^x=120$ теңдемесин мындай жол менен чыгарып алууга мүмкүн болбосу көрүнүп турат. Бирок бул теңдеме тамырга ээ болоорун билесиңер. Мына ушул сыяктуу теңдемелерди чыгаруу үчүн сандын логарифмасы деген түшүнүк киргизилет.

Мурдагы параграфта $a^x=b$ теңдемеси, качан $a>0$, $a\neq1$, $b>0$ болгон шарттарда бир гана тамырга ээ болоору айтылган болчу. Ал тамыр b санынын a негизи боюнча алынган *логарифмасы* деп айтылат да $\log_a b$ деп белгиленет. Маселен, 3 саны $5^x=125$ теңдемесинин тамыры болуп эсептелет, б. а. $\log_5 125=3$.

Ошентип бул мисалдардын негизинде сандын логарифми мындайча аныкталат.

Аныктама. **b ны алыш үчүн a санын көтөрүүчү даража көрсөткүч. b санынын a негизи боюнча алынган *логарифма* деп аталат,** мында $a>0$, $a\neq1$.

Демек, x бул a негизи боюнча алынган b санынын логарифмасы б. а. $x=\log_a b$.

Маселен, $\log_3 9=2$, анткени $3^2=9$; $\log_2\frac{1}{8}=-3$ анткени $2^{-3}=$ $=\frac{1}{8}$; $\log_6 6=1$, анткени $6^1=6$; $\log_4 1=0$, анткени $4^0=1$.

$a^x=b$ жана $x=\log_a b$ формулалары x, a жана b сандарын ($a\neq1$, $a>0$, $b>0$ болгон учурларда) бирдей байланыштырып туруучу туюнтма. x – каалагандай сан, даража көрсөткүчкө эч кандай чектөө коюлбайт.

$a^x=b$ теңдемесине x санынын логарифма түрүндөгү жазылышын коюп, логарифманын аныктамасынын кыскача жазылышын алабыз.

$$a^{\log_a b}=b.$$

Бул барабардык *негизги логарифмалык теңдештик* деп аталат.

Маселен, $3^{\log_3 7}=7$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}3}=3$; $7^{\log_7\frac{5}{6}}=\frac{5}{6}$.

Негизги логарифмалык теңдештиктин жардамы менен маселен, $x=\log_5 120$, бул $5^x=120$ теңдемесинин тамыры болуп эсептелээрин көрсөтүүгө болот. Чынында эле $5^{\log_5 120}=120$.

Логарифманын аныктамасынан төмөнкү барабардыктар алынат: $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$.

Биринчиси $a^0=1$, ал эми экинчиси $a^1=a$ экендигинен келип чыгат.

Сандын логарифмасын табуу *логарифмалоо* деп аталат.

3-маселе. $\log_{64}128$ ти эсептегиле.

Ч ы г а р у у: $\log_{64}128 = x$ деп белгилеп алабыз. Логарифманын аныктамасы боюнча $64^x = 128$. $2^6 = 64$, $2^7 = 128$ болгондуктан, $2^{6x} = 2^7$, мындан $6x = 7$, $x = \frac{7}{6}$.

Жообу: $\log_{64}128 = \frac{7}{6}$.

4-м а с е л е. $7^{-3\log_7 9}$ ни эсептегиле.

Ч ы г а р у у: Даражанын касиети жана негизги логарифмалык теңдештикти пайдалансак $7^{-3\log_7 9} = \left(7^{-3\log_7 9}\right)^{-3} = 9^{-3} = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$.

Жообу: $7^{-3\log_7 9} = \frac{1}{729}$.

5-м а с е л е. $\log_5(7-2x) = 3$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у: Логарифманын аныктамасы боюнча $5^3 = 7 - 2x$, мындан $2x = -(125-7) = -118$ же $x = -59$.

Жообу: $x = -59$.

6-м а с е л е. x тин кандай маанилери үчүн $\log_3\frac{x-1}{2-x}$ мааниге ээ боло алат.

Ч ы г а р у у: Логарифманын негизи $3 > 0$ жана $3 \neq 1$ болгондуктан, берилген логарифма качан $\frac{x-1}{2-x} > 0$ болгон учурда гана мааниге ээ боло алат.

Бул барабарсыздыкты чыгарып, $1 < x < 2$ болоорун табабыз.

Эске алгыла. Логарифмаларды биз көптөгөн турмуштук маселелерди чыгарууда колдонобуз. Мисал катары төмөнкү маселени карап кетели.

Бизге белгилүү болгондой радийдин ажыроосу болжол менен

$$m(t) = m(0)\cdot(0{,}9996)^t$$

формуласы аркылуу аныкталат, мында $m(0)$ – радийдин *грамм* менен өлчөнгөн алгачкы саны, ал эми $m(t)$ – анын (бул дагы *грамм* менен) t жылдан кийинки саны. Жарым ажыроо мезгили, б. а. радийдин саны канча жылдан кийин эки эсеге азаярын тактагыла.

Издеген t жыл

$$m(0)\cdot(0{,}9996)^t = 0{,}5\, m(0)$$

теңдемесинин тамыры болуп эсептелет же

$$(0{,}9996)^t = (0{,}5)$$

Ошондуктан

$$t = \log_{0{,}9996}0{,}5.$$

Кийинчерээк силер, атайын түзүлгөн таблицанын же калькулятордун жардамы менен мындай логарифмаларды эсептөөнү үйрөнүп аласынар, азырынча

$$\log_{0,9996}0,5 \approx 1600$$

экендигине ишенип, аны чындык катары кабыл ала туралы. Мына ошентип радийдин саны болжол менен ар бир 1600 жыл сайын эки эсе азайып турат.

Көнүгүүлөр

Эсептегиле (20–24):

21. *а)* $\log_2 4$; *д)* $\log_2 64$; *з)* $\log_{0,5} 0,5$;

б) $\log_4 4$; *е)* $\log_{0,5} 4$; *и)* $\log_{0,5} 0,25$;

в) $\log_2 8$; *ё)* $\log_{0,5} 8$; *к)* $\log_2 1$;

г) $\log_2 32$; *ж)* $\log_{0,5} 32$; *л)* $\log_2 \frac{1}{8}$.

22. *а)* $\log_3 27$; *в)* $\log_3 \frac{1}{3}$; *д)* $\log_3 \frac{1}{9}$;

б) $\log_3 81$; *г)* $\log_3 1$; *е)* $\log_4 \frac{1}{16}$.

23. *а)* $\log_6 665$; *в)* $\log_5 \frac{1}{125}$; *д)* $\log_{\frac{1}{3}} 27$;

б) $\log_6 216$; *г)* $\log_{\frac{1}{5}} 125$; *е)* $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$.

24. *а)* $3^{\log_3 18}$; *г)* $3^{5\log_3 2}$; *ё)* $8^{\log_2 5}$;

б) $5^{\log_5 16}$; *д)* $\frac{1}{4}^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$; *ж)* $9^{\log_3 12}$;

в) $10^{\log_{10} 2}$; *е)* $\frac{1}{2}^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}$; *з)* $16^{\log_4 7}$.

25. x санын тапкыла:

а) $\log_6 x = 3$; *г)* $\log_3 (x+2)=3$;

б) $\log_5 x = 4$; *д)* $\log_{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{2}\right) = -2$;

в) $\log_2 (5 - x) = 3$; *е)* $\log_{\frac{1}{6}} (0,5 + x)=-1$.

26. x тин кайсы маанилеринде төмөнкү туюнтмалар мааниге ээ:

а) $\log_3 (12 - x)$; д) $\log_6 (49 - x^2)$;

б) $\log_2 (x - 12)$; е) $\log_7 (x^2 + x - 6)$;

в) $\log_{\frac{1}{4}} (-x)$; ё) $\log_{36} \dfrac{2x + 4}{x - 3}$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{6}{2x - 1}\right)$; ж) $\log_6 \dfrac{4 - x}{3x + 5}$.

27. Тендемелерди чыгаргыла:

а) $2^x = 5$; г) $7^{1-2x} = 2$;

б) $1{,}2^x = 4$; д) $7^{2x} + 7^x - 12 = 0$;

в) $4^{2x+3} = 5$; е) $9^x - 3^x - 12 = 0$.

Суроолор

1. Сандын логарифмасы деген түшүнүк эмне үчүн киргизилген?
2. Берилген негизи боюнча берилген сандын логарифмасы кантип аныкталат?
3. Сандын логарифманын аныктамасында эмне үчүн $a > 1$ жана $a \neq 1$ деген шарттарды сактайбыз ?
4. Негизги логарифмалык тендештик кайдан келип чыгат?
5. Логарифмалоо деп эмнени түшүнөбүз?
6. $\log_5 (-8)$ жана $\log_3 (0)$ деген туюнтмалар мааниге ээ болушабы?

§ 4. Логарифманын негизги касиеттери

Логарифманы камтыган туюнтмаларды кайра өзгөртүүлөрдө, эсептөөлөрдө жана тендемелерди чыгарууда логарифманын касиеттерин чагылдырган эрежелер тез-тез колдонулуп турат. Мейли $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$ жана n – каалагандай чыныгы сан болсун. Анда логарифманын негизги касиеттерин чагылдырган

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \qquad (1)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \qquad (2)$$

$$\log_a b^n = n \log_a b \qquad (3)$$

эрежелер орун алат.

Негизги логарифмалык тендештик боюнча болсо

$$a^{\log_a b} = b\,, \qquad (4)$$

$$a^{\log_a c} = c. \qquad (5)$$

1) (4) жана (5) барабардыктарын өз ара көбөйтсөк

$$a^{\log_a b+\log_a c} = bc$$

туюнтмасын алабыз, мындан логарифманын аныктамасы боюнча

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc).$$

(1) формуласы далилденди. Бул логарифманын *көбөйтүндүнүн логарифмасы көбөйтүүчүлөрдүн логарифмаларынын суммасына барабар* деген касиетин туюнтат.

2) (4) жана (5) барабардыктарын бөлсөк

$$a^{\log_a b-\log_a c} = \frac{b}{c}$$

туюнтмасын алабыз, мындан логарифманын аныктамасы боюнча (2) формуласы келип чыгат. Ал *бөлчөктүн логарифмасы алардын логарифмаларынын айырмасына барабар* деп айтылган касиетин берет.

3)

$$a^{\log_a b} = b$$

негизги логарифмалык теңдештикти көрсөткүчү n болгон даражага көтөрүп

$$a^{n\log_a b} = b^n$$

туюнтмасын алабыз, мындан логарифманын аныктамасы боюнча (3) формуласы келип чыгат. Бул *даражанын логарифмасы даража көрсөткүчүн анын негизинин логарифмасына көбөйткөн көбөйтүндүсүнө барабар* деген касиетин туюнтат.

Ошентип, логарифманын касиеттери боюнча көбөйтүү, бөлүү жана даражага көтөрүү амалдары камтылган туюнтмаларды *логарифмалап* алууга болот жана тескерисинче логарифмасы боюнча кайра туюнтманын өзүн же санды табууга болот. Мындай амал *потенцирлөө* деп аталат.

Маселен, $\dfrac{n^3\sqrt{b}}{c^2\sqrt[5]{k}}$ сыяктуу туюнтманы a негизи боюнча логарифмалоо талап кылынса (n, b, c, k – оң сандар), анда логарифмалоо эрежелери боюнча $\log_a \dfrac{n^3\sqrt{b}}{c^2\sqrt[5]{k}} = 3\log_a n + \dfrac{1}{2}\log_a b - 2\log_a c - \dfrac{1}{5}\log_a k$ болот.

Тескерисинче, ошол эле (1) – (3) формулаларды колдонуп санды эсептеп алууга да болот. Маселен:

1) $\log_9 27 + \log_9 3 = \log_9 81 = 2;$

2) $\log_7 56 - \log_7 8 = \log_7 7 = 1;$

3) $\dfrac{\log_5 21}{\log_5 21^{\frac{1}{9}}} = \dfrac{\log_5 21}{\frac{1}{9}\log_5 21} = 9.$

1-м а с е л е. $\log_5 \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50$ туюнтмасын эсептегиле.

Ч ы г а р у у. (1) – (3) формулаларын пайдалансак:

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \log_5 50 = \log_5 \frac{50}{2} =$$

$$= \log_5 5^2 = 2.$$

2-м а с е л е. $\log_5 x = \log_5 7 + 2\log_5 3 - 3\log_5 2$ барабардыгынан x ти тапкыла.

Ч ы г а р у у. Адегенде логарифманын негизги касиеттерин пайдаланып, берилген барабардыктын оң жагын өзгөртүп алабыз.

$\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - \log_5 2^3 = \log_5 \dfrac{7 \cdot 9}{8} = \log_5 \dfrac{63}{8}$, б. а. $\log_5 x =$

$= \log_5 \dfrac{63}{8}$, ошондуктан $x = \dfrac{63}{8} = 7{,}875.$

Логарифмалар менен иштөөдө, анын көрсөткүчтүү функциянын касиеттеринен келип чыккан төмөнкү касиеттерине токтололу:

1. Логарифма жалаң гана оң сандар үчүн алынат б. а. эгер $b>0$ болсо, $\log_a b$ да он болот (мында $a > 0$ жана $a \neq 1$).

2. Качан логарифманын негизи $a > 1$ болгондо, $b > 1$ санынын логарифмасы он, ал эми $0 < b < 1$ санынын логарифмасы терс болот. Маселен, $\log_2 5 > 0$, $\log_3 \left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$.

3. Качан логарифманын негизи $0 < a < 1$ болгондо, $b>1$ санынын логарифмасы терс, ал эми $0 < b < 1$ санынын логарифмасы он болот. Маселен, $\log_{\frac{1}{3}} 8 < 0$, $\log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$.

4. Барабар сандардын логарифмалары барабар болушат, б. а. эгер $b = c$ болсо, анда $\log_a b = \log_a c$ болот.

5. Эгер $a > 1$ болсо, анда чоң санга чоң логарифма туура келет, б. а. эгер $b > c$ болсо, анда $\log_a b > \log_a c$ болот. Маселен, $\log_5 9 > \log_5 3$.

6. Эгер $0 < a < 1$ болсо, анда чоң санга кичине логарифма туура келет, б. а. эгер $b > c$ болсо, анда $\log_a b < \log_a c$. Маселен, $\log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_{\frac{1}{3}} 5$.

7. Логарифманын каалаган негизи боюнча ($a > 1$, $a \neq 1$) бирдин логарифмасы нөлгө барабар, б. а. $\log_a 1 = 0$ жана негиздин өзүнүн логарифмасы 1, б. а. $\log_a a = 1$ болот деген касиеттерин да дагы бир жолу эске салып коёлу.

3-м а с е л е. $\log_{\frac{1}{6}} 36$ тапкыла.

Ч ы г а р у у. 1-жол: $\log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{\frac{1}{6}} 6^2 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = -2$;

2-жол: $\log_{\frac{1}{6}} 36 = x$, $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 36$ же $6^{-x} = 6^2$, мындан $x = -2$.

Жообу: $\log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$.

4-м а с е л е. x тин кайсы маанилеринде $\log_{\frac{1}{3}} \frac{6}{2x-1}$ туюнтмасы мааниге ээ болоорун аныктагыла.

Ч ы г а р у у. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{6}{2x-1}$ туюнтмасы качан $2x - 1 > 0$ б. а. $2x > 1$ же б. а. $x > \frac{1}{2}$ болгондо мааниге ээ болот.

5-м а с е л е. x тин кайсы маанилеринде $\log_{36} \frac{2x+4}{x-3}$ туюнтмасы логарифмделет?

Ч ы г а р у у. Берилген туюнтма качан $\frac{2x+4}{x-3} > 0$ болгондо мааниге ээ болоору белгилүү. Ал төмөнкү барабарсыздыктардын системасына тендеш: $\begin{cases} 2x+4 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$ же $\begin{cases} 2x+4 < 0, \\ x-3 < 0 \end{cases}$.

Биринчи учурда $\begin{cases} x > 0, \\ x < 0 \end{cases}$, мындан $x > 3$, ал эми экинчи учурда $\begin{cases} x < -2, \\ x < 3 \end{cases}$, мындан $x < -2$.

Демек, берилген туюнтма $x < -2$ жана $x > 3$ болгондо логарифмаланат.

Көнүгүүлөр

28. Туюнтманын маанисин тапкыла:

а) $\log_6 2+\log_6 3$;

б) $\log_2 3+\log_2 \frac{4}{3}$;

в) $\log_{12} 4+\log_{12} 36$;

г) $\log_6 \frac{1}{18}+\log_6 \frac{1}{12}$;

д) $\log_3 6+\log_3 \frac{3}{2}$;

е) $\log_{10} 8+\log_{10} 125$;

ё) $\log_{\sqrt{5}} x+\log_5 6{,}25$;

ж) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$;

з) $\log_2 15-\log_2 \frac{15}{16}$;

и) $\log_5 75-\log_5 3$;

к) $\log_{\frac{1}{3}} 54-\log_{\frac{1}{3}} 2$;

л) $\log_8 \frac{1}{16}-\log_8 32$;

м) $\log_3 7-\log_3 \frac{7}{27}$;

н) $\log_5 100-\log_5 4$;

о) $\log_{10} 0{,}18+\log_{10} 180$;

п) $\frac{\log_5 36-\log_5 2}{\log_5 9}$;

р) $\frac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 27}$;

с) $\frac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 64}{\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}$.

29. Эсептегиле:

а) $\log_{13}\sqrt[3]{169}$;

б) $\log_{11}\sqrt[3]{121}$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{243}$;

г) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}}$;

д) $\log_2 \sqrt[3]{4^5}$;

е) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$.

30. Тууралыгын текшергиле:

а) $\log_5 125=-3$;

б) $\log_5 \frac{1}{25}=-2$;

в) $\log_3 \frac{1}{81}=-4$;

г) $\log_{16} 1=0$;

д) $\log_5 0{,}04=-2$;

е) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27=-6$;

и) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}$; *ж*) $\log_{0,2} 125 = -3$.

31. x ти тапкыла:

а) $\log_3 x = \log_3 1{,}5 + \log_3 8$;

б) $\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 4$;

в) $\log_{0,3} x = 2\log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12$;

г) $\log_\pi x = 3\log_\pi 4 - 2\log_\pi 6$;

д) $\log_3 x = 2\log_3 a + 7\log_3 b$;

е) $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$;

ё) $\log_x \frac{1}{8} = -1{,}5$;

ж) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{x}{2} = -0{,}5$;

з) $\log_x \frac{1}{64} = -\frac{2}{3}$;

и) $\log_x 25\sqrt{5} = -\frac{5}{8}$.

Суроолор

1. Көбөйтүүнүн логарифмасы жөнүндөгү формуланы далилдегиле.
2. Бөлүүнүн логарифмасы жөнүндөгү формуланы далилдегиле.
3. Даражанын логарифмасы жөнүндөгү формуланы далилдегиле.
4. Негизи $a > 1$ болгондогу сандын логарифмасынын касиетин айтып бер.
5. Негизи $0 < a < 1$ болгондогу сандын логарифмасынын касиетин айтып бер.
6. Потенцирлөө деп эмнени айтабыз?
7. Эмне үчүн бирдин логарифмасы нөл болот да, ал эми негиздин өзүнүн логарифмасы бирге барабар болот?

§ 5. Ондук жана натуралдык логарифм

Сандардын логарифмаларын табуу үчүн атайын логарифмалардын таблицалары түзүлгөн (В.Брадистин Төрт орундуу математикалык таблицасы). Логарифмалардын маанилерин микрокалькулятор менен да эсептөөгө болот.Бул же тигил учурда деле, практикалык эсептөөлөрдө колдонууга абдан ыңгайлуу болгон *ондук* же теориялык изилдөөлөрдө өтө керектүү болгон *натуралдык* логарифмаларды эле табууга болот. Ал эми алардын жардамы менен каалаган негизде алынган логарифмалардын маанилери табылат.

Негизи 10 боюнча алынган сандын логарифмасы ошол сандын о н д у к логарифмасы деп аталат жана $\log_{10} b$ дегендин ордуна $\lg b$ деп жазылат. Негизи e боюнча алынган сандын логарифмасы ошол сандын н а т у р а л д ы к логарифмасы деп аталат. Бул учурда $\log_e b$ дегендин ордуна $\ln b$ деп жазылат. Мында e, болжол менен 2,718 ге барабар болгон иррационалдык сан. Ал математикада жана анын колдонулуштарында маанилүү орунду ээлейт.

Негизи e боюнча алынган логарифма башка негиздерде алынган логарифмаларга караганда жеңил эсептелет. Мындай эсептөөнүн ыкмалары жана каалаган тактыкта ондук бөлчөк аркылуу туюнтулуучу e санынын өзү жөнүндөгү маалыматтар жогорку математикада баяндалат.

Каалаган негизде алынган сандын логарифманын табуу үчүн ошол сандын ондук же натуралдык логарифмаларынын маанилерин табууну билүү эле жетиштүү дедик. Ал үчүн бир негиздеги логарифмадан бөлөк негиздеги логарифмага *өтүү формуласы* колдонулат. Ал

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad (1)$$

$b > 0$, $a > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$.

Бул формуланын аткарыла тургандыгын далилдейли.

Негизги логарифмалык $a^{\log_a b} = b$ теңдештигин жазып алалы. Мунун эки жагынан тең негизи c болгон логарифма алсак:

$$\log_c(a^{\log_a b}) = \log_c b.$$

Мындан, даражанын логарифмасынын касиетинин негизинде

$$\log_c(a^{\log_a b}) = \log_a b \cdot log_c a$$

болоорун билесиңер. Анда

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b,$$

демек, мындан (1) формуласы келип чыгат.

(1) формуласынан $c = 10$ же $c = e$ болгон учурларда ондук же натуралдык логарифмаларга өтүү формулаларын алабыз:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \qquad (2)$$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}, \qquad (3)$$

(1) формуласынан b санынын ондук логарифмасы боюнча анын натуралдык логарифмасын табыш үчүн b санын ондук логарифмасын e санынын ондук логарифмасына бөлүү керек экендигин билүү кыйын эмес:

$$\ln b = \frac{\lg b}{\lg e} \approx \frac{\lg b}{0{,}4343} \approx 2{,}3026 \lg b,$$

мында,

$$\lg e = \frac{\ln e}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343.$$

Бул сан ондук логарифманын *модулу* деп аталат.

Маселен, ондук логарифманын таблицасы боюнча $\lg 2 = 0{,}301$, анда

$$\ln 2 = \frac{\lg 2}{\lg e} \approx \frac{0{,}301}{0{,}4343} \approx 0{,}6931.$$

Ал эми, b санынын белгилүү натуралдык логарифмасы боюнча анын ондук логарифмасын табыш үчүн b санынын натуралдык логарифмасын ондук логарифманын модулуна көбөйтүү керек, б. а.

$$\lg b = \lg e \cdot \ln b = 0{,}4343 \ln b.$$

Маселен, $\ln 3 \approx 1{,}0986$, анда $\lg 3 = \lg e \ln 3 = 0{,}4343 \cdot 1{,}0986 = 0{,}4771$.

1-м а с е л е. $\lg 2 = 0{,}301$ экендигин билип туруп $lg\ 25$ ти эсептегиле.

Ч ы г а р у у. $\lg 25 = \lg 52 = 2\lg 5 = 2\lg\frac{10}{2} = 2(\lg 10 - \lg 2) = 2(1 - 0{,}301) = 1{,}398$.

2-м а с е л е. Эгер $\lg 5 = a$ жана $\lg 3 = b$ болсо, анда $\log_{30} 8$ ти тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\log_{30} 8 = \log_{30} 2^3 = 3\log_{30} 2 = 3\frac{\lg 2}{\lg 30}$;

$\lg 2 = \lg\frac{10}{5} = \lg 10 - \lg 5 = 1 - a$;

$\lg 30 = \lg(2 \cdot 15) = \lg 2 + \lg 15 = \lg 2 + \lg(3 \cdot 5) = \lg 2 + \lg 3 + \lg 5 = 1 - a + b + a = 1 + b$.

Демек, $\log_{30} 8 = \frac{3(1-a)}{1+b}$.

3-м а с е л е. $\log_3 7$ ни эсептегиле.

Ч ы г а р у у. Калькуляторду (же таблицаны) колдонуп: *а*) ондук логарифма боюнча: $\lg 7 \approx 0{,}8451$ жана $\lg 3 \approx 0{,}4771$ экендиктерин табабыз.

Демек, (2) формуласы боюнча

$$\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx \frac{0{,}8451}{0{,}4771} \approx 1{,}8.$$

б) Натуралдык логарифма боюнча: $\ln 7 \approx 1{,}9459$ жана $\ln 3 \approx 1{,}0986$ экендигин табабыз.

Демек, (3) формуласы боюнча $\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1{,}8$.

Айрым учурларда логарифманын бир негизинен экинчи негизине өтүүчү формула теңдемелерди чыгарууда да колдонулат.

4-м а с е л е. $\log_2 x + \log_4 x = \frac{3}{2}$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Өтүү формуласы (1) боюнча

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}.$$

Ошондуктан теңдемени $\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = \frac{3}{2}$ түрүндө жазып алабыз, мындан $\log_2 x = 1$, $x = 2$.

Жообу: $x = 2$.

Ошондой эле өтүү формуласынын негизинде логарифманын негизин жана логарифмалануучу санды нөлгө барабар эмес бирдей эле даражага көтөрсө логарифманын мааниси өзгөрбөй тургандыгын, б. а. $\log_{a^k} b^k = \log_a b$ болоорун көрсөтүүгө болот.

Чынында эле, $\log_{a^k} b^k = \dfrac{\log_a b^k}{\log_a a^k} = \dfrac{k\log_a b}{k} = \log_a b$ (4)

5-м а с е л е. $\log_{10\sqrt{10}} 10000$ ди эсептегиле.

Ч ы г а р у у. (1) формуласын пайдаланабыз. Логарифманын негизин жана логарифмалануучу санды бирдей эле $\frac{3}{2}$ деген даражага көтөрөбүз. $(10\sqrt{10})^{\frac{2}{3}} = (10^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 10$ болгондуктан,

$$\log_{10\sqrt{10}} 10000 = \lg(1000)^{\frac{2}{3}} = \lg(10^4)^{\frac{2}{3}} = \lg 10^{\frac{8}{3}} = \frac{8}{3}.$$

Жообу: $\frac{8}{3}$.

Көнүгүүлөр

32. Калькуляторду колдонуп төмөндөгүлөрдү эсептегиле. Жыйынтыгын таблица менен салыштыргыла.

а) $\lg 25$; *в)* $\lg 0{,}37$; *д)* $\ln 81$; *ё)* $\ln 0{,}17$;

б) $\lg 7$; *г)* $\lg\frac{2}{3}$; *е)* $\ln 2$; *ж)* $\ln\frac{7}{6}$.

33. Берилген логарифманы ондук логарифма аркылуу туюнткула жана микрокалькулятордун жардамы менен 0,01 тактыкка чейин эсептегиле:

а) $\log_7 25$; *б)* $\log_5 8$; *в)* $\log_9 0{,}75$; *г)* $\log_{0,75} 1{,}13$.

34. $\lg 2 = 0{,}30103$ экендигин билип туруп төмөндөгүлөрдү эсептегиле:

а) $\lg 5$; *в)* $\lg 0{,}125$;

б) $\lg 125$; *г)* $\lg 0{,}3$.

35. Берилген логарифманы натуралдык логарифма аркылуу туюнткула жана микрокалькулятордун жардамы менен 0,01 тактыкка чейин эсептегиле:

а) $\log_7 5$; *б*) $\log_8 5$; *в*) $\log_{0,7} 9$; *г*) $\log_{1,1} 0,13$.

36. Башка негизге өтүүнүн (1) формуласын пайдаланып эсептегиле:

а) $\log_{27} 81$; *б*) $\log_{\frac{1}{16}} 32$; *в*) $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt{2}$; *г*) $\log_{81} 243$.

37. Төмөндөгүлөрдү эсептегиле:

а) $\log_{125} 5$; *в*) $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{49}$; *д*) $\log_2 0,125 + \log_{\sqrt{3}} 9$;

б) $\log_{\sqrt{7}} 49$; *г*) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{625}$; *е*) $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

38. *а*) $\log_4 125 = a$ экендиги берилсе, $\lg 64$ тү a аркылуу туюнткула;

б) $\lg 3 = a$, $\lg 2 = b$ болсо, $\log_{0,1} 6$ ны тапкыла.

39. Тендемелерди чыгаргыла:

а) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$; *г*) $\log_2 x^2 + 2\log_{\sqrt{3}} x = 3$;

б) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$; *д*) $\log_2 x + \log_8 x = 8$;

в) $\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 9$; *е*) $\log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{4}$.

Суроолор

1. Сандын ондук логарифмасы деп эмнени айтабыз?
2. Сандын натуралдык логарифмасы деп эмнени айтабыз?
3. Логарифмада өтүү формуласын кантип чыгарып алабыз жана ал кайсыл учурларда колдонулат?
4. Сандын ондук логарифмасынан анын натуралдык логарифмасына кантип өтөбүз?
5. Ондук логарифманын модулу деген эмне жана аны кантип эсептейбиз?
6. Сандын натуралдык логарифмасы боюнча анын ондук логарифмасын кантип табабыз?
7. Логарифмада өтүү формуласынын негизинде логарифманын кандай касиетин далилдеп алууга болот?

§ 6. Логарифмалык функция, анын касиеттери жана графиги

А н ы к т а м а. $y = \log_a x$ түрүндөгү функция *логарифмалык функция* деп аталат ($a > 0$, $a \neq 1$).

Ал математикада жана анын колдонулуштарында кездешип турат.

Логарифмалык функция *төмөнкүдөй касиеттерге* ээ:

1) Логарифмалык функциянын *аныкталуу облусу* – бардык оң сандардын көптүгү.

Бул ырастоо логарифманын аныктамасынан келип чыгат, анткени $\log_a x$ туюнтмасы жалан $x > 0$ болгон учурда гана мааниге ээ.

2) Логарифмдик функциянын *маанилеринин көптүгү* – бардык R – чыныгы сандардын көптүгү.

Бул каалаган чыныгы b саны үчүн $\log_a x = b$ боло тургандай x – оң саны бар, б. а. $\log_a x = b$ теңдемеси тамырга ээ болот дегендикке жатат. Мындай тамыр бар, ал $x = a^b$, анткени $\log_a a^b = b$.

3) $x > 0$ болгон аралыкта логарифмалык функция $y = \log_a x$, качан $a > 1$ болсо *өсүүчү* жана качан $0<x<a$ болсо *кемүүчү* функция болуп эсептелет.

Мейли $a > 1$ болсун. Эгер $x_2 > x_1$ болсо, анда $y(x_2) > y(x_1)$, б. а. $\log_a x_2 > \log_a x_1$ боло тургандыгын далилдейли. Негизи логарифмалык теңдештикти пайдаланып, $x_2 > x_1$ шартын $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$ деп жазып алууга болот. Бул барабарсыздыктын негизи $a > 1$ болгон даражанын касиети боюнча $\log_a x_2 > \log_a x_1$ экендиги келип чыгат.

Мейли $0< a<1$ болсун. Эгер $x_2 > x_1 > 0$ болсо, анда $\log_a x_2 > \log_a x_1$ болоорун далилдейли. $x_2 > x_1$ шартынан $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$ түрүндө жазып алып, $\log_a x_2 < \log_a x_1$ экендигин алабыз, анткени $0< a< 1$.

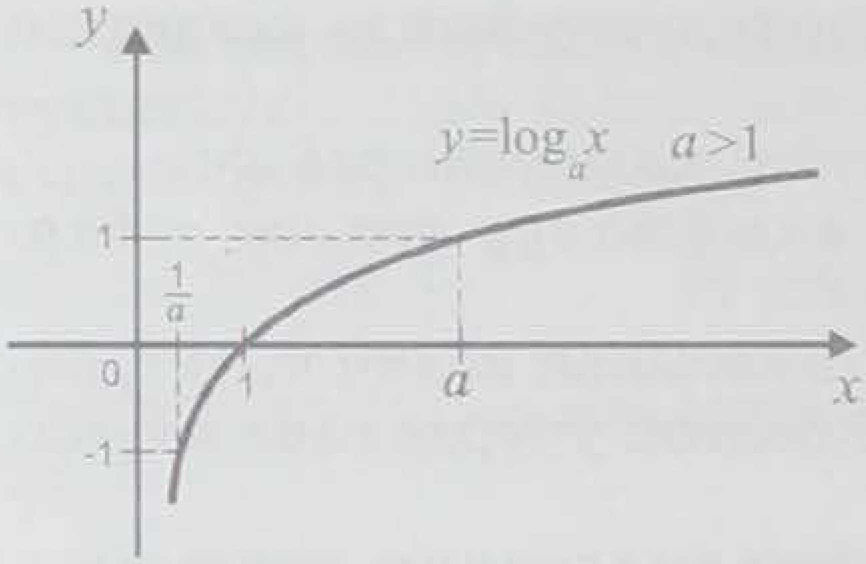
4) Эгер $a > 1$ болсо, анда $y = \log_a x$ функциясы, качан $x > 1$ болгондо *оң* маанини, ал эми качан $0 < x < 1$ болгондо *терс* маанини алат. Эгер $0< a<1$ болсо, анда $y = \log_a x$ функциясы, качан $0< x <1$ болгондо *оң*, ал эми качан $x > 1$ болгондо *терс* маанини алат.

Бул $y = \log_a x$ функциясынын мааниси, качан $x = 1$ болгондо нөлгө барабар боло тургандыгынан жана $x > 0$ аралыгында, эгер $a > 1$ болсо *өсүүчү*, ал эми $0< x < 1$ болсо *кемүүчү* экендигинен келип чыгат.

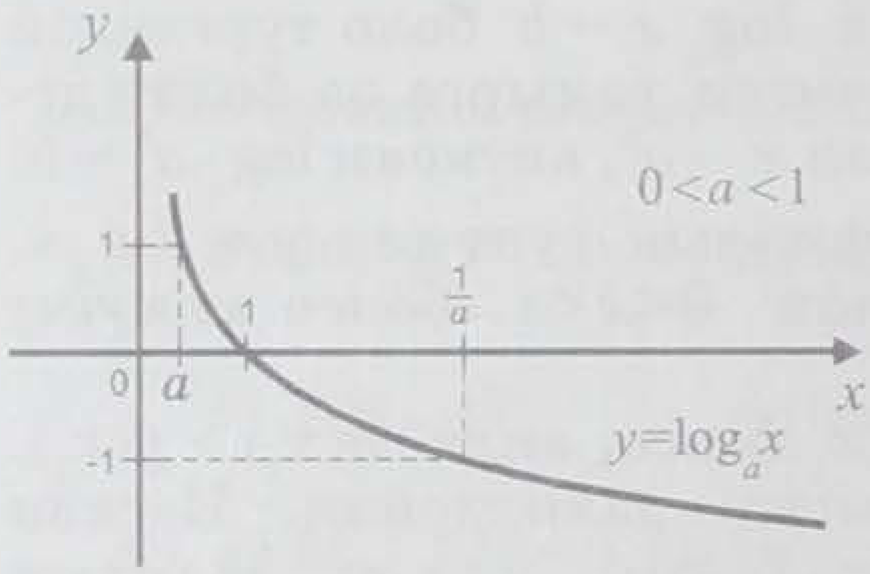
$y = \log_a x$ логарифмалык функциясынын каралып өткөн касиеттеринин негизинде анын графиги Oy огунун оң жагында жайланышып, эгер $a > 1$ болсо 15-чиймеде жана эгер $0< a<1$ болсо 16-чиймеде көрсөтүлгөндөй түрдө болотургандыгы келип чыгат.

17-сүрөттө $y = \log_3 x$ функциясынын графиги, ал эми 18-чийме болсо $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ функциясынын графиги чагылдырылган.

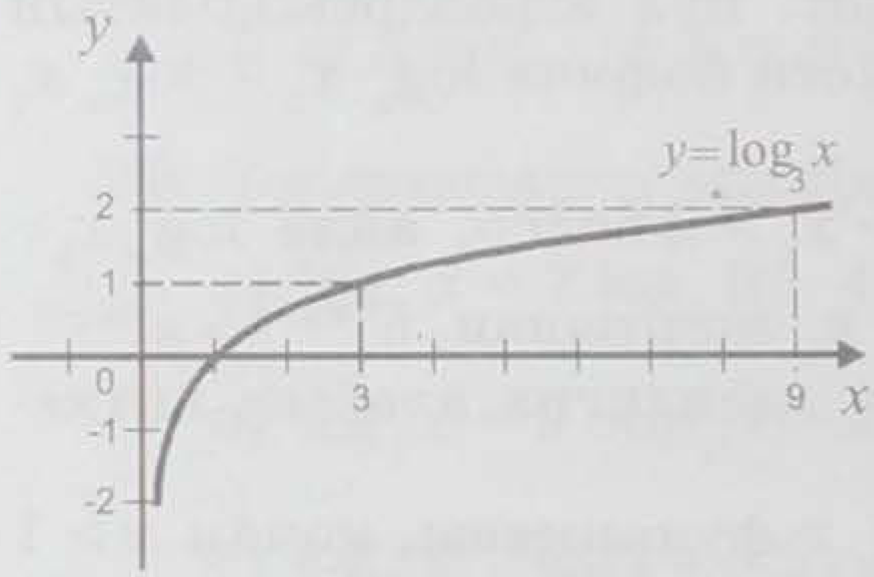
Каалаган $y = \log_a x$ логарифмалык функциясынын графиги (1; 0) чекити аркылуу өтө тургандыгын белгилеп коёлу. Теңдемелерди чыгарууда логарифмалоого тетири *потенцирлөө* деген,



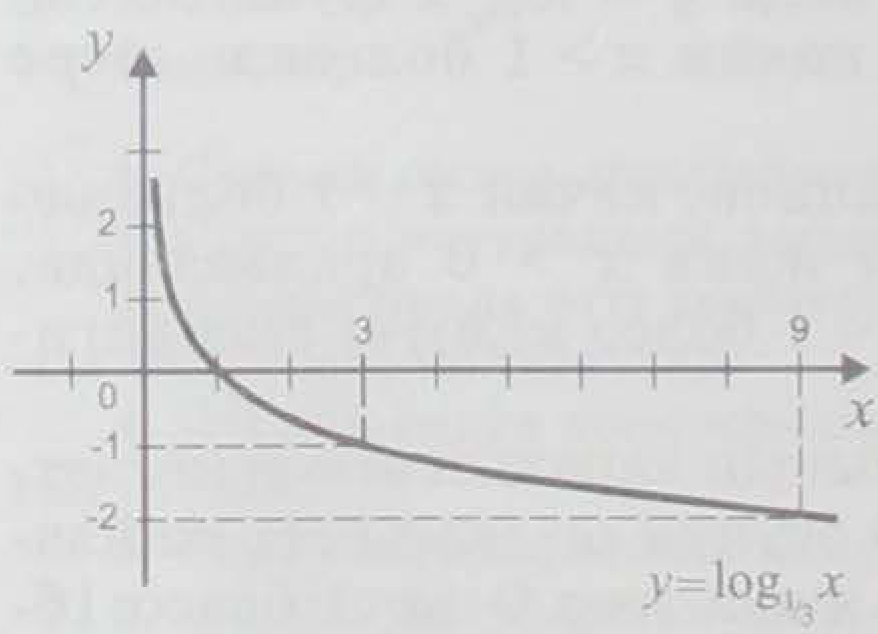
15-чийме.



16-чийме.



17-чийме.



18-чийме.

б. а. логарифмасы боюнча туюнтманын өзүн табуучу шарт тез-тез колдонулуп турат.

Эгер $\log_a x_1 = \log_a x_2$ болсо, анда $x_1 = x_2$ болот, мында $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Мейли, $x_1 \neq x_2$ болсун, маселен $x_2 > x_1$ деп божомолдоп алалы. Эгер $a > 1$ болсо, анда $x_2 > x_1$ барабарсыздыгынан $\log_a x_2 > \log_a x_1$ экендиги келип чыкмак, эгер $0 < a < 1$ болсо, анда $x_2 > x_1$ барабарсыздыгынан $\log_a x < \log_a x_1$ болотургандыгы келип чыкмак. Экөөндө тең $\log_a x_1 = \log_a x_2$ шартына каршы болгон учурларга дуушар болдук. Демек, $x_1 = x_2$.

1-м а с е л е. $\log_3(5x + 2) = \log_3 7$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Далилденген шартты пайдаланып $5x + 2 = 7$ болоорун алабыз, мындан $5x = 5$, $x = 1$.

2-м а с е л е. Эгер $\log_5 x = \log_5 7 + 2\log_5 3 - 3\log_5 2$ болсо, анда x ти тапкыла.

Ч ы г а р у у. Адегенде логарифманын негизги касиеттерин пайдаланып берилген барабардыктын оң жагын өзгөртүп алабыз: $\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - \log_5 2^3 =$

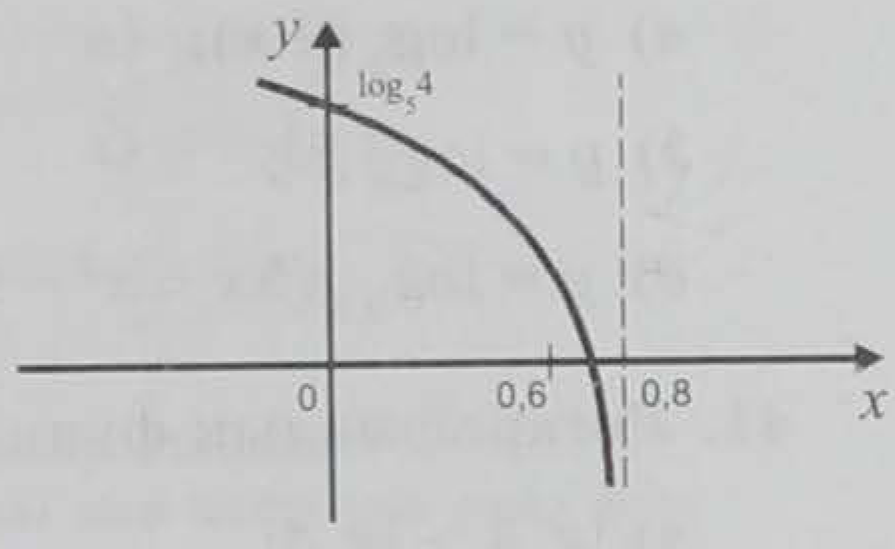
$=\log_5 \frac{7 \cdot 9}{8} = \log_5 \frac{63}{8}$, б. а. $\log_5 x =$

$\log_5 \frac{63}{8}$ мына ошентип $x = \frac{63}{8}$.

3-м а с е л е. $y = \log_5(4 - 5x)$ функциясынын аныкталуу облусун тапкыла жана графигин түзгүлө.

Ч ы г а р у у. Логарифмалык функциянын аныкталуу облусу бардык оң сандардын көптүгү болгондуктан берилген функция x тин качан гана $4 - 5x > 0$, б. а. $x < 0{,}8$ боло турган маанилери үчүн аныкталган болот. Демек, $(-\infty; 0{,}8)$ интервалы берилген функциянын аныкталуу облусу болуп эсептелет.

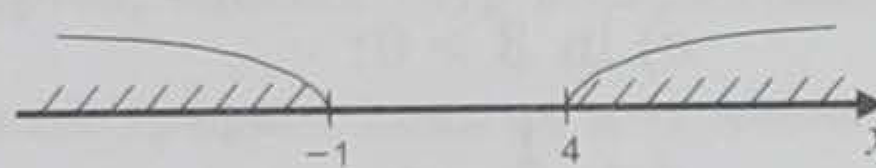
Функциянын графигин түзүү үчүн анын координата октору менен кесилишкен чекиттерин табабыз. $y = 0$ десек $5^0 = 4 - 5x$ ти алабыз. Мындан $5x = 3$, $x = 0{,}6$; $x = 0$ болгон учурда $y = \log_5 4$. Функциянын графиги болсо 19-чиймеде көрсөтүлгөндөй элестелет.



19-чийме.

4-м а с е л е. $y = \log_{0,2}(x^2 - 3x - 4)$ функциясынын аныкталуу облусун тапкыла жана графигин түзгүлө.

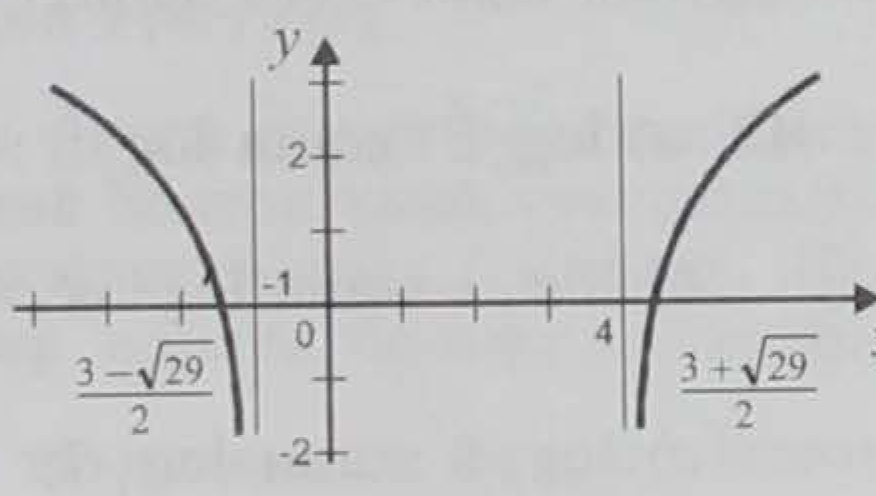
Ч ы г а р у у. Мурдагы маселедегидей эле бул функция x тин $x^2 - 3x - 4 > 0$ болгондой бардык маанилери үчүн аныкталган болот. Бул квадраттык барабарсыздыкты чыгарып маселедеги функциянын аныкталуу облусу $(-\infty; -1)$ жана $(4; \infty)$ интервалдарынын биригүүсүнөн тураарын б. а. $D(f) = (-\infty; -1) \cup (4; \infty)$ экендигин алабыз (20-чийме).



20-чийме.

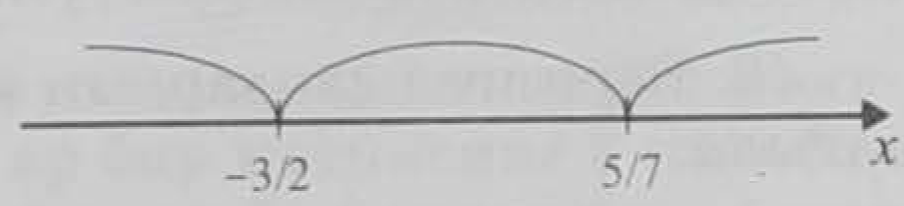
Ал эми бул функциянын графигин түзүү үчүн анын координата октору менен кесилишкен чекиттерин табабыз. Ox огу менен кесилишкен чекиттери үчүн $y = 0$ болгондуктан, $0{,}2^0 = x^2 - 3x - 4$,

мындан $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{29}}{2}$, $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{29}}{2}$.



21-чийме.

Функциянын графиги болсо 21-чиймеде көрсөтүлгөндөй элестелет.



22-чийме.

5-м а с е л е. $y = \log_7 \dfrac{2x + 3}{5 - 7x}$ функциясынын аныкталуу облусун тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\dfrac{2x + 3}{5 - 7x} > 0$ барабарсыздыгын интервалдар методу менен чыгарып $D(f) = \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{7}\right)$ экендигин алабыз (22-чийме).

Көнүгүүлөр

40. Функциялардын аныкталуу облусун тапкыла:

а) $y = \log_2(1 + x)$; *б)* $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 1)$;

в) $y = \log_5 (-x)$;

г) $y = \log_7 |x|$;

д) $y = \log_{0,5} (5x - x^2 - 6)$;

е) $y = \log_6 (x^2 + x + 1)$;

ё) $y = \log_a \sqrt{x+1}$;

ж) $y = \log_2 (x + 6) + \log_3 (6 - x)$.

41. Логарифмалык функциянын кайсы касиетине таянып,

а) $\lg 5 > \lg 4$;

б) $\log_6 < \log_{0,1} 4$;

в) $\ln 3 > 0$;

г) $\ln \frac{1}{2} < 0$;

д) $\log_2 5 > 0$;

е) $\log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$;

ё) $\log_3 7 > \log_3 5$;

ж) $\log_{0,3} 7 < \log_{0,3} 5$

экендигин ырастоого болот?

42. *а*) $\log_3 \frac{6}{5}$ жана $\log_3 \frac{5}{6}$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} e$ жана $\log \log_{\frac{1}{2}} \pi$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ жана $\log_{\frac{1}{3}} 7$;

г) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}$ жана $\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\log_6 5$ жана $\log_8 5$;

е) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ жана $\log_{\frac{1}{4}} 3$

сандарынын кайсынысы чоң?

43. Берилген сандардын кайсылары оң же терс болоорун тактагыла:

а) $\log_3 4{,}5$;

б) $\log_3 0{,}45$;

в) $\log_5 25{,}3$;

г) $\log_2 \frac{1}{3}$;

д) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$;

е) $\log_{0,5} 9{,}6$;

ё) $\log_\pi 3$;

ж) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$.

44. Функциянын графигин түзгүлө:

а) $y = \log_3 x + 1$;

б) $y = \log_3 (x + 1)$;

в) $y = \log_3 (x - 1)$;

г) $y = \log_3 x - 1$;

д) $y = |\log_3 |x||$;

е) $y = \log_3 |x|$;

ё) $y = \log_2 x$;

ж) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;

з) $y = 1 + \log_3 (x + 1)$;

и) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1) - 1$.

45. Берилген функциялардын кайсылары өсүүчү же кемүүчү экендиние тактагыла:

а) $y = \log_{0,075} x$; *в*) $y = \lg x$;

б) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$; *г*) $y = \ln x$.

Суроолор

1. Логарифмалык деп кандай функциялар аталат?
2. Логарифмалык функциянын алгачкы эки касиетин атап бер.
3. Логарифмалык функция өсүүчү жана кемүүчү болуш үчүн кандай шарттар аткарылышы керек?
4. Логарифмалык функция кандай шартта, кайсыл учур аткарылганда оң же терс маани кабыл алат?
5. Эмне үчүн логарифмалык функциянын графиги дайыма x=1 чекити аркылуу өтүп, y огун кесип өтпөйт?

§ 7. Тескери функция түшүнүгү

Баштапкы ылдамдыгы v_0 болгон эркин түшүп келаткан нерсенин v ылдамдыгынын t убактысына болгон көз карандылыгы $v = v_0 + gt$ формуласы аркылуу туюнтулаары белгилүү. Бул формуладан убакыттын ылдамдыкка карата болгон *көз карандылыгын,* атап айтканда $t = \dfrac{v - v_0}{g}$ туюнтмасын табууга болот. $t(v) = \dfrac{v - v_0}{g}$ функциясын $v(t) = v_0 + gt$ функциясына *тескери функция*, ал эми $v(t)$ ны болсо $t(v)$ функциясына *тескери функция* деп аталат. Бул мисалда, t нын ар бир маанисине v нын бир гана мааниси жана тескерисинче, v нын ар бир маанисине t нын бир гана мааниси туура келе тургандыгын белгилеп коёлу.

Эми көрсөткүчтүү жана логарифмалык функцияларды карап көрөлү. $f(x)$ аркылуу көрсөткүчтүү функцияны, ал эми $g(t)$ аркылуу логарифмалык функцияны, б. а. $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$ деп белгилеп алалы, мында a – берилген сан ($a > 0$, $a \neq 1$).

$a^x = y$ теңдемесин x ке карата чыгаралы. Логарифмалык аныктамасы боюнча $x = \log_a y$. Бул барабардыктагы x менен y тин орундарын алмаштырып $y = \log_a x$ логарифмалык функциясын алабыз. $y = \log_a x$ функциясы $y = a^x$ функциясына *тескери функция* деп аталат. Эгер $y = \log_a x$ функциясынан x ти таба турган болсок $x = a^y$ туюнтмасын, ал эми мындагы x менен y тин орундарын алмаштырсак $y = a^x$ көрсөткүчтүү функциясын алабыз. $y = a^x$ функциясы $y = \log_a x$ функциясына *тескери функция* деп аталат. Мына ошентип $f(x)$ жана $g(x)$ *өз ара тескери функциялар* деп аталышат.

Демек, эгер $y = f(x)$ функциясы формула аркылуу берилсе, анда ага тескери функцияны табыш үчүн $f(x) = y$ теңдемесин x ке карата чыгарып жана андан кийин x менен y тин орундарын алмаштырып коюу керек.

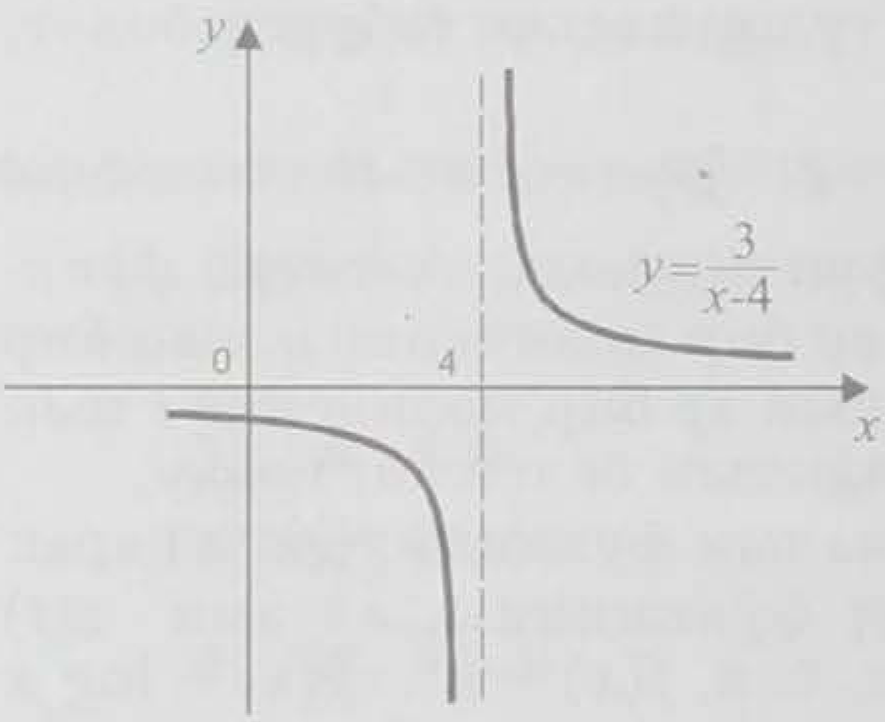
Эгер $f(x) = y$ теңдемеси бирден көп тамырга ээ болсо, анда $y = f(x)$ ка тескери функция болбойт.

Маселен, $f(x) = x^2$ тескери функцияга ээ болбойт, анткени $x^2 = y$ теңдемесин, каалаган $y > 0$ үчүн $x_{1,2} = \pm\sqrt{y}$ деген эки тамырга ээ. Эгер $y = x^2$ функциясын $x \ge 0$ аралыгында гана карасак, анда анын тескериси $y = \sqrt{x}$ болот, себеби $x^2 = y$ теңдемеси, качан $y \ge 0$ болгондо бир гана терс эмес тамырга ээ болоору анык.

1-м а с е л е. $y = \dfrac{3}{x-4}$ функциясына тескери болгон функцияны тапкыла.

Ч ы г а р у у. Бул теңдемени x ке карата чыгарып $x = 4 + \dfrac{3}{y}$ ти алабыз. x ти y менен жана y ти x менен алмаштырсак $y = 4 + \dfrac{3}{x}$ болоорун табабыз.

Бул мисалда $y = \dfrac{3}{x-4}$ функциясынын аныкталуу облусу 4 кө барабар эмес чыныгы сандардын көптүгү, ал эми анын маанилеринин көптүгү болсо нөлдөн башка баардык чыныгы сандар. Бул функциянын графиги 23-чиймеде көрсөтүлгөн.



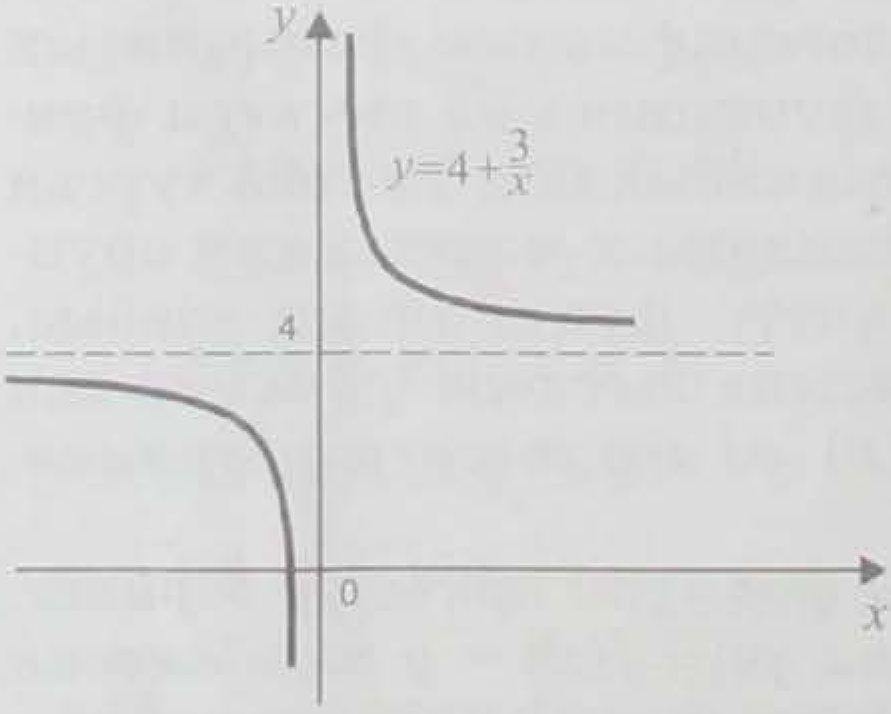
23-чийме.

$y = 4 + \dfrac{3}{x}$ тескери функциянын аныкталуу облусу нөлдөн башка чыныгы сандардын көптүгү, ал эми анын маанилеринин көптүгү 4 төн башка баардык чыныгы сандар. Тескери функциянын графиги 24-чиймеде көрсөтүлгөн.

2-м а с е л е. $y = \dfrac{5x+4}{x}$ функциясына тескери функцияны тапкыла, мында $x < 0$.

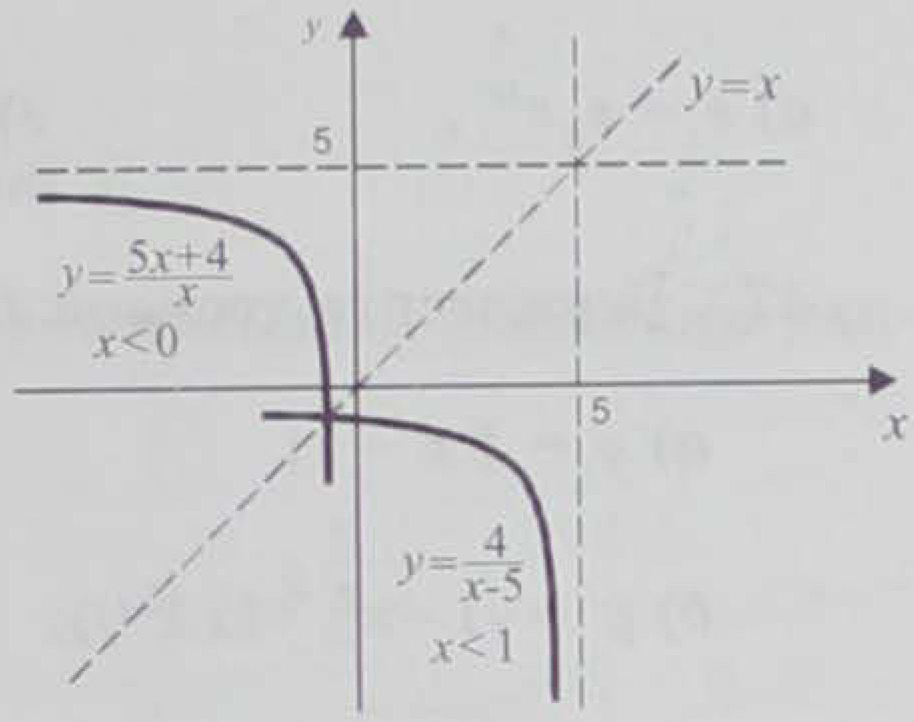
Ч ы г а р у у. Муну да x ке карата чыгарып, $x = \dfrac{4}{x-5}$ ти алабыз. Эми x ти y менен, ал эми y ти x менен алмаштырып берилген функцияга тескери болгон $y = \dfrac{4}{x-5}$ функциясын алабыз.

Бул тескери функциянын аныкталуу облусу берилген функциянын маанилеринин көптүгү менен дал келээрин табабыз. Андай көптүк катары $(-\infty; 5)$ аралыгы кыз-



24-чийме.

мат кылат (25-чийме). Оштентип $y=\dfrac{4}{x-5}$, $x<5$ берилгенге тескери функция.

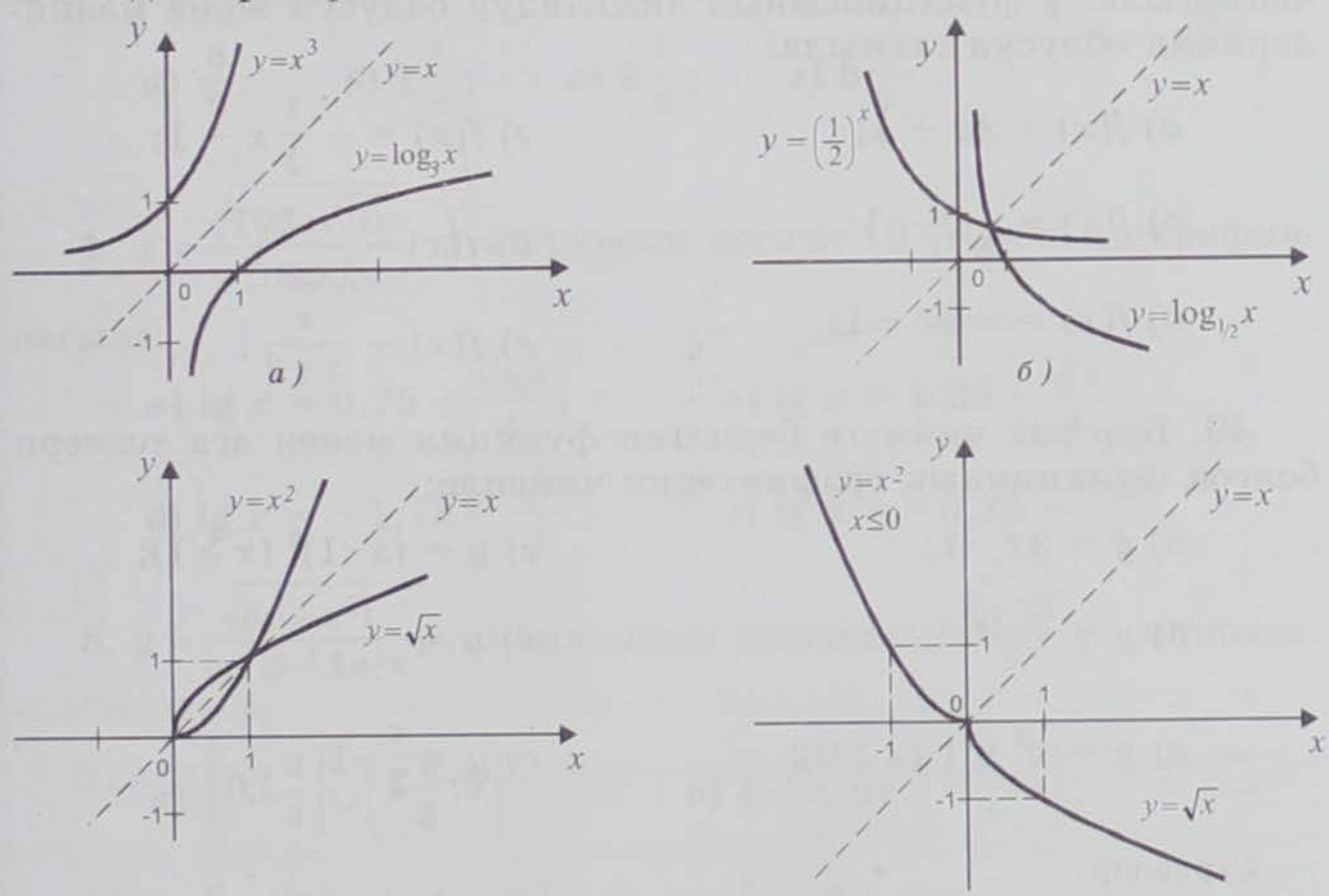


25-чийме.

Жогорку мисалдардан *тескери функциянын аныкталуу облусу алгачкы функциянын маанилеринини көптүгү менен дал келсе, ал эми тескери функциянын маанилеринин көптүгү болсо алгачкы функциянын аныкталуу облусу менен дал келет* деген корутунду чыгарабыз.

Эгер берилген функциянын тескериси болсо, анда ал тескери функциянын графиги $y = x$ түз сызыгына карата берилген функциянын графигине симметриялаш болот.

Өз ара тескери функциялардын графиктерине мисалдар 26-чиймеде көрсөтүлгөн.



26-чийме.

Көнүгүүлөр

46. Формуладагы t ны s аркылуу туюнткула:

а) $s = s_0 + v(t - t_0)$; б) $s = a(t - t_0)^{\frac{3}{2}}$;

в) $s = s_0 e^{\frac{t}{t_0}}$, г) $s = s_0 \ln\left(1+\dfrac{t}{t_0}\right)$.

47. Берилгенге тескери болгон функцияны тапкыла:

а) $y = 5x - 1$; е) $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$;

б) $y = \sqrt{1-x^2}$ $(x \geq 0)$; ё) $y = \dfrac{3x-1}{2}$;

в) $y = \sqrt{1-x}$; ж) $y = x^3 - 3$;

г) $y = e^{\sqrt{x}}$; з) $y = 3^x$;

д) $y = -5x + 4$; и) $y = \log_{0,5} x$.

48. Берилген f функциясына тескери болгон g функциясын чыгаргыла. g функциясынын аныкталуу облусун жана маанилеринин облусун тапкыла:

а) $f(x) = 2x + 1$; г) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - 1$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$; д) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$;

в) $f(x) = -2x + 1$; е) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

49. Бир эле чиймеге берилген функция менен ага тескери болгон функциянын графиктерин чийгиле:

а) $y = 3x - 1$; г) $y = (x-1)^2$ $(x \geq 1)$;

б) $y = \dfrac{2x-1}{3}$; д) $y = \dfrac{1}{x+1}$;

в) $y = x^2 - 1$ $(x \geq 0)$; е) $y = \dfrac{x}{2} - 1$.

Суроолор

1. Берилгенге тескери деп кандай функцияны түшүнөбүз?
2. Эмне үчүн көрсөткүчтүү функция менен логарифмалык функция өз ара тескери болушат?
3. Өз ара тескери функциялардын графиктери сан октуна карата кандай жайланышат?
4. Кайсыл учурда берилген функцияга тескери функция болбойт?

Тест

I вариант

1. $\log_{125}5-\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{2}+\log_{2,5}0,4$ туюнтмасынын маанисин тапкыла.

а) $-3,5$; *б)* $4,5$; *в)* $1\dfrac{1}{3}$; *г)* $-2\dfrac{2}{3}$.

2. $9^{\log_3 6-1,5}$ ти эсептегиле.

а) $2,5$; *б)* $\dfrac{3}{4}$; *в)* $1,5$; *г)* $-1\dfrac{1}{3}$.

3. $x=-1,5$ жана $\log_x\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}$ теңдемелерин чыгарып, алардын тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла.

а) $\dfrac{8}{9}$; *б)* $1\dfrac{1}{8}$; *в)* $9\dfrac{1}{8}$; *г)* $8\dfrac{1}{9}$.

4. $x=\dfrac{\sqrt{100a\sqrt{10a}}}{1000\sqrt{a}}$ туюнтмасын негизи 10 боюнча логарифмалагыла.

а) $\lg x=0,75+\dfrac{3\lg a}{4}$; *в)* $\lg x=1,25-\dfrac{\lg a}{4}$;

б) $\lg x=-1,75+\dfrac{\lg a}{4}$; *г)* $\lg x=-0,25-\dfrac{3\lg a}{4}$.

5. $y=\dfrac{\sqrt{5x-x^2}}{\lg_{\frac{1}{2}}(5-3x)}$ функциясынын аныкталуу облусун тапкыла.

а) $\left[0;1\dfrac{2}{3}\right]\cup\left(1\dfrac{2}{3};5\right]$; *б)* $(-\infty;\ 0)\cup\left(1\dfrac{2}{3};5\right]$;

в) $\left[0;1\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(1\dfrac{1}{3};1\dfrac{2}{3}\right]$; *г)* $\left[0;1\dfrac{2}{3}\right)$.

6. Эгер $\log_3 x=\dfrac{1}{2}\log_3\sqrt{a}-\dfrac{\log_3 b}{4}-0,5$ экендиги белгилүү болсо x ти тапкыла.

