

*На правах рукописи*

**ГЕРМАН Константин Анатольевич**

УДК 539.37

**ДИСЛОКАЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  
В ЗАДАЧАХ КРУЧЕНИЯ  
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ  
ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ**

**Специальность 01.02.04. –  
"Механика деформируемого твердого тела"**

**Автореферат**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Бишкек — 2000**

Работа выполнена в лаборатории механических испытаний кафедры "Механика" Кыргызско-Российского Славянского университета.

**Научный руководитель:**

кандидат физико-математических наук,  
доцент **Тютюкин Г.В.**

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук,  
профессор **Шваб А.А.**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент **Кожабаев Ж.Ш.**

**Ведущее предприятие:**

Новосибирский Государственный  
Архитектурно - строительный  
университет

Защита диссертации состоится **8.12.2000 г.** в **9<sup>00</sup>** часов на заседании диссертационного совета К 059.04.03 при Кыргызско-Российском Славянском университете:

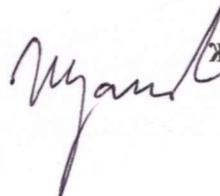
по адресу: 7200000. Кыргызская Республика. Бишкек,  
ул. Киевская 44; факс: (996 - 312) 28 - 27 - 76.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Кыргызско-Российского Славянского университета.

Автореферат разослан **7.10.2000 г.**

**Ученый секретарь**

диссертационного совета К 059.04.03,  
кандидат физико-математических наук

 **Жданов Н.В.**

**Актуальность**

При расчете на прочность и жесткость, скручиваемых за пределом упругости стержней, необходимо знать напряженно - деформированное состояние. Сложность математического аппарата, используемого при описании физико-механических процессов, сопровождающих упругопластическое кручение, создает при этом значительные трудности, которые полностью не преодолены до настоящего времени. Вследствие чего, задачи неупругого кручения продолжают вызывать интерес.

В течение последних десятилетий исследования в области неупругого деформирования находятся в центре внимания многих ученых - механиков, физиков, материаловедов и др., изучающих проблемы прочности твердых тел. В их исследованиях показано, что механизм дислокационного формоизменения материалов занимает большую часть в пластической деформации. Однако, деформирование неупругих тел является более сложным процессом, чем деформирование идеально пластических тел. Вследствие чего одних критериев физической теории дислокаций оказалось недостаточно. В настоящее время идет уточнение критериев, а также экспериментальное обоснование моделей дислокационной теории.

**Цель работы:**

- Экспериментально - теоретическое обоснование модели, используемой при рассмотрении неупругого кручения призматических стержней.
- Разработка методов решения упругопластической задачи кручения для призматических стержней различного профиля.

**Основная идея работы.** Механика неупругих деформаций формируется на основе представлений о дискретном строении твердого тела. За пределами упругости в таком теле возникают структурные преобразования (скольжение атомных слоев). Считается, что они изменяют только прочностные характеристики тела. На основании выше сказанного, решение задачи упругопластического деформирования сводить к краевой задаче теории упругости при наличии несовместных деформаций.

**Задачами исследования** являются:

- изучение неупругого деформирования реальных тел методами механики сплошной среды. Эта задача решается путем создания модели,

воспроизводящей основные, наиболее важные свойства реальных объектов;

- обоснование модели винтовой дислокации: проведение экспериментов, устанавливающих величину разрыва упругой части деформации (перемещения вдоль оси стержня) при кручении тонкостенной трубки за пределом упругости;
- разработка алгоритма решения прикладных задач упругопластического кручения призматических стержней (методом последовательных приближений) на примере стержня профиля Вебера;
- решение задачи кручения призматического стержня круглого профиля при наличии в нем полос скольжения для материала, обладающего зубом текучести.

#### **Методы исследований**

В диссертационной работе использованы следующие методы экспериментально – теоретических исследований:

- тензометрические методы определения деформированного состояния тела;
- использование математического аппарата тензорного анализа и комплексного переменного;
- вычислительной механики;
- численного анализа и машинной графики.

#### **Научные положения, выносимые на защиту**

1. Методика определения напряженно – деформированного состояния призматических стержней при упругопластическом кручении, методом последовательных приближений с использованием структурных несовершенств.
2. Методика решения задачи теории упругости при антиплоской деформации с разрывными перемещениями.

#### **Научная новизна** состоит:

- в использовании модели винтовой дислокации при неупругом кручении;
- в экспериментальном определении величины разрыва перемещений тонкостенной трубки вызванных упругой деформацией, и в сравнении её с теоретическим значением;

- в применении метода последовательных приближений, основанном на методе упругих решений, при рассмотрении упругопластических задач кручения призматических стержней различного профиля;
- в решении задачи кручения круглого стержня при наличии в нем полос сдвига.

**Достоверность научных положений и выводов** обеспечивается и подтверждается воспроизводимостью экспериментальных результатов, использованием точных методов экспериментальных исследований и совпадением с литературными данными. При этом она обоснована корректностью постановки задач и применением разных методов их решения; согласованностью полученных частных решений и установленных закономерностей распределения напряжений и деформаций с результатами других исследователей.

#### **Практическая ценность.**

Расчет валов без учета упругопластических деформаций приводит к завышению коэффициента запаса прочности, что вызывает перерасход материала. Для выбора оптимального коэффициента необходимо владеть методикой определения напряженно – деформированного состояния скручиваемых стержней за пределом упругости.

Имеющийся в литературе расчет различных профилей скручиваемых элементов основывается на различных подходах. Разработка универсального метода определения напряженно – деформированного состояния при упругопластическом кручении призматических стержней дает возможность упростить расчеты.

#### **Личный вклад автора** состоит:

- в проведении экспериментов по кручению тонкостенной трубки;
- в разработке решения по определению напряжений – деформаций в стержне профиля Вебера при упругопластическом кручении;
- в создании программного обеспечения для предложенного метода последовательных приближений;
- в получении замкнутого решения задачи кручения стержня круглого сечения, с учетом возникновения полосы скольжения;
- в разработке приближенного решения задачи упругопластического кручения, для материала обладающего зубом текучести.

### **Реализация работы**

Предполагается использование полученных решений упругопластического кручения призматических стержней сложного профиля в технических приложениях.

