НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж. БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.12.001

На правах рукописи

УДК 517.968.74

ТЕМИРОВ МАЙРАМБЕК АКБАГЫШОВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Бишкек – 2014

Работа выполнена в лаборатории теории интегро-дифференциальных уравнений Института теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, с.н.с. **Искандаров С.**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН КР **Алымкулов К.,** доктор физико-математических наук, доцент **Аблабеков Б.С.**
Ведущая организация:	Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева. Адрес: Республика Казахстан, 010008, г. Астана, ул. Мирзояна, 2

Защита диссертации состоится « 19 » декабря 2014 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.12.001 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико–математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус №6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан “___” ________2014 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета, к.э.н., доцент Чороев К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

В монографии Б.С. Разумихина (1988 г.) написано: «Определяющим свойством математических объектов, называемых эредитарными системами, или системами с последействием, является зависимость изменения состояния в каждой момент времени от предыстории процесса, т.е. от непрерывной или дискретной совокупности состояний, предшествующих данному.

Такие системы, впервые введенные и исследованные в классических трудах Вито Вольтерра, представляют интерес не только в силу обилия новых и увлекательных проблем построения математической теории, но и в связи с весьма обширными и важными приложениями в качестве математических моделей биологии, экологии, экономики, механики, теории управления сложными системами».

Во многих практически важных случаях математическими моделями получаются интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) типа Вольтерра с запаздываниями. Например, в статье М.И Гомоюнова и Н.Ю. Лукоянова (2012 г.) при рассмотрении динамической системы, описываемую функционально-дифференциальным уравнением с учетом последействия как по состоянию, так и по управлению, появляется именно такая модель.

В обзорной книге А.Т. Григорьяна и Б.Н. Фрадлина (1977 г.) отмечено, что при исследовании вопросов устойчивости систем автоматического регулирования в ряде случаев необходимо учитывать запаздывание воздействий и сигналов. Это приводит к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом.

В монографии В.Б. Колмановского и В.Р. Носова (1981 г.) приведены ДУ с запаздывающими аргументами, описывающие автоматическую стабилизацию курса судна, работу авиационной силовой установки, ядерного реактора с учетом предыстории этих процессов.

Как отмечено в монографии В. Вольтерра (1976 г.) и в статье С. Искандарова (2008 г.), дифференциальные уравнения (ДУ) с запаздываниями можно привести к ИДУ типа Вольтерра с запаздываниями введением некоторого ядра. Идея введения некоторого ядра содержится также в статье М.Р.М. Рао и П. Сринивас (1985 г.).

Необходимость изучения вопросов устойчивости, выше отмеченных процессов по истечении времени, приводит к исследованию асимптотических свойств решений ИДУ типа Вольтерра с запаздываниями при неограниченном возрастании независимой переменной.

В монографиях А.Д. Мышкиса (1972 г.), Н.Н. Красовского (1959 г.), Р. Беллмана и К.Л. Кука (1967 г.), В.А. Тышкевича (1981 г.), В.Б. Колмановского и В.Р. Носова (1981 г.), В. Резвана (1983 г.), T.A. Burton’ a (2005 г.), Дж. Хейла (1984 г.), Б.С. Разумихина (1988 г.), G. Gripenberg’a, S. - O. Londen’a and O. Staffans’a (1990 г.), Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Л.Ф.

Рахматуллиной (1991 г., 2002 г.), М.К. Дауылбаева (1999 г.) обоснована теоретическая и практическая необходимость изучения различных качественных свойств решений функционально-дифференциальных уравнений, включающие в себя многие классы ИДУ типа Вольтерра с запаздываниями.

Этими определяется актуальность темы настоящей диссертации.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами.

Работа выполнена в рамках проектов НИР Института теоретической и прикладной математики НАН КР: «Развитие и приложения аналитических, асимптотических и вычислительных методов в теории динамических систем» (2006-2007 гг.), номер гос. регистрации № 0003851; «Асимптотические, аналитические и численные методы в теории нестационарных систем, описываемых дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями, и их приложения» (2008-2010 гг.), номер гос. регистрации № 0005171; «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем» (2011-2013), номер гос. регистрации № 0006227; «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач и в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» (2012-2014), номер гос. регистрации № 0005756. Результаты работы включены в отчеты по этим проектам.

Цели и задачи исследования.

Развитием качественных методов, разработанных в ИТПМ НАН КР, исследовать ограниченность, степенную абсолютную интегрируемость на полуоси, стремление к нулю при неограниченном возрастании независимой переменной решений слабо нелинейных ИДУ первого, второго, третьего, четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с запаздываниями, в том числе неявных ИДУ первого и второго порядков. Выявить влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность решений соответствующих ДУ первого и второго порядков с запаздываниями и без запаздываний, а также на ограниченность решений - ИДУ второго порядка без запаздываний.

Методика исследования.

Применяются метод преобразования уравнений В. Вольтерра, а также метод весовых и срезывающих функций, метод внутренней функции, нестандартные методы сведения к системе, метод интегральных неравенств с запаздываниями, разработанные в ИТПМ НАН КР.

Научная новизна работы.

Установлены достаточные условия, гарантирующие АС (ограниченность, степенную абсолютную интегрируемость на полуоси, стремление к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной) всех решений слабо нелинейных ИДУ первого, второго, третьего, четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с запаздываниями, в том числе неявных ИДУ первого и второго порядков. Эти АС изучены также для первых производных всех решений ИДУ второго порядка; для первых и вторых производных всех решений ИДУ третьего порядка; для первых, вторых и третьих производных всех решений ИДУ четвертого порядка. Для ИДУ пятого порядка изучены ограниченность на полуоси производных всех решений до четвертого порядка включительно.

Выявлено влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность решений соответствующих ДУ первого и второго порядков с запаздываниями и без запаздываний, а также на ограниченность решений - ИДУ второго порядка без запаздываний. Также показаны влияние запаздываний и необходимость введения некоторой положительной весовой функции для выполнимости условий в случае ИДУ типа Вольтерра первого и второго порядков с запаздываниями.

Показано, что коэффициенты, ядра и свободные члены ИДУ третьего, четвертого и пятого порядков могут быть недифференцируемыми на полуоси.

Отметим, что из результатов для ИДУ типа Вольтерра второго, третьего, четвертого и пятого порядков с запаздываниями вытекают новые результаты для АС решений соответствующих ДУ второго, третьего, четвертого и пятого порядков с запаздываниями.

Теоретическая и практическая ценность.