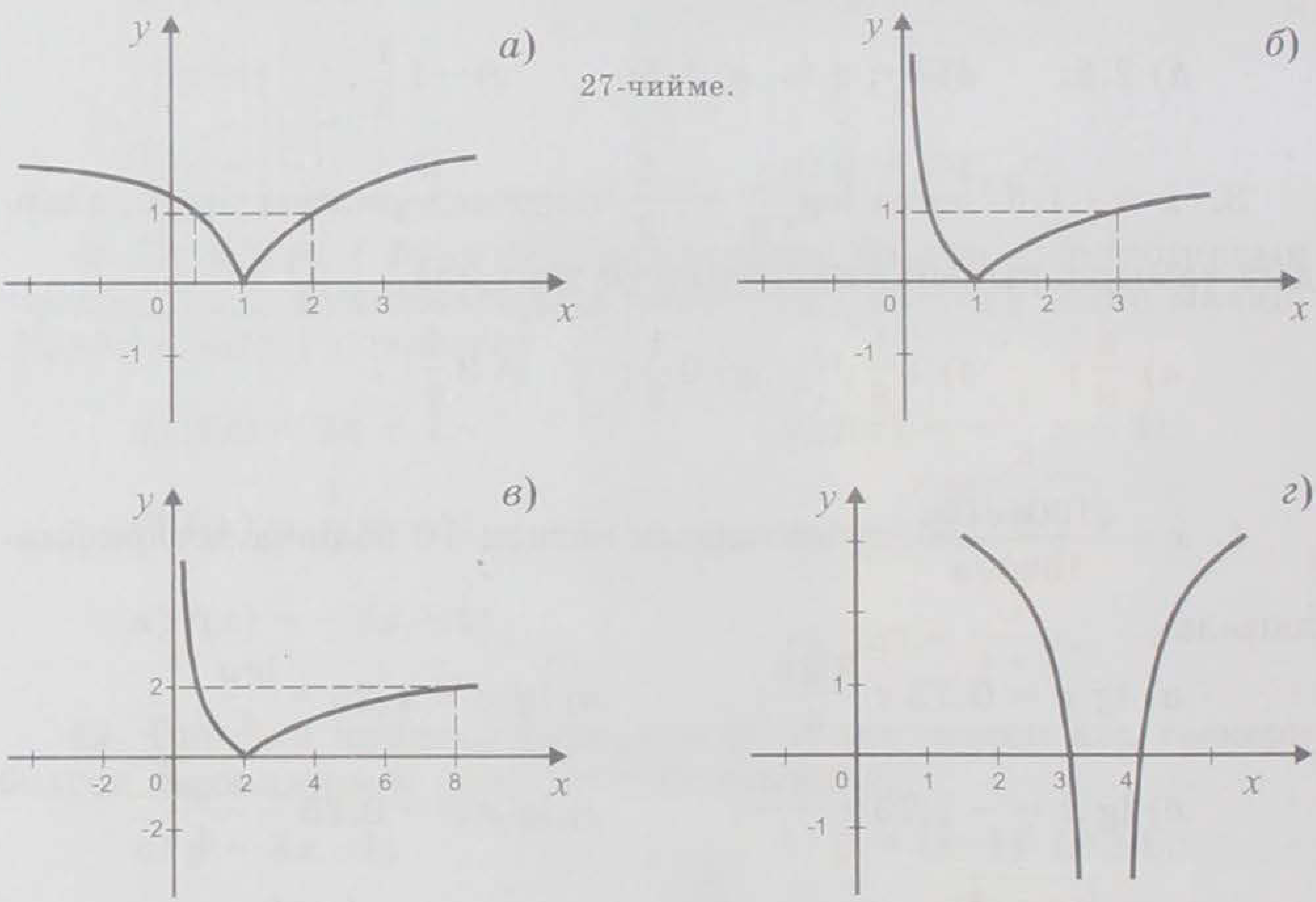
а) $x=\sqrt[4]{\dfrac{a}{4b}}$; *б)* $x=\dfrac{a}{\sqrt[4]{9b}}$;

в) $x=\sqrt[4]{\dfrac{a}{9b}}$;　　　　　　*г*) $x=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3b}}$.

7. Эгер $\lg 2 = 0{,}301$ болсо 2^{2000} даражасы канча цифрадан турат?

а) 601;　　　*б*) 602;　　　*в*) 605;　　　*г*) 62.

8. $y=|\log_3 x|$ функциясынын графигин түзгүлө.



27-чийме.

9. $y=\dfrac{1}{4}x-7$ деп берилгенге тескери болгон функциянын аныкталуу облусун жана маанилеринин көптүгүн тапкыла.

а) $D(y)=[0;\infty]$; $E(y)=\overline{R}$;

б) $D(y)=\overline{R}$, $E(y)=[0;\infty]$;　　　*г*) $D(y)=R$, $E(y)=\overline{R}$.

в) $D(y)=[-1;\infty]$; $E(y)=\overline{R}$;

10. Эгер $\log_{\sqrt[3]{45}} 25=a$ болсо, анда $\log_9 15$ ти тапкыла.

а) $\dfrac{2a(a-1)}{3(a-2)}$;　　　*б*) $\dfrac{2a(a+1)}{3(2-a)}$;

в) $\dfrac{2(6-1)}{3(2-a)}$; *г)* $\dfrac{6+a}{2(6-a)}$.

11. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \cdot \log_9 10$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө.

а) $\log_3 100$; *б)* $\log_2 50$; *в)* $\log_2 10$; *г)* $\log_4 5$;

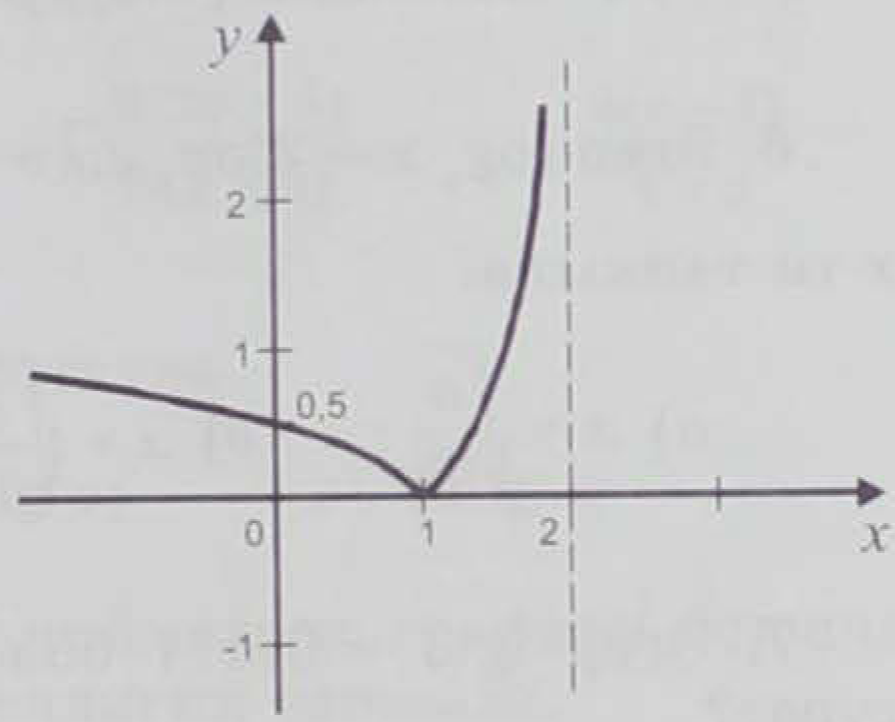
12. Функциянын 28-чиймедеги графиги боюнча ал кайсы формула аркылуу берилгендигин тапкыла.

а) $y = \left|\log_{\frac{1}{4}}(2+x)\right|$;

б) $y = \left|\log_{\frac{1}{4}}(2-x)\right|$;

в) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}(2-x)\right|$;

г) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} 2+x)\right|$.



28-чийме.

II вариант

1. $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{3} - \log_{0,2} 5 + \log_{64} 4$ туюнтмасынын маанисин тапкыла.

а) $-\dfrac{2}{3}$; *б)* $\dfrac{2}{3}$; *в)* $-2\dfrac{2}{3}$; *г)* $-1\dfrac{1}{3}$.

2. $4^{1,5} - \log_{16} 25$ ти эсептегиле.

а) 2,5; *б)* 1,5; *в)* 2,6; *г)* 1,6.

3. $\log_{16} x = -\dfrac{2}{3}$ жана $\log_x 0,2 = -0,5$ тендемелерин чыгарып, алардын тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла.

а) 4,2; *б)* 25,25; *в)* 6,25; *г)* 0,8.

4. $x = \dfrac{\sqrt{10b\sqrt[3]{100b}}}{100\sqrt[3]{b}}$ туюнтмасын негизи 10 боюнча логарифмалагыла.

а) $\lg x = \dfrac{5}{6} - \dfrac{\lg b}{3}$; *б)* $\lg x = \dfrac{-7}{6} + \dfrac{\lg b}{3}$;

в) $\lg x = \frac{-7}{6} - \frac{\lg b}{3}$; *г*) $\lg x = -\frac{5}{6} + \frac{\lg b}{3}$.

5. $y = \frac{\sqrt{-x^2-3x}}{\log_{0,4}(2x+3)}$ функциясынын аныкталуу облусун тапкыла.

а) $[-5;\ -1) \cup (-1;\ 0]$; *б*) $(-\infty;\ -3) \cup (-1{,}5;\ -\infty)$;

в) $(-1{,}5;\ -1) \cup (-1;\ 0]$; *г*) $[-3;\ -1{,}5) \cup (-1{,}5;\ 0]$.

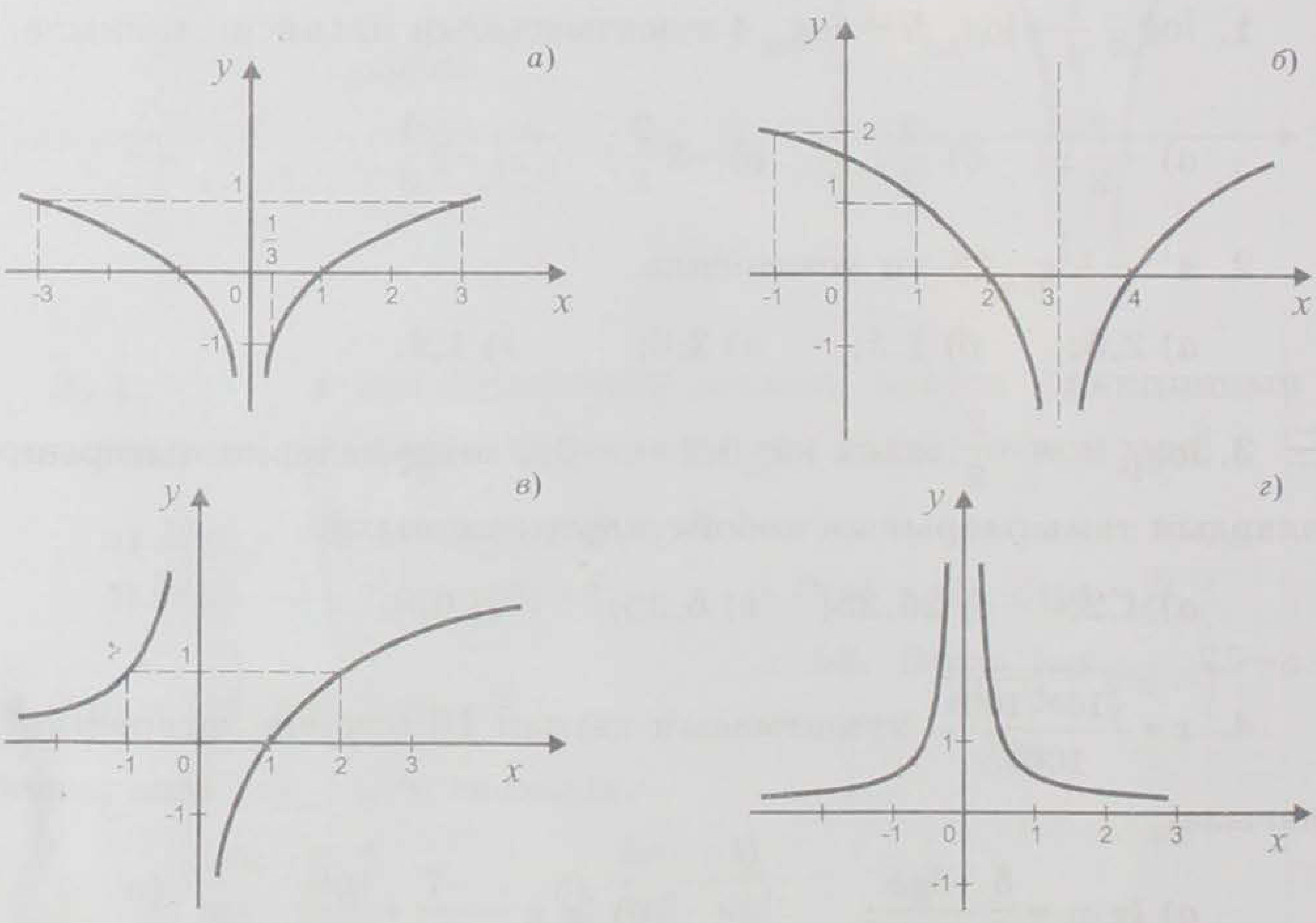
6. Эгер $\log_5 x = 3\log_5 \sqrt{a} - \frac{\log_5 b}{2} - 0{,}5$ экендиги белгилүү болсо x ти тапкыла.

а) $x = \sqrt{\frac{a}{5b}}$; *б*) $x = \sqrt[4]{\frac{a^2}{5b^2}}$; *в*) $x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{5b}}$; *г*) $x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{5b^2}}$.

7. Эгер $\lg 3 = 0{,}477$ болсо 3^{2004} даражасы канча цифрадан турат?

а) 968; *б*) 967; *в*) 969; *г*) 96.

8. $y = \log_3 |x|$ функциясынын графигин түзгүлө.



29-чийме.

9. $y = -2x + 1$ деп берилгенге тескери болгон функциянын аныкталуу облусун жана маанилеринин көптүгүн тапкыла.

а) $D(y) = \overline{R}$, $E(y) = [0; \infty]$;

б) $D(y) = [-1; \infty]$, $E(y) = \overline{R}$;

в) $D(y) = \overline{R}$, $E(y) = \overline{R}$;

г) $D(y) = [0\ ; \infty]$, $E(y) = [1; \infty]$.

10. Эгер $\log_{12}18 = a$ болсо, анда $\log_8 9$ ту тапкыла.

а) $\dfrac{3(2a-1)}{2(2-a)}$; б) $\dfrac{3(a-1)}{2(3-a)}$; в) $\dfrac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; г) $\dfrac{b(a-1)}{4+a}$.

11. $a^{\frac{\lg\lg a}{\lg a}}$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө.

а) $a\sqrt{2}$; б) $a \lg 3$; в) $\lg a$; г) $\sqrt{2}\lg a$

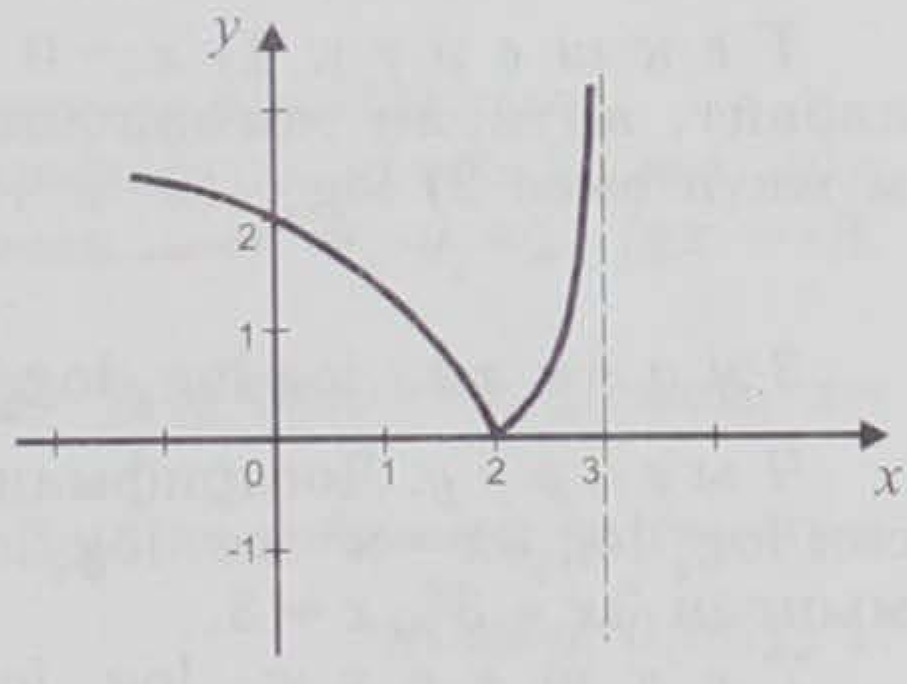
12. Кайсы бир функциянын 30-чиймедеги графиги боюнча ал кайсы формула аркылуу берилгендигин тапкыла.

а) $y = \left|\log_{\frac{1}{3}}(x-3)\right|$;

б) $y = \left|\log_{\frac{1}{3}}(3-x)\right|$;

в) $y = \left|\log_{\sqrt{3}}(3-x)\right|$;

г) $y = \left|\log_{\sqrt{3}}(x-3)\right|$.



30-чийме.

§ 8. Логарифмалык теңдемелер жана барабарсыздыктар

1. Логарифмалык теңдемелер. Өзгөрүлмөнү логарифма белгисине камтыган тендеме *логарифмалык теңдеме* деп аталат. Логарифмалык жөнөкөй тендеме жалпысынан $\log_a x = b$ (мында $a > 0$, $a \neq 1$) түрүндө берилет. Маселен, $\log_2 x = 1 - x$; $\log_2(x+6) = 3$; $\log_x(x-1) = 2$; $\sqrt{\lg x} = \lg\sqrt{x}$ ж. б. логарифмалык тендемелерге мисал боло алышат.

Логарифмалык тендемени чыгаруу анын бардык тамырларын табуу же тамырынын жок экендигин далилдөө дегенди билдирет. Логарифмалык тендемелерди чыгаруунун айрым ыкмаларын карайбыз.

Логарифмалык теңдемелердин чыгарылыштары баяндалган төмөнкү ыкмаларда тамырларын жоготуп албагыдай же мүмкүн чет тамырларды пайда кылбай тургандай өзгөртүүлөр гана колдонула тургандыгын эскертип коёлу. Ошондуктан эгер өзгөртүп алган алгебралык теңдеменин тең күчтүүлүгүнө ишенич жок болсо, ар бир алынган тамырды текшерип алуу керек.

*а) **Логарифмалык теңдемени логарифманын аныктамасынын негизинде чыгаруу.***

1-м а с е л е. $\log_3(2x-1)=2$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Логарифманын аныктамасы боюнча $2x+1=3^2$,

$$2x=8,\ x=4.$$

Т е к ш е р у ү: $\log_3(2x+1)=\log_3(2\cdot 4+1)=\log_3 9=2.$

Жообу: 4.

2-м а с е л е. $\log_{x+1}(2x^2+1)=2$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Логарифманын аныктамасы боюнча

$2x^2+1=(x+1)^2$; $2x^2+1=x^2+2x+1$, $x^2-2x=0$, $x_1=0$, $x_2=2$.

Т е к ш е р у ү: 1) $x=0$ берилген теңдеменин тамыры боло албайт, анткени логарифманын негизи 1 ге барабар болушу мүмкүн эмес 2) $\log_{2+1}(2\cdot 2^2+1)=\log_3 9=2$.

Жообу: 2.

3-м а с е л е. $\log_\pi\log_2\log_3 3x=0$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Логарифманын аныктамасын удаалаш колдонсок $\log_2\log_3 3x=\pi^0$ же $\log_2\log_3 3x=1$; $\log_3 3x=2^1$ же $\log_3 3x=2$, мындан $3x=3^2$, $x=3$.

Т е к ш е р у ү: $\log_\pi\log_2\log_3 3\cdot 3=\log_\pi\log_2\log_3 9=\log_\pi\log_2 2=\log_\pi 1=0$;

Жообу: 3.

*б) **Потенцирлөө ыкмасы.***

4-м а с е л е. $\log_5 x=\log_5(6-x^2)$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Сандардын логарифмаларынын барабардыгынан: $x=6-x^2$, $x^2+x-6=0$, $x_1=-3$, $x_2=2$.

Т е к ш е р у ү: 1) -3 берилген теңдеменин тамыры боло албайт, анткени терс сандын логарифмасы болбойт.

2) $\log_5 x=\log_5 2$. $\log_5(6-x^2)=\log_5(6-2^2)=\log_5 2$.

Жообу: 2.

5-м а с е л е. $\log_5(x+4)-\log_5(1-2x)=-\log_5(2x+3)$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Берилген теңдемени логарифманын касиеттерин колдонуп потенцирлесек:

$$\log_5\frac{x+4}{1-2x}=\log_5(2x+3)^{-1};\quad \frac{x+4}{1-2x}=(2x+3)^{-1};\quad \frac{x+4}{1-2x}=\frac{1}{2x+3},$$

$2x^2+3x+8x+12=1-2x,\ \ 2x^2+13x+11=0;\ x=-1,\ x_2=-5{,}5.$

Т е к ш е р ү ү: 1) $\log_5 3-\log_5 3=0,\ -\log_5(-2+3)=-\log_5 1=0.$ Демек $x=-1$ тамыры.

2) $\log_5(x+4)=\log_5(-1{,}5)$ – мүмкүн эмес.

Жообу: -1.

6-м а с е л е. $\log_{x-6}(x^2-5)=\log_{x-6}(2x+19)$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. $x^2-5=2x+19,\ \ x^2-2x-24=0,\ \ x_1=-4,\ x_2=6.$

Т е к ш е р ү ү: 1) $\log_{-10}11$ – мүмкүн эмес, $x=-4$ тамыр боло албайт. 2) $\log_0 31$ – мүмкүн эмес, демек $x=6$ да тамыр боло албайт.

Жообу: Теңдеме чыгарылышка ээ болбойт.

в) Логарифмалык теңдемени квадраттык теңдемеге алып келүү.

7-м а с е л е. $\lg^2x=3-2\lg x$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. $\lg x=y$ деп белгилеп алып $y^2=3-2y$ же y^2+ $+2y-3=0$ теңдемесин алабыз. Мындан $y_1=-3,\ y_2=1.$ $lgx=-3,$ $x_1=0{,}001;$ $lgx=1,\ \ x_2=10.$

Т е к ш е р ү ү: 1) $\lg^2 0{,}001=9;\ 3-2\lg 0{,}001=9.$ Демек, $x=$ $=0{,}001$ тамыр болот.

2) $\lg^2 10=1;\ 3-2\lg 10=1,\ \ x=10$ – бул да теңдеменин тамыры

Жообу: 0,001; 1.

г) Логарифманы бирдей негизге келтирүү жолу менен чыгарылуучу теңдемелер.

8-м а с е л е. 1) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7;$

2) $\log_{3x}3=\log_{x^2}3$ теңдемелерин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. 1) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7,$

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 16}+\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+\log_2 x=7,\quad \log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x=7,$$

$$\frac{7}{4}\log_2 x=7,\ \ \log_2 x=4,\ \ x=16.$$

Т е к ш е р ү ү: $\log_{16}16+\log_4 16+\log_2 16=1+2+4=7.$

Жообу: 7.

2) $\dfrac{\log_3 3}{\log_3 3x} = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 x^2}$; $\dfrac{1}{1+\log_3 x} = \dfrac{1}{2\log_3 x}$, $2\log_3 x = 1 + \log_3 x$,

$\log_3 x = 1$, $x = 3$.

Т е к ш е р ү ү: $\log_{3\cdot 3} 3x = \log_9 3$.

Жообу: 3.

д) Эки жагын тең логарифмалоо жолу менен чыгарылуучу теңдемелер.

9-м а с е л е. $x^{\lg x+2} = 1000$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Теңдеменин эки жагын тең логарифмалоо ($x>0$):

$(\lg x+2)\cdot \lg x = \lg 1000$, $\lg^2 x + 2\lg x - 3 = 0$.

$\lg x = y$, $y^2 + 2y - 3 = 0$, $y_1 = -3$, $y_2 = 1$.

Мындан $\lg x = -3$, $x_1 = 10^{-3} = 0{,}001$, $\lg x = 1$, $x_2 = 10$.

Жообу: 0,001; 10.

Т е к ш е р ү ү: 1) $0{,}001^{\lg 0{,}001+2} = 0{,}001^{-3+2} = 0{,}001^{-1} = 1000$ десек $x = 0{,}001$ берилген теңдеменин тамыры.

2) $10^{\lg 10+2} = 10^{1+2} = 10^3 = 1000$, $x = 10$ бул да теңдемени канааттандырат.

ж) Логарифмалык теңдемелерди график жолу менен чыгаруу.

10-м а с е л е. $\log_2 x = 3 - x$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Бир эле координата системасына $f(x) = \log_2 x$ жана $\varphi(x) = 3 - x$ функцияларынын графиктерин түзөбүз (31-чийме). $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функцияларынын графиктеринин кесилишкен чекитинин абсциссасы болжол менен экиге барабар. Бул теңдеменин так тамыры экендигин текшерүү кыйын эмес.

Э с к е р т ү ү. Көрсөткүчтүү жана логарифмалык функцияларды камтыган айрым маселелерди чыгарууда төмөнкү

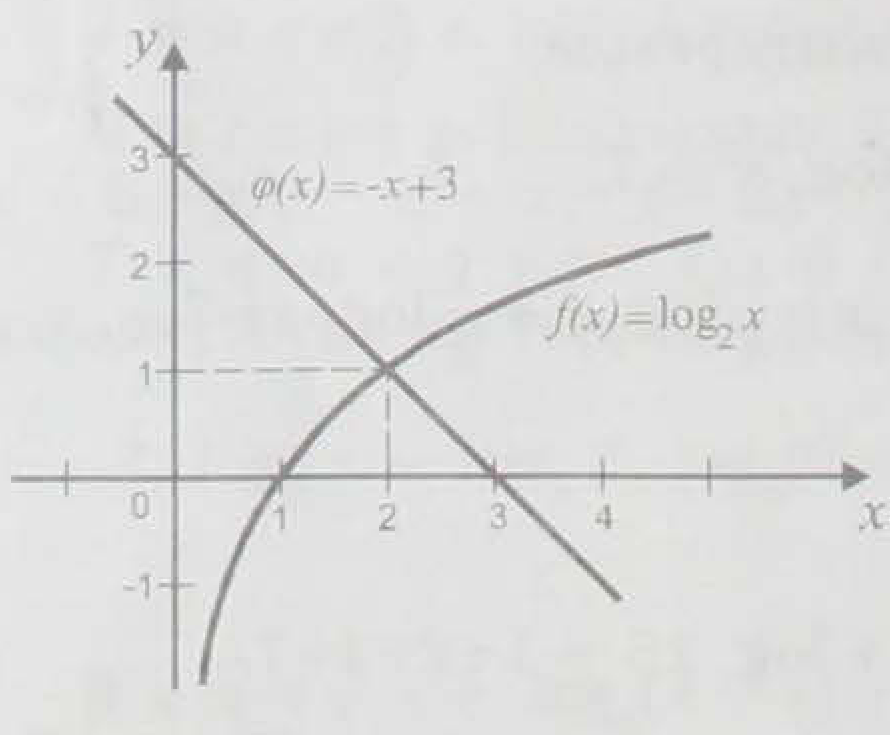
$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \qquad (1)$$

жана

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}} \qquad (2)$$

формулалары менен берилген сунуштарды колдонгон өтө ыңгайлуу. Буларды маселе чыгарууга колдонуудан мурда, алардын тууралыгын далилдеп алалы.

(1) формуласынын эки жагын тең c негизи боюнча логарифмаласак



31-чийме.

$$\log_c (a^{\log_c b}) = \log_c (b^{\log_c a}) \text{ же } \log_c b \, \log_c a = \log_c a \, \log_c b$$

теңдештиги анын тууралыгын ырастайт.

Ушул эле сыяктуу (2) формуласынын эки жагын тең a негизи боюнча логарифмалайлы, анда

$$\log_a (a^{\sqrt{\log_a b}}) = \log_a (b^{\sqrt{\log_b a}}) \text{ же } \sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_b a} \log_a b.$$

Оң жагын a негизине өткөрсөк, $\sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_a b}$ теңдештигин алабыз.

11-м а с е л е. $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} = 15$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. (1) формуласы боюнча $5^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}$ болгондуктан, теңдемебиз $5^{\log_2 x} + 2 \cdot 5^{\log_2 5} = 15$ түрүнө келет.

Мындан, $5^{\log_2 x} = 5$, $\log_2 x = 1$, $x = 2$.

Жообу: 2.

12-м а с е л е. $2^{\sqrt{\log_2 x}} + x^{\sqrt{\log_x 2}} = 4$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. (2) формуласы боюнча $x^{\sqrt{\log_x 2}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$ болгондуктан теңдемебиз $2^{\sqrt{\log_2 x}} + 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 4$ түрүнө келет.

Мындан $2^{\sqrt{\log_2 x}} = 2$, $\log_2 x = 1$, $x = 2$.

Жообу: 2.

Көнүгүүлөр

50. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $\log_{\frac{1}{2}} (2x + 3) = 0$;

б) $\log_3 (x + 3) = -1$;

в) $\log_{0,3} (x - 1) = 4$;

г) $\log_4 \log_2 x = \frac{1}{2}$;

д) $\log_5 \log_3 \log_2 (x^2 + 7x) = 0$;

е) $\log_2 (9 - 2x) = 3 - x$;

ё) $\log_5 x^2 = 2$;

ж) $\log_4 x^3 = 6$.

51. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $\lg x + \lg x^2 = \lg 9x$;

б) $\log_{0,1} (x^2 + 1) = \log_{0,1} (2x - 5)$;

в) $\log_2 (x + 12) = 2\log_2 x$;

г) $\lg (x + 1,5) = -\lg x$;

д) $\log_5 (x - 1) + \log_5 (x - 2) = \log_5 (x + 2)$;

е) $\lg(x^2+75) - \lg(x-4) = 2;$

ё) $\lg(x+6) - \frac{1}{2}\lg(2x-3) = 2 - \lg 25;$

ж) $\frac{2\log_{0,3} x}{\log_{0,3}(5x-4)} = 1;$

з) $\frac{1}{2}\lg(2x-1) = \lg\sqrt{x-9};$

и) $\log(x^2+2x+3) = \log_5 6.$

52. Тендемелерди чыгаргыла:

а) $\log_2^2 x - 3\log_2 x = 4;$

б) $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x;$

в) $\frac{1}{5-\log_3 x} + \frac{2}{1+\log_3 x} = \ln e;$

г) $\log_5^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0;$

д) $\log + \log_{0,2} x = 2;$

е) $\log_3^2 x + \log_3 x^2 = 8;$

ё) $\lg^3 x^2 = 8\lg x;$

ж) $\frac{1}{10}\lg^4 x - \lg^2 x + 0,9.$

53. Тендемелерди чыгаргыла:

а) $\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 4;$

б) $\log_5 x + 2\log_x 5 = 5;$

в) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3;$

г) $\log_x 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x;$

д) $\log_x(5x^2)\log_5^2 x = 1;$

е) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x = 2\log_3(x-2);$

ё) $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3;$

ж) $\log_{x^2} 9 + \log_{3x} 81 = 3.$

54. Тендемелерди чыгаргыла:

а) $x^{\log_3 x} = 3;$

б) $x^{\log_2 x+2} = 8;$

в) $x^{1-\frac{\log_5 x}{4}} = 5;$

г) $x^{2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x} = \frac{1}{9};$

д) $\frac{1}{2}x^{\log_2 x-2} = 4;$

е) $x^{1-\frac{1}{4}\lg x} = 10;$

ё) $x^{\lg x} = 100x;$

ж) $x^{2\lg^2 x} = 10x^3;$

з) $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}$; *и)* $2^{3\lg x}\cdot 5^{\lg x}=1600$.

55. Теңдемелерди график жолу менен чыгаргыла:

а) $x+\lg x=1$; *е)* $\log_{\frac{1}{2}} x=x-3$;

б) $\log_2 x=x+1$; *ё)* $\log_3 x=0{,}5x+0{,}5$;

в) $\lg x+2=x^2$; *ж)* $\log_{\frac{1}{3}} x=3x$;

г) $\log_3 x+|x|=0$; *з)* $5^{\lg x}+x^{\lg 5}=50$;

д) $2\lg_2 x=\sin x$; *и)* $10^{\sqrt{\lg x}}+x^{\sqrt{\log_x 10}}=0{,}2$.

Суроолор

1. Кандай теңдемелер логарифмалык теңдемелер деп аталат?
2. $\lg 5+x\lg 6=3$ логарифмалык теңдеме боло алабы?
3. $\log_a f(x)=\log_b(x)$ логарифмалык теңдеменин аныкталуу облусун барабарсыздыктардын системасы түрүндө жазып бергиле.
4. Көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгарууда эмне үчүн $a>0$, $a\neq 1$ деген шартты алабыз?
5. Белгисизи негизинде да, даража көрсөткүчүндө да камтылган, мисален $x^{\lg x}=10$ түрүндөгү логарифмалык теңдемелер кантип чыгарылат?
6. Логарифмалык теңдемелерди чыгарууда алынган тамырларды текшерип алуу керекпи? Эмне үчүн?

2. Логарифмалык барабарсыздыктар. Өзгөрүлмөнү логарифма белгисине гана камтыган барабарсыздык *логарифмалык барабарсыздык* деп аталат. Маселен,

$$\log_a f(x)>\log_a \varphi(x);\quad \log_a f(x)<\log_a \varphi(x),\ (a>0,\ a\neq 1)$$

түрүндөгүлөр логарифмалык барабарсыздыктар болуп эсептелет.

$\log_a f(x)>\log_a \varphi(x)$ барабарсыздыгы, качан $a>1$ болгондо

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ \varphi(x)>0 \\ f(x)>\varphi(x) \end{cases}$$

системасына жана качан $0<a<1$ болгондо

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ \varphi(x)>0 \\ f(x)<\varphi(x) \end{cases}$$

системасына тең күчтүү болот.

Логарифмалык барабарсыздыктарды чыгарууда барабарсыздыктардын жалпы касиетин, логарифмалык функциянын монотондуулук касиетин жана анын аныкталуу облустарын эске алуу керек.

1-м а с е л е. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{5x-3}{x+2} > 1$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

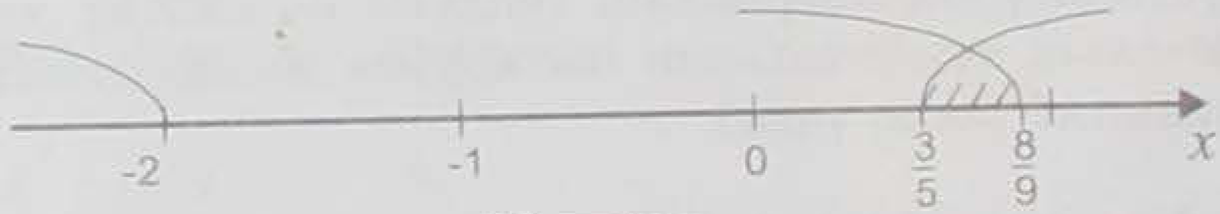
Ч ы г а р у у. Барабарсыздыктын оң жагын логарифма аркылуу туюнтсак $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{5x-3}{x+2} > \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2}$ болот. Бул барабарсыздык

$$\begin{cases} \dfrac{5x-3}{x+2} > 0, \\ \dfrac{5x-3}{x+2} < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

системасына тең күчтүү. Мунун биринчи барабарсыздыгы логарифмалык функциянын аныкталуу облусун, ал эми экинчиси негизи $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ болгон учурдагы анын кемүүчүлүгүн туюнтат.

Ошентип, $\begin{cases} \dfrac{5x-3}{x+2} > 0, \\ \dfrac{10x-6-(x+2)}{2(x+2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5x-3}{x+2} > 0, \\ \dfrac{9x-8}{2(x+2)} < 0 \end{cases}$.

Акыркы системанын чыгарылышы 32-чиймени чагылдырды



32-чийме.

Жообу: $\dfrac{3}{5} < x < \dfrac{8}{9}$.

2-м а с е л е. $\log_2(x-3) + \log_2(x-2) \le 1$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Логарифмалык функция аргументинин оң маанисинде гана аныкталгандыктан, берилген барабарсыздык $x-3>0$ жана $x-2>0$ болгон учурларда гана мааниге ээ.

Демек, $x-3$ аралыгы бул барабарсыздыктын аныкталуу облусу болуп эсептелет. Логарифмалык касиети боюнча, качан $x>3$ болгон учурда берилген барабарсыздык $\log_2(x-3)(x-2) \le \log_2 2$ барабарсыздыгы менен тең күчтүү.

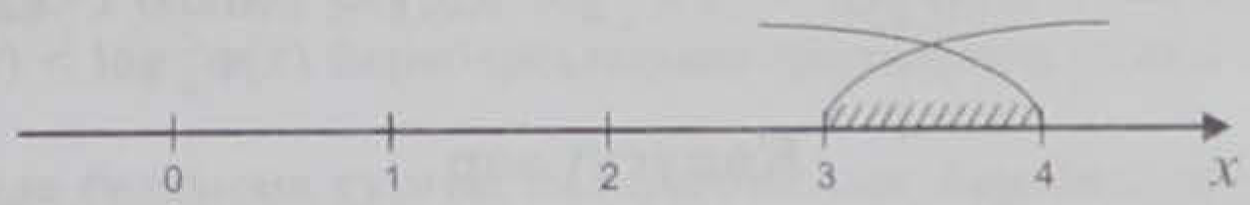
Негизи 2 болгон логарифмалык функция өсүүчү. Ошондуктан, качан $x>3$ болгондо акыркы барабарсыздык $(x-3)(x-2) \le 2$ болгондо гана аткарылат.

Ошентип алгачкы барабарсыздык

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \le 0, \\ x > 3 \end{cases}$$

системасына тең күчтүү.

Бул системанын биринчисинен $x^2-5x+4 \le 0$ барабарсыздыгын алабыз, мындан $1 \le x \le 4$. Бул кесиндини $x>3$ аралыгы менен дал келтирип, барабарсыздыктын чыгарылышына ээ болобуз (32^a-чийме).



32^a-чийме.

Жообу: $3<x<4$.

3-м а с е л е. $\lg(x-1)+\lg(x-2)<\lg(x+2)$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. $\begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \\ x+2>0 \\ \lg(x-1)(x-2)<\lg(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \\ x+2>0 \\ (x-1)(x-2)<x+2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>2 \\ x>-2 \\ x^2-4x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x(x-4)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ 0<x<4 \end{cases}$$

Жообу: $2<x<4$.

Э с к е р т ү ү. Негизи анык эмес айрым логарифмалык барабарсыздыктарды чыгарууда пайдалуу болгон ырастоону кошумчалап коёлу.

Эгер $\log_a b>0$ *болсо, анда* $(a-1)(b-1)>0$, *б. а.* $(a-1)$ *жана* $(b-1)$ *бир белгиде болушат.*

Чынында эле эгер $\log_a b>0$ болсо, анда $\log_a b>\log_a 1$.

Мындан, качан $a>1$ болгон учурда $b>1$ болоору анык, ырастообуз туура. Эми качан $0<a<1$ болсо, $b<1$ экендигин көрөбүз, анткени $(a-1)<0$ жана $(b-1)<0$. Ырастообуз дагы туура.

Ушул эле сыяктуу эгер $\log_a b<0$ болсо, $(a-1)(b-1)<0$ болоорун далилдөөгө болот (өз алдынарча далилдеп көргүлө).

4-м а с е л е. $\log_{3x}(42x^2-13x+1)>0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Муну адаттагы көз караш менен чыгаруу өтө татаал. Себеби, качан $3x>1$ жана качан $0<3x<1$ болгон эки учурду кароо керек. Ал экөө тең барабарсыздыктардын чоң системасын түзүүгө алып келет. Ал эми ырастоону колдонуп чыгарсак

$$(42x^2-13x)(3x-1)>0$$

барабарсыздыгын алабыз.

Албетте, логарифмалык функциянын аныкталуу облусунун катышын $3x>0$, $3x\neq 1$, $42x^2-13x+1>0$ деп чектесек. Бул барабарсыздык интервалдар методу менен жеңил эле чыгарылат.

Жообу: $0<x<\frac{1}{7}$; $\frac{1}{6}<x<\frac{13}{42}$; $\frac{1}{3}<x<\infty$.

Көнүгүүлөр

56. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $\log_2(5x-2)>1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(5x-2)>1$;

в) $\log_{0,3}(x^2-5x+7)\geq 0$;

г) $\log_2(x^2-3x)\leq 2$;

д) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\geq -2$;

е) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<-2$;

ё) $\lg x>2-\lg 4$;

ж) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

57. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $\log_5\frac{3x-2}{x^2+1}>0$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3}{x-7}<0$;

в) $\log_6(x^2-3x+2)\geq 1$;

г) $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2{,}5x)<-1$;

д) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)<0$;

е) $\log_3(x^2+7x-5)>1$.

58. Барабарсыздыктарды кошумча белгилөөлөрдү киргизип, чыгаргыла:

а) $\log^2_{0,1}x+3\log_{0,1}x>4$;

б) $\lg^2x-2\lg x-3\leq 0$;

в) $\log^2_4 x-\log_4 x>3$;

г) $\log^2_{0,5}x+\log_{0,5}x-2\leq 0$.

59. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $\log_x(x^2+3x-3)>1$;

б) $\log_{x^2}(x^2+x-1)<0$;

в) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6}-2x)<0$;

г) $\log_{x^2}(3-2x)>1$.

Суроолор

1. Кандай барабарсыздыктар логарифмалык барабарсыздыктар деп аталат? Мисал келтиргиле.

2. Логарифмалык барабарсыздыктарды чыгарууда эмнелерди колдонуу керек?

3. $\log_{\frac{1}{2}} x > 1$ түрүндөгү логарифмалык барабарсыздыктарды чыгарууда барабарсыздыктын белгиси эмне үчүн карама-каршы болуп өзгөрөт, ал эми $\lg x > 4$ түрүндөгү барабарсыздыктын белгиси болсо өзгөрүүсүз калат.

4. *а*) Качан $a>1$ болгон учурда $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$, б) качан $0<a<1$ болгон учурда $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$ барабарсыздыктарын чыгаруунун планын жазып бергиле.

5. Негизинде белгисиз турган логарифмалык барабарсыздыктардын чыгарылышын кандай ырастоо аркылуу жеңилдетип алууга болот? Анын учурларын далилдеп бергиле.

Тест

I вариант

1. $\log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1$ теңдемесинин тамырларынын суммасын тапкыла.

а) 20; *б*) 15; *b*) 17; *г*) 13.

2. $\log_{0,5}(3x + 0,5) + \log_{0,5}(x - 2) = -2$ теңдемесинин кайсы тамырлары $(x-1)(6x^2 - 11x - 10) = 0$ теңдемесинин тамырлары болуп эсептелет?

а) $1; -\frac{2}{3}; 2,5$; *б*) $-\frac{2}{3}; 2,5$; *в*) $1; -\frac{2}{3}$; *г*) 2,5.

3. $(100x)^{\lg x} = x^3$ теңдемесинин тамырларынын суммасын тапкыла.

а) 10,1; *б*) 11; *b*) 110; *г*) 1,1.

4. $\log_x 8 \log_{0,5} \frac{x}{2} = \log_9 \frac{1}{27}$ теңдемесин чыгаргыла.

а) $2\sqrt{2}$; *б*) $\frac{1}{8}$; *b*) $\frac{1}{4}$; *г*) 4.

5. $\log_{\frac{1}{3}}\left(4 - \frac{2}{3}x\right) > -1$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(\frac{2}{3}; 6)$; *б*) $(1,5; 6)$; *b*) $(1,5; 2\frac{2}{3})$; *г*) $(-\infty; 1,5)$.

6. $\log_2^2 x + \log_{0,5} x \geq 12$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(-\infty; \frac{1}{8}] \cup [16; \infty)$; *б*) $(0; \frac{1}{8}] \cup [16; \infty)$; *в*) $[\frac{1}{8}; 16]$;

г) $(0; \frac{1}{64}] \cup [8; \infty)$.

7. $\dfrac{x^2+2x}{\log_{0,2}(x+2)}>0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(-1;\ 0)$; б) $(-2;\ -1)\cup(0;\ \infty)$;

в) $(-2;\ \infty)$; г) $(-1,0);\cup(0;\ \infty)$.

8. $\log_{x^2-8}0{,}8<0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(3;\ \infty)$; б) $(-3;\ 3)$; в) $(-\infty;\ -3);\cup(3;\ \infty)$; г) $(0;\ 3)$.

9. $\cos 4x\cdot\lg(-x^2+x+2)=0$ теңдемесинин тамырларынын суммасын жазгыла.

а) $2\pi+2$; б) $2\pi-1$; в) $1+\pi$; г) $2+\pi$.

10. m параметринин кайсы маанисинде $(-3;\ 0)$ аралыгы $\log_2(m-3x)>\log_2(x^2-3x)$ барабарсыздыгынын чыгарылышы болуп эсептелет?

а) 1; б) 3; в) 9; г) $\frac{1}{3}$.

11. $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}x=6$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 27; б) 9; в) 3; г) $\frac{1}{27}$.

12. $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)\le\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $[1;\ 3)$; б) $(1;\ 3)$; в) $(\frac{1}{3};\ 1)$; г) $(\frac{1}{3};\ 1]$.

II вариант

1. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+8x)=-2$ теңдемесинин тамырларынын суммасын тапкыла.

а) 68; б) 60; в) 72; г) 82.

2. $\begin{cases}\log_3(2x-1)+\log_3(\frac{2}{3}x-3)=0\\ 0{,}2x^2-5x=0\end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

а) $-5;\ 0$; б) $-5;\ 0{,}5$; в) 5; г) 0.

3. $(0{,}1x)^{\lg x}=1000x$ теңдемесинин тамырларынын суммасын тапкыла.

а) 1000,1; *б*) 99,1; *в*) 110; *г*) 1100.

4. $\log_9(9x)\cdot\log_x\sqrt{3}=\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{2}$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 9; *б*) $\frac{1}{3}$; *в*) $\frac{1}{9}$; *г*) 3.

5. $\log_{\frac{1}{6}}(8-\frac{4}{5}x)>-2$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(-\infty;\ -35)\cup(10;\ \infty)$; *б*) $(-35;\ 10)$;

в) $(10;\ \infty)$; *г*) $(-\infty;\ -10)\cup(35;\ \infty)$.

6. $\log_{\frac{1}{3}}(3x+4)<\log_{\frac{1}{3}}(x^2+6)$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(-2;\ \infty)$; *б*) $(\frac{4}{3};\ 2)$; *в*) $(1;\ 2)$; *г*) $(-\frac{4}{3};\ 1)\cup(2;\ \infty)$.

7. $\dfrac{x^2-3x}{\log_5(x+2)}<0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(-2;\ 3)$; *б*) $(-1;\ 0)\cup(3;\ \infty)$;

в) $(-2;\ -1)\cup(0;\ 3)$; *г*) $(-2;\ 0)\cup(0;\ 3)$.

8. $\log_{x^2-3}0{,}2>0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(-\sqrt{3};\ \sqrt{3})$; *б*) $(-2;\ 1)\cup(1;\ 2)$;

в) $(-2;\ -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};\ 2)$; *г*) $(-2;\ 2)$.

9. $\sin 2x\ \lg(-x^2+4x+5)=0$ теңдемесинин тамырларынын суммасын жазгыла.

а) $4+6\pi$; *б*) $-4+4\pi$; *в*) $4+3\pi$; *г*) $6\pi-4$.

10. *a* параметринин кайсы маанисинде $(0;\ 2)$ аралыгы $\log_3(x^2+2x)<\log_3(2x+a)$ барабарсыздыгынын чыгарылышы болуп эсептелет.

а) 2; *б*) 4; *в*) 8; *г*) 0,5.

11. $x^{\log_3 x-2}=27$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 27; *б*) $[27;\ \frac{1}{3}]$; *в*) $[\frac{1}{3};\ \frac{1}{27}]$; *г*) $[3;\ 27]$.

12. $\log_{\frac{1}{9}} x + \log_3 9x < 3$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

а) $(0;\ 9)$; *б*) $(0;\ \frac{1}{3})$; *в*) $(0;\ \infty)$; *г*) $(-\infty;\ 9)$.

§ 9. Көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциялардын туундулары

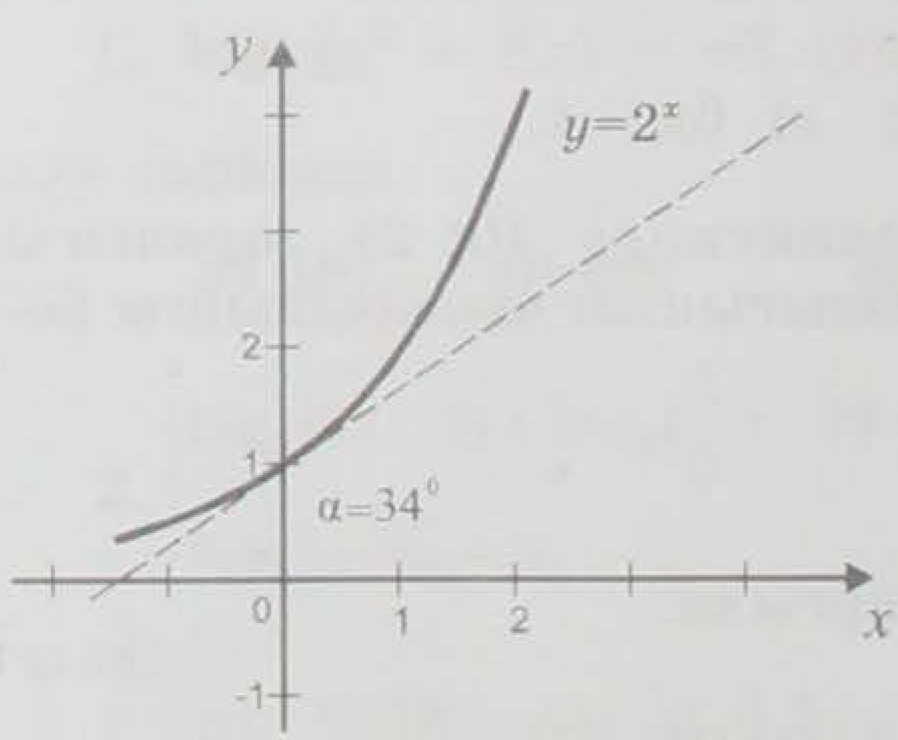
1. Көрсөткүчтүү функциянын туундусу

1. Көрсөткүчтүү функциянын туундусун табуудан мурда алдынала эң маанилүү эки натыйжага токтолуп өтөлү.

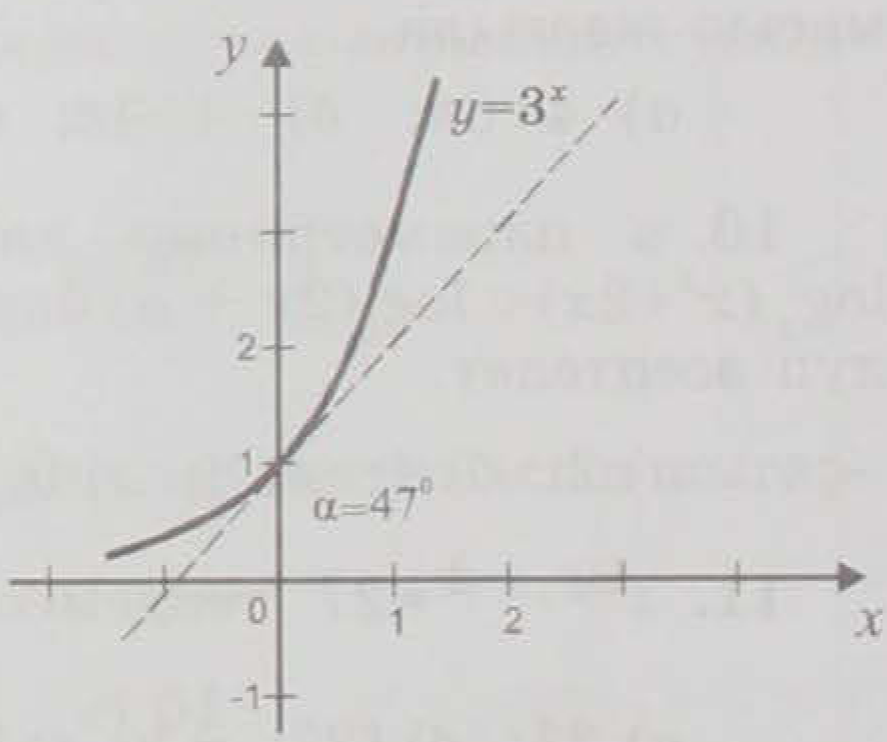
$y = a^x$ көрсөткүчтүү функциясынын графиги (0; 1) чекити аркылуу өтөөрүн билсеңер. Мейли, α бул $y = a^x$ функциясынын графигинин (0; 1) чекитине жүргүзүлгөн жанымасы менен абсцисса огунун оң багыты түзгөн бурчтун чоңдугу болсун. Ал бурчтун чоңдугу a негизинин маанисине көз каранды боло тургандыгын көрсөтүүгө болот. Маселен, качан a=2 болгондо α бурчунун чоңдугу болжол менен 34°ка барабар (33-чийме), ал эми a=3 болгон учурда $\alpha \approx 47°$(34-чийме) экендиги эсептелип чыккан. Эгер $y = a^x$ көрсөткүчтүү функциясынын a негизи 2 ден 3 кө чейин өсө турган болсо, анда α бурчунун чоңдугу да өсүп, 34°тан 47°ка чейинки маанилерин алмак. a нын $y = a^x$ функциясынын (0; 1) чекитине жүргүзүлгөн жаныманын абсцисса огунун оң багыты менен түзгөн бурчунун чоңдугу 45°ту түзө тургандай мааниси табыла тургандыгын далилдөөгө болот (35-чийме).

a нын мындай маанисин e тамгасы аркылуу белгилеп алуу кабыл алынган.

Ошентип *e тамгасы аркылуу абсцисса огу менен e^x көрсөткүчтүү функциясынын* (0; 1) *чекитине жүргүзүлгөн жаныма түзгөн бурчтун чоңдугу* 45° *б. а.* $\frac{\pi}{4}$ *радиан болгон сан белгиленет.* Көп-

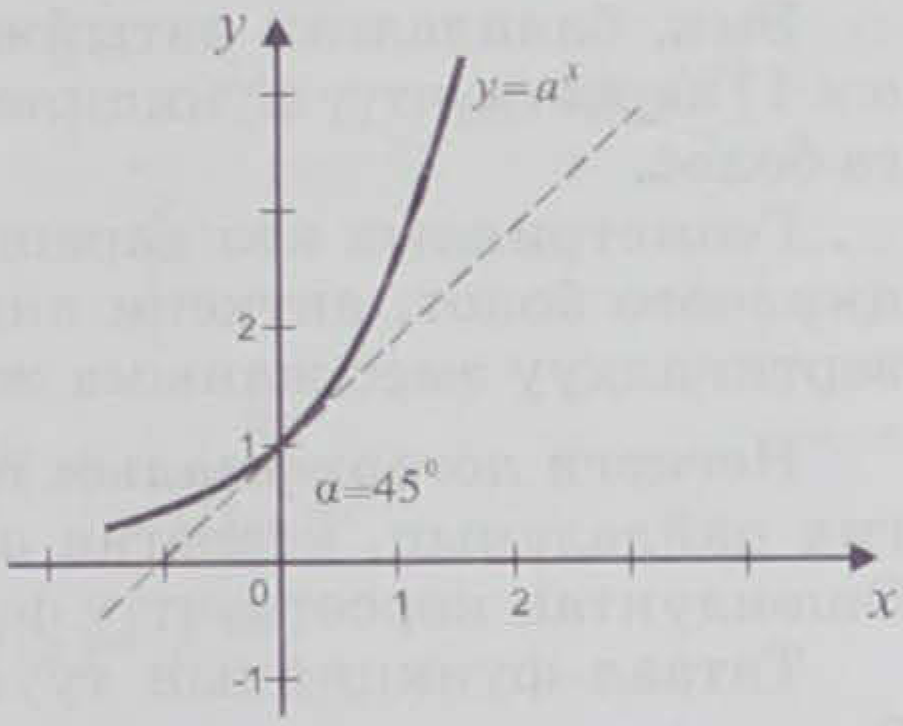


33-чийме.



34-чийме.

чүлүк учурда бул e^x функциясы *экспонент* деп аталат. Математикада e бул иррационалдуу сан экендиги, ошондуктан ал чексиз мезгилсиз ондук бөлчөк түрүндө жазыла тургандыгы такталган жана анын мааниси мындай: e=2,718281828459.., же болжол менен e=2,72 деп алынаары жөнүндө мурда баяндап кеткенбиз.



35-чийме.

Бул жыйынтыктан $f(x)=e^x$ функциясынын графигинин (0; 1) чекитине жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициенти $\text{tg}\alpha=1$ экендиги да келип чыгат. Бирок, туундунун геометриялык маанисине ылайык (10-классты кара) функциянын графигине жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициенти ошол функциянын берилген чекиттеги туундусунун маанисине барабар дегенбиз. Ошентип мындан, $x=0$ чекитинде $f(x)=e^x$ функциясынын туундусу 1ге барабар, б. а. $f'(0)==(e^x)'_{x=0}=1$ деген тыянак чыгарабыз. Мына ошентип, $f'(0)==\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x}-e^0}{\Delta x}=1$.

2. Эми, $f(x)=e^x$ көрсөткүчтүү функциясынын туундусун табууга өтөлү. Функциянын туундусун табуу планын пайдаланабыз (10-класс)

1) x аргументи Δx өсүндүсүн алсын дейли.

2) Функциясынын Δf өсүндүсүн табабыз: $\Delta f=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x(e^{\Delta x}-1)$.

3) Функциянын өсүндүсүнүн аргументтин өсүндүсүнө болгон катышын табабыз: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{e^x(e^{\Delta x}-e^0)}{\Delta x}$.

4) x турактуу, ал эми Δx нөлгө умтулган өзгөрмө деп $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ катышынын чеги (пределин) эсептейбиз: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^x(e^{\Delta x}-e^0)}{\Delta x}=$

$=e^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^x(e^{\Delta x}-e^0)}{\Delta x}=e^x\cdot 1=e^x$. Мына ошентип, e^x *функциясынын туундусу функциянын өзүнө барабар,* б. а.

$$(e^x)'=e^x \qquad (1)$$

Ушуга таянып $(e^{kx+b})'=\text{k}e^{kx+b}$ боло тургандыгын да далилдөөгө болот.

Маселен, $(e^{5x+2})'=e^{5x+2}\ (5x+2)'=5e^{5x+2}$; $(e^{-2x-4})'=-2e^{-2x-4}$.

Эми, баяндалган натыйжалардын негизинде $f(x)=a^x$, $(a>0, a\neq 1)$ көрсөткүчтүү функциясынын туундусун оңой эле таап алууга болот.

Геометриялык көз караш боюнча бул функцияны дифференцирлөөгө болот, анткени анын графигинин каалаган чекитине вертикалдуу эмес жаныма жүргүзө алабыз.

Негизги логарифмалык теңдештикти, б. а. $b^{\log_b a}=a$, экендигин пайдаланып, каалаган a санын $a=e^{\ln a}$ түрүндө жаза алабыз. Ошондуктан көрсөткүчтүү функцияны $a^x=e^{x\ln a}$ деп алууга болот.

Татаал функциянын туундусун табуу эрежесин пайдаланабыз:

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}(x\ln a)'=e^{x\ln a}\ln a.\ e^{x\ln a}=a^x$$

экендигин эске алсак

$$(a^x)'=a^x\cdot\ln a \qquad (2)$$

Демек, *көрсөткүчтүү функциянын туундусу ал функциянын өзүн анын негизинин натуралдык логарифмасына көбөйткөн көбөйтүндүсүнө барабар, б. а. көрсөткүчтүү функциянын туундусу ал функциянын өзүнө пропорциялаш.*

1-м а с е л е. 2^x функциянын туундусун тапкыла.

Ч ы г а р у у. (2) формуласы боюнча $(2^x)'=2^x\cdot\ln 2$ болоорун алабыз.

2-м а с е л е. $e^{-3x}(x^2-5x+1)$ функциясынын туундусун тапкыла.

Ч ы г а р у у. Көбөйтүндүнү дифференцирлөө эрежесин пайдаланабыз: $(e^{-3x}(x^2-5x+1))'=(e^{-3x})'(x^2-5x+1)+e^{-3x}(x^2-5x+1)'=-3e^{-3x}(x^2-5x+1)+e^{-3x}(2x-5)=e^{-3x}(-3x^2+17x-8)$.

3-м а с е л е. $f(x)=e^{-x}$ функциясынын абсциссасы $x_0=1$ болгон чекитине жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин тапкыла.

Ч ы г а р у у. $y=f(x)$ функциясынын, анын каалаган (x_0, y_0) чекитине жүргүзүлгөн жаныманын теңдемеси $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ түрүндө болот. Шарт боюнча $x_0=-1$, ошондуктан $y_0=e^{-(-1)}=e$, $f'(x)=(e^{-x})'=-e^{-x}$ анда $f'(-1)=-e$. x_0, y_0, $f'(x_0)$ дун табылган маанилерин жаныманын теңдемесине коюп, биз издеген жаныманын теңдемесин алабыз: $y-e=-e(x+1)$, $y=-ex$.

Жообу: $y=-ex$.

Көнүгүүлөр

60. Эгер *а)* $a=e$; *б)* $a=2$; *в)* $a=\frac{1}{3}$; *г)* $a=\pi$ болсо $y=a^x$ функциянын туундусун тапкыла.

61. *а)* 5^{3x}; *б)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$; *в)* $e^{2x}+3^{-x}$; *г)* $x\cdot 2^{\sin x}$; *д)* $\frac{x}{3^{2x}}$;

е) $\sqrt{x}\,(0{,}5^x+1)$; ж) $\frac{1}{2\pi}\cos\frac{x}{3}-e^{-7x}$; з) $\operatorname{tg} e^{x+1}$

функциянын туундусун тапкыла.

62. $x=0$ болгон чекитте

а) $f(x)=3^{x^2-5x+8}$; в) $f(x)=\dfrac{3^x}{\sqrt{1+3^x}}$;

б) $f(x)=2^{2x}\sqrt{2-2^{2x}}$; г) $f(x)=e^{-5x}$;

функциясынын туундусун тапкыла.

63. Белгисин аныктагыла:

а) $\ln 2$; б) $\ln\sqrt{2}$; в) $\ln\frac{\pi}{4}$; г) $\ln 0{,}3$.

64. Эсептеп чыккыла:

а) $\ln 1$; в) $\ln e^3$; е) $e^{\ln 10}$.

б) $\ln e$; д) $\ln\sqrt{e}$; г) $\ln\frac{1}{e}$;

65. Эгер а) $f(x)=e^x$, $a=2$; б) $f(x)=e^{2x}$, $a=1$; в) $f(x)=e^{-2x}$, $a=2$; болсо, анда $f'(a)$ нын белгисин аныктагыла.

66. Эгер а) $f(x)=e^{-x}$, $x_0=1$; б) $f(x)=2^x$, $x_0=-1$ болсо, анда $y=f(x)$ функциясынын абсциссасы x_0 чекитине жүргүзүлгөн жанымасын теңдемесин тапкыла.

Суроолор

1. e саны кантип киргизилгендигин айтып бер. e сан мааниси болжол менен эмнеге барабар?

2. $y=e^x$ функциясынын (0; 1) чекитине жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициентин тапкыла.

3. Кандай логарифма натуралдык деп аталат?

4. $y=e^x$ функциясынын туундусунун формуласын табуунун планын түзгүлө.

5. $y=a^x$ функциясынын туундусунун формуласын табуунун планын түзгүлө.

6. $y=a^x$ түрүндөгү бардык функциялардын графиктери кайсы чекит аркылуу өтүшөт?

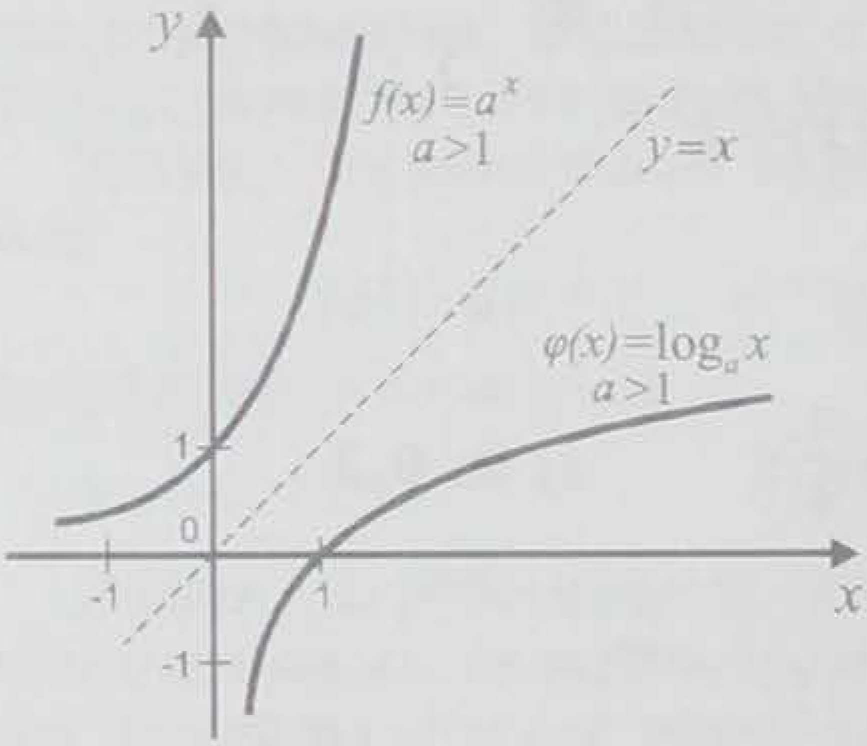
7. Көрсөткүчтүү функциянын туундусу функциянын өзүнө пропорциялаш экендигин белгилүү. Пропорционалдык коэффициентин кантип табууга болот?

2. Логарифмалык функциянын туундусу

Логарифмалык функциянын туундусун табуудан мурда, геометриялык көз карашка ылайык, анын аныкталуу облусунун ар бир чекитинде дифференцирлене тургандыгын көрсөтөлү.

36-сүрөттө өз ара тескери $f(x)=a^x$ $(a>1)$ жана $\varphi(x)=\log_a x$ $(a>1)$ эки функциянын графиктери сүрөттөлгөн. Бул графиктер $y=x$ түз сызыгына карата симметриялаш.

$f(x)=a^x$ көрсөткүчтүү функция ар бир чекитте нөлгө барабар эмес туундуга ээ: $(a^x)'=a^x\ln a\neq 0$. $f(x)=a^x$ тин графигинин ар бир чекити горизонтал эмес жанымага ээ. Ошондуктан $y=x$ түз сызыгына салыштырмалуу симметриялуу болгон $\varphi(x)=\log_a x$ тин да графигинин ар бир чекити вертикалдуу эмес жанымага ээ болот. Демек, логарифмалык функция ар бир чекитте туундуга ээ, б. а. ал анын бардык аныкталуу облусунда дифференцирленет.



36-чийме.

Эми логарифмалык функциянын туундусунун формуласын табууга өтөлү. $a^{\log_a x}=x$ барабардыгын пайдаланабыз. Бул барабардыктын эки жагын тең дифференцирлесек: $(a^{\log_a x})'=x'$, же $a^{\log_a x}\ln a\,(\log_a x)'=1$, мындан $(\log_a x)'=\dfrac{1}{a^{\log_a x}\ln a}=\dfrac{1}{x\ln a}$. Демек, логарифмалык функциянын туундусунун формуласы төмөнкү түрдө болот:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \qquad (3)$$

Эгер логарифмалык негизи e болсо, анда анын туундусунун формуласы

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \qquad (3a)$$

Мындан биз, $y=\ln x$ функциясынын туундусу $y'=x^{-1}$ даражалуу функцияга барабар экендигин көрөбүз. (3) формуласын анда, $\log_a x=\dfrac{1}{\ln a}\ln x$ болгондуктан $(\log_a x)'=\dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{1}{x}$ деп оңой эле алсак болот.

1-м а с е л е. *а)* $y=\log_3 x$; *б)* $y=\lg 5x$; *в)* $y=\ln^2(5x+1)$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{2x}$ функцияларынын туундусун тапкыла.

Ч ы г а р у у. *а)* $y'=(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln 3}$;

б) $y'=(\lg 5x)'=\dfrac{1}{5x\ln 10}(5x)'=\dfrac{5}{5x\ln 10}=\dfrac{1}{x\ln 10}$;

в) татаал функциянын туундусун табуу эрежесин колдонобуз:

$$y' = (\ln^2(5x+1))' = 2\ln(5x+1)\ (\ln(5x+1))' = 2\ln(5x+1)\,\frac{1}{5x+1}\,(5x+1)' =$$

$$= \frac{10\ln(5x+1)}{5x+1};$$

г) Дифференцирлөө процессин жеңилдетүү үчүн адегенде логарифмалап алабыз:

$$\ln\sqrt[3]{2x} = \frac{1}{3}\ln(2x) = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln x. \text{ Эми: } (\ln\sqrt[3]{2x})' = (\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{3}\square\frac{1}{x} = \frac{1}{3x}.$$

2-м а с е л е. (e; 1) чекитинде $y=\ln x$ функциясынын графигине жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин тапкыла.

Ч ы г а р у у. Ийри сызыктын жанымасынын теңдемеси $y - f(x_0) = = f'(x_0)(x - x_0)$. Шарт боюнча $f(x)=\ln x$, $x_0=e$, $f(x_0)=\ln e=1$,

демек, $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $f(x_0)=\frac{1}{e}$. Анда издеген жаныманын теңдемеси: $y - 1=\frac{1}{e}(x - e)$, $y=\frac{1}{e}x$.

Жообу: $y=\frac{1}{e}x$.

3-м а с е л е. $f(x)= x - \ln x$ функциясынын графигин түзгүлө.

Ч ы г а р у у. Берилген функцияны изилдейбиз: 1. $D(f)=(0; \infty)$; $f(x)$ аныкталуу облусунун ар бир чекитинде үзгүлтүксүз.

2. $f(x)$ функциясы жуп да эмес, так да эмес.

3. $x - \ln x \neq 0$ болгондуктан $0x$ огу менен жалпы чекитке ээ болбойт.