### **Апробация работы**

Основные результаты исследования были обсуждены на научных конференциях:

- Юбилейная конференция, посвященная 5-летию КРСУ. Кыргызстан, Бишкек, КРСУ. – сентябрь 1998г.
- Конференция, посвященная 200-летию юбилею А.С. Пушкина в Кыргызстане. Кыргызстан, Бишкек, КРСУ. – 4-5 июня 1999г.
- XVII международная конференция «Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов». Россия, Санкт-Петербург. – 22-25 июня 1999г.
- V Российско – Китайский международный симпозиум «Новые материалы и технологии». Россия, Байкальск. – 22 июля - 1 августа 1999г.
- Международная конференция «Геодинамика и напряженное состояние земных недр». Россия, Новосибирск, Академгородок. – 4-7 октября 1999 г.
- Международная конференция, посвященная 45-летию организации Фрунзенского политехнического института – Кыргызского технического университета им.И.Раззакова. Кыргызстан, Бишкек, КТУ. – 7-8 октября 1999 г, а также семинарах и Ученом Совете.

### **Публикации**

Основные результаты исследований опубликованы в 9 научных работах [1 – 9].

### **Объем и структура работы**

Работа состоит из введения, трех глав и заключения, изложенных на 124 стр. машинописного текста, которая содержит 5 таблиц, 30 рисунков, и списка литературы из 82 наименований, и 3 приложений.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

В современных, порой чрезвычайно сложных, конструкциях пространственным элементом является стержень, работающий на кручение. Для расчета на упругой стадии деформирования таких стержней, изго-

товленных из однородного и изотропного материала, используется известная теория чистого кручения.

На практике приходится иметь дело не только с упругим кручением, но и с упругопластическим. Несмотря на множество концепций в настоящее время затруднительно сформулировать неупругую задачу кручения математически строго так, чтобы к её решению можно было применить весь комплекс вычислительных средств. Поэтому большой интерес вызывают упрощенные постановки решения упругопластических задач. Их формулировка облегчается использованием физических представлений о процессах, происходящих при неупругом кручении. Неупругие деформации являются результатом структурных изменений кристаллической решетки в некоторых объемах и по существу определяются дискретностью строения твердого тела.

Из различных методов решения задач упругопластического кручения можно отметить: 1) методы, основанные на применении теорем о минимуме энергии, и 2) методы последовательных приближений.

Из методов последовательных приближений чаще всего используется метод начальных напряжений. В общем случае, когда компоненты деформации не удовлетворяют условиям совместности, элементы, на которые разделяется тело, не прилегают друг к другу. Тогда, чтобы удовлетворить условиям совместности, к каждому элементу необходимо приложить некоторые фиктивные усилия. Таким образом, задача определения начальных напряжений сводится к обычной системе уравнений теории упругости, в которой величины фиктивных (объемных и поверхностных) сил полностью определены, если заданы деформации.

Отметим, что в случае кручения определение фиктивных сил вызывает сложности. Ввиду чего рационально применять метод начальных дефектов, основанный на конкретных физических представлениях, основную роль в которых играют дислокации. Академик АН Кирг. ССР М.Я. Леонов предложил упругопластическую задачу сводить к краевой задаче теории упругости при наличии структурных дефектов.

Теория дислокаций является комбинацией классической теории упругости и теории несовместной упругости (с внутренними источниками напряжений). Поле пластической деформации определяет распределение дефектов в теле. Для тела, испытывающего упругопластическую деформацию без разрушения, полная деформация удовлетво-

ряет классическим условиям совместности. Упругие деформации представлены в виде определенных интегралов через плотности дислокаций, которые являются параметрами напряженного состояния. Для дислокаций существует прямая связь между тензором плотности дислокаций и тензором структурных искажений.

В первой главе, опираясь на понятие винтовой дислокации, рассматривается вопрос пластической деформации при кручении. Пластическое деформирование металлов во многом обусловлено возникновением и развитием дислокаций, что приводит к несовместности упругой части деформации. При этом на напряженное состояние, имеющее место в неограниченно упругом теле, накладываются напряжения, вызываемые указанной несовместностью. Последняя характеризуется разрывами углов поворота той части деформации, которая связана с напряжениями по закону Гука. При кручении, в силу кинематических ограничений, несовместность деформаций характеризуется разрывами продольного смещения.

На примере кручения тонкостенной трубки показывается что упругопластическое кручение сопровождается появлением и ростом винтовых дислокаций.

В механике широко известно понятие винтовой дислокации, суть которого состоит в следующем: перемещения в полом цилиндрическом образце задаются соотношением

$$W = A(\varphi - \varphi_0), \quad (1)$$

где  $W$  - смещение вдоль оси цилиндра,  $A$  - мощность дислокации,  $\varphi$  - полярный угол, отсчитываемый от луча, проведенного под углом  $\varphi_0$ .

Соответствующее напряженно-деформированное состояние, характеризуется напряжением, компоненты которого в полярной системе координат равны

$$\tau_{rz} = 0; \quad \tau_{\varphi z} = \frac{AG}{r} \quad (2)$$

Здесь оси  $r$  и  $\varphi$  расположены в плоскости сечения, ось  $z$  направлена вдоль образца.

Деформация (продольное смещение) терпит разрыв при обходе контура сечения на величину  $2\pi A$ .

Полагаем, что однородная пластическая деформация тонкостенной трубки сопровождается увеличением мощности винтовой дислокации. Напряжения за пределом текучести складываются из напряжений упругого кручения

$$\tau_{\varphi z}^y = G\theta R$$

и напряжений, определяемых формулой (2) ( $G$  - модуль сдвига,  $\theta$  - погонный угол закручивания,  $R$  - средний радиус трубки).

Задаваясь углом закручивания  $\theta$  и зная зависимость  $\tau(\gamma)$  для выбранного материала ( $\gamma$  - угол сдвига, равный  $\theta R$ ) нетрудно подсчитать мощность возникающей дислокации

$$A = \frac{\tau(\gamma)R}{G} - R^2\theta. \quad (3)$$

Для линейно-упрочняющегося материала выражение (3) принимает вид

$$A = \frac{R}{G} \left[ \tau_m + G' \left( \theta R - \frac{\tau_m}{R} \right) - G\theta R \right], \quad (4)$$

где  $\tau_m$  - предел текучести,  $G'$  - касательный модуль сдвига.

После снятия нагрузки, наличие винтовых дислокаций в деформированном тонкостенном образце предполагает появление разрыва упругой деформации. Для его определения достаточно разрезать трубку вдоль образующей. В силу сделанных предположений, разгрузка при этом должна сопровождаться смещением краев разреза. Сравнивая теоретическое значение разрыва деформации с экспериментальным, можно установить степень приближения модельных представлений к реальным процессам, протекающим при закручивании упругопластического тела.

Для подтверждения данных положений был проведен эксперимент:

- Образец в виде тонкостенной трубки закручивался за предел текучести ( $\tau_m$ ).
- Разгружался.
- Вырезалось кольцевое сечение.
- Кольцевой элемент разрезался вдоль образующей (рис. 1).
- Измерялся разрыв перемещений и сравнивался с теоретическим значением.