Настоящая работа носит теоретический характер и ее результаты могут найти применение в качественной теории функционально-дифференциальных уравнений и новых классов ИДУ типа Вольтерра с запаздываниями; при качественном исследовании некоторых процессов из биологии, экологии, экономики, механики, теории управления сложными системами.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

Достаточные условия:

– ограниченности всех решений одного класса слабо нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра с запаздываниями в случае, когда соответствующее слабо нелинейное ДУ первого порядка с запаздываниями может иметь неограниченные решения;

– ограниченности и стремления к конечным пределам (стабилизации) любого решения неявного ИДУ первого порядка типа Вольтерра с запаздываниями в случае, когда соответствующее слабо нелинейное ДУ первого порядка с запаздываниями может иметь неограниченные решения;

– наличия оценки, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, степенной абсолютной интегрируемости всех решений, ограниченности интеграла от всех решений слабо нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра с запаздываниями;

– ограниченности всех решений и их первых производных слабо нелинейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра с запаздываниями в случае, когда влияют интегральный член типа Вольтерра с первой производной и запаздывания в первой производной искомой функции на ограниченность решений соответствующего ДУ без запаздываний;

– ограниченности всех решений и их первых производных слабо нелинейного неявного ИДУ второго порядка типа Вольтерра с запаздываниями в случае, когда все ненулевые решения соответствующих линейных однородных и неоднородных ДУ без запаздываний могут быть неограниченными;

– асимптотического представления (оценки), ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному закону, всех решений и их первых и вторых производных слабо нелинейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра с запаздываниями;

– устойчивости (ограниченности всех решений и их производных до третьего порядка включительно) решений слабо нелинейного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра с запаздываниями;

– наличия оценки и АС всех решений и их производных до третьего порядка включительно слабо нелинейного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра с запаздываниями;

– устойчивости (ограниченности всех решений и их производных до четвертого порядка включительно) решений слабо нелинейного ИДУ пятого порядка типа Вольтерра с запаздываниями.

<u>Апробация результатов диссертации.</u>

Результаты настоящей работы доложены и обсуждены на:

– научном семинаре отдела математики КТУ «Манас» (рук. - д.ф.-м.н., проф. А.Асанов, дек. 2012 г.);

– Международной юбилейной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященной 15 - летию образования Кыргызско - Российского Славянского университета (Бишкек, КРСУ, сент. 2008 г.);

– III конгрессе Всемирного математического общества тюркоязычных стран (г. Алматы, в КазНУ им. Аль-Фараби, 30 июня - 4 июля 2009 г.);

– III Международной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 60-летию академика А.А. Борубаева (г. Бишкек, КРСУ, сент. 2010 г.);

– IV Международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 80-летию академика М.И. Иманалиева (г. Бишкек - с. Бостери, Иссык-Кульская обл., сент. 2011 г.).

<u>Публикации по теме диссертации.</u>

Основное содержание диссертации опубликовано в 11 работах [1-11], из них: 8 статьи [1, 3 - 9], 1 доклад в материалах конференции [2] и 2 тезисы докладов [10, 11]. В совместных работах [1 - 5, 8, 10, 11] постановка задачи и обсуждение результатов принадлежит С. Искандарову, доказательство теорем, следствий и построение иллюстративных примеров - автору.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих 15 разделов, выводов и списка использованной литературы, 120 стр. компьютерного текста.

В автореферате использована система нумерации, принятая в диссертации: двойная сквозная нумерация внутри каждой главы. Например, теорема 1.5 означает пятая теорема первой главы, (2.7) - седьмая формула второй главы.

Краткое содержание диссертации.

Введем обозначения:

Все переменные и постоянные величины являются вещественными; символ «∞» означает «$+\infty$»; символ «$\in$» означает «принадлежит» ; $R=(-\infty,\infty)$ - числовая ось; $R_+=[0,\infty)$ - полуось; $J=[t_0,\infty)$ - бесконечный полуинтервал, $t_0\in R$; запись $t\ge t_0$ означает $t\in J$; $C^k(J,R)$ - пространство функций, определенных и k раз непрерывно дифференцируемых на полуинтервале J со значениями из R. $L^p(J,R)\,(p>0)$ - пространство абсолютно интегрируемых на полуинтервале J в p-й степени функций со значениями в R, т.е. $x(t)\in L^p(J,R)\,(p>0)\Leftrightarrow\int_{t_0}^{\infty}|x(t)|^p dt<\infty\ (p>0)$. Это означает степенную абсолютную интегрируемость функции $x(t)$ на полуинтервале J; $L^1(J,R_+)$ - пространство неотрицательных функций, интегрируемых на J; $x(t)=O(1), t\in J\Leftrightarrow\exists$ const $M>0$ такая, что $|x(t)|\le M$. В этом случае говорят, что функция $x(t)$ ограничена на бесконечном полуинтервале J.

Если $\exists\,\alpha$ - const > 0 такая, что $x(t)=e^{-\alpha t}O(1), t\in J,$ то говорят, что функция $x(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$ по экспоненциальному закону. Если $\exists\,\beta,\gamma$ - const > 0 такие, что $x(t)=(t+\beta)^{-\gamma}O(1), t\in J, t_0=0,$ то говорят, что функция $x(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$ по степенному закону. ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение. ДУ - дифференциальное уравнение. СН - слабо нелинейное. УЗ - условия запаздывания. Неявное ИДУ - ИДУ, неразрешенное относительно производной в линейном интегральном члене.

АС - асимптотическое свойство. Под АС решений понимается АС решений при $t\in J, t\to\infty,$ а именно ограниченность на J, принадлежность пространству $L^p(J,R)\,(p>0)$ и стремление к нулю решений при $t\to\infty,$ в том числе по экспоненциальному и степенному закону при $t\to\infty.$

Условия типа знака функций означают, что на функции налагаются условия, использующие знаки: $>0,\ <0,\ \geq 0,\ \leq 0,\ >,\ \geq,\ <,\ \leq,$ а также условия, связанные посредством символов $\lim, \max, \min, \sup, \inf$.

Условия типа немалости членов означают комбинацию условий типа знака функций и абсолютной сходимости несобственных интегралов.

Нестандартные методы сведения к системе означают сведение ИДУ высокого порядка к системе, состоящей из ДУ и ИДУ первого и второго порядков.

Будем говорить, что выполняются условия СН для функций $F_k(t,x_k,\ y_k,z_k,u_k,v_k,w_k),\ H_k(t,\tau,p_k,\ q_k,r_k,\mu_k,\rho_k)\ \ (k=1..n)$, если выполнены условия :

$$|F_k(t,x_k,\ y_k,z_k,u_k,v_k,w_k)| \leq F_{k0}(t)+g_{k0}(t)|x_k|+g_{k1}(t)|y_k|+g_{k2}(t)|z_k|+$$
$$+g_{k3}(t)|u_k|+g_{k4}(t)|v_k|+g_{k5}(t)|w_k|,$$
$$|H_k(t,\tau,p_k,\ q_k,r_k,\mu_k,\rho_k)| \leq H_{k0}(t,\tau)+h_{k0}(t,\tau)|p_k|+h_{k1}(t,\tau)|q_k|+h_{k2}(t,\tau)|r_k|+$$
$$+h_{k3}(t,\tau)|\mu_k|+h_{k4}(t,\tau)|\rho_k|$$

с коэффициентами

$$F_{k0}(t)\geq 0,\ g_{kj}(t)\geq 0,\ g_{k5}(t)\geq 0,\ H_{k0}(t)\geq 0, h_{kj}(t,\tau)\geq 0,\ \ (k=1..m;\ j=0,1,2,3,4).$$

В работе речь идет о решениях $x(t)\in C^k(J,R)$ слабо нелинейных ИДУ типа Вольтерра k - го порядка $(k=1,2,3,4,5)$ с условиями СН и запаздываниями, с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)\ \ (k=0,1,2,3,4)$ и с начальным множеством $E_{t_0}=\{t_0\}$. Как известно, в силу условий СН такие решения для этих уравнений существуют.

