2000 П

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.97.70

На правах рукописи

Иманалиев Таалайбек Мурзабекович

УДК 517.9

ОБОСНОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Бишкек – 2000

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики Кыргызского государственного национального университета.

Научный консультант: член-корр. НАН Кыргызской Республики, доктор физико-математических наук, профессор Панков П.С.

Официальные оппоненты: член-корр. Российской АН, доктор физико-математических наук, профессор Боголюбов Н.Н., член-корр. НАН Республики Казахстан, доктор физико-математических наук, профессор Касымов К.А., доктор физико-математических наук, профессор Рафатов Р.Р.

Ведущая организация: Институт математики Сибирского отделения Российской АН.

Защита диссертации состоится " 4 " октября 2000 г. в 12 часов на заседании Диссертационного совета Д 01. 97.70 по присуждению ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук при Институте математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан " 25" августа 2000г.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу: Кыргызстан, 720071, Бишкек – 71, проспект Чуй, 265-а, Институт математики НАН Кыргызской Республики, Диссертационный совет Д 01. 97.70

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Уравнения в частных производных, дающие возможность математического представления процессов, протекающих в пространстве и во времени, играют важную роль в математике и её приложениях. Вместе с тем, наличие дифференцирования по различным переменным существенно затрудняет их исследование, строгое доказательство существования решений. Для линейных уравнений в частных производных, среди многих известных методов исследования, отметим методы приведения их к интегральным (т.е. к уравнениям с вполне непрерывными операторами), в том числе использование функции Грина. Среди различных типов нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных мы будем рассматривать квазилинейные.

Для таких уравнений, из известных в литературе, отметим метод характеристик, приводящий к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, однако при построении общего решения с помощью независимых интегралов, не все решения, вообще говоря, содержатся в формуле общего решения. Такие решения называются специальными. Специальные решения являются исключительным случаем.

В ряде работ М.И.Иманалиева, Ю.А.Ведь, С.Н.Алексеенко, П.С.Панкова и др. с использованием идей метода характеристик для отдельных дифференциальных уравнений в частных производных были получены интегральные уравнения для функций с большим числом переменных, имеющих такие же решения.

Однако ранее не были выявлены те основные свойства дифференциальных операторов, а также дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в целом, которые дают возможность приводить такие уравнения к эквивалентным интегральным, не были рассмотрены наиболее широкие классы уравнений, к которым можно применить аналогичные приемы, не были рассмотрены их вычислительные возможности.

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики Кыргызского государственного национального университета.

Научный консультант: член-корр. НАН Кыргызской Республики, доктор физико-математических наук, профессор Панков П.С.

Официальные оппоненты: член-корр. Российской АН, доктор физико-математических наук, профессор Боголюбов Н.Н., член-корр. НАН Республики Казахстан, доктор физико-математических наук, профессор Касымов К.А., доктор физико-математических наук, профессор Рафатов Р.Р.

Ведущая организация: Институт математики Сибирского отделения Российской АН.

Защита диссертации состоится " 4 " октября 2000 г. в 12 часов на заседании Диссертационного совета Д 01. 97.70 по присуждению ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук при Институте математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан " 25" августа 2000г.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу: Кыргызстан, 720071, Бишкек – 71, проспект Чуй, 265-а, Институт математики НАН Кыргызской Республики, Диссертационный совет Д 01. 97.70

Ученый секретарь Диссертационного совета, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Уравнения в частных производных, дающие возможность математического представления процессов, протекающих в пространстве и во времени, играют важную роль в математике и её приложениях. Вместе с тем, наличие дифференцирования по различным переменным существенно затрудняет их исследование, строгое доказательство существования решений. Для линейных уравнений в частных производных, среди многих известных методов исследования, отметим методы приведения их к интегральным (т.е. к уравнениям с вполне непрерывными операторами), в том числе использование функции Грина. Среди различных типов нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных мы будем рассматривать квазилинейные.

Для таких уравнений, из известных в литературе, отметим метод характеристик, приводящий к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, однако при построении общего решения с помощью независимых интегралов, не все решения, вообще говоря, содержатся в формуле общего решения. Такие решения называются специальными. Специальные решения являются исключительным случаем.

В ряде работ М.И.Иманалиева, Ю.А.Ведь, С.Н.Алексеенко, П.С.Панкова и др. с использованием идей метода характеристик для отдельных дифференциальных уравнений в частных производных были получены интегральные уравнения для функций с большим числом переменных, имеющих такие же решения.

Однако ранее не были выявлены те основные свойства дифференциальных операторов, а также дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в целом, которые дают возможность приводить такие уравнения к эквивалентным интегральным, не были рассмотрены наиболее широкие классы уравнений, к которым можно применить аналогичные приемы, не были рассмотрены их вычислительные возможности.

Целью работы является выявление наиболее общих свойств как неограниченных, так и непрерывных операторов в абстрактных пространствах, выполняющихся для уравнений с частными производными, и на этой основе – формулировка основных положений и развитие методов построения эквивалентных уравнений с вполне непрерывными операторами. В связи с этим отметим, что в нашей статье [13] на основании упомянутых результатов были выявлены основные этапы такого метода доказательства существования решения различных типов начальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, получивших название метода дополнительного аргумента. В нашей публикации [17] была показана возможность его использования для приближенных вычислений.