В качестве материала, имеющего линейное упрочнение, из которого изготавливались образцы, была выбрана качественная Сталь 45

(ГОСТ 1057-83), с содержанием

C — 0,42-0,5%, Si — 0,17-0,37%, Mn — 0,5-0,8%,

P — 0,025-0,03%, S — 0,025-0,03%, Cr < 0,25%.

Для испытаний изготавливались образцы в виде тонкостенной трубки с внутренним диаметром —  $20^{+0,1}$  мм и наружным —  $22^{+0,1}$  мм в рабочей части. Толщина стенки и диаметр контролировались оптическим длиномером ИЗВ-1 с ценой деления 1 мкм. К зачетным испытаниям допускались образцы, разностенность которых не превышала 5%.

При проведении эксперимента получена диаграмма напряжений-деформаций при сдвиге. Найденный предел текучести  $\tau_m \approx 205$  МПа соответствует ГОСТу. Разброс экспериментальных точек при каком-либо фиксированном значении деформации не превышает 5 процентов. Другими словами, в пределах разброса экспериментальных данных, выбранный материал можно считать линейно — упругопрочным, с модулем сдвига  $G$  и касательным модулем  $G'$ .

После нагружения образца за предел текучести и снятия нагрузки, в нем зафиксирована остаточная деформация. Затем производилось разрезание кольцевого элемента по линии, параллельной оси образца (рис.1). В результате чего обнаружилось смещение одного края кольца относительно другого, что является прямым следствием внутренних напряжений при остаточной деформации. Измерение фактической величины разрыва перемещений производилось индикатором часового типа, с ценой деления 0,01 мм.

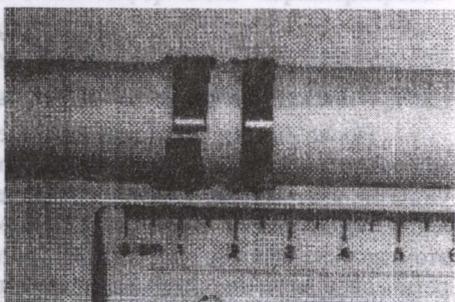


Рис.1.

На основании выполненных экспериментов найдена мощность винтовой дислокации в зависимости от погонного угла закрутки, а также рассчитывалось её теоретическое значение. После статистической обработки экспериментальных данных результаты представлены в таблице.

Таблица

Наименование показателя	Обозначение показателя	Погонный угол закручивания $\theta$ (рад/м)				
		0,15	0,225	0,3	0,375	0,45
Теоретическое значение	$\omega_0^{теор}$ (М)	$8,76 \cdot 10^{-5}$	$2,93 \cdot 10^{-4}$	$4,99 \cdot 10^{-4}$	$7,04 \cdot 10^{-4}$	$9,10 \cdot 10^{-4}$
Эксперимент. значение	$\omega_0^{эксп}$ (М)	$8,4 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$6,6 \cdot 10^{-4}$	$8,5 \cdot 10^{-4}$
Эксперимент. значение	$\omega_0^{эксп}$ (М)	$8,7 \cdot 10^{-5}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$4,8 \cdot 10^{-4}$	$6,9 \cdot 10^{-4}$	$9,0 \cdot 10^{-4}$
Эксперимент. значение	$\omega_0^{эксп}$ (М)	$9,19 \cdot 10^{-5}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$5,3 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$9,7 \cdot 10^{-4}$
Среднее арифметическое	$a$	$8,73 \cdot 10^{-5}$	$2,92 \cdot 10^{-4}$	$4,97 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$9,06 \cdot 10^{-4}$
Отклонение среднего арифметического	$\delta$	$-3,63 \cdot 10^{-7}$	$-1,3 \cdot 10^{-6}$	$-2,3 \cdot 10^{-6}$	$-4,0 \cdot 10^{-6}$	$-5,66 \cdot 10^{-6}$

Сравнение теоретических величин и экспериментальных данных показало: наибольшее отклонение экспериментальной величины от теоретического значения не превышает 8 процентов.

Во второй главе излагается предлагаемая методика расчета валов при упругопластическом кручении.

Рассмотрение задачи упругого кручения стержней значительно сужает возможности прогнозирования прочности и жесткости этих конструктивных элементов. Однако, исследование напряжений и деформаций за пределом упругости существенно усложняет задачу чистого кручения. Это во многом вызвано неопределенностью размеров и конфигурации упругопластической зоны, граница которой ищется в процессе решения. Наиболее эффективным в изучении подобных задач следует признать метод последовательных приближений, основанный на упругих решениях. Обычно влияние неупругих деформаций по этому методу компенсируется путем введения сил, величина которых определяется пластической деформацией. В случае кручения рационально вместо сил использовать в роли источников винтовые дислокации.

Используя упругое решение и зависимости между напряжениями и деформациями для реального тела, получаем распределение упругих и упругопластических зон. Последние занимают объем меньше истинного. Выбирая в качестве определяющего фактора напряжения и ставя им в соответствие по нелинейным законам неупругие деформации, тем самым корректируем результат уменьшения неупругих объемов. Таким образом, деформации упругопластического тела, при заданном значении

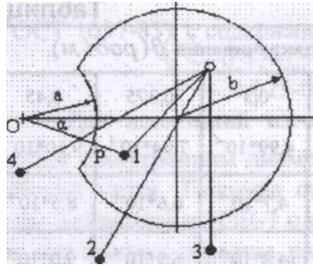


Рис.2.

нагрузок, близки к деформациям неограниченно упругого тела, с начальными деформациями, найденными как указано выше.

Для приближенного решения упругопластических задач используется следующий алгоритм.

По напряжениям упругого решения определяется величина пластической деформации. Далее рассматривается задача механики деформированного твердого тела при наличии в нем известных

начальных деформаций. Данную задачу целесообразно решать в перемещениях, так как в этом случае получаем поле перемещений, близкое к истинному. Пользуясь зависимостью напряжения - деформации, находим величину и конфигурацию зоны пластической деформации первого приближения.

Для оценки точности решения задачи применим пошаговый метод. В этом случае роль напряжений упругого решения играют напряжения предыдущего шага.

Предлагаемый метод решения задач чистого кручения упругопластических упрочняющихся стержней реализован на примере стержня профиля Вебера, представляющего собой прямоугольный криволинейный двугульник, ограниченный окружностями радиусами  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ) (рис.2).

Напряжения, возникающие при кручении упругого стержня такого поперечного сечения, имеют вид:

$$m_{\rho z} = -C \frac{1}{a} \sin \alpha \quad \gamma > G \rho \cos \alpha, \quad (5)$$

где  $a, \rho$  - полярные координаты, угол  $\alpha$  отсчитывается от оси симметрии профиля, центр находится в центре малой окружности.