Переходим к изложению краткого содержания настоящей работы.

В главе 1, состоящей из четырех разделов, приводятся обзор работ других авторов по теме диссертации, леммы о некоторых интегральных преобразованиях, леммы об интегральных неравенствах с запаздываниями и заключение.

В разделе 1.1 приведен обзор работ других авторов по асимптотическим свойствам решений ИДУ типа Вольтерра с запаздываниями, близких по содержанию нашей работе.

В разделе 1.2 сформулированы леммы о некоторых интегральных преобразованиях, используемые в нашей работе.

В разделе 1.3 приведены леммы об интегральных неравенствах с запаздываниями, которые применяются в настоящей диссертации.

В разделе 1.4 дано заключение работе, проделанной в главе 1.

Глава 2, состоящая из шести разделов, посвящена исследованию асимптотических свойств решений ИДУ первого порядка и ограниченности решений и их первых производных ИДУ второго порядка с запаздываниями, развитием метода преобразования уравнений В. Вольтерра, метода весовых и срезывающих функций, метода внутренней функции, метода интегральных неравенств с запаздываниями.

В разделе 2.1 установлены достаточные условия ограниченности на J всех решений ИДУ первого порядка типа Вольтерра вида:

$$x'(t)+\int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)d\tau=\sum_{j=1}^{m} F_j(t,x(\alpha_j(t))),\ \ t\geq t_0, \qquad (2.1)$$

где функции $F_j(t,x_j)$ удовлетворяют условию СН с коэффициентами $F_{0j}(t)\geq 0,\ g_j(t)\geq 0\ (j=1..m)$ и при УЗ: $\alpha_j(t)\leq t\ \ (j=1..m)$, (d_1)

начальное множество $E_{t_0}=\{t_0\}$, в случае, когда соответствующее СН ДУ:

$$x'(t)=\sum_{j=1}^{m} F_j(t,x(\alpha_j(t))),\ \ t\geq t_0 \qquad (2.1_0)$$

может иметь неограниченные на J решения. Также получены достаточные условия квадратичной интегрируемости на J любого решения ИДУ (2.1). Приведем эти результаты.

Следуя С. Искандарову (2002 г.) вводим предположения и обозначения: $0<r(t)$ - некоторая внутренняя функция, $\psi(t)$ - некоторая срезывающая функция, $R(t,\tau)\equiv K(t,\tau)(\psi(t)\psi(\tau))^{-1}$. $\alpha(t)\equiv r(t)(\psi(t))^{-1},\ \beta(t)\equiv \alpha'(t)(\psi(t))^{-1}$, $A(t)\equiv R(t,t_0)+\beta(t),\ B(t)\equiv R'_t(t,t_0)+\beta'(t)+2r(t)R(t,t)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть 1) выполняются условия СН для $F_j(t,x_j)$ с $F_{0j}(t)\geq 0,\ g_j(t)\geq 0\ (j=1..m);\quad r(t)>0,(F_{0j});\ A(t)=A_1(t)+A_2(t),\ A_1(t)>0,\ A_2(t)\geq 0;$ 2) существует число $\varepsilon\in(0,1)$ такое, что $(\alpha(t))^2\leq(1-\varepsilon)A_2(t);$ 3) существует функция $B^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такая, что $B(t)\leq B^*(t)A_1(t);$ 4) $R'_\tau(t,\tau)\geq 0,\ R''_{t\tau}(t,\tau)\leq 0,$ $(r(t)R'_\tau(t,t_0))'\leq 0,\ R''_{\tau\tau}(t,\tau)\geq 0,\ \ (r(t)R'_\tau(t,\tau))''_{t\tau}\leq 0;$ 5) $|\alpha(t)|(A_1(t))^{-\frac{1}{2}}[F_{0j}(t)+$ $+g_j(t)]+(r(t))^{-1}(g_j(t))^2\in L^1(J,R_+)\ \ (j=1..m)$. Тогда любое решение $x(t)$ ИДУ (2.1) ограничено на полуинтервале J и справедливо соотношение $r(t)(x(t))^2\in L^1(J,R_+)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если выполняются все условия теоремы 2.1 и $r(t)\geq r_0>0$, то любое решение ИДУ (2.1) принадлежит пространству $L^2(J,R)$.

ПРИМЕР 2.1. Для ИДУ первого порядка с запаздываниями:

$$x'(t)+\int_0^t \frac{10e^{2\tau}}{3t-\tau+1}x(\tau)d\tau=\frac{\sin[x(t)-2t-1]}{t+3}+\frac{2x(\frac{t}{2})\cos[x(\frac{t}{2})-t-1]}{t+1}-$$

$$-\frac{2x(\frac{t}{4})\sin^3[x(\frac{t}{4})-\frac{t}{2}-1]}{(t+2)[|x(t)|+1]},\ \ t\geq 0 \qquad (2.1_*)$$

выполняются все условия теоремы 2.1 и следствия 2.1 при $r(t)\equiv\frac{1}{4},\ \varepsilon=\frac{1}{2},$ здесь $t_0=0,\ \ \psi_1(t)\equiv e^{2t},\ R(t,\tau)\equiv\frac{10e^{-2t}}{3t-\tau+1},\ \alpha(t)\equiv\frac{e^{-2t}}{4},$

$$\beta(t)\equiv-\frac{1}{2}e^{-4t},\ A(t)\equiv\frac{10e^{-2t}}{3t+1}-\frac{1}{2}e^{-4t}, A_1(t)\equiv\frac{e^{-2t}}{3t+1},\ A_2(t)\equiv\frac{9e^{-2t}}{3t+1}-\frac{1}{2}e^{-4t}>0,$$

$$B(t)\equiv-\frac{20e^{-2t}}{3t+1}-\frac{30e^{-2t}}{(3t+1)^2}+2e^{-4t}+\frac{5e^{-2t}}{2t+1}<0, B^*(t)\equiv 0,\ m=2,\ \alpha_1(t)\equiv\frac{1}{2}t,$$

$$\alpha_2(t)\equiv\frac{1}{4}t,\ F_{01}(t)\equiv\frac{1}{t+3},\ F_{02}(t)\equiv 0,\ g_1(t)\equiv\frac{2}{t+1}, g_2(t)\equiv\frac{2}{t+2}.$$

Значит, для любого решения $x(t)$ данного ИДУ справедливы утверждения: $x(t)=O(1),\ x(t)\in L^2(R_+,R)$.

Отметим, что соответствующее ДУ с запаздываниями для (2.1_*):

$$x'(t)=\frac{\sin[x(t)-2t-1]}{t+3}+\frac{2x(\frac{t}{2})\cos[x(\frac{t}{2})-t-1]}{t+1}-\frac{2x(\frac{t}{4})\sin^3[x(\frac{t}{4})-\frac{t}{2}-1]}{(t+2)[|x(t)|+1]},\ t\ge 0$$

имеет неограниченное на R_+ решение $x(t)=2t+1$.