Методы исследования. Основными методами исследования являются развитый автором метод дополнительного аргумента, а также метод характеристик, метод интегральных преобразований, метод последовательных приближений и сжатых отображений, метод разделения переменных, метод сеток.

Научная новизна работы.

1. Введены новые понятия квазикоммутативности и обобщенной квазикоммутативности операторов, сужения операторов, действующих в пространствах нескольких переменных.
2. Показано применение введенных понятий для дифференциальных операторов типа полной производной по времени.
3. Получено теоретическое обоснование метода дополнительного аргумента для решения уравнений в частных производных.
4. Получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для различных классов дифференциальных уравнений в частных производных первого и третьего порядков с помощью метода дополнительного аргумента и других методов.

5. Осуществлено применение метода дополнительного аргумента для приближенных решений уравнений и показаны преимущества этого метода перед известными методами характеристик и сеток.
6. Показана корректность метода сеток для решения дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическим начальным условием и при нахождении приближенных решений получены многочлены Бернштейна, через коэффициенты которого определяется решение задачи.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть применены для решения уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента, для нахождения общих алгебраических свойств дифференциальных операторов, для решения уравнений типа Кортевега – де Фриза, приближенных методов решений уравнений.

На защиту выносятся следующие

Основные положения

1. Определение квазикоммутативных, обобщенно квазикоммутативных операторов, сужения операторов, действующих в пространствах функций нескольких переменных.
2. Применение введенных понятий для обоснования метода дополнительного аргумента.
3. Сведение дифференциальных операторов к композиции интегральных и "сужения" по методу дополнительного аргумента.
4. Доказательство теорем существования и единственности решения систем линейных и квазилинейных уравнений первого порядка.
5. Доказательство теорем существования и единственности решения уравнений типа Кортевега – де Фриза с ненулевой правой частью.
6. Доказательство применимости метода дополнительного аргумента для приближенных решений уравнений в частных производных.

7. Получение выражений для приближенных решений через многочлены Бернштейна и сходимость их к точным для аналитических начальных условий.

Апробация результатов. Результаты исследований докладывались на всесоюзных и международных конференциях:

– Всесоюзная научная конференция «Асимптотические методы теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач», Бишкек, 1991;
– Международная научная конференция "Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа", Ташкент, 1993;
– Международная научно-практическая конференция «Аналитические и экспериментальные методы математической физики и проблемы их преподавания», Ош,1994;
– Юбилейная научная конференция, посвященная 50-летию развития математики в Академии наук Казахстана, Алматы, 1995;
– First Turkish world mathematics symposium, Elazig, Turkia, 1999;

на республиканских конференциях:

– Республиканская научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», Бишкек, 1993;
– Научная конференция математиков, посвященная 60-летию образования Кыргосуниверситета, Бишкек, 1995;
– Республиканская конференция молодых ученых, Бишкек, 1999;

на семинарах кафедры дифференциальных уравнений, кафедры прикладной математики и информатики, факультета математики, информатики и кибернетики КГНУ, на семинаре Института математики НАН КР, на объединенном семинаре по математике Института математики НАН КР и КГНУ, 2000 г.

По предложенному методу под руководством соискателя защищена магистерская диссертация: Джолдошбекова Г. Метод дополнительного

аргумента для нелинейных уравнений в частных производных первого порядка / Магистерская диссертация. – Бишкек: КГНУ, 1997.

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в статьях [1-3], [5-6], [10-11],[13-15],[18-40] и тезисах докладов [4], [7-9], [12], [16-17]. В [13] и [36] М.И. Иманалиеву и П.С.Панкову принадлежит постановка проблемы, а соискателю - вывод основных соотношений и схемы метода, и их использование. В [14], [21], [29], [38] М.И. Иманалиеву и П.С.Панкову принадлежит постановка проблемы, а соискателю – получение конкретных результатов. В [16] соискателю принадлежит постановка задачи о распространении метода на эллиптические уравнения, а М. Дж. Джураеву – вывод конкретных результатов. В [17] П.С.Панкову принадлежит постановка задачи, соискателю – разработка алгоритма, а Г.М. Кененбаевой - его численная реализация. В [18] М.И.Иманалиеву принадлежит постановка задачи о распространении метода на уравнения высших порядков, соискателю – разработка этого метода для составных операторов, А.Ж. Аширбаевой – получение конкретных результатов по этой методике. В [33] и [37,39,40] соискателю принадлежит получение основных математических результатов, а У.М.Иманалиеву – их физическая интерпретация.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка использованной литературы, содержащего 61 наименование. Объем текста 128 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается постановка задач, приводится обзор содержания диссертации, список обозначений.

В главе I даются алгебраические, алгебраически-функциональные и функционально-дифференциальные основы метода дополнительного аргумента (МДА).

В §1.1 сформулированы алгебраические основы. Как установлено, основным в методе дополнительного аргумента являются то, что дифференциальные операторы с частными производными являются в некотором смысле перестановочными с интегральными операторами. Даются определения квазикоммутирующего и обобщенно-квазикоммутирующего оператора. Приводятся примеры использования квазикоммутирующего оператора.

Пусть V – некоторое множество, операторы D, F отображают его в себя.

Определение 1.1. Оператор D называется квазикоммутирующим с оператором F, если существует такой оператор F_1, что

$$DF=F_1D. \quad (1.1)$$

Рассмотрим уравнения

$$D(v) = \omega \quad (1.2)$$

и

$$v = F(v), \quad (1.3)$$

где ω – фиксированный элемент из V.