Наиболее напряженная точка профиля, согласно анализа (5), находится в середине выточки ( $\alpha = 0$ ;  $\rho = a$ ).

Обозначим угол закрутки, при котором максимальная интенсивность касательных напряжений ( $\tau$ ) достигает предела текучести ( $\tau_m$ ), через  $\Theta_T$ . Исследуем зависимость крутящего момента ( $M_{кр}$ ) от угла закрутки при  $\Theta > \Theta_T$  ( $i > 1$ ), проводя следующие расчетные этапы.

1. При фиксированном значении  $\Theta > \Theta_T$  на основании поля напряжений, описываемого формулами (5), и условия пластичности  $\tau = \tau_m$  находим зону неупругих деформаций ( $F_p$ ).

2. В найденной области, опираясь на упругое решение (5) и выбранный закон связи  $\gamma \sim y$ , вычисляем мощности винтовых дислокаций.

Из шести компонент тензора несовместности, являющегося базовым понятием при изучении континуальных дефектов, формально остаются два

$$y_{z1\gamma} = 2A \frac{\partial^2 y^*}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 y^p}{\partial y^2}, \quad v_{zzy} = 2 \frac{\partial^2 y^p}{\partial y \partial z} - 2 \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^2}$$

здесь  $y^p$  - пластическая часть деформации; ось  $z$  - выбрана вдоль оси стержня; оси  $x$  и  $y$  расположены в плоскости поперечного сечения.

Независимость напряженного состояния чистого кручения призматических стержней от  $z$  приводит к равенству нулю  $p_a$  и к выводу, что структурные дефекты в данной задаче характеризуются разрывами депланации (перемещения вдоль оси  $z$ ), и наличие дефекта в одной из точек тела приводит к аналогичным разрывам в других точках. При этом речь идет о разрыве депланации, обусловленной только упругой или только пластической частью деформации, а плотность разрывов ( $p_n$ ) определяется соотношением

$$c \rho \quad p \quad \partial a$$

Элементарная мощность винтовой дислокации, вызываемой пластической деформацией в окрестностях некоторой точки, равна

$$d.A = \frac{p}{2\pi} dF, \quad (7)$$

где  $dF$  - элементарная площадь этой окрестности,  $p_m$  - плотность разрывов.

Для расчетов зависимость между интенсивностями касательного напряжения и сдвига задавалась кусочно-постоянной функцией

$$\tau = G y, \quad (\tau < \tau_m); \quad \tau = \tau_m + G(y - i), \quad (\tau > \tau_m),$$

здесь  $G'$  - касательный модуль.

Используя при этом теорию малых упругопластических деформаций, окончательно получим:

$$\gamma_{\alpha}^p = \frac{\tau_{\alpha}}{G'}(1-m)(1-\frac{\tau_m}{\tau_i}), \quad \gamma_p^p = \frac{\tau_p}{G'}(1-m)(1-\frac{\tau_m}{\tau_i}). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6) и (7), находим мощности распределенных винтовых дислокаций.

Для проведения расчетов необходимо знать функцию Прандтля (поток касательных напряжений, вызванный структурным дефектом единичной мощности) в сечении заданной конфигурации. Эта задача решается с использованием электростатической аналогии. Поток касательных напряжений, вызываемый винтовой дислокацией, представляет собой гармоническую функцию, равную нулю на контуре сечения и имеющую логарифмическую особенность в ядре дислокации. Такая функция для профиля Вебера, построенная М.Я. Леоновым, выглядит так:

$$H = \frac{1}{2}AG \ln \left[ \frac{(p_2^2 + p^2 - 2p_2p \cos(\alpha - \alpha_2))(p_4^2 + p^2 - 2p_4p \cos(\alpha - \alpha_4))}{(p_1^2 + p^2 - 2p_1p \cos(\alpha - \alpha_1))(p_3^2 + p^2 - 2p_3p \cos(\alpha - \alpha_3))} \right],$$

где  $A$  - мощность дислокации, ядро которой расположено в некоторой точке сечения;  $l_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) - расстояние от произвольной точки сечения с полярными координатами  $(\alpha, p)$  до ядра дислокации, а также до зарядов  $(l_2, l_3, l_4)$ , снимающих напряженность поля на контуре сечения.

Для найденной функции Прандтля дислокационные напряжения равны:

$$\tau_{p^2}^{\partial} = -\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \tau_{\alpha^2}^{\partial} = \frac{1}{p} \frac{\partial H}{\partial \alpha}.$$

Подсчитывая напряжения, создаваемые распределенными по неупругой области дислокациями, корректируем момент, соответствующий данной закрутке упругого стержня.

Для численных расчетов выбраны следующие значения параметров задачи:

$$G = 0,8 * 10^{11} \text{ Па}; \quad m = \frac{G'}{G} = 0,5; \quad \tau_m = 1,65 * 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \quad \frac{a}{b} = 0,129, \quad b = 1 \text{ м}.$$

На сечение наносилась сетка по направлениям полярных координат. Начало координат располагалось в центре малой окружности. По напряжениям упругого кручения находилось распределение упругой и упругопластической зон.

Для элементов, входящих в неупругую зону, определялись координаты их центров. В данные точки помещались винтовые дислокации, мощность которой определялась по формулам (6) и (7). Проводя суммирование напряжений, вызванных винтовыми дислокациями с напряжениями упругого кручения, находим напряжения, по которым находим упругие деформации.

Складывая их с пластическими (нулевое приближение), находим полную деформацию. Разделяя последнюю (полную деформацию), согласно выбранной связи  $\tau \sim \gamma$ , находим напряжения и конфигурацию упругопластической зоны в первом приближении.

Предложенный метод показал хорошую сходимость. Так напряжения первого и второго приближений отличались друг от друга в пределах 4 процентов. На рис.3 показаны границы упругой и неупругой зоны в следующих случаях: нулевом приближении (упругий случай), первом приближении и втором приближении.

В третьей и четвертой главах рассматривается задача кручения призматических стержней, материал которых имеет зуб текучести на диаграмме напряжений - деформаций; это малоуглеродистые стали, некоторые медные и алюминиевые сплавы. В таком случае полагается, что на начальной стадии неупругого деформирования пластическая деформация локализуется в узких областях - полосах скольжения.