4. Сыналуучу чекиттерин табабыз:

$$f'(x)=(x - \ln x)'=1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}; \quad f'(x)=0,\ \frac{x-1}{x}=0,\ x - 1=0,\ x\neq 0;$$

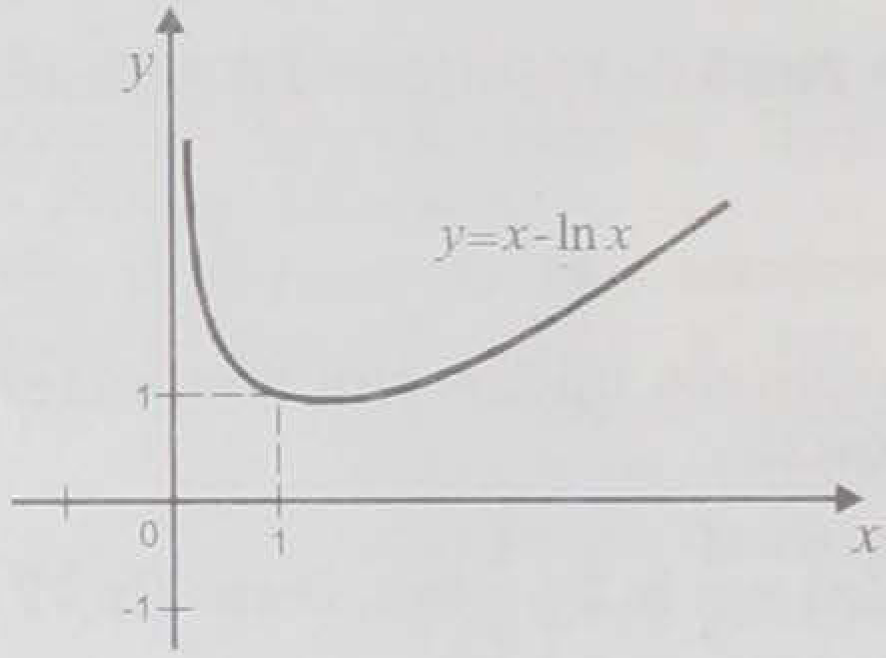
$x=1$. Сыналуучу чекити $x=1$.

Жыйынтыктарды таблицага түшүрөбүз:

x	(0: 1)	1	(1; ∝)
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	1	↗

min max

5. Функциянын графигин түзөбүз (37-чийме).



37-чийме.

Көнүгүүлөр

67. Геометриялык көз караштан келип эмне үчүн логарифмалык функция анын аныкталуу облусунун каалаган чекитинде дифференцирлене тургандыгын түшүндүргүлө.

68. *а)* $y=\log_a x$; *б)* $y=\ln x$ логарифмалык функциясынын туундусунун формуласын жазып бергиле.

69. Функциянын туундусун тапкыла:

а) $y=\log_2 x$;

б) $y(x)=3\log_5 x$;

в) $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\log_{0,1}(x-1)$;

г) $f(x)=2\cos x+\ln x$;

д) $y=x^3\ln x$;

е) $h(x)=(2x^2+5)\log_2 x$;

ж) $z(x)=e^x\ln x$;

з) $g(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$.

70. *а)* $\varphi(x)=\log_4 x$ болсо, $\varphi'(2)$ ни;

б) $f(x)=\lg(2x+1)$ болсо, $f'(1)$ ди;

в) $h(x)=\ln\cos x$ болсо, $h'(\frac{\pi}{3})$;

г) $f(x)=2e^x\ln x$ болсо, $f'(1)$;

д) $z(x)=\ln^2 x$ болсо, $z'(e)$ ни эсептегиле.

71. Алдынала логарифмалап алып:

а) $f(x)=\ln\sqrt{3x+1}$;

б) $\varphi(x)=\ln\sqrt[5]{(x^2-6)^2}$;

в) $g(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

г) $h(x)=\ln\sqrt[3]{(x^2-9)^2}$

функциясынын туундусун тапкыла.

72. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ функциясынын графигинин $x_0=e$ абсцисса чекитине жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин тапкыла.

73. $y=\ln x$ ийри сызыгынын кайсы чекитине жүргүзүлгөн жаныма $y=x+1$ түз сызыгына жарыш (параллелдүү)?

74. *а)* $y=\ln\dfrac{1}{x}$; *б)* $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$ функциясынын өсүү жана кемүү аралыгын тапкыла.

75. *а)* $y=x-2\ln x$; *б)* $f(x)=x\ln x$ функциясын экстремумга изилдегиле.

Тест

I вариант

1. $f(x)=e^{-\frac{1}{3}x-1}+\ln(3-3x)$ функциясынын $f'(-3)$түн маанисин тапкыла.

а) $-\dfrac{5}{12}$; *б)* $-\dfrac{7}{12}$; *в)* $\dfrac{1}{12}$; *г)* $-\dfrac{1}{12}$.

2. $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{2x+1}$ үчүн, качан $F(0)=3$ болгондогу баштапкы $F(x)$ функциясын тапкыла.

а) $F(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2}+\dfrac{\ln(2n+1)}{2}-1$;

б) $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{\ln(2n+1)}{2}+1$;

в) $F(x)=2e^{\frac{x}{2}}+2\ln(2x+1)+1$;

г) $F(x)=2e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{\ln(2n+1)}{2}+1$.

3. $\displaystyle\int_0^{\log_3 2} 3^{0,5x}dx$ ти эсептегиле.

а) $\dfrac{2\sqrt{2}+2}{\ln 3}$; *б)* $(2\sqrt{2}-2)\ln 3$; *в)* $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\ln 3}$; *г)* $\dfrac{2\sqrt{2}-2}{\ln 3}$.

4. $f(x)=e^{0,5x}$ функциясынын графигинин абсциссасы $x_0=\ln 4$ болгон чекитине жүргүзүлгөн жанымасынын теңдемесин тапкыла.

а) $y=x-2+\ln 4$; *в)* $y=2x+\ln 4$;

б) $y=x+2-\ln 4$; *г)* $y=2x-\ln 4$.

5. $y=\ln\cos x$ теңдемеси берилген. $y'=0$ теңдемесин чыгаргыла.

а) $x=\pi n,\ n\in z$; *в)* $x=4\pi n,\ n\in z$;

б) $x=2\pi n,\ n\in z$; *г)* $x=\dfrac{\pi}{2}n,\ n\in z$.

6. $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ функциясынын кемүү аралыгын тапкыла.

а) $(0;\ \sqrt{e})$; *б)* $[e;\ \infty)$;

в) $(0;\ 1)\cup[\sqrt{e};\ \infty)$; *г)* $(0;\ 1)\cup(1;\ \sqrt{e}]$.

7. a параметринин кайсы маанисинде $\int\limits_{0,5a}^{a} e^{2x}\,dx=1$ болот.

а) $2\ln 2$; *б)* $\sqrt{e}$; *в)* $a=\dfrac{e}{2}$; *г)* $a=\ln 2$.

8. $y=\dfrac{8}{x}$ жана $y=6-x$ функцияларынын графиктери аркылуу чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

а) $1-\ln 2$; *б)* $3-4\ln 2$; *в)* $6-8\ln 2$; *г)* $2-\ln 2$.

9. $y=e^x$, $y=e^2$ жана $x=0$ функцияларынын графиктери аркылуу чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

а) e^2+2; *б)* e^2-1; *в)* e^2+1; *г)* $\dfrac{3e^2-4}{2}$.

10. a параметринин кайсы маанисинде $y=ex+a$ түз сызыгы $f(x)=\ln x$ функциясынын графигине жаныма боло алат?

а) $a=\dfrac{1}{e}$; *б)* $a=-2$; *в)* $a=2$; *г)* $a=e$.

11. $y=xe^x$ функциясынын минимум чекитин тапкыла.

а) $x=2$; *б)* $x=-2$; *в)* $x=-1$; *г)* $x=1$.

12. $y=e^x\ln x$ тин туундусун тапкыла.

а) $e^x(\ln x+\dfrac{1}{x})$; *в)* $e^x(\ln\dfrac{1}{x}+x)$;

б) $e^{-x}(\ln x + \frac{1}{x^2})$; г) $e^{2x}(\ln \frac{1}{2x} + \frac{1}{x})$.

II вариант

1. $f(x)=e^{0,5x+1}+\ln(1-2x)$ функциясынын $f'(-2)$ маанисин тапкыла.

а) 0,9 ; б) −0,2; в) 1,5; г) 0,1.

2. $f(x)=e^{\frac{x}{3}}-\frac{1}{1-0,5x}$ үчүн, качан $F(0)=-1$ болгондогу алгачкы $F(x)$ функциясын тапкыла.

а) $F(x)=3e^{\frac{x}{3}}+2\ln(1-0,5x)-0,5$;

б) $F(x)=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}+2\ln(1-0,5x)-0,5$;

в) $F(x)=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}-2\ln(1-0,5x)+\frac{1}{2}$;

г) $F(x)=3e^{\frac{x}{3}}-2\ln(1-0,5x)+\frac{1}{2}$.

3. $\int_0^{\log_2 3} 2^{3x}\,dx$ ти эсептегиле

а) $\frac{8}{3\ln 2}$; б) 24ln2; в) $\frac{26}{3\ln 2}$ г) 8ln2.

4. $f(x)=\ln(2x-e)$ функциясынын графигинин абсциссасы $x_0=e$ болгон чекитине жүргүзүлгөн жанымасынын теңдемесин тапкыла.

а) $y=1+ex$; в) $y=\frac{2x}{e}-1$;

б) $y=1+\frac{x^2}{e^2}$; г) $y=\frac{ex}{2}-1$.

5. $y=\ln\sin x$ теңдемеси берилген, $y'=0$ теңдемесин чыгаргыла.

а) $x=2\pi n,\ n\in z$; в) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in z$;

б) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in z$; г) $x=\pi n,\ n\in z$.

6. $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$ функциясынын кемүү аралыгын тапкыла.

а) $(-\infty;\ -2]\ \cap\ (-1;\ \infty)$; *в)* $[-2;\ \infty)$;

б) $[-2;\ -1]\ \cup\ (-1;\ \infty)$; *г)* $[-2;\ -1]$.

7. Эгер $b>0$ болсо $\int\limits_{0,5b}^{b}\dfrac{1}{2x}dx$ти эсептегиле.

а) $\dfrac{4}{\ln 2}$; *б)* $\ln 2$; *в)* $\dfrac{1}{4}$; *г)* $\ln\sqrt{2}$.

8. $y=\dfrac{x}{3}$ жана $y=4-x$ функцияларынын графиктери менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

а) $2-\ln 3$; *б)* $4-3\ln 3$; *в)* 1; *г)* $4{,}5-3\ln 3$.

9. $y=e^{-x}$, $y=e$ жана $x=e$ функцияларынын графиктери менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

а) $e^2+\dfrac{1}{e^2}$; *б)* $e^2-\dfrac{1}{e^2}$; *в)* e^2+e^e; *г)* $e+e^2$.

10. b параметринин кайсы маанисинде $y=2ex+b$ түз сызыгы $f(x)=\ln x$ функциясынын графигине жаныма боло алат?

а) $b=2+\ln 2$; *б)* $b=2-\ln 2$; *в)* $b=\ln 2$; *г)* $b=-2-\ln 2$.

11. $y=\dfrac{25}{7-x}-\dfrac{9}{3-x}$ функциясынын минимум чекитин тапкыла.

а) $x=-3{,}5$; *б)* $x=-3$; *в)* $x=3$; *г)* $x=4{,}5$.

12. $y=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$ функциясынын туундусун тапкыла.

а) $\dfrac{x}{(1-\ln x)^2}$; *б)* $\dfrac{1}{x^2(1-\ln x)}$; *в)* $\dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$; *г)* $\dfrac{x}{(1+\ln x)^2}$.

§ 10. Даражалуу функция жана анын туундусу

1. Даражалуу функция. Силер каалаган чыныгы α саны жана ар бир x оң саны үчүн x^α саны аныкталаарын билесиңер. Андыктан $(0;\ \infty)$ аралыгында берилген α үчүн

$$f(x)=x^\alpha$$

формуласы аркылуу берилген f функциясы аныкталат. Бул функция (α даража көрсөткүчү болгон) *даражалуу функция* деп аталат.

Эгер $\alpha > 0$ болсо даражалуу функция $x = 0$ чекитинде да аныкталат, анткени $0^{\alpha}=0$. Качан a бүтүн болгон учурларда даражалуу функция $x<0$ үчүн да аныкталат. α жуп болсо бул жуп, ал эми α так болсо бул так функция болот. Ошондуктан даражалуу функцияны изилдөөнү $(0; \infty)$ аралыгында эле жүргүзгөн жетиштүү.

Курстун мурдагы бөлүмдөрүндө x^{α} функциясынын туундусунун формуласы бүтүн даража көрсөткүч жана дагы $\alpha = \frac{1}{2}$ болгон учурлар үчүн гана табылган эле. Азыр болсо даражалуу функциянын туундусунун формуласын α каалагандай чыныгы даража көрсөткүч болгон учурлар үчүн чыгарышыбыз гана калды. Ал формула

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Чынында эле негизги логарифмалык теңдештик $x = e^{\ln x}$ болгондуктан, анын эки жагын тең α даражага көтөрсөк $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ келип чыгат. Татаал функциянын туундусун чыгаруу эрежесин колдонсок

$$(x^{\alpha})'= =(e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha^{\ln x})'= (e^{\ln x})^{\alpha}\frac{\alpha}{x} = x^{\alpha}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

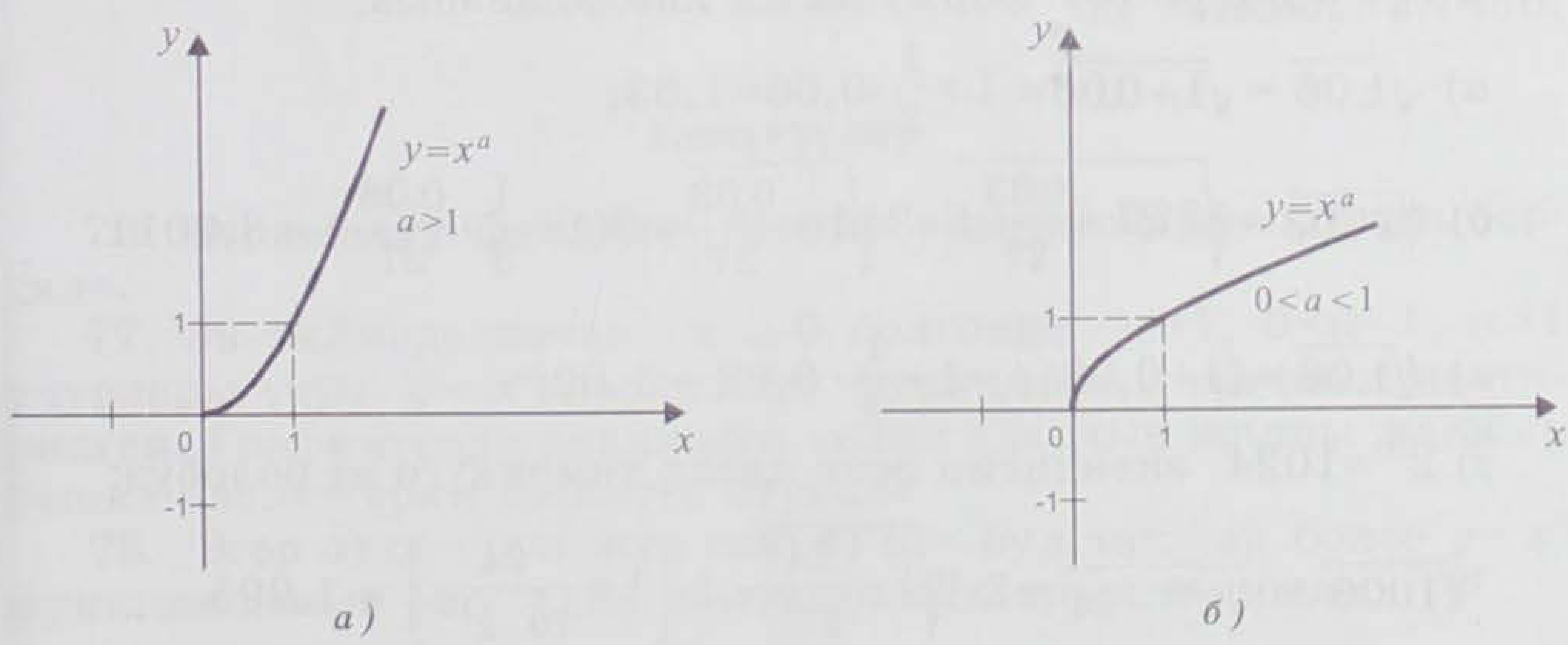
Демек, $(xa)'= \alpha x^{\alpha-1}$.

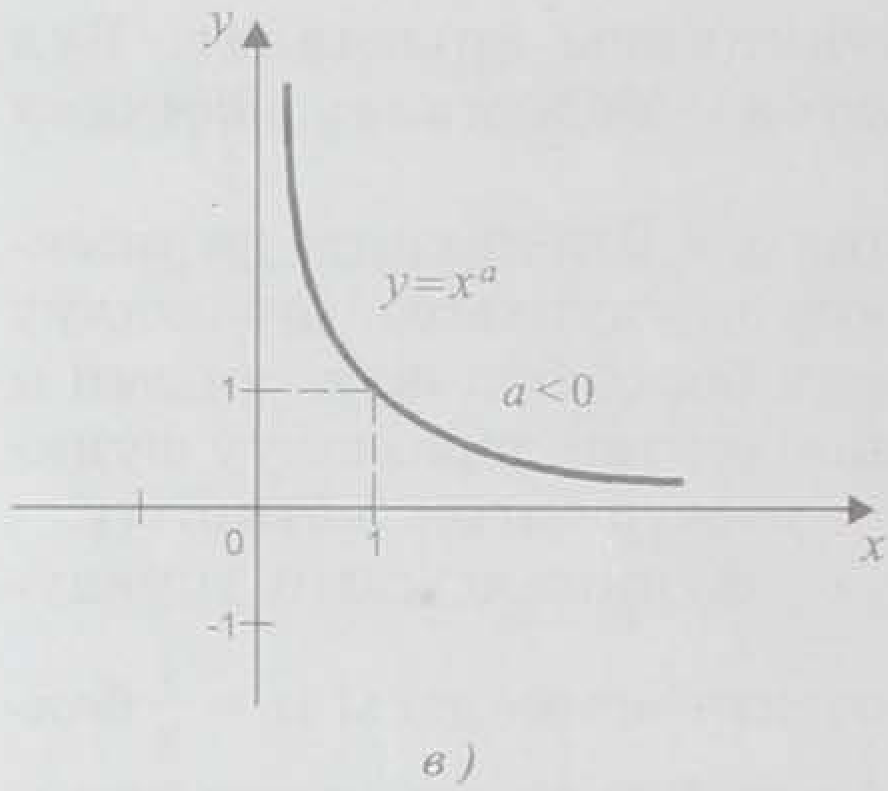
Качан $\alpha<0$ болгон учурларда даражалуу функция $(0; \infty)$ аралыгында кемийт, анткени $x>0$ үчүн $(x^{\alpha})'= \alpha x^{\alpha-1}<0$.

Мындан тышкары, качан $x=0$ болгондо даражалуу функция нөлгө барабар жана качан $x>0$ болуп, $x\to 0$ болсо, анда $x^{\alpha} \to 0$ болоорун эске алуу керек. Ошондуктан, 0 чекити өсүү аралыгына кирет, б. а. качан $x>0$ болгон учурларда даражалуу функция $(0; \infty)$ аралыгында өсөт.

Ар кандай α үчүн даражалуу функциянын графиктеринин кээ бирлери 38-чиймеде көрсөтүлгөн.

2. Даражалуу функциянын маанилерин жакындатып





38-чийме.

эсептөө. Функциянын графигине жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин (10-класста берилген) жана даражалуу функциянын туундусун табуу формуласын пайдаланып, даражалуу функциянын жөнөкөй ыкма менен эсептеп чыгуу татаалчылыкка турган маанилерин, катасын 0,000001 тактыктан кемитпей эсептеп алууга болорун көрсөтүүгө болот.

Жакындатылган

$$(1+\Delta x)^{\alpha} \approx 1+\alpha\Delta x \qquad (1)$$

формуласын чыгарып $f(x)=x^a$ функциясын карайлы. Ал эми $f(x)=f(x_0)+f'(x)(x-x_0)$ деген жаныманын теңдемеси бизге белгилүү.

Демек, x_0 чекитинде дифференцирленүүчү $f(x)$ функциясы үчүн Δx эң кичине болгондо $f(x)$ тин жакындатылган маанисин

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x \qquad (2)$$

формуласы боюнча эсептеп алууга болот. Аны $x_0=1$ жана $x=1+\Delta x$ учуру келгенде колдонобуз. Анда $f(x_0)=f(1)=1$ жана $f'(x)=\alpha\, x^{\alpha-1}$ болгондуктан $f'(x_0)=f'(1)=\alpha 1^{\alpha-1}=\alpha$. Эми (2) формуласы боюнча $f(x)=(1+\Delta x)^{\alpha}\approx 1+\alpha\Delta x$. Бул формуланы жогорку даражалуу тамырдан чыгарып эсептөө учурларында колдонгон өтө ыңгайлуу.

Маселен, $\alpha=\dfrac{1}{n}$ деп алсак

$$(1+\Delta x)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{1+\Delta x}=1+\frac{\Delta x}{n} \qquad (3)$$

1-м и с а л. Жакындатылган маанилерин эсептеп чыгаргыла:

а) $\sqrt{1{,}06}$; *б)* $\sqrt[3]{27{,}03}$; *в)* $\sqrt[4]{1{,}08}$; *г)* $\sqrt[10]{1000}$.

Ч ы г а р у у. (3) формуласын пайдаланабыз:

а) $\sqrt{1{,}06}=\sqrt{1+0{,}06}\approx 1+\dfrac{1}{2}\cdot 0{,}06=1{,}03$;

б) $\sqrt[3]{27{,}03}=\sqrt[3]{27(1+\dfrac{0{,}03}{27})}=3\sqrt[3]{1+\dfrac{0{,}03}{27}}=3(1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{0{,}03}{27})\approx 3{,}0011.$

в) $\sqrt[4]{1{,}08}=(1+0{,}08)^{\frac{1}{4}}=1+\dfrac{1}{4}\cdot 0{,}08=1{,}02$;

г) $2^{10}=1024$ экендигин эске алсак төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}=2\cdot\sqrt[10]{1-\frac{24}{2^{10}}}\approx 2\cdot\left(1+\frac{24}{10\cdot 2^{10}}\right)\approx 1{,}995.$$

2-м и с а л. $(1{,}001)^{100}$ жакындатып эсептегиле.

Ч ы г а р у у. 1,001 санын түздөн түз 100 жолу даражага көтөрүү эң көп эсептөөлөрдү талап кылат. (1) формуласынын негизинде $(1{,}001)^{100}=(1+0{,}001)^{100}\approx 1+100\cdot 0{,}001=1{,}1$. Ал эми калькулятор менен эсептеп чыккандагы мааниси 1,10512 болот.

3-м и с а л. $\dfrac{1}{(0{,}997)^{30}}$ жакындатып эсептегиле.

Ч ы г а р у у. $\dfrac{1}{(0{,}997)^{30}}=(0{,}997)^{-30}=(1-0{,}003)^{-30}=1+(-30)\times$ $\times(-0{,}003)=1+0{,}09=1{,}09$.

4-м а с е л е. $\ln(e+0{,}001)$ дин жакындаштырылган маанисин тапкыла.

Ч ы г а р у у. Биз $f(x_0+\Delta x)$ ты табышыбыз керек, мында, $x_0=e$, $\Delta x=0{,}01$, ал эми $f(x)=\ln x_0$. Жакындаштырылып эсептөөнүн формуласынын негизинде, $f(x_0+\Delta x)\approx f(x)+\Delta x f'(x_0)$, ал эми $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ болгондуктан

$$\ln(e+0{,}01)\approx \ln e+0{,}01\cdot\frac{1}{e}=1+\frac{0{,}01}{e}\approx 1{,}0037.$$

Жообу: 1,0037.

5-м а с е л е. $e^{1{,}01}$ дин жакындаштырылган маанисин тапкыла.

Ч ы г а р у у. Мында да, $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+\Delta x f'(x_0)$ жакындаштырылган барабардыгын колдонобуз. Биздин учурда $f(x)=e^x$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}01$ жана ошондуктан $f'(x)=e^x$, $f'(x_0)=e^1=e$.

Демек, $e^{1{,}01}=e+e\cdot 0{,}01=e\cdot 1{,}01$.

$e\approx 2{,}7454$ болгондуктан, биз издеген жакындаштырылган мааани $e^{1{,}01}=2{,}7454$ болот же $e^{1{,}01}=2{,}7456$, анын тагыраак мааниси.

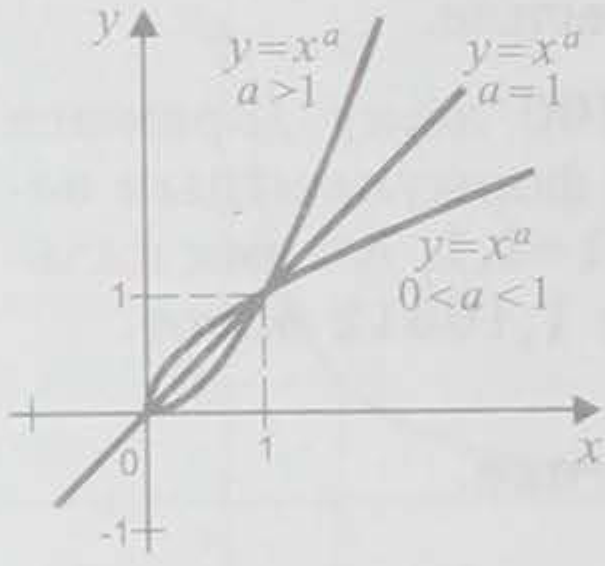
Жообу: 2,7456.

Көнүгүүлөр

76. Даражалуу функция кантип аныкталаарын айтып бергиле.

77. 39-чиймеде качан $x\geq 0$ болгондо $\alpha=1$, $0<\alpha<1$, $\alpha>1$ учурлары үчүн $y=x^{\alpha}$ даражалуу функциянын графиги келтирилген. Графиктерди анализдеп келип алардын жалпы жана ар башка касиеттерин көрсөтүп бергиле.

78. Эгер *а*) α – бул жуп сан; *б*) α – бул так сан болсо $y=x^{\alpha}$ функциясынын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла.



39-чийме.

79. *а)* $y=x^{-3,1}$; *б)* $y=x^{-2}$; *в)* $y==x^{\sqrt{2}}$; *г)* $y=x^{3,5}$ функцияларынын туундуларын тапкыла.

80. $y=x^{\frac{2}{3}}$ жана $y=x^{\frac{2}{3}}$ өз ара тескери функция экендигин далилдегиле жана алардын графигин түзгүлө.

81. $y=x^{\frac{1}{3}}$ функциясынын графигин түзгүлө жана анын жардамы менен:

а) $x^{\frac{1}{3}}=3$; *б)* $\sqrt{x}=3$ теңдемесин жана *в)* $x^{\frac{1}{3}}<3$; *г)* $\sqrt[3]{x}>3$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

82. *а)* $y=\sqrt{x}$; *б)* $y=\sqrt{-x}$; *в)* $y=-\sqrt{x}$; *г)* $y=\sqrt{|x|}$ функцияларынын графиктерин түзгүлө.

83. Жакындаштырылган маанилерин тапкыла:

а) $24^{\frac{1}{3}}$; *б)* $\sqrt[4]{625{,}3}$; *в)* $\sqrt[3]{8{,}12}$; *г)* $\sqrt[4]{48}$; *д)* $\sqrt{9{,}02}$; *е)* $\sqrt[5]{33}$.

84. Жакындаштырылган маанилерин тапкыла:

а) $1{,}002^{100}$; *б)* $0{,}995^{6}$; *в)* $1{,}03^{200}$; *г)* $0{,}998^{20}$; *д)* $\sqrt{1{,}004}$;

е) $\sqrt{25{,}012}$; *ж)* $\sqrt{0{,}997}$; *з)* $\sqrt{4{,}0016}$; *и)* $\frac{1}{1{,}003^{20}}$; *к)* $\frac{1}{0{,}996^{40}}$;

л) $\frac{1}{2{,}0016^{3}}$; *м)* $\frac{1}{0{,}994^{5}}$.

85. Формулаларды пайдаланып, туюнтманын маанилерин тапкыла:

а) $\sqrt{8{,}94}$; *б)* $\sqrt{25{,}12}$; *в)* $\sqrt[4]{243}$; *г)* $(27\cdot 3)^{\frac{1}{3}}$;

д) $\sqrt[4]{30000}$; *е)* $\sqrt[3]{30}$; *ж)* $\sqrt[4]{90}$; *з)* $\sqrt[5]{33}$.

§ 11. Дифференциалдык теңдемелер жөнүндө түшүнүк

1. Жөнөкөй дифференциалдык теңдемелер. Буга чейин белгисиздерин табууда чыгарылыштары сан болуп эсептелген *алгебралык* теңдемелерди карап келдик. Математикада жана аны колдонмоюнча чечилбей турган жаратылыштын көптөгөн процесстерин изилдөөдө *белгисиздери, чыгарганда жообу да функция* болуп эсептелген теңдемелер да каралат. Алсак, берилген

$v(t)$ ылдамдыгы боюнча басып өткөн $s(t)$ жолун табуу жөнүндөгү маселе $s'(t)=v(t)$ теңдемесин чыгарууга дуушар кылат, мында $v(t)$ – берилген функция, ал эми $s(t)$ табыла турган функция.

Мисалы, эгер $v(t)=3-4t$ болсо, анда $s(t)$ ны табыш үчүн $s'(t)=$ $=3-4t$ теңдемесин чыгарууга туура келет. Бул теңдеме белгисиз функциянын туундусун камтыйт. Мындай теңдемелер *дифференциалдык теңдемелер* деп аталат.

Жалпысынан, *кандайдыр бир функцияны анын туундусун* (биринчи же экинчи ж.б.тартиптеги) *жана аргументтин өзүн байланыштырып турган туюнтма түрүндө берилген теңдемелер дифференциалдык теңдемелер деп аталат.*

Теңдемеге кирген туундунун тартибине жараша *биринчи, экинчи ж.б. тартиптеги* дифференциалдык теңдемелер деп бөлүнүшөт.

Дифференциалдык теңдемени чыгаруу процесси интегралдоо жолу менен табылат да *жообу сан эмес*, кандайдыр бир аралыкта аныкталган *функция болот*, аны берилген дифференциалдык теңдемеге койсок, ал теңдештикке айланат.

1-мисал. $y'=x+1$ дифференциалдык теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Мында, туундусу $x+1$ ге барабар, б. а. баштапкы функциясы $x+1$ болгон функцияны табуу эрежеси боюнча $y=\frac{x^2}{2}+x+C$ функциясын алабыз, мында C – каалагандай турактуу чоңдук.

Дифференциалдык теңдемелердин чыгарылышы бир мааниге ээ болбогон турактуу чоңдукка чейинки тактыкта аныкталат. Адатта, дифференциалдык теңдемелерге ал турактуу чоңдуктарды аныктап ала турган алгачкы шарттар кошумчаланат.

2-мисал. $y'=\cos x$ дифференциалдык теңдемесин $y(0)=2$ шартын канагаттандыра турган чыгарылышы $y(x)$ ти тапкыла.

Чыгаруу. Бул теңдеменин бардык чыгарылыштары $y(x)=$ $=\sin x+C$ формуласы аркылуу жазылат. $y(0)=2$ деген шарт боюнча $\sin 0+C=2$, мындан $C=2$

Жообу: $y=2+\sin x$

Эгер a ылдамдануусун экинчи тартиптеги туунду түрүндө жазсак, б. а. $a=\frac{d^2x}{dt^2}=x''$ десек, анда Ньютондун экинчи закону $mx''=F$ механикалык кыймылдын дифференциалдык теңдемеси түрүндө кароого болот же буга *экинчи тартиптеги* туунду катышкандыктан ал *экинчи тартиптеги* дифференциалдык теңдеме деп эсептелет. Мында m жана F – белгилүү чоңдуктар. Физикалык шарттарга байланыштуу кыймылды пайда кылуучу F күчү убакытка жараша ар түрдүү мааниде берилиши мүмкүн. Ошентип, белгисиз функция $x=x(t)$

$$x''=\frac{F(t)}{m}$$

дифференциалдык теңдемесин канааттандырат. Бул теңдемени чыгаруу үчүн, адегенде $x'(t)$ функциясынын баштапкы функциясы $\frac{F(t)}{m}$ ди таап, андан кийин $v(t)=x'(t)$ функциясынын баштапкы функциясы катары $x(t)$ ны табабыз. Жалпы чыгарылышы эки эркин турактуу санды камтыйт. Аларды табуу үчүн кандайдыр бир t убакыт аралыгында координата менен ылдамдыктын маанилери белгилүү деп каралат.

3-*м и с а л.* Оордук күчүнүн таасири астында тик ылдый кыймылда болгон $h(t)$ координатасы канааттандырган $h''(t)=g$ дифференциалдык теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$h(t)=n_0+V_0\,t+\frac{g}{2}\,t^2$$

түрүнө ээ, мында $h_0=h(0)$, $V_0=V(0)$ берилсе бир гана чыгарылышты алабыз.

2. Көрсөткүчтүү өсүштүн же көрсөткүчтүү кемүүнүн дифференциалдык теңдемелери. Көптөгөн физикалык, биологиялык, техникалык жана башка турмуштук маселелерди изилдөө

$$y'=ky \qquad (1)$$

түрүндөгү дифференциалдык теңдемелерди чыгарууга алып келет, мында k – берилген сан.

$$y=Ce^{kx} \qquad (2)$$

функциясы бул теңдеменин чыгарылышы болуп эсептелет, мында C – айкын коюлган маселенин шарты менен аныкталуучу турактуу чоңдук. Маселен, бактериянын көбөйүү ылдамдыгы $m'(t)$ менен, бактериянын убакыттын t учурундагы $m(t)$ массасы $m'(t)=km(t)$ теңдемеси аркылуу байланышкан, мында k – бактериянын түрүнө жана сырткы шарттарга көзкаранды болгон он сан. $m(t)=Ce^{kt}$ функциясы бул теңдеменин чыгарылышы болуп эсептелет. C турактуу чоңдугун, маселен $t=0$ учурунда бактериянын алгачкы m_0 массасы белгилүү деп табууга болот. Анда $m(0)=m_0=Ce^{k0}=C$ жана ошондуктан,

$$m(t)=m_0\,e^{kt} \qquad (3)$$

Радиоактивдүү заттын ажырашы жөнүндөгү маселе да (1) теңдеменин колдонулушуна мисал боло алат. Эгер убакыттын t учурундагы радиоактивдүү заттын ажыроо ылдамдыгы $m'(t)$ болсо, анда $m'(t)=-km(t)$, мында k – заттын радиоактивдүүлүгүнө көз каранды болгон чоңдук.

$m(t) = Ce^{-kt}$ функциясы бул теңдеменин чыгарылышы болуп эсептелет.

Эгер убакыттын t учурунда масса m_0 болсо, анда $C = m_0$ жана ошондуктан

$$m(t) = m_0 e^{-kt} \tag{4}$$

Турмушта радиоактивдүү заттын ажыроо ылдамдыгы жарым ажыроо мезгили аркылуу, б. а. алгачкы заттын жарымы ажыраган убактысынын аралыгы менен мүнөздөлө тургандыгын белгилей кетели.

Мейли, T – жарым ажыроо мезгили болсун, анда (4) барабардыгынан $t = T$ болгон учурда $m(T) = \frac{1}{2}\ m_0$, б. а. $\frac{m_0}{2} = m_0\ e^{-kt}$ болоорун алабыз, мындан $e^{kt} = 2$, $kT = \ln 2$, же $k = \frac{\ln 2}{T}$.

Мисалы, радий үчүн $T \approx 1550$ жыл. Анда (эгер убакыт жыл менен эсептелсе) $k = \frac{\ln 2}{1550} \approx 0{,}000447$.

Ошентип акырында (4) формуласын $m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}$ деп жазып алабыз.

3. Гармоникалык термелүүнүн дифференциалдык теңдемеси. Турмушта мезгил-мезгили менен кайталанып турган, алсак маятниктин, пружинанын, ойноочу аспаптардын кылдары ж.б. ушу сыяктуу термелүү кыймыл процесстери, өзгөрүлмөлүү электр тогу, магнит талаасы менен ж. б. у. с. байланышкан процесстер бат-бат кездешип турат. Ушундай көптөгөн маселелерди чечүү

$$y'' = -\omega^2 y \qquad 5)$$

түрүндөгү экинчи тартиптеги дифференциалдык тендемелерди чыгарууга алып келет, мында ω – берилген оң сан, $y = y(x)$, $y'' = (y'(x))'$. $(y'(x))'$ функциясы $y(x)$ *функциясынын экинчи туундусу* деп аталат да $y''(x)$ же кыскача y'' деп белгиленет.

$$y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2) \qquad 6)$$

(5) тендемесинин чыгарылышы болуп эсептелет, мында C_1, C_2 – айкын коюлган маселенин шарттары менен аныктала турган турактуу чондуктар. (5) тендемеси *гармоникалык термелүүнүн дифференциалдык теңдемеси* деп аталса, ал эми (6) барабардыгы болсо *гармоникалык термелүүнүн теңдемеси* деп аталат.

Маселен, эгер $y(t)$ убакыттын t учурундагы эркин термелип жаткан кылдын тен салмактуу абалынан кыйшайган чекитинин абалы болсо, анда $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, мында A – термелүүнүн амплитудасы, ω – жыштыгы, φ – алгачкы фазасы.

Гармоникалык термелүүнүн графиги синусоида болот.

Жогоруда каралган айрым мисалдардын өзү эле жаратылыштагы көптөгөн процесстерди изилдөөдө дифференциалдык теңдемелер математикалык кубаттуу курал экендигин далилдеп турат. Кандайдыр бир процесстерди башкаруунун эң жөнөкөй закондору да дифференциалдык теңдемелер түрүндө жазылат. Убакытка жараша ал процесстердин өзгөрүп турууларын билиш үчүн түзүлгөн дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу керек болот. Аны чыгаруу ыкмасы толугу менен жогорку математиканын курсунда каралат.

Көнүгүүлөр

86. Түз сызыктуу кыймылдагы нерсенин ылдамдыгы $v(t)=$ $=t^2+4t$. Кыймыл башталгандан токтогонго чейинки нерсенин басып өткөн жолун эсептегиле.

87. *а)* $y'=3-4x$; *г)* $y'=6x^2-8x+1$;

б) $y'=3e^{2x}$; *д)* $y'=4\cos 2x$;

в) $y'=3\sin x$; *е)* $y'=\cos x+\sin x$

дифференциалдык теңдемени чыгаргыла.

88. Берилген шартты канагаттандыра турган дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын тапкыла:

а) $y'=\sin x$, $y(0)=0$;

б) $y'=2\cos x$, $y(\pi)=1$;

в) $y'=3x^2+4x-1$, $y(1)=-2$;

г) $y'=2+2x-3x^2$, $y(-1)=2$;

д) $y'=e^x$, $y(1)=1$;

е) $y'=e^{-x}$, $y(0)=2$.

89. *а)* $y=5e^{3x}$ функциясы $y'=3y$ теңдемесин;

б) $y=7e^{-2x}$ функциясы $y'=2y$ теңдемесин;

в) $y=3e^{-7x}$ функциясы $y'=-7y$ теңдемесин канааттандыра тургандыгын тапкыла.

90. *а)* $y=2\cos(2x-1)$; *в)* $y=4\sin(3x-\frac{\pi}{4})$

б) $y=6{,}4\cos(0{,}1x+\frac{\pi}{7})$; *г)* $y=0{,}71\sin(0{,}3x-0{,}7)$

гармоникалык термелүүсүнүн дифференциалдык теңдемесин жазгыла.

91. 1 гга барабар болгон радийдин массасы 10 жыл өткөндөн кийин 0,999 *г* га чейин азайган. Канча жылдан кийин ал радийдин массасы 0,5 *г* га чейин азаят?

92. Эгер 3Н күч менен пружинаны 1 *см*ге чойсо, анда ал пружинаны 8 *см*ге чойгонго кеткен жумушту эсептеп чыккыла.

93. Эгер 2Н күч пружинаны 1 *см*ге кысса, анда ал пружинаны 3 *см*ге кысканга кеткен жумушту эсептеп чыккыла.

94. Кайнап жаткан чайнекти температурасы 20°C болгон абага алып чыгарат. 5 *мин* кийин анын температурасы 60°C чейин төмөндөгөн. 15 *мин* кийин чайнектин температурасы кандай болот? Убакыттын кайсыл учурунда чайнектин температурасы 40°C барабар болот?

95. Кайнап жаткан чайнек абага чыгарылган. Эгер 10 *мин* кийин чайнектин температурасы 80°C ге, ал эми 20 *мин* кийин 65°C ге барабар болгону белгилүү болсо абанын температурасын тапкыла.

Суроолор

1. Дифференциалдык теңдеме деген эмне?
2. Ньютондун экинчи законун дифференциалдык теңдеме түрүндө кантип жазып алса болот?
3. Дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы эмнени түшүндүрөт?
4. Дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы канча жана кандай тактыкта аныкталат?
5. Көрсөткүчтүү өсүүнүн жана көрсөткүчтүү кемүүнүн дифференциалдык теңдемелерин жазып бер. Алардын чыгарылыштары кандай жана эмнелери менен айырмаланат?
6. Гармоникалык термелүүнүн дифференциалдык теңдемесин жазып бер. Гармоникалык термелүүнүн теңдемеси гармоникалык термелүүнүн дифференциалдык теңдемесинен эмнеси менен айырмаланат?
7. $y=\sin 5x$ гармоникалык термелүүнү баяндаарын далилдеп, графигин сызып бер.
8. Дифференциалдык теңдемелерди чыгарганда пайда болгон турактуу чондуктарды кантип аныктаса болот?
9. Бир эле дифференциалдык теңдеме менен баяндалган ар түрдүү процесстерге мисал келтирип бер.

ТАРЫХЫЙ МААЛЫМАТТАР

Бөлчөктүү даража көрсөткүч жана алар менен болгон амалдардын эң жөнөкөй эрежелерин биринчи болуп XIV кылымда француз математиги Н. Орезм (1328–1382) киргизген, XV кылымда жашаган башка француз окумуштуусу Н. Шюке терс жана нөл даража көрсөткүчтү карап чыккан.

Немис математиги М.Штифель (1486–1565) «көрсөткүч» (exponenten) деп ат киргизип, жана $a \neq 0$ болгон учурда $a^0=1$ болот деген аныктаманы берген. Натуралдык сандарды бирдей негиздердин натуралдык даражалары менен салыштырып келип ал бул айрым учур үчүн $\log(ab)=\log a+\log b$, $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$ катыштарын алган. Голландиялык окумуштуу С. Стевиндин (1548–1620) татаал процесстер үчүн түзүлгөн таблицалары иш жүзүндө кийин көрсөткүчтүү функциянын таблицасы болуп чыккан. Каалаган чыныгы даража көрсөткүчтү И.Ньютон киргизсе, андан кийин И. Бернулли көрсөткүчтүү функция жөнүндө жалпы түшүнүктү берген.

Логарифма бири бирине көз карандысыз эки окумуштуу – шотландык математик Д. Непер (1550–1617) жана швейцариялык математик И. Бюрги (1552–1632) тарабынан киргизилген.

Логарифма деген сөздүн өзү гректин lógos (катыш) жана arithmós (сан) деген сөздөрүнөн алынган жана сандардын катышы деген маанини берет. Непер тарабынан мындай терминдин (1594-ж.) тандалып алынышы эки санды салыштыруудан пайда болгондугу менен түшүндүрүлөт. Бул эки сандын салыштыруу логарифманы ойлоп табуунун негизиндеги чоң идеялардын бири экендиги көпчүлүк окумуштууларга мурундатан эле белгилүү болгон. Алсак, М. Штифель жана башка бир катар математиктер ... a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, a^3, ... геометриялык прогрессиясынын мүчөлөрүн көбөйтүү жана бөлүү алардын көрсөткүчтөрүнөн турган ...–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ... арифметикалык прогрессиясынын мүчөлөрүн кошууга жана кемитүүгө алып келээрин негиздешкен.

Бирок, жалгыз бул идея жетишсиз болгон. Анткени, 2 санынын эле бүтүн даражаларынын «жыштыгын» карап көрүп алардын такыр жетишсиздигинен көптөгөн сандар «логарифмасыз калышаарын» көрүүгө болот. Чынында эле 2 санын негиз кылып, анын алгачкы 12 ге чейинки даражаларынын таблицасын түзөлү:

даража көрсөткүч (логарифм)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
даража (сан)	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

жогорку сапта турган сандарды (даража көрсөткүч) азыр биз *логарифма*, ал эми төмөнкү саптагы (даража) *сан* деп атап алалы. Төмөнкү саптын кандайдыр бир эки санын көбөйтүүнүн ордуна, жогорку саптын эки санын кошсок эле жетиштүү болоорун көрөбүз. Алсак, 32 менен 128 дин көбөйтүндүсү 5 менен 7 ни кошкондо чыккан 12 нин алдындагы 4096 саны болот. 4096 ны 256 га бөлүш үчүн алардын үстүндөгү 12 жана 8 сандарын алып, кемитебиз: 12 – 8=4 санынын алдынан жообу 16 болоорун табабыз. Бул мисалдан көптөгөн сандар логарифмсиз калаары көрүнүп турат. Бирок, эгер негизи катары 2 эмес, 1 ге жакын сандарды алса ал кемчилик жоюлат.

Ошентип негизинде 1 ге жакын сандарды даражага көтөрүү зарылчылыгы турган экинчи идея келип чыккан.

Бул идеянын негизинде логарифма таблицаларын түзүү үчүн Непер менен Бюрги окшош чечимге келишкен: Непер лоарифмага негиз кылып $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ санын, ал эми Бюрги болсо $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$ санын алган. Ошентип логарифманы ойлоп табуучулардын экөө тең эле $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ түрүндөгү даражалуу сандарды кабыл алуу максатка ылайык деген жыйынтыкка келишкен, мында m өтө чоң сан болгон.

Буга окшогон сандарды кароо бизге мурдатан белгилүү $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ аркылуу аныкталуучу e санына алып келээрин баамдоого болот.

Бюргинин логарифма таблицасынын негизи үч белгиге чейинки тактыкта e саны менен дал келсе, Непердик логарифма таблицасынын негизи $\frac{1}{e}$ санына жакын болгон. Мындай логарифмалар белгилери менен гана айырмаланышат.

Непер логарифманын теориясын өнүктүрүп, аларды эсептөөнүн ыкмаларын көрсөткөн жана аны түзгөн таблицасы Бюргиникине караганда биртоп артыкчылык кылган. Непердик логарифм (Neplog$x$) биздин белгилөөлөр боюнча $Nep\log x = 10^7\log_e\frac{10^7}{x}$ деп аныкталган, мында $e\approx 2{,}7$. Айрым алганда $Nep\log 1 = 10^7\log_e 10^7 \neq 0$.

Ошондой болсо да булар эсептөө үчүн Непердин өзү үчүн да ыңгайсыз болгон. Бул кырдаал Непердин өзүнүн тарбиялоочусу Бриггс (1561–1631) менен өтө жөнөкөй ондук логарифманын таблицаларын түзүүгө түрткөн. Ал таблицасы Непер өлгөндөн кийин Бриггс тарабынан 1624-жылы басмадан жарык көргөн.

Ошентип ондук логарифма үч жүздөн ашуун жыл бою эсептөө математикасынын кубаттуу куралы болуп келген. Логарифма өзгөчө астрономиянын өнүгүшүнө орчундуу таасир тийгизген. Орто кылымдагы деңизде сүзүүнүн ийгиликтери түзүлүшү өтө татаал эсептөөлөрдү талап кылган астрономиялык таблицаларга эң муктаж экендигин көрсөткөн. Логарифмалык таблицаларды пайдалануу ал эсептөөлөрдү абдан жеңилдетип жана тездеткен. Француз математиги Лапластын (1749–1827) көркөмдөп айтуусуна караганда *«логарифманын ойлоп табылышы астрономдун ишин кыскартып, анын өмүрүн узарткан»*. Азыркы учурда болсо микрокалькуляторлор логарифманы жана логарифмалык сызгычтарды эсептөө практикасынан сүрүп чыгарды.

Логарифманын касиеттери англис математиги В. Оутред тарабынан 1648-жылы формулировкаланган. 1748-жылы гана Л. Эйлер логарифмалоону даражага көтөрүүгө, ал эми логарифманы кандайдыр бир даража көрсөткүчкө тескери амал катары аныктаган. Ошентип логарифмалык функцияга жалпы аныктаманы берген жана аны кеңейтип жалпылаган Л. Эйлер болгон.

II БӨЛҮМГӨ КОШУМЧА КӨНҮГҮҮЛӨР

Даража

Даражалуу функциянын өсүү тартиби

96. $y=100x^2$ же $y=0{,}1x^4$ функцияларынын кайсынысы тез өсөт (x чоң болгондо)?

97. *а)* $y=2x$; *б)* $y=\sqrt{x}$; *в)* $y=x^{\frac{2}{3}}$; *г)* $y=x^5$; функцияларын тез өсүү тартиби боюнча жайгаштыргыла.

98. $y=\frac{1}{10^x}$ же $y=\frac{10}{x^2}$ функцияларынын кайсынысы тез кемийт?

99. *а)* $y=\frac{1}{x}$; *б)* $y=\frac{2}{\sqrt{x}}$; *в)* $y=\frac{1}{x^4}$; *г)* $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}$; *д)* $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
функцияларын тез кемүү тартиби боюнча жайгаштыргыла.

Даражанын аныктамасы

100. Төмөнкү сандарды негизи эки болгон даржа түрүндө жазгыла:

а) 8; *б)* 1024; *в)* $\frac{1}{2}$; *г)* $\frac{1}{16}$; *д)* 0,5; *е)* 0,25;

ж) $\sqrt{2}$; *з)* $\sqrt[3]{4}$; *и)* $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{8}}$; *к)* $2\sqrt{2\sqrt{2}}$; *л)* 10.

101. Төмөнкү сандарды рационалдык даража көрсөткүчтүү сан түрүндө жазгыла:

а) $\sqrt[4]{27}$; *б)* $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^2}$; *в)* $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{125}}$; *г)* $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$; *д)* $\frac{1}{\sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}}$ *е)* $3\sqrt[3]{9}$.

102. Радикалдын жардамы аркылуу жазып чыккыла:

а) $3^{-\frac{5}{3}}$; *б)* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{10}{3}}$; *в)* $5^{3,2}$; *г)* $2^{-0,25}$; *д)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$; *е)* $2^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{5}}$.

Даражанын касиеттери

103. Жөнөкөйлөткүлө:

а) $a^5a^7a^{12}a$; *б)* $a^{-2}a^3a^{-5}$; *в)* $(b^{-1}b^3)^{-2}b^{-3}$; *г)* $b\sqrt[4]{b}\ \sqrt[4]{b^3}\ \sqrt{b}$.

104. Амалдарды аткаргыла:

а) $2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}$; *б)* $\left(\frac{2^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{5}{6}}}\right)^3$; *в)* $\sqrt{\frac{3\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{27}}}$;

г) $\frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{5}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}a^{-\frac{1}{3}}}$; *д)* $\left((a^2)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$; *е)* $\frac{3^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}}$.

105. $\left(\frac{a^x+a^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{a^x-a^{-x}}{2}\right)^2=1$ тендештигин далилдегиле.

106. Жөнөкөйлөткүлө:

а) $3^{x-1}+3^x+3^{x+1}$; *б)* $\sqrt{25^{x-2}}-2\cdot 5^x+\left(\sqrt{5}\right)^{2x+4}$;

в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x}+49^{\frac{x}{2}}-7^{x+1}$; *г*) $2^{x}\cdot 3^{2-x}-\frac{8^{\frac{x-1}{3}}}{9^{\frac{x+2}{2}}}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2x+4}}{\left(\sqrt{3}\right)^{2x-2}}$.

Көрсөткүчтүү функция

Монотондуулугу

107. Төмөнкү функциялардын кайсылары өсүүчү жана кайсылары кемүүчү?

а) $y=5^x$; *б*) 3^{x-1}; *в*) $y=\left(\frac{9}{10}\right)^x$; *г*) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$;

д) $y=2^{-x}$; *е*) $y=3^x\cdot 4^x$; *ж*) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$; *з*) $-2\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Графиги

108. *а*) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; *б*) $y=e^{-x;}$ *в*) $y=2e^x$;

д) $y=-5e^x$; *е*) $y=3e^{-x}$; *ж*) $y=e3^x$

функциясынын графигин түзгүлө.

109. $y=2^x$ жана $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларынын ордината огуна карата симметриялуу экендигин далилдегиле.

110. $y=e^{kx}$ функциясынын $k=0,\ \pm1,\ \pm2$ болгон учурундагы графигин бир чиймеге түшүргүлө.

111. $y=ce^x$ функциясынын $c=1,\ \pm2$ болгон учурундагы графигин бир чиймеге түшүргүлө.

Туунду

112. Функциянын туундусун тапкыла:

а) $y=2e^x$; *б*) $y=e^x+e^{-x}$; *в*) $y=xe^x$;

г) $y=x^2e^{-x}$; *д*) $y=e^x\sin x$; *е*) $y=\frac{x}{e^x}$.

113. Функцияны изилдеп, графигин түзгүлө:

а) $y=e^x+e^{-x}$; *б*) $y=x^2e^{-x}$; *в*) $y=e^x-x$.

114. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла:

а) $y=2^x$, $x \in [-1;\ 1]$;

б) $y=3^x$, $x \in [0;\ 2]$;

в) $y=x+e^x$, $x \in [-1;\ 1]$;

г) $y=e^x \sin x$, $x \in [0;\ \pi]$;

д) $y=e^x-x$, $x \in [-2;\ 2]$;

г) $y=2^x+3^x$, $x \in [-1;\ 0]$.

Логарифмалар

Логарифманын аныктамасы

115. Логарифмаларын тапкыла:

а) $\log_a a$, $\quad \log_a 1$, $\log_a a^5$, $\quad \log_a \dfrac{1}{a}$, $\quad \log_a \sqrt{a}$ $\log_a \sqrt[5]{a^3}$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{2}} 2$, $\log_{\frac{1}{2}} 1$, $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

116. Эсептеп чыккыла:

а) $\log_3 27$; $\quad$ б) $\log_3 \dfrac{1}{9}$; $\quad$ в) $\log_9 \dfrac{1}{27}$;

г) $\log_2 \sqrt{2}$; $\quad$ д) $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad$ е) $\log_5 5\sqrt{5}$.

117. Эсептегиле:

а) $2^{\log_2^3}$; $\quad$ б) $4^{\log_2^3}$; $\quad$ в) $2\log_4^3$; $\quad$ г) $27^{\log_3^{\sqrt[3]{4}}}$.

Логарифманын касиеттери

118. Эсептегиле:

а) $\log_6 2 + \log_6 3$; $\quad$ б) $\log_6 2 - \log_6 \dfrac{1}{3}$;

в) $\log_{\frac{1}{5}} 3 + \log_{\frac{1}{3}} 5$; $\quad$ г) $\log_{\sqrt{3}} 12 - \log_{\sqrt{3}} 4$.

119. а) $\mathrm{N} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2 b \sqrt{c}}}{3\sqrt{3d}}$; $\quad$ б) $\mathrm{N} = x^4$;

в) $\mathrm{N} = \dfrac{6\left(a^3 - a^2\right)}{a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{4}} c^{-\frac{1}{2}}}$; $\quad$ г) $\mathrm{N} = a^3(a-2)(2-5)$

туюнтмасын a негизи боюнча логарифмалагыла.

120. *а)* $N=\dfrac{a^3b^4\sqrt{c}}{3dx\sqrt{x}}$; *б)* $N=\dfrac{5\sin x\sin 2x}{\cos 3x\operatorname{tg}5x}$; *в)* $N=\sqrt[3]{\dfrac{e^{\sin x}}{x^4-1}}$

туюнтмасын логарифмалагыла.

121. Логарифмасы боюнча N ди тапкыла:

а) $\log_a N=3+2\log_a b-\dfrac{1}{2}\log_a x-4\log_a y$;

б) $\ln N=\ln\sin x-\ln\cos x+\dfrac{1}{2}\ln x$;

в) $\lg N=-1+\dfrac{1}{2}\lg(x-1)+\dfrac{1}{2}\lg(x+1)-3\lg x$.

Логарифманын негизин өзгөртүү

122. Логарифмалардын баардыгын негизи 2 болгон логорифмалар менен алмаштыргыла:

$\log_{\frac{1}{2}} a$, $\log_8 a$, $\log_{\frac{1}{4}} a$, $\log_{\sqrt{2}} a$, $\log_3 a$.

123. Эсептегиле:

а) $\log_8 12+\log_{\frac{1}{8}} 3$; *б)* $\dfrac{\log_9 32}{\log_9 4}$; *в)* $\dfrac{\log_{\sqrt[3]{5}} 27}{\log_{25}\sqrt{3}}$;

г) $\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$.

124. Эгер: *а)* $\log_{12}18=a$ болсо, анда $\log_8 9$ ту;

б) $\log_{\sqrt[3]{45}} 25=a$ болсо, анда $\log_9 15$ти;

в) $\log_9 20=a$, $\lg 2=b$ болсо, анда $\log_{250}120$ ны тапкыла.

Логарифмалык функция

Аныкталуу облусу

125. Төмөнкү функциялардын аныкталуу облусун тапкыла:

а) $y=\lg_a x$; *б)* $y=\ln_a|x|$; *в)* $y=\log_a(x+1)$;

г) $y=\log_a(-x)$; *д)* $y=-\lg_a(1-x)$; *е)* $y=\log_2(5-2x)$;

ж) $y=\log_2(9-x^2)$; *з)* $y=-\ln\ln x$; *и)* $y=\ln(e^x-1)$.

126. Кайсынысы чоң:

а) $\log_3 2$ же 0; *б)* $\log_{\frac{1}{5}} 3$ же 0;

в) $\log_5 \frac{1}{3}$ же 0;

г) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ же 0;

д) $\log_3 4$ же 1;

е) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{8}$ же 0;

ж) $\log_2 3$ же $\log_2 5$;

з) $\log_2 7$ же $\log_2 \frac{1}{9}$;

и) $\log_{\frac{1}{3}} 7$ же $\log_{\frac{1}{3}} 10$

k) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$ же $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}$;

л) $\log_{\frac{1}{5}} 3$ же -1;

м) $\log_{\frac{1}{5}} 3$ же $\log_{\frac{1}{5}} 5$.

График

127. Төмөнкү функциялардын графигин чийгиле:

а) $y = \ln x$; *б)* $y = \ln\frac{1}{x}$; *в)* $y = \ln(-x)$; *г)* $y = \ln|x|$;

д) $y = \ln x^2$; *е)* $\log_2 4x$; *ж)* $y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$; *з)* $y = |\ln x|$.

Функцияларды изилдөө

128. Туундуларын тапкыла:

а) $y = \ln 2x$; *б)* $y = x \ln x$; *в)* $y = \frac{\ln x}{\cos x}$;

г) $y = e^x \ln x$; *д)* $y = \ln(5x + 1)$; *е)* $y = \ln \sqrt{x}$.

129. Функцияны изилдеп, анын графигин түзгүлө:

а) $y = 3x - \frac{\ln x}{3}$; *б)* $y = \ln x - \frac{x}{5}$;

в) $y = x \ln x$; *г)* $y = \frac{1}{x} + \ln x$.

130. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла:

а) $y=\ln x$, $x\left[\frac{1}{e}; e\right]$; *б)* $y=3\ln x+2$, $x\in[1; 100]$;

в) $y=x-\ln x$, $x\in\left[\frac{1}{e}; e\right]$; *г)* $y=2x^2-\ln x$, $x\in\left[\frac{1}{2}; 1\right]$;

е) $y = \dfrac{1}{x} + \ln x, \quad x \in \left[\dfrac{1}{e}; e^2\right].$

Жакындаштырып эсептөө

131. Ондук белгиге чейинки тактыкта эсептегиле:

а) $e^{0,1}$; *б)* $e^{-0,2}$; *в)* $e^{1,2}$; *г)* $\ln 1,1$;

д) $\ln 0,8$; *е)* $\lg 10,1$; *ж)* $2^{0,2}$; *и)* $10^{0,9}$.

Теңдемелер жана барабарсыздыктар

Жөнөкөй көрсөткүчтүү теңдемелер

132. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $4^x = 8$;

б) $3^x = 9x+1$;

в) $5^{3x-1} = 2$;

г) $7^{1-4x} = 1$;

д) $3^{x^{2-4x}} = 9$;

е) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \sqrt[4]{2}$;

ё) $2^{2^x} = 2$;

ж) $2^{x+1} + 2^x = 3$;

з) $2^x = 4$;

и) $2^x = 16$;

к) $3^x = -1$;

л) $2^x = 3$;

м) $3^x = 0$;

н) $5^x = 1$;

п) $3^x - 3 = 0$;

р) $3^{2x} = 81$;

с) $2^{3x} = 5$;

т) $3^{x^2-5x+8} = 9$.

Жөнөкөй логарифмалык теңдемелер

133. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $\log_4 x = 2$;

б) $\log_5 x = -2$;

в) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$;

г) $\log_2(1-3x) = 3$;

д) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 1) = 0$;

е) $\log_4(2-x) = \log_2 3$;

ж) $\log_2(x-7) = \log_2(11-x)$;

з) $\log_3(x-5) = \log_3(2-x)$;

и) $\log_5(x^2 - 4x) = \log_5(3-2x)$;

k) $\log_2 x = 3$;

л) $\log_3 x = 2$;

м) $\lg x = 0$.

Сызыктууга алып келүүчү көрсөткүчтүү теңдемелер

134. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $3^{x+2}-3^{x+1}+3^{x}=21;$

б) $4^{x}+2^{2x+1}-\left(\frac{1}{16}\right)^{1-\frac{x}{2}}=47;$

в) $4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1};$

г) $5\cdot 2^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x-1}}=56;$

д) $2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}=30;$

е) $7\cdot 5^{x}+90=5^{x+2};$

ж) $4^{x+3}+2^{2x+2}=51;$

з) $4^{x+1}-3^{x}=3^{x+2}-4x.$

Квадраттыкка алып келүүчү көрсөткүчтүү теңдемелер

135. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $2^{x+1}+4^{x}=80;$

б) $3^{x}+3^{1-x}=\frac{28}{3};$

в) $7^{2x}-6\cdot 7^{x}+5=0;$

г) $\frac{2^{x}+2^{-x}}{2^{x}-2^{-x}}=\frac{17}{15};$

д) $10^{1+x^{2}}-10^{1-x^{2}}=99;$

е) $3^{2x}-2\cdot 3^{x}=3.$

Логарифмалык теңдемелер

136. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $\log_{2}x\log_{4}x\log_{8}x\log_{16}x=\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}}x;$

б) $\log_{2}x+\log_{\sqrt{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}x=6;$

в) $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_{\frac{2}{3}}x=1;$

г) $\log_{x}(x-2)=-1;$

д) $\log_{2}x+\frac{4}{\log_{x}2}=5;$

е) $\log_{3}x+\log_{\sqrt{x}}x-\log_{\frac{1}{3}}x=6;$

ж) $x^{\log_{2}x-2}=8;$

з) $x^{\log_{5}x}=125x^{2}.$

Көрсөткүчтүү барабарсыздыктар

137. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x \le 21$;

б) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} < 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$;

в) $4^x + 2^x + 1 \ge 0$;

г) $4^x + 2^{x+1} < 0$;

д) $2^x > 1$

е) $2^x > \frac{1}{2}$;

ж) $3^x > 0$;

з) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$;

и) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ge 9$;

к) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \le 4$;

л) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-x-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^x \le 20$;

м) $5^{x-1} - 5^x + 5^{x+1} \ge 21$.

Логарифмалык барабарсыздыктар

138. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $\lg x > 1$

б) $\lg x < 2$;

в) $\log_2 x \le -1$;

г) $\log_{0,5} x > 2$;

д) $\lg(1-x) \ge 2$;

е) $\ln x^2 < 1$;

ж) $\log_2(2x-3) < 3$;

з) $\log_{\frac{1}{2}}(x+5) < -2$;

и) $\lg x + \lg(x-3) < 1$;

к) $(\log_2 x)^2 \le 4$;

л) $\lg(2x+3) < \lg(x-1)$;

м) $2\lg(x+2) > \lg(x+4)$;

н) $\frac{1}{\log_2(x-2)} \le \frac{1}{2}$;

п) $\log_x 3 \le -1$.

Теңдемелердин системасы

139. *а*) $\begin{cases} 3^y \cdot 5^x = 45, \\ 3^x \cdot 5^y = 75; \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7; \end{cases}$ *в*) $\begin{cases} x^{y+2} = 10, \\ x^{2y-1} = 100; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ x + y = 3; \end{cases}$ *д*) $\begin{cases} xy = 10, \\ (\lg x)(\lg y) = -2. \end{cases}$

Теңдемелерди чыгарууда графикти колдонуу

140. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $5^x = 7 - 2x$; *д)* $x\log_2(x+1) = \log_{\frac{1}{3}} x + 7$; *з)* $x^3 + 2^x = 3$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{\sqrt{x}}{2}$; *г)* $5^x = 27 - x$; *и)* $x\log_3 x = 18$;

в) $\log_2 x = 3 - x$; *е)* $2^x + 7^x = 3^2$; *к)* $\log_3 x + |x| = 0$.

Тескери функция

Өзара тескери функциялар

141. Катыштардагы x жана y өзгөрмөлөрүнүн бирин экинчисинен функция болгондой кылып туюнткула:

а) $3x+5y=4$; *б)* $(x-2)(y+3)=1$; *в)* $e^x\frac{1}{y}$;

г) $x \geq 0$, $y \leq 0$ үчүн $x^2 + y^2=1$.

142. Формуладагы t ны s ден функция болгудай кылып туюнткула:

а) $s=s_0+v(t-t_0)$; *в)* $s=s_0 e^{-\frac{t}{t_0}}$;

б) $s=a(t-t_0)$; *г)* $s=s_0\ln\left(1+\frac{1}{t_0}\right)$.

143. Берилгенге тескери болгон функцияны тапкыла:

а) $y=5x-1$; *в)* $y=\sqrt{1+x^2}$, $x\geq 0$; *д)* $y=e^{\sqrt{x}}$;

б) $y=2x+|x|+1$; *г)* $y=\sqrt{1-x}$; *е)* $y=\ln\ln x$.

144. Төмөнкү функциялардын ар бирине тескери болгон функцияларды тапкыла жана ар биринин аргументин абсцисса огуна ченеп коюп, экөөнүн тең графигин түзгүлө:

а) $y = \frac{x}{2} - 1$; *б)* $y = \frac{1}{x-1}$; *в)* $y = x^3, x \geq 0$;

г) $y = e^{-x}$; *д)* $y = \ln(x-1)$; *е)* $y = x^2, x \leq 0$.

145. Туундусун тапкыла:

а) $y = \mathrm{arcctg}\sqrt{x}$; *б)* $y = \arcsin\frac{1}{x}$;

в) $y = \ln\ln x$; *г*) $y = \arccos\sqrt{1 - x^2}$.

II бөлүмдө берилүүчү текшерүү иштер

I вариант

146. $y=ex-\ln x$ функциясын изилдеп, анын графигин түзгүлө.

147. $5^{-x} - 5^{x+2}=24$ теңдемесин чыгаргыла.

148. $\log_3(x-3)+\log_3(x-5) \le 1$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

149. $y=2^{-x}$ функциясынын графигин түзгүлө жана график боюнча $2^{-x} = \dfrac{x}{2}$ теңдемесинин чыгарылышын тапкыла.

II вариант

150. $y=f(x)$ функциясы берилген, мында $f(x) = 5^x + \dfrac{25}{5^x}$.

а) $f(x)=26$ теңдемесин чыгаргыла.

б) y функциясынын эң кичине маанисин тапкыла.

в) a нын кайсы маанисинде $y=f(x+a)$ функциясы жуп болуп эсептелет.

151. $y=xe^{x+1}$ функциясын изилдеп, анын графигин түзгүлө.

152. $\log_3 x -\log_3(x+2) + \log_3 9(x^2 -4) \le 1$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

III вариант

153. $y=f(x)$ функциясы берилген, мында $f(x)= \log_2(4^x -12)$.

а) y функциясынын аныкталуу облусун тапкыла.

б) $f(x)=x$ тендемесин чыгаргыла.

в) $f(x)<2x$ барабарсыздыгын далилдегиле.

г) $f(x)=x + k$ теңдемеси k нын кайсы маанилеринде жок дегенде бир тамырга ээ боло алат?

154. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x+5}{3-x} > -1$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

155. $y= \log_2(x^2 +x +1)$ функциясынын графигин түзгүлө.

Мал тапкыча, эсеп тап.
(Кыргыз эл макалы)

III бөлүм

ТЕҢДЕМЕЛЕР, БАРАБАРСЫЗДЫКТАР. ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАРДЫН СИСТЕМАЛАРЫ

Урматтуу орто мектептин бүтүрүүчүлөрү! Математиканын мектеп курсун аяктап жатып, силер теңдемелердин жана барабарсыздыктардын түрдүү типтерин өттүнөр жана аларды чыгаруу ыкмаларын үйрөндүнөр. Кайталоо, эске түшүрүү эч кимге, эч качан, эч кандай зыян кылбайт, пайда гана алып келет. Биз да бул главанын материалдарын жазууда, мүмкүн болушунча, өтүлгөн материалдарды эске салып турууну туура көрдүк.

§ 1. Теңдемелерди жана барабарсыздыктарды классификациялоо. Кайталоо үчүн көнүгүүлөр

Теңдемелерди классификациялоону белгисизге аткарылган математикалык амалдардын мүнөзүнө карата жүргүзүшөт.

1-аныктама. Эгерде теңдемеде белгисизге кошуу, кемитүү, көбөйтүү, бөлүү, даражага көтөрүү, тамыр чыгаруу амалдары гана аткарылса, анда мындай теңдемени *алгебралык теңдеме* деп аташат.

2-аныктама. Эгерде теңдемеде белгисизге 1-аныктамада аталган 6 амалдан башка амалдар аткарылса, анда теңдеме *трансценденттик* деп аталат.

Демек, теңдемелер жалпысынан эки типке бөлүнөт: алгебралык жана трансценденттик болуп. Кээде трансценденттик теңдемелер алгебралык эмес деп да аталат.

Мисалдар келтирели:

1) $x^2 - 3x + 5 = 0$ – алгебралык;

2) $x + \sqrt[3]{x} - 2 = 0$ – алгебралык;

3) $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + x + 1} = 3$ – алгебралык;

4) $\sin\frac{x+1}{x+2}=7x+9$ – трансценденттик;

5) $\log_3(x^2-x)=e^x$ – трансценденттик;

6) $x^2+3|x|-4=0$ – трансценденттик;

7) $\sqrt[4]{x}+\sin x+e^x=10$ – трансценденттик;

8) $x^{\frac{1}{21}}+2^{\sqrt{x}}+3=0$ – трансценденттик;

9) $\operatorname{tg}x=3$ – трансценденттик теңдеме.