Определение 1.1.2. Оператор D называется обобщенно квазикоммутирующим с оператором F, если существует такой оператор

F_2: $V\times V\to V$, что

$$(DF)(u)=F_2(D(u),u), \quad (1.4)$$

F_2 существенно зависит от первого аргумента. Соответственно, оператор F_2 будем называть левым обобщенно-подобным для оператора F (относительно оператора D).

Лемма 1.1.1. Если 1) оператор D – обобщенно квазикоммутирующий с оператором F; 2) для левого обобщенно-подобного оператора F_2 выполняется тождество

$$F_2 (\omega, v)= \omega \text{ для любого } v\,; \quad (1.5)$$

3) уравнение

$$w = F_2(w, v) \quad (1.6)$$

имеет единственное решение при любом v,

то из (1.3) следует (1.2).

В §1.2 рассматриваются алгебраически-функциональные основы метода дополнительного аргумента. На пространствах функций многих переменных вводится определение операторов, действующих по одному из аргументов, обобщающее некоторые свойства дифференциальных операторов с частными производными. Показывается, что если дифференциальный и интегральный оператор отображают пространство дифференцируемых функций в себя и действуют по разным аргументам, то при некоторых естественных предположениях, они являются квазикоммутирующими.

Определение 1.2. Для оператора D: $V_{XY}\to V_{XY}$ будем называть его «сужением» на первый аргумент оператор D_1: $V_{XY}\to V_{XY}$, построенный по следующему правилу: для любых значений x_0 и y_0 определим функцию $u_1(x,y) = u(x, y_0)$ и положим $D_1(u)(x_0 , y_0) = D(u_1)(x_0 , y_0)$.

Лемма 1.2. Оператор P, действующий в пространстве $C^{1,1,1}(R_+\times R_+\times R)$ $(R_+=[0,\infty))$ по формуле:

$$P(v;\tau, t, x) = x - \int_\tau^t q\,(v(\mu,t,x))d\mu, \quad (1.7)$$

удовлетворяет условиям:

1) $P(v; t, t, x)=x$ (очевидно);

2) Оператор $P(v;\tau, t, x)$ является обобщенно квазикоммутирующим с оператором $D'(v;\tau, t, x)$, определенном в пространстве $C^{1,1,1}(R_+\times R_+\times R)$ по формуле:

$$D'(v;\tau, t, x) = D(v(t,t,x), v(\tau, t, x); \tau, t,x).$$

3) Если $D'(v;\tau, t, x) = 0$, то $D(v(t,t,x), P(v;\tau, t, x), \tau, t, x) = 0$.

В §1.3 приводятся функционально-дифференциальные основы МДА. Дается схема, по которой в обобщенном виде дифференциальный оператор с начальными и краевыми условиями сводится к интегральному оператору. В этой схеме используются понятия «квазикоммутативности оператора» и «оператора, действующего по различным переменным». Показывается единственность решения.

Рассматривается уравнение вида

$$D(u)=J(u), \tag{1.8}$$

где u: $R^n \to R^m$ – (вектор-)функция нескольких вещественных переменных, D – дифференциальный (неограниченный) оператор, линейный по производным, J – функционально-интегральный (непрерывный) оператор. Для этого уравнения ставятся также некоторые начальные и краевые условия. Обозначим через $z\in R^n$ аргумент функции u. Нами предлагается следующая схема.

а). Вводим дополнительную переменную $\tau\in R^k$ $(k\leq n)$ и строим для функции двух переменных $v(\tau,z)$, v: $R^k\times R^n \to R^m$, интегральное уравнение вида (1.3), где F действует по первому аргументу и функция $F(v)$ удовлетворяет начальным и краевым условиям при любой функции v, а также при применении оператора D по соответствующим переменным дает $J(u)$ (см. ниже п. в)).

Если уравнение вида (1.3) имеет решение, то применяем к соответствующему тождеству оператор D в соответствии с леммой 1.1 (он является действующим по второму аргументу).

б). Доказываем его обобщенную квазикоммутируемость с оператором F, строим (интегральный) оператор F_2 и доказываем, что $F_2(0, v)\equiv 0$ и что уравнение вида (1.6) имеет единственное решение v_0.

Отсюда, в силу леммы 1.1, будет следовать, что $D\,v_0\,(\tau,z) = 0$.

в). Обозначим через Π каноническую проекцию R^n на множество R^k, через D_τ - сужение оператора D на первые k компонент переменной z вместе с переносом его действия с этих компонент на переменную τ.

Рассматриваем функцию $u_0\,(z) = v_0\,(\Pi(z),z)$. Применяя к этой функции оператор D и учитывая линейность этого оператора по производным, а также тождества $D\,v_0 = 0$ и $v_0 = F(v_0)$, доказываем, что $D(u_0)= D_\tau\,(F(u_0)) = J(u_0)$.

Далее в §1.4 приводится конкретный пример применения схемы метода дополнительного аргумента. Результаты полностью соответствуют теории.

В § 1.5 показано, что, в отличие от линейного случая, суперпозиция двух нелинейных интегральных операторов может не быть оператором такого вида. В связи со спецификой метода дополнительного аргумента мы ставим вопрос о структуре операторов, обратных к нелинейным дифференциальным.