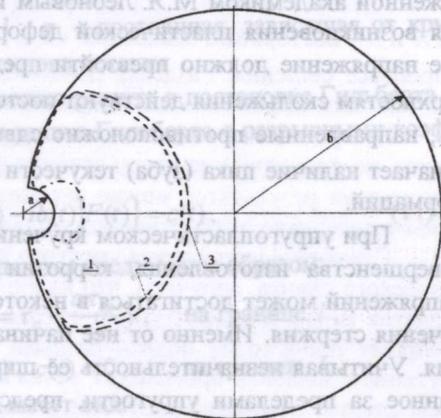


Рис.3.

- a=0,129b;
- 1-нулевое приближение (упругое кручение);
- 2-первое приближение;
- 3-второе приближение

В модели разупрочняющегося упругопластического тела, предложенной академиком М.Я. Леоновым и Н.Ю. Швайко, полагается, что для возникновения пластической деформации максимальное касательное напряжение должно превзойти предел текучести  $\tau_m$  и что по поверхностям скольжения действуют постоянные касательные напряжения  $\tau_c$ , направленные противоположно сдвигу, причем  $\tau_c < \tau_m$ . Последнее означает наличие пика (зуба) текучести на диаграмме напряжений – деформаций.

При упругопластическом кручении круглого вала, вследствие несовершенства изготовления, коррозии металла, предельная величина напряжений может достигаться в некоторой точке контура поперечного сечения стержня. Именно от неё начинается развиваться полоса скольжения. Учитывая незначительность её ширины, твердое тело, деформированное за пределами упругости, представляется как упруго деформированное с поверхностью, на которой произошел разрыв смещений. Задачу об упругопластическом равновесии можно свести к антиплоской задаче теории упругости с разрывами деформации. Длина полосы скольжения заранее предполагается неизвестной и в дальнейшем определяется из условия ограниченности напряжений.

В третьей главе задача решается с помощью функций комплексного переменного. Отыскивается кусочно-аналитическая функция, определенная в многосвязной области. Для задачи Римана, где краевое условие задается в комплексной форме, это обстоятельство не оказывает существенного влияния на решение. Однозначное выполнение краевого условия приводит к замкнутому решению. Иначе обстоит дело в том случае, когда аналитическая функция отыскивается по краевому условию, задаваемому в действительной форме, как это имеет место в задаче Гильберта. Здесь порядок связности области существенно влияет на разрешимость краевой задачи и на число ее решений.

В данной задаче находится функция

$$F(z) = \Phi^+(z) = U(x, y) + iV(x, y),$$

кусочно-аналитическая в области  $D$ , которая ограничена окружностью  $L(x, y) \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$  и имеет разрез  $l$  по оси  $y$  ( $x=0, m \leq y \leq a$ ) длиной  $h = a - m$ . Начало координат выбрано в центре круга. Функция  $F(z)$  удовлетворяет условиям:

$$U(x, y) = \tau_c - \frac{\alpha \tau_m}{a} y, \text{ при } (x=0, m \leq y \leq a). \quad (9)$$

$$U_0(t)U(t) + V_0(t)V(t) = 0, \text{ при } (x^2 + y^2 = a^2). \quad (10)$$

где  $U_0(t), V_0(t)$  – функции точек, лежащих на контуре  $L$ , удовлетворяющие условию  $U_0(t) + V_0(t) = 1$ ;  $\alpha$  – постоянная, зависящая от крутящего момента и размера поперечного сечения

Рассматриваемую задачу можно решить в постановке Гильберта с учетом решения Римана. Краевая задача Гильберта с разрывными коэффициентами записывается в виде

$$\operatorname{Re} \{ [a(t) - ib(t)] F(t) \} = c(t), \quad (11)$$

где разрывные коэффициенты задаются следующим образом:

$$a(t) = 1, \quad b(t) = 0, \quad c(t) = \tau_c - \frac{\alpha \tau_m}{a} y, \quad \text{на границе } l;$$

$$a(t) = U_0(t), \quad b(t) = V_0(t), \quad c(t) = 0, \quad \text{на границе } L.$$

Соответствующая задача Римана имеет вид:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (12)$$

тогда  $G(t), g(t)$  – функции точек на границах области имеют значения:

$$G(t) = \begin{cases} 1, & \text{на } l \\ -e^{-2i\theta}, & \text{на } L \end{cases}; \quad g(t) = \begin{cases} -2iU(t), & \text{на } l \\ 0, & \text{на } L \end{cases} \quad \text{где } e^{i\theta} = U(t) + iV(t).$$

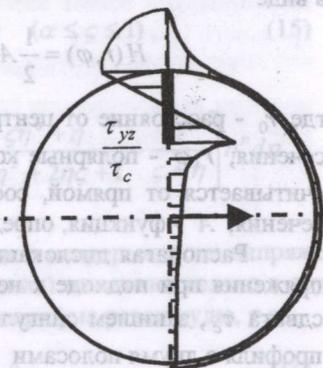
Особенность решения задачи в том, что искомая кусочно-аналитическая функция, удовлетворяющая краевому условию на границе  $L$  – с линией скачков  $l$ , является кусочно-аналитической функцией, удовлетворяющей краевому условию на линии скачков  $l$ , с линией особенностей  $L$ .

Из условия ограниченности напряжений определяется длина полосы скольжения. Вычисляя интеграл, типа Коши,

$$\int_m^a \frac{At + B}{\sqrt{(t-m)(t-a)}} dt = 0 \quad (13)$$

и разрешая полученное выражение относительно  $m$ , находится координаты конца полосы скольжения.

После уравнивания граничных условий, по методике В.Д. Гахова, эта кусочно-аналитическая функция примет вид



К

Рис.4.

Используя при этом теорию малых упругопластических деформаций, окончательно получим:

$$\gamma_{\alpha}^p = \frac{\tau_{\alpha}}{G'}(1-m)(1-\frac{\tau_m}{\tau_i}), \quad \gamma_p^p = \frac{\tau_p}{G'}(1-m)(1-\frac{\tau_m}{\tau_i}). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6) и (7), находим мощности распределенных винтовых дислокаций.

Для проведения расчетов необходимо знать функцию Прандтля (поток касательных напряжений, вызванный структурным дефектом единичной мощности) в сечении заданной конфигурации. Эта задача решается с использованием электростатической аналогии. Поток касательных напряжений, вызываемый винтовой дислокацией, представляет собой гармоническую функцию, равную нулю на контуре сечения и имеющую логарифмическую особенность в ядре дислокации. Такая функция для профиля Вебера, построенная М.Я. Леоновым, выглядит так:

$$H = \frac{1}{2}AG \ln \left[ \frac{(p_2^2 + p^2 - 2p_2p \cos(\alpha - \alpha_2))(p_4^2 + p^2 - 2p_4p \cos(\alpha - \alpha_4))}{(p_1^2 + p^2 - 2p_1p \cos(\alpha - \alpha_1))(p_3^2 + p^2 - 2p_3p \cos(\alpha - \alpha_3))} \right],$$

где  $A$  - мощность дислокации, ядро которой расположено в некоторой точке сечения;  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) - расстояние от произвольной точки сечения с полярными координатами  $(\alpha, p)$  до ядра дислокации, а также до зарядов  $(l_2, l_3, l_4)$ , снимающих напряженность поля на контуре сечения.

