МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ж. БАЛАСАГЫНА

На правах рукописи
УДК 517.928

Бараталиев Керим Бараталиевич

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Бишкек – 2014

Работа выполнена в Кыргызском Национальном Университете им. Ж. Баласагына

Официальные оппоненты: член-корреспондент НАН КР,
доктор физико-математических наук,
профессор - **Алымкулов К. А.**

доктор физико-математических наук,
профессор - **Дженалиев М. Т.** (г.Алма-Ата, Казахстан).

доктор физико-математических наук,
профессор - **Тунгатаров А. Б.** (г.Алма-Ата, Казахстан).

Ведущая организация:

Адрес: Евразийский математический институт при ЕНУ им. Л.Н.Гумилева (г.Астана, Казахстан).

Защита диссертации состоится «___» __________ 2015 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.12.001 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико–математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан “___” ________2015 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета, д.ф.-м.н., с.н.с. Искандаров С.

Актуальность темы диссертации

Наиболее эффективным методом исследования некорректных задач математической физики является сведение таких задач к интегральным уравнениям, для которых, в свою очередь, известны теоремы существования, методы их исследования и регуляризации. Интегральные уравнения, в свою очередь, подразделяются на интегральные уравнения первого рода, интегральные уравнения второго рода, сингулярные интегральные уравнения, интегральные уравнения третьего рода.

Существующие теории интегральных уравнений первого рода, интегральных уравнений второго рода и сингулярных интегральных уравнений дают возможность решать основные типы некорректных задач математической физики, которые сводятся к таким уравнениям, в то время как известные результаты по интегральным уравнениям третьего рода в большей степени касаются их решений в пространствах обобщенных и суммируемых функций, и не дают таких широких возможностей для исследования некорректных задач, какие дают упомянутые теории интегральных уравнений первого рода, интегральных уравнений второго рода и сингулярных интегральных уравнений.

В начале исследования интегральных уравнений третьего рода наметились два направления. Исходным пунктом одного направления является работа Д. Гильберта (1912), который состоит в сохранении альтернативы Фредгольма для уравнения

$$(Bu)(x) \equiv xu(x) + \int_0^1 k(x,s)u(s)ds = f(x), x \in \Gamma$$

за счет расширения пространств решений.

Д. Гильберт, Т. Карлеман и другие занимались распространением теории Фредгольма на случай, когда исходные функции суммируемы с квадратом. После этого, началось изучение сингулярных интегральных уравнений.

Началом второго направления служит работа Э. И. Пикара (1911) и оно состоит в сведении модельного интегрального уравнения третьего рода к сингулярному интегральному уравнению с тем расчетом, чтобы привлекать их методы к исследованию рассматриваемого уравнения. Первые основополагающие результаты по теории сингулярных интегральных уравнений были получены в работах Ф. Нётера (1921) и сформулированы, в так называемых, теоремах Нётера, играющих в теории сингулярных интегральных уравнений ту же роль, что известные теоремы Фредгольма для уравнений Фредгольма.

Начиная с 60-х годов прошлого столетия в связи с интенсивными исследованиями общей теории некорректных задач, интегральных уравнений первого рода в частности, были затронуты рядом авторов и вопросы интегральных уравнений третьего рода. Так, в работе Рогожина В.С., Расланбекова С.Н. (1978) доказаны теоремы Нётера в пространствах обобщенных функций, а в работах Bart G.R. (1981 и др.) обобщены теоремы Фредгольма для линейных интегральных уравнений третьего рода опять же путем расширений пространств решений (с помощью теории обобщенных функций).

Таким образом, возникла задача о создании общей теории интегральных уравнений третьего рода. Эта задача еще более обострилась в связи со следующим утверждением. В монографии З. Прёсдорфа (1974) сделан вывод о том, что оператор умножения на функцию, принимающую также нулевые значения, в общем случае не разрешим нормально в пространстве непрерывных функций.

Таким образом, ранее не существовало такой теории интегральных уравнений третьего рода в пространствах обычных функций, которая могла бы успешно применяться для исследования некорректных задач математической физики, которые сводятся к таким уравнениям.

Цель работы

состоит в том, чтобы выявить те концепции и факты, которые могли бы составить основу для общей теории интегральных уравнений третьего рода в пространствах обычных функций.

Поэтому одной из основных задач настоящей диссертационной работы является нахождение пространств, в которых интегральные уравнения третьего рода нормально разрешимы.

Научная новизна работы

- предложена схема сведения некоторых задач математической физики к интегральным уравнениям третьего рода;
- Построены основы теории интегральных уравнений третьего рода типа Фредгольма с вырожденными ядрами в пространстве аналитических функций;
- Найдены пространства, в которых существует нормальная разрешимость интегральных уравнений третьего рода;
- Построены основы спектральной теории интегральных уравнений третьего рода типа Вольтерра, в отличие от соответствующих интегральных уравнений второго рода, где отсутствует аналогичная теория;
- Построена спектральная теория интегральных уравнений третьего рода типа Фредгольма, где имеются существенные отличия от соответствующих теорий интегральных уравнений Фредгольма второго рода;
- Построены приближенные решения с помощью методов регуляризации интегральных уравнений третьего рода типа Фредгольма;

- Разработаны методы регуляризации для интегральных уравнений третьего рода типа Вольтерра;

- Построены резольвенты простейших интегральных уравнений третьего рода, на основе которых найдены условия бифуркации решений нелинейных интегральных уравнений третьего рода.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации дополняют теорию интегральных уравнений, возникающих в задачах математической физики. Развитый в работе математический аппарат и полученные результаты позволят исследовать решения некоторых задач математической физики.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

- схема сведения некоторых задач математической физики к интегральным уравнениям третьего рода;
- необходимые и достаточные условия существования интегральных уравнений третьего рода типа Вольтерра с вырожденными ядрами в пространстве аналитических функций;
- нормальная разрешимость интегральных уравнений третьего рода в пространстве аналитических функций;
- основы спектральной теории интегральных уравнений третьего рода типа Вольтерра, в отличие от соответствующих интегральных уравнений второго рода, где отсутствует аналогичная теория;
- приближенные решения с помощью методов регуляризации интегральных уравнений третьего рода типа Фредгольма;
- методы регуляризации для интегральных уравнений третьего рода типа Вольтерра.

Личный вклад соискателя

Все результаты диссертации получены лично автором.