В главе II приводятся различные виды уравнений в частных производных первого порядка и применения к ним метода дополнительного аргумента.

В §2.1 иллюстрируется применение метода дополнительного аргумента для неоднородного линейного уравнения с начальным условием. Задача сводится к интегральному уравнению, в котором вспомогательная функция определяется из однородного уравнения с начальным условием специального вида. Методом последовательных приближений получены достаточные условия существования и единственности решения интегрального уравнения, следовательно, и первоначальной задачи.

Рассмотрим начальную задачу

$$u_t(t,x)+a(t,x)u_x(t,x)=f(t,x,u(t,x)),\ t\in R_+, x\in R, \tag{2.1}$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\ x\in R_+. \tag{2.2}$$

Т е о р е м а 2.1. Пусть 1) $a(t,x)\in \overline{C}^{(0,1)}(R_+\times R)$, (ограниченная вместе с a_x функция), при этом $\int_0^\infty |a(v,x)|\,dv\leq M_0<\infty$ и удовлетворяет условию Липшица по аргументу x с некоторой $N(t)$, такой что $\theta=\int_0^\infty N(s)ds<1$; 2) $f(t,x,u)\in \overline{C}^{0,1,0}(R_+\times R\times R)$ и удовлетворяет условию Липшица по u с коэффициентом $L(t)$, $\int_0^\infty L(s)ds<1$; 3) $\varphi(x)\in \overline{C}^1(R)$.

Тогда уравнение (2.1) с начальным условием (2.2) имеет решение в $\overline{C}^{(1,1)}(R_+\times R)$.

В §2.2 рассмотрено обобщение задачи из §2.1, когда метод дополнительного аргумента применим для решения задачи Коши для систем линейных уравнений. Правая часть представлена в виде конечной суммы произведений известной функции на неизвестную. Аналогично §2.1 в §2.2 задача сведена к системе интегральных уравнений, в котором вспомогательные функции определяются из систем линейных однородных уравнений с согласованными начальными условиями. Доказательство существования и единственности решения задачи проводится методом последовательных приближений. В этом параграфе метод дополнительного аргумента применен для решения задачи Коши для линейных систем вида

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a_i(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(t,x)u_k(t,x)+f_i(t,x),\quad i=1,\dots,n, \tag{2.3}$$

с начальным условием

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x), \tag{2.4}$$

где

$$a_i(t,x)\in C^{(0,1)}(R_+\times R), b_{ik}(t,x)\in C^{(0,1)}(\dot{R}_+\times R), f_i(t,x)\in C^{(0,1)}(R_+\times R),$$

Согласно МДА задача (2.3) - (2.4) сводится к системе нелинейных интегральных уравнений вида

$$u_i(t,x)=\varphi_i(p_i(0,t,x))+\int_0^t\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(s,p_k(s,t,x))v_k(s,t,x)ds+\int_0^t f_i(s,p_k(s,t,x))ds, \tag{2.5}$$

где $p_i(\tau,t,x),v_i(\tau,t,x)$ – дополнительные (вспомогательные) неизвестные функции, $0\le\tau\le t$, которые определяются из систем однородных дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial p_i(\tau,t,x)}{\partial t}+a_i(t,x)\frac{\partial p_i(\tau,t,x)}{\partial x}=0, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial v_i(\tau,t,x)}{\partial t}+a_i(t,x)\frac{\partial v_i(\tau,t,x)}{\partial x}=0 \tag{2.7}$$

с начальными условиями соответственно

$$p_i(\tau,t,x)=x,\quad v_i(\tau,t,x)=u_i(t,x). \tag{2.8}$$

Получены условия при которых решение $u(t,x)$ системы нелинейных интегральных уравнений (2.5) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (2.1).

В §2.3 метод дополнительного аргумента применён для систем квазилинейных уравнений. С помощью МДА дополнительного аргумента задача сводится к интегральному уравнению, в котором вспомогательные функции определяются из системы уравнений без правых частей с согласованными начальными условиями. В этом параграфе рассматриваются системы квазилинейных дифференциальных уравнений вида:

$$u_t(t,x)+g(t,x,u(t,x))u_x(t,x)=f(t,x,u(t,x)),\ (t,x)\in R_+\times R \tag{2. 9}$$

с начальным условием

$$u(0,x)=\varphi(x),\ (t,x)\in R \tag{2. 10}$$

Т е о р е м а 2.2. Пусть вектор -функции $\varphi(x)\in\overline{C}(R^n)\cap Lip(L_1)$,

$f(t,x,u)\in C^{(0,1,1)}(R_+\times R\times R)\cap Lip(L(t)|_x,L(t)|_u)$,

$g(t,x,u)\in C^{(0\,1.1)}(R_+\times R\times R)\cap Lip(L(t)|_x,L(t)|_u)$, причем $\int_0^\infty L(s)ds(2+L_1)\le\alpha<1$.

Тогда уравнение (2. 9) с начальным условием (2. 10) имеет единственное непрерывное и ограниченное, вместе со своими производными первого порядка по x и t, решение, которое представляется в виде

$$u(t,x)=\varphi(x)-\int_0^t g(t,p(s,t,x),v(s,t,x))ds+\int_0^t f(s,p(s,t,x),v(s,t,x))ds, \tag{2. 11}$$

где вектор-функция $v(\tau,t,x)$ и скалярная функция $p(\tau,t,x)$ определяются из системы

$$v_t(\tau,t,x)+g(t,x,v(t,t,x))\,v_x(\tau,t,x)=0,\quad v(t,t,x)=u(t,x),$$

$$p_t(\tau,t,x)+g(t,x,v(t,t,x)\ p_x(\tau,t,x)=0,\ p(t,t,x)=x, \tag{2. 12}$$

и является таким же решением задачи (2. 9)- (2. 10).