В разделе 2.2 установлены достаточные условия немалости членов ограниченности на J и стремления к конечным пределам (стабилизации) при $t\to\infty$ любого решения ИДУ первого порядка типа Вольтерра вида:

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x'(\tau)(\tau)d\tau=f(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}F_j(t,x(\alpha_j(t)),\int_{t_0}^{t}H_j(t,\tau,x(\beta_j(\tau)))d\tau),\quad t\ge t_0, \tag{2.16}$$

где функции $F_j(t,x_j,y_j),\ H_j(t,\tau,z_j)\ \ (j=1..m)$ удовлетворяют условию СН: с неотрицательными коэффициентами $f_{oj}(t), g_j(t),\ q_j(t),\ h_j(t,\tau)\ (j=1..m)$, и УЗ:

$$t_0\le\alpha_j(t)\le t,\ t_0\le\beta_j\le t\quad (j=1..m), \tag{d_2}$$

начальное множество $E_{t_0}=\{t_0\}$, в случае, когда соответствующее СН ДУ:

$$x'(t)+a(t)x(t)=f(t)+\sum_{j=1}^{m}F_j(t,x(\alpha_j(t)),0),\quad t\ge t_0, \tag{2.16_0}$$

может иметь неограниченные на J решения.

В разделе 2.3 установлены достаточные условия наличия оценки, стремления к нулю при $t\to\infty$, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, степенной абсолютной интегрируемости на J решений, ограниченности интеграла (в пределах от t_0 до t) всех решений ИДУ первого порядка типа Вольтерра вида

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}F_j(t,x(\alpha_j(t)),\int_{t_0}^{t}H_j(t,\tau,x(\beta_j(\tau)))d\tau),\ t\ge t_0, \tag{2.24}$$

где функции $F_j(t,x,y)$, $H_j(t,\tau,x)$ удовлетворяют условиям СН и УЗ (d_2), как в разделе 2.2.

В этом разделе из условия 4) теоремы 2.3 вытекает условие:

$$\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(\alpha_j(t))}\right)^{\frac{1}{2}} dt < \infty \quad (j=1..m). \tag{φ_1}$$

Это условие выполняется за счет запаздываний $\alpha_j(t)$ $(j=1..m)$ и при $\varphi(t)\equiv 1$ это условие не выполняется. Тем самым показаны влияние запаздываний $\alpha_j(t)$ $(j=1..m)$ и необходимость введения некоторой весовой функции $\varphi(t)>0.$

В разделе 2.4 установлены достаточные условия ограниченности на полуинтервале J всех решений и их первых производных ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x'(\tau)d\tau = f(t)+$$

$$+F(t,x\{\alpha(t)\},\, x'\{\beta(t)\},\int_{t_0}^{t}H(t,\tau,x\{\gamma(\tau)\},\;\; x'\{\delta(\tau)\})),\; t\ge t_0, \tag{2.31}$$

где $x\{\alpha(t)\}\equiv x(\alpha_1(t)),x(\alpha_2(t)),...,x(\alpha_k(t));$ $x'\{\beta(\tau)\}\equiv x'(\beta_1(t)),x'(\beta_2(t)),...,$ $x'(\beta_P(t));$ $x(\gamma(t))\equiv x(\gamma_1(t)),x(\gamma_2(t)),...,x(\gamma_q(t));x'\{\delta(\tau)\}\equiv$ $\equiv x'\left(\delta_1(t)\right),x'\left(\delta_2(t)\right),...,x'\left(\delta_r(t)\right)$ и функция $F(t,x_1,...,x_k,\,y_1,...,y_p,\,w)$ удовлетворяет условию СН с коэффициентами $g_{0j_1}(t)\ge 0,\, g_{1j_2}(t)\ge 0,$ $g_2(t)\ge 0,\, h_{0j_1}(t,\tau)\ge 0,\, h_{1j_4}(t,\tau)\ge 0$ и в случае справедливости УЗ:

$$\alpha_{j_1}(t)\le t,\, \beta_{j_2}(t)\le t,\, \gamma_{j_3}(t)\le t,\, \delta_{j_4}(t)\le t,\, (j_1=1..k;\;\; j_2=1..p;\; j_3=1..q;\; j_4=1..r). \tag{d_3}$$

Выявлено влияние интегрального члена типа Вольтерра с $x'(\tau)$ и запаздываний $x'\{\beta(\tau)\}\equiv x'(\beta_1(t)),x'(\beta_2(t)),...,x'(\beta_P(t))$ на ограниченность решений соответствующего ДУ второго порядка вида (2.4) без запаздываний по x', т.е. в случае $\beta_1(t)\equiv\beta_2(t)\equiv...\equiv\beta_P(t)\equiv t$.

В этом разделе из условия 5) теоремы 2.4 вытекает условие:

$$\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(\beta_{j_2}(t))}\right)^{\frac{1}{2}} dt < \infty \;\; (j_2=1..p). \tag{φ_2}$$

Из условия (φ_2) видно, что при $\varphi(t)\equiv 1$ условие (φ_2) не выполняется. Это своеобразное влияние запаздывания $\beta_{j_2}(t)$ $(j_2=1..p)$ на утверждения теоремы 2.4 в условиях введения весовой функции $\varphi(t)$.

В разделе 2.5 установлены достаточные условия ограниченности на полуинтервале $J=[t_0,\infty)$ всех решений и их первых производных следующего неявного ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида:

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau = f(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}F_j(t,x(\alpha_j(t)),\ x'(\beta_j(t)),\int_{t_0}^{t}H_j(t,\tau,x(\gamma_j(\tau)),\ \ x'(\delta_j(\tau)))d\tau),\ t\ge t_0, \qquad (2.35)$$

где функции $F_j(t,x_j,y_j,z_j)$, $H_j(t,\tau,x_j,y_j)$ $(j=1..m)$ удовлетворяют условиям СН с коэффициентами $F_{0j}(t),\ g_{kj}(t),\ g_{2j}(t),\ h_{kj}(t,\tau)\ge 0$ $(j=1..m;\ \ k=0,1)$, выполняются УЗ: $\alpha_j(t)\le t,\ \beta_j(t)\le t,\ \gamma_j(t)\le t,\ \delta_j(t)\le t \quad (j=1..m)$, (d_4)

начальное множество $E_{t_0}=\{t_0\}$, в случае, когда все ненулевые решения соответствующего линейного однородного ДУ:

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=0,\ \ t\ge t_0, \qquad (2.35_0)$$

все решения соответствующего линейного неоднородного ДУ:

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=f(t),\ \ t\ge t_0, \qquad (2.35_1)$$

могут быть неограниченными на J.

Показывается влияние запаздываний $\beta_j(s)$ $(j=1..m)$ и необходимость введения некоторой весовой функции $\varphi(t)>0$.

В разделе 2.6 приведен анализ результатов главы 2.

В главе 3, состоящей из пяти разделов, нестандартным методом сведения к системе, методом преобразования уравнений В. Вольтерра, методом весовых и срезывающих функций, методом срезывающих функций и методом интегральных неравенств с запаздываниями исследуются АС решений слабо нелинейных ИДУ третьего и четвертого порядков типа Вольтерра с запаздываниями, а также устойчивость решений слабо нелинейных ИДУ четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с запаздываниями.