Алгебралык теңдемелер төмөнкү үч типке бөлүнүшөт:

а) бүтүн алгебралык теңдеме (мындай теңдемеде белгисиздин даражасы нөл жана натуралдык сандар гана болушат); мисалы, $(x+1)(x+7)=(x+\pi)(x-e)$; $7x^3-\sqrt{2}\,x+7=0$;

б) бөлчөк рационалдык алгебралык теңдеме (мындай теңдеме бүтүн алгебралык теңдемелердин катыштарын камтыйт); маселен,

$$\frac{x+3}{x}=\frac{x^4-5}{x^6+7}-2x^2+14x-97;$$

в) иррационалдык теңдеме (мындай теңдемеде белгиздин даражасы рационалдык сан болот, б. а. тамыр белгисинин (радикалдын) астында белгисиз камтылат); маселен, $x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}=4$; $\sqrt[4]{x}+\sqrt[7]{x}=2$.

Э с к е р т ү ү: алгебралык теңдемелерде аткарылуучу 6 математикалык амалдын саны чектелүү гана болушу керек.

Эгерде белгисизге жүргүзүлгөн 6 амалдын биринин саны эле чектелүү болбой калса, анда мындай теңдеме алгебралык болбой калышы мүмкүн. Бир мисал келтирели. Төмөнкү факт жогорку математикада далилденет:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=x+1 \qquad (*)$$

теңдемеси $e^x=x+1$ теңдемесине эквиваленттүү. Демек, (*) теңдемеси трансценденттик, б. а. алгебралык эмес теңдеме. Мунун башкы себеби эле (*) теңдемесинин сол жагында жүргүзүлгөн белгисизди бүтүн даражага көтөрүү амалынын саны чексиз (чектелүү эмес!).

Эстейличи! (*) теңдемесиндеги ! белгиси «факториал» деп окуларын 9-класста өткөнбүз, $n!$ (эн факториал) ар кандай $n\in N$

натуралдык саны үчүн $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ экенин билебиз. Демек $n!=1\cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$; маселен $3!= 1\cdot 2 \cdot 3=6$, $9!= 8! \cdot 9$, $n!=(n-1)! \cdot n$.

Эгерде (*) теңдемесинде n дин саны чектелүү болгондо, анда мындай теңдеме бүтүн алгебралык теңдеме болмок. Маселен,

$$1+ x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} = x+1 \Rightarrow \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} = 0$$

теңдемеси бүтүн алгебралык теңдеменин мисалы боло алат.

Эстеп коёлу! Бүтүн алгебралык теңдемени төмөнкү түргө ар дайым келтирсе болот:

$$P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}+\ldots+ a_1 x + a_0=0, \tag{1}$$

мында $a_i \in R$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ – берилген (белгилүү) сандар.

(1) теңдемесинин даражасы деп $P_n(x)$ көп мүчөсүнүн (полиномунун) даражасы аталат.

Биринчи даражадагы теңдеме – сызыктуу, экинчи даражадагы теңдеме – квадраттык, үчүн даражадагы теңдеме – кубдук теңдеме деп аталарын өткөнбүз.

Эстеп коёлу! Белгисиз өзгөрүлмө чондукту камтыган барабарсыздыктар теңдемелердин классификациясы сыяктуу эле: алгебралык жана трансценденттик болуп эки типке бөлүнөт.

М и с а л ы,

$3x^2 - 2x+5 >0$ – экинчи тартиптеги (квадраттык) алгебралык;

$2^x< x+1$ – трансценденттик (2^x тин эсебинен);

$\cos x < 3x-1$ – трансценденттик ($\cos x$ тин эсебинен);

$2|x|- x+5>0$ – трансценденттик ($|x|$ тин эсебинен);

$\sin x+\cos x <1$ – трансценденттик ($\sin x$ менен $\cos x$ тин эсебинен);

$\frac{4x^3 + 5x^2 - x + 7}{7x^2 + 8x - 15}<0$ – бөлчөк рационалдык алгебралык;

$\log_4(x - 3)>4$ – трансценденттик ($\log_4(x - 3)$ түн эсебинен);

$3x^2 - 2x+5>3x(x - 2) \Leftrightarrow 4x+5>0$ – биринчи тартиптеги алгебралык;

$\mathrm{tg}\, x < 2+x$ – трансценденттик ($\mathrm{tg}\, x$ тин эсебинен);

$\sqrt[5]{x^2} + 2\sqrt{x} - 83<0$ – иррационалдык (алгебралык) барабарсыздык.

Эстеп коёлу! Көрсөткүчтүү, логарифмдик, тригонометриялык теңдемелер (барабарсыздыктар), ошондой эле тескери тригонометриялык туюнтмаларда, модулдун ичинде белгисизи бар теңдемелер (барабарсыздыктар) трансценденттик теңдемелер (барабарсыздыктар) болуп эсептелишет. Дегеле, алгебралык эмес (трансценденттик) туюнтмада белгисизи бар теңдемелер (барабарсыздыктар) *трансценденттик* деп аталышат. Теңдеменин (барабарсыздыктын) трансценденттик болушу үчүн бир эле трансценденттик туюнтманын белгисизди камтышы жетиштүү, б. а. алгебралык жана трансценденттик туюнтмалардын комбинациясы белгисизди кармаса, анда мындай теңдемелер (барабарсыздыктар) да трансценденттик болуп саналышат.

Мисалдар. 1) $x^2+3x-5+|x|=\sqrt[5]{x}+8$ – трансценденттик теңдеме ($|x|$тин эсебинен); 2) $x^3-x<1+\log_5 x$ – трансценденттик барабарсыздык ($\log_5 x$ тин эсебинен); 3) $2^{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=3$ – трансценденттик теңдеме ($2^{\sqrt{x}}$ тин эсебинен).

Суроолор

1) Теңдемелерди жана барабарсыздыктарды классификациялоо эмнеге негизделген?

2) Кандай теңдемелер алгебралык деп аталат?

3) Алгебралык теңдемелер кандай типтерге бөлүнөт?

4) Алгебралык эмес теңдемелер башкача кантип аталат?

5) Кайсы математикалык амалдар алгебралык барабарсыздыктарды берет?

6) Кандай барабарсыздыкты трансценденттик дейбиз?

7) Трансценденттик теңдемелер жана барабарсыздыктарга мисалдар келтиргиле.

Көнүгүүлөр

1. Теңдеменин тибин (алгебралык же транценденттик экенин) аныктагыла:

а) $x^4+y^4=x^2\ y^2$; *е)* $2^x=x+7$;

б) $\mathrm{tg}x^3=\cos x^3$; *ж)* $\log_5 x+8x=-1$;

в) $\dfrac{x^3-1}{x+1}=2x$; *з)* $|x|+|y|=1$;

г) $x^{\sqrt{2}}+3x=4$; *и)* $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=2$;

д) $\sqrt[3]{x}=-3$; *к)* $2^{\sqrt{3}}x^2=x-9$.

2. Барабарсыздыктын тибин аныктагыла:

а) $\sqrt{2}x+3<0$; *б)* $3^{\sin x}>\log_5 x$;

в) $x^2+x+5>\sin^2x+\cos^2x$; *д)* $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2>x^3+7x^2-5x+8$;

г) $\frac{x^2+x+3}{x^2-x+5}<1$; *е)* $2x^2-\sqrt{x^2}+8<0$.

Төмөнкү көнүгүүлөрдү аткарып, өтүлгөн материалдарды кайталагыла.

3. Теңдемени чыгаргыла:

а) $5-3(x-2(x-2(x-2)))=2$; *г)* $(x-3)^2-x(x+4)=15-10x$;

б) $\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}=0$; *д)* $\cfrac{3}{2-\cfrac{3}{2-\cfrac{3}{2-x}}}=\frac{21}{8}$;

в) $\frac{3x}{0{,}2}=\frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}}$; *е)* $\sqrt{x+3}+\frac{4}{\sqrt{x+3}+3}=2$.

4. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $2x^2-3x+5>0$; *г)* $(x+1)(x-3)(x+4)(x-5)>0$;

б) $-9+x^2<0$; *д)* $(2x-3)(7+x)(5-3x)(x^2+1)>0$;

в) $x^2\geq 25$; *е)* $(x-3)^2(x-4)(x+6)^4(x-1)^2\leq 0$.

5. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\frac{x^2-5x+4}{5-x}>0$; *г)* $1<\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}\leq 2$;

б) $\frac{x+75}{x+3}\leq x+1$; *д)* $-1\leq\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\leq 1$;

в) $\frac{1}{x+2}>\frac{3}{x-3}$; *е)* $\frac{3x^2+x-1}{x^2-6x-7}\leq\frac{4x^2+3x-1}{(x+1)(x-7)}$.

6. *а)* a параметринин кайсы маанисинде $ax-4=3x$ теңдемесинин тамыры 8 ге барабар?

б) a параметринин кайсы маанисинде $\frac{8+5x}{2-x}=2a$ теңдемесинин чыгарылышы (тамыры) жок?

в) a параметринин кайсы маанисинде $y=ax-3$ түз сызыгы $A(-2;\ 9)$ чекити аркылуу өтөт?

г) b параметринин кайсы маанисинде $y=3x+b$ түз сызыгы $A(-1;\ 5)$ чекити аркылуу өтөт?

д) k параметринин кайсы маанисинде $x^2+(6-3k)x+1=0$ теңдемесинин чыгарылышы (тамыры) жок?

7. Функциянын аныкталуу облусуна тиешелүү эң кичине бүтүн санды тапкыла:

а) $y=\sqrt{-(x+2)^2+25}$; *б*) $y=\sqrt{x-\dfrac{15}{x+2}}$; *в*) $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}-2}$;

г) $y=\sqrt{4+x+\dfrac{3}{x}}$; *д*) $y=\sqrt{-\dfrac{2}{3-x}}$; *е*) $y=\sqrt{x-x^3}$.

8. Барабарсыздыктын эң кичине бүтүн чыгарылышын тапкыла:

а) $3x^2-4x+5\le 0$; *г*) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x+1)(x-3)^4(x-5)}\ge 0$;

б) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0$; *д*) $\dfrac{x+2}{3-x}>2$;

в) $-2x^2+x+1\ge 0$; *е*) $\dfrac{x^3+27}{x}\le 0$.

9. Барабарсыздыктын эң чоң чыгарылышын тапкыла:

а) $\dfrac{x^2+2x-15}{x+1}\le 0$; *г*) $\dfrac{(x-2)^4(x+4)}{x+7}\le 0$;

б) $\dfrac{x^2-1}{2x+5}\le 3$; *д*) $\dfrac{(x+6)^3(x-4)}{(2-x)^5}\ge 0$;

в) $\dfrac{x^2+7x-13}{x^2+1}\le 1$; *е*) $\dfrac{x-2}{4-x}>0$.

10. Теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла:

а) $\log_3 x+\log_x\dfrac{1}{9}=1$; *г*) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5x^2-29}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2+5}$;

б) $\lg^2 x^2-\lg x^5+1=0$; *д*) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{4x^2-23}=\left(\dfrac{7}{2}\right)^{5x^2-13}$;

в) $\ln(x^2-6x+9)=\ln 3+\ln(x+3)$; *е*) $|x-4|^{\sqrt{-x^2-5x}}=|x-4|^2$.

11. Барабарсыздыкты канааандырган x тин эң кичине бүтүн маанисин тапкыла:

а) $\log_3(3x-2)>0$; *г*) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}\ge 4$;

б) $\lg(x^2+x+4)<1$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)\le 2$;

д) $9^{x+1}-3^{x+3}<3^x-3$;

е) $2^{2x}-3\cdot 2^x+2\le 0$.

12. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0,\\ x^2-2y^2-8=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=1,\\ \log_2(xy)=8;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2^x+2^y=12,\\ x-y=1;\end{cases}$

д) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=144,\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=2;\end{cases}$

г) $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=12,\\ 2^y\cdot 3^x=18;\end{cases}$

е) $\begin{cases}\log_3(2x+y^2)=1,\\ 2^{x+y^2}-4=0.\end{cases}$

13. Теңдемени чыгаргыла жана берилген аралыктагы тамырларын тапкыла:

а) $\mathrm{ctg}\,5x=\mathrm{ctg}\,2x$, $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\sin 3x+\sin x=2\sin 2x$, $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$;

в) $\cos 7x=\cos 5x+\sin x$, $(-20°;\ 0°)$;

г) $\mathrm{tg}\,3x=\mathrm{tg}\,x$, $(135°;\ 180°)$;

д) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$, $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$;

е) $\sin x(1+\cos x)=1+\cos x+\cos^2 x$, $(0;\pi)$.

14. Теңдемени чыгаргыла жана анын берилген аралыктагы ар түрдүү тамырларынын санын тапкыла:

а) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, $(-90°,\ 0°)$;

б) $(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=4-2\sin^2 2x$, $[0;\pi]$.

Көрсөтмө. Теңдемелердин жалпы чыгарылыштарын таап, анын берилген аралыктарга тиешелүү тамырларын бөлүп алуу керек.

15. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sin x+\cos x>-\sqrt{2}$;

г) $\sin x+\sqrt{3}\cos x<0$;

б) $\cos(\sin x)<0$; *д)* $\operatorname{arcctg}^2 x - 5\operatorname{arcctg} x+6>0$;

в) $2\sin^2 x - 7\sin x+3>0$; *е)* $\operatorname{arctg}^2 x - 4\operatorname{arctg} x+3>0$.

Көрсөтмө. в) $|\sin x|\leq 1$ барабарсыздыгын пайдалангыла; *д)* $\operatorname{arcctg} x=t$, *е)* $\operatorname{arctg} x=t$ деп белгилеп, квадраттык барабарсыздыкты чыгаргыла.

16. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} \sin x - \sin y = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin y = 5\sin x, \\ 3\cos x + \cos y = 2; \end{cases}$ *г)* $\begin{cases} y - x = \dfrac{1}{4}, \\ \cos(\pi x)\cos(\pi y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Тест

(Көрсөтүлгөн жооптордун туурасын тапкыла)

17. Барабарсыздыктын бүтүн чыгарылыштарынын көбөйтүндүсүн тапкыла:

$$\frac{x^2+3x+54}{x^2-8x+15}+\frac{8}{x-5}\leq 0.$$

а) 100; *б)* 112; *в)* 115; *г)* 120; *д)* 130.

18. Теңдеменин берилген интервалдагы тамырларын тапкыла:

$2\sin^2 2x+7\sin 2x - 4=0$, $(160°; 200°)$. Жообун градус түрүндө жазгыла.

а) 162°; *б)* 165°; *в)* 170°; *г)* 180°; *д)* 190°.

19. Теңдеменин кичине тамырын тапкыла: $x^{\lg x}= x^2$.

а) $\dfrac{1}{10}$; *б)* $\dfrac{1}{2}$; *в)* 1; *г)* 10; *д)* 100.

20. Барабарсыздыктын эң кичине чыгарылышын тапкыла: $3\cdot 9^x+2\cdot 3^x-1\geq 0$.

а) − 4; *б)* −3; *в)* −2; *г)* −1; *д)* 1.

21. Барабарсыздыктын чыгарылышы болбогон эң чоң x тин маанисин тапкыла: $4(x^2+1)>9x+2$.

а) 0; *б)* 1; *в)* 2; *г)* 3; *д)* 4.

22. Теңдеменин бүтүн чыгарылышын тапкыла: $x^{\log_4 x}=4$.

а) 1; *б)* 2; *в)* 3; *г)* 4; *д)* 5.

23. Барабарсыздыктын эң чоң бүтүн чыгарылышын тапкыла:

$\frac{f'(x)}{(x+5)(x-6)}\le 0$, мында $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$.

а) 1; *б)* 2; *в)* 3; *г)* 4; *д)* 5.

24. Барабарсыздыктын чыгарылышы болбогон x тин бүтүн оң маанисин тапкыла: $\log_2^2 x+\log_2 x\ge 2$.

а) 0,1; *б)* 0,2; *в)* 0,5; *г)* 1; *д)* 2.

25. 11-класстын окуучулары бири бирине өздөрүнүн сүрөттөрүн эстеликке беришти. Натыйжада ар бир окуучу классташтарынын сүрөттөрүнө ээ болду. Эгерде бардыгы болуп 870 сүрөт керектелген болсо, анда класста канча окуучу болгон?

а) 25; *б)* 27; *в)* 28; *г)* 30; *д)* 35.

26. Теңдеменин тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла: $\log_4^2 x-\log_4 x-6=0$.

а) 2; *б)* 3; *в)* 4; *г)* 6; *д)* 8.

27. Барабарсыздыктын бүтүн чыгарылыштарынын көбөйтүндүсүн тапкыла: $2x^2-9x+4<0$.

а) 3; *б)* 4; *в)* 5; *г)* 6; *д)* 8.

28. Теңдеменин берилген аралыктагы ар түрдүү тамырларынын санын тапкыла: $2+2\cos(\pi-2x)=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x$, $[0;\pi]$.

а) 2; *б)* 3; *в)* 4; *г)* 5; *д)* 6.

§ 2. Иррационалдык теңдемелер. Алардын негизги түрлөрү жана чыгаруу методдору

А н ы к т а м а. Белгисизди радикалдын (тамыр белгисинин) астына камтыган же белгисиздин рационалдык бөлчөк даражасын камтыган алгебралык теңдеме *иррационалдык теңдеме* деп аталат.

Демек, эгер x – белгисиз десек, анда алгебралык теңдемеде $\sqrt[n]{x^m}$ же $x^{\frac{m}{n}}$ сыяктуу туюнтма (жок дегенде бирөө эле) же алардын ар кандай комбинацияларын математикалык амалдар менен байланыштары катышкан болсо, анда мындай *теңдеме иррационалдык* болот.

Маселен, $\sqrt{x-3}=5$, $x^{\frac{1}{7}}=x+9$, $\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{1-\sqrt[5]{x}}+\dfrac{1-\sqrt[6]{x}}{x-21}$,

$x^2+1-\sqrt{x^2+2}=3$, $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}=\dfrac{x-1}{x+4}$, $\sqrt[8]{x}-x^{\frac{1}{5}}=4$, $\sqrt{1-\sqrt{x-\sqrt{x}}}=1$ теңдемелери – иррационалдык теңдемелер.

Иррационалдык теңдемелердин кээ бир түрлөрү рационалдык теңдемелерге келтирүү жолу менен чыгарылат. Ал эми айрым түрлөрүн рационалдык теңдемеге келтирбей эле чыгарса болот. Бул параграфта ушул айтылгандарга далилдүү мисалдар чыгарабыз жана көнүгүүлөрдү беребиз.

Э с к е р т ү ү. 1) Биз китептерде «чыныгы тамыр» деген сөз айкалышын көп кезиктиребиз. Ошон үчүн теңдеменин чыныгы тамыры бар деген – теңдеменин тамыры $R=(-\infty, \infty)$ – чыныгы сандар көптүгүндө жатат дегенди түшүндүрөрүн эске салалы.

2) «Теңдемени чыгаруу» жана «теңдеменин тамырларын табуу же тамыры жок экенин далилдөө» деген сөз айкалыштары эквиваленттүү. Теңдеменин тамырын тап десе, анда анын чыныгы тамырын табуу керек экенин макулдашып алалы.

3) Теңдеменин аныкталуу облусу – теңдемеге катышкан бардык функциялардын аныкталуу облустарынын жалпы бөлүгү.

4) Теңдеменин аныкталуу облусуна тиешелүү сандар гана анын тамыры боло алат. Башка сандар теңдеменин тамыры боло алышпайт; $x\in\varnothing$ деген теңдеменин чыныгы тамыры жок дегенди билдирет, мында x – берилген теңдеменин тамыры.

5) Иррационалдык теңдемелерди чыгарууда:

– берилген теңдеменин аныкталуу облусун табуу талапка ылайык (бул теңдеменин тамырлары кайсы сан көптүгүндө жатарын алдын ала билүүгө, теңдеменин тамырлары туура табылдыбы же жокпу деген суроону көзөмөлдөөгө жооп берет);

– берилген теңдеменин аныкталуу облусун таппай эле чыгара баштасак да болот (бул учурда табылган тамырларды теңдемеге коюп, текшерүү жүргүзүү керек).

6) Кээ бир учурда теңдеменин аныкталуу облусун табуу чоң кыйынчылыкты туудурушу мүмкүн же мүмкүн да болбой калышы ыктымал, ошондой эле табылган тамырды теңдемеге коюп, текшерүү жүргүзүү да татаал болуп калат. Мындай учурда теңдемени чыгарууда эквиваленттүү өзгөртүп – түзүүлөрдү жүргүзүү керек. Ошондо гана теңдеменин тамырынын туура табылганына ынанууга болот.

Бул параграфты жакшы өздөштүрүү үчүн:

а) арифметикалык тамыр жана анын касиеттерин,

б) рационалдык көрсөткүчтүү даража жана анын касиеттерин,

в) кыскача көбөйтүүнүн формулаларын,

г) функциянын аныкталуу облусун табууну,

д) рационалдык теңдемелерди чыгаруу ыкмаларын,

е) функциянын касиеттерин (жуп, так, монотондуу, чектелүү ж. б.) билүү керек. Ошондуктан ушул айтылгандарды кайталоо ашыктык кылбас. Ким канчалык көп билсе, өзүнө ошончолук жакшы эмеспи.

Иррационалдык теңдеменин түрлөрү аябай көп жана аларды чыгаруу ыкмалары да ар түрдүү. Төмөндө биз иррационалдык теңдемелердин негизги түрлөрүнө жана аларды чыгаруу ыкмаларына токтолобуз.

1. **Арифметикалык тамырдын касиеттерин пайдалануу методу менен чыгарылуучу иррационалдык теңдемелер.** Бул учурда арифметикалык жуп жана так даражалуу тамырдын төмөнкү касиеттерин эске түшүрүү керек болот. Ар кандай g туюнтмасы жана $k \in N$ саны үчүн:

$$1)\ \sqrt[2k]{g} = \begin{cases} \text{аныкталбайт, эгерде } g < 0 \text{ болсо,} \\ 0, \text{ эгерде } \quad g = 0 \text{ болсо,} \\ > 0, \text{ эгерде } \quad g > 0 \text{ болсо,} \end{cases}$$

$\sqrt[2k]{g} = q \geq 0$ болсо, анда $g = q^{2k}$ (арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча);

$$2)\ \sqrt[2k+1]{g} = \begin{cases} < 0, \text{ эгер } \quad g < 0 \text{ болсо,} \\ 0, \text{ эгерде } \quad g = 0 \text{ болсо,} \\ > 0, \text{ эгерде } \quad g > 0 \text{ болсо,} \end{cases}$$

$\sqrt[2k+1]{g} = q$ болсо, анда $g = q^{2k+1}$ (так даражалуу радикалдын аныктамасы боюнча);

3) өздөрүнүн аныкталуу облустарында $y = \sqrt[2k]{g}$, $y = \sqrt[2k+1]{g}$ функциялары өсүүчү болот.

Мисалдарга кайрылалы.

1-м и с а л. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x} = -9$.

Ч ы г а р у у. Арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча бул теңдеменин сол жагы $x \geq 0$ үчүн $\sqrt{x} \geq 0$. Демек, анын сол жагы оң жагына барабар эмес. Ошондуктан берилген теңдеменин тамыры жок.

Жообу: $x \in \varnothing$.

2-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[4]{x-1}=3$.

Ч ы г а р у у. Арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча $x-1\geq 0$, $x-1=3^4>0 \Rightarrow x-1=81 \Rightarrow x=82$.

Жообу: $x=82$.

3-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{x+1}=-4$.

Ч ы г а р у у. Так даражалуу радикалдын аныктамасы боюнча $x+1=(-4)^3=-64 \Rightarrow x=-65$.

Жообу: $x=-65$.

4-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[6]{x(x-8)}=-x^4-1$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин сол жагында жуп 6 – даражадагы радикал, ал эми оң жагында терс $-x^4-1$ туюнтмасы турат. Мындан биз $x(x-8)\geq 0$ болгондо сол жагы ≥ 0 экенине жана теңдеменин сол жагы анын оң жагынан чоң экенине келебиз.

Жообу: $x \in \varnothing$.

5- *м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[12]{x}+\sqrt[20]{x-14}+\sqrt[3]{x-9}+x^2+x+1=0.$$

Ч ы г а р у у. Арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча бул теңдеменин сол жагы $x\geq 14$ ($\sqrt[20]{x-14}$ туюнтмасынын аныкталуу облусу) болгондо аныкталат жана x тин бул маанилеринде >0 болот, себеби $\sqrt{x+3}>0$, $\sqrt[4]{x-2}>0$, $\sqrt[12]{x}>0$, $\sqrt[20]{x-14}\geq 0$, $\sqrt[3]{x-9}>0$, $x^2+x+1>0$. Демек, бул теңдеменин чыгарылышы жок.

Жообу: $x \in \varnothing$.

6-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x-2}=4$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин аныкталуу облусу $\sqrt{x-2}$ туюнтмасынын аныкталуу облусуна барабар: $x-2\geq 0$, $x\geq 2$. Ал эми $x=6$ саны бул теңдеменин тамыры экенин текшерүүгө болот. Берилген теңдеменин башка тамыры барбы же жокпу? Теңдеменин аныкталуу облусунда анын сол жагы өсүүчү функция. Буга $x>2$ болгондо $(\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x-2})'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}>0$ экенинен ишенүүгө болот. Демек, $y=\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x-2}$ функциясы $y=4$ функциясы менен бир эле жолу кесилишет. Ошондуктан берилген теңдеменин башка тамыры жок.

Жообу: $x=6$.

7-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x} = a^2 - 4a+3$, мында a – параметр.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеме арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$, б. а. $a^2 - 4a + 3 \geq 0$ болгондо гана чыгарылышка ээ. Андыктан $a^2 - 4a + 3 = (a-1)(a-3) \geq 0$ барабарсыздыгынан $a \in (-\infty;\ 1] \cup [3;\ \infty)$ ди алабыз. Демек, берилген теңдеме a параметринин бул маанилеринде $x=(a^2 - 4a+3)^2$ деген тамырлар түрмөгүнө ээ.

Жообу: $x=(a^2 - 4a+3)^2$, $a \in R \setminus (1;\ 3)$.

2. Иррационалдык теңдемелердин кээ бир түрлөрүн чыгаруу үчүн алардын аныкталуу облусун табуу эле жетиштүү. Муну биз теңдеменин **аныкталуу облусун табуу методу** дейбиз.

Бул учурда жуп даражалуу $y=\sqrt[2k]{g}$ $(k \in N)$ функциясынын аныкталуу облусу $g(x) \geq 0$ барабарсыздыгынан табыларын, ал эми так даражалуу $y = \sqrt[2k+1]{g}$ $(k \in N)$ функциясынын аныкталуу облусту $g(x)$ функциясынын аныкталуу облусуна барабар экенин эске түшүргөнүбүз жакшы болот.

8-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x-2} - \sqrt{1-x} = 3$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин аныкталуу облусу $x - 2 \geq 0$ жана $1 - x \geq 0$ барабарсыздыктарынан табылат: $x \geq 2$, $x \leq 1$. Бир эле учурда x мындай маанилерди ала албайт, бул эки барабарсыздык бири бирине каршы. Мындан биз берилген теңдеменин чыгарылышы жок дегенди алабыз.

Жообу: $x \in \varnothing$.

9-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x^5 - 1} = x^2 - 5x+4.$$

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин аныкталуу облусу: $1 - x \geq 0$, $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$, $x \geq 1 \Rightarrow$ $x=1$, б. а. бир гана $x=1$ чекити. Текшерүү: $\sqrt{1-1} + \sqrt{1-1} - \sqrt[3]{1^5 - 1} = 0$, $1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 0$, $0=0$ айтып тургандай $x=1$ берилген теңдемени канааттандырат.

Жообу: $x=1$.

10-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt[4]{x-2} - \sqrt[8]{2-x} + \sqrt[7]{x^3 - 8} = \frac{x^4 - 16}{x^4 + 3}.$$

Ч ы г а р у у. Бул учурда теңдеменин аныкталуу облусу: $x - 2 \geq 0$, $2 - x \geq 0$, $x \geq 2$, $x \leq 2 \Rightarrow x=2$ чекити. Текшерип, $x=2$ берилген теңдеменин чыгарылышы экенине ынанууга болот.

Жообу: $x=2$.

11-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{5-x}+\sqrt[4]{x-5}=2$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин аныкталуу облусу: $5-x\geq 0$, $x-5\geq 0 \Rightarrow x\leq 5$, $x\geq 5 \Rightarrow x=5$ чекити. Ал эми $x=5$ берилген теңдемени канааттандырбайт, себеби $0\neq 2$. Демек, берилген теңдеменин чыгарылышы жок.

Жообу: $x\in\varnothing$.

3. Бир гана радикалы бар иррационалдык теңдемелер. Мындай теңдемелерди жалпы учурда $\sqrt[n]{g(x)}=q(x)$ түрүндө жазууга болот, мында $g(x)$, $q(x)$ – рационалдык функциялар. Мындай теңдемелерди чыгаруу үчүн (эгерде чыгарылыштары бар болсо) берилген теңдеменин эки жагын n – даражага көтөрүү керек. Ошондо биз $g(x)=(q(x))^n$ рационалдык теңдемесине келебиз. Бул учурда берилген теңдеменин тамыры бар же жок экенин текшерүүгө жогоруда каралган 1, 2 учурдагы методдорду колдонсок болот.

Э с к е р т у у. $\sqrt[2n]{g(x)}=q(x)$ теңдемеси $\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ g(x)=(q(x))^{2n} \end{cases}$ системасына эквиваленттүү.

12-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{-3x+3}=x-1$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеме чыгарылышка ээ болушу үчүн оң жагы ≥ 0 болушу керек, анткени анын сол жагында квадраттык тамыр турат.

Демек, берилген теңдеме $\begin{cases} 3-3x=(x-1)^2, \\ x-1\geq 0 \end{cases}$ системасына эквиваленттүү. Биринчи теңдемеден $x_1=1$, $x_2=-2$ тамырларын алабыз. Мындан $x_2=-2$ тамыры системадагы $x\geq 1$ барабарсыздыгын канааттандырбайт, б. а. $x_2=-2$– чет тамыр.

Жообу: $x=1$.

13-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x+1}+2=x$.

Ч ы г а р у у. Адегенде радикалды жалгыздап алалы: $\sqrt{x+1}=x-2$. Мындан аркысы 11-мисалдагыдай эле болот:

$\begin{cases} x+1=(x-2)^2, \\ x-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+3=0, \\ x\geq 2. \end{cases}$ $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. Мындан

$x_1=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ тамыры $x\geq 2$ барабарсыздыгын канааттандырбайт, ал эми $x_2=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ тамыры канааттандырат.

Жообу: $x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$.

14-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{x(x^2-2)-13}=x-1$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин аныкталуу облусу $x\in R$. Эки жагын тең кубка көтөрүп, төмөнкү туюнтманы алабыз:
$x(x^2-2)-13=(x-1)^3 \Rightarrow x^3-2x-13=x^3-3x^2+3x-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 3x^2-5x-12=0,\quad x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{169}}{6}=\dfrac{5\pm 13}{6},\quad x_1=\dfrac{5+13}{6}=3,$

$x_2=\dfrac{5-13}{6}=-\dfrac{4}{3}$. Бул табылган эки тамырды берилген теңдемеге коюп, алар теңдеменин тамырлары экенине ишенсек болот. (Өз алдыңарча текшерип көргүлө!).

Жообу: $x_1=3,\ x_2=-\dfrac{4}{3}$

15-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{2x^2-9x+8}+x=2$.

Ч ы г а р у у. Адегенде радикалды жалгыздайлы: $\sqrt[3]{2x^2-9x+8}=2-x$. Эми барабардыктын эки жагын тең кубка көтөрөлү, анда $2x^2-9x+8=8-12x+6x^2-x^3 \Rightarrow x^3-4x^2+3x=$ $=0 \Rightarrow x(x^2-4x+3)=0 \ \Rightarrow\ x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3$. Текшерип, үч тамыр тең туура табылганына ынануга болот.

Жообу: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3$.

Э с к е р т ү ү! Теңдеменин эки жагын тең жуп даражага көтөрүп, өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүп анын тамырларын тапканыбызда, аларды теңдемеге коюп, текшерүү жүргүзүү керек, себеби чет тамыр чыгып калышы мүмкүн. Ушул эле учурда теңдеменин аныкталуу облусун таап, тамырлардын (табылган) кайсынысы берилген теңдемени канаатандырарын көзөмөлдөөгө болорун биз жогоруда эскертип кеткенбиз. Ал эми теңдеменин эки жагын тең так даражага көтөрсөк, анда берилген теңдемеге эквиваленттүү теңдемени аларыбыз белгилүү, б. а. теңдемени так даражага көтөрүү амалы тең күчтүү өзгөртүп түзүү болуп эсептелет.

16-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x+2}+x=2$.

Ч ы г а р у у. Адегенде радикалды жалгыздап, анан теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз:

$\sqrt{x+2}=2-x \Rightarrow x+2=(2-x)^2 \Rightarrow x+2=4-4x+x^2 \Rightarrow x^2-5x+2=0.$

Мындан $x_1=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2},\quad x_2=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$ тамырларына ээ болобуз. Берилген теңдемени бул тамырлар канааттандырабы? Текшерип көрөлү: $x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ канаатандырбайт, анткени $\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}+$ $+\frac{5+\sqrt{17}}{2}>2$.

Эми татаал радикалдардын формуласын пайдаланып (9-класста өткөнбүз), төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}+2}+\frac{5-\sqrt{17}}{2}=\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}+\frac{5-\sqrt{17}}{2}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}+\frac{5-\sqrt{17}}{2}=2 \Rightarrow 2=2.$$

Демек, берилген теңдемени x_2 канааттандырат.

Жообу: $x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

Бул мисал көрсөтүп тургандай, табылган тамырларды берилген теңдемеге коюп, текшерүү жүргүзүлөт. Кээде мындай текшерүү жүргүзүү мүмкүн да болбой калат. Ошон үчүн колдон келишинче тең күчтүү өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүүгө аракет кылуу керек.

Бир радикалы бар иррационалдык теңдемени чыгарууга жаңы белгисизди кийирүү методун да колдонууга болот.

Мисалга кайрылалы.

17-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}-$ $-12=0$.

Ч ы г а р у у. Эгер радикалды жалгыздап, анан теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрсөк, анда биз төртүнчү даражадагы теңдемеге келебиз. Мындай теңдемени чыгаруу көп эмгекти талап кылат. Бул учурда италиялык математик Луиджи Ферраринин (1522–1565) формуласын колдонууга болот. Ал эми Л. Ферраринин формуласын колдонуу өзү оңой-олтоң жумуш эмес. Ошон үчүн мүмкүн болсо, берилген теңдемени чыгаруунун жеңил методун издөө керек. Андай метод бар: жаңы белгисиз чондукту кийирүү методу. Анда ошол методду колдонолу. Эгерде $\sqrt{x^2+2x+8}=y$, мында y – жаңы белгисиз, десек, анда x^2+2x+ $+8=y^2$ болот. Ошон үчүн берилген теңдемени $y^2+y-20=0$ квадраттык теңдемеси түрүндө жаза алабыз. Бул теңдеменин тамырлары $y_1=4$, $y_2=-5$. Эми $y=\sqrt{x^2+2x+8}$ экенин эске алсак, анда $\sqrt{x^2+2x+8}=y_1=4$, $\sqrt{x^2+2x+8}=y_2=-5$ иррационалдык теңдемелерине келебиз. Бул теңдемелердин экинчисинин чыгарылышы жок (мындай теңдемелерди биз жогоруда 1-ыкмада карагänбыз). Демек, берилген теңдеменин чыгарылышы биринчи теңдеменин: $\sqrt{x^2+2x+8}=4$ чыгарылышына келтирилди. Мындан эки жагын квадратка көтөрүп, $x^2+2x+8=16 \Rightarrow x^2+2x-8=0$ квадраттык теңдемесине келебиз. Бул теңдеменин тамырлары $x_1=2$, $x_2=-4$. Текшерүү жүргүзүп: $2^2+2\cdot2+\sqrt{2^2+2\cdot2+8}-12=$ $=8+4-12=0$, $0=0$, $(-4)^2+2\cdot(-4)+\sqrt{(-4)^2+2\cdot(-4)+8}-12=8+4-$ $-12=0$, $0=0$, табылган тамырлар берилген теңдеменин тамырлары экенин алабыз.

Жообу: $x_1=2$, $x_2=-4$.

4. Бирдей даражалуу эки жана андан көп радикалдары бар иррационалдык теңдемелер.

Мындай теңдемелерге квадраттык радикалдарды, куб радикалдарды, төртүнчү, бешинчи жана андан жогорку даражалуу радикалдарды камтыган иррационалдык теңдемелер кирет жана аларды теңдемени даражага көтөрүү методу, жаңы белгисизди кийирүү методу, теңдеменин эки жагын түйүндөш туюнтмаларга көбөйтүү методу менен, ошондой эле аталган жана башка белгилүү методдорду удаа колдонуу аркылуу чыгарса болот.

Бул теңдемелердин айрымдарына токтололу.

А) Квадраттык радикалдарды камтыган иррационалдык теңдемелер.

Мындай теңдемелердин кээ бирлерин теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрүү методу менен чыгарууга болот.

18-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+21}=8$.

Ч ы г а р у у. Биринчи радикалды сол жагына калтырып, экинчисин оң жагына алып өтүп: $\sqrt{x^2+5}=8-\sqrt{x^2+21}$ жана эки жагын тең квадратка көтөрүп, төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$$(\sqrt{x^2+5})^2=(8-\sqrt{x^2+21})^2 \Rightarrow x^2+5=64-16\sqrt{x^2+21}+x^2+21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\sqrt{x^2+21}=80 \Rightarrow \sqrt{x^2+21}=5.$$

Мындан дагы бир жолу эки жагын тең квадратка көтөрүп, x^2+ $+21=25 \Rightarrow x^2=4$ толук эмес квадраттык теңдемесин алабыз. Мында $x_1=-2$, $x_2=2$ тамырларын алабыз. Текшерүү жүргүзсөк, анда бул эки тамыр тең берилген теңдемени канааттандырат деген жыйынтыкка келебиз. (Муну өз алдыңарча текшерип көргүлө!).

Жообу: $x_1=-2$, $x_2=2$

Үч радикалы бар теңдемеге мисал келтирели.

19-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}-\sqrt{7x+4}=0$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин аныкталуу облусу $4x+9\ge 0$, $11x+1\ge 0$, $7x+4\ge 0$ барабарсыздыктар системасынан табылат: $x\ge -\frac{1}{11}$. Эми радикалдардын бирин жалгыздайлы. Анализдеп көрсөк, $\sqrt{11x+1}$ радикалын калтырганыбыз туура болот, анткени алынган барабардыктын эки жагын квадратка көтөргөнүбүздө сол жагында $4x+7x$, ал эми оң жагында $11x$ болуп, жоюшат да жөнөкөй теңдемеге келебиз, б. а. $\sqrt{4x+9}-\sqrt{7x+4}=\sqrt{11x+1} \Rightarrow$ $\Rightarrow 4x+9-2\sqrt{(4x+9)(7x+4)}+7x+4=11x+1 \Rightarrow \sqrt{28x^2+79x+36}=6$. Дагы бир ирет квадратка көтөрсөк, анда $28x^2+79x+36=36 \Rightarrow$ $\Rightarrow 28x^2+79x=0$ толук эмес квадраттык теңдемени алабыз. Мындан $x_1=0$, $x_2=-2\frac{23}{28}$. Бул тамырлардын экинчиси берилген теңдеменин аныкталуу облусуна кирбейт. Демек, $x=0$ берилген теңдеменин тамыры.

Жообу: $x=0$.

Төрт радикалы бар теңдемеге мисал келтирели.

20-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}-$ $-\sqrt{3x-5}$.

Ч ы г а р у у: Берилген теңдемени чыгаруу үчүн 19-мисалдагыдай эле ыңгайлуу түрдө жазып алалы:

$$\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}.$$

Бул барабардыктын эки жагын квадратка көтөрөлү, анда $8x+1+2x-2-2\sqrt{8x+1}\sqrt{2x-2}=7x+4+3x-5-2\sqrt{7x+4}\sqrt{3x-5}$, $\sqrt{8x+1}\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}\sqrt{3x-5}$ теңдемесине келебиз. Эми бул алынган теңдеменин эки жагын дагы бир жолу квадратка көтөрүп, төмөнкү квадраттык теңдемеге келебиз: $(8x+1)(2x-2)=$ $=(7x+4)(3x-5) \Rightarrow 5x^2-9x-18=0$. Мындан $x_1=3$, $x_2=-\frac{6}{5}$ тамырларын алууга болот. (Өз алдынарча, текшергиле!). Бул тамырларды берилген теңдемеге койсок, анда $x_1=3$ чын эле тамыр болорун, ал эми $x_2=-\frac{6}{5}$ чет тамыр экенин алабыз.

Жообу: $x=3$.

21-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}-2=0$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин аныкталуу облусу $x \geq 0$. Жаңы белгисизди кийирүү методун колдонолу: $y=x^{\frac{1}{8}}$, мында y – жаңы белгисиз. Анда $y^2 = x^{\frac{1}{4}}$ жана берилген теңдемеден $y^2 + y - 2 = 0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Мындан $y_1=1$, $y_2=-2$. Арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча $x^{\frac{1}{8}}=y \geq 0$. Демек $x^{\frac{1}{8}} = $ $=y_1=1 \Rightarrow \quad x_1=1$, $x_2^{\frac{1}{8}}=y_2=-2 \quad \Rightarrow \quad x_2 \in \varnothing$.

Жообу: $x=1$.

Биз 9-класста 21-мисал сыяктуу иррационалдык теңдемелердин квадраттык теңдемеге же биквадраттык теңдемеге келтириле турган түрлөрүнөн чыгарганбыз. Ошол теңдемелерди кантип чыгарганыңарды кайталап, эске түшүргүлө.

Кээ бир квадраттык радикалдары бар иррационалдык теңдемелерди түйүндөш туюнтмаларга көбөйтүү методу менен чыгарууга болот. 9-класста $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ жана $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ туюнтмалары өз ара түйүндөш экенин өткөнбүз.

22-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1. \qquad (*)$$

Ч ы г а р у у. Берилген (*) теңдемесинин эки жагын анын сол жагынын түйүндөшүнө: $\sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1}$ көбөйтсөк, анда $3x^2+5x+8 - 3x^2-5x-1 = \sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1}$,

$$\sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1} = 7 \qquad (**)$$

теңдемесине ээ болобуз. Эми (*) жана (**) теңдемелерин кошобуз (сол жагы сол жагына, оң жагы оң жагына кошуларын өткөнбүз). Анда $2\sqrt{3x^2+5x+8}=8$ же $\sqrt{3x^2+5x+8}=4$ теңдемесин алабыз. Мындан квадратка көтөрүп, $3x^2+5x+8=16$, $3x^2+5x-$ $-8=0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Бул теңдеменин тамырлары: $x_1=-\frac{8}{3}$, $x_2=1$. Текшерүү жүргүзүп, табылган эки тамыр тең (*) ны канааттандыраарын алабыз.

Жообу: $x_1=-\frac{8}{3}$, $x_2=1$.

23-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\frac{5}{x-\sqrt{x^2-5}} - \frac{5}{x+\sqrt{x^2-5}} = 4.$

Ч ы г а р у у. Бул теңдемени чыгаруу үчүн биринчи бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $x+\sqrt{x^2-5}$ туюнтмасына (бөлүмүнүн түйүндөшүнө), ал эми экинчи бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $x -$

$-\sqrt{x^2-5}$ туюнтмасына (бөлүмүнүн түйүндөшүнө) көбөйтөбүз. Анда төмөнкүгө ээ болобуз: $\frac{5(x+\sqrt{x^2-5})}{x^2-(x^2-5)}-\frac{5(x-\sqrt{x^2-5})}{x^2-(x^2-5)}=4$, $x+\sqrt{x^2-5}-$ $-x+\sqrt{x^2-5}=4$, $2\sqrt{x^2-5}=4$, $\sqrt{x^2-5}=2$. Мындан $x^2-5=4 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_{1,2}=\pm 3$. Текшерип көрүп, табылган эки тамыр тең берилген теңдеменин тамырлары болорун алабыз. (Текшерип көргүлө!).

Жообу: $x_1=-3$, $x_2=3$.

Б) Кубдук радикалдарды камтыган иррационалдык теңдемелер.

Мындай теңдемелердин айрым түрлөрүн теңдемени куб даражага көтөрүү методун колдонуп чыгарууга болот.

24-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{85-5x}+\sqrt[3]{10x-45}=0$.

Ч ы г а р у у. Адегенде радикалдарды жалгыздайлы: $\sqrt[3]{85-5x}=-\sqrt[3]{10x-45}$. Эми теңдеменин эки жагын тең кубка көтөрсөк, анда $85-5x=-(10x-45)$ же $5x=-40$, $x=-8$ тамырына ээ болобуз.

Жообу: $x=-8$.

Кээ бир куб радикалдуу теңдемелерди чыгарууда теңдеменин эки жагын куб даражага көтөрүү методун колдонуп, ошондой эле $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ формулаларын пайдаланып, анан дагы бир жолу теңдемени куб даражага көтөрүү методун колдонсок, анда берилген теңдемени бүтүн рационалдык теңдемеге келтирүүгө болот.

25-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

Ч ы г а р у у. Теңдеменин эки жагын тең кубка көтөрөбүз: $(\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16})^3=1^3 \Rightarrow (x+45)-(x-16)-3\sqrt[3]{x+45}\sqrt[3]{x-16}\times$ $\times(\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16})=1 \Rightarrow (x+45)-(x-16)-3\cdot\sqrt[3]{x+45}\sqrt[3]{x-16}\cdot 1=1$ (теңдеменин берилишин эске алып, үчүнчү кашаадагы туюнтманы 1 ге алмаштырдык). Мындан $3\cdot\sqrt[3]{x+45}\sqrt[3]{x-16}=60 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=20$ теңдемесин алабыз. Эми дагы бир жолу кубка көтөрсөк, анда $(x+45)(x-16)=8000 \Rightarrow x^2+29x-8720=$ $=0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Бул теңдеменин тамырлары $x_1=80$, $x_2=-109$. Текшерип көрүп (өз алдынарча чыгаргыла!), алынган эки тамыр тең берилген теңдемени канааттандырат деген тыянакка келебиз.

Жообу: $x_1=80$, $x_2=-109$.

26-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Ч ы г а р у у. 25-мисалдагыдай эле теңдеменин эки жагын кубка көтөрүп, төмөнкү теңдемеге келебиз: $3x-2+3\cdot\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\times$ $\times(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1})=1$. Кашаанын ичиндеги туюнтма берилген теңдеменин шарты боюнча 1 ге барабар. Анда биз

$$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} \qquad (\alpha)$$

теңдемесине келебиз. Бул (α) теңдемеси менен берилген теңдеме тең күчтүү болбой калышы мүмкүн. Анткени менен (α) теңдемесинин тамырларынын ичинде берилген теңдеменин тамырлары болушат, эгерде берилген теңдеменин чыгарылыштары бар болсо. Эми (α) теңдемесин дагы бир ирет кубка көтөрүп, $(2x-1)(x-1)=(1-x)^3$ теңдемесине келебиз. Мындан $x_1=0$, $x_2=1$ тамырларын табабыз.

Текшерүү жүргүзөлү: $\sqrt[3]{2\cdot0-1}+\sqrt[3]{0-1}=-2$, $-2\neq1$, $\sqrt[3]{2\cdot1-1}+$ $+\sqrt[3]{1-1}=1$, $1=1$. Демек берилген теңдеменин тамыры $x_2=1$, ал эми $x_1=0$ – чет тамыр.

Жообу: $x=1$.

27-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{3x+24}-\sqrt[3]{2x+6}=\sqrt[3]{x}$.

Ч ы г а р у у. 25, 26-мисалдардагыдай эле теңдеменин эки жагын кубка көтөрөлү. Анда $x+18-3\cdot\sqrt[3]{3x+24}\sqrt[3]{2x+6}(\sqrt[3]{3x+24}-$ $-\sqrt[3]{2x+6})=x$ теңдемесине келебиз жана кашаанын ичиндеги туюнтманы берилген теңдеменин шарты боюнча $\sqrt[3]{x}$ ке алмаштырабыз. Ошондо биз

$$\sqrt[3]{x(3x+24)(2x+6)}=6 \qquad (\beta)$$

теңдемесин алабыз. Эми (β) нын эки жагын тең дагы бир жолу кубка көтөрөлү. Натыйжада биз $x(3x+24)(2x+6)=36 \Rightarrow x^3+11x^2+$ $+24x-36=0 \Rightarrow (x^3-x^2)+(12x^2-12x)+(36x-36)=0 \Rightarrow x^2(x-1)+$ $+12x(x-1)+36(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+12x+36)=0 \Rightarrow (x-1)(x+$ $+6)^2=0 \Rightarrow x-1=0$, $(x+6)^2=0$ теңдемелеринин жыйындысына ээ болобуз. Мындан $x_1=1$, $x_2=x_3=-6$ тамырларын алабыз. Текшерүү жүргүзсөк, $x=-6$ берилген теңдемени канааттандырбайт.

Жообу: $x=1$.

Эстеп коёлу! 26- жана 27-мисалдар көрсөтүп тургандай, куб радикалдуу иррационалдык теңдеменин эки жагын тең кубка көтөрсөк, анда биз «теңдеме – натыйжага» келишибиз мүмкүн («теңдеме – натыйжанын» чыгарылыштарынын көптүгү берилген теңдеменин чыгарылыштарын камтыйт жана анын кээ бир тамырлары берилген теңдеме үчүн чет тамыр болуп калышы мүмкүн). Демек, куб радикалдуу теңдемени эки жагын тең кубка көтөрүү методун колдонуп чыгарсак да сөзсүз табылган тамырларды берилген теңдемеге коюп текшерүү жүргүзүү керек. 26–27-мисалдарда чет тамырлардын пайда болуу себеби: биз берилген теңдемени удаа эки жолу кубка көтөрдүк. Ал эми берилген теңдеменин эки жагын тең так даражага бир эле жолу көтөрсөк, анда тең күчтүү теңдемеге келерибиз белгилүү.

Кээ бир теңдемелерди теңдеменин эки жагын кубка көтөрүү методу менен жаңы белгисизди кийирүү методун айкалыштырып (биринин артынан бирин колдонуп) чыгарса да болот.

28-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

Ч ы г а р у у. Адегенде радикалдарды ыңгайлуу жайлаштырып алалы: $\sqrt[3]{x+34}=1+\sqrt[3]{x-3}$. Эми бул барабардыктын эки жагын тең кубка көтөрөлү: $x+34=1+3\cdot\sqrt[3]{x-3}+3\cdot\sqrt[3]{(x-3)^2}+x-3\Rightarrow$ $\sqrt[3]{(x-3)^2}+\sqrt[3]{x-3}-12=0$. Бул теңдемеде $y=\sqrt[3]{x-3}$ деп, y жаңы белгисизин кийирсек, анда $y^2+y-12=0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Бул теңдеменин тамырлары $y_1=3$, $y_2=-4$. Демек, $\sqrt[3]{x-3}=y$ экенин эске алып, $\sqrt[3]{x-3}=3$, $\sqrt[3]{x-3}=-4$ теңдемелеринин жыйындысына ээ болобуз. Бул теңдемелерге дагы бир жолу теңдеменин эки жагын кубка көтөрүү методун колдонсок, анда $x_1=30$, $x_2=-61$ тамырларын табабыз жана текшерүү жүргүзүп алар берилген теңдемени канаатандыраарын алабыз.

Жообу: $x_1=30$, $x_2=-61$.

Куб радикалдуу кээ бир теңдемелерди жаңы белгисиздерди кийирүү методу менен рационалдык теңдемелер системасына келтирип чыгарууга болот.

29-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{13-x}+\sqrt[3]{22+x}=5$.

Ч ы г а р у у. Жаңы белгисиздерди кийирүү методун колдонолу: $u=\sqrt[3]{13-x}$, $v=\sqrt[3]{22+x}$, мында u, v – жаңы белгисиздер.

Анда u, v белгисиздерине карата $\begin{cases} u+v=5, \\ u^3+v^3=35 \end{cases}$ рационалдык теңдемелер системасын алабыз. Бул симметриялуу теңдемелер системасы жана анын тамырлары: (3; 2), (2; 3). (Чыгарып, өзүңөрдү ынап көргүлө!). Анда $\sqrt[3]{13-x}=u$, $\sqrt[3]{22+x}=v$ экенин эске алсак, $x_1=-14$, $x_2=5$.

Жообу: $x_1=-14$, $x_2=5$.

Куб радикалдуу иррационалдык теңдемелерди чыгарууда теңдеменин эки жагын түйүндөш туюнтмага көбөйтүү методун колдонууга болот. (9-класста өткөнбүз):

$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ жана $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ туюнтмалары өз ара түйүндөш болушат.

30-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x^2}=1$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин эки жагын $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$ туюнтмасына, б. а. анын сол жагынын түйүндөшүнө көбөйтөлү.

Анда $x+1-x=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x}\Rightarrow\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}=1$ теңдемесин алабыз. Ал эми $x_1=0$, $x_2=-1$ бул теңдеменин жана биринчи теңдеменин тамырлары болорун оңой эле текшерүүгө болот.

Жообу: $x_1=0$, $x_2=-1$.

В) Төртүнчү даражалуу радикалдары бар иррационалдык теңдемелер.

Бул учурда теңдемелерди теңдеменин эки жагын тең төртүнчү даражага көтөрүү методу менен чыгарууга болот деген ой туулат. Бул закон ченемдүү нерсе. Бирок, иш жүзүндө мындай методду колдонуу чоң кыйынчылыктарды туудурат. Ошондуктан башка методдор бар бекен? – деген суроо койсок болот. Бар.

Мындай теңдемелерди теңдеменин эки жагын удаа квадратка көтөрүү методу жана жаңы белгисиздерди киирүү методу, ошондой эле бул методдорду айкалыштырып колдонуп чыгарууга болот.

Квадратка көтөрүү жана белгисизди киирүү методдорун колдонууга мисалдар келтирели.

31-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[4]{17-x}+\sqrt[4]{x+15}=4$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин эки жагын квадратка көтөрсөк, берилген теңдеменин натыйжасы болгон төмөнкү теңдемени алабыз:

$$\sqrt{17-x}+\sqrt{x+15}=16-2\cdot\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}\,. \qquad (1)$$

Эми (1) – теңдеменин эки жагын тең дагы бир жолу квадратка көтөрсөк, анда бул теңдеменин натыйжасы болгон төмөнкү теңдемеге келебиз:

$$112-32\cdot\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}+\sqrt{(17-x)(x+15)}=0. \qquad (2)$$

(2)-теңдемеге жаңы белгисизди кийирели: $u=\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}$. Анда $u^2-32u+112=0$. Бул квадраттык теңдеменин тамырлары $u_1=4$, $u_2=28$. Демек, берилген теңдеменин натыйжасы болгон теңдемелердин төмөнкү жыйындысын алабыз:

$$\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=4,\ \sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=28. \qquad (3)$$

(3) – жыйындынын биринчи теңдемесинен: $(x-1)^2=0$, $x_{1,2}=1$ ди алабыз (чыгарып, өзүнөрдү сынап көргүлө!), ал эми экинчи теңдемесинен $x^2-2x+614401=0$ бир да чыныгы тамыры жок квадраттык теңдемеге келебиз, анткени анын дискриминанты нөлдөн кичине. Натыйжада теңдемелердин (3) жыйындысынын бир гана $x=1$ деген тамыры бар деген тыянакты алабыз. Текшерүү жүргүзсөк: $\sqrt[4]{17-1}+\sqrt[4]{1+15}=2+2=4$, $4=4$, анда $x=1$ берилген теңдеменин тамыры.

Жообу: $x=1$.

Кээде табылган тамырларды берилген теңдемеге коюп, текшерүү жүргүзүү татаал. Мындай учурларда, эгерде биз теңдемени чыгаруу учурунда эквиваленттүү өзгөртүүлөр жүргүзүлсө, анда табылган тамырларды текшерүү талап кылынбайт.

32-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[4]{17-x}+\sqrt[4]{x+15}=3$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин аныкталуу облусу: $17-x\geq 0$, $x+15\geq 0 \Rightarrow -15\leq x\leq 17 \Rightarrow [-15,\ 17]$ – сегменти. Аныкталуу облусунда берилген теңдеменин эки жагы тең терс эмес, ошондуктан анын эки жагын тең квадратка көтөрсөк, берилген теңдемеге тең күчтүү (анын аныкталуу облусунда) болгон төмөнкү теңдемени алабыз: $\sqrt{17-x}+\sqrt{x+15}=9-2\cdot\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}$. Ал эми бул теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрүп жазсак, анда ага тең күчтүү теңдемеге ээ болобуз: $(\sqrt{17-x}+\sqrt{x+15})^2=(9-2\times$ $\times\sqrt[4]{(17-x)(x+15)})^2$. Бул теңдемени

$$32+2\cdot\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=(9-2\cdot\sqrt[4]{(17-x)(x+15)})^2 \qquad (*)$$

түрүндө жазууга болот жана $y=\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}$ деп жаңы y белгисизин кийирсек, анда (*) дан $2y^2-36y+49=0$ квадраттык теңдемесине келебиз. Бул теңдеменин тамырлары $y_1=\dfrac{18+\sqrt{226}}{2}$, $y_2=\dfrac{18-\sqrt{226}}{2}$. Натыйжада (белгисизди кийиргенибизди эске алып) теңдемелердин төмөнкү жыйындысына ээ болобуз:

$$\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=\frac{18+\sqrt{226}}{2},\ \sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=\frac{18-\sqrt{226}}{2}\qquad (**)$$

Теңдемелердин бул (**) жыйындысы берилген теңдемеге тең күчтүү (анын аныкталуу облусунда). Бул (**) жыйындысынын биринчи теңдемесинин чыныгы тамыры жок (31-мисалдагыдай эле), ал эми экинчи теңдеменин эки тамыры бар: $x_{1,2}=1\pm\sqrt{256-\left(\frac{18-\sqrt{226}}{2}\right)^2}$. Бул эки тамыр тең берилген теңдеменин аныкталуу облусуна кирет. Демек, берилген теңдеменин тамырлары болот.

Жообу: $x_{1,2}=1\pm\sqrt{256-\left(\frac{18-\sqrt{226}}{2}\right)^2}$.

Жаңы белгисиздерди кийирүү методун колдонуп, берилген иррационалдык теңдемени рационалдык теңдемелердин системасына келтирип чыгарууга болот. Буга мисал келтирели.

33-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[4]{x+41}+\sqrt[4]{41-x}=4$.

Ч ы г а р у у. Жаңы белгисиздерди кийирүү методун колдонолу: $u=\sqrt[4]{x+41}$, $v=\sqrt[4]{41-x}$. Анда $u^4+v^4=x+41+41-x=82$ экенин эске алып, берилген теңдемени u, v жаңы белгисиздерине карата төмөнкү рационалдык симметриялуу теңдемелердин системасына келтиребиз:

$$\begin{cases} u+v=4, \\ u^4+v^4=82. \end{cases}\qquad (a)$$

Эми биринчи теңдемесинен $u=4-v$ ны таап, экинчисине койсок, $(4-v)^4+v^4=82$ төртүнчү даражадагы теңдемеге келебиз. Бул теңдемеде $v=t+2$ деп, дагы t жаңы белгисизин кийирип чыгарууну 9-класста өткөнбүз (t га карата биквадраттык теңдемени алабыз). Натыйжада биз u, v (a) системасын канааттандырган $u=3$, $v=1$ жана $u=1$, $v=3$ маанилерин табабыз (Муну өз алдыңарча жасап, өзүңөрдү сынап көргүлө!). Натыйжада (u, v белгисиздерин кийиргенибизди эске алып) теңдемелердин төмөнкү жыйындысына ээ болобуз:

$$\sqrt[4]{x+41}=3 \text{ жана } \sqrt[4]{x+41}=1,$$

$$\sqrt[4]{41-x}=1 \text{ жана } \sqrt[4]{41-x}=3.$$

Бул жыйындынын биринчисинен $x_1=40$, ал эми экинчисинен $x_2=-40$ деген тамырларды алабыз.

Жообу: $x_1=40$, $x_2=-40$.

Э с к е р т ү ү! Теңдемелердин жыйындысы – теңдемелердин системасы эмес. Теңдемелердин жыйындысында кээ бир теңдемелер тамырга ээ болуп, ал эми айрымдарынын тамыры болбой калышы ыктымал. Жыйындынын чыгарылышы болуп, анын теңдемелеринин тамырларынын көптүгү эсептелет. Бир гана эстей турган нерсе: жыйындынын теңдемелеринин аныкталуу облустары бири бирине дал келиши керек, б.а. кандайдыр бир көптүктө жыйындынын ар бир теңдемеси аныкталган болуу керек.

Э с к е р т ү ү! Төртүнчү даражалуу радикалдары бар $\sqrt[4]{a-g(x)} \pm \sqrt[4]{g(x)-b}=\alpha$ түрүндөгү теңдемени $y=g(x)$ деп жаңы y белгисизин кийирип, анан 31-, 32-, 33-мисалдардагыдай методдор менен чыгарса болот.

Г) Бешинчи жана андан жогорку даражалуу радикалдары бар иррационалдык теңдемелер.

Мындай теңдемелердин кээ бир эң жөнөкөйлөрүн теңдеменин эки жагын тең бирдей даражага көтөрүү методу менен чыгарууга болот. Маселен, бирдей даражалуу эки гана радикалдан турган түрүн.

34-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[12]{3-x}=\sqrt[12]{x^2+x}$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин аныкталуу облусу: $3-x \geq 0$, $x^2+x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [0; 3]$. Эми анын эки жагын тең 12-даражага көтөрөлү. Анда $3-x=x^2+x \Rightarrow x^2+2x-3=0$ квадраттык теңдемесине келебиз жана $x_1=1$, $x_2=-3$ тамырлары берилген теңдеменин аныкталуу облусуна кирет.

Жообу: $x_1=1$, $x_2=-3$.

35-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[7]{12x-3}-\sqrt[7]{x+1}=0$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин аныкталуу облусу $x \in R$. Адегенде радикалдарды жалгыздайлы: $\sqrt[7]{12x-3}=\sqrt[7]{x+1}$, андан кийин барабардыктын эки жагын тең 7-даражага көтөрсөк, анда $12x-3=x+1$ же $11x=4$ сызыктуу теңдемесине ээ болобуз. Мынан $x=\frac{4}{11}$ тамырына ээ болобуз.

Жообу: $x=\frac{4}{11}$.

Бешинчи жана андан жогорку даражалуу радикалдары бар кээ бир теңдемелерди жаңы белгисиздерди кийирүү методу менен чыгарса болот. Бул учурда берилген теңдеме рационалдык теңдемелер системасына келтирилет.

36-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt[5]{x^2-5x+38}+\sqrt[5]{237+5x-x^2}=5.$$

Ч ы г а р у у. Теңдеменин аныкталуу облусу $x \in R$. Анын тамырларын табуу үчүн жаңы u, v белгисиздерин кийирели: $u=\sqrt[5]{x^2-5x+38}$, $v=\sqrt[5]{237+5x-x^2}$. Анда $\begin{cases} u+v=5, \\ u^5+v^5=275 \end{cases}$ симметриялуу теңдемелер системасын алабыз. Бул системанын тамырлары $u_1=2$, $v_1=3$ жана $u_2=3$, $v_2=2$ экенине текшерүү жүргүзүп, ынанабыз. Бул системаны $t=u+v$, $s=u\cdot v$ деп дагы эки жаңы t, s белгисиздерин кийирип, $\begin{cases} t=5, \\ t^5-5t^3s+5ts^2=275 \end{cases}$ теңдемелер системасына же $s^2-25s+114=0$ квадраттык теңдемесине келтирсе болот. Толугураак маалыматты 9-класстын алгебрасынан алсаңар болот.

Эми $x^2-5x+38=u^5$ экенин пайдаланып, $u_1=2$ болгондо $x^2-5x+6=0$ квадраттык теңдемесин жана $x_1=2$, $x_2=3$ тамырларын, ал эми $u_2=3$ болгондо $x^2-5x-205=0$ квадраттык теңдемесин жана $x_{3,4}=\dfrac{5\pm 13\sqrt{5}}{2}$ тамырларын алабыз.

Жообу: $x_1=2$, $x_2=3$, $x_{3,4}=\dfrac{5\pm 13\sqrt{5}}{2}$.

Э с к е р т ү ү! Төмөнкү теңдемени: $\sqrt[n]{a-g(x)}+\sqrt[n]{b+g(x)}=q(x)$, $n\in N$, мында a, b – берилген сандар, $a, b\in R$, $g(x)$ – каалагандай, $q(x)$ – рационалдык функциялар, жаңы u, v белгисиздерин кийирип: $u=\sqrt[n]{a-g(x)}$, $v=\sqrt[n]{b+g(x)}$, рационалдык теңдемелердин төмөнкү системасына келтирсе болот: $\begin{cases} u+v=q(x), \\ u^n+v^n=a+b. \end{cases}$

5. Ар түрдүү даражадагы радикалдары бар иррационалдык теңдемелер.

Мындай теңдемелерди чыгарууда негизинен төмөнкү 2 методду колдонууга болот:

а) теңдеменин эки жагын бирдей даражага көтөрүү методу (бул учурда теңдеме эки ар түрдүү даражалуу радикалдан турса, анда даража көрсөткүчтөрдүн эң кичине бөлүнүүчүсүнө барабар даражага теңдеменин эки жагын көтөрөбүз);

б) жаңы белгисиздерди кийирүү методу (бул учурда берилген теңдеме рационалдык теңдемелердин системасына келтирилет жана кийирилген жаңы белгисиздерди байланыштырган туюнтманы табуу теңдемени чыгарууну жеңилдетиши мүмкүн).

Бул методдордун колдонуу ыкмалары жогоруда келтирилген мисалдарга окшош.

37-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x-1}=\sqrt[3]{x+3}$.

Ч ы г а р у у. Аныкталуу облусу: $x \geq 1$. Бул теңдемеде 2- жана 3-даражадагы радикалдар бар. Ошон үчүн анын эки жагын тең 2 менен 3 түн эң кичине бөлүнүүчүсү 6-даражага көтөрөлү. Анда $(x-1)^3=(x+3)^2$ же $x^3-3x^2+3x-1=x^2+6x+9$ же $x^3-4x^2-3x-10=0$ куб теңдемесине ээ болобуз. Бул теңдеменин бир тамыры $x=5$ экенин табууга болот (Китептин аягындагы «Тарыхый маалыматтардагы» Виеттин теоремасы жөнүндөгү маалыматта айтылгандай $x=5$ саны алынган куб теңдемесинин бош мүчөсү $-10=-1\cdot 2\cdot 5$ дун бөлүүчүлөрүнүн бири болуп эсептелет). Анда ошол маалыматтарда айтылгандай (Безунун теоремасы боюнча) $x^3-4x^2-3x-10$ көп мүчөсү $x-5$ ке калдыксыз бөлүнөт. Бөлүү «мамыча эрежеси» менен жүргүзүлөт (санды санга бөлгөнгө окшошураак). Ошол бөлүүнү аткарып, бул куб көп мүчөсүн көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^3-4x^2-3x-10 & x-5 \\
 & x^3-5x^2 & \\ \hline
 & & x^2+x+2 \\
- & x^2-3x-10 & \\
 & x^2-5x & \\ \cline{2-2}
- & 2x-10 & \\
 & 2x-10 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Демек, $x^3-4x^2-3x-10=(x-5)(x^2+x+2)$.

Анда $x^3-4x^2-3x-10=0$ теңдемесинен $x-5=0$, $x^2+x+2=0$ сызыктуу жана квадраттык теңдемелердин жыйындысына ээ болобуз. Сызыктуу теңдемеден $x=5$ ке ээ болобуз, ал эми квадраттык теңдеме $x^2+x+2=0$ дүн тамыры жок, себеби анын дискриминанты $D=(-1)^2-4\cdot 2=-7<0$.

Натыйжада берилген теңдеменин тамыры $x=5$ деген тыянакка келебиз.

Жообу: $x=5$.

38-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[9]{3-x}$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин аныкталуу облусту $x \in R$. Анын эки жагын тең 3 менен 9 дун эң кичине бөлүнүүчүсү 9-даражага көтөрөлү. Анда $(x-1)^3=3-x$ же $x^3-3x^2+4x-4=0$ куб теңдемесин алабыз. Бул теңдеменин бош мүчөсү $-4=-1\cdot 2\cdot 2$ жана аны бир бөлүүчүсү 2 ни берилген теңдемеге койсок: $2^3-3\cdot 2^2+4\cdot 2-4=8-12+8-4=16-16=0$. Мындан биз $x=2$ алынган куб теңдеменин бир тамыры экенине келебиз. Биз Виеттин теоремасынын негизинде: «Ар кандай жогорку даражалуу теңдеменин бүтүн тамырын анын бош мүчөсүнүн бөлүүчүлөрүнөн издөө керек» деген эрежени колдондук. Эми x^3-3x^2+4x-4 көп мүчөсүн $x-2$ ге бөлөлү. Бөлүү 37-мисалдагыдай эле мамыча ыкмасы менен жүргүзүлөт (санды санга бөлгөнгө окшоштугу бар):

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3-3x^2+4x-4 \\ x^3-2x^2 \end{array} & x-2 \\ \hline
-\begin{array}{l} -x^2+4x-4 \\ -x^2+2x \end{array} & x^2-x+2 \\ \cline{1-1}
-\begin{array}{l} 2x-4 \\ 2x-4 \end{array} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Демек, $x^3-3x^2+4x-4=(x-2)(x^2-x+2)$. Андыктан x^3-3x^2+ $+4x-4=0$ теңдемеси $x-2=0$, $x^2-x+2=0$ деген теңдемелердин жыйындысын берет. Мындагы квадраттык теңдеменин дискриминанты $D=(-1)^2-4\cdot2=-7<0$ болгондуктан, анын чыгарылышы жок. Натыйжада, берилген теңдеменин тамыры бирөө эле $x=2$ деген жыйынтыкты алабыз.

Жообу: $x=2$.

39-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[5]{4-x}=\sqrt[10]{x-2}$.