Апробация результатов исследований

Результаты исследований докладывались:
- на Международной научно-практической конференции «Проблемы механики и прикладной математики», посвященной памяти профессора Ф.И. Франкля (Бишкек, 1995);
- на Международной научно-теоретической конференции «Проблемы и перспективы интеграции образования» (Бишкек, КРСУ, 1998);
- на научно-практической конференции, посвященной 5-летию Технического университета «Дастан» (Бишкек, 1999);

- на Международной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 70-летию академика М.И. Иманалиева (Бишкек, 2001);
- на II Международной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (Бишкек, 2008);
- на Третьем всемирном конгрессе математиков тюркского мира (Алматы, 2009);
- на III Международной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 60-летию академика А. А. Борубаева (Бишкек, 2010);
- на IV Международной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 80-летию академика М.И. Иманалиева (Бишкек-Бозтери, 2011);
- на Международной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений» (Бишкек, КРСУ, 2013);
- на пятом всемирном конгрессе математиков тюркского мира (Иссык–Куль, 2014).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях

Основные результаты диссертации опубликованы в двух монографиях [17], [29], 24 статьях [1]-[4], [6]-[12], [14], [18]-[21], [24]-[28], [31], [33]-[34], девяти тезисах докладов [5], [13], [15], [16], [22], [23], [30], [32], [35]. В совместных статьях [11], [24], [28] соискателю принадлежит постановка задачи, а соавторам – ее исследование; в совместной статье [34] соавторам принадлежит постановка задачи, а соискателю – ее исследование.

Основное содержание диссертации

Используются следующие обозначения:

N – множество натуральных чисел;

$R = (-\infty, +\infty)$ - множество действительных чисел;

$R_+ = [0, +\infty)$ - множество неотрицательных вещественных чисел;

$R_{++} = (0, +\infty)$ - множество положительных вещественных чисел;

C – множество комплексных чисел;

$\Gamma = [0,1]$ – единичный отрезок;

$\varepsilon \in R_{++}$ - малый параметр;

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака;

$A(\Gamma)$ - пространство аналитических функций, определенных на отрезке Γ.

Для $g(x) \in A(\Gamma)$ будем обозначать $g^{\circ}(x) \equiv \frac{g(x)-g(0)}{x} \in A(\Gamma)$.

$L(E,F)$ – пространство линейных операторов, действующих из банахова пространства E в банахово пространство F;
I - единичный оператор;
ImA - образ линейного оператора A;
$\ker A = \{x \in E | Ax = 0\}$ - ядро линейного оператора A;
$\operatorname{coker} A = F / ImA$ - коядро линейного оператора A.

Первая глава носит вспомогательный характер. В ней приводятся известные определения и сведения по теории уравнений математической физики, некорректных задач и интегральных уравнений, показывающие нерешенные задачи и необходимость исследований этих задач, предпринятых в диссертации. Также приведены различные факты из теории линейных уравнений, комплексного анализа, функционального анализа, теории катастроф, используемые в дальнейшем.

Рассматриваются основные типы изучаемых операторов и уравнений:

Оператор $A \in L\big(C(\Gamma) \to C(\Gamma)\big)$ в полной и краткой записи:

$$Au(\cdot)(x) = Au = a(x)u(x), \tag{1}$$

где $a(x) \in C(\Gamma)$ - заданная функция; будем обозначать $[\mu, M]$ – диапазон значений функции $a(x)$ в скалярном случае; также выделим основной частный случай

$$a(x) = x; \tag{1a}$$

оператор $K \in L\big(C(\Gamma) \to C(\Gamma)\big)$: (фредгольмового типа)

$$Ku(\cdot)(x) = Ku = \int_0^1 k(x,s)u(s)ds, \tag{2a}$$

или (вольтерровского типа):

$$Ku(\cdot)(x) = Ku = \int_0^t k(x,s)u(s)ds, \tag{2b}$$

где $k(x,s) \in C(\Gamma \times \Gamma)$ - заданная функция.

Будем рассматривать однородные уравнения

$$Au = 0 \tag{3}$$

$$Au + Ku = 0, \tag{4}$$

и неоднородные уравнения

$$Au = f(x), \tag{5}$$

$$Au + Ku = f(x), \tag{6}$$

$$Au + \lambda Ku = f(x), \tag{7}$$

где $f(x) \in C(\Gamma)$ - заданная функция, $\lambda \in R$ или $\lambda \in \mathrm{C}$,
возмущенное уравнение

$$\varepsilon u + Au + Ku = f(x). \quad (8)$$

Во второй главе получены результаты по разрешимости и нормальной разрешимости по Нётеру уравнений математической физики, сводящихся к линейным интегральным уравнениям как для вещественной, так и для комплексной переменных. Построены основы теории интегральных уравнений третьего рода с вырожденными ядрами.

Рассмотрен класс дифференциальных уравнений, встречающихся в математической физике

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = f_1(x), x \in \Gamma, \quad (9)$$

с начальными условиями

$$y^{(k)}(0) = y_k, k = 0..n-1. \quad (10)$$

Лемма 1. Если $a_k(x) \in C(\Gamma), k = 0..n-1, f_1(x) \in C(\Gamma)$, функция $a_k(x)$ обращается в нуль в некоторых точках, то замена $y^{(n)}(x) = u(x)$ приводит задачу (9)-(10) к интегральному уравнению третьего рода вида (1)-(2b)-(6), где $a(x) = a_n(x)$,

$$k(x,s) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{(x-s)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}, f(x) = f_1(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \sum_{m=k}^{n-1} y_m \frac{x^{m-k}}{(m-k)!}.$$

Условием непрерывности решения является

Теорема 1. Если функция $a(x)$ представима в виде

$$a(x) = (x - x_0)^n a_1(x), x_0 \in \Gamma, n \in N, 0 \neq a_1(x) \in C(\Gamma), \quad (11)$$

то уравнение (5) имеет решение $u(x) \in C(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда правая часть этого уравнения представима в виде

$$f(x) = (x - x_0)^m \varphi(x), m \in N, \varphi(x) \in C(\Gamma), x \in \Gamma, \quad (12)$$

$m \geq n$.

Далее рассматривается интегральное уравнение с вырожденным ядром вида (1a)-(2a)-(6) с

$$k(x,s) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x) q_k(s), \quad (13)$$

где $p_k(x), q_k(x), f(x) \in A(\Gamma)$.