В разделе 3.1 установлены достаточные условия асимптотического представления (оценки), ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на бесконечном полуинтервале J, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному закону, при $t\to\infty$ решений и их первых и вторых производных ИДУ третьего порядка типа Вольтерра:

$$x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)\right]d\tau=F_0(t)+ \qquad (3.1)$$

$$+\sum_{j=1}^{m}F_j(t,x(\alpha_j(t)),x'(\beta_j(t)),x''(\gamma_j(t)),\int_{t_0}^{t}H_j(t,\tau,x(\sigma_j(\tau)),x'(\delta_j(\tau)),x''(\mu_j(\tau)))d\tau),$$

где $t\ge t_0$, функции $F_j(t,x_j,\,y_j,\,z_j,\,u_j)$, $H_j(t,\tau,x_j,\,y_j,\,z_j)$ удовлетворяют условиям СН с неотрицательными коэффициентами $g_{kj}(t), h_{rj}(t,\tau)$ $(k=0,1,2,3;\ j=1..m;\ r=0,1,2),\ G_{rj}(t,\tau)\equiv g_{3j}(t)h_{rj}(t,\tau)(r=0,1,2;$ $j=1..m);$ функции $\alpha_j(t), \beta_j(t), \gamma_j(t), \sigma_j(t), \delta_j(t), \mu_j(t)$ $(j=1..m;)$ - УЗ:

$$\alpha_j(t)\le t,\ \beta_j(t)\le t,\ \gamma_j(t)\le t,\ \sigma_j(t)\le t,\ \delta_j(t)\le t,\ \mu_j(t)\le t \quad (j=1..m)\ . \qquad (d_5)$$

Начальное множество состоит из одной точки t_0.

В ИДУ (3.1) аналогично С. Искандарову (2006 г.) сделаем замену: $x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t),$ где $0\ne\lambda$ - некоторый вспомогательный параметр, причем $\lambda\in R,\ 0<W(t)$ – некоторая вспомогательная весовая функция. Тогда ИДУ третьего порядка (3.1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t), \\ y''(t)+b_2(t)y'(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+\int\limits_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)+K(t,\tau)y'(\tau)\right]d\tau = f(t)+ \\ +(W(t))^{-1}\sum\limits_{j=1}^{m}F_j(t,x(\alpha_j(t)),-\lambda^2 x(\beta_j(t))+W(\beta_j(t))y(\beta_j(t)),\lambda^4 x(\gamma_j(t))+W(\gamma_j(t))y'(\gamma_j(t))+ \\ +[W'(\gamma_j(t))-\lambda^2 W(\gamma_j(t))]y(\gamma_j(t)),\int\limits_{t_0}^{t}H_j(t,\tau,x(\sigma_j(\tau)),-\lambda^2 x(\delta_j(t))+ \\ +W(\delta_j(\tau))y(\delta_j(\tau)),\ \lambda^4 x(\mu_j(\tau))+W(\mu_j(\tau))y'(\mu_j(\tau))+[W'(\mu_j(\tau))-\lambda^2 W(\mu_j(\tau))]y(\mu_j(\tau)))d\tau), \end{cases} \qquad (3.5)$$

$t\ge t_0$, где $b_2(t)\equiv a_2(t)+2W'(t)\left(W(t)\right)^{-1}-\lambda^2,\ b_1(t)\equiv a_1(t)-\lambda^2 a_2(t)+\lambda^4+$ $+a_2(t)W'(t)\left(W(t)\right)^{-1}+\left[W'(t)-\lambda^2 W(t)\right]'\left(W(t)\right)^{-1},$

$$b_0(t)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\left[a_0(t)-\lambda^2 a_1(t)+\lambda^4 a_2(t)-\lambda^6\right],$$

$$P_0(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_0(t,\tau)-\lambda^2 Q_1(t,\tau)+\lambda^4 Q_2(t,\tau)\right],$$

$$P_1(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_1(t,\tau)W(\tau)+Q_2(t,\tau)\left(W'(\tau)-\lambda^2 W(\tau)\right)\right],$$

$$K(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}Q_2(t,\tau)W(\tau),\ \ f(t)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}F_0(t).$$

Следуя С. Искандарову (1980 г.) допустим: $0<\varphi(t)$ - некоторая весовая функция, $\psi_i(t)$ $(i=1..n)$ - некоторые срезывающие функции,

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau), \quad f(t)=\sum_{i=0}^{n}f_i(t), \qquad (K_*),\ (f_*)$$

$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1},\ E_i(t)\equiv f_i(t)(\psi_i(\tau))^{-1},$

$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t)\ \ (i=1..n), \qquad (R_*)$$

$c_i(t)$ $(i=1..n)$ – некоторые функции, $\Delta(t)\equiv 2\lambda^2\varphi(t)-\varphi'(t).$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть 1) выполняются условия СН для $F_k(t,x_k,\ y_k,z_k,u_k,v_k,w_k),\ H_k(t,\tau,p_k,\ q_k,r_k,\mu_k,\rho_k)$ $(k=1..n);$

$\lambda \neq 0, W(t)>0$, $\varphi(t)>0$; $(K_*),(f_*),(R_*)$; 2) $\Delta(t)\geq 0$; 3) $b_2(t)\geq 0$;
4) $b_1(t)=b_{11}(t)+b_{12}(t), b_{11}(t)>0$, $b'_{11}(t)\geq 0$, $b_{12}(t)\geq 0$, существует функция $b^*_{12}(t)\in L^1(J,R_+)$ такая, что $b'_{12}(t)\leq b^*_{12}(t)b_1(t)$; 5) $A_i(t)\geq 0$, $B_i(t)\geq 0$, $B'_i(t)\leq 0$, $R'_{i\tau}(t,\tau)\geq 0$, существуют функции $A^*_i(t)\in L^1(J,R_+)$, $c_i(t)$, $R^*_i(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что $A'_i(t)\leq A^*_i(t)A_i(t)$, $\left(E^{(l)}_i(t)\right)^2\leq B^{(l)}_i(t)c^{(l)}_i(t)$, $R''_i(t,\tau)\leq R^*_i(t)R'_{i\tau}(t,\tau)$ $(i=1..n;\ l=0,1)$; 6) $\Phi(t)\equiv W(t)\left(\varphi(t)\right)^{\frac{1}{2}}(b_1(t))^{-\frac{1}{2}}+|b_0(t)|(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}+$

$+\int\limits_{t_0}^{t}[|P_0(t,\tau)|(\varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}}+|P_1(t,\tau)|(b_1(\tau))^{-\frac{1}{2}}]d\tau+(W(t))^{-1}\sum\limits_{j=1}^{m}\left\{g_{0j}(t)(\varphi(\alpha_j(t)))^{-\frac{1}{2}}+\right.$

$+g_{1j}(t)[\lambda^2(\varphi(\beta_j(t)))^{-\frac{1}{2}}+W(\beta_j(t))(b_1(\beta_j(t)))^{-\frac{1}{2}}]+g_{2j}(t)[\lambda^4(\varphi(\gamma_j(t)))^{-\frac{1}{2}}+$

$+W(\gamma_j(t))(b_1(\gamma_j(t)))^{-\frac{1}{2}}]+\left|W'(\gamma_j(t))-\lambda^2 W(\gamma_j(t))\right|(b_1(\gamma_j(t)))^{-\frac{1}{2}}+$