В § 2.4 рассматривается обобщение задачи из § 2.3. Здесь исследуется случай, когда известная функция зависит от n независимых переменных, и в левую часть входит конечная сумма произведений функций, а правая часть зависит от неизвестной функции интегральным образом. В полном соответствии с результатами § 2.2, с естественными изменениями в связи с количеством переменных, задача сводится к интегральному уравнению, в котором вспомогательные функции определяются из систем уравнений первого порядка без правых частей, с согласованными начальными условиями.

§ 2.5 посвящен исследованию систем уравнений, в котором производная по пространственной переменной входит под знаком интеграла, с заданными значениями на линиях. Методом разделения переменных задача сводится к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Глава III посвящена применению метода дополнительного аргумента для решения начальных задач для уравнений высших порядков.

В § 3.1 исследуется квазилинейное уравнение, с составным оператором Лапласа, с начальными и предельными условиями. С помощью МДА задача сводится к интегральному уравнению, в котором вспомогательная функция определяется методом последовательных приближений. Получены достаточные условия существования и единственности решения задачи.

Рассматривается уравнение вида:

$$u_{ttt}(t,x)-u_{xxx}(t,x)+u^m(t,x)u_{ttx}(t,x)-u^m(t,x)u_{xxx}(t,x)=f\left(t,x,u(t,x)\right). \qquad (3.1)$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi_1(x),$$
$$u_{tt}(0,x)=\psi_2(x),\ x\in R. \qquad (3.2)$$

Здесь m - натуральное число, T - некоторое положительное число.

Т е о р е м а. 3.1. Если $f(t,x,u)\in\overline{C}^{(2)}\left(G_2(T)\times R\right)$, $\varphi(x)\in\overline{C}^{(4)}(R)$, $\psi_1(x)\in\overline{C}^{(2)}(R)$, $a(x)\equiv\psi_2(x)-\varphi''(x)\in\overline{C}^{(2)}(R)$, то существует такое $T_0>0$, что задача (3.1.1)- (3.1.2) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(3)}\left(G_2(T_0)\right)$, где $G_2[T]=[0,T]\times R$. Обозначим еще: $G_3(w)=\left\{(\tau,t)\middle|0\le\tau\le t\le w\right\}\times R$. Введем

новую неизвестную функцию $v(\tau,t,x)\in C^2\left(G_3(T)\right)$, которая определяется из нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с условием на диагонали:

$$D_1[u]V=V_t(\tau,t,x)+u^m(t,x)V_x(\tau,t,x)=0$$
$$V(t,t,x)=u(t,x). \qquad (3.3)$$

Введем также обозначения: функция

$$p(\tau,t,x;V)=x-\int_\tau^t V^m(\rho,t,x)\,d\rho$$

и вектор-функция

$$q(\tau,t,x;V)=\left\{\tau,p(\tau,t,x;V),V(\tau,t,x)\right\}.$$

Л е м м а 3.1.1. Если имеют место (3.3) и равенство

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi_1(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\nu}^{x+t-\nu}F\left(\nu,s;V(\cdot,\nu,s)\right)dsd\nu, \qquad (3.1.5)$$

то функция $u(t,x)$ является решением задачи (3.1)- (3.2), где

$$F(t,x;V)=a\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^t f\left(q(\alpha,t,x;V)\right)d\alpha.$$

В § 3.2 исследуется квазилинейное уравнение с составным оператором типа полной производной по времени третьего порядка. Методом дополнительного аргумента задача сводится к интегральному уравнению, в котором новая неизвестная функция определяется из нелинейного уравнения с начальными условиями. Рассматривается уравнение

$$u_{xxt}(t,x)+u^m(t,x)u_{xxx}(t,x)-u_t(t,x)-$$
$$-u^m(t,x)u_x(t,x)=f\left(t,x,u(t,x)\right),\ (t,x)\in G_2(T), \qquad (3.4)$$

где $G_2(w)=[0,w]\times R$, , T – некоторое заданное число, с начальным условием

$$u(0,x)=\varphi(x),\ \varphi^{(k)}(\pm\infty)=0,\ x\in R,\ k=0,1, \qquad (3.5)$$

и предельными краевыми условиями

$$u(t,\pm\infty)=0. \qquad (3.6)$$

Для доказательства существования решения задачи (3.4)-(3.6) преобразуем ее к нелинейному интегральному уравнению.

Т е о р е м а 3.2: Если $f(t,x,w)\in\overline{C}^{(1)}\left(G_2(T)\times R\right),\varphi(x)\in\overline{C}^{(3)}(R)$, то существует такое $t_1>0$, что задача (3.4)-(3.6) имеет единственное решение в некотором шаре пространства $\overline{C}^{(1)}\left(G_2(t_1)\right)$, и также $u_{xxx},u_{xxt}\in\overline{C}$.