Обозначается

$$b_{kj} = \int_0^1 q_k(s) p_j^{\circ}(s) ds, f_k = \int_0^1 q_k(s) f^{\circ}(s) ds, k, j = 1..n.$$

Теорема 2. Уравнение (1a)-(2a)-(6)-(13) имеет столько же решений в $A(\Gamma)$, сколько их имеет следующая система алгебраических уравнений относительно $v_k, k = 1..n$:

$\sum_{k=1}^{n} p_k(0)v_k = f(0),$ (14)

$v_k + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}v_j = f_k \,, k = 1..n.$ (15)

Эти решения выражаются формулами
$u(x) = -\sum_{k=1}^{n} p_k{}'(x)v_k + f'(x).$

Пример 1. Требуется определить, при каких значениях параметра w уравнение вида (1a)-(2a)-(7)

$$xu(x) + w\int_0^1 (x^2 + s)u(s)ds = 4 + 6x + 6x^2 \qquad (16)$$

имеет аналитическое решение: здесь

$n = 2, p_1(x) = wx^2;\ q_1(x) = 1;\ p_2(x) = w;\ q_2(x) = x; f(x) = 4 + 6x + 6x^2,$
$p_1{}'(x) = wx;\ \ p_2{}'(x) = 0;\ f'(x) = 6 + 6x.$

Уравнения (14)-(15) принимают вид

$p_1(0)v_1 + p_2(0)v_2 = f(0), v_1 + b_{11}v_1 + b_{12}v_2 = f_1, v_2 + b_{21}v_1 + b_{22}v_2 = f_2.$

Для параметра w получается уравнение $w^2 - 6w + 8 = 0.$

Уравнение (16) имеет два аналитических решения
$w_1 = 2; v_1 = \frac{9}{2}; v_2 = 2;\ u_1(x) = -2x\cdot\frac{9}{2} + 6 + 6x = 6 - 3x.$
$\boldsymbol{w_2 = 4; v_1 = 3; v_2 = 1;\ u_2(x) = -4x\cdot 3 + 6 + 6x = 6 - 6x}.$

Далее рассматривается нормальная разрешимость оператора (1) для гладкой функции $a(x)$. Пример $a(x) = x,\ \ f_0(x) = \sqrt{x} \in C(\Gamma); f_0(x) \notin ImA$ и последовательность функций $f_n(x) = \frac{nx\sqrt{x}}{nx+1} \in C(\Gamma) \cap ImA, n \in N$ $(f_n(x) \to f_0(x)$ по норме пространства $C(\Gamma))$ показывает, что здесь нет нормальной разрешимости.

Теорема 3. Уравнение (5) с $a(x), f(x) \in A(\Gamma),$ где $a(x)$ в некоторых точках отрезка Γ обращается в ноль, причем все эти нули – не кратные, нормально разрешимо в $A(\Gamma)$.

Пример $a(x) = x^2 \in A(\Gamma), f_0(x) = x \in A(\Gamma); f_0(x) \notin ImA$ и последовательность функций $f_n(x) = \frac{nx^3}{nx^2+1} \in A(\Gamma) \cap ImA, n \in N$ $(f_n(x) \to f_0(x)$ по норме пространства $A(\Gamma))$ показывает, что условие некратности нулей в Теореме 3 существенно.

Теорема 4. Пусть выполнены условия Теоремы 3. Тогда уравнение (5) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие $\langle f, \psi\rangle = 0$ для всех линейных непрерывных функционалов $\psi \in Coker\, A$.

Изучен вопрос о нормальной разрешимости оператора вида (1), где $a(x)$ - матрица–функция, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ - вектор-функция.

Пусть $\Omega\subset R^k$ - некоторый связный компакт, а оператор $A\in L(E^n,E^m)$ - оператор умножения на матрицу–функцию вида (1).

Теорема 5. Пусть $E=C(\Omega), a(x)\in C^{n\times n}(\Omega)$. Тогда оператор A обратим в $L(E^n)$ тогда и только тогда, когда он фредгольмов.

Теорема 6. Пусть $a(x),\ x\in\Gamma$ - непрерывная комплекснозначная $n\times m$-матрица-функция и $A\in L(E^n,E^m)$ - оператор умножения на матрицу-функцию вида (1), где $E=C(\Gamma)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) однородная система (3) имеет нетривиальное постоянное решение;

2) оператор A нормально разрешим по Нётеру;

4) матрица $a(x)$ имеет псевдообратную матрицу

$$a_0^{-1}(x)\in E^{m\times n} : a(x)a_0^{-1}(x)a(x)=a(x), x\in\Gamma.$$

В качестве приложения оператора умножения на матрицу–функцию рассмотрена задача нахождения на R^2 решения уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \tag{17}$$

удовлетворяющего условию 1-периодичности по x

$$v(x+1,t)=v(x,t) \tag{18}$$

и граничным условиям

$$v(x,0)=f_1(x), \tag{19}$$

$$\left[a(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}+b(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right]_{t=\tau(x)}=f_2(x), \tag{20}$$

где $a(x), b(x), f_1(x), f_2(x), \tau(x)$ - заданные 1-периодические функции. Если $\tau(x)=0,$ то (19)–(20) есть обычные начальные условия; если $\tau(x)\neq 0,$ то паре условий (19)–(20) можно придать простой физический смысл: в момент времени $\tau=0$ задана форма струны, а через промежуток времени $\tau=\tau(x)$ измерена и задана величина $f_2(x),$ зависящая от скорости.

Исследование этой задачи сводится (см. Антоневич А.Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. - Минск, 1988) к исследованию функционального уравнения

$$\alpha(x)\varphi(x)+\beta(x)\varphi(\gamma(x))=f_3(x), \tag{21}$$

где $f_3(x)=f_2(x)-a(x)f_1(\gamma_1(x)), \gamma_1(x)=x-\tau(x),$

$$\gamma_2(x)=x+\tau(x), \qquad \gamma(x)=\gamma_2(\gamma_1^{-1}(x)),$$

$$\alpha(x) = b(x) - a(x), \qquad \beta(x) = a(x) + b(x).$$

Если функция $\tau(x)$ принадлежит пространству $C^1(R)$ и удовлетворяет условию $|\tau'(x)|<1$, то отображения γ_1 и γ_2 являются C^1-диффеоморфизмами окружности $S^1 = R \bmod 1$. Отсюда следует, что уравнение (21) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда задача (17)–(20) имеет единственное решение $u \in C^2$ для любых $f_1 \in C^2(R)$, $f_2 \in C^1(R)$.

Предполагается, что

$$\gamma(\gamma(x))=x,\ x \in \Gamma. \tag{22}$$

Тогда, подставив вместо x функцию $\gamma(x)$, из уравнения (21) получаем

$$\beta(\gamma(x))\varphi(x) + \alpha(\gamma(x))\varphi(\gamma(x)) = f_3(\gamma(x)), \quad x \in \Gamma. \tag{23}$$

Введя теперь матрицу-функцию

$$A(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \beta(\gamma(x)) & \alpha(\gamma(x)) \end{pmatrix} \tag{24}$$

и вектор-функции

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_3(x) \\ f_3(\gamma(x)) \end{pmatrix}, u(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi(\gamma(x)) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

получено векторно-матричное уравнение вида (5) для $x \in \Gamma$, где $A \in L(E^2)$. Отсюда, если $\det A(x) \neq 0$ для всех $x \in \Gamma$, то уравнение (5), а следовательно, и задача (17)–(20), имеют единственное решение.