$+\int\limits_{t_0}^{t}[G_{0j}(t,\tau)(\varphi(\sigma_j(\tau))^{-\frac{1}{2}}+G_{1j}(t,\tau)(\lambda^2(\varphi(\delta_j(\tau)))^{-\frac{1}{2}}+W(\delta_j(\tau))(b_1(\delta_j(\tau)))^{-\frac{1}{2}})+$

$+G_{2j}(t,\tau)(\lambda^4(\varphi(\mu_j(\tau)))^{-\frac{1}{2}}+W(\mu_j(\tau))+|W'(\mu_j(\tau))-$

$-\lambda^2 W(\mu_j(\tau))|(b_1(\mu_j(\tau)))^{-\frac{1}{2}})]d\tau\in L^1(J,R_+)$; $\left|f_0(t)\in L^1(J,R_+)\right|$. Тогда для любого решения $(x(t),y(t))$ системы (3.5) справедливы утверждения:

$$|x(t)|\leq\sqrt{c_{**}}\left(b_{11}(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\varphi(t)\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.7}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t}\Delta(s)\left(x(s)\right)^2 ds\leq c_{**}b_{11}(t), \tag{3.8}$$

$$|y(t)|\leq\sqrt{c_{**}},\ |y'(t)|\leq\sqrt{c_{**}}\ \left(b_{11}(t)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.9}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t}b_2(s)\left(y'(s)\right)^2 ds\leq c_{**}b_{11}(t), \tag{3.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n}A_i(t)\left(X_i(t,t_0)\right)^2\leq c_{**}b_{11}(t), \tag{3.11}$$

где

$$c_{**}=\left(b_{11}(t_0)\right)^{-1}[\sqrt{c_*}+\int\limits_{t_0}^{\infty}|f_0(t)|dt]^2\exp(2\int\limits_{t_0}^{\infty}[\Phi(t)+b^*_{12}(t)+\sum_{i=1}^{n}\left(A^*_i(t)+R^*_i(t)\right)]dt)<\infty,$$

и для любого решения $x(t)$ ИДУ (3.1) справедливы оценки (3.7) и

$$\left|x'(t)\right| \le [\lambda^2 \left(b_{11}(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\varphi(t)\right)^{-\frac{1}{2}} + W(t)]\sqrt{c_{**}}\,, \tag{3.12}$$

$$\left|x''(t)\right| \le [\lambda^4 \left(b_{11}(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\varphi(t)\right)^{-\frac{1}{2}} + W(t)\left(b_{11}(t)\right)^{\frac{1}{2}} + \left|W'(t) - \lambda^2 W(t)\right|]\sqrt{c_{**}}\,. \tag{3.13}$$

Введем обозначения:

$$\Phi_0(t) \equiv \left(b_{11}(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\varphi(t)\right)^{-\frac{1}{2}},\ \Phi_1(t) \equiv \Phi_0(t) + W(t),\ \Phi_2(t) \equiv \Phi_0(t) + W(t)\left(b_{11}(t)\right)^{\frac{1}{2}} + $$
$$+\left|W'(t) - \lambda^2 W(t)\right|.$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если выполняются все условия теоремы 3.1 и *a*) $\Phi_k(t) = O(1)$; *b*) $\Phi_k(t) \to 0,\ t \to \infty$; *c*) $\exists$ числа $\lambda_k > 0$ такие, что $\Phi_k(t) = e^{-\lambda_k t} O(1)$, *d*) $\Phi_k(t) \in L^{p_k}(J, R_+ \setminus \{0\})$ $(p_k > 0)$ для $k = 0,1,2,$ то все решения и их первые и вторые производные ИДУ (3.1):
a) ограничены на полуинтервале J; *b*) стремятся к нулю при $t \to \infty$;
c) стремятся к нулю при $t \to \infty$ по экспоненциальному закону;
d) принадлежат пространству $L^{p_k}(J, R)$ соответственно $(p_k > 0)$.

В разделе 3.2 установлены достаточные условия типа немалости членов устойчивости (ограниченности всех решений и их производных до третьего порядка включительно) решений ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида:

$$x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) +$$
$$+\int_{t_0}^{t} \left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) + Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\right] d\tau = f\left(t\right) +$$
$$+\sum_{k=1}^{m} F_k(t, X_{1k}(t), \int_{t_0}^{t} H_k(t,\tau, X_{2k}(\tau)d\tau),\quad t \ge t_0, \tag{3.14}$$

где $X_{1k}(t) \equiv \{x(\alpha_k(t)), x'(\beta_k(t)), x''(\gamma_k(t)),\ x'''(\delta_k(t)\}$;
$X_{2k}(t) \equiv \{x(\eta_k(t)), x'(\mu_k(t)), x''(\nu_k(t)),\ x'''(\rho_k(t)\}$,
и функции $F_k(t, x_k, y_k, z_k, u_k, v_k),\ H_k(t,\tau, w_k, \omega_k, p_k, q_k)$ $(k = 1..m)$ удовлетворяют условиям СН с коэффициентами $F_{0k}(t) \ge 0,\ g_{jk}(t) \ge 0,$
$H_{0k}(t,\tau) \ge 0,\ h_{jk}(t,\tau) \ge 0$ $(k = 1..m;\ j = 0,1,2,3)$ и при выполнении УЗ: $\alpha_k(t) \le t,$
$\beta_k(t) \le t,\ \gamma_k(t) \le t,\ \delta_k(t) \le t,\ \eta_k(t) \le t,\ \mu_k(t) \le t, \nu_k(t) \le t,\ \rho_k(t) \le t\ (k = 1..m).$ (d_6)
Начальное множество состоит из одной точки t_0.

В ИДУ (3.2) следуя С. Искандарову (2006 г.) сделаем замену:

$$x''(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t),\quad x''(t) = -\lambda^2 x(t) + W(t)y(t), \tag{3.15}$$

где λ - некоторый вспомогательный параметр, $\lambda \ne 0,\ 0 < W(t)$ - некоторая весовая функция, $y(t)$ - новая неизвестная функция.

В разделе 3.3 установлены достаточные условия, обеспечивающие оценки и асимптотические свойства, решений и их производных до третьего порядка включительно ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида:

$$x^{(4)}(t)+a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\right]d\tau = f\left(t\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}F_k(t,X_{1k}(t),\int_{t_0}^{t}H_k(t,\tau,X_{2k}(\tau)d\tau),\quad t\ge t_0, \tag{3.27}$$

где $X_{1k}(t)\equiv\{x(\alpha_k(t)),x'(\beta_k(t)),x''(\gamma_k(t)),\ x'''(\delta_k(t)\}$;

$X_{2k}(t)\equiv\{x(\eta_k(t)),x'(\mu_k(t)),x''(\nu_k(t)),\ x'''(\rho_k(t)\}$,

и функции $F_k(t,x_k,\ y_k,\ z_k,u_k,\ v_k)$, $H_k(t,\tau,w_k,\ \omega_k,\ p_k,q_k)$ $(k=1..m)$ удовлетворяют условиям с коэффициентами $F_{0k}(t)\ge 0,\ g_{jk}(t)\ge 0,\ H_{0k}(t,\tau)\ge 0,$ $h_{jk}(t,\tau)\ge 0$ $(k=1..m;\ j=0,1,2,3)$ и при выполнении УЗ: $\alpha_k(t)\le t,\ \beta_k(t)\le t,$ $\gamma_k(t)\le t,\ \delta_k(t)\le t,\ \eta_k(t)\le t,\ \mu_k(t)\le t, \nu_k(t)\le t,\ \rho_k(t)\le t\ (k=1..m),$ (d_7)

начальное множество $E_{t_0}=\{t_0\}$.