В § 3.3 рассматривается решение задачи Коши для обобщенного уравнения Кортевега - де Фриза с правой частью. Задача сводится к интегральному уравнению, в котором новая неизвестная функция определяется из нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с условием на диагонали. Доказательство проведено в виде серии лемм, в которых доказывается эквивалентность первоначальной задачи и интегрального уравнения, существование локального решения, равномерная ограниченность производных, входящих в уравнение.

В § 3.4 метод дополнительного аргумента применен для нелинейного уравнения с составным дифференциальным оператором третьего порядка типа Кортовега-де Фриза. Доказательство существования решения начальной задачи приводится в виде серии лемм. Доказана эквивалентность начальной задачи и интегрального уравнения, существование и единственность локального решения.

В §3.5 исследуется уравнение, когда неизвестная функция входит в уравнение интегральным образом, с солитонными начальными условиями. Задача сводится к неоднородному линейному уравнению с нулевыми начальными условиями, решение которой известно из предыдущих параграфов.

В § 3.6 рассмотрена задача Коши для одного класса уравнений типа Кортовега-де Фриза с правой частью специального вида. Решение задачи сводится к однородному уравнению Кортовега-де Фриза. Получены

достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши, кроме того, показано, что решение сохраняет форму первичного солитона.

В § 3.7 рассматривается уравнение Кортовега-де Фриза со специальной правой частью, в которой вспомогательная функция является солитонным решением известного однородного уравнения Кортовега - де Фриза. Получены достаточные условия существования единственного решения начальной задачи, которое сохраняет почти солитонную форму.

В главе IV предлагаются приближенные методы решения некоторых из изученных задач на основе построенной теории.

В § 4.1 описан алгоритм для решения интегрального уравнения, выведенного в § 1.4.

Известно (Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. – Москва: Наука, 1973. - § 18 "Метод сеток для уравнения эволюции локального параметра". С.38.), что метод сеток для уравнений первого порядка в частных производных не является корректным. При исследовании этого вопроса удалось выяснить, что для аналитических начальных условий область его применимости расширяется (§4.2), тем не менее метод дополнительного аргумента сохраняет свои преимущества.

Выше описано применение МДА для доказательства существования решений. В этом параграфе показано, что МДА может применяться и для численного решения, при этом он имеет преимущества перед методами, использующими фиксированные сетки (не производится численное дифференцирование) и перед методами типа метода характеристик (расчет ведется не вдоль ломаных, а вдоль прямых).

Кроме того, этот метод, как использующий интегральные уравнения, более удобен для получения гарантированных результатов.

Для простоты рассмотрим уравнение

$$u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = F(t,x) \; (t\in R_+,\ x\in R) \qquad (4.1)$$

с начальным условием

$u(0,x) = \varphi(x)$ ($x \in R$). (4.2)

Как показано в главе I, решение этой задачи можно получить из решения системы

$v(\tau,t,x) = \varphi(p(0,t,x)) + \int_0^\tau F(s,p(s,t,x))ds,$ (4.3)

$p(\tau,t,x) = x - \int_\tau^t v(s,t,x)ds$

по формуле $u(t,x) = v(t,t,x)$.

Можно видеть, что переменная x в этих уравнениях выступает только как параметр, поэтому она не включается в расчетные формулы.

Выберем h - шаг по t и обозначим

$T(i) = ih,\ P(j,i) = p(jh,ih,x),\ V(j,i) = v(jh,ih,x).$

Применяя формулу трапеций, получаем следующую аппроксимацию задачи (4.1.3):

$V(j,i) = \varphi(P(0,i))\ +$

$+\ h\Sigma_{k=1}{}^{j}\ (F(T(k),P(k,i))+F(T(k-1),P(k-1,i)))/2,\ j = i..1,$

$V(0,i) = \varphi(P(0,i)),$

$P(i,i) = x,$

$P(j,i) = x - h\Sigma_{k=j+1}{}^{i}\ (V(k,i)+V(k-1,i))/2,\ j = 0..i-1.$

Для расчетов выбираем некоторое $n = t/h$, полагаем начальное приближение $V(j,i) = B(x) - tF(0, x),\ i=0..n,\ j=0..i$, вычисляем $P(j,i)$ и $V(j,i)$ и т. д.

Таким путем находим приближенно $u(t,x) = V(n,n)$.

Предложим улучшенный (экстраполяционный на один шаг) метод.

Вводим индекс m и будем вести расчеты последовательно для $m=1..n,\ i=0..m,\ j=i..0$, по формулам

$P(j,m+1) = P(j,m),\ j=0..m-1,$

$P(m+1) = P(m).$

(возможны также более точные экстраполяционные формулы), а потом - по вышеприведенным формулам.

Были проведены расчеты для следующих исходных данных:

1) Для разрывных исходных данных - расчеты показали известную "зону неопределенности", как и должно быть при непосредственном исследовании задачи.

2) Для модельной задачи с известным решением $u(t,x) = (1+t)(1+x)$ расчеты показали степенную (фредгольмову) сходимость последовательных приближений для не очень больших значений t.

3) Был проведен расчет также без экстраполяции, который показал ухудшенную сходимость.