Теорема 7. Пусть выполнено условие (22). Для того, чтобы задача (17)–(20) была нётеровой, необходимо и достаточно, чтобы векторно-матричное уравнение (24)-(25)-(5) имело нетривиальное постоянное решение,.

Теорема 8. Пусть L - гладкий замкнутый контур, охватывающий область D^+, которая содержит начало координат. Рассмотрим линейное интегральное уравнение третьего рода вида

$$(z - z_0)^n a_1(z)\Phi(z) + \int_L k(z,\xi)\Phi(\xi)d\xi = F(z), \tag{26}$$

где $0 \neq a_1(z)$, $F(z) = f(z) + ig(z)$ и $k(z,\xi)$ - заданные функции на L, удовлетворяющие условию Гельдера (функция $k(z,\xi)$ удовлетворяет условию Гельдера по обеим переменным), $z_0 \epsilon L$, $n \in N$. $\Phi(z) = u(z) + iv(z)$ – искомая функция, которая также ищется в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Тогда уравнение (26) нормально разрешимо по Нётеру.

Нормально разрешимые операторы оказались тесно связанными с односторонне обратимыми и односторонне почти обратимыми операторами.

Эти вопросы для интегральных уравнений третьего рода исследованы в третьей главе.

Простейшими примерами нётеровых операторов являются односторонне обратимые операторы. Введем условие

(α) $dim\, kerA$=0; подпространство $Im\, A$ имеет прямое дополнение до пространства F: $Im\, A \oplus CokerA = F \subset E$.

Условие (α) выполняется для оператора $A \in L(E)$, определенного формулами (1)-(11). Для такого оператора

$Im\, A = \{f \in C^{(n-1)}(\Gamma): f^{(i)}(x_0) = 0, i = 0..m-1\}, \dim Coker\, A = n.$

В качестве одного из существующих левых обратных к оператору $A \in L(C^{(m-1)}(\Gamma), Im\, A)$ берется оператор $A_\Lambda^{-1}: F \to E$ в виде

$$(A_\Lambda^{-1} f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{a(x)}. \qquad (27)$$

Теорема 9. Пусть выполняется (11), а также

$$\frac{\partial^j k(x,s)}{\partial x^j} \in C(\Gamma \times \Gamma), j = 0..m; \frac{\partial^j k(x_0,s)}{\partial x^j} = 0, j = 0..m-1.$$

Тогда оператор (27) является почти левым обратным для оператора (6) B=A+K.

Теорема 10. Пусть x_0 является простым нулем функции $a(x)$, т.е. $n=1$,

$$k(x,s) \in C(\Gamma \times \Gamma), E = C(\Gamma).$$

Тогда оператор $A_\Lambda^{-1} \in L(F,E)(F = Im\, A \oplus CokerA)$, определенный формулой (27), является почти правым обратным для оператора $B \in L(C(\Gamma), Im\, B)$, то есть $BA_\Lambda^{-1} - I \in K(F,F)$ – пространство вполне непрерывных линейных операторов.

Теорема 11. Пусть выполнены условия теорем 9 и 10 при $m=1$. Тогда оператор (27) является (двусторонним) почти обратным для оператора B=A+K.

В четвертой главе исследованы спектральные свойства интегральных уравнений третьего рода, построены решения для некоторых типов таких уравнений с параметрами.

Теорема 12. Все точки множества $\sigma(A)$ оператора A (1)-(11) с $n=1$ не являются собственными значениями.

Теорема 13. Оператор $A \in L(C(\Gamma), ImA)$ имеет в диапазоне $[\mu, M] \equiv [\inf a_1(x), \sup a_1(x)]$ только остаточный спектр.

Справедлива также следующая более общая

Теорема 14. Пусть $E = C^{(n)}(\Gamma)$ и задан оператор (1)-(11) $A \in L(E)$. Тогда он имеет в диапазоне $[\mu, M] \equiv [\inf a_1(x), \sup a_1(x)]$ только остаточный спектр.

Рассматривается интегральное уравнение третьего рода (1)-(2)-(7).

Ранее в литературе рассматривались спектральные свойства интегральных операторов в лебеговых пространствах, особенно в пространстве $L_2(\Gamma)$, что, естественно, приводит к непрерывному спектру оператора. В диссертации исследование этого вопроса проводится в пространстве $C^{(n)}(\Gamma)$, и это привело к другому классу спектрального множества оператора B_λ, а именно, к остаточному спектральному множеству.

Известно, что непрерывные решения однородных интегральных уравнений Вольтерра как первого, так и второго родов, отличные от тривиальных, не существуют. В отличие от них однородные интегральные уравнения Вольтерра третьего рода могут иметь нетривиальные (как непрерывные, так и разрывные) решения.

Выявлены новые факты, не имеющие место в теории линейных интегральных уравнений Вольтерра как второго, так и первого родов.

Теорема 15. Если выполняется (1a), то спектральное множество оператора B_λ не пусто и состоит из единственной точки нуля, т.е. $\sigma(B_\lambda) = \{0\}$, причем нуль является собственным значением B_λ.

Теорема 16. Для уравнения (1a)-(2a)-(4) с

$$k(x,s) = -\lambda \tag{28}$$

любое значение параметра $\lambda \in [1, \infty)$ является собственным значением, а соответствующей ему собственной функцией будет функция $u_\lambda(x) = x^{\lambda-1}$.

Найдено также уравнение с непрерывными коэффициентами, имеющее решение в $L_1(\Gamma)$, но не в $L_2(\Gamma)$.

Теорема 17. Для уравнения (1)-(2b)-(6) с

$$a(x) = \sqrt{x},\ k(x,s) = p(x)q(s), \quad p(x), q(x), f(x) \in C(\Gamma)$$

решение имеет вид

$$u(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}} - \frac{p(x)}{\sqrt{x}} E(x) \int_0^x \frac{q(s)f(s)}{\sqrt{s}} E^{-1}(s)ds, E(x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{q(\xi)f(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi\right).$$

Рассматриваются операторы A и K, определяемые формулами (1) и (2a), $k(x,s) = \sum_{j=1}^{n} p_j(x) p_j(s), p_j(x) \in C(\Gamma), j = 1..n$.