В ИДУ (3.27) Следуя С. Искандарову (2006 г.) сделаем замены:

$$x'(t)+\lambda^2x(t)=W_1(t)y(t),\qquad x'(t)=-\lambda^2x(t)+W_1(t)y(t), \tag{3.28}$$

$$y''(t)+\mu^2y(t)=W_2(t)u(t),\quad y''(t)=-\mu^2y(t)+W_2(t)u(t), \tag{3.29}$$

где λ,μ – некоторые вспомогательные параметры, $\lambda,\mu\ne 0$; $0<W_r(t)$ $(r=1,2)$ – некоторые весовые функции; $y(t),u(t)$ - новые неизвестные функции.

В разделе 3.4 установлены достаточные условия типа немалости членов устойчивости (ограниченности всех решений и их производных до четвертого порядка включительно) решений СН ИДУ пятого порядка типа Вольтерра вида:

$$x^{(5)}(t)+a_4(t)x^{(4)}(t)+a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+$$

$$+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)+Q_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)]d\tau = f(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}F_k(t,D_{k1}(t),\int_{t_0}^{t}H_k(t,\tau,D_{k2}(\tau))d\tau),\ t\ge t_0, \tag{3.50}$$

где $D_{k1}(t)\equiv\{x(\alpha_{k1}(t)),x'(\beta_{k1}(t)),x''(\gamma_{k1}(t)),\ x'''(\delta_{k1}(t)),x^{(4)}(\eta_{k1}(t))\}$,

$D_{k2}(t)\equiv\{x(\alpha_{k2}(t)),x'(\beta_{k2}(t)),x''(\gamma_{k2}(t)),\ x'''(\delta_{k2}(t)),x^{(4)}(\eta_{k2}(t))\}$;

функции $F_k(t,x_k,\ y_k,z_k,u_k,v_k,w_k)$, $H_k(t,\tau,p_k,\ q_k,r_k,\mu_k,\rho_k)$ $(k=1..n)$ удовлетворяют условиям СН с коэффициентами

$F_{k0}(t)\ge 0,\ g_{kj}(t)\ge 0,\ g_{k5}(t)\ge 0,$

$H_{k0}(t) \geq 0, h_{kj}(t,\tau) \geq 0, \ (k=1..m;\ j=0,1,2,3,4);$ выполняются УЗ:

$\alpha_{kv}(t) \leq t,\ \beta_{kv}(t) \leq t,\ \gamma_{kv}(t) \leq t,\ \delta_{kv}(t) \leq t,\ \eta_{kv}(t) \ \ (k=1..m; v=1,2),$ $\qquad (d_8)$

начальное множество $E_{t_0} = \{t_0\}$.

Следуя С. Искандарову (2007 г.) в ИДУ (3.50) сделаем следующие замены:

$$x''(t) + \lambda^2 x(t) = W_1(t) y(t), \tag{3.51}$$

$$y''(t) + \mu^2 y(t) = W_2(t) u(t), \tag{3.52}$$

где λ, μ - некоторые вспомогательные параметры, $\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0,\ \lambda, \mu \in R;$ $0 < W_k(t) \ \ (k=1,2)$ - некоторые весовые функции; $y(t), u(t)$ - новые неизвестные функции.

В разделе 3.5 проведен анализ полученных результатов главы 3.

На все теоремы и на некоторые следствия глав 2, 3 построены иллюстративные примеры, показывающие естественность налагаемых условий.

В конце диссертации приведены выводы из результатов проведенных исследований и о возможных применениях полученных результатов.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах автора:

1. Об ограниченности решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка с запаздываниями [Текст] / С. Искандаров , М.А. Темиров // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып.36. – С. 68 - 73.
2. Estimations and asymptotical characteristics of solutions and their derivatives of weakly nonlinear Volterra integro-differential equation of order three with lag [Текст] / S. Iskandarov , M.A. Temirov // Actual Problems of Control Theory, Topology and Operator Equations: International Jubilee Conference at the Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek. Kyrgyzstan, Sept. 15-21, 2008. – Aachen (Germany): Shaker verlag, 2009. – P. 105-111.
3. Достаточные условия устойчивости решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с запаздываниями [Текст] / С. Искандаров, М.А. Темиров // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып.40. – С. 49-56.
4. Об ограниченности решений слабо нелинейного неявного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка с запаздываниями [Текст] / С. Искандаров , М.А. Темиров // Вестник КРСУ. – 2010. – Т.10, № 9. – С. 153 – 157.
5. Об устойчивости решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка с запаздываниями

[Текст] / С. Искандаров, М.А. Темиров // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып.42. – С. 16-21.
6. Об ограниченности решений слабо нелинейного неявного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с запаздываниями [Текст] / М.А. Темиров // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып.43. – С. 33-39.
7. Об асимптотических свойствах решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка с запаздываниями [Текст] / М.А. Темиров // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек: КНУ, 2011. – Спец. вып. – С. 315-319.
8. Оценки и асимптотические свойства решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с запаздываниями [Текст] / С. Искандаров, М.А. Темиров // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. – Алматы: КазНУ, 2012. – Вып. 1(72) – С. 39-47.
9. О влиянии интегральных возмущений на ограниченность решений слабо нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с запаздываниями на полуоси [Текст] / М.А. Темиров // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып.44. – С. 52-58.
10. On boundedness of solutions and their derivatives of one weakly nonlinear Volterra integro-differential equation of the fourth order with delays [Текст] / M.A.Temirov, S. Iskandarov // Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Almaty, June 30 – July 4, 2009. – Almaty, 2009. – Vol. 1. – P. 293.
11. Об ограниченности решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с запаздываниями [Текст] / М.А. Темиров, С. Искандаров // Междунар. науч. конф. «Функциональный анализ и его приложения», Астана, окт. 2012 г.: Тез. докл. – Астана, 2012. – С. 192-194.

РЕЗЮМЕ

Темиров Майрамбек Акбагышович

«Кечигүүчү аргументтердүү Вольтерра тибиндеги сызыктуу сымал интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык касиеттери» темасы, 01.01.02 -дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн диссертация сунушталган

Урунттуу сөздөр: Кечигүүчү аргументтер, Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеме, чектелгендик, нөлгө умтулгандык, даражадагы абсолюттук интегралданыш.

Изилдөөнүн объектиси: Биринчи жана жогорку тартиптеги Вольтерра тибиндеги сызыктуу сымал интегро-дифференциалдык теңдемелер.