Для найденной функции Прандтля дислокационные напряжения равны:

$$\tau_{pz}^o = -\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \tau_{\alpha z}^o = \frac{1}{p} \frac{\partial H}{\partial \alpha}.$$

Подсчитывая напряжения, создаваемые распределенными по неупругой области дислокациями, корректируем момент, соответствующий данной закрутке упругого стержня.

Для численных расчетов выбраны следующие значения параметров задачи:

$$G = 0,8 * 10^{11} \text{ Па}; \quad m = \frac{G'}{G} = 0,5; \quad \tau_m = 1,65 * 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \quad \frac{a}{b} = 0,129, \quad b = 1 \text{ м}.$$

На сечение наносилась сетка по направлениям полярных координат. Начало координат располагалось в центре малой окружности. По напряжениям упругого кручения находилось распределение упругой и упругопластической зон. Для элементов, входящих в неупругую зону, определялись координаты их центров. В данные точки помещались винтовые дислокации, мощность которой определялась по формулам (6) и (7). Проводя суммирование напряжений, вызванных винтовыми дислокациями с напряжениями упругого кручения, находим напряжения, по которым находим упругие деформации. Складывая их с пластическими (нулевое приближение), находим полную деформацию. Разделяя последнюю (полную деформацию), согласно выбранной связи  $\tau \sim \gamma$ , находим напряжения и конфигурацию упругопластической зоны в первом приближении.

Предложенный метод показал хорошую сходимость. Так напряжения первого и второго приближений отличались друг от друга в пределах 4 процентов. На рис.3 показаны границы упругой и неупругой зоны в следующих случаях: нулевом приближении (упругий случай), первом приближении и втором приближении.

В третьей и четвертой главах рассматривается задача кручения призматических стержней, материал которых имеет зуб текучести на диаграмме напряжений - деформаций; это малоуглеродистые стали, некоторые медные и алюминиевые сплавы. В таком случае полагается, что на начальной стадии неупругого деформирования пластическая деформация локализуется в узких областях - полосах скольжения.

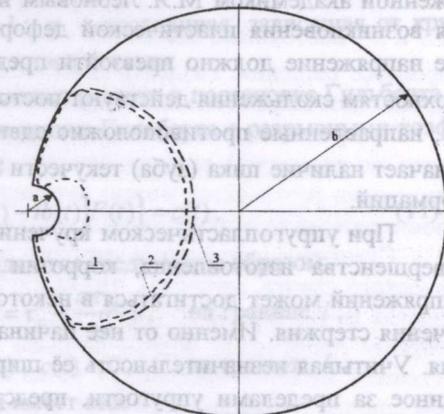


Рис.3.

$a=0,129b$ ;

1-нулевое приближение (упругое кручение);

2-первое приближение;

3-второе приближение

В модели разупрочняющегося упругопластического тела, предложенной академиком М.Я. Леоновым и Н.Ю. Швайко, полагается, что для возникновения пластической деформации максимальное касательное напряжение должно превзойти предел текучести  $\tau_m$  и что по поверхностям скольжения действуют постоянные касательные напряжения  $\tau_c$ , направленные противоположно сдвигу, причем  $\tau_c < \tau_m$ . Последнее означает наличие пика (зуба) текучести на диаграмме напряжений – деформаций.

При упругопластическом кручении круглого вала, вследствие несовершенства изготовления, коррозии металла, предельная величина напряжений может достигаться в некоторой точке контура поперечного сечения стержня. Именно от неё начинается развиваться полоса скольжения. Учитывая незначительность её ширины, твердое тело, деформированное за пределами упругости, представляется как упруго деформированное с поверхностью, на которой произошел разрыв смещений. Задачу об упругопластическом равновесии можно свести к антиплоской задаче теории упругости с разрывами деформации. Длина полосы скольжения заранее предполагается неизвестной и в дальнейшем определяется из условия ограниченности напряжений.

В третьей главе задача решается с помощью функций комплексного переменного. Отыскивается кусочно-аналитическая функция, определенная в многосвязной области. Для задачи Римана, где краевое условие задается в комплексной форме, это обстоятельство не оказывает существенного влияния на решение. Однозначное выполнение краевого условия приводит к замкнутому решению. Иначе обстоит дело в том случае, когда аналитическая функция отыскивается по краевому условию, задаваемому в действительной форме, как это имеет место в задаче Гильберта. Здесь порядок связности области существенно влияет на разрешимость краевой задачи и на число ее решений.

В данной задаче находится функция

$$F(z) = \Phi^+(z) = U(x, y) + iV(x, y),$$

кусочно-аналитическая в области  $D$ , которая ограничена окружностью  $L(x, y) \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$  и имеет разрез  $l$  по оси  $y$  ( $x=0, m \leq y \leq a$ ) длиной  $h = a - m$ . Начало координат выбрано в центре круга. Функция  $F(z)$  удовлетворяет условиям:

$$U(x, y) = \tau_c - \frac{\alpha \tau_m}{a} y, \text{ при } (x=0, m \leq y \leq a). \quad (9)$$

$$U_0(t)U(t) + V_0(t)V(t) = 0, \text{ при } (x^2 + y^2 = a^2). \quad (10)$$

где  $U_0(t), V_0(t)$  – функции точек, лежащих на контуре  $L$ , удовлетворяющие условию  $U_0(t) + V_0(t) = 1$ ;  $\alpha$  – постоянная, зависящая от крутящего момента и размера поперечного сечения

Рассматриваемую задачу можно решить в постановке Гильберта с учетом решения Римана. Краевая задача Гильберта с разрывными коэффициентами записывается в виде

$$\operatorname{Re} \{ [a(t) - ib(t)] F(t) \} = c(t), \quad (11)$$

где разрывные коэффициенты задаются следующим образом:

$$a(t) = 1, \quad b(t) = 0, \quad c(t) = \tau_c - \frac{\alpha \tau_m}{a} y, \quad \text{на границе } l;$$

$$a(t) = U_0(t), \quad b(t) = V_0(t), \quad c(t) = 0, \quad \text{на границе } L.$$

Соответствующая задача Римана имеет вид:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (12)$$