Изучается спектральная задача: существуют ли такие значения параметра λ, при которых однородное уравнение

$$Bu \equiv Au + Ku = \lambda u \tag{4.3.1}$$

имеет (кроме нулевого) нетривиальные решения? Если существуют такие значения параметра λ, то их будем называть собственными значениями, а соответствующие таким собственным значениям нетривиальные решения будем называть собственными функциями оператора *B* (или уравнения (4.3.1)).

Следующая теорема справедлива для интегральных уравнений и первого, и второго, и третьего рода.

Теорема 18. Число $\lambda_0 \notin [\mu, M]$ является собственным значением оператора *B* тогда и только тогда, когда оно является нулем функции

$$F(\lambda) = det\begin{pmatrix} 1 + r_{11} & r_{12} \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} \dots & 1 + r_{nn} \end{pmatrix},$$

где r_{ij} - определяются формулами

$$r_{ij} = \int_0^1 \frac{p_i(x)p_j(s)}{a(s)-\lambda} ds, i, j = 1..n.$$

Пятая глава посвящена регуляризации некоторых некорректных задач математической физики и построению их приближенных решений методами теории интегральных уравнений.

Теорема 19. Пусть выполнены условия:

1^0. $\frac{\partial^j k(x,s)}{\partial x^j} \in C(\Gamma \times \Gamma), j = 0..n-1,$ (29)

а функция $\frac{\partial^n k(x,s)}{\partial x^n}$ терпит разрыв первого рода на диагонали произведения $\Gamma \times \Gamma$, то есть ядро $k(x,s)$ представимо в виде

$$k(x,s) = \begin{cases} L(x,s), & \{0 \le s \le x \le 1\} \equiv T_1, \\ M(x,s), & \{0 \le x < s \le 1\} \equiv T_2, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$L_j(x,s) = \frac{\partial^j k(x,s)}{\partial x^j} \in C(T_1), M_j(x,s) = \frac{\partial^j k(x,s)}{\partial x^j} \in C(T_2), j = 0, \dots, n+1,$$

$$L_j(x,x) \equiv M_j(x,x), j = 0, \dots, n-1, \quad (31)$$

$$0 \neq h(x) = L_n(x,x) - M_n(x,x).$$

Обозначим еще

$$k_{n+1}(x,s) = \begin{cases} L_{n+1}(x,s), & (x,s) \in T_1, \\ M_{n+1}(x,s), & (x,s) \in T_2, \end{cases}$$

2^0. $f \in C_{0,1}^{(n+1)}(\Gamma) = \{f \in C^{(n-1)}(\Gamma): f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0,1,\dots,n\}.$

Введем обозначения: функции

$$\omega_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^n \varepsilon^{-j} C_{r+j-1}^{n-1} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \frac{x^{r+j-1}}{(r+j-1)!}, \quad (32)$$

$$Q_\varepsilon(x,s) = -\int_0^1 \omega_\varepsilon^{(r)}(x-\xi) k_{n+1}(\xi,s) d\xi - \omega_\varepsilon^{(r+n+1)}(x-s) a(s), \quad (33)$$

Оператор

$$R_\varepsilon\big(V(\cdot)\big)(x) = -\int\limits_0^1 \omega_\varepsilon^{(r)}\,(x-s)V(s)ds, x\in\Gamma.$$

Тогда уравнение типа Фредгольма (2a)-(6) эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению

$$(a(x)u(x))^{(n+1)} + h(x)u(x) + \int_0^1 k_{n+1}\,(x,s)u(s)ds = f^{(n+1)}(x), x\in\Gamma. \qquad (34)$$

Предполагается, что оно имеет решение $u_0(x) \in C^{n+1}(\Gamma)$.

3⁰. Число $\lambda=-1$ не является характеристическим для ядра $\overline{Q}_\varepsilon(x,s) = \frac{1}{h(x)}Q_\varepsilon(x,s)$ и пусть $R_\varepsilon(x,s)$ - его резольвента.

Обозначим еще

$$k_{n0} = ||k_n(x,x)||_{C^{n+1}(\Gamma)}, u_{01}=||u_0(x)|, \qquad (35)$$

Тогда имеет место оценка

$$\int_0^1 \omega_\varepsilon\ (x-s)(k_n(s,s)u_0(s))^{(r)}ds \le 2k_{n0}u_{01}. \qquad (36)$$

Рассмотрим уравнение

$$u(x) + \int_0^x Q_\varepsilon(x,s)u(s)ds = \varphi_\varepsilon(x), \qquad (37)$$

где

$$\varphi_\varepsilon(x) = R_\varepsilon\Big(f^{(n+1)}(\cdot)\Big)(x). \qquad (38)$$

Теорема 20. Пусть выполнены условия Теоремы 19 и

4^0. заданы значения $u_0^{(i)}(0), i=0,1,\dots,r-1, u_0^{(i)}(1), i=0,1,\dots,r-1,$

Тогда $u_\varepsilon^\delta(x)\to u_0(x), \delta\to 0$ в $C(\Gamma)$ и справедлива оценка

$$||u_0(x) - u_\varepsilon^\delta(x)||_{C^{n+1}(\Gamma)} \le ||I + R_\varepsilon||2^{r+1}(1 + \frac{r}{n+1})(k_{n0}u_{01})^{\frac{n+1}{n+r+1}} \times$$

$$\times\,(\frac{\delta(n+1)}{2r})^{\frac{r}{n+r+1}}. \qquad (39)$$

Теорема 21. Рассмотрим линейное интегральное уравнение третьего рода типа Вольтерра (1)-(2b)-(6), где выполняется (11) при $n=1$.

Пусть это уравнение имеет единственное решение $u_0(x) \in \mathrm{C}^1(\Gamma)$ при следующих условиях:

$$1^0. \frac{\partial^j k(x,s)}{\partial x^j} \in C(T_1),\ \{0 \le s \le x \le 1\} \equiv T_1, j = 0..m, \qquad (40)$$

$$\frac{\partial^j k(x,s)}{\partial x^j}|_{x=s} = 0, \qquad j = 0..m-2, (m > 2)$$

$$\frac{\partial^{n-1} k(x,s)}{\partial x^{n-1}}|_{x=s} = 1.$$

2^0. $f \in C(\Gamma)$.

3^0. Известно, что $\|u'\|_{C(\Gamma)} \leq \ell, \quad u(0)=0$.