Ч ы г а р у у. Теңдеменин аныкталуу облусу (кыскартып АО десек да болот): $4-x\geq0$, $x-2\geq0 \Rightarrow 2\leq x\leq4$. Эми анын эки жагын тең (5 менен 10 дун эң кичине бөлүнүүчүсү) 10-даражага көтөрөлү. Натыйжада $(4-x)^2=x-2$ же $16-8x+x^2=x-2$ же x^2- $-9x+18=0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Мындан $x_{1,2}=\dfrac{9\pm3}{2}$ же $x_1=3$, $x_2=6$ га ээ болобуз. Бул тамырлардын биринчиси АОго тиешелүү, ал эми экинчиси АОго кирбейт. Демек, $x=3$ берилген теңдеменин тамыры.

Жообу: $x=3$.

Эми жаңы белгисиздерди киийрүү методун колдонууга мисал келтирели.

40-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{x-3}$.

Ч ы г а р у у. Теңдеменин аныкталуу облусу: $x\geq3$. Эми жаңы u, v белгисиздерин киийрели: $u=\sqrt[3]{x+1}$, $v=\sqrt{x-3}$. Анда $\begin{cases} u=v, \\ u^3-v^2-4=0 \end{cases}$ бүтүн рационалдык теңдемелер системасын алабыз. Мындан $u^3-u^2-4=0$ куб теңдемесине, анын бир тамыры $u=2$ экенине (37-, 38-мисалдардай эле) жана $(u-2)(u^2+u+2)=$ $=0$ же $u-2=0$, $u^2+u+2=0$ теңдемелеринин жыйындысына келебиз. Натыйжада $u=v=2$ ни алабыз. Эми u, v белгилөөлөрүн эске алсак, анда $x+1=u^3=8 \Rightarrow x=7$ берилген теңдеменин тамыры экенине келебиз.

Жообу: $x=7$.

Эскертүү! Бул теңдеменин эки жагын 6-даражага көтөрүп чыгарууга болот. (Муну өз алдыңарча чыгарып көргүлө!).

41-*мисал.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$.

Чыгаруу. Бул теңдеменин аныкталуу облусу $x+1\geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x\geq -1$. Жаңы белгисиздерди 40-мисалдагыдай эле киийрели: $u=\sqrt[3]{x-2}$, $v=\sqrt{x+1}$ (u, v – жаңы белгисиздер). Анда бул учурда $\begin{cases} u+v=3, \\ v^2-u^3=3 \end{cases}$ бүтүн рационалдык теңдемелер системасын алабыз. Бул системанын чыгарылышы $u=1$, $v=2$ экенин текшерип көрүүгө болот (Системаны өз алдыңарча чыгарып, өзүңөрдү сынап көргүлө!). Натыйжада u, v белгилөөлөрүнүн негизинде берилген теңдеменин тамыры $x=3$ экенине ээ болобуз.

Жообу: $x=3$.

6. Ар түрдүү туюнтмалардын көбөйтүндүсүнөн турган иррационалдык теңдемелер.

Бул учурда көбөйтүүчүлөргө ажыратуу методу колдонулат. Бул метод төмөнкү теоремага негизделген.

1-теорема. Эгерде $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ теңдемелеринин ар бири R – сан огунун кандайдыр бир A көптүгүндө аныкталган болсо, мында $A\subseteq R$, анда бул көптүктө

$$f_1(x)f_2(x)...f_n(x)=0,\ n\in N \qquad \text{(Т)}$$

теңдемеси теңдемелердин төмөнкү жыйындысына эквиваленттүү:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0. \end{array}\right. \qquad \text{(Ж)}$$

Бул теоремадагы [символу жыйындынын белгиси. Эгерде теңдемелердин системасы берилгенде, анда биз { символун коймокпуз.

Эскертүү! 33-мисалдан кийинки эскертүүдө белгиленгендей, (Ж) – бул система эмес, б.а. теңдемелердин системасы эмес. (Ж)нын чыгарылышы – анын теңдемелеринин тамырларынын көптүктөрүнүн суммасынан (биригүүсүнөн) турат. (Ж)нын бир эле теңдемесинин тамырлары бар болсо, анда алар (Ж)нын да тамырлары болушат. Ал эми системанын чыгарылышы болуш үчүн анын ар бир теңдемесин канааттандырышы керек. Мисалы, $\left[\begin{array}{l} x^2+1=0, \\ \sqrt{x}-1=0 \end{array}\right.$ жыйындысынын чыгарылышы $x=1$ анын экинчи теңдемесинин тамыры. Бул жыйындынын биринчи теңдемесинин чыгарылышы жок: $x \in \varnothing$. Демек, $\varnothing$ жана $\{1\}$ көптүктөрүнүн суммасы: $\varnothing \cup \{1\} = \{1\}$.

Ал эми ошол эле теңдемелерден турган $\begin{cases} x^2 + 1 = 0, \\ \sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases}$ теңдемелер системасынын чыгарылышы жок, себеби экинчи теңдеменин тамыры $x=1$ анын биринчи теңдемесин канааттандырбайт.

Бир гана учурда, тагыраак айтканда, эгерде (Ж)нын чыгарылышы жок болсо, б. а. анын бир да теңдемесинин тамырлары жок болсо, анда (Ж)ны теңдемелер системасы деп карасак да болот, анткени жыйындынын теңдемелеринен түзүлгөн системанын да чыгарылышы жок болот.

Биз теңдемелердин жыйындысын [символу менен (Ж)дагыдай мамыча түрүндө жазбай, жолчо түрүндө эле биринин артынан бирин эле жазалы деп келишип алалы.

Маселен, $\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ f_3(x) = 0 \end{array}\right.$ жыйындысынын ордуна $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, $f_3(x)=0$ деп эле жазабыз.

Эми келтирилген 1-теореманы иррационалдык теңдемелерди чыгарууга колдонуу мисалдарынын айрымдарына токтололу. Жогоруда айтылгандай, 1-теореманы колдонуу – бул көбөйтүүчүлөргө ажыратуу методун колдонуу дегенди билдирет. Бул методду кыскача КА методу деп белгилеп алалы.

Ошондой эле АО – аныкталуу облусу деп белгилейли.

42-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин АО: $2x-1 \geq 0$, $x \geq \frac{1}{2}$. Эми КА методун колдонолу. Анда биз теңдемелердин төмөнкү жыйындысын алабыз: $x+1=0$, $x-1=0$, $\sqrt{2x-1}=0$. Мындан бул үч теңдеменин $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=\frac{1}{2}$ тамырларын табабыз. Бул тамырлардын биринчиси берилген теңдеменин АОсуна кирбейт.

Жообу: $x=1$, $x=\frac{1}{2}$.

43-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $x^2\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=0$.

Ч ы г а р у у. Теңдеменин АО: $x-1 \geq 0$, $x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Теңдемени төмөнкүчө жазып алсак болот: $\sqrt{x-1} \cdot (x^2+\sqrt{x+1})=0$. Мындан КА методунун негизинде $\sqrt{x-1}=0$, $x^2+\sqrt{x+1}=0$ теңдемелеринин жыйындысын алабыз. Бул жыйындынын биринчи теңдемесинин тамыры $x=1$, ал эми экинчисинин тамыры жок, себеби АОдо, б. а. $x \geq 1$ болгондо $x^2+\sqrt{x+1} \geq 1+\sqrt{2} > 0$. Демек, берилген теңдеменин тамыры $x=1$.

Жообу: $x=1$.

44-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $(x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2$.

Ч ы г а р у у. Теңдеменин АО: $x^2+x-2 \geq 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) \geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in R \setminus (-2; 1) \Rightarrow (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$. Берилген теңдемени төмөнкүчө өзгөртүп түзөлү $(x+1)\sqrt{x^2+x-2} - 2(x+1)=0 \Rightarrow (x+1)\times$ $\times(\sqrt{x^2+x-2} -2)= 0$. Эми КА методун колдонсок, анда теңдемелердин $x+1=0$, $\sqrt{x^2+x-2}=2$ жыйындысына ээ болобуз. Жыйындынын биринчи $x+1=0$ теңдемесинен $x_1=-1$ тамырын алабыз. Анын экинчи теңдемесинен арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча $x^2+x-2=2^2=4$ түү же $x^2+x-6=0$ квадраттык теңдемесине келебиз. Анын тамырлары $x_2=-3$, $x_3=2$. Жыйындынын тамырларынын экинчи, үчүнчүлөрү гана берилген теңдеменин АОсуна кирет.

Жообу: $x=-3$, $x=2$.

45-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла:

$\sqrt{x^2-8x+7}+2\sqrt{x^2-18x+17}=2\sqrt{x^2-32x+31}$.

Ч ы г а р у у. Адегенде $x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$, x^2-18x+ $+17=(x-1)(x-17)$, $x^2-32x+31=(x-1)(x-31)$ экенин эске алып, берилген теңдемени

$$\sqrt{(x-1)(x-7)}+2\sqrt{(x-1)(x-17)}=2\sqrt{(x-1)(x-31)} \qquad (1)$$

түрүндө жазып алалы. Анда анын АО: $\begin{cases}(x-1)(x-7) \geq 0,\\(x-1)(x-17) \geq 0,\\(x-1)(x-31) \geq 0\end{cases}$ барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы: $x \in (-\infty; 1] \cup [31; \infty)$ экенин алабыз. Эми $ab \geq 0$, $n \in N$ үчүн $\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{|a|}\cdot\sqrt[2n]{|b|}$ формуласын пайдалансак, анда (1) теңдемесинен $\sqrt{|x-1|}\ \sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-1|}\times$ $\times\sqrt{|x-17|}=2\sqrt{|x-1|}\ \sqrt{|x-31|}$ же $\sqrt{|x-1|}\left(\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-17|}-2\sqrt{|x-31|}\right)=$ $=0$ теңдемесине келебиз. Бул теңдемеге КА методун колдонсок, анда 1) $\sqrt{|x-1|}=0$, 2) $\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-17|}-2\sqrt{|x-31|}=0$ теңдемелеринин жыйындысына ээ болобуз. Бул жыйындынын 1) теңдемесинен $\sqrt{|x-1|}=0 \Rightarrow x_1=1$ тамырын алабыз. Ал эми анын 2) теңдемесинен $x \le 1$ болгондо $\sqrt{7-x}+2\sqrt{17+x}-2\sqrt{x-31}=0$ теңдемесине келебиз. Мындан теңдеменин эки жагын квадратка көтөрүү методун колдонуп, $15x^2-482x-497=0$ квадраттык теңдемесине жана анын $x_2=-1$, $x_3=\dfrac{497}{15}$ тамырларын табабыз. Ал эми 2) теңдемеден $x\ge 31$ болгондо $\sqrt{x-7}+2\sqrt{x-17}=2\sqrt{x-31}$ теңдемесин алабыз. Анын эки жагын квадратка көтөрөлү: $x-7+4(x-17)+4\sqrt{(x-7)(x-17)}=4(x-31)$, $4\sqrt{(x-7)(x-17)}=x-49$. Бул теңдеменин чыгарылышы жок, себеби анын сол жагы терс эмес, ал эми оң жагы терс, $x\ge31$ болгондо. Табылган тамырлардын үчүнчүсү $x_3=\dfrac{497}{15}$ берилген теңдеменин АОсунда жатпайт. Демек, берилген теңдеменин тамырлары $x_1=1$, $x_2=-1$.

Жообу: $x_1=1$, $x_2=-1$.

Биз 2) теңдемесин чыгарууда модулдун

$$|x-x_0|=\begin{cases}-(x-x_0), & \text{эгерде } x<x_0,\\ x-x_0, & \text{эгерде } x\ge x_0\end{cases}$$

болсо, деген модулдун касиетин колдондук. Бул формуланы биз 9-класста көп колдонгонбуз.

7. Иррационалдык теңдемелердин $f(f(x))=x$ түрүндө берилиши. Функциялардын суперпозициясынан турган иррационалдык теңдемелер.

Мындай түрдөгү иррационалдык теңдемени чыгаруу үчүн суперпозиция методун колдонобуз. Бул метод төмөнкү теоремага негизделген.

2-теорема. Эгерде $y=f(x)$ – монотондуу өсүүчү функция болсо, анда

$$f(x)=x \qquad \text{(A)}$$

жана

$$f(f(x))=x \qquad \text{(B)}$$

теңдемелери эквиваленттүү.

Эскертүү! 1) Бул теоремага негизделген методду суперпозиция методу дедик, анткени суперпозиция – татаал аргументтүү, функциядан функция дегенди билдирет.

2) Суперпозиция методу менен иррационалдык эмес ар кандай теңдемелерди да чыгарса болот.

Эми суперпозиция методун же 2-теореманы иррационалдык теңдемелерди чыгарууга пайдалануу мисалдарын келтирели.

46-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$.

Чыгаруу. Берилген теңдеменин АО: $x\ge0$, $x\ge1 \Rightarrow x\ge1$.

Бул теңдемени чыгаруу үчүн $f(x)=1+\sqrt{x}$ функциясын карап көрөлү. Бул функция АОдо монотондуу өсүүчү, себеби анын биринчи туундусу $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$, жана ошондой эле $f(f(x))=1+$ $+\sqrt{1+\sqrt{x}}$, б.а. $f(f(x))=x$. Демек, берилген теңдемеге суперпозиция методун колдонсок болот: $f(x)=1+\sqrt{x}=x$. Мындан $x-\sqrt{x}-$ $-1=0$ же $t=\sqrt{x}$ десек, $t^2-t-1=0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Анын тамырлары $t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$, $t_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $t_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ал эми $\sqrt{x}=t$ ны эске алсак, анда $\sqrt{x}=t_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow x_1\in\varnothing$, $\sqrt{x}=t_2=$ $=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{1+5+2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Бул тамыр АО го кирет.

Жообу: $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

47-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $x^3+1=2\cdot\sqrt[3]{2x-1}$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин АО: $x\in R$. Берилген теңдемени төмөнкүдөй жазалы: $\dfrac{x^3+1}{2}=\sqrt[3]{2x-1}$ жана анын эки жагын тең куб даражасына көтөрөлү. Анда $\left(\dfrac{x^3+1}{2}\right)^3=2x-1$ же $\dfrac{1+\left(\dfrac{x^3+1}{2}\right)^3}{2}=$ $=x$ теңдемесин алабыз. Демек, $f(x)=\dfrac{1+x^3}{2}$ жана берилген теңдеме $f(f(x))=x$ түрүнө келтирилди. Анда суперпозиция методун колдонсок, берилген теңдеме $\dfrac{1+x^3}{2}=x$ теңдемесине эквиваленттүү экенин алабыз. Мындан $x^3-2x+1=0$. Бул куб теңдемесинин бир тамырын Виеттин теоремасын колдонуп тапсак болот: $x=1$. Ошондой эле Безунун теоремасынын негизинде аны $(x-1)(x^2+$ $+x-1)=0$ түрүндө жазууга болот. Эми КА методун колдонсок, анда теңдемелердин $x-1=0$, $x^2+x-1=0$ жыйындысына ээ болобуз. Биринчисинен $x_1=1$, ал эми экинчи теңдемеден – квадраттык теңдемеден $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ тамырларын табабыз.

Биз эквиваленттүү өзгөртүүлөрдү жүргүздүк. Ошондуктан, табылган тамырлар берилген теңдемени канааттандырат.

Жообу: $x_1=1,\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_3=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Эскертүү! Эгерде монотондуу өсүүчү $y=f(x)$ функциясы өзүнөн өзү (суперпозиция дебедикпи) көп жолу чектелген санда көз каранды болсо, б. а. $f(f(f(f...)))=x$ теңдемеси берилсе, анда ал 2-теоремадагыдай эле $f(x)=x$ (A) теңдемесине эквиваленттүү болот. Мисалы, бул учурда $f(f(f(x)))=x$ жана (A) теңдемелери эквиваленттүү. Маселен, $1+\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{2}}}{2}}=2x$ теңдемесин чыгарууга туура келсин дейли. Эгерде $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{2}$ десек, анда берилген теңдемени $f(f(f(x)))=x$ түрүндө жазууга болот. Ал эми $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{2}$ функциясы өзүнүн АО $(x\ge 0)$сунда монотондуу өсүүчү. Анда жогорку эскертүүнүн негизинде суперпозиция методун колдонуп, берилген теңдемеге эквиваленттүү $\dfrac{1+\sqrt{x}}{2}=x$ теңдемесин алабыз. Бул теңдеме квадраттык теңдемеге келтирилет жана анын тамыры $x=1$. Натыйжада $x=1$ берилген теңдеменин да тамыры болот.

Жообу: $x=1$.

8. Функционалдык метод жана график методу менен чыгарылуучу иррационалдык теңдемелер.

Функционалдык метод деп, функциялардын касиеттерин (монотондуулугун, так же жуптугун, чектелүүсүн ж. б.) пайдаланып, берилген теңдемени чыгаруу методун айтабыз.

График методун 9-класста кенири өткөнбүз. Бул методдун мазмуну төмөнкүчө: берилген теңдемени $f_1(x)=f_2(x)$ түрүндө жазып алабыз жана $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ функцияларынын графиктерин чиебиз. Анан алынган чиймеден берилген теңдеменин чыгарылыштарын табабыз. Эгерде бул эки функциянын графиктери кандайдыр бир чекиттерде кесилишсе, анда ошол чекиттердин абсциссалары берилген теңдеменин тамырлары болот. Эгерде бул эки функциянын графиктери кесилишпесе, анда берилген теңдеменин чыгарылышы жок. Демек, график методу функциялардын графигин чийүүнү талап кылат.

Адегенде функционалдык методду колдонууга мисалдар келтирели.

48-*мисал.* Теңдемени чыгаргыла: $2\sqrt{x}+\sqrt[8]{64x}=6$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин АО : $x \geq 0$. Белгисиздин $x>0$ маанилеринде берилген теңдеменин сол жагы монотондуу өсүүчү функция, ошондуктан өзүнүн ар бир маанисин бир эле жолу алат. Ал эми $x=4$ берилген теңдеменин тамыры экенин текшерүүгө болот. Демек, башка тамыры жок.

Жообу: $x=4$.

Бул мисалдагы теңдемени функционалдык методдон башка методдор менен чыгаруу көп аракетти талап кылары бышык.

49-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла:

$(2x+1)\sqrt{7+(2x+1)^2}+x\sqrt{x^2+7}=0.$

Ч ы г а р у у. Эгерде $f(y)=y\sqrt{y^2+7}$ деп белгилесек, анда берилген теңдемени

$$f(2x+1)+f(x)=0 \qquad (1)$$

түрүндө жазып алууга болот. Ал эми $f(y)$ – так функция, себеби $f(-y)=-y\sqrt{y^2+7}=-f(y)$. Ошондуктан (1) теңдемесин төмөнкүчө:

$$f(2x+1)=-f(x)=f(-x) \qquad (2)$$

жазсак болот. Мындан тышкары $f(y)$ функциясы өзүнүн АОсунда монотондуу өсүүчү. Ошон үчүн (2) теңдемесинен $2x+1=-x$ сызыктуу теңдемесин алабыз. Демек, $3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ берилген теңдеменин тамыры.

Жообу: $x=-\frac{1}{3}$.

50-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}=3-5x^2$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин АО: $3-5x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{0{,}6}$. Эми анын сол жагындагы жана оң жагындагы функциялардын чектелүүсүн пайдаланалы: сол жагы $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{4}+\sqrt{1}=3$, демек ылдый жагынан 3 менен чектелген, ал эми оң жагы $3-5x^2 \leq 3$, демек өйдө жагынан да 3 менен чектелген. Мындан биз берилген теңдеменин сол жагы анын оң жагына барабар, эгерде алар бир эле убакта 3 кө барабар болсо гана деген тыянакка келебиз.

Анда $\begin{cases}\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}=3,\\ 3-5x^2=3\end{cases}$ теңдемелер системасын алабыз. Бул системанын экинчи теңдемесинен табылган $x=0$ анын биринчи теңдемесин да канааттандырат жана берилген теңдеменин да тамыры болот.

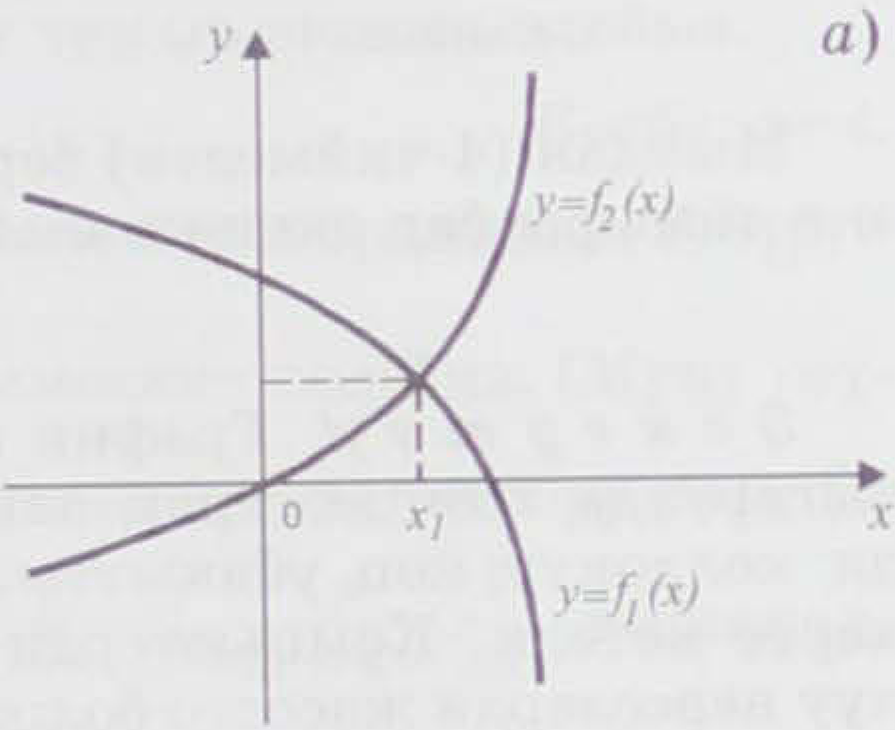
Жообу: $x=0$.

Функционалдык методдун бир учуру үчүн төмөнкү теорема негиз боло алат.

3-теорема. Эгерде $f_1(x) = f_2(x)$ теңдемесиндеги $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ функцияларынын бири АОдо монотондуу өсүүчү, ал эми экинчиси монотондуу кемүүчү болсо, анда бул теңдеменин *а*) бир тамыры бар же *б*) тамыры жок.

Бул теореманын мазмунун төмөнкү схемалык чиймелер аркылуу берүүгө болот:

Албетте, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ функцияларынын графиктери башкача жайланышы деле мүмкүн. Бир гана эсте сактай турган нерсе: булардын бири монотондуу өсүүчү, экинчиси монотондуу кемүүчү.

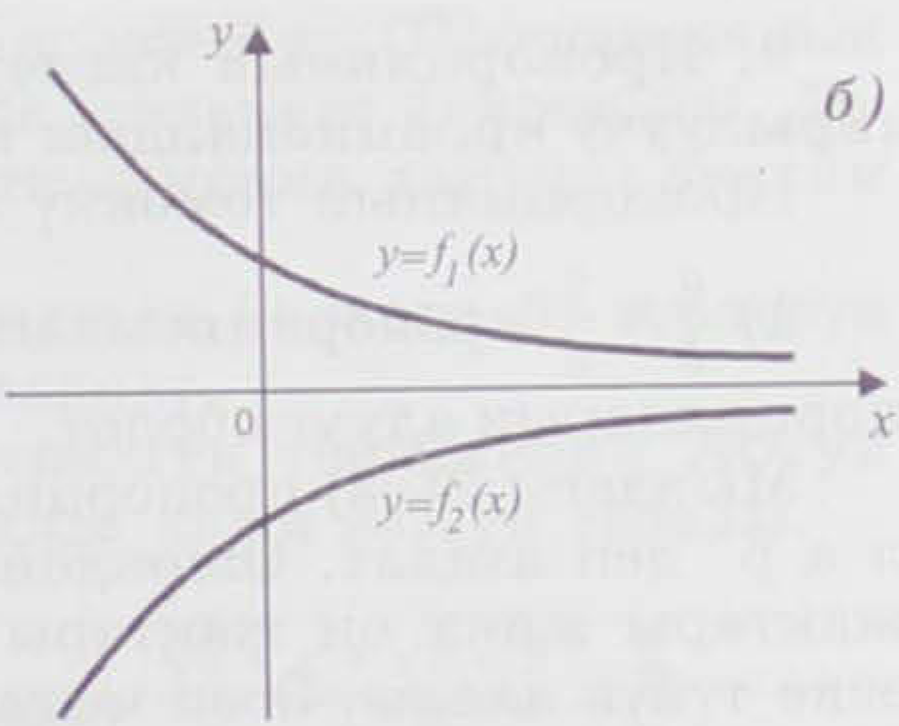


1-чийме

3-теореманы колдонуу үчүн $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ функцияларынын графиктерин чийүү зарылчылыгы жок.

51-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x} = \dfrac{10}{x+1}$.

Чыгаруу. Бул теңдеменин АО: $x \geq 0$. Эгерде АО $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \dfrac{10}{x+1}$ десек, анда 3-теореманын шарттары толук канааттандырылат, себеби $f_1(x) \nearrow$, $f_2(x) \swarrow$. Ал эми берилген теңдемени $x = 4$ саны канааттандыраарын текшерүү керек. Демек, берилген теңдеменин тамыры бирөө.



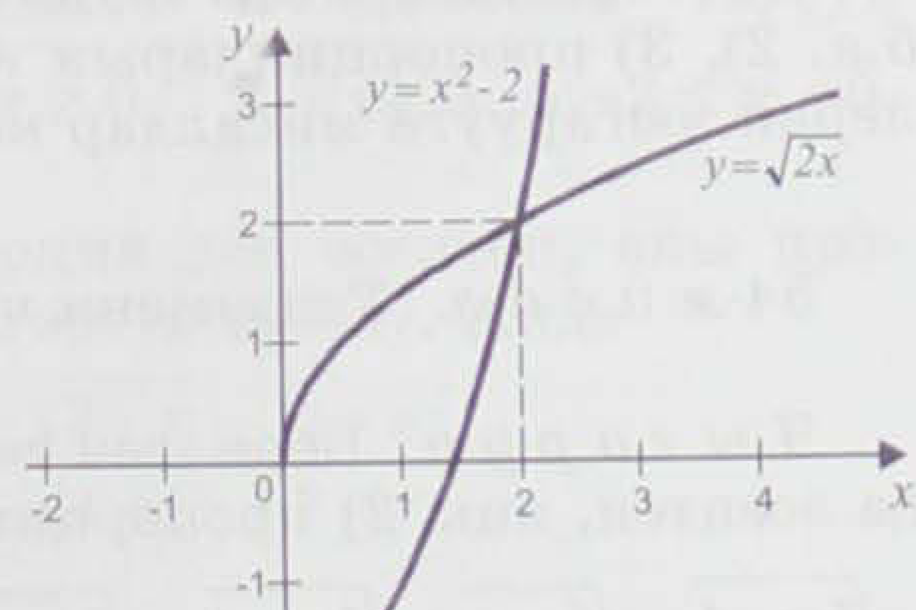
2-чийме

Жообу: $x = 4$.

Эми график методун колдонууга мисалдар келтирели.

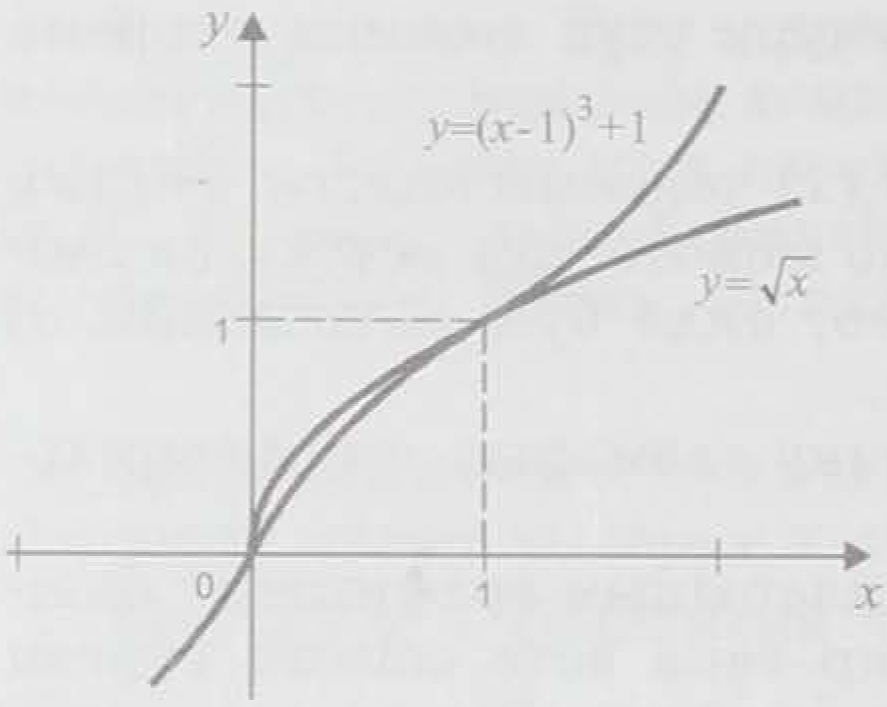
52-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{2x} = x^2 - 2$.

Чыгаруу. Теңдеменин аныкталуу облусу: $x \geq 0$, $x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$. Эгерде $f_1(x) = \sqrt{2x}$, $f_2(x) = x^2 - 2$ десек, анда алардын АОсундагы схемалык графиктери төмөнкүчө болот.



3-чийме

Бул чиймеден берилген теңде-



4-чийме

менин тамыры $x = 2$ экенин алабыз.

Жообу: $x=2$.

53-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x} = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин АО: $x \geq 0$. Берилген теңдемени төмөнкүчө жазып алууга болот: $f_1(x) = \sqrt{x} = (x-1)^3 + 1 = f_2(x)$. График методун колдонолу:

Мындан (4-чиймеден) берилген теңдеменин $x_1=0$, $x_2=1$ деген эки тамыры бар экенин алабыз.

Жообу: $x_1=0$, $x_2=1$.

Э с к е р т ү ү! График методун пайдаланып, теңдемелерди чыгарууда компьютерди пайдаланса болот. Бирок, компьютерди колдонуу көп убакытты, билгичтикти талап кылаарын эскерте кетели. Компьютерди туура пайдаланса, бир топ пайдалуу нерселерди жасоого болот. Ал эми адамды эч кандай компьютер алмаштыра албастыгын эстен чыгарбайлы.

9. Пропорциянын касиеттерин колдонуу методу менен чыгарылуучу иррационалдык теңдемелер.

Пропорциянын төмөнкү эки касиетин келтирели:

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ пропорциясынан 2) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ жана $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$ пропорцияларын алууга болот.

Мындагы 2), 3) пропорциялары т у у н д у п р о п о р ц и я л а р деп аталат. Ошондой эле 2), 3) пропорцияларынын сол жактары жана оң жактары өз ара тескери чоңдуктар экенин эске түйүп алалы. Эсеп чыгарганда керек болот. Туунду пропорциянын башка дагы түрлөрү бар.

Пропорциянын жогоруда келтирилген касиетин пайдаланып, б.а. 2), 3) пропорцияларын колдонуп, иррационалдык теңдемелерди чыгарууга мисалдар келтирели:

54-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\frac{\sqrt{5x-4} + \sqrt{5-x}}{\sqrt{5x-4} - \sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{4x}+1}{\sqrt{4x}-1}$.

Ч ы г а р у у. Берилген теңдемени 1) пропорциясы катарында эсептеп, аны 2) пропорциясына келтирели. Анда

$$\frac{\sqrt{5x-4} + \sqrt{5-x} + \sqrt{5x-4} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{5x-4} + \sqrt{5-x} - (\sqrt{5x-4} - \sqrt{5-x})} = \frac{\sqrt{4x}+1+\sqrt{4x}-1}{\sqrt{4x}+1-(\sqrt{4x}-1)} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5x-4}}{2\sqrt{5-x}} =$$

$=\frac{2\sqrt{4x}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{5x-4}}{\sqrt{5-x}}=2\sqrt{x}$ теңдемесин алабыз. Мындан теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрүп, $\frac{5x-4}{5-x}=4x$ рационалдык теңдемесин алабыз. Мындан $x \neq 5$ деп төмөнкү квадраттык теңдемеге келебиз: $5x-4=20x-4x^2$, $4x^2-15x-4=0$. Бул теңдеменин тамырлары $x_1=4$, $x_2=-\frac{1}{4}$. Текшерип көрүп, $x_1=4$ берилген теңдеменин тамыры, ал эми $x_2=-\frac{1}{4}$ чет тамыр экенин алабыз.

Жообу: $x=4$.

Эми ушул эле 54-мисалдагы теңдемеге пропорциянын 3) түрүн колдонолу. Анда $\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5x-x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ теңдемесине келебиз. (Муну өзүнөр жасап, текшерип көргүлө). Бул теңдемеден жогорудагыдай эле (анын эки жагын квадратка көтөрүп) $\frac{5-x}{5x-4}=\frac{1}{4x}$ рационалдык теңдемени алабыз. Эми $x \neq \frac{4}{5}$, $x \neq 0$ деп, $20x-4x^2=5x-4$, $4x^2-15x-4=0$ квадраттык теңдемесине келебиз. (Пропорциянын 2) түрүн колдонгондо да ушундай эле теңдемеге келгенбиз). Демек, бул учурда да $x=4$ берилген теңдеменин тамыры экенин алабыз.

54-мисалды чыгарууда пропорциянын 2) жана 3) түрлөрүн колдонуп, бирдей эле натыйжага келдик.

Жогорку мисалды чыгарууда берилген теңдеменин АОсун таппай эле чыгардык. Төмөнкү мисалда анын АОсун табалы.

55-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\frac{2}{x}$.

Ч ы г а р у у. Адегенде берилген теңдеменин *АО*сун табалы: $x \neq 0$, $\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x} \neq 0$, $2+x \geq 0$, $2-x \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x < 0$, $0 < x \leq 2$.

Эми берилген теңдемени пропорция деп эсептеп, аны пропорциянын 2) түрүн пайдаланып өзгөртүп түзөлү. Анда

$$\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})}=\frac{2+x}{2-x},$$

$$\frac{2\sqrt{2+x}}{2\sqrt{2-x}}=\frac{2+x}{2-x}, \quad \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}=\frac{2+x}{2-x} \qquad (*)$$

теңдемесине келебиз. Бул теңдеменин АО: $2-x>0$, $x<2$. Ошондуктан $(2-x)\sqrt{2+x}=(2+x)\sqrt{2-x}$. Бул теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрүп, $(2-x)^2(2+x)=(2+x)^2(2-x) \Rightarrow (2-x)(2+x)[2-x-2-x]=0 \Rightarrow (2-x)(2+x)(-2x)=0 \Rightarrow x\cdot(2+x)(2-x)=0$ теңдемесине келебиз.

Мындан $2-x>0$ экенин эске алып, $x_1=-2$, $x_2=0$ тамырларын алабыз. Булардын ичинен $x_2=0$ берилген теңдеменин АОсуна кирбейт. Ошон үчүн ал чет тамыр. Текшерип көрсөк, $x_1=-2$ берилген теңдеменин тамыры экенин алабыз.

Эми берилген теңдемени пропорциянын 3) түрүн колдонуп өзгөртөлү. Бул учурда биз

$$\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}=\frac{2-x}{2+x} \qquad (**)$$

теңдемесин алабыз. (Бул теңдеме (*) теңдемесинин эки жагынын тең тескери чоңдугу, биз мындай болорун пропорциянын касиетин келтирген соң эскерткенбиз). Бул теңдеменин *АО:* $2+x>0$, $x>-2$. Анда (**) теңдемесинен $(2+x)\sqrt{2-x}=(2-x)\sqrt{2+x}$ келебиз жана анын эки жагын тең квадратка көтөрүп, $(2+x)^2\times(2-x)=(2-x)^2(2+x)$ же жогорудагыдай эле $x(2+x)(2-x)=0$ теңдемесине келебиз. Мындан $2+x>0$ болгондуктан, $x_2=0$, $x_3=2$ тамырларын табабыз жана $x_2=0$ берилген теңдеменин АО да жатпастыгын эске алсак, анда $x_3=2$ тамырын алабыз. Текшерүү $x_3=2$ берилген теңдеменин тамыры экенин көрсөтөт.

Натыйжада $x_1=-2$, $x_3=2$ берилген теңдеменин тамырлары экенин алабыз.

Жообу: $x=-2$, $x=2$.

55-мисалды чыгарууда пропорциянын 2) жана 3) түрлөрүн биринин артынан бирин колдонуп, ар бирөөндө берилген теңдеменин бирден гана тамырын таптык. Мындан биз туунду пропорцияларды пайдаланып өзгөртүп түзүү берилген теңдемени эквиваленттүү түргө алып келбеши мүмкүн деген тыянакты алабыз.

54-мисалды 2) же 3) пропорцияны пайдаланып чыгаруу бирдей эле натыйжаны бербеди беле. Демек, 2) же 3) түн бирөөн эле пайдаланып, бүттү эсеп чыкты деп койсок болмок. Ал эми 55-мисалда ушунтсек, анда теңдеменин бир тамырын эле тапмакбыз. Башка мисалдарды чыгарууда ушул айтылгандарды эске алсак, ишибиз натыйжалуу болору анык.

10. **Татаал радикалдардан турган иррационалдык теңдемелер.** Мындай теңдемелерди теңдеменин эки жагын даражага көтөрүү методун удаа колдонуу менен чыгарууга болот.

56-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt[3]{1-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=1$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеме – үч радикалдын байланышынан турган татаал радикалдуу теңдеме. Теңдеменин эки жагын даражага көтөрүү методун (кыскача ДК методу дейли) колдонолу. Адегенде берилген теңдеменин эки жагын тең кубка көтөрөлү: $1-\sqrt{2-\sqrt{x}}=1 \Rightarrow \sqrt{2-\sqrt{x}}=0$. Эми эки жагын тең квадратка көтөрөлү: $2-\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=2$. Эми дагы бир жолу квадратка көтөрсөк, $x=4$ тамырына ээ болобуз. Текшерүү $x=4$ берилген теңдеменин тамыры экенин көрсөтөт.

Жообу: $x=4$.

Биз бул мисалды чыгарууда ДК методун үч жолу колдондук.

57-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{5+\sqrt[3]{62+\sqrt[5]{27+\sqrt[4]{5x-8}}}}=3$.

Ч ы г а р у у. Бизге берилген теңдеме – төрт радикалдын байланышынан (комбинациясынан) турган татаал радикалдуу теңдеме.

Мурунку мисалдагыдай эле ДК методун пайдаланалы (төрт жолу удаа пайдаланабыз). Адегенде берилген теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз. Анда

$$5+\sqrt[3]{62+\sqrt[5]{27+\sqrt[4]{5x-8}}}=9 \Rightarrow \sqrt[3]{62+\sqrt[5]{27+\sqrt[4]{5x-8}}}=4.$$

Эми алынган теңдеменин эки жагын тең кубка көтөрсөк: $62+\sqrt[5]{27+\sqrt[4]{5x-8}}=64 \Rightarrow \sqrt[5]{27+\sqrt[4]{5x-8}}=2$ теңдемеси келип чыгат. Бул теңдеменин эки жагын тең бешинчи даражага көтөрөбүз.

Ошондо биз $27+\sqrt[4]{5x-8}=32 \Rightarrow \sqrt[4]{5x-8}=5$ теңдемесине келебиз жана анын эки жагын тең төртүнчү даражага көтөрүп, $5x-8=625 \Rightarrow 5x=633$ сызыктуу теңдемесин алабыз. Мындан $x=\frac{633}{5}=126\frac{3}{5}$ тамырына ээ болобуз. Текшерип көрүп, бул тамыр берилген теңдеменин да тамыры болорун алабыз.

Жообу: $x=126\frac{3}{5}=126{,}6$.

Э с к е р т ү ү! Эгерде теңдеменин жообунда тамырдын алымы анын бөлүмүнө так (калдыксыз) бөлүнбөсө, анда тамырды бөлчөк түрүндө эле жазган жакшы.

58-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдемени чыгаруу үчүн ДК методун үч жолу удаа колдонсок болот (Эмне үчүн үч жолу?). Үч жолу тең квадратка көтөрөбүз. Биринчи жолу квадратка көтөрсөк:

$5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}=1 \Rightarrow \sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}=4$ теңдемесине келебиз. Экинчи жолу квадратка көтөрөлү. Анда

$$x+1+\sqrt{2x^2+x+3}=16 \Rightarrow \sqrt{2x^2+x+3}=15-x \qquad (*)$$

теңдемесин алабыз. Бул теңдеменин АО: $15-x \ge 0$, $x \le 15$. Эми (*) нын эки жагын тең үчүнчү жолу квадратка көтөрүп, $2x^2+$ $+x+3=225-30x+x^2 \Rightarrow x^2+31x-222=0$ квадраттык теңдемесине келебиз. Бул теңдеменин тамырлары $x_1=-37$, $x_2=6$ экенин Виеттин теоремасы боюнча алсак болот. Текшерүү бул эки тамыр тең берилген теңдемени канаатандырарлыгын көрсөтөт.

Жообу: $x_1=-37$, $x_2=6$.

11. Толук квадратты бөлүп алуу методу менен чыгарылуучу иррационалдык теңдемелер.

9-класста толук квадратты бөлүп алуу методуна кеңири токтолгонбуз. Анын мазмуну квадраттык үч мүчө үчүн төмөнкүдөй:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+$$

$+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$, $a \neq 0$, мында $D=b^2-4ac$, б. а. берилген квадраттык үч мүчөнүн дискриминанты экенин эске түшүрөлү.

Эми ушул методду пайдалануу менен чыгарылуучу кээ бир иррационалдык теңдемелердин мисалдарын келтирели.

59-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $x^2+3x+2\sqrt{x}+2=0$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин АО: $x \ge 0$. Эми берилген теңдемеде төмөнкүдөй өзгөртүү жүргүзөлү: $(x^2+2x+1)+(x+$ $+2\sqrt{x}+1)=0 \Rightarrow (x+1)^2+(\sqrt{x}+1)^2=0$. Мындан биз $\begin{cases}(x+1)^2=0,\\(\sqrt{x}+1)^2=0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}|x+1|=0,\\|\sqrt{x}+1|=0\end{cases}$ теңдемелер системасына келебиз. Бул системанын чыгарылышы жок, анткени анын экинчи теңдемесинин чыгарылышы жок ($\sqrt{x} \neq -1$). Демек, берилген теңдеменин чыгарылышы жок.

Жообу: $x \in \varnothing$.

60-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $x^2-4x+32=16\sqrt{x}$.

Ч ы г а р у у. Теңдеменин АО: $x \ge 0$. Берилген теңдемени 59-

мисалдагыдай эле өзгөртүп түзөлү. Анда $x^2-4x+32-16\sqrt{x}=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-8x+4x+16+16-16\sqrt{x}=0 \Rightarrow (x^2-8x+16)+(4x-16\sqrt{x}+16)=$ $=0 \Rightarrow (x-4)^2+(2\sqrt{x}-4)^2=0$ теңдемесине же

$$\begin{cases}(x-4)^2=0,\\(2\sqrt{x}-4)^2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|x-4|=0,\\|2\sqrt{x}-4|=0\end{cases} \qquad (C_1)$$

теңдемелер системасына келебиз. Анын биринчи теңдемесинен $x-4=0$, $x=4$ экенин, ал эми экинчи теңдемесинен $2\sqrt{x}-4=0$, $\sqrt{x}=2$, б. а. $x=2^2=4$ экенин алабыз. Демек, $x=4$ (C_1) системасынын тамыры. Текшерүү жүргүзүп, бул тамыр берилген теңдемени да канааттандырарына ынанууга болот.

Жообу: $x=4$.

61-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла:

$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин АО: $x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$. Бирок, $x=1$ болгондо анын сол жагы $\sqrt{1+3}+\sqrt{1+8}=5>1$ (оң жагынан). Демек, берилген теңдеменин АО: $x>1$. Эми $x+3-4\sqrt{x-1}=$ $=(\sqrt{x-1}-2)^2$, $x+8-6\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-3)^2$ экенин оңой эле алууга (текшерүүгө) болот. Анда берилген теңдемени $\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+$ $+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=1$ же

$$|y-2|+|y-3|=1, \qquad (M)$$

түрүндө жазууга болот, мында $y=\sqrt{x-1}$. Биз мында ар кандай $a\in R$ үчүн $\sqrt{a^2}=|a|$ экенин эске алдык.

Модулдун касиетин эске алсак, анда (M) теңдемесинен

$$\begin{cases}|y-2|\leq 1,\\|y-3|\leq 1\end{cases} \qquad (C_2)$$

барабарсыздыктар системасын алабыз. (Биз мындан эки терс эмес сандын суммасы 1 ге барабар болушу үчүн, алардын ар бири 1 ден ашпастыгы керектиги зарыл экенин эске алдык). Эми модулдун дагы бир касиетин эске алалы (9-класста көп пайдаланганбыз): Эгерде $\varepsilon>0$ саны үчүн $|x-x_0|\leq\varepsilon$ барабарсыздыгы орун алса, анда бул барабарсыздык $-\varepsilon\leq x-x_0\leq\varepsilon$, $x_0-\varepsilon\leq$

$\leq x \leq x_0 + \varepsilon$ барабарсыздыктарына эквиваленттүү. Модулдун бул касиетин пайдалансак, анда (C_2) системасынан, анын $\begin{cases} -1 \leq y-2 \leq 1, \\ -1 \leq y-3 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq y \leq 3, \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq y \leq 3$ чыгарылышына ээ болобуз. Биз $y=\sqrt{x-1}$ деп белгилегенбиз. Муну эске алсак, $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$ барабарсыздыгын алабыз. Бизге белгилүү: эгерде $a \leq b \leq c$ барабарсыздыгы $a>0$ болгондо орун алса, анда ал $a^2 \leq b^2 \leq \leq c^2$ барабарсыздыгына эквиваленттүү. Демек, $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$ барабарсыздыгынан $2^2 \leq x-1 \leq 3^2 \Rightarrow 4 \leq x-1 \leq 9$ же 1 ди барабарсыздыктын үч жагына тең кошуп, $5 \leq x \leq 10$ чыгарылышын алабыз. Биз эквиваленттүү гана өзгөртүүлөрдү жүргүздүк, ошондуктан берилген теңдеменин чыгарылышы чексиз көп экенин, б.а. $x \in [5; 10]$ болорун алабыз.

Жообу: $x \in [5; 10]$

61-мисалдагы теңдеме үчүн x тин [5; 10] сегментиндеги ар кандай мааниси тамыр боло алат. Теңдеменин тамыры $x \in [5; 10]$ болгонун себеби, берилген теңдемеден ага эквиваленттүү (M) модулду камтыган теңдемени алдык. Ал эми модулду камтыган теңдемелердин тамырлары жок, чектүү санда, чексиз көп болушу мүмкүн. Биз буга атайын 4 параграфында токтолобуз.

12. **Параметрлүү иррационалдык теңдемелер.**

Иррационалдык теңдемеде белгисизден башка бир же андан көп параметрлер болушу мүмкүн. Теңдеменин чыгарылышы бар же жок экенин теңдемедеги параметрге же параметрлерге анализ жүргүзүп аныктоого болот.

Параметрлүү теңдемелердин түрлөрү ар кандай жогоруда биз караган 11 түрүндө же алардан да башка болушу мүмкүн. Мындай теңдемелерди чыгарууда жогоруда биз колдонгон методдор колдонулушу мүмкүн.

Биз жогоруда (7-мисалда) бир параметрлүү теңдеменин жөнөкөй бир түрүн караганыбызды эске түшүрөлү. Төмөндө параметрлүү иррационалдык теңдемелерди чыгаруунун айрым мисалдарына токтололу.

62-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$, мында, a – параметр.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин x белгисизине жана a параметрине карата АО: $x \geq 0$, $a+x \geq 0$, $a \geq \sqrt{a+x}$ барабарсыздыктар системасынан аныкталат. Мындан $x \geq 0$, $a \geq 0$, $a^2 \geq a+x$, б. а. АО: $0 \leq x \leq a^2-a$, эгерде $a \geq 1$ болсо, $x=0$, эгерде $a=0$ болсо. Эми берилген теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөлү (б.а. ДК методун колдонолу). Анда $a-\sqrt{a+x}=x^2$, б. а.

$$\sqrt{a+x} = a - x^2 \qquad (T_1)$$

теңдемесине келебиз. Бул теңдеменин АО:

$$a - x^2 \geq 0,\ x^2 \leq a. \qquad (a)$$

(T_1) теңдемесине жаңы белгисизди кийирүү методун колдонолу: $t=\sqrt{a+x}$. Анда төмөнкү теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{cases} t = a - x^2 \\ t^2 = a + x. \end{cases} \qquad (C_3)$$

Бул системанын экинчи теңдемесинен биринчисин кемитсек, $t^2 - t = x + x^2$, $x^2 - t^2 + x + t = 0 \Rightarrow (x+t)(x-t+1)=0 \Rightarrow x+t=0$, $x - t + 1 = 0$ теңдемелеринин жыйындысына ээ болобуз. Анда (C_3) системасынын бир теңдемесин, тагыраак айтканда биринчи теңдемесин эсепке алып, төмөнкү теңдемелер системасынын жыйындысына келебиз: $\begin{cases} x + t = 0, \\ a - x^2 = t \end{cases}$ жана $\begin{cases} x - t + 1 = 0, \\ a - x^2 = t. \end{cases}$ Бул системалардын биринчисинин чыгарылышы (a) шартын канааттандырбайт. Ал (a) шартын канааттандырган чыгарылышты экинчи системадан алабыз: $\begin{cases} x - t + 1 = 0, \\ x^2 + t - a = 0. \end{cases}$ Бул эки теңдемени кошсок, анда $x^2 + x + 1 - a = 0$ квадраттык теңдемеси келип чыгат. Мындан $x = \dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$, $a \geq 1$. Бул тамыр (a) шартын канааттандырат. (Муну x^2 ты таап, a ны чамалап оңой эле текшерсе болот).

Жообу: $x=0$, эгерде $a=0$ болсо; $x = \dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$, эгерде $a \geq 1$ болсо.

63-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \sqrt{b}$, мында a, b – параметрлер.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин x, a, b га карата АО: $b \geq 0$, $a+x \geq 0$, $a - x \geq 0$, $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} \neq 0$. Мындан $a \geq 0$, $-a \leq x \leq a$. Ал эми $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} \neq 0$ дөн $x \neq 0$ келип чыгат. Анда $a > 0$. Ошондой эле берилген теңдеменин сол жагынын алымы > 0. Мындан $b \neq 0$ б.а. $b > 0$. Эми берилген теңдемени пропорция деп эсептеп $\left(\sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{b}}{1}\right)$, параметр $b \neq 1$ деп эсептеп, пропорциянын 2) туунду пропорциясын пайдаланалы: $\dfrac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})+(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})-(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}=$

$=\dfrac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1}$, $\quad \dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\dfrac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1}$. Бул теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрүп, алынган $\dfrac{a+x}{a-x}=\dfrac{(\sqrt{b}+1)^2}{(\sqrt{b}-1)^2}$ теңдемесин пропорция деп эсептеп, аны 3) туунду пропорция түрүнө келтирели. Анда $\dfrac{(a+x)-(a-x)}{(a+x)+(a-x)}=\dfrac{(\sqrt{b}+1)^2-(\sqrt{b}-1)^2}{(\sqrt{b}+1)^2+(\sqrt{b}-1)^2}$, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{2\sqrt{b}}{b+1}$ сызыктуу теңдемесине келебиз жана $x=\dfrac{2a\sqrt{b}}{b+1}$ тамырын табабыз. Эгерде $\dfrac{2\sqrt{b}}{b+1}\leq$ ≤ 1 экенин эске алсак, анда $x\leq a$. Демек, бул табылган тамыр берилген теңдеменин АОсуна кирет.

Эми $b=1$ десек, анда берилген теңдемеден $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=1$. Бул теңдемеден $\sqrt{a-x}=0$, б. а. $x=a$ тамырын табабыз. Ал эми бул тамыр $x=\dfrac{2a\sqrt{b}}{b+1}$ ден $b=1$ болгондо келип чыгат.

Жообу: $x=\dfrac{2a\sqrt{b}}{b+1}$, $a>0$, $b>0$.

Эскертүү! 62-, 63-мисалдар айтып тургандай, параметрлүү иррационалдык теңдемелерди чыгаруу көп билимди, терең анализ жүргүзүүнү талап кылат.

Дагы бир мисал келтирели.

64-*мисал.* Теңдемени чыгаргыла: $a^5+x=\sqrt[5]{a-x}$, мында a – параметр.

Чыгаруу. Бул теңдеменин АО: $x\in R$, $a\in R$. Демек, x белгисизи менен a параметрин тең укуктуу деп карасак болот. Ошондуктан берилген теңдемени a параметрине карата теңдеме деп эсептейли жана ага ДК методун колдонобуз (эки жагын тең бешинчи даражага көтөрөбүз). Анда $(a^5+x)^5=a-x \Rightarrow a=x+(a^5+$ $+x)^5$ теңдемесине келебиз. Эгерде $f(a)=x+a^5$ десек, анда бул теңдеме $f(f(a))=a$ түрүнө келет. Эми бул теңдемеге суперпозиция методун, б. а. 2-теореманы колдонолу. Демек, алынган теңдеме $f(a)=a$ теңдемесине эквиваленттүү, б. а. $a=a^5+x$ теңдемесине эквиваленттүү. Ал эми бул теңдеме x ке карата жөнөкөй сызыктуу теңдеме. Демек, $x=a-a^5$ берилген теңдеменин тамыры болот.

Жообу: $x=a-a^5$.

Эскертүү! 64-мисалда параметрге карата чыгаруу методун колдондук.

Суроолор

1) Кандай теңдемени иррационалдык теңдеме дейбиз?
2) Иррационалдык теңдеме менен рационалдык теңдеменин айырмасы эмнеде?
3) Иррационалдык теңдеменин кандай түрлөрүн билесиңер?
4) Иррационалдык теңдемелерди чыгаруу үчүн кандай негизги методдор колдонулат?
5) Теңдемени даражага көтөрүү методунун мазмуну эмнеде?
6) Көбөйтүүчүлөргө ажыратуу методу эмнеге негизделген?
7) Теңдемелердин жыйындысы менен системасынын айырмасы эмнеде?
8) Суперпозиция методу эмнеге негизделген?
9) Кандай методду функционалдык метод дейбиз?
10) График методу эмнеге негизделген?
11) Пропорциянын кандай касиеттерин иррационалдык теңдемелерди чыгарууга колдонсо болот?
12) Татаал радикалдуу иррационалдык теңдемелерди кантип чыгарса болот?

Көнүгүүлөр

29. Теңдеменин тамыры жок экенин далилдегиле:

а) $\sqrt{x} = -x^2 - 10;$ *г)* $\sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x-1} = 1;$

б) $\sqrt[4]{x-5} = -7;$ *д)* $\sqrt{2x+5} + \sqrt[6]{x+2} = 0;$

в) $\sqrt{x-3} + \sqrt[3]{x} = -4;$ *е)* $\sqrt[8]{x} + \sqrt{x+5} = 2.$

30. Теңдеменин тамыры жок экенин далилдегиле:

а) $\sqrt[3]{x-4} - \sqrt{-1-x} = 0;$ *г)* $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-4} = (x-1)^2(x-8);$

б) $\sqrt{x + \dfrac{1}{x}} = \sqrt[4]{-x} - 1;$ *д)* $\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{x-2} = (x-1)^2(x-6);$

в) $\sqrt[10]{x} = -x^2 + 8x - 15;$ *е)* $\sqrt{x^2-x-2} = \cos\pi.$

31. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-3} = 4;$ *б)* $\sqrt[3]{2-x} = -1;$

в) $\sqrt[4]{x^2-1} = 2;$ *д)* $\sqrt[8]{x+9} = 2;$

г) $\sqrt[6]{x-5} = 3;$ *е)* $\sqrt[5]{x-4} = -2.$

32. Теңдеме a параметринин кайсы маанилеринде чыгарылышка ээ? Чыгарылышын жазгыла:

а) $\sqrt{x}=2a-3$; г) $\sqrt{t+1}=9a-a^2-8$;

б) $\sqrt[3]{x-8}=1-a^2$; д) $\sqrt{x+9}=|12-a-a^2|$;

в) $\sqrt[4]{x}=\dfrac{1-a^3}{1+a^2}$; е) $\sqrt[6]{2x-1}=\dfrac{4-a^2}{3a^2-4a+1}$.

33. Теңдеменин аныкталуу облусун тапкыла:

а) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}=x^3-5x+12$; г) $\sqrt[4]{|2x-7|}+\sqrt[3]{-x+6}=8$;

б) $\sqrt[3]{x-x^4}+\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{12-x}}=-x+1$; д) $\sqrt{x-8}+\sqrt[4]{2-x}=42x$;

в) $\sqrt[3]{\dfrac{x-4}{5-x}}-\sqrt[5]{x^2-9x+11}=x^2-7$; е) $\sqrt[8]{2x-1}-\sqrt{1-2x}=x-\dfrac{1}{2}$.

34. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-1}-2\sqrt{1-x}=x-2$;

б) $\sqrt{x-4}+\sqrt{(x^2+1)(4-x)}=x^3-15x-4$;

в) $\sqrt[3]{x^3-8}+\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{(x^2+9)(2-x)}=-x^2+9x-14$;

г) $\sqrt{9-x}-\sqrt{27-3x}=27-3x$;

д) $\sqrt[4]{3-x}-\sqrt{x-3}=2$;

е) $\sqrt{9-3x}+\sqrt{x-3}=2x^2-1$.

Көрсөтмө: Аныкталуу облусун табуу методун колдонгула.

35. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x+3\sqrt{x-5}=5$; г) $\sqrt{x^2+8}=2x+1$;

б) $\sqrt{10-x}=4-x$; д) $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$;

в) $\sqrt{x-1}=x-3$; е) $\sqrt{2x-1}=x-2$.

36. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-1}+x-3=0$; г) $\sqrt{x^2+20}+x^2=22$;

б) $\sqrt{x^4-2x-5}=1-x$; д) $\sqrt[3]{2x-1}=3$;

в) $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$; е) $\sqrt[4]{x-3}=2$.

Көрсөтмө: б) Биквадраттык теңдемеге келтирилет; *в)* $t=\sqrt{x^2+11}$ деп белгилегиле; *г)* $t=\sqrt{x^2+20}$ деп алуу керек.

37. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$;

б) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$;

в) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$;

г) $\sqrt{3x+3}+2\sqrt{2x-3}=5$;

д) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;

е) $\sqrt{2x-6}=5-\sqrt{x+4}$.

38. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$;

б) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$;

в) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}$;

г) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$;

д) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$;

е) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$.

Көрсөтмө: б) сол жагын орток (жалпы) бөлүмгө келтиргиле.

39. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+7}\,\sqrt{3x-2}=3\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+2}$;

б) $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$;

в) $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}+\sqrt{9x+4}=\sqrt{8x+9}$;

г) $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0$;

д) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

е) $\sqrt{4-x+4\sqrt{-x}}=4-\sqrt{4-x-4\sqrt{-x}}$.

40. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-17}=1$;

б) $\sqrt[3]{x+44}-\sqrt[3]{x-19}=3$;

в) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2x-5}$;

г) $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$;

д) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$;

е) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

41. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5;$ *в)* $\sqrt[5]{(7x-3)^3}+8\cdot\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}}=7;$

б) $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4;$ *г)* $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2.$

Көрсөтмө: г) $u>0$ болсо, $u+\frac{1}{u}\geq 2$ болорун колдонгула.

42. Теңдемени чыгаргыла:

а) $2x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{6}}=18;$ *в)* $\sqrt{x+13}+\sqrt[4]{x+13}=12;$

б) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1};$ *г)* $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3.$

43. Теңдемени чыгаргыла:

а) $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0;$ *г)* $\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{2x-5}=\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x-2};$

б) $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0;$ *д)* $\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}=x;$

в) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0;$ *е)* $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6.$

Көрсөтмө: Көбөйтүүчүлөргө ажыратуу методун колдонсо болот. Теңдеменин АОсун сөзсүз табуу керек.

44. Теңдемени чыгаргыла:

а) $2\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{3}}+\sqrt[4]{\frac{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{3}}=3x;$

б) $\sqrt{3+\sqrt{x}}=x-3;$ *в)* $2\sqrt{1+2\sqrt{x}}=x-1.$

Көрсөтмө: Суперпозиция методун колдонгула;

а) $f(x)=\frac{1}{3}(2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x});$ *в)* $f(x)=1+2\sqrt{x}.$

45. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{16+x^2}=4-89x^4;$ *в)* $\sqrt{5+x^2}+\sqrt{x-2}=\frac{6}{x};$

б) $\sqrt{9+x}+\sqrt[6]{x-1}=3;$ *г)* $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt{x}=3.$

Көрсөтмө: Функционалдык методду колдонгула;

в) 3-теореманы пайдалангыла; *б)*, *г)* АОдо сол жактары ↗.

46. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x}=2x^2-1$; *в)* $x^5+x=\sqrt[3]{x-7}$;

б) $x^2+2x+3=\sqrt{4-x^2}$; *г)* $\sqrt{x}=x^2+1$.

Көрсөтмө: График методун пайдалангыла.

47. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\dfrac{21}{x}$; *в)* $\dfrac{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}=\sqrt{3}$;

б) $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5$; *г)* $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{a}{x}$,

a – параметр.

Көрсөтмө: Пропорция методун пайдалансанар болот.

48. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{2+\sqrt{19-\sqrt[3]{x}}}=3$; *в)* $\sqrt[5]{4-\sqrt{23+\sqrt[4]{x-9}}}=-1$;

б) $\sqrt{9-\sqrt{30-\sqrt{20+\sqrt{10x-25}}}}=2$; *г)* $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

Көрсөтмө: Татаал радикалдуу иррационалдык теңдемелерди чыгаруу методун колдонгула.

49. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x^2+7x+2\sqrt{x}+11=0$; *в)* $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}=3$;

б) $x^4-2x^2+x-2\sqrt{x}+2=0$; *г)* $x^2-4x+y-6\sqrt{y}+13=0$,

x, y – белгисиздер.

Көрсөтмө: Толук квадратты бөлүп алуу методун пайдалангыла.

50. Теңдемени чыгаргыла (a – параметр):

а) $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$; *в)* $\sqrt{x^2-1}=9-8a-a^2$;

б) $\dfrac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}=\dfrac{x}{2a}$; *г)* $\sqrt[3]{x-4}=12-11a-a^2$.

Көрсөтмө: б) Пропорция методун колдонсонор болот.

51. Теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла:

$$x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0.$$

52. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$\sqrt{x^2+32}-2\cdot\sqrt[4]{x^2+32}=3.$$

53. Теңдеменин эң кичине тамырын тапкыла:

$$\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1.$$

54. Төмөнкү теңдемеден $\sqrt{x}$ ти тапкыла: $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8.$

Тест

55. Теңдеме a параметринин кайсы маанилеринде чыгарылышка ээ?

$$\sqrt{x-5}=\frac{(a+1)(3-a)}{(a-4)(a-5)}.$$

а) R; *б)* $[-1;3]\cup[5;\infty)$; *в)* $[1;3]\cup[4;5]$; *г)* $[-1;3]\cup[4;5]$; *д)* R_+.

56. Теңдемени чыгаргыла: $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12.$

а) $\{-7;-2;8\}$; *б)* $\varnothing$; *в)* -7; *г)* 8; *д)* $\{-7;8\}$.

57. Теңдеменин эң кичине тамырын тапкыла:

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6.$$

а) -15; *б)* -14; *в)* -6; *г)* 1; *д)* 7.

58. Теңдемени чыгаргыла: $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}+x}+\sqrt{3\sqrt{2}-x}}{\sqrt{3\sqrt{2}+x}-\sqrt{3\sqrt{2}-x}}=\sqrt{2}.$

а) 1; *б)* 2; *в)* 3; *г)* 4; *д)* 5.

59. Теңдеменин тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34.$$

а) -3; *б)* -9; *в)* 0; *г)* 9; *д)* 12.

Көрсөтмө: Адегенде тамырларын, анан алардын көбөйтүндүсүн тапкыла:

60. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3.$$

а) 0; *б*) 1; *в*) 3; *г*) 5; *д*) 8.

61. Теңдеменин тамырларынын катышын тапкыла:

$$\frac{\sqrt{20+x}+\sqrt{20-x}}{\sqrt{20+x}-\sqrt{20-x}}=\frac{20}{x}.$$

а) 1; *б*) 0; *в*) − 1; *г*) 2; *д*) 3.

62. Теңдеменин тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла:

$$(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23).$$

а) −5; *б*) −4,5; *в*) 0; *г*) − 4, 8; *д*) − 4.

63. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=4.$$

а) − 3; *б*) − 2; *в*) − 1; *г*) 1; *д*) 2.

64. Теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла: $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}$.

а) − 3; *б*) 1; *в*) 2; *г*) 3; *д*) 4.

65. Теңдеменин эң кичине тамырын тапкыла:

$$x=\sqrt[3]{x^3+x^2-6x+8}.$$

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

66. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$x-2=\sqrt[3]{x^2-8}.$$

а) 3; *б*) 4; *в*) 5; *г*) 6; *д*) 7.

67. Теңдеменин тамырын тапкыла: $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$.

а) 50; *б*) 60; *в*) 61; *г*) 62; *д*) 78.

68. Теңдеменин тамырынын модулун тапкыла:

$$\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4.$$

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

69. Теңдеменин тамырынын жарымын тапкыла:

$$\sqrt{x-3}=6+\sqrt[4]{x-3}.$$

а) 42; *б*) 43; *в*) 44; *г*) 45; *д*) 46.

70. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$3\cdot\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4.$$

а) – 3; *б*) – 2; *в*) – 1; *г*) 0; *д*) 1.

71. Теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла: $\sqrt{x}\ \sqrt{2-x}=2x.$

а) 0; *б*) 0,2; *в*) 0,4; *г*) 0,5; *д*) 0,9.

72. Теңдеменин тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла:

$$\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2.$$

а) – 3; *б*) – 2; *в*) 0; *г*) 2; *д*) 3.

§ 3. Иррационалдык барабарсыздыктар жана чыгаруу методдору

1-а н ы к т а м а. Белгисизди радикалдын астына камтыган алгебралык барабарсыздыкты иррационалдык барабарсыздык дейбиз.

Мисалы, $x<\sqrt{x}+\dfrac{1}{x+1}$, $\sqrt[3]{x-2}\geq x^2+5$, $\dfrac{x+\sqrt[4]{x}}{x-3}<1$– иррационалдык барабарсыздыктар. Ал эми $x^3+\sqrt{5}>0$ иррационалдык барабарсыздык эмес, анткени радикалдын астында белгисиз чоңдук жок.

2-а н ы к т а м а. Барабарсыздыктын чыгарылышы деп аны туура сан барабарсыздыгына же теңдештикке айландырган белгисиз чоңдуктун маанилерин айтабыз.

Барабарсыздыкты чыгаруу – бул же аны канааттандырган чыныгы сандардын (R) көптүгүн табууну же анын чыгарылышы жок (аны канааттандырган бир да чыныгы сан жок) экенин далилдөөнү билдирери белгилүү.

Иррационалдык барабарсыздыктын аныкталуу облусу – бул анын эки жагы тең аныкталган белгисиздин маанилеринин көптүгү.

Мисалы, $x^4+\sqrt{3-x}<\dfrac{x}{x-2}$ иррационалдык барабарсыздыгынын АО : $3-x\geq 0$ (сол жагыныкы), $x\neq 2$ (оң жагыныкы) $\Rightarrow(-\infty;\ 2)\cup\cup(2;\ 3]$.

Мындан ары колдонуш үчүн төмөнкү кыскартууларды кийирели:

БАО – барабарсыздыктын аныкталуу облусу деп келишип алалы, БСЖ – барабарсыздыктын сол жагы, БОЖ – барабарсыздыктын оң жагы, СЖ – сол жагы, ОЖ – оң жагы.

Иррационалдык барабарсыздыктарды чыгарууда, иррационалдык теңдемелерди чыгаруудагыдай эле, жуп даражалуу тамырлар (радикалдар) арифметикалык (тамыр астындагы туюнтма терс эмес) гана болуп каралат, ал эми так даражалуу радикалдар тамыр астындагы туюнтманын бардык чыныгы маанилеринде каралат.

Эскертүү! Иррационалдык барабарсыздыктардын чыгарылыштары, негизинен, сандар көптүгү болот. Ошондуктан табылган чыгарылыштын тууралыгын текшерүү кыйынга турат (көбүнчө мүмкүн эмес). Демек, иррационалдык барабарсыздыктарды чыгарууда жүргүзүлгөн бардык өзгөртүүлөр тең күчтүү (эквиваленттүү) болушуна өзгөчө көңүл буруу керек.

Бул параграфтын материалдарын жакшы өздөштүрүү үчүн:
– рационалдык барабарсыздыктарды чыгаруу методдорун;
– кыскача көбөйтүүнүн формулаларын;
– рационалдык бөлчөктөр менен жүргүзүлүүчү амалдарды;
– көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратууну;
– рационалдык көрсөткүчтүү даражанын касиеттерин;
– интервалдар методун;
– барабарсыздыктардын касиеттерин;
– арифметикалык тамыр жана анын касиеттерин;
– иррационалдык теңдемелердин түрлөрүн жана аларды чыгаруу методдорун;
– функциялардын аныкталуу облустарын табууну;
– сан огундагы көптүктөр (интервалдар, сегменттер) менен жүргүзүлүүчү амалдарды (кошуу же биригүү; көбөйтүндү же жалпы бөлүк; кемитүү);
– барабарсыздыктарды теңдеш өзгөртүп түзүүнү билүү керек болот.

Иррационалдык барабарсыздыктарды чыгарууда колдонулуучу негизги методдорго: 1) аныкталуу облустун табуу, 2) арифметикалык тамырдын касиеттерин колдонуу, 3) даражага көтөрүү, 4) жаңы белгисизди кийирүү, 5) толук квадратты бөлүп алуу, 6) график методу кирет. Көбүнчө бул методдор айкалышта колдонулат.