Однако, как отмечено в упомянутой книге, уже для простейшей начальной задачи (4.2) для уравнения

$u_y(x,y) + a\, u_x(x,y) = 0,\ a > 0, \quad (x \in R,\ y \in R_+),$ (4.4)

где $\varphi(x)$ – заданная функция, простейшая явная схема не может дать приближения к решению (в данном случае оно записывается в явном виде: $u(x,y) = \varphi(x - ay)$) даже для сколь угодно гладких функций $\varphi(x)$. Действительно, для любого значения $v>0$ имеем:

$u(0,v) = \varphi(-av).$ (4.5)

Выберем малое число $h > 0$ – шаг по x и y. Обозначим

$X[j]:= jh,\ j = -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,\ Y[k]:= kh,\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ \Phi[j]:= \varphi(X[j]),$

$U[j, k]$ – приближенное значение $u(X[j],Y[k])$.

Заменяя в (4.2.1) производные правыми разделенными разностями, получим систему разностных уравнений

$U[j, k+1]=LU:=U[j, k] - a(U[j+1, k] - U[j, k])$

$(j = -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$

$U[j, 0] = \Phi[j]\ \ (j = -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots).$ (4.6)

Откуда видно,что $u(0,v) \equiv U[n,n]$ определяется значениями $\varphi(x)$ при $x \in [0,v]$.

Вместе с тем, доказана

Т е о р е м а 4.1. Если функция $\varphi(x)$ - аналитическая в эллипсе с фокусами 0 и v, включающем в себя точку $(-av)$, то метод (4.6) при $n \to \infty$ дает сколь угодно точное значение решения $u(0,v)$ (без учета вычислительной погрешности).

Если функция $\varphi(x)$ - аналитическая во всей плоскости, то метод (4.1.4) также сходится при $n \to \infty$ во всей плоскости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из изложеного видно, что данные методы могут быть обобщены и для других типов уравнений, для которых выполняются условия, сформулированные в главе I. Также, как видно, возникает проблема о наиболее общем виде нелинейного непрерывного или вполне непрерывного оператора в пространстве непрерывных функций, в частности, о представлении решений дифференциальных уравнений с различными краевыми и начальными условиями. Если не удается получить такое представление в явном виде, то возникает проблема сведения задачи с неограниченным (дифференциальным) оператором к уравнению с непрерывным или вполне непрерывным оператором. Результаты по методу дополнительного аргумента показывают, что такие уравнения могут быть построены очень разными способами, в том числе – сужением функции на область меньшей размерности.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора:

1. Смешанная задача для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Бишкек, Илим, 1989. - Вып.22. - С.117-121.

2. О решениях интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с интегральным коэфициентом // Там же. - С.121-123.

3. Интегро-дифференциальные уравнения с частными производными типа Вольтерра первого порядка // Там же. - Бишкек: Илим, 1991.- Вып. 23.- С.34-38.

4. Нарушение единственности решений задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных// Тез. докл. Всесоюзн. конф. «Асимптотические методы теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач», Бишкек, сент. 1991 г. - Бишкек: Илим, 1991. - С.52.

5. Об одном способе решения задачи Коши для нелинейного интегро-дифференциального в частных производных // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим. 1992.-Вып. 24.-С.165-175.

6. Об одном эффекте в теории интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Там же. - С.38-41.

7. Об одном классе вырождающихся интегро-дифференциальных уравнений // Тез. докл. междунар. научн. конф. "Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа". - Ташкент: ФАН, 1993. - С.76.

8. Об особенностях решений задачи Коши для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Научн. конф. математиков, посв. 60-летию образования Кыргосуниверситета: Тез. докл.- Бишкек: Кыргыз. гос. ун-т, 1993. - С.32-33.

9. О задаче Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения с частными производными первого порядка// Тез. докл. республ. научн. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения», Ош, сентябрь 1993 г. - Ош: Ош ГУ, 1993. - С.58.

10. Исследование разрешимости смешанной задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1994.- Вып. 25. - С.123-128.

11. О разрешимости начальной задачи для одного класса интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Там же. - С.119-123.

12. К теории нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных // Междунар. научн.-практ. конф. «Аналитические и

экспериментальные методы математической физики и проблемы их преподавания», Ош, декабрь 1994. – Ош: Ошский техн. лицей, 1994. – С.46.

13. (совм. с Иманалиевым М.И., Панковым П.С.). Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных волновых уравнений в частных производных. //Докл. АН. - 1995. - Т. 343, №5. - С.596-598.

14. (совм. с Иманалиевым М.И., Панковым П.С.) К теории дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортовега де Фриза //Докл. АН. - 1995. - Т. 342, №1. - С.17-19.

15. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. // Вестн. Кыргызск. гос.нац. ун-та. Сер. естественно-техн. науки. – Бишкек, 1995. - Вып.1, Ч 1.-С.74-78.

16. (совм. с Джураевым М.Дж.) Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных эллиптических уравнений в частных производных // Междунар. научно-практ. конф., посв. 90-летию со дня рождения Ф.И. Франкля. – Бишкек: Чуйск. ун-т, 1995. - С. 50-51.

17. (совм. с Панковым П.С., Кененбаевой Г.М.) Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка методом дополнительного аргумента // Юбилейная научная конф., посв. 50-летию развития математики в Акад. наук Казахстана: Тез. докл. – Алматы, 1995. - С.164.

18. (совм. с Иманалиевым М.И., Аширбаевой А.Ж.) Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 1997. – Вып. 26. - С.3-9.

19. К теории одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка типа Кортовега-де Фриза // Там же. - С.46-50.

20. Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Там же. - С.39-45.

21. (совм. с Иманалиевым М.И.) К теории нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных Кортевега де Фриза // Там же. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып.27. - С.20-25.