Рассматривается регуляризованное уравнение

$$u(x) + \int_0^x q_\varepsilon(x,s)u(s)ds = (R_\varepsilon(f_0))(x) + f_0(x), \tag{41}$$

где $q_\varepsilon(x,s) = (-1)^{n-1}\int_0^x \omega_\varepsilon^{(n+1)}(x-\xi)p(x,\xi)d\xi + \omega_\varepsilon^{(n+1)}(x-s)a(s)$,

$$f_0(x) = -\omega_\varepsilon(x)u(0) - \int_0^x \omega_\varepsilon(x-\xi)u'(\xi)d\xi.$$

Тогда уравнение (41) имеет единственное решение $u_\varepsilon^\delta(x)$ и если параметры ε и δ согласовать условием $\dfrac{\delta}{\varepsilon^{n+1}} \to 0$ при $\delta \to 0$, имеет место сходимость

$$\lim_{\delta\to\infty} ||u_0(x) - u_\varepsilon^\delta(x)||_{C(\Gamma)} = 0.$$

Рассмотрен используемый в различных задачах математической физики линейный дифференциальный оператор $D \in L(E,F)$, $E=C^1(\Gamma\to R^n)$, $F=C(\Gamma\to R^n)$, заданный формулой

$$Du(x)=u'(x)-A(x)u(x),\ x\in\Gamma, \tag{42}$$

где $u(x)=colon\ (u_1(x),\ldots,u_n(x))$, $A(x)$ - $n\times n$-матрица-функция с элементами $a_{ij}(x) \in C(\Gamma)$, $i,j=1..n$.

Как известно, неоднородное уравнение

$$Du(x)=f(x) \tag{43}$$

где $f(x)=colon\ (f_1(x),\ldots,f_n(x))$, $f_i(x) \in C(\Gamma)$, $i=1..n$, имеет общее решение

$$u(x) = W(x)c + \int_0^x W(x)W^{-1}(s)f(s)ds\,, x \in \Gamma, \tag{44}$$

где $c=colon\ (c_1,\ldots,c_n)$ - постоянный вектор, $W(x)$ - фундаментальная $n\times n$-матрица-функция, т.е. столбцы этой матрицы образованы системой n линейно независимых решений уравнения $Du(x)=0$.

Из (44) следует, что оператор D является сюръективным, поскольку $f(x)$ – любой элемент F, но не является инъективным, потому что вектор c выбирается неоднозначно. Таким образом любой элемент пространства E представим в виде $u=u_0+u_1$, где $u_0 \in Ker\ D$, $u_1 \in E\backslash Ker\ D$, т.е. оператор $D:E \to F$ нётеров: $dim\ Ker\ D = n$, $dim\ Coker\ D = 0$, причем подпространство $Ker\ D$ имеет прямое дополнение в E. Следовательно, согласно известной теореме, существует правый обратный оператор к оператору D, который в общем случае определяется неоднозначно. Однако если известен один из обратных справа операторов к D, то их общий вид дается формулой PD_r^{-1}, где D_r^{-1} - один из обратных справа к D операторов, а P - произвольный проектор со свойством $ker\ P = ker\ L$. В качестве D_r^{-1} может служить оператор, заданный формулой

$$D_r^{-1}\big(f(\cdot)\big)(x) = \int_0^x W(x)W^{-1}(s)f(s)ds.$$

Левого обратного оператора для $D:E \to F$ не существует, так как $dim\ Ker\ D > 0$.

В шестой главе найдены условия возникновения бифуркаций решений уравнений математической физики, сводящихся к нелинейным интегральным уравнениям, с использованием теории катастроф.

Рассматриваются задачи, которые в наиболее общем виде записываются следующим образом:

$$W(u,\lambda)=0, \tag{45}$$

где $W: E\times R\to F$ или $W: E\times C\to F$, E, F – банаховы пространства.

Теорема 22. Пусть $E = F = C^{(m-1)}(\Gamma), m\geq 1$. Предположим, что отображение W имеет вид

$$W(u(\cdot),\lambda)(x) = a(x)u(x) + \gamma\int_0^1 p\,(x)p(s)u(s)ds + G(u(x),\lambda), \tag{46}$$

где выполняется (11),

$\gamma\in R$ - заданное число, отображение $G:R\times R\to R$ удовлетворяет условиям

$$G(0, \lambda)=0, \tag{47}$$

$$|\,G(v, \lambda)| = o(|v|),\ v\to 0 \tag{48}$$

равномерно относительно λ в любом ограниченном интервале из R. Тогда точка $(0, -\lambda_0)$ для уравнения (45)-(46) будет точкой бифуркации относительно ветви $(0, \lambda)$ только тогда, когда $-\lambda_0$ будет собственным значением оператора $B\in L(E)$, где

$$Bu(x) = a(x)u(x) + \gamma\int_0^1 p(x)p(s)u(s)ds,$$

т.е. существует ненулевая функция $\varphi(x) \in C^{(m-1)}(\Gamma)$ такая, что $B\varphi(x) = -\lambda_0\varphi(x)$.

Далее, исследуется уравнение

$$(B_\lambda u)(x) + g(x, u(x)) = 0, \tag{49}$$

где линейный оператор $B_\lambda \in L(C(\Gamma))$ определен формулой

$$B_\lambda u(x) = (a(x) - \lambda)u(x) + \gamma \int_0^1 p(x)p(s)u(s)ds,$$

а функция $g\colon \Gamma \times R \to \Gamma$ представима в виде

$$g(x,u) = g_1(x)u^3,\ g_1(x) \in C(\Gamma). \tag{50}$$

Будем искать пару (u,λ) - решения уравнения (49) – в виде

$$\left.\begin{aligned} &u(x) = \varepsilon\varphi(x) + v(x), \quad x \in \Gamma, \\ &\lambda = \lambda_0 + \mu. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Здесь $\lambda_0 < 0$ - единственное (простое) собственное значение оператора B_λ, а $\varphi(x)$- соответствующая ему нормированная собственная функция.

Теорема 23. Пусть λ_0 - собственное значение оператора $B_0 \in L(C(\Gamma))$, $\varphi(x) \in ker\ B_0$ - собственная функция, соответствующая этому собственному значению.

Тогда существует окрестность точки $(0,\lambda_0)$ в пространстве $C(\Gamma)\times R$, в которой все решения уравнения (51) представляют собой, с одной стороны, тривиальное решение $(0,\lambda)$, с другой – даются непрерывными кривыми $(u_\varepsilon,, \lambda_\varepsilon)$, где

$u_\varepsilon = \varepsilon\varphi + v(\varepsilon)$, $v(0)=0$, $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\lambda_0 + \mu(\varepsilon)$, $\mu(0)=0$,

функция $v(\varepsilon)$ – нечетная.