тогда  $G(t), g(t)$  – функции точек на границах области имеют значения:

$$G(t) = \begin{cases} 1, & \text{на } l \\ -e^{2i\theta}, & \text{на } L \end{cases}; \quad g(t) = \begin{cases} -2iU(t); & \text{на } l \\ 0 & \text{на } L \end{cases} \quad \text{где } e^{i\theta} = U(t) + iV(t).$$

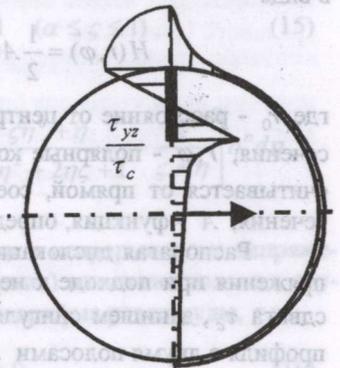
Особенность решения задачи в том, что искомая кусочно-аналитическая функция, удовлетворяющая краевому условию на границе  $L$  – с линией скачков  $l$ , является кусочно-аналитической функцией, удовлетворяющей краевому условию на линии скачков  $l$ , с линией особенностей  $L$ .

Из условия ограниченности напряжений определяется длина полосы скольжения. Вычисляя интеграл, типа Коши,

$$\int_m^a \frac{At + B}{\sqrt{(t-m)(t-a)}} dt = 0 \quad (13)$$

и разрешая полученное выражение относительно  $m$ , находится координаты конца полосы скольжения.

После уравнивания граничных условий, по методике В.Д. Гахова, эта кусочно-аналитическая функция примет вид



К

Рис.4.

$$\Phi^+(z) = -\frac{i}{2} \left[ Az + B - B \frac{z^2}{a^2} + \frac{B}{a^2 \sqrt{ma}} R(z)z \right], \quad (14)$$

где  $A$  и  $B$  - постоянные зависящие от  $\alpha$ ,  $\tau_m$  и  $\tau_c$ ; а  $R(z)$  - вычисляется в процессе решения. Разделяя действительную и мнимую часть функции, находим выражения для напряжений в любой точке области  $D$ .

Распределение напряжений в круглом стержне, имеющем полосу сдвига, по диаметру и контуру сечения показано на рис.4. На основании полученных результатов можно заключить, что дополнительное напряженное состояние от пластического сдвига носит локальный характер.

Суммируя напряжения упругого решения с напряжениями от пластического сдвига, получаем, что наиболее напряженной точкой сечения является точка  $K$ , лежащая на противоположном конце диаметра, по которому происходит полоса разрыва перемещений. При увеличении крутящего момента происходит незначительное увеличение длины полосы сдвига. Отношение крутящего момента, отвечающего началу возникновения пластического сдвига, к моменту, при котором в точке  $K$  напряжения достигли величины  $\tau_m$ , равнялось 1,12.

**В четвертой главе** приводится приближенное решение задачи кручения упругопластического призматического стержня круглого профиля с одной и двумя полосами скольжения.

Примем, что структурные дефекты (винтовые дислокации) распределены по полосам скольжения. Функция потока касательных напряжений, вызванная дислокацией, для круглого профиля записывается в виде

$$H(r, \varphi) = \frac{1}{2} AG \ln \frac{r^2 r_0^2 - 2r a^2 r_0 \cos \varphi + a^4}{a^2 (r^2 - 2r r_0 \cos \varphi + r_0^2)},$$

где  $r_0$  - расстояние от центра сечения до ядра дислокации;  $a$  - радиус сечения;  $r, \varphi$  - полярные координаты произвольной точки, угол  $\varphi$  отсчитывается от прямой, соединяющей структурный дефект с центром сечения;  $A$  - функция, определяющая мощность дислокации.

Располагая дислокации вдоль линий сдвига, и требуя, чтобы напряжения при подходе к ней слева и справа были равны напряжениям сдвига  $\tau_c$ , запишем сингулярное интегральное уравнение для круглого профиля с двумя полосами

$$G \int_m^a \left[ \frac{1}{r-r_0} - \frac{r r_0^2 - a^2 r_0}{r^2 r_0^2 - 2r a^2 r_0 + a^4} - \frac{r r_0^2 + a^2 r_0}{r^2 r_0^2 + 2r a^2 r_0 + a^4} + \frac{1}{r+r_0} \right] \times \\ \times A(r_0) dr_0 + \frac{M_{кр}}{J_p} r = \tau_c;$$

где  $m$  - начало полосы скольжения.

Проводя преобразования

$$\frac{r}{a} = \zeta, \quad \frac{r_0}{a} = \eta, \quad \frac{m}{a} = \alpha, \quad A(r_0) = A(a\eta) = aA_0(\eta),$$

приходим к следующему интегральному уравнению

$$\int_{\alpha}^1 \left[ \frac{1}{\zeta - \eta} - \frac{\zeta \eta^2 - \eta}{\zeta^2 \eta^2 - 2\eta \zeta + 1} - \frac{\zeta \eta^2 + \eta}{\zeta^2 \eta^2 + 2\eta \zeta + 1} + \frac{1}{\zeta + \eta} \right] \times \\ \times A_0(\eta) d\eta + \frac{M}{GJ_p} \zeta = \frac{\tau_c}{Ga} \\ (\alpha \leq \zeta \leq 1).$$

Приближенное решение сингулярного уравнения будем искать в виде полинома  $i$ -ой степени с неизвестными коэффициентами  $k_n$

$$A_0(\eta) = \frac{\tau_c}{Ga} \sum_{n=0}^i k_n \eta^n \quad (\alpha \leq \eta \leq 1).$$

Подставляя эту функцию в интегральное уравнение, имеем

$$\sum_{n=0}^i k_n J_n(\alpha, \zeta) + \frac{M_{кр}}{\tau_c J_p} \zeta a = 1 \quad (\alpha \leq \zeta \leq 1), \quad (15)$$

где введено обозначение

$$J_n(\alpha, \zeta) = \int_{\alpha}^1 \left[ \frac{1}{\zeta - \eta} - \frac{\zeta \eta^2 - \eta}{\zeta^2 \eta^2 - 2\eta \zeta + 1} - \frac{\zeta \eta^2 + \eta}{\zeta^2 \eta^2 + 2\eta \zeta + 1} + \frac{1}{\zeta + \eta} \right] \eta^n d\eta \\ (n = 0, 1, \dots, i).$$

Обеспечение условия ограниченности и непрерывности напряжений в точке  $r = m$  (в конце полосы скольжения) возможно только в случае, когда в этой точке коэффициент при логарифме равен нулю, т.е.

$$\sum_{n=0}^i k_n \alpha^n = 0. \quad (16)$$

Данное равенство служит для определения величины  $\alpha$ , через которую находится длина полос скольжения:  $h = a - m = a(1 - \alpha)$ .