22. К теории многопериодических решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега де Фриза // Там же. - С.26-30.

23. Периодические решения нелинейного дифференциального уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса // Там же. - С.31-37.

24. Об одном классе обобщенного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных типа Кадомцева-Патвиашвили // - С.38-42.

25. К теории периодических решений регуляризованного нелинейного дифференциального уравнения Кортовега-де Фриза // Вестн. Кыргызск. гос.нац. ун-та.Сер. естественно-техн. науки. – Бишкек,1999. - Вып.1, Ч. 1. - С.5-9.

26. О разветвлении решений задачи Коши и точках бифуркации интегро-дифференциального уравнения в частных производных первого порядка // Там же. - С.28-32.

27. К теории возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений Кортовега-де Фриза// Там же. – Бишкек, 1999. - Вып.1, Ч. 2. - С.81-86.

28. Метод дополнительного аргумента для решения задачи бифуркации нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Там же. - С.64-71.

29. (совм. с Панковым П.С.) Квазикоммутативность дифференциальных операторов и ее приложение к обоснованию метода дополнительного аргумента // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1999. - Вып.28. - С.30-34.

30. Бифуркация решений задачи Коши для некоторых классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Там же. - С.114-119.

31. О солитонных решениях нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Там же. - С.120-126.

32. Солитонные решения задачи Коши для одного класса нелинейного интегро-дифференциального уравнения Кортовега-де Фриза // Там же. - С.127-131.

33. (совм. с Иманалиевым У.М.) К теории солитонных волн сильно регуляризованного нелинейного дифференциального уравнения Кортовега-де Фриза // Там же. - С.132-137.

34. Метод дополнительного аргумента для решения линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Там же. - С.279-284.

35. К теории периодических решений регуляризованного нелинейного дифференциального уравнения Кортевега-де Фриза // Там же. - С.285-289.

36. (совм. с Imanaliev M.) Soliton solutions of the nonlinear regularizated Kortveg-De Vries partial differential equations // First Turkish world mathematics symposium, Elazig, Turkia,1999. - P. 140-141.

37. (совм. с Иманалиевым У.М.) К теории солитонных волн регуляризованного нелинейного дифференциального уравнения Кортевега – де Фриза // Вестн. Кыргызск. гос.нац. ун-та. Труды молодых ученых. Сер. естественно-техн., гуманитарно – эконом. науки. – Бишкек, 2000. - С.5 - 10.

38. (совм. с Панковым П.С.) Асимптотика метода сеток для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, многочлены Бернштейна и некоторые обобщения // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2000. - Вып.29. - С.36-40.

39. (совм. с Иманалиевым У.М.) К теории содитонных решений нелинейного регуляризованного уравнения Буссинеска // Там же.- С.111-115.

40. (совм. с Иманалиевым У.М.) К теории солитонных решений одного класса дифференциальных уравнений типа Кортовега - де Фриза – Бюргерса // Там же.- С.352-357.

Т. Иманалиев

ИМАНАЛИЕВ Таалайбек Мурзабекович

ОБОСНОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В диссертационной работе дается теоретическое обоснование метода дополнительного аргумента для решения уравнений в частных производных. Введены новые понятия квазикоммутативного и обобщенно квазикоммутативного оператора, сужения оператора. Эти понятия применяются для дифференциальных операторов типа полной производной по времени. Разработанная теория применяется для решения различных классов уравнений первого и третьего порядков. Получены достаточные условия существования и единственности решения. Метод применяется и для приближенных решений уравнений и показано его преимущество по сравнению с методами характеристик и сеток.

ИМАНАЛИЕВ Таалайбек Мурзабекович

ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ ҮЧҮН КОШУМЧА АРГУМЕНТ ЫКМАСЫН НЕГИЗДӨӨ ЖАНА ӨНҮГҮҮ

Диссертацияда жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн кошумча аргумент ыкмасынын теориялык негиздөө берилген. Оператордун квазиалмашуучулугу жана жалпыланган квазиалмашуучулук, операторлордун "тарытуу" деген түшүнүктөр киргизилген. Бул түшүнүктөр убакыт боюнча толук туундудагы дифференциалдык операторлор үчүн колдонулган. Иштетилген теория ар түрдүү биринчи жана үчүнчү тартиптеги теңдемелер үчүн колдонулган. Чыгарылыштар жашаган экенин жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары алынган. Бул ыкма жакындатылган чыгаруу үчүн да колдонулуп, характеристика жана тармак ыкмаларына салыштырматууда артыкчылыгы көрсетүлгөн.

Taalaybek M. IMANALIEV

THE SUBSTANTIATION AND DEVELOPPING OF THE ADDITIONAL ARGUMENT METHOD TO SOLVE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

In this thesis, the theoretical substantiation of the method of additional argument to solve partial differential equations is given. The new concepts of quazicommutative, generalized quazicommutative operators and "restrictions" of operators are introduced. These concepts are applied to the differential operators such as a total derivative on time. The designed theory is applied to solve different classes of equations of the first and third orders. The sufficient conditions of existence and uniqueness of solutions are obtained. The method is applied also to approximate solutions of equations and its advantage with respect to methods of the characteristics and grids is demonstrated.

Тираж 130. Объем 1,5 п.л. Формат 60×84/16
Отпечатано в изд. "Турар", г.Бишкек, ул.Жибек Жолу, 466