Выводы

В диссертации:

Показана сводимость некоторых классов уравнений математической физики к интегральным уравнениям;

Найдены достаточные условия разрешимости и нормальной разрешимости по Нётеру уравнений математической физики, сводящихся к линейным интегральным уравнениям как для вещественной, так и для комплексной переменных;

Построены основы теории интегральных уравнений третьего рода типа Фредгольма с вырожденными ядрами;

Найдены условия односторонней обратимости и односторонней почти обратимости основных операторов, возникающих при преобразовании некорректных задач математической физики;

Показана возможность регуляризации некоторых некорректных задач математической физики методами теории интегральных уравнений;

Получены условия бифуркации решений уравнений математической физики, сводящихся к нелинейным интегральным уравнениям, с использованием математической теории катастроф.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Баратaлиев К.Б. Приближенное решение линейных интегральных уравнений смешанного типа с запаздывающим аргументом с помощью одного варианта методов Ю.Д. Соколова [Текст] / К.Б.Баратaлиев // Дифференциальные уравнения. Минск, 1968, 4, № 11, с. 2084-2088.

2. Баратaлиев К.Б. О регуляризации интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра I рода [Текст] / К.Б.Баратaлиев // Труды КиргГУ, сер. матем. наук, 1974, вып. 9, с. 3-8.

3. Баратaлиев К.Б. О связи между мерами Стильтьеса и Радона [Текст] / К.Б.Баратaлиев. - В кн. «Математические методы теории систем». Фрунзе: 1979, вып. I, с.15-17.

4. Баратaлиев К.Б. К теории линейных интегральных уравнений третьего рода [Текст] / К.Б.Баратaлиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1985, вып. 18, с. 31-39.

5. Баратaлиев К.Б. Регуляризация вариационных неравенств с монотонными отображениями [Текст] / К.Б.Баратaлиев // Тезисы докл. Всесоюзной конференции по некорректно поставленным задачам. – Фрунзе: Илим, 1979, с. 19-20.

6. Баратaлиев К.Б. Регулярные методы решения некорректных задач [Текст] / К.Б.Баратaлиев. - В кн.: «Асимптотические методы теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их приложения». – Фрунзе: КиргГУ, 1981, с.49-59.

7. Баратaлиев К.Б. Регуляризация вариационных неравенств с монотонными и псевдомонотонными отображениями [Текст] / К.Б.Баратaлиев. - В кн.: «Вопросы качественного исследования и приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений». – Фрунзе: Труды КирГУ, 1983, с. 16-24.

8. Баратaлиев К.Б. К теории вариационных неравенств [Текст] / К.Б.Баратaлиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1983, вып. 16, с. 211-217.

9. Баратaлиев К.Б. Регуляризация решений некорректных задач [Текст] / К.Б.Баратaлиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984, вып. 17, с. 131-139.

10. Баратaлиев К.Б. Некоторые применения методов теории вариационных неравенств [Текст] / К.Б.Баратaлиев // Сборник научных трудов. – Фрунзе: КиргГУ, 1983, с. 3-9.

11. Баратaлиев К.Б. Об одной задаче управления [Текст] / К.Б.Баратaлиев, К.Курманбеков // Труды КирГУ, вып. II. – Фрунзе: 1976, с. 12-15.

12. Баратaлиев К.Б. О регуляризации уравнения Вольтерра I рода [Текст] / К.Б.Бараталиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991, вып. 24, с.211-217.
13. Бараталиев К.Б. О регуляризации уравнения Вольтерра I рода [Текст] / К.Б.Бараталиев // Тезисы докладов Всесоюзной научной конференции по некорректным задачам. – Алма-Ата: АН Каз. ССР, 1989, с. 12.
14. Бараталиев К.Б. О линейных интегральных уравнениях третьего рода [Текст] / К.Б.Бараталиев. - В кн. «Исследования по теории и приближенным методам решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений». - Фрунзе: Изд. КГУ, 1989, с. 6-9.
15. Бараталиев К.Б. О методе Галеркина для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма I рода [Текст] / К.Б.Бараталиев // Некорректно поставленные задачи в естествознании: Тезисы докл. Международной научной конференции. – Москва: АН СССР, 1991. - С. 68.
16. Бараталиев К.Б. О регуляризации линейного интегрального уравнения Вольтерра I рода с помощью интегрирования по частям [Текст] / К.Б.Бараталиев // Асимптотические методы теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: тезисы докладов Всесоюзной научной конференции. – Бишкек: АН КР, 1991, с. 22.
17. Бараталиев К.Б. Некоторые методы решения некорректных задач математической физики (монография) [Текст] / К.Б.Бараталиев. - Бишкек: Илим, 1991. – 118 с.
18. Бараталиев К.Б. Приближенное решение одного класса интегральных уравнений методом осреднения функциональных поправок [Текст] / К.Б. Бараталиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 23. – Бишкек: Илим, 1991, с. 48-51.
19. Бараталиев К.Б. Метод интегрирования по частям регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / К.Б.Бараталиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып 24. – Бишкек: Илим, 1992, с. 30-35.
20. Бараталиев К.Б. Нетеровость интегральных уравнений третьего рода [Текст] / К.Б.Бараталиев // Вестник КГНУ, серия естественно-техн. наук, т. I, 1994, с. 109-110.
21. Бараталиев К.Б. Проекционные методы решения интегральных уравнений первого рода на компакте [Текст] / К.Б.Бараталиев // Вестник КГНУ, серия естественно-техн. наук, вып. 2, 1995, с. 86-90.
22. Бараталиев К.Б. О структуре области значений оператора умножения на независимую переменную [Текст] / К.Б.Бараталиев // Проблемы механики и