Для определения коэффициентов  $k_n$  ( $n = 0, 1, \dots, i$ ) полинома  $A_0(\eta)$  потребуем удовлетворения равенства (15) в  $i+1$  различных точках  $\alpha \leq \zeta_j \leq 1$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, i$ ). Тогда получим

$$\sum_{n=0}^i k_n J_n(\alpha, \zeta_j) + \frac{M_{кр}}{\tau_c J_p} \zeta_j a = 1 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, i)$$

Эти равенства совместно с условием (16) составляют полную систему уравнений для определения  $i+2$  неизвестных  $\alpha$  и  $k_n$  ( $n = 0, 1, \dots, i$ )

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^i k_n J_n(\alpha, \zeta_j) + \frac{M_{кр}}{\tau_c J_p} \zeta_j a = 1 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, i); \\ \sum_{n=0}^i k_n \alpha^n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Однако решение этой системы уравнений при заданном отношении  $M_{кр}/\tau_c$  затруднительно. Поэтому считаем заданной величину  $\alpha$ , и определяем  $M_{кр}/\tau_c$ , т.е. по заданной длине полос скольжения будем находить нагрузку, действующую на стержень. Относительно неизвестных  $k_n$  система (17) является линейной и разрешимой. Решая её, найдем зависимость коэффициентов  $k_n$  полинома  $A_0(\eta)$  и нагрузки  $M_{кр}$  от величины  $\alpha$ . Таким образом, найдено приближенное решение интегрального уравнения.

Определив функцию  $A_0(\eta)$  при заданной глубине полос сдвига, получим выражения для определения напряжений в произвольной точке контура сечения и вдоль диаметра с полосами скольжения.

$$G \int_m^a \left[ \frac{r a^2 - a^2 r_0 \cos \varphi}{r^2 a^2 - 2r a^2 r_0 \cos \varphi + a^2 r_0^2} - \frac{r r_0^2 - a^2 r_0 \cos \varphi}{r^2 r_0^2 - 2r a^2 r_0 \cos \varphi + a^4} + \frac{r a^2 + a^2 r_0 \cos \varphi}{r^2 a^2 + 2r a^2 r_0 \cos \varphi + a^2 r_0^2} - \frac{r r_0^2 + a^2 r_0 \cos \varphi}{r^2 r_0^2 + 2r a^2 r_0 \cos \varphi + a^4} \right] A(r_0) dr_0 + \frac{M_{кр}}{J_p} r = \tau_\varphi(r, \varphi).$$

Зная напряжения, можно проанализировать напряженное состояние профиля. Отношение  $M_{кр}/M_m$ , когда напряжения в точках, лежащих на пересечении контура и диаметра перпендикулярного полосам скольжения достигают  $\tau_m$ , равно 1,36.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

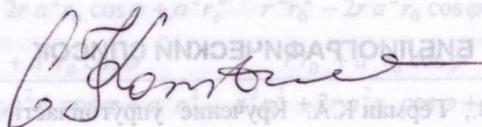
На основании предложенной работы можно сделать следующие выводы:

1. Моделью кристалла с дислокациями служит сплошное упругое тело с такими дислокациями Вольтера, каждая из которых вполне определяется заданием линии и одинакового для всех ее точек вектора скачка перемещения. При этом поле напряжений непрерывно продолжается через поверхность разреза. Напряженное состояние в неупругом теле описывается решением задачи теории упругости при соответствующем распределении структурных дефектов.
2. Упругопластическая деформация при кручении сопровождается появлением и ростом винтовых дислокаций.
3. Мощность винтовых дислокаций определяется величиной пластической деформации, что подтверждается экспериментально.
4. Предложен метод решения задач упругопластического кручения с использованием структурных дефектов.
5. Показана высокая точность приведенных приближенных расчетов.
6. Для материалов, обладающих зубом текучести, задача упругопластического кручения может быть сведена к краевой задаче теории упругости с разрывами перемещений.
7. Найдены напряжения для круглого вала с одной и двумя полосами сдвига.
8. Предложен приближенный метод решения задачи упругопластического кручения для материала с зубом текучести. Расхождение точного и приближенного решений не превышало 10 процентов.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тютюкин Г.В., Герман К.А. Кручение упругопластических упрочняющихся стержней с выточкой. // Вестник КТУ им. И. Раззакова, №2. – Бишкек, изд.КТУ, 1999. – С. 75-80.
2. Тютюкин Г.В., Герман К.А. Кручение упругопластических упрочняющихся стержней //Материалы международной научной конфе-

- ренции «Технологии и перспективы современного инженерного образования, науки и производства». – Бишкек, 1999. – С. 267-271.
3. German K.A. Solution of a boundary value problem of Hilbert with the help of piecewise – analytical function for antiplane strain of the round shaft. // V Russian – Chinese international symposium “Advanced materials and processes” – Baikalsk, Russia, 1999. – p. 70-71.
  4. Тютюкин Г.В., Герман К.А. Кручение односвязных неупругих стержней //Тезисы докладов XVII международной научной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов». – Санкт-Петербург, 1999. – С. 54.
  5. Тютюкин Г.В., Герман К.А. Кручение односвязных неупругих стержней //Сб. докладов XVII международной научной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов». – Санкт-Петербург, 1999. – С. 82-87.
  6. Герман К.А. Начальная стадия трещины //Сб. докладов международной конференции «Геодинамика и напряженное состояние земных недр». – Новосибирск, 1999.
  7. Тютюкин Г.В., Герман К.А. Уругопластическое кручение профиля Вебера //Тезисы докладов V международной научной конференции КРСУ «Проблемы и перспективы интеграции образования». – Бишкек, 1998. – С. 21.
  8. Тютюкин Г.В., Герман К.А. Физико-механические основы уругопластического кручения //Тезисы докладов VI международной научной конференции КРСУ посвященной 200-летию А.С. Пушкина в Кыргызстане – Бишкек, 2000. – С. 9-10.
  9. Жданов Н.В., Герман К.А. Решение краевой задачи Гильберта с помощью кусочно-аналитической функции, при антиплоской деформации круглого вала //Сборник научных трудов международной научно-теоретической конференции посвященной 5-летию образования КРСУ – Бишкек., изд. Славянского университета, 2000. – С. 138-142.



Подписано к печати 5.10.2000. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Офсетная печать. Объем 1,25 п.л.  
Тираж 100 экз. Заказ 172.

Издательство Славянского университета

Отпечатано в типографии КРСУ, г.Бишкек, ул.Шопокова, 68.