Ошондой эле иррационалдык барабарсыздыктарды чыгаруунун негизги методу болуп берилген барабарсыздыкты тең күчтүү рационалдык барабарсыздыктардын системасына же системаларынын жыйындысына келтирүү саналат.

Аныкталуу облустун табуу методу менен арифметикалык тамырдын касиеттерин колдонуу методун, б.а. 1), 2) методдорун бирге пайдаланууга мисал келтирели.

1-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x} > -1$.

Ч ы г а р у у. БАО: $x \geq 0$ жана анын СЖ $\sqrt{x} \geq 0$ (арифметикалык тамыр), ал эми ОЖ терс. Демек, БСЖ > БОЖ, эгерде $x \ge 0$ болсо. Мындан $x \ge 0$ чыгарылыш экенин алабыз.

Жообу: $x \ge 0$.

2-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} > \sqrt[6]{5-x}$.

Ч ы г а р у у. БАО: $x+2 \ge 0$, $x-5 \ge 0$, $5-x \ge 0 \Rightarrow x \ge -2$, $x \ge 5$, $x \le 5 \Rightarrow x = 5$. Берилген барабарсыздыкты $x = 5$ те текшерип: $\sqrt{5+2} + \sqrt{0} > \sqrt{0} \Rightarrow \sqrt{7} > 0$ туура сан барабарсыздыгын алабыз. Демек, $x = 5$ чыгарылыш болот.

Жообу: $x = 5$.

3-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x} < -x^2 - 3$.

Ч ы г а р у у. БАО: $x - 1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$. БАОдо анын СЖ $\ge 1 > 0$, ал эми ОЖ<1. Демек, $x \ge 1$ болгондо берилген барабарсыздык аткарылбайт.

Жообу: $x \in \varnothing$ (чыгарылышы жок).

Эми 1), 2), 3) методдорунун биргеликте колдонулушуна токтололу.

Жуп даражалуу радикалдары бар иррационалдык барабарсыздыктарды чыгарууга кайрылалы. Мындай барабарсыздыктар негизинен төмөнкүдөй төрт түрдө кездешет:

А) БАО до барабарсыздыктын эки жагы тең терс эмес. Мисалы, $\sqrt[4]{5+2x} \ge \sqrt{x-9}$.

Б) БАОдо барабарсыздыктын эки жагы тең терс. Мисалы, $-\sqrt{x} \ge -\sqrt[6]{x+3} - \sqrt[8]{x-4}$.

В) БАОдо барабарсыздыктын СЖнын белгиси аныкталбаган, ал эми ОЖ ≥ 0. Мисалы, $x - 3 \ge \sqrt{x^2 - x - 1}$.

Г) БАОдо барабарсыздыктын СЖ ≥ 0, ал эми ОЖнын белгиси аныкталбаган. Мисалы, $\sqrt{x+2} > x$.

Бул учурларга токтололу. А) түрүндөгү барабарсыздыктарды чыгаруу төмөнкү теоремага негизделген.

1-т е о р е м а. БАОдо

$$f_1(x) \ge f_2(x), \qquad (1)$$

мында $f_1(x) \ge 0$, $f_2(x) \ge 0$, барабарсыздыгы

$$(f_1(x))^{2k} \ge (f_2(x))^{2k}, \ k \in N \qquad (2)$$

барабарсыздыгына тең күчтүү.

Барабарсыздыктын Б) түрү эки жагын тең (-1) ге көбөйтүүнүн натыйжасында А) түрүнө келтирилет.

Маселен $-\sqrt{x-2} \geq -\sqrt{x+3} - 2$ барабарсыздыгы $\sqrt{x-2} \leq \sqrt{x+3} +$ $+2$ барабарсыздыгына, б. а. барабарсыздыктын А) түрүнө келет. А) учуруна мисалдар чыгаралы.

4-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$.

Ч ы г а р у у. Арифметикалык тамырдын касиети боюнча барабарсыздыктын эки жагы тең БАОдо терс эмес. Демек, 1-теореманы колдонууга болот: $x + 1 \geq 0$ (СЖнын АО), $x - 1 \geq 0$ (ОЖнын АО), $x+1>x-1$ (берилген барабарсыздыктын эки жагын квадратка көтөрдүк). Мындан $\begin{cases} x \geq 1 \text{ (БАО)}, \\ 1 > -1 \end{cases}$ (даражалоонун натыйжасы, б. а. даражага көтөрүүнүн натыйжасы – БАОдо аткарылат) келип чыгат. Демек, *жообу*: $x \geq 1$.

5-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} < 3$.

Ч ы г а р у у. 1-теореманын негизинде: $\dfrac{x-1}{x} \geq 0$ (БАО), $\dfrac{x-1}{x} < 9$ (квадратка көтөрүүнүн натыйжасы). Интервалдар методун колдонсок, анда БАО: $(-\infty;\ 0) \cup [1;\ \infty)$ жана $\dfrac{x-1}{x} < 9$ рационалдык барабарсыздыгынын чыгарылышы $(-\infty;\ -\dfrac{1}{8}) \cup (0;\ \infty)$ экенин алабыз. (Текшерип көргүлө!). Бул табылган көптүктөрдүн жалпы бөлүгү $(-\infty;\ -\dfrac{1}{8}) \cup [1;\ \infty)$ берилген барабарсыздыктын чыгарылышы болот.

Жообу: $x \in (-\infty;\ -\dfrac{1}{8}) \cup [1;\ \infty)$.

В) түрүндөгү иррационалдык барабарсыздыкты чыгаруу үчүн төмөнкү теореманы колдонуу керек.

2-т е о р е м а. Берилген

$$f_1(x) \geq \sqrt[2k]{f_2(x)}, \quad k \in N \tag{3}$$

барабарсыздыгы рационалдык барабарсыздыктардын төмөнкү системасына тең күчтүү: $\begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) \geq 0, \\ (f_1(x))^{2k} \geq f_2(x). \end{cases}$

Э с к е р т у у. Эгерде (3) барабарсыздыгында $f_1(x) < 0$ болсо, анда $\sqrt[2k]{f_2(x)} < f_1(x)$, $k \in N$ иррационалдык барабарсыздыгынын чыгарылышы жок, анткени анын СЖ ≥ 0, ал эми ОЖ < 0. Мисален, $\sqrt{x-9} < -3$ иррационалдык барабарсыздыгынын чыгарылышы жок.

Эми 2-теореманы колдонууга мисалдар келтирели.

6-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $x \geq \sqrt{2x+35}$.

Ч ы г а р у у. 2-теореманын негизинде: $\begin{cases} x \geq 0 \ \text{(БАО)}, \\ 2x+35 \geq 0 \\ x^2 \geq 2x+35. \end{cases}$ (барабарсыздыкты квадратка көтөрүүгө керектүү шарт). Мындагы үчүнчү барабарсыздык: даражалоонун натыйжасы, б. а. берилген барабарсыздыкты квадратка көтөрдүк, 1-теореманы колдондук.

Мындан $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -17{,}5; \\ x \in (-\infty; -5] \cup [7; \infty) \end{cases}$ (интервалдар методун колдондук).

Жообу: $x \geq 7$.

Демек, 2-теореманы колдонууда 1-теореманы пайдаландык.

7-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $1 - x > \sqrt{x+5}$.

Ч ы г а р у у. 2-теореманы колдонобуз:

$$\begin{cases} 1-x>0, \\ x+5 \geq 0, \\ (1-x)^2 > x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leq x < 1, & (*) \\ x^2-3x-4>0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty) & (**) \end{cases}$$

Мындагы (*) – биринчи эки барабарсыздыктын чыгарылышы, (**) – системанын үчүнчү квадраттык барабарсыздыгын чыгарууда интервалдар методун колдонуунун натыйжасы. Табылган эки көптүктүн жалпы бөлүгү $x \in [-5; -1)$.

Жообу: $-5 \leq x < -1$.

Г) түрүндөгү иррационалдык барабарсыздыкты чыгаруу төмөнкү теоремага негизделген.

3-т е о р е м а. Берилген

$$\sqrt[2k]{f_1(x)} \geq f_2(x) \qquad (4)$$

барабарсыздыгы рационалдык барабарсыздыктардын системаларынын төмөнкү жыйындысына тең күчтүү:

$$а)\ \begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) \geq 0, \\ f_1(x) \geq (f_2(x))^2 \end{cases} \quad \text{жана} \quad б)\ \begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) < 0. \end{cases}$$

Мисалдарга кайрылалы.

8-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x+2} > x$.

Ч ы г а р у у. 3-теореманы колдонуп, $\begin{cases} x+2 \geq 0\ (\text{БАО}), \\ x \geq 0 \\ x+2 > x^2. \end{cases}$ (квадратка көтөрүү үчүн керектүү шарт). Мындагы үчүнчү барабарсыздык – квадратка көтөрүүнүн натыйжасы,

1-теореманы колдондук. Демек, жогорку жана бул: $\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x < 0 \end{cases}$ рационалдык барабарсыздыктар системаларынын жыйындысын алабыз. Биринчи системадан $x \geq -2$, $x \geq 0$, $-1 < x < 2$ (интервалдар методун колдондук) $\Rightarrow$ $0 \leq x < 2$, ал эми экинчи системадан $-2 \leq x < 0$ гө келебиз. Демек, $-2 \leq x \leq 2$.

Жообу: $|x| \leq 2$.

9-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

Ч ы г а р у у. 3-теореманы колдонобуз. Анда *а*) $x^2 - 4x \geq 0$, $x - 3 \geq 0$, $x^2 - 4x > (x-3)^2 \Rightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$, $x \in [3; \infty)$, $x \in [\frac{9}{2}; \infty)$ (биринчи квадраттык барабарсыздыгына интервалдар методун колдондук, үчүнчү барабарсыздык $2x > 9$га келет). Демек, *а*) учурунда $x \in (\frac{9}{2}; \infty)$. Эми *б*) учурун карайлы: $x^2 - 4x \geq 0$, $x - 3 < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$, $x \in (-\infty; 3) \Rightarrow x \in (-\infty; 0]$. Эми *а*), *б*) учурларында табылган чыгарылыштардын биригүүсүн табабыз: $x \in (-\infty; 0] \cup (\frac{9}{2}; \infty)$.

Жообу: $x \in (-\infty; 0] \cup (\frac{9}{2}; \infty)$.

Эми иррационалдык барабарсыздыктардын дагы бир түрүнө кайрылалы.

Д) Так даражалуу радикалдарды камтыган иррационалдык барабарсыздыктар. Маселен, $\sqrt[3]{x+3} > x$.

Бул учурда төмөнкү эрежени эстеп коёлу: Эгерде берилген барабарсыздыкты так натуралдык даражага көтөрсөк, анда тең күчтүү барабарсыздыкка келебиз. Б. а., төмөнкү теорема орун алат.

14 –112

4-т е о р е м а. Берилген

$$f_1(x) > f_2(x) \qquad (5)$$

барабарсыздыгы

$$\sqrt[2k+1]{f_1(x)} > \sqrt[2k+1]{f_2(x)} \qquad (6)$$

барабарсыздыгына теӊ күчтүү. Ошондой эле тескерисинче, (6) барабарсыздыгы (5) барабарсыздыгына теӊ күчтүү.

Демек, (5) $\Leftrightarrow$ (6).

10-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt[3]{x^3+3x^2} < x+1$.

Ч ы г а р у у. БАО: $x \in R$. Эми 4-теореманын негизинде берилген барабарсыздыктын эки жагын кубка көтөрсөк: $x^3+3x^2 < x^3+$ $+3x^2+3x+1 \Rightarrow 3x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{3}$ чыгарылышына келебиз.

Жообу: $x \in (-\frac{1}{3}; \infty)$.

Биз төмөндө иррационалдык барабарсыздыктарды жаӊы белгисизди кийирүү методун колдонуп чыгарууга мисалдар келтирели.

11-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$.

Ч ы г а р у у. Жаӊы t белгисизин кийирели: $\sqrt{15-x} = t > 0$ (БАО). Анда $x = 15 - t^2$ жана берилген иррационалдык барабарсыздык

$$\begin{cases} \dfrac{3-(15-t^2)}{t} < 1, \\ t > 0 \end{cases}$$

рационалдык барабарсыздыктар системасына келет. Мындан

$$\begin{cases} \dfrac{\left(t+\dfrac{1}{3}\right)(t-4)}{t} < 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

Интервалдар методун колдонуп, $t \in (0; 4)$ экенин алабыз, б. а. $t^2 \in (0; 16)$. Эми $t = \sqrt{15-x}$, $x = 15 - t^2$ экенин эске алсак, анда $x \in (-1; 15)$ (текшерип көргүлө!) берилген иррационалдык барабарсыздыктын чыгарылышы болот.

Жообу: $x \in (-1; 15)$.

Бул мисалда $0 < t < 4 \Rightarrow 0 < \sqrt{15-x} < 4$. Мындан $0 < 15 - x < 16$ (барабарсыздыктын үч жагын теӊ квадратка көтөрдүк. Эми

$0<15-x$, $15-x<16$ дан $x<15$, $x>-1$ же $-1<x<15 \Rightarrow x \in (-1;\ 15)$ жообуна келебиз.

12-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $x-3\sqrt{x}+2<0$.

Ч ы г а р у у. БАО: $x \geq 0$. Жаңы t белгисизин $\sqrt{x}=t$ деп кийирели. Демек, $t \geq 0$. Анда биз берилген иррационалдык барабарсыздыкты төмөнкү рационалдык барабарсыздыктар системасына келтиребиз: $\begin{cases} t^2-3t+2<0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-1)(t-2)<0, \\ t \geq 0. \end{cases}$ Интервалдар методун колдонуп, $t \in (1;\ 2)$ же $1<t<2$ экенин алабыз. Эми $t=\sqrt{x}$ экенин эске алсак, анда $1<\sqrt{x}<2$ же бул барабарсыздыктын үч жагын тең квадратка көтөрүп, $1<x<4$ чыгарылышына келебиз.

Жообу: $1<x<4$.

Э с к е р т у у. Эгерде 12-мисалда барабарсыздыктын эң кичине бүтүн чыгарылышын тапкыла деп шарт койсок, анда мындай маселенин жообу: $x=2$ болмок. Муну биз $1<x<4$ төн алабыз. Ал эми эң чоң бүтүн чыгарылыш $x=3$.

Эми толук квадратты бөлүп алуу методун колдонууга мисалдар келтирели.

13-м и с а л. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $x^4+x-2\sqrt{x}+3<0$; б) $x^4+x-2\sqrt{x}+3<0$.

Ч ы г а р у у. а) БАО: $x \geq 0$. Толук квадратты бөлүп алабыз: $x^4+(\sqrt{x}-1)^2+2<0$. Биз БСЖ (оң) < БОЖ (терс) БАОдо аткарылбаган барабарсыздыкка келдик.

Жообу: $x \in \varnothing$.

б) Бул учурда да БАО: $x \geq 0$ жана $x^4+(\sqrt{x}-1)^2+2>0$. Бул барабарсыздык БАОдо аткарылат. Демек, БАО – чыгарылыш.

Жообу: $x \geq 0$.

14-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+4x+4}<1.$$

Ч ы г а р у у. Толук квадратты бөлүп алуу методдун колдонсок, $\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+2)^2}<1 \Rightarrow |x-1|-|x+2|<1$ (*)

барабарсыздыгына келебиз. Демек, берилген барабарсыздыктын АО: $x \in R$. Эми абсолюттук чоңдуктун (модулдун) касиетин колдонуп, (*) барабарсыздыгын чыгаралы. Мында $x=-2$, $x=1$ сандары бүткүл сан огун $(-\infty; -2)$,$[-2; 1)$, $[1; \infty)$ интервалдарына бөлүшөт жана бул интервалдарда $|x-1|$ жана $|x+2|$ туюнтмаларынын белгилери туруктуу. Б. а., интервалдар методун колдонобуз. Анда 1) $x \in (-\infty; -2)$ десек, (*) дан $-(x-1)+(x+2)<1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3<1$ деген аткарылбаган сан барабарсыздыгын алабыз. Демек, $(-\infty; -2)$ де (*) нын чыгарылышы жок. *2)* $x \in [-2; 1)$ десек, (*) дан $-(x-1)-(x+2)<1 \Rightarrow -2x-1<1 \Rightarrow x>-1$ ди алабыз. Демек, $[-2; 1)$ де (*) нын чыгарылышы $x \in (-1; 1)$. *3)* $x \in [1; \infty)$ десек, (*) дан $x-1-(x+2)<1 \Rightarrow -3<1$ туура сан барабарсыздыгын алабыз. Демек, $x \in [1; \infty)$ – чыгарылыш.

Жообу: $x \in (-1; \infty)$.

Иррационалдык барабарсыздыктын дагы бир түрүн чыгарууга мисал келтирели.

15-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \le 0.$$

Ч ы г а р у у. БАО: $x^2-x-2 \ge 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) \ge 0$. Интервалдар методун колдонсок, БАО: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$ экенин алабыз.

Берилген барабарсыздыктын чыгарылышы

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} < 0 \qquad (**)$$

иррационалдык барабарсыздыгынын жана

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} = 0 \qquad (***)$$

иррационалдык теңдемесинин чыгарылыштарынын көптүктөрүнүн биригүүсүнөн турары айдан ачык (шексиз).

(***) теңдемесин көбөйтүүчүлөргө ажыратуу методун колдонуп чыгаралы, анда анын тамырлары $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=2$ болорун алабыз.

Эми (**) барабарсыздыгын чыгаралы. Бул учурда $\sqrt{x^2-x-2}>0$, себеби $x^2-x-2=0$ дүн тамырлары $x_2=-1$, $x_3=2$ (**) барабарсыздыгын канааттандырбайт. Ошондуктан эки жагын $\sqrt{x^2-x-2}>0$ гө бөлүп, (**) дан $x-1<0$ сызыктуу барабарсыздыгына келебиз. Мындан $x<1$ же $x \in (-\infty; 1)$. Демек, берилген иррационалдык барабарсыздыктын чыгарылышы $x \in (-\infty; -1) \cup [2; \infty) \cap (-\infty; -1] \cup \{2\} \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \{2\}$.

Жообу: $-\infty<x<-1$, $x=2$.

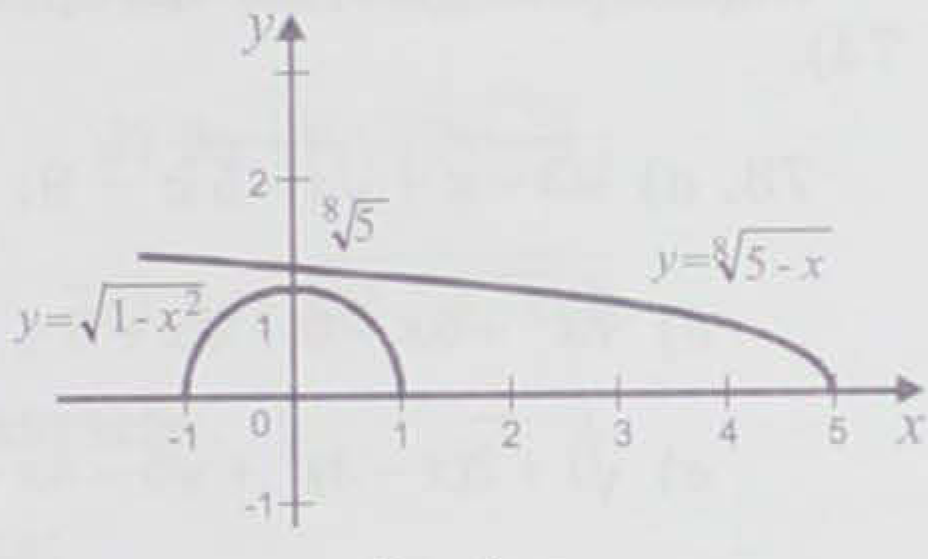
Иррационалдык барабарсыздыкты график методу менен чыгарууга мисал келтирели.

16-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{1-x^2} < \sqrt[8]{5-x}$.

Ч ы г а р у у. БАО: $1-x^2 \geq 0$, $5-x \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1$, $x \leq 5 \Rightarrow |x| \leq 1$. Бул барабарсыздыкты чыгарууга график методун колдонолу, $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$, $f_2(x)=\sqrt[8]{5-x}$ деп, бул функциялардын графиктерин чиели: $f_1(x)<f_2(x)$.

Бул чиймеден $x\in[-1;\ 1]$, б. а. $|x|\leq 1$ (БАО) болгондо, берилген иррационалдык барабарсыздыктын аткарылаары келип чыгат. Муну далилдейли. Ар бир $x\in[-1;\ 1]$ үчүн $0 \leq f_1(x) \leq 1$ жана $f_2(x)=\sqrt[8]{5-x} \geq \sqrt[8]{4} > 1$.

Демек, ар кандай $x\in[-1;\ 1]$ үчүн $f_1(x) \leq 1 < f_2(x)$. Мындан, $x\in[-1;\ 1]$ берилген барабарсыздыктын чыгарылышы экенин алабыз.



5-чийме

Жообу: $-1\leq x \leq 1$.

Эми иррационалдык барабарсыздыкты чыгарууга байланышкан бир маселеге токтололу жана аны чыгарууга туундуну колдонуу методун пайдаланалы.

17-м и с а л.

$$\sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2} \qquad (a)$$

барабарсыздыгы $x \geq 0$ болгондо орун аларын далилдегиле.

Ч ы г а р у у. Берилген $x \geq 0$ үчүн $\sqrt{1+x}>0$. Белгилөө кийирели: $f(x)=1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}$. Бул функция $x\in[0;\ \infty)$ болгондо үзгүлтүксүз жана анын туундусу $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ да үзгүлтүксүз. Мындан $f'(\text{x})=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}\right)=\frac{x}{2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}\geq 0$ экенин алабыз. (Бул учурда бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $\sqrt{1+x}+1$ ге же $\sqrt{1+x}-1$ дин түйүндөшүнө көбөйттүк). Мындан $f(x) \geq f(0)$ келип чыгат ($f'(x)\geq 0$ дү $[0;\ x]$ те интегралдайбыз). Ал эми $f(0)=0$. Демек, $f(x)\geq 0$, б. а. (*а*) барабарсыздыгы туура.

Биз бул 17-мисалдын маанисин башкача түшүнсөк да болот: (*а*) иррационалдык барабарсыздыгынын чыгарылышы $x\geq 0$.

Суроолор

1) Кандай барабарсыздыкты иррационалдык дейбиз?

2) Иррационалдык барабарсыздыктардын кандай негизги түрлөрүн билесинер?

3) Иррационалдык барабарсыздыктарды чыгаруунун негизги методдорун атагыла.

4) Теңдеме менен барабарсыздыктын чыгарылыштарынын негизги айырмачылыгы эмнеде?

Көнүгүүлөр

Барабарсыздыктын чыгарылышы жок экенин далилдегиле (73 – 74).

73. *а)* $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}\geq -9$;

б) $\sqrt[4]{x^2+5x+6}+\sqrt{x+8}\leq -3$;

в) $\sqrt{1+2(x-3)^2}+\sqrt{5-4x+x^2}<\frac{3}{2}$;

г) $\sqrt{x^2-x+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+4}}<2$.

Көрсөтмө: в) БСЖнын ылдый жагынан чамалагыла;

г) $\sqrt{x^2-x+4}>0$ экенин эске алып, БСЖ ≥ 2 экенин көрсөткүлө.

74. *а)* $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-7}<5$;

б) $\sqrt{x-5}-\sqrt[3]{4-x}<-1$;

в) $(x-2)\sqrt{x^2+1}>x^2+2$;

г) $\sqrt{1+x^4}+\sqrt[4]{16+x^2}<2$.

Көрсөтмө: а) БАО ны тапкыла; б) БСЖ ны БАОдо карагыла; в) $x-2<0$ жана $x-2\geq 0$ учурларын өзүнчө карагыла; г) БСЖнын ылдый жагынан чамалагыла.

75. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt[4]{x-5}>-2$;

б) $\sqrt{x+2}>1$;

в) $\sqrt[3]{x-4}<3$;

г) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-5}\geq\sqrt{5-2x}$;

д) $\sqrt[6]{3-x}+\sqrt[4]{x-3}<\sqrt[3]{x}$;

е) $\sqrt[3]{x^3+x-1}<x$.

76. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{2x+1}>\sqrt{3-x}$;

б) $\sqrt{4+3x-x^2}<2$;

в) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{x+3}$;

г) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}>\sqrt{2x+7}$;

д) $\sqrt{2x-3}<1$;

е) $\sqrt{8x-9}>2$.

77. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-7}<\sqrt{2}-1$;

г) $\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-5}}>7$;

б) $\sqrt{\dfrac{10-x}{x-20}}>-1$;

в) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-50}\ge\sqrt{50-2x}$;

д) $\sqrt[3]{3x-7}>\sqrt[3]{7x+2}$;

е) $\sqrt[3]{x^2-4}<5$.

78. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $6x-1>\sqrt{5-2x}$;

б) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\dfrac{3}{2}$;

в) $x>\sqrt{2x+24}$;

г) $x+1>\sqrt{x+2}$;

д) $2x-1>\sqrt{2x+5}$;

е) $x>\sqrt{x^2-x-12}$.

Көрсөтмө: 2-теореманы пайдалангыла.

79. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2-x$;

б) $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$;

в) $\sqrt{1-x}>x$;

г) $\sqrt{x+3}>x+1$;

д) $\sqrt{x^2-5x-24}>x-2$;

е) $3\sqrt{6+x-x^2}+2>4x$.

Көрсөтмө: 3-теореманы колдонгула.

80. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x^2-1}>x-2$;

б) $\sqrt{x+18}<2-x$;

в) $\sqrt{5-2x}<6x-1$;

г) $\sqrt{(x-6)(1-x)}<3+2x$;

д) $\sqrt{(x+4)(x+3)}>6-x$;

е) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+15}<6$.

81. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+4}>0$;

б) $3\sqrt{x}-\sqrt{5x+5}>1$;

в) $\sqrt{1-x}\le\sqrt[4]{5+x}$;

г) $\sqrt{x+4}>\sqrt{2-\sqrt{3+x}}$;

д) $\sqrt[4]{15+x}-\sqrt[4]{2-x}>1$;

е) $\sqrt{4+x}+\sqrt[4]{16-x}<2$.

82. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$;

б) $\dfrac{\sqrt{x^2-81}+2}{x-1}<1$;

г) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}}>1$;

д) $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$;

в) $\sqrt{\dfrac{1-x}{2x-5}} < 3;$ е) $\sqrt{x+44-14\sqrt{x-5}} - \sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}} > 2.$

83. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $2x+5\sqrt{x}-7 \geq 0;$ г) $x-12\sqrt{x}+11 \leq 0;$

б) $x-9\sqrt{x}+8 < 0;$ д) $x^2+4x-16\sqrt{2x}+20 > 0;$

в) $\dfrac{3}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2;$ е) $7x-19\sqrt{x}+12 < 0.$

Көрсөтмө: Жаңы белгисизди кийирүү методун колдонгула. в) $\sqrt{2-x}=t$ деп, $t>0$ экенин эске алгыла; д) $\sqrt{2x}=t$ деп, алынган төртүнчү даражадагы алгебралык теңдеменин эки тамыры $t_{1,2}=2$ экенин эске алып (бул Виеттин теоремасынан келип чыгат), төртүнчү даражадагы көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

84. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{5-x}+2x^2-24x+75>0;$ в) $x-14\sqrt{x}+49 \leq 0;$

б) $x-4\sqrt{x}+5 < 0;$ г) $|x|-\sqrt{x^2-12x+36} < 3.$

Көрсөтмө: Толук квадратты бөлүп алуу методун пайдалангыла.

85. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0;$ г) $x\sqrt{\dfrac{x+5}{x+6}} < 0;$

б) $(x+1)\sqrt{x^2+1} > x^2-1;$ д) $(2+x)\sqrt{4-x}\,\sqrt{5-x} \geq 0;$

в) $(x+3)\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}} \geq 0;$ е) $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$

86. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x-1} \leq 1;$ б) $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{x+14} > 3.$

Көрсөтмө: График методун пайдалангыла (компьютерди колдонгула).

Тест

87. Барабарсыздыктын чыгарылыштарынын суммасын тапкыла: $(x-1)\sqrt{-x^2+x+2} \geq 0.$

а) -2; б) 0; в) 1; г) 2; д) 3.

88. Барабарсыздыкты канааттандырган эң чоң бүтүн x ти тапкыла: $\sqrt{14-x} > 2-x$.

а) 7; *б*) 8; *в*) 10; *г*) 12; *д*) 14.

89. Барабарсыздыкты канааттандырган x тин эң кичине бүтүн оң маанисин тапкыла: $\sqrt{x+12} < x$.

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

90. Барабарсыздыктын бүтүн чыгарылыштарынын суммасын тапкыла: $\dfrac{2x^2-5x-12}{\sqrt{4x+5}} \leq 0$.

а) 3; *б*) 5; *в*) 7; *г*) 9; *д*) 11.

91. Барабарсыздыктын эң кичине бүтүн чыгарылышын тапкыла: $\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[5]{5-x}\,\sqrt{x-2} > 0$.

а) 4; *б*) 5; *в*) 6; *г*) 8; *д*) 10.

92. Барабарсыздык аткарыла турган интервалдын узундугун тапкыла: $x-4\sqrt{x}-5 \leq 0$.

а) 15; *б*) 20; *в*) 25; *г*) 30; *д*) 35.

93. Барабарсыздык аткарыла турган интервалдын ортосун тапкыла: $\sqrt{2x-7} < 3$.

а) 4,5; *б*) 5,2; *в*) 5,5; *г*) 5,75; *д*) 6.

94. Барабарсыздыктын бүтүн чыгарылыштарынын арифметикалык орто санын тапкыла: $\sqrt{x^2-16} \leq x-2$.

а) 2,5; *б*) 3,7; *в*) 4; *г*) 4,2; *д*) 4,5.

Көрсөтмө: № 87–94 көнүгүүлөрдө адегенде бардык чыгарылыштарын таап, анан алардан көнүгүүлөрдүн шарттарын канаатандыра тургандарын бөлүп алгыла. Текстеги 12-мисалдан кийинки эскертүүнү карагыла.

§ 4. Модулду камтыган теңдемелерди жана барабарсыздыктарды чыгаруу

Биз жогоруда иррационалдык теңдемелерди жана иррационалдык барабарсыздыктарды чыгарууда модулду камтыган теңдемеге (2 параграфынын 61-мисалы) жана барабарсыздыкка (3 параграфынын 14-мисалы) кездештик жана аларды чыгардык. Мындай теңдемелер жана барабарсыздыктар илим менен техниканын көптөгөн тармактарында өзгөчө роль ойнойт. Ошондуктан ушул параграфты жазууну туура таптык.

Модулду камтыган теңдемелерди жана барабарсыздыктарды чыгарууда модулдун аныктамасы жана интервалдар методу колдонулат.

Модулдун аныктамасын эске түшүрөлү.

1-а н ы к т а м а. Ар кандай чыныгы x саны үчүн, б.а. $x\in R$ үчүн анын $|x|$ төмөнкүчө табылат: $|x|=\begin{cases}-x, & \text{эгерде } x<0,\\ x, & \text{эгерде } x\geq 0 \text{ болсо.}\end{cases}$

Мындан $|x|=0$ болсо, $x=0$ экенин алабыз.

Эми бул аныктаманын кеңейтилгенин келтирели.

2-а н ы к т а м а. Ар кандай чыныгы x, x_0 сандары үчүн, б. а. $x, x_0\in R$ үчүн $x - x_0$ дун модулу төмөнкүчө табылат:

$$|x-x_0|=\begin{cases}-(x-x_0), & \text{эгерде } x<x_0,\\ x-x_0, & \text{эгерде } x\geq x_0 \text{ болсо.}\end{cases}$$

2-аныктамадан эгерде $|x - x_0|=0$ болсо, анда $x - x_0 =0$, $x= x_0$ келип чыгат.

Төмөндө 1- жана 2- аныктамалардын кеңейтилген вариантын, б.а. $y=f(x)$ функциясынын модулу кантип табыларын келтирели.

3-а н ы к т а м а. Бизге $y=f(x)$ чыныгы функциясы берилсин, б. а. $x\in R$, $y\in R$ болсун дейли. Анда анын модулу $|f(x)|$ төмөнкүчө табылат: $|f(x)|=\begin{cases}-f(x), & \text{эгерде } f(x)<0,\\ f(x), & \text{эгерде } f(x)\geq 0 \text{ болсо.}\end{cases}$

3-аныктамадан $|f(x)|=0$ болсо, анда $f(x)=0$ келип чыгат.

Сандын же функциянын модулун анын абсолюттук чоңдугу деп да аташарын эскерте кетели.

Эми мисалдарды чыгарууда колдонула турган дагы бир түшүнүккө токтололу.

4-а н ы к т а м а. Модулдун ичиндеги туюнтманын нөлүн критикалык (сыналуучу) чекит деп айтабыз.

Критикалык чекит жалгыз (бирөө эле) же андан да көп болушу мүмкүн.

Биз жогоруда көрдүк: $|x|$ тин критикалык чекити $x=0$ (бирөө), $|x - x_0|$ дүн критикалык чекити $x=x_0$ (бирөө), ал эми $|f(x)|$ тин критикалык чекиттери $f(x)=0$ теңдемесинин тамырлары болот.

Демек, туюнтманын нөлү деп, бул туюнтманы нөлгө барабарлагандан келип чыккан теңдеменин тамырын айтабыз.

4-аныктаманын мазмунун ачууга, б.а. критикалык чекиттерди табууга мисалдар келтирели.

Эскертүү! 1) Модулдары бар функциянын критикалык чекиттери деп функциядагы модулдардын ичиндеги туюнтмалардын нөлдөрүн айтабыз. 2) Теңдеменин же барабарсыздыктын критикалык чекиттери деп теңдемедеги же барабарсыздыктагы модулдардын ичиндеги туюнтмалардын нөлдөрү айтылат.

1- мисал. $y=|8x^2-9x+1|+|x-3|$ функциясынын критикалык чекиттерин тапкыла.

Чыгаруу. Бул функцияда эки модул бар. Ар биреөнүн ичиндеги туюнтмаларды нөлгө барабарлап: $8x^2-9x+1=0$, $x-3=0$ теңдемелеринин жыйындысын алабыз. Биринчи теңдеменин (квадраттык) тамырлары $x_1=\frac{1}{8}$, $x_2=1$, ал эми экинчи (сызыктуу) теңдемеден $x_3=3$ тү алабыз. Демек, $x_1=\frac{1}{8}$, $x_2=1$, $x_3=3$ бул функциянын критикалык чекиттери.

2-мисал. Теңдеменин критикалык чекиттерин тапкыла: $2|x+5|-|4x-7|=6$.

Чыгаруу. Бул теңдемеде модулдар экөө: $|x+5|$, $|4x-7|$. Алардын ичиндеги туюнтмаларды нөлгө барабарлап: $x+5=0$, $4x-7=0$ сызыктуу теңдемелеринин жыйындысын алабыз. Мындан $x=-5$, $4x=7 \Rightarrow x=-5$, $x=\frac{7}{4}$ келип чыгат. Демек, берилген теңдеменин критикалык чекиттери $x=-5$, $x=\frac{7}{4}$.

3-мисал. Барабарсыздыктын критикалык чекиттерин тапкыла: $|x^3+1|-8|x-6|+2|9x+11|>5x-91$.

Чыгаруу. Бул барабарсыздыкта үч туюнтма модулдун ичинде. Аларды нөлгө барабарласак, анда $x^3+1=0$, $x-6=0$, $9x+11=0$ теңдемелеринин жыйындысына келебиз. Биринчи теңдемеден $(x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^2-x+1\neq 0$, $x=-1$, ал эми экинчи жана үчүнчү сызыктуу теңдемелеринен $x=6$, $x=-\frac{11}{9}$ келип чыгат. Демек, $x=-\frac{11}{9}$, $x=-1$, $x=6$ берилген барабарсыздыктын критикалык чекиттери.

Эми критикалык чекиттер сан огун интервалдарга бөлөрүн жана ар бир интервалда модулдун ичиндеги туюнтмалардын белгилери турактуу болорун эске алып, б. а. интервалдар методун колдонуп мисалдар чыгаралы.

Мисалдар чыгарууда төмөнкү эреже колдонулат:

1) критикалык чекиттерди табышат;

2) сан огун ар биринде модулдун же модулдардын ичиндеги туюнтманын белгиси турактуу болгон интервалдарга бөлүшөт;

3) аныкталган ар бир интервалда модул белгиси жок теңде-

мелерди чыгарышат. Ар бир интервалда табылган чыгарылыштардын көптүктөрүнүн биригүүсү берилген теңдеменин чыгарылышы болот.

4-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $|x+3| = 2x - 1$.

Ч ы г а р у у. Жогорку эрежени колдонолу. 1) Бул теңдеменин критикалык чекити: $|x+3|=0 \Rightarrow x=-3$. 2) Демек, $x=-3$ критикалык чекит сан огун $(-\infty; -3)$ жана $[-3; \infty)$ интервалдарына бөлөт жана бул ар бир интервалда $|x+3|$ түн белгиси туруктуу. 3) Эми модулдун 2-аныктамасын пайдаланабыз: *а)* $x\in(-\infty; -3)$ же $x<-3$ болсо, анда берилген теңдемеден $-(x+3)=2x-1$ теңдемесин алабыз. Мындан $3x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$, келип чыгат. Бул табылган $x=-\frac{2}{3}$ каралган $(-\infty; -3)$ интервалына кирбейт. Демек, бул интервалда берилген теңдеменин тамыры жок. б) $x\in[-3; \infty)$ же $x \geq -3$ болсо, анда берилген теңдемеден $x+3=2x-1$ же $x=4$ тү алабыз. Бул табылган x тин мааниси $x \geq -3$ интервалында жатат. Демек, $x=4$ чыгарылыш.

Жообу: $x=4$.

5-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $|x+2|+|x+3|=x$.

Ч ы г а р у у. Жогоруда берилген эрежени негизинде: 1) $x+2=0$, $x+3=0 \Rightarrow x=-2$, $x=-3$ же $x=-3$, $x=-2$ берилген теңдеменин критикалык чекиттери. 2) Сан огун критикалык чекиттер $(-\infty; -3)$, $[-3; -2)$, $[-2; \infty)$ интервалдарына бөлүшөт жана бул ар бир интервалда теңдеменин модулдарынын ичиндеги туюнтмалардын белгилери туруктуу. 3) Аныкталган ар бир интервалда берилген теңдемени карайлы. Анда *а)* $x<-3$ болсо, анда $-(x+3)-(x+2)=x \Rightarrow -2x-5=x \Rightarrow -5=3x \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$ (каралган интервалга кирбейт). *б)* $x\in[-3, -2)$ болсо, анда $x+3-(x+2)=x \Rightarrow x=1$ (каралган интервалга кирбейт). *в)* $x\geq -2$ болсо, анда $x+3+x+2=x \Rightarrow$ $\Rightarrow x=-5$ (каралган интервалга кирбейт). Демек, берилген теңдеменин чыгарылышы жок.

Жообу: $\varnothing$.

Э с к е р т ү ү! 4-, 5-мисалдарда сол жагында терс эмес туюнтма (модуль), оң жагында белгиси аныкталбаган туюнтма турат. 4-мисалда оң жагы $2x-1\geq 0$, $x\geq\frac{1}{2}$ – бул берилген теңдеменин АО, ал эми 5-де АО: $x \geq 0$. 5-нин сол жагы ≥ 5, демек, $x\in\varnothing$ экенин алабыз.

6-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $|x|+|x-1|=1$.

Ч ы г а р у у. Теңдеменин АО: $x\in R$. Жогорку эрежени колдонобуз. *1)* $x=0$, $x-1=0 \Rightarrow x=0$, $x=1$ бул теңдеменин критикалык чекиттери. 2) Демек, критикалык чекиттер АОну $(-\infty; 0)$, $[0; 1)$,

$[1; \infty)$ интервалдарына бөлөт, ошондой эле ар бир аныкталган интервалда x менен $x-1$ дин белгилери туруктуу. 3) *а)* $x<0$ болсо, анда $-x-(x-1)=1 \Rightarrow -2x=0$, $x=0$ (каралган $x<0$ интервалына кирбейт. *б)* $x\in[0; 1)$ болсо, анда $x-(x-1)=1 \Rightarrow 1=1$. Мындан $[0; 1)$ интервалындагы ар кандай x берилген теңдеменин тамыры деген жыйынтыкка келебиз. *в)* $x \ge 1$ болсо, анда $x+x-1=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$ (каралган интервалга кирет). Демек, $x\in[0; 1)\cup\{1\}=[0; 1]$. $x\in[0; 1]$, б. а. $0 \le x \le 1$.

Жообу: $x\in[0; 1]$, б. а. $0 \le x \le 1$.

7-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $x^2+|x|-2=0$.

Ч ы г а р у у. Теңдеменин АО: $x\in R$. Жогорку эрежени колдонолу: 1) $x=0$ – критикалык чекит. 2) АОну $x=0$ эки интервалга бөлөт: $x<0$ жана $x>0$. 3) *а)* $x<0$ болсо, $x^2-x-2=0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Мындан: $x_1=-1$, $x_2=2$. *б)* $x \ge 0$ болсо, анда $x^2+x-2=0$. Мындан $x_3=-2$, $x_4=1$. Демек, берилген теңдеменин чыгарылыштарынын көптүгү $\{-1\}\cup\{1\}=\{-1; 1\}$.

Жообу: $x\in\{-1, 1\}$ (эки чыгарылыш).

Модулу бар теңдемени чыгаруунун дагы бир методуна мисал келтирели.

8-*м и с а л*. Теңдеменин тамырларын тапкыла: $|x^2-14|=|x^2-4|$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин эки жагын квадратка көтөрүп, төмөнкү тең күчтүү теңдемени алабыз: $(x^2-14)^2=(x^2-4)^2 \Rightarrow x^4-$ $-28x^2+196=x^4-8x^2+16 \Rightarrow -20x^2+180=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 3$.

Жообу: $x\in\{-3; 3\}$.

Интервалдар методун колдонууга дагы бир мисал келтирели.

9-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $|x-1|+|x-2|+|x-3|=2$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин АО: $x\in R$. Жогорку эрежени колдонолу: 1) $x-1=0$, $x-2=0$, $x-3=0 \Rightarrow x=1$, $x=2$, $x=3$ берилген теңдеменин критикалык чекиттери. 2) АОнун табылган критикалык чекиттери $(-\infty; 1)$, $[1; 2)$, $[2; 3)$, $[3; \infty)$ төрт интервалына бөлүшөт жана бул ар бир интервалда модулдун ичиндеги туюнтмалардын белгилери туруктуу сакталат. 3) *а)* $x\in(-\infty; 1)$ болсо, анда берилген теңдемеден $-(x-1)-(x-2)-(x-3)=2 \Rightarrow -3x+6=2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$ (каралган интервалга кирбейт). *б)* $x\in[1; 2)$ болсо, анда $x-1-(x-2)-(x-3)=2 \Rightarrow x-1-2x+5=2 \Rightarrow -x+2=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=2$ (каралган интервалга кирбейт). *в)* $x\in[2; 3)$ болсо, анда $x-1+x-2-(x-3)=2 \Rightarrow x=2$ – чыгарылыш. *г)* $x\in[3; \infty)$ болсо, анда $x-1+x-2+x-3=2 \Rightarrow 3x-6=2 \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{3}$ (каралган интервалга кирбейт). Демек, берилген теңдеменин бир эле чыгарылышы бар: $x=2$.

Жообу: $x=2$.

Модулду камтыган барабарсыздыктарды чыгаруу модулду камтыган теңдемелерди чыгаруу сыяктуу эле жүргүзүлөт. Бир гана айырмасы бул учурда жогорку келтирилген эрежениң 3) – пунктунда: ар бир аныкталган интервалда модулу жок барабарсыздыктар чыгарылат. Демек, интервалдар методун модулду камтыган барабарсыздыктарды чыгарууга колдонобуз. Мисалдарга кайрылалы.

10-*м и с а л*. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $|x^2-2x|<x$.

Ч ы г а р у у. Жогорку эрежени, теңдеме менен барабарсыздыктын айырмасын эске алып, колдонолу.

1) Критикалык чекиттер: $x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2$.

2) Сан огун бул критикалык чекиттер $(-\infty;\ 0)$, $[0;\ 2)$, $[2;\ \infty)$ интервалдарына бөлөт. 3) берилген барабарсыздыкты $|x||x-2|<x$ түрүндө жазып алалы жана аныкталган ар бир интервалда бул барабарсыздыкты карайлы: *а*) $x\in[-\infty;\ 0)$ болсо, анда $-x(-x+2)<x \Rightarrow x^2-2x<x \Rightarrow x^2<3x$ (x – терс болсо, бул барабарсыздык аткарылбайт). Демек, $(-\infty;\ 0)$ дө чыгарылыш жок. *б*) $x\in[0;\ 2)$ болсо, анда $x(-x+2)<x \Rightarrow -x^2+2x<x \Rightarrow x^2>x$. Бул барабарсыздык $1<x<2$ болгондо аткарылат. Мындан $(1;\ 2)$ интервалы чыгарылыш деген тыянакка келебиз. Эми *в*) $x\in[2;\ \infty)$ десек, анда $x(x-2)<x \Rightarrow x^2<3x$ (бул барабарсыздык $x\in[2;\ 3)$ болгондо аткарылат). Демек, $[2;\ 3)$ – чыгарылыш. Жыйынтыгында $(1;\ 2)\cup[2;\ 3)=(1;\ 3)$ интервалы берилген барабарсыздыктын чыгарылышы болот.

Жообу: $1<x<3$.

11-*м и с а л*. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $|x+1|+|x-4|<7$.

Ч ы г а р у у. Бул барабарсыздыктын АО: $x\in R$. Мурунку мисалдардай эле жогорку эрежени колдонолу. 1) Критикалык чекиттер: $x+1=0,\ x-4=0 \Rightarrow x=-1,\ x=4$. 2) АОнун бул чекиттер $(-\infty;\ -1)$, $[-1;\ 4)$, $[4;\ \infty)$ интервалдарына бөлүшөт. 3) Бул аныкталган ар бир интервалда берилген барабарсыздыкты карайлы: *а*) $x\in(-\infty;\ -1)$ болсо, анда $-(x+1)-(x-4)<7 \Rightarrow -2x+3<7 \Rightarrow 2x>-4 \Rightarrow x>-2$. Мындан $(-2;\ -1)$ интервалы каралган интервалдагы чыгарылыш болорун алабыз. *б*) $x\in[-1;\ 4)$ болсо, анда $x+1-(x-4)<7 \Rightarrow 5<7$ аткарылат $\Rightarrow [-1;\ 4)$ – чыгарылыш. *в*) $x\in[4;\ \infty)$ болсо, анда $x+1+x-4<7 \Rightarrow 2x<10 \Rightarrow x<5$. Демек, каралган интервалдан $[4;\ 5)$ интервалы чыгарылыш болот. *а*), *б*), *в*) дагы чыгарылыштардын биригүүсү: $(-2;\ -1)\cup[-1;\ 4)\cup[4;\ 5)=(-2;\ 5)$ интервалы берилген барабарсыздыктын чыгарылышы.

Жообу: $x\in(-2;\ 5)$.

12-*м и с а л*. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $|x-3|<1$.

Ч ы г а р у у. Бул барабарсыздыкты модулдун касиетин пайдаланып чыгарууга болот: $-1<x-3<1 \Rightarrow 3-1<x<1+3 \Rightarrow 2<x<4$ (*Жообу*).

Бул мисалга биз төмөнкү эрежени колдондук: Эгерде $b>0$ үчүн $|x-x_0|<b$ болсо, анда $-b<x-x_0<b$. Эми барабарсыздыктын үч жагына тең x_0 ду кошсок, анда $x_0-b<x<x_0+b$ болот.

Суроолор

1) Модулдун аныктамасын айтып бергиле.
2) Критикалык чекит деген эмне?
3) Модулду камтыган теңдемелер менен барабарсыздыктарды чыгаруунун кандай методдорун билесинер?

Көнүгүүлөр

95. Теңдеменин критикалык чекиттерин тапкыла:

а) $|x-7|+|5x-19|=3$; г) $|x^4-16|-|3x+17|=4$;

б) $|x^2-1|-|9-x|=1$; д) $|2x^2-18x-1|=x^3-9$;

в) $|x^3-1|+|x^2-4|=5$; е) $|x+1|+|x+7|+|2x-3|=13$.

96. Барабарсыздыктын критикалык чекиттерин тапкыла:

а) $|x^2-9x|>x^3+x$; в) $|x|+|x^4-9x|<6$;

б) $|3x+4|-|9x-8|<1$; г) $|x^2-4||x+5|>x^2-1$;

97. Теңдемени чыгаргыла:

а) $|x|+|x-4|=-15$; г) $|x|=3$;

б) $|x-1|+|x^3-1|=0$; д) $|x+40|=0$;

в) $|x+5|-|x-3|=8$; е) $|x+4|=2x$.

98. Теңдемени чыгаргыла:

а) $|x+5|=-13$; г) $|3x+1|+x=9$;

б) $|x+1|=-3x$; д) $|x-3|+2|x+1|=4$;

в) $|x+5|=|10+x|$; е) $|5-2x|+|x+3|=2-3x$.

99. Теңдемени чыгаргыла:

а) $|x+3|+|2x-1|=8$; г) $|x^2+x|+3x-5=0$;

б) $|5-x|+|x-1|=10$; д) $|1-2x|+|3x+2|+|x|=5$;

в) $|4-x|+|x-2|=2$; е) $|x|-2|x+1|+3|x+2|=4$.

100. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $|x-5|<0$; г) $|x+4|\geq 1$;

б) $|x-7|\leq 0$; д) $|2x-1|-|x-2|\geq 4$;

в) $|x|+|x-2|<-8$; е) $|3-x|<4$.

101. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $|2x-7| \le 5$;
б) $|x-2| < 2x-10$;
в) $|5-x| > \frac{1}{2}$;
г) $3|x-1| \le x+3$;
д) $|2x-1| \ge x-1$;
е) $2|x+1| > x+4$.

102. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $|x^2-5x| < 6$;
б) $|x-3|+|x+2|-x > 5$;
в) $x^2-4x-2|x-2|+1 \le 0$;
г) $\left|\frac{x+4}{x+2}\right| \le 1$;
д) $\left|\frac{x-3}{x-5}\right| \ge 1$;
е) $\frac{|x+2|-x}{x} < 2$.

Тест

103. Теңдеменин бүтүн тамырын тапкыла: $x^2+3x-|x+2|-6=0$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.

104. Теңдеменин тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла: $x^2-6x+|x-4|+8=0$.

а) 8; б) 9; в) 10; г) 12; д) 15.

105. Барабарсыздыктын эң кичине бүтүн чыгарылышын тапкыла: $|x-2|+|x+2| \le 4$.

а) -3; б) -2; в) 1; г) 2; д) 3.

106. Барабарсыздыктын бүтүн чыгарылыштарынын арифметикалык орто санын тапкыла: $\left|\frac{2}{x-13}\right| > \frac{8}{9}$.

а) 5; б) 6; в) 8; г) 10; д) 13.

§ 5. Алгебралык теңдемелердин системаларын чыгаруу методдору

Эки же андан ашык теңдемелердин түрмөгүн *теңдемелер системасы* деп аталат. Теңдемелер системасынын чыгарылышы деп ар бир теңдемени теңдештикке айландыруучу белгисиз чондуктардын маанилерин айтабыз. Биз төмөндө алгебралык теңдемелер системаларын чыгаруунун негизги методдоруна токтолобуз.

1. Гаусстун методу.

Бул методдун идеясы: системанын бир теңдемесинен изделүүчү чондуктардын бирин калгандары аркылуу туюнтуп, системанын калган теңдемелериндеги анын ордуна коюуу болуп эсептелет жана бул процесс улам улантыла берет. Эгерде теңдемеде эки белгисиз жана эки теңдеме болсо, анда бул процессти бир эле жолу жасаганда берилген система үч бурчтук түрүнө келет, жана берилген системанын чыгарылышы бар же жок экендиги көрүнүп калат.

Гаусстун методун системаны үч бурчтук түрүнө келтирүү же белгисизди ордуна койуу же белгисизди азайтуу (четтетүү) методу деп да аташат. Ал эми методдун автору – Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – атактуу немис математиги ("Математиканын падышасы" наамы бар) экенин айта кетели.

Гаусстун методу сызыктуу теңдемелер системасы үчүн жана сызыктуу жана сызыктуу эмес теңдемелерден турган системалар үчүн жакшы натыйжаны берет.

1-м и с а л. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ 4x-5y=40. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Бул системанын биринчи теңдемесинен x ти табалы: $3x=7-2y \Rightarrow x=\frac{7}{3}-\frac{2y}{3}$ жана анын экинчи теңдемесине койолу. Анда $4\left(\frac{7}{3}-\frac{2y}{3}\right)-5y=40 \Rightarrow \frac{28}{3}-\frac{8y}{3}-5y=40 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{8}{3}+5\right)y=\frac{28}{3}-40 \Rightarrow \frac{23}{3}y=\frac{28-120}{3} \Rightarrow \frac{23}{3}y=\frac{-92}{3} \Rightarrow 23y=$

$=-92 \Rightarrow y=-\frac{92}{23}=-4$. Демек, берилген система үч бурчтук түрүнө

келди: $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ \quad\; y=-4. \end{cases}$ (Бул системанын сол жагы үч бурчтукту элестетип турат). Эми $y=-4$ тү биринчи теңдемеге коюп, x ти табабыз: $3x+2(-4)=7 \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow x=5$.

Жообу: $x=5$, $y=-4$.

Үч бурчтук түрүнө келтирүү, айрыкча белгисиз чоңдуктардын саны үч же андан көп болсо, системанын чыгарылышын тез табууга болорун төмөнкү мисалдан көрөбүз.

2-м и с а л. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 3x+y+z=6, \\ 2x+y+2z=6. \end{cases} \tag{1}$$

Ч ы г а р у у. Биринчи теңдеменин эки жагын -3 кө көбөйтүп, аны системанын экинчи теңдемесине кошолу. Анда $-5y-8z=$ $=-18$ же

$$5y+8z=18. \tag{2}$$

Эми системанын биринчи теңдемесин -2 ге көбөйтүп, анын үчүнчү теңдемесине кошсок, анда $-3y-4z=-10$ же

$$3y+4z=10 \qquad (3)$$

теңдемесин алабыз. Анда (1) системасын (2), (3) тү эске алганда, экинчи жана үчүнчү теңдемелери x ти кармабаган, төмөнкү түрдө жазууга болот:

$$\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 5y+8z=18, \\ 3y+4z=10. \end{cases} \qquad (4)$$

(4) системасынын экинчи теңдемесин 3 кө, ал эми үчүнчү теңдемесин -5 ке көбөйтүп жана аларды кошсок, анда $4z=4$ теңдемесин алабыз. Натыйжада (4) системасынан төмөнкү (1) системасына эквиваленттүү системага келебиз: $\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 5y+8z=18, \\ z=1. \end{cases}$ Демек, берилген система үч бурчтук түрүнө келтирилди. Мындан $z=1$ ди экинчи теңдемеге коюп, $5y+8\cdot 1=18 \Rightarrow 5y=10 \Rightarrow y=2$ экенин табабыз. Эми $y=2, z=1$ ди биринчи теңдемеге койсок: $x+2\cdot 2+3\cdot 1=8 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=8-7=1$, $x=1$ келип чыгат.

Жообу: $x=1$, $y=2$, $z=1$.

Эми Гаусстун ордуна коюу методун иррационалдык теңдемелер системасын чыгарууга колдонуу мисалын келтирели.

3-*м и с а л.* Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} x+y=28, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Биринчи теңдемеден: $y=28-x$ ти таап, экинчи теңдемеге койолу. Анда $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{28-x}=4$. Бул иррационалдык теңдеменин эки жагын кубка көтөрөлү (теңдемени даражага көтөрүү методун колдонобуз). Анда $x+28-x+3\cdot\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{28-x}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{28-x})=$ $=64$ же $28+3\cdot\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{28-x}\cdot 4=64$ же $\sqrt[3]{x\cdot(28-x)}=3$. Дагы бир жолу кубка көтөрүп, $x^2-28x+27=0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Мындан $x_1=1$, $x_2=27$ келип чыгат. Эми $y=28-x$ экенин эстесек, анда $y_1=28-x_1=28-1=27$, $y_2=28-x_2=28-27=1$ ди табабыз.

Жообу: $x_1=1$, $y_1=27$, $x_2=27$, $y_2=1$.

2. Крамердин аныктагычтар методу. Бул методду Крамердин аныктагычтар эрежеси деп да аташат. Бул методдун атын алып жүргөн Габриэль Крамер (1704–1752) – швейцариялык ма-

тематик экенин 9-класстын «Алгебрасындагы» «Тарыхый маалыматтардан» билебиз.

Крамердин методун төмөнкү эки белгисиздүү эки теңдемелер системасын чыгаруу үчүн келтирели:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \qquad (*)$$

мында a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 – белгилүү сандар. Ал эми $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ бош мүчө вектору деп аталат.

Аныктама. Төмөнкү $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ санын (*) системасынын аныктагычы дейбиз жана аны $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ деп белгилейбиз. Бул аныктагыч экинчи тартиптеги аныктагыч деп аталат, себеби анын эки жолчосу жана эки мамычасы бар.

Демек, Δ аныктагычын табуу үчүн төмөнкү эреже колдонулат:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}. \qquad (\Delta)$$

Бул (Δ) формуласы ар кандай эле экинчи тартиптеги аныктагычты табуу үчүн колдонулат. Мисалы, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot7-(-4)\cdot5= =14+20=34$, $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha-(-\cos^2\alpha)=1$.

Эми (*) системасы үчүн төмөнкү эки аныктагычты кийирели:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1\cdot a_{22} - a_{12}\cdot b_2, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot b_2 - b_1\cdot a_{21}.$$

Бул аныктагычтар (*) системасынын Δ аныктагычынан алынат: Δ_1 де a_{11}, a_{21} (биринчи мамычанын элементтери деп аталат) сандары бош мүчө вектору (b_1; b_2) менен алмашылат, ал Δ_2 де a_{12}, a_{22} (экинчи мамычанын элементтери) бош мүчө вектору (b_1; b_2) менен алмашылат.

Крамердин аныктагычтар методу (эрежеси). Эгерде $\Delta \neq 0$ болсо, анда (*) сызыктуу системасы жалгыз чыгарылышка ээ жана ал чыгарылыш

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (**)$$

формуласы менен табылат.

Эскертүү! $\Delta=0$ болгондо Крамердин эрежеси колдонулбайт.

4-*мисал*. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$

Чыгаруу. Мында $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - 2\cdot 7 = 20 - 14 = 6 \neq 0.$ Демек, Крамердин методун же (**) формуласын колдонууга болот. Эми Δ_1, Δ_2 ни эсептейли: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 4 - 2\cdot 8 = 16 - 16 = 0,$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 5\cdot 8 - 4\cdot 7 = 40 - 28 = 12.$

Натыйжада $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{0}{6} = 0,\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{12}{6} = 2.$

Жообу: $x=0,\ y=2.$

Бул жооптун тууралыгын текшерели: $5\cdot 0 + 2\cdot 2 = 4,\ 4=4,\ 7\cdot 0 + 4\cdot 2 = 8,\ 8=8.$ Демек, биз жогорку системаны туура чыгарганбыз.

5-*мисал*. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} 3x - 11y = 8, \\ 2x + 9y = 1. \end{cases}$

Чыгаруу. Эсептейли: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3\cdot 9 - (-11)\cdot 2 = 27 + 22 = 49 \neq 0,$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -11 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8\cdot 9 - (-11)\cdot 1 = 72 + 11 = 83,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 8\cdot 2 = 3 - 16 = -13.$ Демек, $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{83}{49},\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-13}{49} = -\dfrac{13}{49}.$

Жообу: $x = \dfrac{83}{49},\ -\dfrac{13}{49}.$

Текшерүү: $3\cdot\dfrac{83}{49} - 11\cdot\left(-\dfrac{13}{49}\right) = \dfrac{249 + 143}{49} = \dfrac{392}{49} = 8,\ 8=8,$

$2\cdot\dfrac{83}{49} + \dfrac{(-13)\cdot 9}{49} = \dfrac{166 - 117}{49} = \dfrac{49}{49} = 1,\ 1=1.$ Демек, биз тапкан чыгарылыш туура.

Жогоруда келтирилген Δ аныктагычы негизги аныктагыч, ал эми Δ_1, Δ_2 аныктагычтары кошумча аныктагычтар деп аталат.

3. Алгебралык кошуу методу. Бул методдун идеясы Гаусстун методу менен байланышкан жана анын мазмунун түшүнүү үчүн мисал келтирели.

Алгебралык кошуу +, − ту билдирерин эскерте кетели.

6-*м и с а л*. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Бул система − иррационалдык теңдемелер системасы. Анын АО: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Адегенде бул системанын теңдемелерин кошолу, анда $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3+1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x=4$. Эми системанын биринчи теңдемесинен анын экинчи теңдемесин кемитсек, анда $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{x} - (-\sqrt{y}) = 3 - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\sqrt{y} = 2 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 \Rightarrow y=1$. Демек, $x=4$, $y=1$ − берилген системанын чыгарылышы.

Жообу: $x=4$, $y=1$.

7-*м и с а л*. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} \sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 11, \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 7. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Системанын АО: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Бул системанын экинчи теңдемесин 4 кө көбөйтүп, анын биринчисине кошсок, анда $\sqrt{x} + 4\sqrt{y} + 12\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = 11+28 \Rightarrow 13\sqrt{x} = 39 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=9$ келип чыгат. Эми системанын биринчи теңдемесин 3 кө көбөйтүп, келип чыккан теңдемеден системанын экинчи теңдемесин кемители. Анда $3\sqrt{x} + 12\sqrt{y} - 3\sqrt{x} - (-\sqrt{y}) = 33-7 \Rightarrow$ $\Rightarrow 13\sqrt{y} = 26 \Rightarrow \sqrt{y} = 2 \Rightarrow y=4$.

Жообу: $x=9$, $y=4$.

8-*м и с а л*. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Системанын экинчи теңдемесин 3 кө көбөйтүп, анын биринчи теңдемесине кошолу:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 20, \\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 65 + 60. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y + xy^2 = 20, \\ (x+y)^3 = 125 = 5^3. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 20, \\ x + y = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5xy = 20, \\ x + y = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Келип чыккан системаны Гаусстун ордуна коюу методу менен чыгарсак болот (чыгарып көргүлө). Анда $x_1=4$, $y_1=1$, $x_2=1$, $y_2=4$ чыгарылыштарына келебиз.

Жообу: (4; 1), (1; 4).

4. Жаңы белгисиздерди киийрүү методу.

Бул методду иррационалдык теңдемелерди чыгарууда кеңири колдонгонбуз. Системаларды чыгарууга мисалдар келтирели.

9-*м и с а л*. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} x^{-1} - y^{-1} = 2, \\ x^{-2} - y^{-2} = 16. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Системанын АО: $x \neq 0$, $y \neq 0$. Жаңы u, v белгисиздерин кийирели: $x^{-1}=u$, $y^{-1}=v$. Анда берилген системадан

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ u^2 - v^2 = 16. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 2, \\ (u+v)(u-v) = 16. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 2, \\ 2(u+v) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 2, \\ u + v = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} u - v = 2, \\ 2u = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5, \\ v = 3 \end{cases}$ келип чыгат. Эми $u=x^{-1}$, $v=y^{-1}$ экенин эске алсак, анда $x^{-1}=5$, $y^{-1}=3$ же $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{1}{3}$ чыгарылышын алабыз.

Жообу: $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$.

10-*м и с а л*. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} - \sqrt[4]{x-y} = 2, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8. \end{cases}$$

Ч ы г а р у у. Адегенде чыгаралы, анан текшерүү жүргүзөлү. Жаңы u, v белгисиздерин кийиребиз: $\sqrt[4]{x+y}=u$, $\sqrt[4]{x-y}=v$. Анда берилген системадан $\begin{cases} u - v = 2, \\ u^2 - v^2 = 8 \end{cases}$ системасына келебиз. Бул системаны 9-мисалдагыдай эле ыкма менен чыгарсак, анда $u=3$, $v=1$ ди алабыз. (Өз алдыңарча чыгарып, текшерип көргүлө!). Эми $u=\sqrt[4]{x+y}$, $v=\sqrt[4]{x-y}$ экенин эске алып, $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} = 3, \\ \sqrt[4]{x-y} = 1 \end{cases}$ системасына келебиз. Теңдемелерин төртүнчү даражага көтөрүп, $\begin{cases} x + y = 81, \\ x - y = 1 \end{cases}$ сызыктуу теңдемелер системасын алабыз. Системанын теңдемелерин кошсок, анда $\begin{cases} x + y = 81, \\ 2x = 82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 41, \\ y = 40. \end{cases}$

Текшерүү жүргүзөлү: $\sqrt[4]{41+40} - \sqrt[4]{41-40} = \sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{1} = 3 - 1 = 2$, $2=2$; $\sqrt[4]{41+40} - \sqrt[4]{41-40} = \sqrt{81} - \sqrt{1} = 9 - 1 = 8$, $8=8$. Демек, чыгарылыш туура табылган.

Жообу: (41; 40).

Эскертүү: *а*) 5-, 6-мисалдарда $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt{y}$ деп жаңы u, v белгисиздерин кийирсек, анда биз u, v га карата сызыктуу теңдемелер системаларын алабыз. Аларды Гаусстун же Крамердин методдору менен чыгарсак болот.

б) Жаңы белгисиздерди кийирүү методун бир тектүү теңдемелер системаларын жана симметриялуу теңдемелер системаларын чыгарууга колдонсок болот. Бул жөнүндө кеңири материалды 9-класстын «Алгебрасында» бергенбиз.

5. Көбөйтүү жана бөлүү методу. Бул методдун мазмуну: Эгерде АО да системанын теңдемелеринин биринин эки жагы тең нөлгө барабар болбосо, анда бул теңдемеге системанын калган теңдемелерин көбөйтүүгө жана бөлүүгө болот. Мисалдар келтирели.

11-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases}(x-y)xy=30,\\(x+y)xy=120.\end{cases}$$

Чыгаруу. Бул системанын АО: $x, y\in R$. Ошондой эле $x=0$, $y=0$ бул системаны канааттандырбайт. Демек, $x\neq 0$, $y\neq 0$ деп карасак болот. Анда системанын биринчи теңдемесин анын экинчисине бөлсөк болот:

$$\begin{cases}(x-y)xy=30,\\ \dfrac{(x-y)xy}{(x+y)xy}=\dfrac{30}{120}.\end{cases} \qquad (*)$$

Бул системанын экинчи теңдемесинен: $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow 4x-4y=$ $=x+y \Rightarrow 3x=5y \Rightarrow y=\dfrac{3x}{5}$. Табылган y ти (*) системасынын биринчи теңдемесине койсок, анда $(x-\dfrac{3x}{5})\,x\,\dfrac{3}{5}x=30 \Rightarrow \dfrac{6}{25}x^3=30 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^3=125=5^3 \Rightarrow x=5$ келип чыгат. Эми $y=\dfrac{3x}{5}$ тен $y=\dfrac{3\cdot 5}{5}=3$ тү алабыз. Демек, $x=5$, $y=3$ – чыгарылыш.

Жообу: (5; 3).

12-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}.\end{cases}$$

Чыгаруу. Системанын биринчи теңдемесине анализ жүргүзөлү. Анын сол жагы $y=0$ болгондо нөлгө айланат. Ошондой эле $y=0$, $x=0$ дө анын оң жагы нөлгө барабар, бирок анын сол жагы $x=0$ болгондо аныкталбайт. Демек, биринчи теңдеменин эки жагын тең нөлгө айландыруучу $(x; y)$ти табууга болбойт. Ошондуктан, берилген системанын биринчи теңдемесин анын экинчи теңдемесине көбөйтүүгө болот. Көбөйтүүнүн жыйынтыгын биринчи теңдеменин ордуна жазып, ал эми экинчи теңдемесин өзгөртүүсүз калтырып, төмөнкү системага келебиз:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}\sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = (\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}), \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases} \qquad (**)$$

Бул системанын биринчи теңдемесинен $8=x+y-(x-y)$ же $y=4$тү табабыз. Бул табылган yти (**) нын экинчи теңдемесине койсок, анда

$$\sqrt{\frac{4x}{5}} = \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} \qquad (***)$$

иррационалдык теңдемесине келебиз. Бул теңдеменин АО: $x \geq 0$, $x+4 \geq 0$, $x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$. Эми (***) теңдемесин даражага (квадратка) көтөрүү методу менен чыгаралы: $\left(\sqrt{\dfrac{4x}{5}}\right)^2 = (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4})^2 \Rightarrow \dfrac{4x}{5} = x+4 - 2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x-4} + x-4 \Rightarrow 3x = 5\sqrt{x^2-16}$.

Дагы квадратка көтөрөлү: $25x^2 - 400 = 9x^2 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x_1=5$, $x_2=-5$. Мындагы $x_2=-5$ (***) теңдемесинин АОсуна кирбейт, б. а. чет тамыр болот. Демек, берилген теңдеменин чыгарылышы $x=5$, $y=4$.

Жообу: (5; 4).

Эскертүү. Теңдемелер системасын график методу менен чыгарууга болот. Буга биз 9-класстын «Алгебрасында» токтолгонбуз. Демек, 9-класстын «Алгебрасын» кайталоо зарылчылыгы бар.

Суроолор

1) Теңдемелер системасы деген эмне?
2) Теңдемелер системасынын чыгарылышы деген эмне?
3) Алгебралык теңдемелер системасын чыгаруунун негизги методдорун атагыла.

Көнүгүүлөр

107. Теңдемелер системасын Гausstun жана Крамердин методдорун колдонуп чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 3x + 2y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 11x - 5y = 37, \\ 4y - x = 25; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = -5, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{7}y = 3. \end{cases}$

108. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 3x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y + z = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - z = 6, \\ 3x - y + 2z = 5, \\ 4x + 2y - 5z = 9. \end{cases}$

109. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3y^3 = -8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7, \\ \sqrt{xy} = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

110. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y^2 - x = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + x + y = 29, \\ xy - 2(x + y) = 2. \end{cases}$

Көрсөтмө: Алгебралык кошуу методун колдонсо болот.

111. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} \sqrt{2x + 3y} + \sqrt{2x - 3y} = 10, \\ \sqrt{4x^2 - 9y^2} = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3, \\ xy = 8. \end{cases}$

Көрсөтмө: *а)* $\sqrt{2x+3y} = u$, $\sqrt{2x-3y} = v$; *б)* экинчи теңдемесинин эки жагынан куб тамыр чыгарып, анан $\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = v$ деп алгыла.

112. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x(x + y) = 9, \\ y(x + y) = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{y}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{2y}{x}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$

Көрсөтмө: *а*) Бөлүү, *б*) көбөйтүү методун колдонсо болот.

Тест

113. Теңдемелер системасынын чыгарылышынын суммасын

тапкыла: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ x - 2y + 5 = 0. \end{cases}$

а) 1; *б*) 1,4; *в*) 1,5; *г*) 1,6; *д*) 2.

114. Теңдемелер системасы $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x^2 + y^2 = 40 \end{cases}$ үчүн $x_0 \cdot y_0$ ду таппкыла, мында $(x_0; y_0)$ – кандайдыр бир чыгарылыш.

а) – 1; *б*) – 4; *в*) – 6; *г*) 2; *д*) 5.

115. Теңдемелер системасы $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4 \end{cases}$ үчүн $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ ни тапкыла, мында $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ – анын чыгарылыштары.

а) 160; *б*) 164; *в*) 168; *г*) 182; *д*) 190.

§ 6. Алгебралык барабарсыздыктардын системаларын чыгаруу

Бир нече алгебралык барабарсыздыктар системасы берилсин. Белгисиз чоңдуктардын саны бирөө, экөө же андан да көп болушу мүмкүн. Биз төмөндө бир белгисиздүү алгебралык барабарсыздыктардын системаларын чыгаруу мисалдарын келтиребиз жана эки белгисиздүү барабарсыздыктар системаларынын чыгарылыштары жөнүндө түшүнүк беребиз.

Барабарсыздыктардын системасынын чыгарылыштарын табуу үчүн АОдо анын ар бир барабарсыздыгын канааттандырган белгисиз чоңдуктардын маанилеринин көптүктөрүн таап, анан ал көптүктөрдүн жалпы бөлүгүн аныктап коюш керек экенин эске түйүп коёлу. Демек, бир белгисиздүү барабарсыздыктардын системасынын чыгарылышы – бул системанын АОсунда ар бир барабарсыздыгын туура сан барабарсыздыгына айландыруучу белгисиз чоңдуктун маанилеринин көптүгү.

1- м и с а л. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x^2 \le 16, \\ x > 0. \end{cases}$$

Чыгаруу. АО: $x>0$. Биринчи барабарсыздыктан $|x| \le 4 \Rightarrow -4 \le$

$\leq x \leq 4$ келип чыгат. Анда берилген системанын чыгарылышы: $[-4;\ 4] \cap (0;\ \infty) = (0;\ 4]$.

Жообу: $x \in (0;\ 4]$.

2-мисал. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[5]{4x} > 1, \\ \dfrac{x}{4-x} > 0. \end{cases}$$

Чыгаруу. Бул системанын АОсун табалы. Биринчи барабарсыздыктын АО: $x-1 \geq 0$, $1-x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, $x \leq 1 \Rightarrow x=1$. Ал эми экинчи барабарсыздыктын АО: $4-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$. Анда берилген системанын АО: $\{1\} \cap \{x \neq 4\} = 1$, б. а. бир гана $x=1$ санынан турат. Белгисиздин бул мааниси берилген барабарсыздыктардын системасын канаатандырабы?

Ушуну текшерип көрөлү: $\sqrt{1-1} + \sqrt[4]{1-1} + \sqrt[5]{4 \cdot 1} = \sqrt[5]{4} > 1$, $\dfrac{1}{4-1} = \dfrac{1}{3} > 0$. Канааттандырарын көрдүк.

Жообу: $x=1$.

3-мисал. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} \sqrt{x} > 1, \\ \sqrt[3]{x-2} > 5. \end{cases}$$

Чыгаруу. Бул системанын АО: $x \geq 0$. Биринчи барабарсыздыктан $x>1$ (квадратка көтөрдүк) келип чыгат. Экинчи барабарсыздыкты кубка көтөрсөк, анда $x-2 < 5^3$, $x-2 < 125 \Rightarrow$ $\Rightarrow x < 125+2 = 127$.

Анда изделүүчү чыгарылыш: $(1;\ \infty) \cap (-\infty;\ 127) = (1;\ 127)$.

Жообу: $x \in (1;\ 127)$.

4-мисал. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-2)} > 0, \\ \dfrac{1}{(x-4)(x-5)} < 0. \end{cases}$$

Чыгаруу. Бул системанын АО: $x+1 \neq 0$, $x-2 \neq 0$, $x-4 \neq 0$, $x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, $x \neq 2$, $x \neq 4$, $x \neq 5$. Интервалдар методун колдонуп берилген системаны чыгаралы. Биринчи барабарсыздыктын чыгарылышы: $(-1;\ 2) \cup (3;\ \infty)$, ал эми экинчи барабарсыздыкы: $(4;\ 5)$. (Муну өзүңөрчө чыгарып, текшерип көргүлө). Анда изделүүчү чыгарылыш: $(-1;\ 2) \cup (3;\ \infty) \cap (4;\ 5) = (4;\ 5)$.

Жообу: $4 < x < 5$.

5-м и с а л. Барабарсыздыкты канааттандырган x тин эң кичине бүтүн маанисин тапкыла: $1 \le \frac{x+1}{2-x} < 3$.

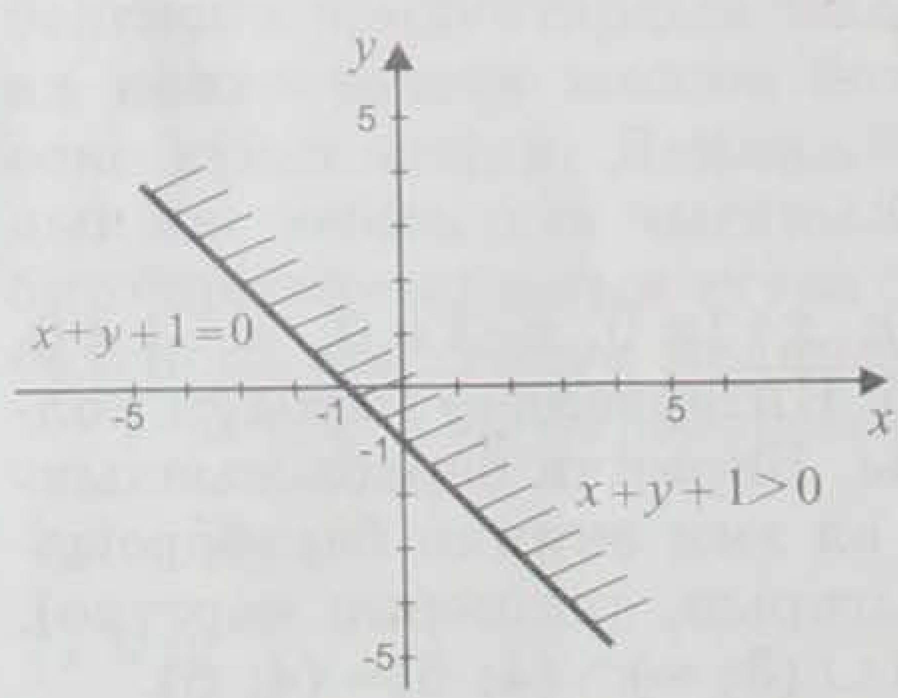
Ч ы г а р у у. Бул барабарсыздыктын АО: $x \ne 2$. Берилген барабарсыздыктан $\begin{cases} \frac{x+1}{2-x} \ge 1, \\ \frac{x+1}{2-x} < 3 \end{cases}$ рационалдык барабарсыздыктар системасы келип чыгат. Бул барабарсыздыктан:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2-x} - 1 \ge 0, \\ \frac{x+1}{2-x} - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1-(2-x)}{2-x} \ge 0, \\ \frac{x+1-3(2-x)}{2-x} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{2-x} \ge 0, \\ \frac{4x-5}{2-x} < 0. \end{cases}$$

Интервалдар методун колдонсок, анда алынган системанын биринчи барабарсыздыгынын чыгарылышы $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$, ал эми экинчи барабарсыздыгыныкы: $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right) \cup (2; \infty)$. Демек, $\left(\frac{1}{2}; 2\right) \cap \left(-\infty; \frac{5}{4}\right) \cup (2; \infty) = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$ – берилген системанын чыгарылышы болот. Мындан $x=1$ изделүүчү эң кичине бүтүн маани.

Жообу: $x=1$.

Эми эки белгисиздүү алгебралык барабарсыздыктардын системасын чыгарууга токтололу. Мындай барабарсыздыктардын системаларын чыгаруу бир белгисиздүү барабарсыздыктар системасын чыгаруудагыдай оңой эмес. Бул учурда график методу негизги метод болуп саналат. Демек, xOy тегиздигинде берилген барабарсыздыктардын графиктерин чийип, анан ал графиктердин кесилиштеринин жалпы бөлүгүн штрихтеп, x, y тердин штрихтелген облустагы көптүгү берилген системанын чыгарылышы экенин көрөбүз.



6-чийме

6-м и с а л. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x+y+1 \ge 0, \\ x^2+y^2 \le 25. \end{cases}$$

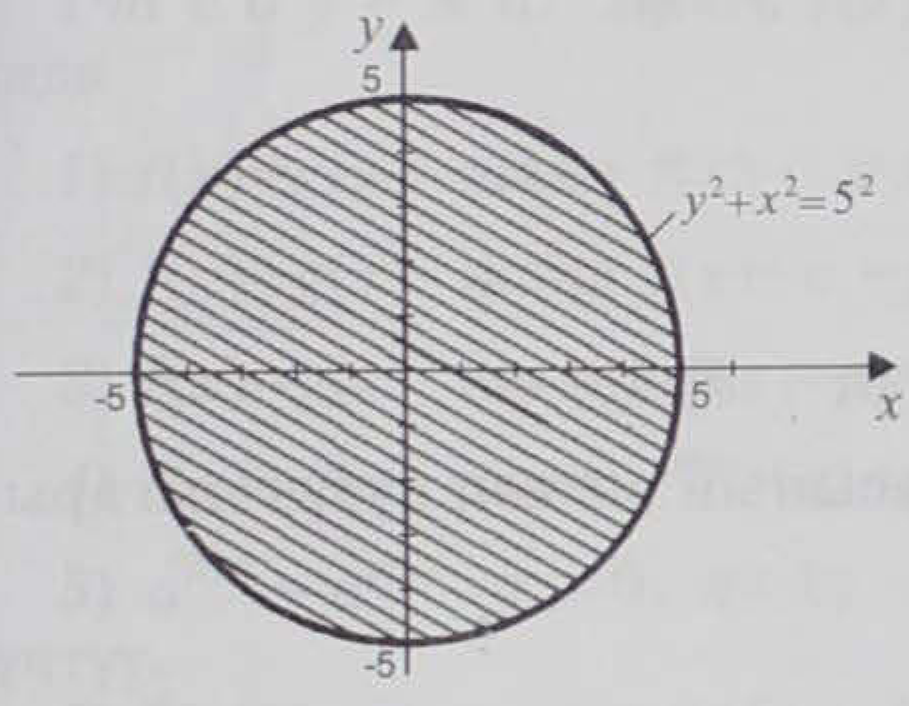
Ч ы г а р у у. Мында $x+y+1 \ge 0$ координата башталмасын $O(0;\ 0)$

камтыган $x+y+1=0$ түз сызыгы аркылуу аныкталган жарым тегиздик (6-чийме).

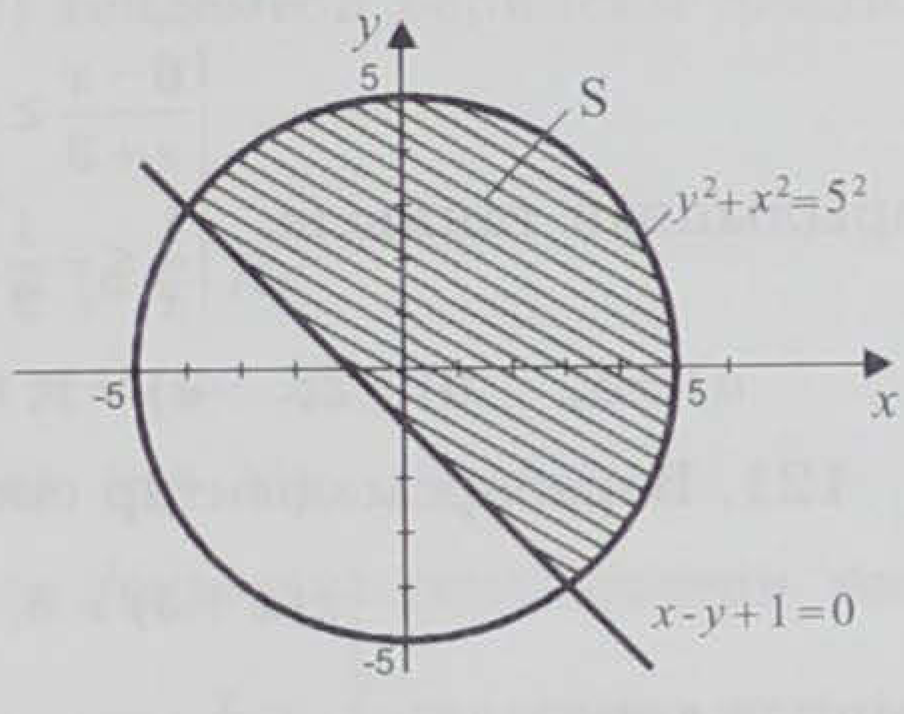
Ал эми $x^2+y^2=5^2$ айланасынын ички бөлүгү – $x^2+y^2\leq 5^2$ (тегерек, 7-чийме)): Анда чыгарылыш төмөнкү штрихтелген облус (8-чийме).

Жообу: S –штрихтелген облус.

Демек, эки белгисиздүү барабарсыздыктардын системасынын чыгарылышын табуу үчүн график методун жакшы билүү керек.



7-чийме



8-чийме

Дагы бир айтарыбыз: барабарсыздыктардын системаларын чыгаруу илим менен техниканын көптөгөн тармактарында колдонулат, мисалы экономикалык маселелерди чыгарууда.

Суроолор

1) Барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы деген эмне?

2) Барабарсыздыктардын системаларын чыгаруунун кандай методдорун билесиңер?

Көнүгүүлөр

116. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}(x-1)^2\leq 16,\\ x>2;\end{cases}$ *б)* $\begin{cases}x^2-x-6\geq 0,\\ x^2-4x<0.\end{cases}$

117. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}\sqrt{3-x}+\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[6]{x-3}>\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{x-6}{x+2}<0;\end{cases}$ *б)* $\begin{cases}\sqrt[3]{x-5}<2,\\ \sqrt{x+1}>3.\end{cases}$

118. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $0<\dfrac{3x-1}{2x+5}<1;$ *б)* $1\leq\dfrac{2-x}{x+1}\leq 2.$

119. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$

Тест

120. Барабарсыздыктар системасынын эң кичине бүтүн чыгарылышын тапкыла: $\begin{cases} \dfrac{6-x}{x+3} \geq 0, \\ \dfrac{1}{x} \leq -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

а) -3; *б)* -2; *в)* -1; *г)* 0; *д)* 1.

121. Барабарсыздыктар системасынын эң чоң бүтүн чыгарылышын тапкыла: $\begin{cases} x(x+5) > 6, \\ 1 - \dfrac{x}{3} > 0{,}1 - 0{,}25x. \end{cases}$

а) 4; *б)* 5; *в)* 8; *г)* 10; *д)* 12.

§ 7. Теңдемелер, барабарсыздыктар жана системалардын тең күчтүүлүгү. Тең күчтүү өзгөртүүлөр. Теңдеме – натыйжа. Теңдемелердин тамырларынын жоголушуна алып келүүчү өзгөртүүлөр

Теңдеме жана барабарсыздыктарды чыгарууда ар кандай өзгөртүүлөрдү жүргүзүүгө туура келери бизге белгилүү. Ал эми өзгөртүүлөр ар кандай (тең күчтүү, тең күчтүү эмес) болушу мүмкүн экенин да көрдүк. Бул параграфта жалпылоочу материал катары ушул жөнүндө кеп кылалы.

Бизге төмөнкү эки теңдеме берилсин дейли:

$$f_1(x)=g_1(x), \qquad (1)$$

$$f_2(x)=g_2(x). \qquad (2)$$

1-а н ы к т а м а. Эгерде (1) жана (2) теңдемелеринин тамырларынын көптүктөрү дал келишсе, анда алар тең күчтүү (эквиваленттүү) деп аталышат. Ошондой эле эгерде (1) жана (2) теңдемелеринин тамырлары жок болсо, анда да алар тең күчтүү болушат. Ошондой эле (1) жана (2) тең күчтүү болушса, анда (1) $\Leftrightarrow$ (2) деп белгилешет.

Мисалы, $x-1=0$ жана $x^3-1=0$ теңдемелери тең күчтүү, себеби $x=1$ алардын ар биринин тамыры; $x^2+1=0$ жана $\sqrt{x}+1=0$ теңдемелери да тең күчтүү, анткени алардын тамырлары жок.

Эскертүү. Теңдеме жана барабарсыздыктардын чыныгы тамырлары жана чыгарылыштары жөнүндө сөз болорун айта кетели.

Теңдемелерди чыгарууда аларды жөнөкөйлөтүп, ага тең күчтүү теңдемелерге келтирүүгө аракет кылуу керек.

Биз төмөндө теңдемелерди тең күчтүү теңдемелерге алып келүүчү кээ бир (негизги) өзгөртүүлөрдү теорема түрүндө келтирели.

1-теорема. Бизге $f(x)=g(x)$ теңдемеси берилсин дейли. Анда

1) $f(x)=g(x)$ жана $f(x)-g(x)=0$;

2) $f(x)=g(x)$ жана $f(x)+a=g(x)+a$ $(a \in R)$;

3) $f(x)=g(x)$ жана $af(x)=ag(x)$, $a \neq 0$, $a \in R$;

4) $f(x)=g(x)$ жана $f^{2n+1}(x)=g^{2n+1}(x)$ $(n \in N)$;

5) $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ $(a>0,\ a \neq 1)$ жана $f(x)=g(x)$ теңдемелери тең күчтүү.

6) Эгерде кандайдыр бир A көптүгүндө $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ болсо, анда бул көптүктө $f(x)=g(x)$ жана $f^n(x)=g^n(x)$ $(n \in N)$ теңдемелери тең күчтүү.

7) Эгерде $y=f(x)$ жана $y=g(x)$ функциялары кандайдыр бир A көптүгүндө оң болушса: $f(x)>0$, $g(x)>0$, анда A көптүгүндө $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ $(a>0,\ a \neq 1)$ жана $f(x)=g(x)$ теңдемелери тең күчтүү. Маселен, эгерде $b>0$ болсо, анда $a^{h(x)}=b$ жана $h(x)=\log_a b$ теңдемелери тең күчтүү.

8) Эгерде $f(x)=g(x)$ теңдемесинин АОсунда жаткан A көптүгүндө $y=\varphi(x)$ функциясы аныкталса жана $\neq 0$ болсо, анда A көптүгүндө $f(x)=g(x)$ жана $f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$ теңдемелери тең күчтүү.

1-теореманын 7) тыянагында А көптүгү $f(x)=g(x)$ теңдемесинин АОсу менен дал келип калышы мүмкүн.

1-теореманын жети пунктунун ар бирин теңдемелерди тең күчтүү өзгөртүү жүргүзүү эрежеси катары карасак болот.

1-мисал. Төмөнкү теңдемелер тең күчтүүбү?:

а) $2x-3=5-2x$ жана $\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{5-2x}{x-1}$;

б) $\dfrac{1}{2}x+6=3x-4$ жана $(\dfrac{1}{2}x+6)(x^2+7)=(3x-4)(x^2+7)$.

Чыгаруу. 1-теореманын 8) эрежесин колдонсок, анда *а)* жана *б)* учурларында тең бирдей: ооба, тең күчтүү деген жоопту алабыз. Мында *а)* учурунда $A=(-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$, ал эми *б)* учурунда $A=R$.

2-аныктама. Эгерде

$$f_1(x)<g_1(x) \qquad (3)$$

жана

$$f_2(x)<g_2(x) \qquad (4)$$

барабарсыздыктарынын чыгарылыштарынын көптүктөрү дал келишсе, анда алар тең күчтүү деп аталат. Эгерде (3), (4) барабарсыздыктарынын ар биринин чыгарылыштары жок болсо да, анда алар тең күчтүү болуп саналышат. Ошондой эле $f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f_2(x)<g_2(x)$ (1) жана (2) барабарсыздыктары тең күчтүү дегенди билдирет.

Маселен, $\frac{1}{x-1}<0$ жана $\frac{x^2+1}{x-1}<0$ барабарсыздыктары тең күчтүү, анткени эки барабарсыздыктын тең чыгарылышы $x\in(-\infty;\ 1)$.

Төмөндө барабарсыздыктарды тең күчтүү барабарсыздыктарга алып келүүчү негизги өзгөртүүлөрдү теорема түрүндө берели.

2-теорема. (Барабарсыздыктардын тең күчтүүлүгү жөнүндө). Төмөнкү барабарсыздыктар:

1) $f(x)<g(x)$ жана $g(x)>f(x)$;

2) $f(x)<g(x)$ жана $f(x)-g(x)<0$;

3) эгерде $\varphi(x)$ функциясы $f(x)<g(x)$ барабарсыздыгынын АОсунда аныкталса, анда $f(x)<g(x)$ жана $f(x)+\varphi(x)<g(x)+\varphi(x)$; маселен, $f(x)<g(x)$ жана $f(x)+a<g(x)+a$ $(a\in R)$;

4) $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ жана $f(x)g(x)>0$;

5) $\sqrt[2n+1]{f(x)}<\sqrt[2n+1]{g(x)}$ $(n\in N)$ жана $f(x)<g(x)$;

6) $f^{2n}(x)<g^{2n}(x)$ $(n\in N)$ жана $|f(x)|<|g(x)|$;

7) эгерде $a\in(1;\ \infty)$ болсо, анда $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ жана $f(x)>g(x)$;

8) эгерде $a\in(0;\ 1)$ болсо, анда $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ жана $f(x)>g(x)$;

9) эгерде А көптүгүндө $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ болсо, анда бул көптүктө $f(x)>g(x)$ жана $f^n(x)>g^n(x)$ $(n\in N)$;

10) эгерде $a\in(1;\ \infty)$ жана А көптүгүндө $f(x)>0$, $g(x)>0$ болсо, анда бул А көптүгүндө $f(x)>g(x)$ жана $\log_a f(x)>\log_a g(x)$;

11) эгерде $a\in(0;1)$ жана А көптүгүндө $f(x)>0$, $g(x)>0$ болсо, анда бул А көптүктө $f(x)>g(x)$ жана $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ тең күчтүү.

12) Эгерде $f(x)<g(x)$ барабарсыздыгынын АОсунда $\varphi(x)>0$ болсо, анда $f(x)<g(x)$ жана $\varphi(x)f(x)<\varphi(x)g(x)$ барабарсыздыктары тең күчтүү. Эгерде $f(x)<g(x)$ барабарсыздыгынын АОсунда $\varphi(x)<0$ болсо, анда $f(x)<g(x)$ жана $\varphi(x)f(x)>\varphi(x)g(x)$ барабарсыздыктары тең күчтүү.

Маселен, α – оң сан болсо, анда $f(x)<g(x)\ \Leftrightarrow\ \alpha f(x)<\alpha g(x)$; α – терс сан болсо, анда $f(x)<g(x)\ \Leftrightarrow\ \alpha f(x)>\alpha g(x)$.

2-теореманын 12 пунктунун ар бирин барабарсыздыктарды тең күчтүү өзгөртүп түзүү эрежеси катары карасак болот.

2-м и с а л. Төмөнкү барабарсыздыктар тең күчтүүбү?:

а) $x^3<-1$ жана $x<-1$;

б) $-\frac{1}{4}(1-x)<-\frac{1}{4}(4x-3)$ жана $1-x>4x-3$.

Ч ы г а р у у. Бул эки учурда тең: ооба, тең күчтүү деген жоопту алабыз. Мында *а*) учурунда 2-теореманын 5) эрежесинин негизинде (эмне үчүн экенин ойлонуп көргүлөчү!), ал эми б) учурунда 2-теореманын 12) эрежесинин негизинде.

3-а н ы к т а м а. Эгерде берилген эки теңдемелер системаларынын чыгарылыштарынын көптүктөрү дал келсе, анда мындай теңдемелер системалары тең күчтүү деп аталышат.

Теңдемелер системаларын тең күчтүү өзгөртүү 1-теорема менен тыгыз байланышкан. Муну эстеп калуу үчүн төмөнкү теореманы билүү керек.

3-т е о р е м а. Бизге эки белгисиздүү чоңдуктары бар эки теңдемеден турган система берилсин дейли. Эгерде бул системанын бир теңдемесин өзгөртпөй калтырып, ал эми экинчи теңдемесин теңдеш өзгөртсөк, анда келип чыккан теңдемелер системасы берилген теңдемелер системасына тең күчтүү болот.

Н а т ы й ж а. Эгерде берилген системанын ар бир теңдемесин теңдеш өзгөртсөк, анда алынган система берилген системага тең күчтүү болот.

Теңдеш өзгөртүүлөрдү 5-параграфта теңдемелер системасын чыгарууда кеңири пайдаланганбыз. Маселен, төмөнкү теоремага негизделген алгебралык кошуу методун.

4-т е о р е м а. Бизге эки белгисиздүү эки теңдемеден турган система берилсин дейли. Эгерде бул системанын бир теңдемесин өзгөртүүсүз калтырып, ал эми экинчи теңдемесин системанын эки теңдемесинин суммасы же айырмасы менен алмаштырсак, анда алынган система берилген системага тең күчтүү болот.

3-м и с а л. Төмөнкү теңдемелер системалары тең күчтүүбү?

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2,\\ 3\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=6\end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2,\\ 4\sqrt{x+y}=8\end{cases}$$

Ч ы г а р у у. Ооба, тең күчтүү. Биз берилген системанын биринчи теңдемесин өзгөртүүсүз калтырып, ал эми экинчи теңдемесин биринчи жана экинчи теңдемелердин суммасы менен алмаштырдык. Анда 4-теореманын негизинде алынган жана берилген системалар тең күчтүү болушат.

Э с к е р т у у. Барабарсыздыктардын системаларынын тең күчтүүлүгү 2-теоремага негизделген жана бул учурда да 3-теорема жана анын натыйжасы сыяктуу эле теорема жана анын натыйжасын келтирүүгө болот. (Бул жөнүндө өз алдыңарча ой жүгүрткүлө!).

Эми «теңдеме – натыйжа» деген түшүнүккө токтололу.

4-а н ы к т а м а. Бизге жогорудагыдай эле (1) жана (2) теңдемелери берилсин дейли. Эгерде (1) теңдемесинин ар бир тамыры (2) теңдемесинин тамыры болсо, анда (2) теңдемеси биринчи теңдеменин натыйжасы деп аталат, б. а. (2) теңдемеси (1) теңдемеси үчүн «теңдеме – натыйжа» деп аталат.

Э с к е р т ү ү. Теңдеме – натыйжага өткөндө берилген теңдеменин тамыры жоголбойт, бирок берилген теңдемеге чет тамыр пайда болушу мүмкүн.

Демек, теңдеме – натыйжаны чыгарып, анын тамырлары берилген теңдемени «канаатандырабы же жокпу» текшерип коюш керек.

Теңдеме –натыйжага алып келүүчү кээ бир өзгөртүүлөрдү теорема түрүндө берели.

5-т е о р е м а. 1) $f^{2n}(x)= g^{2n}(x)$ $(n\in N)$ теңдемеси $f(x)= g(x)$ теңдемесинин натыйжасы;

2) $f(x)= g(x)$ теңдемеси $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ теңдемесинин натыйжасы;

3) $f(x)= g(x)\varphi(x)$ теңдемеси $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x)$ теңдемесинин натыйжасы;

4) $f(x)= g(x)$ теңдемеси $f(x)+h(x) = g(x)+h(x)$ теңдемесинин натыйжасы;

5) $f(x)=0$, $g(x)=0$ теңдемелеринин жыйындысы $f(x)g(x)=0$ теңдемесинин натыйжасы.

Э с к е р т ү ү. Эгерде кандайдыр бир теңдеменин тамыры жок болсо, анда бул теңдеме үчүн каалагандай башка теңдеме «теңдеме – натыйжа» боло алат.

4-*м и с а л.* Төмөнкү теңдемелердин кайсысы башкасынын натыйжасы?:

а) $\sqrt{x}=-2$ жана $|x|=-1$; *б)* $\sqrt{x-1}=3$ жана $x^2-100=0$.

Ч ы г а р у у. а) учурунда берилген эки теңдеменин тең чыныгы тамыры жок, ошон үчүн алар бирине бири натыйжа боло алат. Демек, алар тең күчтүү; *б)* учурунда экинчи теңдеме биринчинин натыйжасы, себеби биринчи иррационалдык теңдеменин тамыры $x=10$ экинчи теңдеменин да тамыры. Ал эми экинчи теңдеменин эки тамыры бар: $x=10$, $x=-10$.

Э с к е р т ү ү. 4-аныктамасы сыяктуу эле «барабарсыздык – натыйжа» деген түшүнүктү кийирсе болот. (Бул жөнүндө өзүңөр ойлонуп көргүлөчү!). Маселен, $x<0$ барабарсыздыгынын натыйжасы $|x|>0$ барабарсыздыгы болот, себеби $|x|>0 \Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

Биз жогоруда «теңдеме – натыйжаны» берүүчү өзгөртүүлөр берилген теңдеме үчүн чет тамырларды пайда кылышы мүмкүн дедик. Эми кандай өзгөртүүлөр берилген теңдеменин тамырларынын жоголушуна алып келиши мүмкүн? деген суроо коёлу жана бул суроого жооп издейли.

Тамырлардын жоголушу негизинен кээ бир формулаларды алардын колдонуу шарттарын эсепке албай эле колдоно бергенден келип чыгат. Бул учурда берилген теңдеменин АОсу тарып кетиши мүмкүн. Кээ бир өзгөртүүлөргө токтололу.

1. Теңдеменин эки жагын белгисиз чоңдукту кармаган көбөйтүүчүгө кыскартуу. Бул учурда бул көбөйтүүчүнү нөлгө айландыруучу тамырлар жоголуп кетиши мүмкүн.

2. Жаңы (бөлөк) негиздеги логарифмага өтүү. Эгерде жаңы негиз $c>0$ жана $c \neq 1$ шартын канаатандырбаса, анда бул негизге өтүү тамырлардын жоголушуна алып келет.

3. Логарифмалоонун формулаларын колдонуу туура эмес жүргүзүлсө, тамырлар жоголуп кетиши мүмкүн.

4. Сол жагы жана оң жагы ар түрдүү аныкталуу облустарына ээ тригонометриялык формулаларды колдонуу.

Айрым мисалдарга токтололу.

5-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $(x-2)\sin x=0$.

Ч ы г а р у у. Эгерде бул теңдеменин эки жагын тең $\sin x$ ке бөлүп жиберсек, анда $x-2=0 \Rightarrow x=2$ тамырына ээ болобуз жана $x=k\pi$, $k\in Z$ тамырын жоготуп жиберген болобуз, себеби биз $x=k\pi$, $n\in Z$ де нөлгө айлануучу $\sin x$ ке берилген теңдемени бөлүп жибердик эле. Демек, $\sin x$ ке бөлүү жарабайт.

Бул теңдеменин жообу: $x=2$, $x=k\pi$, $k\in Z$.

6-*м и с а л*. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} |x|^{\lg|y|}=100, \\ xy=1000. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Даражаны жана көбөйтүндүнү логарифмалайлы, б. а. биринчи жана экинчи теңдемени 10 негизи боюнча логарифмалайлы. Анда $\begin{cases} \lg|y|\cdot\lg|x|=2, \\ \lg x+\lg y=3 \end{cases}$ же $\begin{cases} \lg y\cdot\lg x=2, \\ \lg x+\lg y=3 \Rightarrow x_1=100, y_1=10 \end{cases}$

жана $x_2=10$, $y_2=100$ тамырларына ээ болобуз. Биз бул учурда $x_3=-100$, $y_3=-10$, $x_4=-10$, $y_4=-100$ тамырларын жоготуп жибердик, анткени xy ти логарифмалаганда $x<0$, $y<0$ учурун эсепке албадык; биз $\lg(xy)=\lg|x|+\lg|y|$ формуласын колдонсок, анда бардык тамырларды туура тапкан болот элек, себеби

$\begin{cases} \lg|y|\cdot\lg|x|=2, \\ \lg|x|+\lg|y|=3 \end{cases}$ системасын чыгарат элек да.

7-*м и с а л*. Теңдемени чыгаргыла: $3\sin x-\cos x=1$.

Ч ы г а р у у. Эгерде $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$ (*)

формулаларын пайдалансак, анда берилген теңдеме $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3}$ теңдемесине келет. Мындан $x=2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+2k\pi$, $k\in Z$ чыгарылышына ээ болобуз. Эгерде ушул жооп менен эле чектелип калсак, анда биз дагы бир тамырды жоготуп жиберишибиз мүмкүн. Анткени, (*) формулаларын колдонгондо биз $\sin x$, $\cos x$ тин ($x\in R$) АОлорун тарытып жибердик, себеби (*) нын оң жагы $x=(2n+1)\pi$, $n\in Z$ болгондо нөлгө айланат. Демек, x тин бул маанилеринде берилген теңдемени текшерип коюш керек ($x=\pi$ де текшерүү жетиштүү, анткени $\sin x$, $\cos x$ тин мезгили $2n\pi$ эмеспи): $3\sin\pi - -\cos\pi = 1 \Rightarrow -(-1)=1 \Rightarrow 1=1$. Канааттандырат экен.

Жообу: $x=2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+2\pi k$, $x=\pi+2n\pi$, мында k, n – ар кандай бүтүн сандар.

Демек, теңдемелер, барабарсыздыктар жана алардын системаларын туура чыгаруу үчүн эквиваленттүү өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүүгө аракет кылуу керек же ар бир жүргүзүлгөн өзгөртүүнү, колдонулган формуланын колдонуу шарттарын көзөмөлдөп туруу керек.

Суроолор

1) Тең күчтүү теңдемелер деген эмне?
2) Тең күчтүү өзгөртүүлөрдүн мисалдарын келтиргиле.
3) Тең күчтүү барабарсыздыктар деген эмне?
4) Тең күчтүү теңдемелер системаларын кандайча түшүнөсүнөр?
5) «Теңдеме – натыйжа» деген эмне?
6) Кайсы учурда чет тамырлар пайда болот?
7) Тамырлардын жоголуп кетишине алып келүүчү өзгөртүүлөрдү атагыла.

Көнүгүүлөр

122. Теңдемелер тең күчтүүбү?

а) $f(x)=0$ жана $\sqrt{f(x)}=0$;

б) $\sqrt{f(x)}\,\sqrt{g(x)}=0$ жана $\sqrt{f(x)g(x)}=0$;

в) $f(x)=0$ жана $\sqrt[3]{f(x)}=0$;

г) $f(x)=0$ жана $f(x)\cdot 10^{f(x)}=0$.

123. Теңдемелер тең күчтүүбү?

а) $|x-3|=|1-x|$ жана $(x-3)^2=(1-x)^2$;

б) $3^{\log_3 x}=x^2$ жана $x^2=x$;

в) $\log_2 x(x+1)=1$ жана $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$;

г) $\log_{x^2}(x-4)^2=1$ жана $\log_x(x-4)=1$;

д) $\log_2 x^2=1$ жана $2\log_2 x=1$;

е) $\log_2 x^3=0$ жана $3\log_2 x=0$.

124. Эки теңдеменин кайсынысы башкасынын натыйжасы болот?

а) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{x-1}{x+3}$ жана $(x-3)(x+3)=(x+1)(x-1)$;

б) $\sqrt{x-2}\,\sqrt{2x+3}=3$ жана $\sqrt{2x^2-x-6}=3$.

125. Барабарсыздыктар тең күчтүүбү?

а) $x+\sqrt{x}>\sqrt{x}-2$ жана $x>-2$;

б) $x+\sqrt{1-x}>\sqrt{1-x}-3$ жана $x>-3$;

в) $\frac{x^2-1}{x^2-x+1}>1$ жана $x^2-1>x^2-x+1$;

г) $\sqrt{(x+2)^2(x-3)}>0$ жана $x-3>0$;

д) $\sqrt{(x+8)^2(x-2)}\geq 0$ жана $x-2\geq 0$;

е) $\sqrt{(x+2)^2}<\sqrt{x^2}$ жана $|x+2|<|x|$.

126. Теңдеменин тамыры туура табылганбы?:

а) $\sin x(2^{\ln x}-1)=0$, тамыры $x=k\pi,\ k\in Z$;

б) $(x-2)\cdot 3^{-x}=0$, тамыры $x=2$.

III бөлүмгө кошумча көнүгүүлөр

127. Теңдеменин чыгарылышы жок экенин далилдегиле:

а) $\sqrt{x^6+x^4+1}<-1$;

б) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}\geq 2$;

в) $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x-1}>0$;

г) $\sqrt[4]{2-x}+\sqrt{x-4}<1$;

д) $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-5x}>\sqrt{3}$;

е) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-3}<(x-1)^2(x-5)$.

128. Теңдеменин чыгарылышы жок экенин далилдегиле:

а) $(x-5)^{\frac{1}{8}}+119=0$; *г*) $\sqrt{2-x}=\log_5(x-2)$;

б) $\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{10x+5}=2$; *д*) $|x-2|+|x^3-27|=0$;

в) $\sqrt{5-x}+\sqrt[4]{x-5}=1$; *е*) $\sin x=\sqrt{x^2+x+2}$.

129. Барабарсыздыктын чыгарылышы жок экенин далилдегиле:

а) $\sqrt{x+3}+\sqrt[10]{x-2}<0$; *г*) $\sqrt{8-x}+9\sqrt{x-8}+1>\sqrt{x+2}$;

б) $\sqrt{x-9}+5\sqrt{9-x}>2$; *д*) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}\geq 2$;

в) $|x-3|+\sqrt{x-4}+3\sqrt{4-x}<\frac{1}{2}$; *е*) $\cos x>\sqrt{x-1}+10\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$.

130. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+1}=2x-4$;

б) $\sqrt{x+7}=4x-5$;

в) $\sqrt{10-x}+\sqrt{x-10}+\sqrt{x-1}=3$;

г) $\sqrt[5]{x-2}=3$;

д) $\sqrt[3]{9-x^2}=2$;

е) $\sqrt[10]{x-6}+9\cdot\sqrt[10]{6-x}-\sqrt{x+10}+4=0$.

131. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}=6$;

б) $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$;

г) $\sqrt{x}=\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+1}$;

д) $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}=4$;

е) $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$.

Көрсөтмө: *г*) оң жагынын, *е*) сол жагынын түйүндөшүнө көбөйткүлө; *д*) теңдеменин сол жагынын даражасы $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$.

132. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+7}\,\sqrt{3x-2}=3\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+2}$;

б) $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}+\sqrt{9x+4}=\sqrt{8x+9}$;

в) $\sqrt{x^2-5x+4}+\sqrt{x^3-1}=0$;

г) $\sqrt{\dfrac{x+4}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}=\dfrac{5}{6}$.

Көрсөтмө: а), б) даражага көтөрүү, *в)* көбөйтүүчүлөргө ажыратуу, *г)* жаңы белгисизди киийрүү методун колдонсоңор болот.

133. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$;

б) $\sqrt{9-x}-\sqrt{9+x}=2\sqrt{4{,}5}$;

в) $\sqrt{76+6x-x^2}=x+4$;

г) $\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}$;

д) $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$;

е) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$.

Көрсөтмө: а) эки жагын квадратка көтөрсөңөр болот.

134. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x\sqrt{x^2+15}-2=\sqrt{x}\,\sqrt[4]{x^2+15}$;

б) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$;

в) $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$;

г) $x+12\sqrt{x}-64=0$;

д) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$;

е) $11+2x=\sqrt{22-x}$.

Көрсөтмө: а) $\sqrt{x}\,\sqrt[4]{x^2+15}=y$ деп белгилегиле; *в)* жаңы белгисиздерди киийргиле.

135. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{2}}+\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{2}}=2x$;

б) $\sqrt{19+\sqrt{2x+10\sqrt{5x^2+21x-73}}}=5$.

Көрсөтмө: а) суперпозиция методун пайдалангыла; б) татаал радикалдарды чыгаруу методун пайдалангыла.

136. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5$;

б) $\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}$;

в) $\sqrt{10x+32+\sqrt{x^4-14x^2+5x-1}}=x+5$;

г) $x^2-\sqrt{2x^2-8x+12}=4x+6$.

137. Теңдемени чыгаргыла:

а) $|2x-3|=11$; г) $|x+2|+|x-3|=5$;

б) $\left|\frac{x-1}{x+3}\right|=1$; д) $\frac{|x-3|}{|x-2|-1}=1$;

в) $x^2+4|x-3|-7x+11=0$; е) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

138. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}8x+11y=30,\\3x-4y=-5;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-2y+3z=6,\\2x+3y-4z=20,\\3x-2y-5z=6.\end{cases}$

б) $\begin{cases}5x-8y=1,\\9x+2y=5;\end{cases}$

139. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}x+y=10,\\\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2{,}5\cdot\sqrt[6]{xy};\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^4=20,\\x^4+y^2=20;\end{cases}$

в) $\begin{cases}5\sqrt{x^2-3y-1}+\sqrt{x+6y}=19,\\3\sqrt{x^2-3y-1}=1+2\sqrt{x+6y}.\end{cases}$

Көрсөтмө: Жаңы белгисиздерди кийиргиле; *б)* $u=x^2$, $v=y^2$ деп, анан экинчи теңдемеден биринчисин мүчөлөп кемиткиле.

140. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $|x-3|<1$; г) $\sqrt{x-2}+|x-8|\le 6$;

б) $|2x-1|-|x-2|\ge 4$; д) $\frac{|x+1|+|x-2|}{x+199}<1$;

в) $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\le 2$; е) $|x^2-4|-|9-x^2|\ge 5$.

141. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $x<\sqrt{2-x}$;

б) $x+1>\sqrt{2+x}$;

в) $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}<\sqrt{9x^2+12x+4}$;

г) $x>\sqrt{x}$;

д) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$;

е) $\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}<\sqrt{x+1}$.

Көрсөтмө: в) $\Leftrightarrow |x+1|+|x-1|<|3x+2|$.

142. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2-5x-6<0, \\ x^2-3x>0; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} (x-2)\sqrt{x^2-5{,}5x+6}\geq 0, \\ (x+1)\sqrt{x^2+0{,}5x-3}\leq 0. \end{cases}$

143. Төмөнкү теңдемелер тең күчтүүбү?:

а) $x^3-3=2x$ жана $x^3-3+\dfrac{1}{x+1}=2x+\dfrac{1}{x+1}$;

б) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=2$ жана $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=2$;

в) $\lg\sin x=0$ жана $\sin x=1$.

144. Төмөнкү системалар тең күчтүүбү?

а) $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ xy=2 \end{cases}$ жана $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ \lg x+\lg y=\lg 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ xy=2 \end{cases}$ жана $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ \lg|x|+\lg|y|=\lg 2. \end{cases}$

Тест

145. Теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла:

1) $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$;

а) 1; *б)* 2; *в)* 3; *г)* 4; *д)* 5.

2) $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\dfrac{5x+2}{x+3}}=\dfrac{13}{6}$.

а) 3; *б*) 4; *в*) 5; *г*) 6; *д*) 7.

146. Теңдеменин эң кичине тамырын тапкыла:

$$\frac{3}{3+\sqrt{x}}-\frac{5}{3\sqrt{x}+x}=\frac{1}{4}.$$

а) 10; *б*) 12; *в*) 13; *г*) 14; *д*) 16.

147. Теңдеменин эң кичине бүтүн тамырын тапкыла: $|x-3|+2|x+1|=4$.

а) -2; *б*) -1; *в*) 0; *г*) 1; *д*) 2.

148. Барабарсыздыктын эң кичине оң бүтүн чыгарылышын тапкыла:
$|2x-1|+|x-3|\le 4$.

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

149. Барабарсыздыктын эң кичине натуралдык чыгарылышын тапкыла:

$$\sqrt[5]{x^5+x^2-4}>x.$$

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

ТАРЫХЫЙ МААЛЫМАТТАР

9-класстын «Алгебрасынын» (Иманалиев М., Асанов А., Жусупов К., Искандаров С., 2002-жыл) аягындагы «Тарыхый маалыматтарда» теңдемелерди, теңдемелер системасын жана алардын барабарсыздыктарын чыгаруунун тарыхына тиешелүү бир топ материалдар бар экенин эскертели жана төмөндө кээ бир тарыхый маалыматтар менен аларды толуктайлы.

Эки белгисиздүү эки теңдемелүү системадан бир белгисизди экинчиси менен туюнтуп, б. а. бир теңдемеден таап, экинчисине коюунун жалпы методун француз математиги П. Ферма (1601–1665) иштеп чыккан. Ал эми теңдемелер системасын график методу менен чыгаруу француз математиги Р. Декарттын (1596–1650) аналитикалык геометриясына (координаттар системасы методуна) негизделген.

Көп белгисиздүү сызыктуу теңдемелер системасынын теориясын биринчи болуп системалык түрдө немис математиги жана философу Г. В. Лейбниц (1646–1716) караган. Щвейцария математиги Г. Крамер (1704–1752) сызыктуу теңдемелер системасынын белгисиздери менен теңдемелеринин саны барабар, ошондой эле анын бир гана чыгарылышы бар учурунда бул системанын чыгарылыштарын табуунун аныктагычтар эрежесин (методун) 1750-жылы сунуштаган. Ал эми көп белгисиздүү сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруунун «үч бурчтук түрүнө келтирүү» методун немис математиги К. Ф. Гаусс (1777–1855) сунуштаган. Гаусстун методу идеясы боюнча П.Ферманын методуна жакын. Айырмасы эле П. Фермада системанын теңдемелери экөө, белгисиздери экөө, ошондой эле теңдемелери сызыктуу эмес болушу мүмкүн. Ал эми Гаусста белгисиздердин, теңдемелердин саны көп жана теңдемелери сызыктуу.

Кээ бир тарыхый маалыматтарга таянсак, анда байыркы Кытайда биздин эрага чейин эле Гаусстун методун элестетүүчү сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруунун жалпы эрежеси табылган жана ошондой эле бул эреже япон математиги Кова Секи (1642–1708) тарабынан 1683-жылы өркүндөтүлгөн деп айтылат.

XIX кылымдын экинчи жарымында сызыктуу теңдемелер системасынын чыгарылышы бар же жок экенинин жалпы шарты табылган (Кронекер – Капеллинин теоремасы). Бул теореманы бири биринен көз карандысыз немис математиги Леопольд Кронекер (1823–1891) жана италиялык математик Альфредо Капелли (1855–1910) далилдеген. Сызыктуу теңдемелер системасынын теориясы матрицалар (сандардын тик бурчтуу таблицасы) теориясынын өнүгүшүнө зор таасир берди. Азыркы учурда матрицалар теориясы математика, экономика жана башка илим менен техниканын ар түрдүү тармактарында кеңири колдонулуп жатат.

Сызыктуу барабарсыздыктар системасын терең изилдөө XX кылымдын экинчи жарымында башталган. Буга себепчи – сызыктуу программалоо теориясы (математиканын эң жаңы тармактарынын бири). Бул теориянын негизги идеялары XX кылымдын 30-жылдарынын аягында советтик метематик, академик Л. В. Канторович тарабынан сунушталган. Бул теориянын кийинки методдору америкалык математик Дж. Б. Данцигдин иштеринде табылган. Сызыктуу программалоонун теориясы (методдору) экономиканын, согуш иштеринин ж.б. ар түрдүү тармактарда кеңири колдонуу тапты жана колдонулууда. Математикалык методдорду ойлоп таап, негиздеп жана экономикада колдонгон иштери үчүн Л. В. Канторовичке 1965-жылы Лениндик сыйлык, ал эми Л. В. Канторовичке америкалык экономист Т. Ч. Купманс менен биргеликте 1975-жылы Нобель сыйлыгы ыйгарылган.

Эми жогорку даражадагы алгебралык теңдемелерди чыгарууда көп колдонулуучу Виет, Безунун теоремаларына жана Ньютондун биномуна байланышкан тарыхый маалыматтарга токтололу.

Виеттин теоремасы (Виеттин формулалары) – бул жогорку даражадагы

$$P_n(x)=0 \qquad (1)$$

теңдемесин, мында $P_n(x) \equiv x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$, коэффициенттери менен анын тамырларын байланыштыруучу формулалар, б. а.

$$\begin{aligned} &a_1=-(x_1+x_2+...+x_n),\\ &a_2=+(x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n),\\ &a_3=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &a_n=(-1)^n x_1x_2...x_n, \end{aligned} \qquad (2)$$

мында $x_1,x_2,...,x_n$ – (1) теңдемесинин тамырлары. Виеттин теоремасынын мазмуну ушундай. Бул теорема (формулалар) биринчи жолу француз математиги Франсуа Виет (1540–1603) тарабынан табылган. Виеттин теоремасын биз квадраттык теңдеме үчүн (n=2) 8-класстын «Алгебрасында» өткөнбүз. (1) теңдемесинин тамырларын n>4 болгондо табуу формулалары жалпы учурда жок болгондуктан анын тамырларын (1) тендемесинин бош мүчөсүнүн (a_n) көбөйтүүчүлөрүнөн издөө керектиги бизге Виеттин (2) формулаларынан, б. а. $a_n=(-1)^n x_1x_2...x_n$ формуласынан көрүнүп турат. Муну (1) тендемесин чыгаруу эрежеси катары пайдалансак болот.

Безунун теоремасынын мазмуну төмөнкүчө: $P_n(x)$ көп мүчөсүн (полиномун) $x-a$ (эки мүчөсүнө = биномуна) бөлгөндө $P_n(a)$ деген калдык алынат. Бул теореманы биринчи жолу далилдеп, жарыялаган француз математиги Этьенн Безу (1730–1783) болгон. Ошон үчүн теорема анын атын алып жүрөт. Бул теоремадан $P_n(a)$=0 болсо, анда $x=a$ саны (1) тендемесинин тамыры деген натыйжа алынат. Демек, бул учурда $P_n(x)$ көп мүчөсү $x-a$ га калдыксыз бөлүнөт жана (1) тендемесинин ордуна даражасы $n-1$ ге барабар жаңы

$$Q_{n-1}(x)=0 \qquad (3)$$

теңдемесин алууга болот, мында $Q_{n-1}(x) \equiv \dfrac{P_n(x)}{x-a}$. Ал эми $x=a$ тамырын Виеттин теоремасын (формулаларын) пайдаланып табууга болорун биз жогоруда айтып өттүк.

Ньютондун биному – бул $(a+b)^m$, б.а. $a+b$ биномунун оң бүтүн m даражасын ачуунун формуласы. Биз бул формуланын $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ учурларын кыскача көбөйтүүнүн формулаларынан 7-класстын «Алгебрасында» өткөнбүз. Ньютондун биномун ачып жазганда a^m, b^m дин коэффициенттери бирге барабар, ал эми башка a менен b нын ар түрдүү даражадагы көбөйтүндүлөрүнүн коэффициенттерин (биномдук коэффициенттерди) табуу үчүн «Паскалдын үч бурчтугун» колдонууга болору белгилүү. Француз математиги жана физиги Блез Паскаль (1623–1662) өзүнүн бул «үч бурчтугун» 1665-жылы жарыяланган «Трактат об арифметическом треугольнике» деген эмгегинде жазып чыккан. Ал эми айрым бир тарыхый маалыматтарга таянсак, анда бул үч бурчтук жөнүндө Орто Азия математиги Омар Хайям (1048–1131) билген жана Ньютондун биномун ачкан деп эсептеп жүрүшөт. Ошондой эле биномиалдык коэффициенттердин аныкталышынын закон ченемдүүлүгүн, б.а. «Паскалдын үч бурчтугун» кытай математиктери 13-кылымдын аягында эле билишкен. Ал эми Орто Азия математиги Гаясаддин аль-Каши 1427-жылкы чыгармасында Ньютондун биномун $m \in N$ учурунда жарыялаган. Ошондой эле Ньютондун биномунун оң бүтүн даража үчүн так далилдөөсүн швейцария математиги Я. Бернулли (1654–1705) бирикмелер аркылуу жүргүзгөн; Швейцариянын дагы бир математиги Л. Эйлер (1707–1783) бөлчөк даража үчүн Ньютондун биномунун формуласын далилдеген. Ал эми И. Ньютон 1676-жылы бөлчөк жана терс даражалар үчүн Ньютондун биномунун формуласын табууга мүмкүнчүлүк бар экенин айткан экен. Ньютондун биномунун формуласы алгебрада, математикалык анализде, сандар теориясында, ыктымалдуулук теориясында, математикалык статистикада ж. б. илимдин тармактарында кеңири колдонулуп жүрөт.

Айрым бир математикалык символдор менен терминдерге да токтотолу.

1) $\cap$, $\cup$ (көптүктөрдүн кесилиш, биригүү) белгилерин 1888-жылы француз математиги Дж. Пеано (1858–1932) киййирген.

2) $\subset$ (көптүктөрдүн тиешелүү, камтылуу, жатат) белгиси 1890-жылы немис математиги Э. Шредер (1841–1866) тарабынан сунушталган.

3) $\in$ (тиешелүү) белгисин Дж. Пеано 1895-жылы,

4) $\equiv$ (теңдеш барабар) белгисин 1857-жылы немис математиги Б. Риман (1826–1866) киййирген.

5) $\approx$ (болжолдуу барабар) белгисин немис математиги А. Гюнтер (1848–1923) 1882-жылы сунуштаган.

6) lim (предел) белгисин швейцариялык математик С. Люилье

1786-жылы, $\lim\limits_{n\to\infty}$ белгисин XX кылымдын башында көптөгөн математиктир колдонушкан.

7) Δx (айырма, өсүндү) белгисин 1755-жылы Л. Эйлер (1707–1783),

8) $\dfrac{d}{dx}$ (туунду) белгисин немис математиги Г. Лейбниц (1646–1716) 1675-жылы,

9) dy, $df(x)$ (дифференциал) белгисин Г. Лейбниц 1675-жылы.

10) $f'(x)$, y' (туунду) белгисин француз математиги Ж. Лагранж (1736–1813) 1770-жылы,

11) $\int ydx$ (аныкталган эмес интеграл) белгисин Г. Лейбниц 1675-жылы.

12) $\int\limits_a^b f(x)dx$ (аныкинтеграл) белгисин француз математиги Ж. Фурье (1768–1830) 1819-жылы,

13) Log (логарифм белгисин) немис математиги И. Кеплер (1571–1630) 1624-жылы,

14) log (логарифм) белгисин италиялык математик Б. Кавальери 1632-жылы,

15) ln (натуралдык логарифм) белгисин немис математиги А. Прингсхейм (1850–1941) 1893-жылы,

16) e (натуралдык логарифмдердин негизи) санын Л. Эйлер 1736-жылы,

17) arcsin (арксинус) белгисин Ж. Лагранж 1772-жылы кийирген.

18) Аныктагычты белгилөө үчүн эки вертикалдык таякчаны колдонуу англиялык математик А. Кэли (1821–1895) тарабынан 1841-жылы сунуш этилген.

19) «Функция» терминин биринчи жолу Г. Лейбниц 1694-жылы колдонгон, ал эми XVIII кылымда бул терминди швейцариялык математик И. Бернулли (1744–1807) кеңири колдонууга сунуштаган.

20) Математикалык символ катары ( ) кашаасы XVI кылымда немис математиги М. Штифель жана италиялык математик Н. Тарталья, [ ] (квадрат кашаа) италиялык математик Р. Бомбелли XVI кылымдагы эмгектеринде, ал эми { } фигуралык кашааны француялык математик Ф. Виет (1540–1603) XVI кылымдын аягында колдоно баштаган.

21) «Коэффициент» терминин Ф.Виет кийирген, бирок азыркыдай маанисинде англиялык математиктер В. Оутред (1574–1660) менен Дж. Валлис (1616–1703) XVII кылымда колдонушкан.

22) «Матрица» терминин англиялык математик Д. Сильвестр (1814–1897) 1851-жылы кийирген.

23) Геометриялык прогрессиянын биринчи «эн» мүчөсүнүн суммасын табуу эрежесин биринчи жолу француз математиги Н. Шюке (15 к.) 1484-жылы тапкан.

Акыл-эси төмөн болгон адамдардын таасиринен инсандын акыл-эси төмөндөйт, деңгээли өзүнүкүндөй болгон адамдын таасиринен акыл-эс өзгөрбөйт, ал эми акыл-эси жогору болгон инсан менен байланышуудан акыл-эси жогорулайт.

(Байыркы «Хитападеша» китебинен)

IV бөлүм

Көнүгүүлөр

Төмөндө берилген f функциянын F баштапкы функциясын тапкыла (1–3):

1. *а)* $f(x)=\frac{4}{5}x+10;$ *в)* $f(x)=-4x^5\ \frac{4}{x}-\frac{5}{x^3}+1;$

б) $f(x)=9x^2+11x+7;$

г) $f(x)=6\cos\frac{x}{3}+e^{4x}+7^{2x};$

д) $f(x)=4\sin\frac{x}{4}+\frac{4}{\cos^2 5x}-\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}+\frac{6}{1+7x^2}.$

2. *а)* $f(x)=4e^{-2x}+\frac{4}{\sin^2 4x}+\frac{1}{2x};$ *в)* $f(x)=4x^{-3x}+\frac{5}{x^4}+\frac{2}{\sqrt{x}};$

б) $f(x)=\frac{4}{3x\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{x};$ *г)* $f(x)=3\sin 7x-4\cos 7x+\mathrm{tg}x.$

3. *а)* $f(x)=\frac{3}{\sqrt{1-2x^2}}+3\cos 9x+4\sin 2x+1;$

б) $f(x)=\frac{3}{4+12x^2}+\frac{7}{e^{3x}}+\mathrm{ctg}2x;$

в) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{6-3x^2}}+4\cos\frac{x}{2}+6\sin\frac{x}{4};$

г) $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{x-2}.$

Төмөндө берилген f функцияларынын F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла (4 – 6):

4. *а)* $f(x)=\frac{4}{\sin^2 2x}+4x\sqrt{x}+\frac{1}{x};$ *б)* $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{x^3}+e^{2x};$

в) $f(x)=4\sqrt{x+10}+5\sqrt{5x+10}$; *г)* $f(x)=3\cos(4x+2)+5\sin(3x-1)$.

5. *а)* $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x+10}}+(x+2)\sqrt{x+2}$;

б) $f(x)=\dfrac{7}{3x+4}+(3x+4)^{10}$;

в) $f(x)=e^{5x+4}-9^{2x+1}+7^{-3x+4}$;

г) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+2x+2}+\dfrac{3}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

6. *а)* $f(x)=\dfrac{5}{4\cos^2(4x+1)}-\dfrac{6}{3\sin^2(2x+5)}$; *в)* $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}+\dfrac{x^3}{x+1}$;

б) $f(x)=\dfrac{5}{x^2+4x+7}-\dfrac{1}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$; *г)* $f(x)=\dfrac{3\cos 4x}{\sin 2x-\cos 2x}$.

Төмөндө берилген f функциянын F баштапкы функциясы үчүн графиги M чекити аркылуу өткөн F баштапкы функциясын тапкыла (7– 9):

7. *а)* $f(x)=4x^2-2x+1$, $M(1;\,3)$; *б)* $f(x)=4\sin 4x+\cos 2x$, $M(\frac{\pi}{4};1)$.

8. *а)* $f(x)=\dfrac{3}{x}+4$, $M(e;\,7)$; *б)* $f(x)=3e^{-x}+4e^{x}$, $M(0;\,4)$.

9. *а)* $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$, $M(1;\,2)$; *б)* $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$, $M(4;\,6)$.

Төмөнкү аныкталбаган интегралдарды тапкыла (10 – 12):

10. *а)* $\int(4x^3-6x^2+2x+1)dx$; *б)* $\int(\sqrt[4]{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}})dx$;

в) $\int\left(\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^3}\right)dx$; *д)* $\int(e^{-3x}+\sin\dfrac{1}{2}-x)dx$;

г) $\int(\cos 3x-4\sin 2x)dx$; *е)* $\int(3^{2x}-2\cos\dfrac{1}{3}x)dx$.

11. *а)* $\int(\sqrt{3x}-\dfrac{5}{x}+6\cdot 3^{-x})\,dx$; *г)* $\int\left[\dfrac{9}{\sqrt[3]{6x-2}}+\sin(3x+1)\right]dx$;

б) $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\cos(x+10)\right)dx$; *д)* $\int\left(\sqrt{\dfrac{x}{7}}+\dfrac{4}{5-2x}\right)dx$;

в) $\int\dfrac{2}{\sqrt{x+9}}\,dx$; *е)* $\int(4+2x)(3-x)dx$.

12. *а)* $\int (4x + x^2)\sqrt[4]{x}\, dx$; *г)* $\int \sin 4x \cos 4x dx$;

б) $\int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$; *д)* $\int (\sin 8x \sin x + \cos 8x \cos x)dx$.

в) $\int \frac{x^2 - 4x}{x - 2}\, dx$;

Төмөнкү аныкталган интегралдарды эсептегиле (13 – 16):

13. *а)* $\int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 4\right)dx$; *г)* $\int_0^{\pi} (4\cos 4x - 3\sin 2x)dx$;

б) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx$; *д)* $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 2)dx$;

в) $\int_{-1}^1 (x^2 - 4x + 5)dx$; *е)* $\int_0^2 e^{4x}\, dx$.

14. *а)* $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}(1 + \frac{4}{x+1})dx$; *г)* $\int_0^{\pi} (\cos^2 x - 2\sin^2 x)dx$;

б) $\int_1^2 \frac{6x + 4}{\sqrt{x}}\, dx$; *д)* $\int_0^{\pi} (\sin^4 x - \cos^4 x)dx$;

в) $\int_1^6 \frac{3}{\sqrt{x + 3}}\, dx$; *е)* $\int_0^1 (7^{3x} + 7^{-3x})\, dx$.

15. *а)* $\int_0^1 \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}\, dx$; *б)* $\int_1^1 \left(\frac{3}{1 + 4x^2} - 4\right)dx$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x + \frac{\pi}{3})dx$; *д)* $\int_0^2 (9x + 1)^4\, dx$;

г) $\int_0^1 \frac{dx}{4x + 1}$; *е)* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x + \frac{\pi}{4})dx$.

17–112

16. *а*) $\int_{1}^{2}(x-\frac{1}{x})^2\,dx$; *в*) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\cos^2 2x\,dx$;

б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x\sin 2x)\,dx$. *г*) $\int_{1}^{2}(7x-4)^5\,dx$

Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла (17– 25):

17. $y=2-x^2$ параболасы жана $y=-x$ түз сызыгы.

18. $y=x^2$ параболасы жана $y=x+2$ түз сызыгы.

19. $y=2-x^2$ параболасы жана $y=-2$ түз сызыгы.

20. $y=x^2$ жана $y=-x^2+4x$ параболалары.

21. $y=x^2-2x$ параболасы жана $y=x$ түз сызыгы.

22. $y=7-2x^2$ жана $y=x^2+4$ параболалары.

23. $x=2y^2$ параболасы, $x=0$ жана $y=3$ түз сызыгы.

24. $x=y^2$ параболасы, $x=y+2$ түз сызыгы.

25. $x=-y^2$ жана $x=2-3y^2$ параболалары.

Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигураны Ox огунун айланасында айландыруудан келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла (26 – 33).

26. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=1$, $x=4$; 2) $x=\frac{2}{y}$, $1\le y\le 4$.

27. 1) $y=x^2+1$, $y=-x+3$; 2) $y=x^2$; $y=0$, $x=2$.

28. 1) $y=\sqrt{9-x^2}$, $y=0$; 2) $y=x-x^2$, $y=0$.

29. 1) $y=\sqrt{\cos x}$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $x=0$; 2) $y=x^3$; $y=0$, $x=2$.

30. 1) $y=\sqrt{4-x}$, $x=0$, $y=0$; 2) $x=1-y^2$, $x=0$.

31. 1) $y=x$, $y=1$, $x=0$; 2) $y=2x$, $y=x$, $x=1$.

32. 1) $x=\sqrt{y}$, $y=4$, $x=0$; 2) $y=x^2+3$, $y=4$.

33. 1) $y=x^2+1$, $y=x+3$; 2) $y=4-x^2$, $y=2-x$.

34. 1) $y=x-1$, $y=1$, $x=1$; 2) $y=x$, $y=\sqrt{x}$.

35. Эгерде ар кандай $x \in [0;\ 7]$ үчүн $\int\limits_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos\pi x$ болсо, анда $f(4)$ тү тапкыла.

36. Эгерде ар кандай $x \in [0;\ 9]$ үчүн $\int\limits_0^{f(x)} t^2\,dt = x\cos\pi x$ болсо, анда $f(4)$, $f(7)$ жана $f(9)$ ду тапкыла.

37. Функциялардын кайсынысы өсүүчү жана кайсынысы кемүүчү?

а) $y = \dfrac{x^2}{2}$; *б)* $y = x^4$; *в)* $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

38. Жөнөкөйлөткүлө:

а) $64 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}}$; *б)* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$.

39. *а)* $y = e^{-x}\cos x$; *б)* $y = 5^{x+1}$; *в)* $y = e^x + 2x$ функциясынын туундусун тапкыла.

40. Эсептеп чыккыла:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$; *б)* $\log_{\sqrt{2}} 4$; *в)* $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[4]{125}$.

41. $\log_2 N = \log_2 \log_2 \log_2 5 - \log_2 \log_2 10$, $N=?$

42. $\log_3 N = \log_9 a - \log_{27} b + \log_{\frac{1}{3}} c$, $N=?$

43. Эсептегиле: а) $\dfrac{\log_3 5}{6^{1+\log_3 2}}$; *б)* $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$.

44. Кайсынысы чоң?

а) $\log_6 2$ же $\log_5 2$; *в)* $\log_3 2$ же $\dfrac{2}{3}$;

б) $\log_{\frac{1}{7}} 3$ же $\log_{\frac{1}{8}} 3$; *г)* $\log_2 7$ же $\log_3 2$?

Теңдемелерди чыгаргыла (45–63):

45. $7^x = 7^{2-x}$.

46. $2^x \cdot 3^{x+1} = 81$.

47. $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{2x} = 3 \cdot 10^4.$

48. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) = -2.$

49. $\log_x 3 = 2.$

50. $\log_x 5 = 0.$

51. $\log_{6-x} x = 2.$

52. $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0.$

53. $4^{x+1} - 3^x = 3^{x+2} - 4x.$

54. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 5^x + 5^{x+1}.$

55. $18 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 36 \cdot 4^{x+1} - 3^{2x+3}.$

56. $4^x \cdot 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x.$

57. $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x.$

58. $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2.$

59. $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81.$

60. $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$

61. $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0.$

62. $x^{\lg x} = 10000.$

63. $x^{\log_3 x - 3} = \dfrac{1}{9}.$

Барабарсыздыктарды чыгаргыла (64–71):

64. $\dfrac{2^2 + 2^{-x}}{2^2 - 2^{-x}} \le \dfrac{5}{3}.$

65. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^x} \ge \dfrac{1}{4}.$

66. $4^x + 2^x < 20.$

67. $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0.$

68. $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 x + \log_9 x \le -1.$

69. $x^{\log_2 x} > 4\log_2 x.$

70. $\log_5 x^2 + (\log_5 x)^2 \ge 1 + \log_5 7.$

71. $\log_3 x - \log_x 3 \le \dfrac{2}{3}.$

72. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} x^y = 16, \\ y + \log_2 x = 5. \end{cases}$

73. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-3} + \sqrt[3]{x+5} = 0$; в) $\sqrt{4-x} - \sqrt{x-7} = 2$;

б) $\sqrt{2x+5} + \sqrt[4]{x+2} = 0$; г) $\sqrt[4]{x+2} - \sqrt[4]{x+3} = 2$;

д) $\sin x = \sqrt{x^2+x+1}$; е) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x-6} + \sqrt[3]{x-5} = -x^2 - 4$.

Көрсөтмө: в), г) СЖнын түйүндөшүнө көбөйткүлө.

74. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x^2-5x+4} + \sqrt{x^3-1} = 0$; г) $\sqrt[3]{5+\sqrt{x^2+5}} = 2$;

б) $\sqrt{\dfrac{x+4}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}} = \dfrac{5}{6}$; д) $\sqrt[7]{125+\sqrt[3]{1+\sqrt{x-99}}} = 2$;

в) $\sqrt[5]{x^2-3x} + \sqrt[5]{3x-x^2+2} = 2$; е) $x + x^{\frac{1}{2}} = 6$.

75. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x^2 - 3x + 5\sqrt{x^2-3x+76} = 260$; г) $\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x+1} = 0$;

б) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{4x+5}$; д) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 1$;

в) $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+3} = \dfrac{7}{\sqrt{x-3}}$; е) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = \sqrt{x-3}$.

76. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$; г) $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$;

б) $\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$; д) $\sqrt[3]{x+8} + \sqrt{2x+9} = 5$;

в) $\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 4$; е) $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$.

77. Теңдемени чыгаргыла:

а) $(x-\sqrt{x^2-1})^3(x+\sqrt{x^2-1})^5 = 1$; г) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$;

б) $\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{x^2} = 1$; д) $\sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} = 5$;

в) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$; е) $\sqrt[3]{13-x} + \sqrt[3]{22+x} = 5$.

78. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{a+x} - \sqrt[3]{a+x} = 0$ (a – параметр);

б) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{2}$ (a – параметр);

в) $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=20$;

г) $(x-1)^{\frac{1}{2}}+6\,(x-1)^{\frac{1}{4}}=16$;

д) $\sqrt[8]{x^3+x^2-x}-\sqrt[8]{x^3+x^2-1}=0$;

е) $\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0$.

79. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$;

б) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$;

в) $\sqrt{10+x+6\sqrt{1+x}}+\sqrt{5-x+2\sqrt{4-x}}=7$;

г) $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$.

Көрсөтмө: б) $x>0$ болгондуктан, теңдеменин эки жагын $\sqrt[4]{x}$ ке бөлсө болот.

80. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}<2$; б) $\frac{1}{x^2-2x+3}>1+\sqrt{x^2-2x+3}$;

в) $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}<\sqrt{3}$; д) $\sqrt{4+x}+\sqrt[4]{16-x}<2$;

г) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x+5}<2{,}2$; е) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-3}<(x-1)^4\,(x-5)$.

81. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-12}\geq 0$; г) $\sqrt{x^2-7}>-1$;

б) $\sqrt[4]{1-x^6}\leq 0$; д) $\sqrt{1-x}<x$;

в) $\sqrt{1+x}<7$; е) $\sqrt{1+x}>x$.

82. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x^2+2x-3}<1$; г) $\sqrt{(x-6)(1-x)}<3+2x$;

б) $\sqrt{3x^2+2x-1}>2$; д) $\sqrt{x-10}+\sqrt{10-x}+\sqrt[5]{x}>1$;

в) $\sqrt{x^2-x-12}>x-1$; *е)* $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

83. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}\geq\sqrt{x-5}$; *г)* $\sqrt{x^2-5x+4}>x-2$;

б) $\sqrt{x^2-x-12}<x$; *д)* $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}<2$;

в) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$; *е)* $\sqrt{x^2-3x+2}>3+x$.

84. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$; *г)* $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-5}$;

б) $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$; *д)* $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}}\geq x-1$;

в) $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$; *е)* $\sqrt[3]{x+2}\leq -5$.

85. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt[4]{x-5}<3$; *г)* $3\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}\geq 2$;

б) $(x-12)\sqrt{x-3}\leq 0$; *д)* $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}\leq 6$;

в) $\sqrt{x}-9\cdot\sqrt[4]{x}+18\geq 0$; *е)* $2x-5\sqrt{x}+2\leq 0$.

86. Тендемени чыгаргыла:

а) $|2x-5|=9$; *г)* $|2x+5|=|x|+2$;

б) $|x-2|+|2x-7|=3$; *д)* $\dfrac{2x^2-6}{|x|-1}=|x|+3$;

в) $2|x|-|x+1|=2$; *е)* $|x|-|x-1|=1$.

87. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $|x|(x^2-2x-3)\geq 0$; *г)* $\dfrac{x^2+|x|-2}{x^2+|x|-6}>0$;

б) $|x-1|+|2-x|>3$; *д)* $\dfrac{1}{|x|}(x^4-6x^2-16)\leq 0$;

в) $|x|+|2x+1|-x>1$; *е*) $x^2+6|x|-7\geq 0$.

88. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 3x-5y=7, \\ 4x+y=1; \end{cases}$ *в*) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=5, \\ x^2+y^2=13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+4y=18, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$ *г*) $\begin{cases} x^3-y^3=7, \\ x-y=1. \end{cases}$

89. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|; \end{cases}$ *в*) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+13x_3=0, \\ 3x_1+14x_2+12x_3=18, \\ 5x_1+25x_2+16x_3=39. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6, \\ \sqrt{x+y}-y+x=2. \end{cases}$

Көрсөтмө: *а*), *б*) жаңы белгисиздерди киийрүү методун колдонсо болот.

90. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 2x^2-10x+5<0, \\ x^2+3x-2<0; \end{cases}$ *в*) $\begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x^3+8}\leq 0, \\ x^3-1>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x|\geq 1, \\ |x-1|<3; \end{cases}$ *г*) $\begin{cases} \sqrt{24-10x+x^2}>x-4, \\ \sqrt{2x+3}\leq x. \end{cases}$

Тест

91. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}=4+\sqrt{34}.$$

а) -2; *б*) -1; *в*) 0; *г*) 1; *д*) 2.

92. Теңдеменин тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла:

$$(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}=0.$$

а) -12; *б*) -9; *в*) -8; *г*) -4; *д*) -2.

93. Теңдеменин тамырларын тапкыла:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1.$$

а) 2; *б)* 3; *в)* 4; *г)* {2; 5}; *д)* [2; 5].

94. Теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла:

$$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7.$$

а) −1; *б)* 0; *в)* 2; *г)* 4; *д)* 5.

95. Теңдеменин тамырларын тапкыла:

$$\sqrt{x+9}+\frac{1}{\sqrt{x+9}}=\frac{3}{2}.$$

а) −3; *б)* 2; *в)* ∅; *г)* 10; *д)* 12.

96. Теңдеменин эң кичине тамырын тапкыла:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{10+2x}}=-\sqrt[3]{\sqrt{15-2x}-9}.$$

а) $\frac{1}{3}$; *б)* $\frac{1}{2}$; *в)* 0 ; *г)* 2; *д)* 3.

97. Теңдеменин тамырын тапкыла:

$$\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}=\sqrt{2}.$$

а) 1; *б)* $\sqrt{2}$; *в)* $2\sqrt{2}$; *г)* $2\sqrt{3}$; *д)* $3\sqrt{3}$.

98. Теңдеменин тамырын тапкыла:

$$\sqrt{x(x-2)(x+3)}=3-x.$$

а) $\sqrt{2}$; *б)* $\sqrt[3]{9}$; *в)* $\sqrt[3]{10}$; *г)* 4; *д)* 5.

99. Барабарсыздыктын эң чоң бүтүн чыгарылышын тапкыла: $\sqrt{24-5x}>-x$.

а) −3; *б)* −2; *в)* 0; *г)* 3; *д)* 4.

100. Барабарсыздыкты канааттандырган эң кичине оң x санын тапкыла: $\sqrt{3x-6}<3$.

а) 1; *б)* $\frac{3}{2}$; *в)* $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; *г)* 2; *д)* $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

101. Барабарсыздыкты канааттандырган интервалдын тең ортосун тапкыла: $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}>\sqrt{2}$.

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

102. Барабарсыздыктын эң чоң бүтүн чыгарылышын тапкыла:

$$x^2+25\geq 8\sqrt{5-x}+10x.$$

а) −1; *б*) 0; *в*) 2; *г*) 4; *д*) 5.

103. Барабарсыздыктын эң кичине оң бүтүн чыгарылышын тапкыла: $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}\leq 2.$

а) 2; *б*) 4; *в*) 5; *г*) 8; *д*) 10.

104. Теңдеме үч тамырга ээ боло турган m параметринин маанисин тапкыла: $|x^2-6x|=m$.

а) 1; *б*) 3; *в*) 9; *г*) 10; *д*) 11.

Көрсөтмө: График методун пайдаланса да болот; параболасы менен түз сызыгынын кесилиш чекиттеринин абсциссаларынын саны үчөө боло турган аныктоо талап кылынат.

105. Барабарсыздыктын эң кичине бүтүн оң чыгарылышын тапкыла: $|2x-1|+|x-3|\leq 4$.

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

106. Теңдемелер системасын чыгаргыла жана $x+y$ ти тапкыла, $(x;\ y)$ – чыгарылыш: $\begin{cases}2x+3y=165,\\5x+2y=330.\end{cases}$

а) 60; *б*) 70; *в*) 75; *г*) 80; *д*) 85.

107. Теңдемелердин системасын чыгарып, $x+y+z$ жана xyz ти тапкыла, мында $(x;\ y;\ z)$ – чыгарылыш: $\begin{cases}4x+5y-2z=1,\\2x+7y-3z=-2,\\3x+y+2z=0.\end{cases}$

а) 1 *жана* 1; *б*) −1 *жана* 1; *в*) 1 *жана* −1;
г) −1 *жана* −1; *д*) 1 *жана* 2.

108. Теңдемелер системасынын бүтүн чыгарылышын тапкыла:

$$\begin{cases}x^2+6x+5<0,\\x^2+4x+3>0.\end{cases}$$

а) −4; *б*) −3; *в*) −2; *г*) −1; *д*) 0.

Математикалык моделдештирүүнүн табият таанууда, техникада жана коомдук илимдерде колдонулушуна мисалдар

Техниканын, табият таануунун жана коомдук илимдердин маселелерин изилдөөдөгү азыркы учурдагы эң негизги методдордун бири бул математикалык моделдештирүү методу болуп саналат. Төмөндө математикалык моделдештирүүнү илимдин ар түрдүү тармактарындагы колдонулуштарына мисалдар келтирилген:

1-м и с а л. **Механикалык кыймылдын теңдемеси.**

Массасы m ге барабар болгон материалдык чекиттин F күчүнүн таасири менен Ox огу боюнча кыймылын карайлы. Мында t убакыт, $v(t)$ менен $a(t)$ – убакыттын t моментиндеги чекиттин ылдамдыгы менен ылдамдануусу болсун дейли. Ньютондун экинчи закону боюнча $ma=F$ болот. Бирок, $a=\frac{d^2x}{dt}=x''$ экендигин эске алсак, анда *механиканын кыймылынын теңдемеси* деп аталган төмөнкү $m\,x''=F$ теңдемесин б. а. математикалык моделин алабыз. Мында $x=x(t)$ белгисиз функциясы убакыттын t моментиндеги материалдык чекиттин абалын билдирет. Мында төмөнкү учурлар болушу мүмкүн.

1. Күч турактуу б. а. $F=const$. Бул учурда кыймылдын теңдемеси $x''=\frac{F}{m}=a$ болот. Мында a – турактуу сан.

2. Күч убакытка карата мезгилдүү функция б. а. $F=F_0\sin\omega t$, F_0 – турактуу. Бул учурда кыймылдын теңдемеси $x''=\frac{F_0}{m}\sin\omega t$ болот.

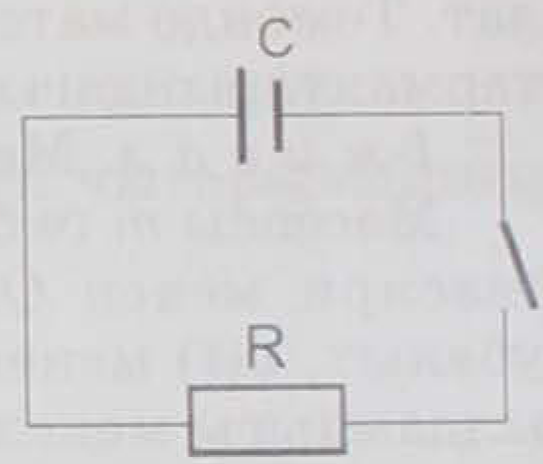
3. Идеалдуу серпилгичтүү пружина үчүн $F=-kx$, мында $0<k$ – серпилгичтүүлүк коэффициенти, „–“ белгиси күчтүн багыты жылышуунун багытына карама каршы багытталгандыгын билдирет. Бул учурда кыймылдын теңдемеси $x''=-\frac{k}{m}x$ болот.

4. Чекиттин эркин радиалдык космостук учуусунда $F=-\frac{km}{x^2}$ болот. Бул учурда $x''=-\frac{k}{x^2}$.

2- м и с а л. ***Радиоактивдүү ажыралыш.*** Эгерде $m(t)$ аркылуу убакыттын t моментиндеги радиоактивдүү заттын массасын белгилесек, анда радиоактивдүү ажыралуу төмөндөгүдөй физикалык законго баш иет: Ажыралыштын ылдамдыгы терс (себеби убакыт өткөн сайын масса азаят) жана ал ылдамдык убакыттын t моментиндеги заттын массасына пропорциялаш. Мында, пропорциялаш коэффициенти k белгилүү жана $k<0$. Бул законду математикалык тил менен жазсак, анда $\frac{dm(t)}{dt}=km(t)$,

$k<0$ теңдемесин б. а. математикалык моделин алабыз. Бул теңдеменин $m(t_0)=m_0$ шартын канааттандырган чыгарылышы $m(t)= m_0\, e^{k(t-t_0)}$ болот. Мында t_0 менен m_0 – белгилүү.

3-м и с а л. ***Электр чынжыры.*** Каршылык жана конденсатор удаалаш туташтырылган (сүрөтү төмөндө берилген) электр чынжырын карайлы. Электр чынжырында кыска туюктануу болуп өтүп, баштапкы зарядга ээ болгон конденсатор разряддала баштайт деп эсептейбиз.



Убакыттын t моментиндеги конденсатордун чыңалуусу $U(t)$ менен белгилейли. Бул учурда $q(t)$ заряды $U(t)$ чыңалуу менен $q=CU$ формуласы менен байланышкан. Мында С – конденсатордун сыйымдуулугу.

Каршылык аркылуу $I=\frac{-U}{R}$ тогу өтөт, мында « – » белгиси токтун багыты менен байланышкан, R – каршылыктын чоңдугу (Омдун закону). Бул учурда $I=\frac{dq}{dt}$ болгондугун эске алсак, анда $C\cdot\frac{dU}{dt}=-\frac{U}{R}$ же $\frac{dU}{dt}=-\frac{1}{RC}U$ теңдемесин б. а. электр чынжырынын математикалык моделин алабыз.

4-м и с а л. ***Калктын өсүүсү.*** Статистикалык маалымат боюнча, каралып жаткан региондо убакыттын бирдигиндеги жаңы туулгандардын саны менен өлгөндөрдүн саны калктын жалпы санына пропорциялаш болот. Ал пропорция коэффициенттерин k_1 жана k_2 менен белгилейли. Убакытка карата калктын өзгөрүү законун табуу керек болсун. Ал үчүн убакыттын t моментиндеги региондогу калктын санын $y(t)$ менен белгилейли. Анда Δt убакыт аралыгындагы калктын өсүүсү Δy, ал убакыт аралыгындагы жаңы туулгандардын саны менен өлгөндөрдүн санынын айырмасына барабар б. а. $\Delta y= =k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t$ болот. Мындан $\frac{\Delta y}{\Delta t}=(k_1 - k_2)y$. Акыркы формуладан $\Delta t\to 0$ пределине өтүп $y'=(k_1- k_2)y$ теңдемесин алабыз. Бул теңдеменин $y(t_0)=y_0$ шартын канааттандырган чыгарылышы $y(t) = y_0 e^{(k_1-k_2)\cdot(t-t_0)}$ болот. Мында t_0 менен y_0 белгилүү. Акыркы формула аркылуу калктын санынын өзгөрүү закону аныкталат.

ЖООПТОР

I бөлүм

8. *г)* $x+2\text{tg}x+C$; **9.** *а)* $-\frac{1}{3}x^{-3}+C$; *г)* $2\sqrt{x}-\text{ctg}x+C$. **10.** *в)* $\frac{-2}{3\sqrt{x^3}}+2\text{arctg}x+C$; **11.** *в)* $7x+C$; *г)* $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$. **12.** *в)* $-7\cos\frac{s}{7}+C$; *г)* $\frac{1}{9}\sin 9y+C$. **13.** *б)* $3\text{arctg}v-\frac{v^2}{2}+C$; *г)* $2\sqrt{\theta}-\cos\theta+C$. **14.** *а)* $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{17}{3}$; *г)* $F(x)=\sin x+4$. **15.** *б)* $4x-\frac{x^4}{4}+3$; *г)* $-\frac{3}{x}+10$. **16.** *г)* $x(t)==t+1-\pi-\sin t$, $v(t)=1-\cos t$. **17.** *а)* $F(x)=3x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{x}+C$; *б)* $F(x)=x^2-\frac{1}{x^3}-7\cos x+C$; *в)* $\frac{1}{85}(5t-4)^{17}+C$; *г)* $3\text{ ctg}(\frac{\pi}{3}-s)+C$; *д)* $-\frac{3}{5}\frac{1}{y^5}-\text{tg}(4y-3)+C$; *е)* $\frac{7}{10}\arcsin(10x-3)+C$. **18.** *а)* $\frac{3}{4}x^4-2x^2+9\ln(x)+C$; *б)* $\frac{9}{5}x^5-2x^{-2}+C$; *в)* $\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+5x+C$; *г)* $3\text{ tg}x+4\arcsin x+C$; *д)* $\frac{6}{5}x^2\sqrt{x}+C$; *е)* $\frac{25}{4}\sqrt[5]{x^4}+C$. **19.** *а)* $-\frac{1}{4}\cos(4x+5)+C$; *б)* $\frac{1}{26}(2x-4)^{13}+C$; *в)* $\frac{1}{3}\sin x(3t-1)+C$; *г)* $2\text{ tg}x(2x+1)+C$. **20.** *а)* $5x+\frac{1}{4}\cos4x-6\sin(\frac{\pi}{4}-x)+C$; *б)* $\frac{2}{3}\text{tg}3x-2\sqrt{3-x}-x^4+C$; *в)* $-\frac{4}{5}\text{ctg}(5x-1)-7\sin(6-x)+4{,}5x^2+C$. **21.** *а)* $F(x)==3{,}5x^2+9x+1$; *б)* $F(x)=\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{6}$; *в)* $F(x)=\frac{x^2}{2}+4x-6$. **22.** *а)* $x(t)=\frac{t^3}{3}++\frac{3}{2}t^2-2t+7$; *б)* $x(t)=8\sin\frac{t}{2}+5$; *в)* $x(t)=4-3\cos t$. **23.** *а)* $x(t)=\frac{1}{2}t^4+t^2+t+1{,}5$; *б)* $x(t)=\frac{4}{3}t^3+4{,}5t^2+3t+6$. **24.** *а)* $F_1-F_2=-4$; *б)* $F_1-F_2=2$; *в)* $F_1-F_2=-3$; *г)* $F_1--F_2=-1$. **25.** *а)* $x(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t-\frac{35}{6}$; *б)* $x(t)=-3\sin t-t+\pi+3$; *в)* $x(t)=-4\cos t+6$; *г)* $x(t)=\frac{t^3}{3}+t^2+t-\frac{5}{3}$. **35.** *а)* $\frac{1}{6}$; *б)* 1; *в)* 1; *г)* $\frac{15}{4}$. **36.** *а)* 3; *б)* 21; *в)* $\frac{21}{2}$; *г)* $-\frac{1}{4}$. **37.** *а)* -6; *б)* $\frac{4}{3}$; *в)* $-\frac{2}{3}$; *г)* 1. **38.** *а)* $-\frac{38}{3}$; *б)* $\frac{5}{14}$; *в)* $\frac{31}{480}$; *г)* $\frac{14}{3}$. **39.** *а)* $\frac{3}{5}$;

б) $2\sqrt{2}$; в) $\frac{45}{32}$; г) $\frac{783}{7}+\frac{5}{6}(\sqrt{2}-1)$. **40.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{\pi+2}{2}$. **41.** а) 1; б) $2-\frac{\pi^2}{2}$; в) $1-\frac{\pi}{4}$. **42.** а) 1; б) ln 4; в) 0; г) $-\frac{1}{4}$. **43.** а) 4; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{2}{3}$; г) 4. **44.** а) $\frac{45}{4}$; б) $\frac{2}{3}$; в) 2; г) 6. **45.** а) 2; б) $\frac{1}{15}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{13}{3}$. **47.** а) $y'=\frac{5}{4}x^4+6x$; б) $y'=\cos x-\cos 2x$. **48.** а) $F'(x)=\dfrac{\frac{x^2}{2}+x+1}{(x+1)^2}$; б) $F'(x)=0$. **49.** а) $F'(t)=$ $=\dfrac{6\sqrt{8+t}-t-16}{t^2\sqrt{8+t}}$; б) $F'(t)=(3t+2)e^{3t}$. **50.** S=10. **51.** $s=\frac{17}{4}$ *кв.бир.* **52.** $S=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$. **53.** $S=\frac{8}{3}$. **54.** $S=6$. **55.** $S=\frac{4}{3}$. **56.** $S=\frac{10}{3}$. **57.** $S=\frac{32}{3}$. **58.** $S=1$; **59.** $S=\ln 3$. **62.** $S=\frac{9}{2}$. **63.** $S=\frac{9}{2}$. **64.** $S=\frac{1}{3}$. **65.** $S=\frac{5}{3}-\frac{1}{\ln 2}$. **66.** $S=\frac{1}{12}$. **69.** 400 *га*. **70.** 1000 т. **71.** $\frac{28}{15}\pi$. **72.** $\frac{3}{2}\pi$. **73.** $\frac{2}{15}\pi$. **74.** $\frac{50}{3}\pi$. **75.** 11π. **76.** $\frac{\pi}{2}$. **77.** $\frac{16\pi}{15}$. **78.** $\frac{\pi}{6}$. **79.** $\frac{\pi^2}{2}$. **81.** 0,324 Дж. **82.** 40 см. **85.** *б*). **86.** *а*). **87.** *д*). **88.** *в*). **89.** *а*). **90.** *б*). **91.** *г*). **92.** *г*). **93.** *б*). **94.** *а*). **95.** *а*). **96.** *г*). **97.** *в*). **98.** *б*). **99.** *г*). **100.** *г*). **101.** *в*). **102.** *б*). **103.** *д*). **104.** *г*). **105.** *а*). **106.** *б*). **107.** *в*). **108.** б) $3\ln x-\frac{4}{x}+C$. **109.** б) $-7\cos x+3\sin x+C$. **110.** б) $8\sqrt{x}+3\ln x-e^{4x}+C$. **111.** е) $\frac{1}{6}e^{6x-7}+C$. **112.** в) $\frac{1}{3}\ln x+C$. **113.** б) $\frac{2}{3\sqrt{3}}x\sqrt{x}+\frac{2}{3}\cos(3x-1)+C$. **114.** б) $\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+C$. **115.** в) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$. **118.** е) 0. **119.** б) 7,5. **120.** б) 6; г) 7; е) $2(e^6-e^3)$. **121.** б) $-\frac{17}{12}$. **123.** б) $\frac{3}{2}\ln 3$. **124.** б) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{3\pi}{8}$; е) $6\ln 2-\frac{7}{2}$. **125.** 1) $x\in(-\infty;1]\cup[3;\infty)$; б) $x\in(0;2)$. **126.** б) $1\frac{1}{3}$. **127.** а) $6\frac{1}{6}$; в) 4. **128.** б) $\frac{11}{12}$; в) $\frac{1}{6}$. **129.** б) $\frac{1}{6}$. **130.** г) 512π *куб. бир.*

Тест

I вариант

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
б)	*а)*	*в)*	*г)*	*в)*	*а)*	*д)*	*а)*	*д)*	*б)*	*а)*	*в)*	*д)*	*в)*	*а)*	*г)*

II вариант

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
в)	*б)*	*г)*	*в)*	*а)*	*г)*	*в)*	*в)*	*д)*	*в)*	*в)*	*д)*	*а)*	*д)*	*д)*	*б)*

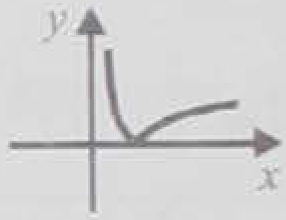
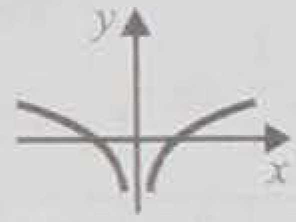
III вариант

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
г)	*в)*	*а)*	*а)*	*б)*	*в)*	*г)*	*б)*	*г)*	*а)*	*а)*	*а)*	*б)*	*а)*	*г)*	*в)*

II бөлүм

§ 2. 14. *в)* $x=\dfrac{5\pm\sqrt{65}}{2}$; *д)* $x=\dfrac{17}{13}$; *е)* $x=2$; *ё)* $x=1$; *к)* $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$; *л)* $x=35$. **15.** *а)* $x=1$; *в)* $x=1$; *г)* $x=4$; *д)* $x=1$; *ё)* $x=1$. **16.** *б)* $x=2$; *в)* $x=1$; *д)* $x=4$; *е)* $x=0$; 1. *ё)* $x=0$; *ж)* $x=6$. **18.** *б)* $x<2$; *в)* $x>-1$; *д)* $x<2$; *е)* $x<2$; *ё)* $x>0$; *ж)* $x<2$; *з)* $x<-2$; *и)* $x<-2$; *к)* $x>\dfrac{1}{5}$; *л)* $x>\dfrac{4}{3}$. **19.** *д)* $x>1$; *е)* $x<0$; *ё)* $x<2$; *к)* $-1<x<\infty$.

§ 3. 21. *а)* 2; *б)* 1; *в)* 3; *г)* 5; *д)* 6; *е)* −2; *з)* 1; *и)* 2; *к)* 0; *л)* −3. **22.** *б)* 4; *в)* −1; *г)* 0. **23.** *б)* 3; *в)* −3; *д)* −3. **24.** *б)* 16; *г)* 32; *д)* 6; *е)* 64; *ж)* 144; *и)* 1. **25.** *б)* $x=625$; *г)* $x=25$; *е)* $x=5{,}5$. **26.** *б)* $x>12$; *г)* $x>0{,}5$; *е)* $x<-3$; $x>2$; *ж)* $-\dfrac{5}{3}<x<4$. **27.** *а)* $x=\log_{1,2}4$; *г)* $x=\dfrac{1}{2}(1-\log_7 2)$; *е)* $x=\log_3 4$. **§ 4. 28.** *г)* −3; *д)* 2; *е)* 3; *ё)* 2; *и)* 4; *л)* 3; *о)* −3; *р)* $1\dfrac{1}{3}$; *с)* 0. **29.** *б)* $\dfrac{2}{3}$; *г)* $-1\dfrac{1}{6}$; *д)* $3\dfrac{1}{3}$. **31.** *а)* 12; *в)* 3; *е)* $x=\dfrac{a^2}{b^3}$; *ё)* 4; *ж)* 8; *з)* 512; *и)* $\dfrac{1}{625}$. **§ 5. 32.** *б)* 0,845; *г)* −0,176; *е)* 0,693; *ж)* − 0,154. **33.** *б)* 1,29; *г)* − 0,42. **34.** *а)* 0,699; *г)* − 0,5229. **35.** *б)* (1,3); *г)* −15, 42. **36.** *а)* $\dfrac{4}{3}$; *в)* $-\dfrac{1}{6}$; *г)* $\dfrac{5}{4}$. **37.** *а)* $\dfrac{1}{3}$; *б)* 4; *в)* 3; *г)* 4; *д)* 1; *е)* −3. **38.** *а)* $\dfrac{18}{2a+3}$; *б)* $-(a+b)$. **39.** *б)* $x=8$; *г)* $x=3$; *е)* $x=2$. **§ 6. 40.** *а)* $x>-1$; *б)* Бардык сан көптүгү. *в)* $x<0$; *г)* $x\neq 0$; *д)* $2<x<3$; *е)* Бардык сан көптүгү; *ё)* $x>-1$; *ж)* $-6<x<6$. **42.** *в)* $\log_{\frac{1}{3}}9>\log_{\frac{1}{3}}7$; *г)* $\log_2\dfrac{\sqrt{5}}{2}>\log_2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *д)* $\log_6 5>\log_8 5$; *е)* $\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{4}}3$. **43.** *б)* $\log_3 0{,}45<$

<0; г) $\log_{0,5} 9,6<0$. **44.** д)  е) . § 7. **46.** а) $t=\frac{S-S_0}{V}+t_0$;

б) $t=\sqrt{\frac{s^3}{a^3}}+t_0$; в) $t=t_0\ln\frac{s_0}{s}$; г) $t=t_0e^{\frac{s}{s_0}}-1$. **47.** а) $y=\frac{x+1}{5}$; б) $y=\sqrt{1-x^2}$;

в) $y=1-x^2$; г) $y=\ln^2 x$; д) $y=\frac{4-x}{5}$; ё) $y=\frac{2x+1}{3}$; з) $y=\sqrt[3]{x+3}$; и) $y=(0,5)^x$.

48. а) $g(x)=\frac{x-1}{2}$; $E(g)=D(g)=R$; в) $g(x)=\frac{1-x}{2}$; $E(g)=D(g)=R$; д) $g(x)=-\frac{1}{x}$; $E(g)=D(g)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. § 8. **50.** а) -1; б) $-4\frac{2}{3}$; в) 1,0016; г) 4;

д) -8; 1; е) 0; 3; ё) ± 5; ж) 16. **51.** а) 3; б) $\varnothing$; в) 4; г) $\frac{1}{2}$; д) 4; е) 5; 95; ё) 6; 14;

ж) 4; з) 13. **52.** а) $\frac{1}{2}$; 16; б) 0,0001; 10; в) 9; 27; г) 0,2; 125; д) 0,2; 25;

ж) 0,001; 0,1; 10; 1000. **53.** а) 4; б) $\sqrt{5}$; 25; в) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$; 4; г) $\frac{1}{4}$; 4; д) $\frac{1}{5}$; $\sqrt{5}$;

е) 3; 5. **54.** а) $\frac{1}{3}$; 3; б) $\frac{1}{8}$; 2; в) 25; г) $\frac{1}{9}$; д) $\frac{1}{2}$; 8; е) 100; ё) 0,1; 100; ж) 0,1;

$10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$; $10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$. **55.** а) 1; б) $\varnothing$; в) $\approx 0,08$; $\approx 1,47$; г) $\approx 0,6$; д) 1,2. **56.** а) $x>\frac{4}{5}$;

б) $\frac{5}{2}<x<\frac{1}{2}$; в) $2\le x\le 3$; г) $-1\ x<0$; $3<x\le 4$; д) $1\le x\le 10$; е) $x<0,05$; ё) $x>25$; ж) $\frac{5}{3}<x<3$. **57.** б) $x>7$; в) $x\le -1$; $x\ge 4$; г) $x<-0,5$; $x>3$; д) $x<2$; $x>3$; е) $x<-8$; $x>1$. **58.** а) $0<x<0,1$; $x>10000$; б) $0,1\le x\le 1000$;

в) $0<x<\frac{1}{\sqrt{8}}$; $x>4$; г) $\frac{1}{2}\le x\le 4$. **59.** а) $\frac{\sqrt{21}-3}{2}<x<1$; $1<x<\infty$; в) $x<\frac{\sqrt{6}-1}{2}$;

$\frac{5}{6}<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$; г) $-3<x<-1$. § 9. **60.** а) e^x; б) $2^x\cdot\ln a$; в) $-\frac{\ln 3}{3^x}$; г) $\pi\ln\pi$. **61.** а) $3\cdot 5^{3x}\ln 5$; б) $-2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}\ln 3$; в) $2e^{2x}-\frac{\ln 3}{3^x}$; г) $2^{\sin x}(1+x\cos x\ln 2)$; д) $\frac{1-2x\ln 3}{3^{2x}}$;

е) $\frac{(0,5)^x(1-2x\ln 2)+1}{2\sqrt{x}}$; ж) $7e^{-7x}-\frac{\sin\frac{x}{3}}{6\pi}$; з) $e^{x+1}\cdot\sec^2 e^{x+1}$. **62.** а) $-32805\ln 3$;

б) ln2; *в)* $\frac{3\ln 3}{\sqrt{8}}$. **64.** *б)* 1; *в)* 3; *г)* −1; *д)* $\frac{1}{2}$. **66.** *а)* $x+ey=2$; *б)* $y=\frac{1}{2}\ln(e\ 2^{x+1})$.

69. *а)* $\frac{1}{x\ln 2}$; *б)* $\frac{3}{x\ln 5}$; *в)* $\frac{1}{2(x-1)\ln 0{,}1}$; *г)* $-2\sin x+\frac{1}{x}$; *д)* $x^2\ln(e\cdot x^3)$;

е) $4x\log_2 x+\frac{2x^2+5}{x\ln 2}$; *ж)* $e^x(\ln x+\frac{1}{x})$; *з)* $\frac{1}{x(1-\ln x)^2}$. **70.** *а)* $\frac{1}{4\ln 2}$; *б)* $\frac{2}{3\ln 10}$;

в) $-\sqrt{3}$; *г)* $2e$; *д)* $\frac{2}{e}$. **71.** *а)* $\frac{3}{2(3x+1)}$; *б)* $\frac{4x}{5(x^2-6)}$; *в)* $-\frac{2}{3(1-x^2)}$;

г) $\frac{4x}{3(x^2-9)}$. **72.** $y=\frac{1}{e}$. **73.** 1; 0. **74.** *а)* $x>0$ болгондо кемийт; *б)* $x>1$ болгондо өсөт жана $0<x<1$ болгондо кемийт. **75.** *а)* $x=2$ болгондо функция минимумга ээ, $y_{\min}=2(1-\ln 2)$; *б)* $x=\frac{1}{e}$ болгондо функция минимумга ээ, $y_{\min}=-\frac{1}{e}$.

§ 10. 78. *а)* функция качан $-\infty<x<0$ болсо кемийт, ал эми качан $0<x<\infty$ болсо өсөт. *б)* өзүнүн аныкталуу облусунда өсөт. **79.** *а)* $(-3{,}1)x^{-4{,}1}$; *б)* $-2x^{-3}$; *в)* $\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$; *г)* $3{,}5x^{2{,}5}$. **81.** *а)* 27; *б)* 9; *в)* $-\infty<x\le 27$; *г)* $27<x<\infty$. **83.** *а)* 2,89; *в)* 2,01; *г)* 2,63; *е)* 2,0125. **84.** *з)* 2,0004; *л)* 0,1247. **85.** *а)* 2,99; *б)* 5,012; *в)* 3,949; *г)* 4,33; *д)* 13,16; *е)* 3,111; *ж)* 3,083; *з)* 2,013. **§ 11. 86.** $10\frac{2}{3}$ м. **87.** *г)* $y=2x^3-4x^2+x+C$; *д)* $y=2\sin 2x+C$; *е)* $y=\sin x+\cos x+C$. **88.** *б)* $y=2\sin x+1$; *г)* $y=2x+x^2+2$; *е)* $y=3-e^{-x}$. **90.** *в)* $y''=-9y$. **91.** $\frac{10\ln 0{,}5}{\ln 0{,}999}\approx 6927$ жыл. **92.** 0,96 *Дж.*

93. 0,09 *Дж.* **96.** $0{,}1\,x^2$. **97.** x^5; $2x$; $x^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{x}$. **98.** $\frac{10}{x^2}$. **99.** $\frac{1}{x^4}$; $\frac{1}{x\sqrt{x}}$; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{3\sqrt{x^2}}$;

$\frac{2}{\sqrt{x}}$. **100.** *а)* 2^3; *б)* 2^{-1}; *и)* $2^{-\frac{11}{20}}$; *к)* $2^{\frac{7}{4}}$. **101.** *а)* $3^{\frac{3}{4}}$; *б)* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{11}{6}}$. **102.** *а)* $\frac{1}{\sqrt[5]{3^6}}$;

б) $\sqrt[5]{3^2}$. **103.** *а)* a^{24}; *д)* 2^7. **104.** *а)* $2^{\frac{15}{8}}$; *б)* $a^{\frac{2}{5}}$. **106.** $13\cdot 3^{x-1}$. **115.** *а)* 1; 0; 5; −1; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; *б)* 2; −1; 0; −3; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. **116.** *а)* 3; *д)* $-\frac{1}{2}$. **117.** *а)* 3; *б)* 9; *в)* $\sqrt{3}$; *г)* 4.

118. *а)* 1; *б)* 1; *в)* −2; *г)* 2. **121.** *а)* $N=\frac{a^3b^2}{y^4\sqrt{x}}$; *б)* $N=\frac{\sqrt{ac}^{\,-2}}{\sqrt[3]{b}}$. **122.** $\log_2 a^{-1}$; $\log_2 \sqrt[3]{a}$;

$\log_2 a^{-\frac{1}{2}}$; $\log_2 a^2$; $\frac{\log_2 a}{\log_2 3}$. **123.** *а)* 6; *д)* 5. **125.** *а)* $(0;\infty)$; *д)* $x<1$; *з)* $(1;\infty)$.

127. *а)* $\log_3 2>0$; *д)* $\log_3 4>1$; *и)* $\log_{\frac{1}{3}} 7> \log_{\frac{1}{3}} 10$; $\log_5 2>\log_6 2$. **129.** *а)* $y'=a$; *д)* $y'=\frac{5}{5x+1}$. **131.** *а)* $y\left(\frac{1}{e}\right)=-1$, $y(e)=1$; *б)* $y(1)=2$; $y(100)=8$; *в)* $y(1)=1$, $y(e)=e-1$; *г)* $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln 2$, $y(1)=2$. **133.** *а)* $x=\frac{3}{2}$; *д)* $x=\frac{1}{2}$; *л)* $x=\log_2 3$; *р)* $x=2$. **134.** *а)* $x=16$; *д)* $x=0$; $x=3$; *и)* $x=-1$. **135.** *а)* $x=1$; *д)* $x=2-\log_2 3$. **136.** *а)* $x=3$; *д)* $x=\pm 1$; *и)* $x=0$. **137.** *а)* $x=1$; $x=\frac{1}{4}$; *и)* $x=100$; $x=\frac{1}{100}$; *к)* $x=3$; $x=9$. **138.** *а)* $x\le 1$; *ж)* $(-\infty;\infty)$; *с)* $(1;3)$. **139.** *а)* $x>10$; *д)* $x\le -99$; *и)* $3<x<5$; *н)* $x\ge 6$. **140.** *а)* $x=1$, $y=2$; *д)* $\begin{cases} x=100, \\ y=\frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{10}, \\ y=100. \end{cases}$ **141.** *а)* $x=1$; *б)* $x=1$; *в)* $x=2$; *г)* $x=3$; *д)* $x=2$; *е)* $x=1$; *ж)* $x=1$; *з)* $x=9$. **142.** *а)* $x=\frac{4-5y}{3}$, $y=\frac{4-3x}{5}$; *в)* $x=-\ln y$, $y=\frac{1}{e^x}$; *г)* $x=\sqrt{1-y^2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$. **143.** *а)* $t=\frac{S-S_t}{v}+t_0$; *б)* $t=\sqrt{\frac{S^3}{a^3}}+t_0$; *в)* $t=t_0\ln\frac{S_0}{S}$; *г)* $t=t_0\left(e^{\frac{S}{S_0}}-1\right)$. **144.** *а)* $y=\frac{x+1}{5}$; *в)* $y=\sqrt{1-x^2}$; *г)* $y=1-x^2$; *д)* $y=\ln^2 x$. *г)* $y=e^{e^x}$. **145.** *а)* $y=2x+2$; *в)* $y=\sqrt[3]{x}$, $x\ge 0$; *г)* $y=-\ln x$; *д)* $y=e^x+1$; *е)* $y=\sqrt{x}$. **146.** *а)* $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x^2)}$; *б)* $y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; *г)* $y'=\frac{1}{1-x^2}$.

III бөлүм

2. *в)* алгебралык; *д)* алгебралык; *е)* трансценденттик, себеби $\sqrt{x^2}=|x|$. **3.** *а)* 4; *д)* 3; *е)* −2. **5.** *г)* $[1;6]$; *д)* $[0;\frac{8}{5}]\cap[\frac{5}{2};\infty)$; *е)* $(-\infty;-2]\cup(-1;0]\cup(7;\infty)$. **6.** *а)* 3, 5; *б)* −2,5; *в)* −6; *г)* 8; *д)* $\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. **7.** *а)* −7; *б)* −5; *в)* 2; *г)* −3; *д)* 4; *е)* −1. **8.** *а)* $\varnothing$; *б)* 4; *в)* −1; *г)* −2; *д)* 2; *е)* −3. **9.** *а)* 3; *б)* 8; *в)* 2; *г)* 2; *д)* 4; *е)* 3. **10.** *а)* 9; *б)* 10; *в)* 9; *г)* 2; *д)* 2; *е)* −1. **11.** *а)* 2; *б)* −2; *в)* −2; *г)* −1; *д)* −1; *е)* 0. **12.** *а)* (4; 2); *б)* (4; 2); *в)* (3; 2); *г)* (2; 1); *д)* (2; 4); *е)* (1; 1). **13.** *а)* $\frac{\pi}{3}$; *б)* $\frac{\pi}{2}$; *в)* $-5°$; *г)* $180°$;

д) $\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{\pi}{2}$. **14.** а) 1; б) 4. **15.** а) $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; б) $\varnothing$; в) $\left(\frac{-7\pi}{3}+2\pi n, \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; г) $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; д) $(\mathrm{ctg}2; \infty)\cup$ $\cup(-\infty; \mathrm{ctg}3)$; е) $(-\infty; \mathrm{tg}1)$. **16.** а) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi m\right)$, $n, m\in Z$; б) $(2\pi n,$ $2\pi m+\pi)$; в) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{6}-\pi m\right)$, $n, m\in Z$; г) $\left(n; \frac{4n+1}{4}\right)$, $\left(\frac{4n-1}{4}; n\right)$, $n\in Z$. **17.** 120. **18.** 165°. **19.** в) 1. **20.** г) −1. **21.** в) 2. **22.** г) 4. **23.** д) 5. **24.** г) 1. **25.** г) 30. Көрсөтмө. $x(x-1)=870$ квадраттык теңдемесин чыгаруу керек. **26.** в) 4. **27.** г) 6. **28.** г) 5. **31.** в) $\pm\sqrt{17}$; д) 247; е) −28. **32.** а) $a\geq\frac{3}{2}$, $x=(2a-3)^2$; б) $a\in R$, $x=(1-a^2)^3+8$; в) $a\leq 1$, $x=\left(\frac{1-a^3}{1+a^2}\right)^4$; г) $a\in[1; 8]$, $t=-1+(9a-a^2-8)^2$; е) $a\in[-2; \frac{1}{3})\cup(1; 2]$, $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{4-a^2}{3a^2-4a+1}\right)$. **33.** а) $x=1$; б) $[1; 12)$; в) $x\neq 5$; г) $x\in R$; д) $\varnothing$; е) $x=\frac{1}{2}$ –АО жана тамыр. **34.** а) 1; б) 4; в) 2; г) 9; д) $\varnothing$; е) $\varnothing$. **35.** а) 5; б) 1; в) 5; г) 1; д) −1; е) 5. **36.** а) 2; б) $-\sqrt{3}$; в) ± 5; г) ± 4; д) 14; е) 19. **37.** а) 3; б) −1; в) 20; г) 2; д) 6; е) 5. **38.** а) −3; б) $\left\{-1; \frac{9}{16}\right\}$; в) 3; г) 5; д) −1; е) 4. **39.** а) 2; б) 2; в) 5; г) 0; д) $\{5;10\}$; е) $\{-4;0\}$. **40.** а) −10; б) −45; в) $\{2; 3; 2{,}5\}$; г) $\{-3; 4\}$; д) −2; е) 0. **41** а) $\{16; 81\}$; б) $\{-17; 23\}$; в) $\left\{\frac{2}{7}; -5\right\}$; г) 1. **42.** а) 64; б) $\{1;$ $2; 10$; в) 68; г) 64. **43.** а) $\{-1; 2\}$; б) $\{-3; 2\}$; в) $\{-1; 2\}$; г) −3; д) $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$; е) $\{0;$ $5\}$. **44.** а) $\{0; 1\}$; б) $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$; в) $3+\sqrt{10}$. **45.** а) 0; б) $\varnothing$; в) 2; г) 1. **46.** а) 1; б) $\varnothing$; в) −1. **47.** а) $\{-21; 21\}$; б) $\{-2{,}4; 5\}$; в) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$; г) $\{-a; a\}$. **48.** а) −27000; б) 5; в) 25; г) $\{-1; 1\}$. **49.** а) $\varnothing$; б) 1; в) $x\in[-2; 1]$; г) $x=2$, $y=9$. **50.** а) $x=\frac{2a+1}{a-2}$, $a>2$ жана $a\leq\frac{1}{3}$ болгондо; $x\in\varnothing$, $a\in(\frac{1}{3}; 2]$ болгондо; б) $2|a|$, $a\neq 0$. **51.** 4. **52.** 0. **53.** 0. **54.** 3. **55.** г). **56.** д). **57.** в). **58.** г). **59.** б). **60.** а). **61.** в). **62.** д). **63.** в). **64.** г). **65.** б). **66.** д). **67.** в). **68.** б). **69.** а). **70.** г). **71.** в). **72.** д). **75.** в) 31;

г) $\frac{5}{2}$; д) $x=3$; е) $x<1$. **76.** б) $(-1;\ 0)\cup(3;\ 4]$; в) $\left(-\infty;\ \frac{2\sqrt{21}}{3}\right]$; г) $[-3;\ \infty)$. **77.** б) $[10;\ 20)$; в) $x=25$; г) СЖнын АО. **78** а) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{5}{2}\right)$; б) $\left(\frac{12}{25};\ \frac{1}{2}\right)$; в) $(6;\ \infty)$; г) $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ \infty\right)$; д) $(2;\ \infty)$; е) $[4;\ \infty)$. **79.** а) $[3;\ \infty)$; б) $\left(-\infty;\ -\frac{7}{9}\right)$; г) $[-3;\ 1)$; д) $(-\infty;\ -3)$; е) $[-2;\ 2)$. **80.** а) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ \infty)$; б) $[-18;\ -2)$; в) $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$; г) $[1;\ 6]$; д) $\left(\frac{24}{19};\ \infty\right)$; е) $[-3;\ 1)$. **81.** а) $[-2;\ \infty)$; б) $(4;\ \infty)$; в) $[-1;\ 1]$; г) $\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ 1\right]$; д) $(1;\ 2]$; е) $x\in\varnothing$. **82.** а) $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{1}{2}\right]$; б) $(-\infty;\ -9]\cup[9;\ 15)$; в) $\left[1;\ \frac{46}{19}\right)$; г) $\left(\frac{3}{4};\ 2\right)$; д) $[-6;\ 0)\cup(3;\ 4]$; е) $[5;\ 21)$. **83.** а) $[1;\ \infty)$; б) $(0;\ 64)$; в) $(-\infty;\ 1)$; г) $[1;\ 121]$; д) $x\neq2$; е) $\left(1;\ \frac{144}{49}\right)$. **84.** а) $(-\infty,\ 5]$; б) $x\in\varnothing$; в) $x=49$; г) $\left(-\infty;\ \frac{9}{2}\right)$. **85.** а) $\{-2;\ 1\}\cup[3;\ \infty)$; б) $[-1;\ \infty)$; в) $[-3;\ 6]\cup(8;\ \infty)$; г) $(-\infty;\ -6)\cup(-5,0)$; д) $[-2;\ 4]$; е) $[-4;\ 1]\cup\{2\}$. **86.** а) $(1;\ \infty)$; б) $(2;\ \infty)$. **87.** 0. **88.** 14. **89.** 5. **90.** 9. **91.** 6. **92.** 25. **93.** 5,75. **94.** 4,5. **95.** в) $x=1$, $x=\pm2$. **96.** в) $x=0$, $x=\sqrt[3]{9}$. **97.** а) $\varnothing$; б) $x=1$; в) $[3;\ \infty)$; г) ±3; д) $x=-40$; е) 4. **98.** а) $\varnothing$; б) $-\frac{1}{4}$; в) $-7{,}5$; г) $x=-5$; $x=2$; д) -1; е) $(-\infty,\ -3]$. **99.** а) $\left\{\frac{10}{3};\ 2\right\}$; б) -2; в) $[2;\ 4]$; г) $\{-5;\ 1\}$; д) $\left\{-1;\ \frac{2}{3}\right\}$; е) $\{-4\}\cup[-1,0]$. **100.** а) $\varnothing$; б) 7; в) $\varnothing$; г) $(-\infty;\ -5)\cup(-3;\ \infty)$; д) $(-\infty;\ -5)\cup[3;\ \infty)$; е) $(-1;\ 7)$. **102.** а) $(-1;\ 2)\cup(3;\ 6)$; б) $(-\infty;\ 0)\cup(6;\ \infty)$; в) $[-1;\ 5]$; г) $(-\infty;\ -3]$; д) $[4;\ 5)\cup(5;\ \infty)$; е) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ \infty)$. **103.** 2. **104.** 12. **105.** 1. **106.** 13. **107.** а) $(1;\ 2)$; б) $(7;\ 8)$ в) $(8;\ 7)$. **108** $(1;\ 2;\ 1)$; б) $(2;\ 3;\ 1)$. **109.** а) $(17;\ 10)$, $(4;\ -3)$; б) $(4;\ 25)$, $(25;\ 4)$; в) $(2;\ -1)$, $(-1;\ 2)$; г) $(3;\ 0)$, $(1;\ -2)$. **110.** а) $(4;\ 3)$, $(4,\ -3)$, $(-5;\ 0)$; б) $(5;\ 4)$, $(4;\ 5)$. **111.** а) $(17;\ 10)$, $(17;\ -10)$; б) $(-8;\ -1)$, $(-1;\ -8)$. **112.** а) $\left(-\frac{9}{5};-\frac{16}{5}\right),\left(\frac{9}{5};\frac{16}{5}\right)$; б) $(1;\ 1)$. **113.** г). **114.** в). **115.** б). **116.** а) $(2;\ 5)$; б) $[3;\ 4)$. **117.** а) 3. **118.** а) $\left(\frac{1}{3};\ 6\right)$; б) $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$. **120.** -2. **121.** 10. **122.** а) ооба; б) жок, $f(x)=1-x$, $g(x)=x-2$ деп карап көргүлө; в) ооба; г) ооба. **123.** Баарында:

ооба. **124.** а) $\Leftrightarrow$; б) экинчи тендеме – натыйжа. **125.** а) жок, АО: $x\geq0$; б) жок, АО: $x=1$; в) ооба; г) ооба; д) жок; е) ооба. **126.** а) жок, $x=1$ да тамыр; б) ооба. **130.** в) 10; е) 6. **131.** а) 2; б) 0; в) 2; г) $\{0;\ 4\}$; д) 2; е) $\left\{-\frac{9}{2};\ 2\right\}$. **132.** а) 2; б) 5; в) 1; г) 5. **133.** а) -3; б) -9; в) 5; г) 0; д) 12; е) $\{-1;\ 3\}$. **134.** а) 1; б) 1; в) 3; г) 16;

д) 9; е) −3. **135.** а) $\{0; 1\}$; б) −7. **136.** а) $\left\{\frac{12}{5}; 5\right\}$; б) $\{-19; 10\}$; в) 10; г) $\{-2; 6\}$. **137.** а) $\{-4; 7\}$; б) −1; в) $\left\{\frac{11-\sqrt{29}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$; г) $[-2; 3]$; д) $(3; \infty)$; е) $\{5\}\cup[1, 2]$. **138.** а) $(1; 2)$; б) $\left(\frac{21}{41}; \frac{8}{41}\right)$; в) $(8; 4; 2)$. **139.** а) $\left(\frac{128}{13}; \frac{2}{13}\right)$, $\left(\frac{2}{13}; \frac{128}{13}\right)$; б) $(2; 2)$, $(2; -2)$, $(-2; 2)$, $(-2; -2)$; в) $\left(-\frac{9}{2}; \frac{41}{12}\right)$, $(4; 2)$. **140.** б) $(-\infty, -5]\cup[3; \infty)$; в) $(-\infty; 2)\cup\{3\}\cup(4; \infty)$; г) $\{2\}\cup[3; 11]$; д) $(-\infty; -199)\cup(-66; 200)$; е) $(-\infty; -3]\cup[3; \infty)$. **141** а) $(-\infty; 1)$; б) $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \infty\right)$; г) $(1; \infty)$; д) $\{-1\}\cup[2; \infty)$; е) $\left[-1; \frac{5+4\sqrt{5}}{5}\right]$. **142.** а) $(-1; 0)\cup(3; 6)$; б) $x=1{,}5$. **143.** а) жок; б) жок; в) ооба. **144.** а) жок; б) ооба. **145.** 1) 4; 2) 5. **146.** 16. **147.** −1. **148.** 1. **149.** 3.

IV бөлүм

Кайталоо үчүн көнүгүүлөр

1. а) $F(x)=\frac{2}{5}x^2+10x$; б) $F(x)=3x^3+\frac{11}{2}x^2+7x$. г) $F(x)= =18\sin\frac{x}{3}+\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{1}{2\ln 7}7^{2x}$. **2.** а) $F(x)=-2e^{-2x}-\mathrm{ctg}4x+\frac{1}{2}\ln x$; г) $F(x)=-\frac{3}{7}\cos 7x-\frac{4}{7}\sin 7x-\ln(\cos x)$. **3.** а) $F(x)=\frac{3}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}x)+\frac{1}{3}\sin 9x-2\cos 2x+x$; в) $F(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}x)+8\sin\frac{x}{2}-24\cos\frac{x}{4}$; г) $F(x)=\frac{x^2}{2}+3x-\ln(x+1)+4\ln(x-2)$. **4.** а) $F(x)=-2\mathrm{ctg}2x+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\ln x+C$, C− каалагандай турактуу сан; в) $F(x)=\frac{8}{3}(x+10)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(5x+10)^{\frac{3}{2}}+C$. **5.** а) $F(x)=8\sqrt{x+10}+\frac{2}{5}(x+2)^{2}+C$; в) $F(x)=\frac{1}{5}e^{5x+4}-\frac{1}{2\ln 9}9^{2x+1}-\frac{1}{3\ln 7}7^{-3x+4}+C$. **6.** б) $F(x)=\frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}(\frac{x+2}{\sqrt{3}})-\arcsin(x-2)+C$; г) $F(x)= =\frac{3}{2}\cos 2x-\frac{3}{2}\sin 2x+C$. **7.** а) $F(x)=\frac{4}{3}x^3-x^2+x+\frac{13}{3}$. **8.** б) $F(x)=-3e^{-x}+4e^{x}+3$. **9.** б) $F(x)=x-3\ln\frac{x+3}{7}+2$. **10.** а) $x^4-2x^3+x^2+x+C$, C − каалагандай турактуу сан; в) $4\ln x+\frac{2}{5x^2}+C$; е) $\frac{1}{2\ln 3}3^{2x}-6\sin\frac{1}{3}x+C$. **11.** а) $\frac{2}{\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}-5\ln x-\frac{6}{\ln 3}3^{-x}+C$;

г) $\frac{9}{4}(6x-2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C$. **12.** *а)* $\frac{16}{9}x^{\frac{9}{4}}+\frac{4}{13}x^{\frac{13}{4}}+C$; *д)* $\frac{1}{7}\sin 7x+C$.

13. *б)* $1{,}5+\ln 2$; *е)* $\frac{1}{4}(e^8-1)$. **14.** *а)* 2; *д)* 0. **15.** *а)* $\frac{5}{2}$; *г)* $\frac{1}{4}\ln 5$; *е)* $-\frac{\sqrt{2}}{6}$. **16.** *а)* $\frac{5}{6}$; *в)* $\frac{\pi}{16}$. **17.** $\frac{9}{2}$. **19.** $\frac{32}{3}$. **21.** $\frac{9}{2}$. **24.** $\frac{9}{2}$. **27.** 1) $\frac{223}{5}\pi$. **29.** 1) π. **30.** 1) 8π. **32.** 2) $\frac{48}{5}\pi$. **34.** 2) $\frac{1}{6}\pi$. **35.** $\frac{1}{4}$. **36.** $f(4)=\sqrt[3]{12}$, $f(7)=-\sqrt[3]{21}$; $f(9)=-3$. **38.** *а)* 2^7. **42.** $N=\frac{\sqrt{a}}{c\sqrt[3]{b}}$. **43.** *а)* 5. **44.** *а)* $\log_5 2> >\log_6 2$. **53.** $x=2\log_2 3$. **60.** $x=0$. **62.** $x=100$. **63.** $x=3$, $x=9$. **67.** (1; 3). **73.** Биринин да чыгарылышы жок. **74.** *а)* 1; *б)* 5; *в)* $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$; *г)* ± 2; *д)* 775; *е)* 4. **75.** *а)* $\{15;-12\}$; *б)* 5; *в)* 5; *г)* $\{-1;-2\}$; *д)* $\frac{28}{27}$; *е)* 4. **76.** *а)* 4; *б)* $\{-5;\ 4\}$; *в)* $\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$; *г)* $\{-15;\ 13\}$; *д)* о; *е)* $\{-88;\ -24;\ 3\}$. **77.** *а)* ± 1; *б)* $\{0;\ -1\}$; *в)* 6; *г)* -1; *д)* $\{-61;\ 4\}$; *е)* $\{-14;\ 5\}$. **78.** *а)* $\{-a;\ 1-a\}$; *б)* $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$, $a>0$; *в)* $\pm\sqrt{5}$; *г)* 17; *д)* 1; *е)* $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **79.** *а)* $5\le x\le 10$; *б)* $\frac{25}{16}$; *в)* $\{0;\ 3\}$; *г)* 1. **80.** Биринин да чыгарылышы жок. **82.** *в)* $(-\infty;\ 3)$; *г)* $(4;\ \infty)$; *д)* 10; *е)* $3<x<4$. **83.** *а)* 5; *б)* $[4;\ \infty)$; *в)* $[0;\ 3]$; *г)* $(-\infty;\ 1]\cup(5;\ \infty)$; *д)* $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup[1;\ \infty)$; *е)* $\left(-\infty;\ -\frac{7}{9}\right)$. **84.** *а)* $(-3;\ 1)$; *б)* $[-6;\ 0)\cup(3;\ 4]$; *в)* $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3},\ \infty\right)$; *г)* $\varnothing$; *д)* $(-\sqrt{13};\ 1]\cup[2;\ \sqrt{13})$. **85.** *в)* (0; 81]. **86.** *б)* $\{2;\ 4\}$;*в)* $\{-1;\ -3\}$; *г)* $\{-7;\ -1\}$; *д)* ± 3; *е)* $[1;\ \infty)$. **87.** *а)* $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup[3;\ \infty)$;*б)* $(-\infty;\ 0)\cup(3;\ \infty)$; *в)* $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)\cup(0;\ \infty)$; *г)* $(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 1)\cup(2;\ \infty)$; *д)* $[-2\sqrt{2};\ 0)\cup(0;\ 2\sqrt{2}]$. **88.** *б)* $\left(\frac{2}{17};\frac{76}{17}\right)$, $(2;\ 4)$; *в)* $(-3;\ -2)$, $(3;\ 2)$; *г)* $(2;\ 1)$, $(-1;\ -2)$. **89.** *а)*. $\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)$; *б)* $(2;\ 2)$; *в)* $(-4;\ 3;-1)$. **90.** *а)* $\varnothing$; *б)* $(-2;\ 1]\cup[1;\ 4]$; *в)* $(1;\ 3]$; *г)* $[3;\ 4)$. **91.** *в)*. **92.** $x_1x_2=-4$. **93.** *д)*. **94.** *г)*. **95.** *в)*. **96.** *б)*. **97.** *в)*. **98.** *б)*. **99.** *д)*. **100.** *г)*. **101.** *в)*. **102.** *д)*. **103.** *г)*. **104.** 9. **106.** *в)*. **107.** *б)*, себеби $(1;\ -1;-1)$ – чыгарылыш.

ТАКТАГЫЧ МААЛЫМАТТАР

Негизги белгилөөлөр

$N=\{1, 2, 3,...,\}$ – натуралдык сандардын көптүгү;
$Z=\{0 ; \pm 1, \pm 2, \pm 3,...,\}$ – бүтүн сандардын көптүгү;
$Z^{+}=\{0,1, 2, 3,...,\}$ – терс эмес бүтүн сандардын көптүгү;

Q – рационалдык сандардын көптүгү;
I– иррационалдык сандардын көптүгү;
R – анык сандардын көптүгү;
C– комплекс сандардын көптүгү;
∞ – чексиздин символу;
$a\in A$– a элементи A көптүгүндө жатат; $a\notin A$ же $a \,\overline{\in}\, A$– a элементи A көптүгүндө жатпайт;
$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – $a_1, a_2, ..., a_n$ элементтеринен турган көптүк;
$(a_1, a_2, ..., a_n)$ – $a_1, a_2, ..., a_n$ – элементтеринин жолчосу;
$\{a_n\}$– $n\in N$ же $n\in Z^{+}$ болгондогу a_n сандарынын удаалаштыгы, б. а. $a_1, a_2, ..., a_n,...$;
$\{a /\alpha\}$ – α касиетине ээ болгон бардык элементтердин көптүгү;
$B\subset A$ – B көптүгү A көптүгүнө камтылган;
$A\cup B$ – A жана B көптүктөрүнүн биригүүсү, б. а. $A\cup B=\{x/x\in A$ же $x\in B\}$;
$A\cap B$ – A жана B көптүктөрүнүн кесилиши, б. а. $A\cap B=\{x /x\in A$ жана $x\in B\}$;
$A\setminus B$ – A менен B көптүктөрүнүн айырмасы б. а. $A\setminus B=\{x:|x\in A$ жана $x\notin B\}$;
$A\times B$ – A жана B көптүктөрүнүн түз (декарттык) көбөйтүндүсү, б. а. $A\times B=\{(a, b)|\ a\in A$ жана $b\in B\}$;
$[a, b]=\{x\in R\,|\,a\le x\le b\}$ – сегмент;
$(a, b)=\{x\in R\,|\,a< x<b\}$ – интервал;
$[a, b)=\{x\in R\,|\,a\le x<b\}$ – жарым сегмент;
$(a, b]=\{x\in R\,|\,a< x\le b\}$ – жарым интервал;
$f\colon A\to B$ – аныкталуу облусу A да жана маанилеринин облусу B да жаткан f функциясы;
f^{-1}– f функциянын тескери функциясы;
f^{n} – $f\colon A\to A$ түрүндөгү n функциянын суперпозициясы;
f' – f функциянын (биринчи) туундусу;

f'' – f функциянын экинчи туундусу;
f''' – f функциянын үчүнчү туундусу;
$f^{(n)}$ – f функциянын n – туундусу;
$\nearrow$, $\searrow$, $\to$ – өсөт, кемийт жана пределге умтулат (функция жөнүндө) деген белгилер;
$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ – келип чыгат, тең күчтүү деген белгилер;
$D(f)$ – f функциянын аныкталуу облусу;
$R(f)$ – f функциянын маанилеринин облусу;
Δf – f функциянын өсүндүсү;
df – f функциянын дифференциалы;
$degP$ – P көп мүчөнүн даражасы;
i – жалган бирдик б.а. $i^2=-1$;
π – радиусу 1 ге барабар болгон жарым айлананын узундугу;
$e=2{,}718281828459045...$ – иррационалдык сан жана натуралдык логарифмдин негизи;
ln – натуралдык логарифм;
Sign – белги функциясы б. а.

$$\mathrm{Sign}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0.\end{cases}$$

$[x]$ – x санынын бүтүн бөлүгү,
$\{x\}$ – санынын бөлчөк бөлүгү, $0\le\{x\}<1$: мында $x=[x]+\{x\}$.

$|x|$ – x санынын модулу б. а. $|x|=\begin{cases}x, x\ge 0\\ -x, x<0.\end{cases}$

Rez – z комплекс санынын чыныгы бөлүгү;
Imz – z комплекс санынын жалган бөлүгү, мында $z=Rez+i\,Imz$;

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ – $z=x+iy$ комплекс санынын модулу;
$argz$ – z комплекс санынын аргументи;
$\bar{z}=x-iy$ саны $z=x+iy$ комплекс санынын түйүндөшү;
$max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарынын эң чоңу;
$min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарынын эң кичинеси;

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+...+x_n$ б. а. $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарынын суммасы;

$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n$ б. а. $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарынын көбөйтүндүсү;

$n!=1\cdot 2 ... n$ – n санынын факториалы;

$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ – биномиалдык коэффициент;

$\overline{a_1...a_n}$ – n орундуу сандын кандайдыр эсептөө системасындагы жазылышы;
$a \equiv 0(mod b)$ a бүтүн саны b бүтүн санына калдыксыз бөлүнөт;
$a \equiv b(mod c)$ – a саны b саны менен c модулуна карата салыштырмалуу б.а. $a - b$ саны c санына калдыксыз бөлүнөт.
$[a_1, a_2,...,a_n]$– $a_1, a_2,...,a_n$ бүтүн сандарынын **эң кичине жалпы эселүүсү** б.а. берилген бүтүн сандардын бардыгына калдыксыз бөлүнгөн натуралдык сандардын эң кичинеси ;
$(a_1, a_2,...,a_n)$ – $a_1, a_2,...,a_n$ бүтүн сандарынын **эң чоң жалпы бөлүүчүсү** б. а. берилген бүтүн сандардын бардыгын калдыксыз бөлө турган натуралдык сандардын эң чоңу;

$\int f(x)\,dx$ – f функциянын баштапкы функцияларынын жалпы түрдөгү жазылышы б. а. аныкталбаган интегралы;

$\int_a^b f(x)\,dx$ – f функциянын $[a; b]$ сегментиндеги интегралы; б. а. аныкталган интегралы.

Функциялар жана графиктер

1. $y=kx+b$ – сызыктуу функция, графиги – түз сызык.
2. $y=ax^2+bx+c$ – квадраттык функция, графиги – чокусу $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ болгон парабола.
3. Бөлчөктүү – сызыктуу функциялар: $y=\frac{1}{x}$, $y=-\frac{1}{x}$, $y=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$.
4. Рационалдык функцияларга мисалдар: $y=x+\frac{1}{x}$, $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+2}$, $y=\frac{x}{x+1}$.
5. $y=a^x$, $(a>0,\ a\neq1)$ – көрсөткүчтүү функция.
6. $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$ – логарифмдик функция.
7. Тригонометриялык функциялар: $y=\sin\omega x$, $y=\cos\omega x$, $y=\mathrm{tg}\,\omega x$, $y=\mathrm{ctg}\,\omega x$.
8. Тескери тригонометриялык функциялар: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\,x$, $y=\mathrm{arcctg}\,x$.

Туюнтмаларды өзгөртүү

1. Алгебралык туюнтмалар:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $\quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$,

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, $\quad (a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$,

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, $\quad 1 - x^n = (1-x)(1+x+x^2+...+x^{n-1})$.

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}, \quad \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\left(1 - \frac{\dfrac{ad-bc}{ac}}{x+\dfrac{d}{c}}\right).$$

2. Экспоненталар жана логарифмдер

$$a^{\log_a x} = x,\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,\ a^x = e^{x\ln a},\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b},\ \log_a x^k = k\log_a x,\ \ \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x,\ \ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

3. Тригонометриялык функциялар

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

$$\mathrm{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{ctg}\,x, \quad 1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{tg}\,x,$$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$,

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha, \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + (\sin(\alpha -$$

$$- \beta)), \ \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)), \quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+$$

$$+\beta) + \cos(\alpha-\beta)), \quad \sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

4. Тескери тригонометриялык функциялар

$\sin(\arcsin x)=x$, $\arcsin(-x)=-\arcsin x$, $\cos(\arccos x)=x$, $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$, $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=x$, $\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}x$,

$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $\mathrm{arcctg}(-x)=-\mathrm{arcctg}x$, $\sin(\arccos x)=$ $=\sqrt{1-x^2}$, $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$, $\sin(\mathrm{arctg}x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$\mathrm{tg}(\arcsin x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Туундулар жана интегралдар

$(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(\lambda u)'=\lambda u'$, $\lambda\in R$;

$(u(ax))'=a\,u'(ax)$, $(u^n)'=nu^{n-1}\,u'$,

$(uv)'=u'\,v+uv'$, $(u(v(x)))'=u'(v)v'$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Жакындаштырып эсептөө үчүн формулалар

$\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}$, $\dfrac{1}{1+x}\approx 1-x+x^2$, $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x-\dfrac{n-1}{2n^2}x^2$,

$(1+x)^k\approx 1+kx+\dfrac{k(k-1)}{2n^2}x^2$, $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{6}$,

$\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2}$, $\mathrm{tg}x\approx x+\dfrac{x^3}{3}$, $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2}$, $\ln(1+x)\approx x-\dfrac{x^2}{2}$.

Мында x – нөлгө жакын сан.

Ньютондун биному

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2}+nab^{n-1}+b^n=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,a^{n-k}b^k.$$

Паскалдын үч бурчтугу (биномиалдык коэффициенттер)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Теңдемелерди чыгаруу жана көп мүчөлөр

1. $ax+b=0\ (a \neq 0),\ \ x=\frac{b}{a};$

2. $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0),\ \ x_{1,\,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. (Эгерде $b^2-4ac<0$ болсо, анда чыгарылышы жок);

Виеттин теоремасы: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2=\dfrac{c}{a}; \end{cases}$

3. $a^x=b,\ x=\log_a b;$

4. $\log_a x=b,\ \ x=a^b;$

5. $\sin x=a,\ |a| \le 1,\ \ x=\arcsin a+2\pi k,\ x=\pi-\arcsin a+2\pi k,\ k \in Z;$

6. $\cos x=a,\ |a| \le 1,\ \ x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k \in Z;$

7. $\mathrm{tg}\,x=a,\ x=\mathrm{arctg}\,a+\pi k,\ k \in Z;$

8. $\mathrm{ctg}\,x=a,\ x=\mathrm{arcctg}\,a+\pi k,\ k \in Z;$

9. $\sin x=0,\ x=k\pi;\ \cos x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z;$

10. $\mathrm{tg}\,x=0,\ x=k\pi;\ \mathrm{ctg}\,x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z.$

Безунун теоремасы: Берилген $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_1x+\ +a_0$ көп мүчөсүн $x-x_0$ көп мүчөсүнө бөлгөндөгү калдык $P(x_0)$ гө барабар.

Натыйжа $P(x)$ көп мүчөсү $x-x_0$ көп мүчөсүнө бөлүнөт качан гана x_0 саны $P(x)$ көп мүчөсүнүн тамыры болсо, б. а. $P(x_0)=0$ болсо.

Сызыктуу эки теңдеменин системасы

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ системасы үчүн

1) Эгерде $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ болсо, анда берилген система жалгыз чыгарылышка ээ: $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$;

2) Эгерде $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ болсо, x – каалагандай сан, $y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}$, б. а. берилген система чексиз чыгарылышка ээ.

3) Эгерде $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ болсо, анда берилген системанын чыгарылышы жок.

Аныкталган интеграл

1. Ньютон–Лейбництин формуласы:

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, мында $F(x)$ функциясы $f(x)$ тин кандайдыр бир баштапкы функциясы.

2. $\left(\int\limits_a^x f(x)dx \right)' = f(x)$.

МАЗМУНУ

Иманалиев Мурзабек, Асанов Авыт,
Жусупов Калыгул, Искандаров Самандар

АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

Жалпы билим берүүчү орто мектептин
XI классы үчүн окуу китеби

Жооптуу редактор *Д. Андашев*
Редактору *Ж. Асанова*
Мукабасын жасалгалаган сүрөтчү *А. Касымалиев*
Тех. редактору *Ж. Жолдошева*
Компьютердик калыпка салган *Т. Сандыбаева*

ИБ № 244

Басууга 04.12.09 кол коюлду. Кагазы офсетная. Мектеп ариби.
Форматы $60\times90^{1}/_{16}$. 18,0 накта басма табак.
Нускасы 47973. Заказ К0906026.

Мамлекеттик тил жана энциклопедия борбору.
7200040, Бишкек шаары, Эркиндик проспекти, 56

«Continent Print» ЖЧКсында басылды.
720054 Бишкек ш., Интергельпо көчөсү, 1.
тел.: (0312) 65 55 56
e-mail: postmaster@continent.kg