прикладной математики: Материалы международной научно-практ. конф., посв. памяти проф. Ф.И. Франкля. Т.2. Прикладная математика. – Бишкек, 1995. - С. 25-26.
23. Бараталиев К.Б. К вопросу о точках бифуркации для нелинейного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода [Текст] / К.Б.Бараталиев // Там же, с. 23-24.
24. Бараталиев К.Б. Решение интегрального уравнения первого рода методом конечных элементов [Текст] / К.Б.Бараталиев, О.А. Бердалиев // Вестник КГНУ, серия естественно-техн. науки. вып. 2, 1997, с. 48-53.
25. Бараталиев К.Б. О регуляризации интегрального уравнения первого рода [Текст] / К.Б.Бараталиев, М.К. Омуралиев // Там же, с. 54-56.
26. Бараталиев К.Б. О нормальной разрешимости оператора умножения на дифференцируемые функции [Текст] / К.Б.Бараталиев / Проблемы математики и информатики в XXI веке. Труды международной конференции // Вестник КГНУ. Серия 3, вып. 4, естественно-техн. науки, 2000, с. 69-74.
27. Бараталиев К.Б. Односторонняя обратимость и почти обратимость операторов A и A+K [Текст] / К.Б.Бараталиев // Вестник КГНУ, серия 3, вып.5, естественно-техн. науки, 2001, с. 185-189.
28. Бараталиев К.Б. Регуляризация слабо некорректных задач [Текст] / К.Б. Бараталиев, Ш.Б. Шабыкеев // Вестник КГНУ, серия 3, вып. 6, естественно-техн. науки, 2001, с. 164-168.
29. Бараталиев К.Б. К теории интегральных уравнений третьего рода (монография) [Текст] / К.Б.Бараталиев. - Бишкек: Изд.”Учкун”, 2004. - 160 с.
30. Бараталиев К.Б. Нормальная разрешимость интегральных уравнений третьего рода [Текст] / К.Б.Бараталиев // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Материалы тезисов докладов II международной научной конференции. - Бишкек-Бозтери, 13-17 сентября 2006 г., с. 50.
31. Бараталиев К.Б. О полноте систем собственных функций однородного интегрального уравнения третьего рода [Текст] / К.Б.Бараталиев // Вестник КНУ имени Жусупа Баласагына. Специальный выпуск, посв. 80-летию акад. М.И. Иманалиева, 2011. – С. 553-557.
32. Бараталиев К.Б. Об одном варианте краевой задачи Гильберта теории аналитических функций [Текст] / К.Б.Бараталиев // Тезисы докладов Второй международной научной конференции. - Кыргызско-Российский Славянский ун-т. - Бишкек, 2013. - С. 83.
33. Бараталиев К.Б. Приближенное решение краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [Текст] /

К.Б.Бараталиев // Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi. Serie Nouă, Tomul XIII (XVII), Fac. 1-2, 1967, p. 67-76.
34. Barataliev K.B. Approssimassione delle soluzioni di certi sistemi integro-differenziali con argomento ritardato [Текст] / D.Mangeron, L.E.Krivoscein, K.B. Barataliev, T.Amankulov // Accademia nazionale dei Lincei, Estratto dai Rendiconti della class di Scienze fis., mat., Series VIII, vol. VXLIV, Fasc. 3, 1968, p. 317-322.
35. Barataliev K. On Noethericity of the third kind integral equations in the complex domain [Текст] / K. Barataliev // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Ed. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – P. 97.

РЕЗЮМЕ

Барataлиев Керим Баратaлиевич

« Математикалык физиканын корректтүү эмес маселелерин чыгаруунун усулдары» - деген темадагы 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин доктору окумуштуулук даражасын алуу үчүн диссертация сунушталган

Урунттуу сөздөр: дифференциалдык теңдеме, математикалык физиканын теңдемеси, интегралдык теңдеме, корректтүү эмес маселе, сызыктуу оператор, интегралдык оператор, Фредгольм оператору, Нётер оператору, тескери оператор, оператордун спектри, сингулярдык дүүлүгүш, нормалдук чыгарылуучулук, регуляризациялоо, бифуркация (айрылуу), функционалдык мейкиндик

Математикалык физиканын теңдемелеринин кээ бир класстарын интегралдык теңдемелерге келтирүүчүлүк чагылдырылды.

Сызыктуу интегралдык теңдемелерге келтирилүүчү математикалык физиканын теңдемелеринин Нетер боюнча чыгарылуучулугу жана нормалдук чыгарылуучулугунун жетишерлик шарттары табылды.

Үчүнчү түрдөгү, ядролору начарланган интегралдык теңдемелердин теориясынын негиздери курулду.

Математикалык физиканын корректтүү эмес маселелерди өзгөртүүдө пайда болуучу негизги операторлордун бир жагынан тескериленүүчүлүгүнүн жана бир жагынан н дээрлик тескериленүүчүлүгүнүн шарттары табылды.

Математикалык физиканын кээ бир корректтүү эмес маселелерди регуляризациялоонун мүмкүнчүлүгү көрсөтүлдү.

Математикалык катастрофалар (кыйроолор) теориясын колдонуу менен сызыктуу эмес интегралдык теңдемелерге келтирилүүчү математикалык физиканын теңдемелеринин чыгарылыштарынын бифуркациянын (айрылуунун) шарттары табылды.

РЕЗЮМЕ

Бараталиев Керим Бараталиевич

Диссертация «Методы решения некорректных задач математической физики» представлена на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, уравнение математической физики, интегральное уравнение, некорректная задача, линейный оператор, интегральный оператор, фредгольмов оператор, нетеров оператор, обратный оператор, спектр оператора, сингулярное возмущение, нормальная разрешимость, регуляризация, бифуркация, функциональное пространство

Показана сводимость некоторых классов уравнений математической физики к интегральным уравнениям.

Найдены достаточные условия разрешимости и нормальной разрешимости по Нетеру уравнений математической физики, сводящихся к линейным интегральным уравнениям как для вещественной, так и для комплексной переменных.

Построены основы теории интегральных уравнений третьего рода с вырожденными ядрами.

Найдены условия односторонней обратимости и односторонней почти обратимости основных операторов, возникающих при преобразовании некорректных задач математической физики.

Показана возможность регуляризации некоторых некорректных задач математической физики методами теории интегральных уравнений.

Получены условия бифуркации решений уравнений математической физики, сводящихся к нелинейным интегральным уравнениям, с использованием математической теории катастроф.

SUMMARY

Barataliev Kerim Baratalievich

Dissertation “Methods to solve improper problems of mathematical physics” submitted for the scientific degree of doctor of physical-mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: differential equation, equation of mathematical physics, integral equation, improper problem, linear operator, integral operator, Fredholm operator, Nöther operator, inverse operator, spectrum of operator, singular perturbation, normal resolvability, regularization, bifurcation, functional space

Reducibility of some classes of equations of mathematical physics to integral equations is demonstrated.

Sufficient conditions are found for Nöther’s solvability and normal solvability of equations of mathematical physics reducible to linear integral ones.

Foundations of theory of integral equations of the third kind with degenerate kernels are built.

Conditions are found for one-sided reversibility and for one-sided almost reversibility of main operators arising in transformation of improper problems of mathematical physics.

Possibility is demonstrated for regularization of some improper problems of mathematical physics by means of the theory of integral equations.

By applying the catastrophe theory, conditions are obtained for bifurcation of solutions of equations of mathematical physics reducible to non-linear integral ones.