Иштин максаты: Кечигүүчү аргументтердүү биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги Вольтерра тибиндеги сызыктуу сымал интегро-дифференциалдык теңдемелердин (ИДТ), булардын ичинде айкын эмес биринчи жана экинчи тартиптеги теңдемелердин, чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендигин, даражадагы абсолюттук интегралданышын, нөлгө умтулуусун изилдөө. Вольтерра тибиндеги интегралдык мүчөлөрдүн бул теңдемелерге тиешелүү биринчи жана экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин (ДТ) жана экинчи тартиптеги ИДТлердин чыгарылыштарынын чектелгендигине тийгизген таасирин аныктоо.

Изилдөөнүн методикасы (ыкмасы): В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүп түзүү методу жана ошондой эле КР УИА-нын теориялык жана колдонмо математика Институтунда иштелип чыккан салмактык жана кесүүчү функциялар методу, ички функция методу, системага келтирүүнүн стандарттык эмес методдору, кечигүүчү аргументтердүү интегралдык барабарсыздыктар методу колдонулат.

Илимий жаңылыктары: Кечигүүчү аргументтердүү биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги Вольтерра тибиндеги сызыктуу сымал ИДТлердин, булардын ичинде айкын эмес биринчи жана экинчи тартиптеги теңдемелердин, бардык чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендигин, даражадагы абсолюттук интегралданышын, аргумент чексизге умтулганда нөлгө умтулуусун камсыздоочу жеткиликтүү шарттар табылды. Бул асимптотикалык касиеттер экинчи, үчүнчү, төртүнчү тартиптеги ИДТлердин чыгарылыштарынын туундуларынын теңдеменин тартибинен бирге кем даражасы кошулган туундулары үчүн да алынды. Бешинчи тартиптеги ИДТнин чыгарылыштарынын биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү туундуларынын чектелгендиги каралды. Вольтерра тибиндеги интегралдык мүчөлөрдүн бул теңдемелерге тиешелүү биринчи жана экинчи тартиптеги ДТлердин жана экинчи тартиптеги ИДТлердин чыгарылыштарынын чектелгендигине тийгизген таасири аныкталды, ошондой эле бул теңдемелер үчүн кечигүүчү аргументтердин жана салмактык функциянын тиешелүү шарттардын аткарылуусуна тийгизген таасири такталды. Үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги ИДТлердин коэффициенттери, ядролору жана бош мүчөлөрү жарым окто дифференцирленбей турган болушу аныкталды. Кечигүүчү аргументтердүү экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги Вольтерра тибиндеги сызыктуу сымал интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн алынган илимий жыйынтыктар бул теңдемелерге тиешелүү кечигүүчү аргументтердүү экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу сымал дифференциалдык теңдемелер үчүн да жаңы болорун белгилейбиз.

РЕЗЮМЕ

Темиров Майрамбек Акбагышович

Диссертация «Асимптотические свойства решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с запаздываниями» представлена на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: Запаздывания аргументов, интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра, ограниченность, стремление к нулю, степенная абсолютная интегрируемость.

Объект исследования: Слабо нелинейные интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра первого и высоких порядков с запаздываниями.

Цель работы: Исследовать ограниченность, степенную абсолютную интегрируемость на полуоси, стремление к нулю при неограниченном возрастании независимой переменной решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) первого, второго, третьего, четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с запаздываниями, в том числе неявных ИДУ первого и второго порядков. Выявить влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность решений соответствующих дифференциальных уравнений (ДУ) первого и второго порядков с запаздываниями и без запаздываний, а также на ограниченность решений - ИДУ второго порядка без запаздываний.

Методика исследования: Применяются метод преобразования уравнений В. Вольтерра, а также метод весовых и срезывающих функций, метод внутренней функции, нестандартные методы сведения к системе, метод интегральных неравенств с запаздываниями, разработанные в ИТПМ НАН КР.

Научная новизна: Найдены достаточные условия, гарантирующие ограниченность, степенную абсолютную интегрируемость на полуоси, стремление к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной всех решений слабо нелинейных ИДУ первого, второго, третьего, четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с запаздываниями, в том числе неявных ИДУ первого и второго порядков. Эти асимптотические свойства (АС) установлены для первых производных всех решений ИДУ второго порядка; для первых и вторых производных всех решений ИДУ третьего порядка; для первых, вторых и третьих производных всех решений ИДУ четвертого порядка. Для ИДУ пятого порядка изучена ограниченность на полуоси производных всех решений до четвертого порядка включительно. Выявлено влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность решений соответствующих ДУ первого и второго порядков с запаздываниями и без запаздываний, а также на ограниченность решений - ИДУ второго порядка без запаздываний, при этом показано влияние запаздываний и весовой функции для выполнимости соответствующих полученных условий. Показывается, что коэффициенты, ядра и свободные члены ИДУ третьего, четвертого и пятого порядков могут быть недифференцируемыми на полуоси. Отметим, что из результатов для

ИДУ типа Вольтерра второго, третьего, четвертого и пятого порядков с запаздываниями вытекают новые результаты для АС решений соответствующих ДУ второго, третьего, четвертого и пятого порядков с запаздываниями.

SUMMARY

Temirov Mayrambek Akbagyshovich

Dissertation "Asymptotic properties of solutions of weakly nonlinear integro-differential equations of Volterra type with delays" submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: Delays, the integro-differential equation of Volterra type, boundedness, tending to zero, power absolute integrability.

Object of research: Weakly nonlinear integro-differential equations of Volterra type of first and higher order with delays.

Aim of research: Investigate the boundedness, power absolute integrability on the half, tending to zero with increasing independent variable solutions of weakly nonlinear integro-differential equations (IDE) of first, second, third, fourth and fifth order Volterra type with delays, including the implicit go first and second orders.
Reveal the influence of the integral perturbation of Volterra type to boundedness of solutions corresponding differential equations (DE) of first and second order with delays and without delays, as well as to the boundedness of solutions - IDE second order without delay.

Methods of research: Apply Volterra conversion method of equations, as well as the method of weighting and cutting functions, the method of internal functions, non-standard methods of reduction to system, the method of integral inequalities with delays developed in ITAM of NAS of Kyrgyz Republic.

Scientific novelty: Sufficient conditions guaranteeing the boundedness, power absolute integrability on the half, tending to zero with increasing independent variable all solutions of weakly nonlinear integro-differential equations (IDE) of first, second, third, fourth and fifth order Volterra type with delays, including the implicit go first and second orders, are found. These asymptotic properties (AP) established for the first derivatives of all solutions of second order IDE; for the first and second derivatives of all solutions of third order IDE; for first, second and third derivatives of all solutions of the fourth order IDE. For the fifth order IDE studied the boundedness on the half of all the derivatives of solutions to the fourth order inclusive. The influence of the integral perturbation of Volterra type to boundedness of solutions corresponding differential equations (DE) of first and second order with delays and without delays, as well as to the boundedness of solutions - IDE second order without delays, and the delay effect is shown and the weighting function for the feasibility of the relevant conditions obtained. Shown that the coefficients, the kernels and free terms of IDE third, fourth and fifth order can be non-differentiable on the half. Note that from the results for the IDE Volterra

type of second, third, fourth and fifth order with delays follow new results for relevant AP of solutions of DE of second, third, fourth and fifth order with delays.