КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Т.Шевченко

О.Ф.АНТОНЕНКО

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА В ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ.

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук.
(01.041 - Математическая физика)

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор -
С.М.Белоносов

Киев, 1971 г.

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Т.Шевченко

О.Ф.АНТОНЕНКО

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА В ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ.

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук.
(01.041 - Математическая физика)

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор -
С.М.Белоносов

Киев, 1971 г.

53
А46

СК

Работа выполнена в Вычислительном центре Сибирского отделения Академии наук СССР.

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор С.М.Белоносов.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Иванов,
кандидат физико-математических наук
А.А.Березовский

Ведущее учреждение – Ленинградский государственный оптический институт им. академика Вавилова.

Защита диссертации намечается на апрель-май 1971 г.

Отзывы просим направлять по адресу:
Киев, Владимирская 60, Ученый Совет факультета Кибернетики Киевского государственного Университета.

Дата рассылки автореферата "23" марта 1971 г.

Расчет полей, создаваемых реальными электроннооптическими устройствами, сводится к граничным задачам, которые, как правило, не могут быть решены классическими методами. При численных расчетах обычно используются конечноразностные методы. Они могут быть хороши для некоторых видов задач, однако в общем страдают от различных ограничений, которых мы надеемся в основном избежать в предлагаемом методе интегральных уравнений. На возможность и преимущества применения интегральных уравнений в численном решении на ЭВМ ряда задач математической физики неоднократно указывал доктор физико-математических наук С.М.Белоносов (см., сб. тр. "Вычислительные системы", вып. 12,"Интегральные уравнения и краевые задачи" [1]).

Решение интегрального уравнения I-го рода является условно-корректной задачей. Такие задачи в последнее время привлекают к себе большое внимание (см., например, книгу М.М.Лаврентьева [2] , где приводится литература по этому вопросу). Разработан целый ряд методов регуляризации, позволяющий численно решать условно-корректные задачи. Предложенный в данной работе алгоритм является одной из таких регуляризаций.

Глава I реферируемой работы содержит решение задачи Дирихле посредством потенциала простого слоя. Пусть $L = \bigcup L_i$, $i = 1, 2, \ldots N$, кусочногладкая линия в полуплоскости $\rho > 0$, $-\infty < z < +\infty$. В замкнутой или разомкнутой области с границей S, образованной вращением контура L вокруг оси z, рассмотрим задачу Дирихле:

$$\Delta u = 0,$$
$$u|_s = V,$$

где V есть заданная функция с осевой симметрией. Если решение искать в виде потенциала простого слоя $u = \iint_s \frac{\sigma(s)}{R} ds$, то задача Дирихле эквивалентна решению интегрального уравнения I-го рода $V = \iint_s \frac{\sigma}{R} ds$.

С учетом осевой симметрии и особенностей плотности σ в угловых и концевых точках контура это уравнение приводится к одномерному интегральному уравнению Фредгольма I-го рода относительно кусочно-непрерывной функции φ : $K\varphi = V$

Из классической теории потенциала следует, что задача решения этого уравнения корректна по Тихонову в классе решений $f \in H$, если правые части $V \in H_1$, где H есть пространство функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, а H_1 – пространство функций, имеющих производную, удовлетворяющую условию Гёльдера.

Численное решение задачи состоит в том, что-бы заменить интегральное уравнение системой линейных алгебраических уравнений, относящихся к системе узловых точек, расположенных вдоль границы L, и затем решить эти уравнения на ЭВМ. Метод аппроксимации интегрального уравнения системой является обобщением известного метода Боголюбова-Крылова, который состоит в том, что неизвестная функция заменяется кусочнопостоянной. Наше обобщение заключается в том, что на каждом из интервалов разбиения неизвестная функция заменяется параболой, коэффициенты которой находятся через значения функции в узлах. Результаты экспериментальных расчетов, выполненных обоими методами, показали, что точность обобщенного способа значительно выше при одинаковой затрате машинного времени.

Вычисленный n-мерный вектор f_n отождествляется с кусочно-параболической функцией f_n, а последняя с плотностью потенциала простого слоя, который дает потенциал $\tilde{u}$ требуемого вида. В задаче Дирихле, где потенциал задается вдоль L, мы можем вычислить $|\tilde{u} - V|$ в ряде точек на границе, не совпадающих с точками деления, и используя теорему о том, что гармоническая функция принимает максимум абсолютного значения на границе, можем найти верхнюю грань абсолютной ошибки, связанной с f_n. Таким образом, есть удобный практический критерий точности решения задачи.

Ввиду наличия особенности интегрального ядра на диагонали и небольшого числа узлов квадратурной формулы, обеспечивающих нужную точность, решаемые системы являются хорошо обусловленными, так что эффекта неустойчивости не было обнаружено. Решения системы можно рассматривать как квазирешения (функции, минимизирующие функционал невязок) на компактном в C множестве $\|f_n\|_H \le C_1$, $(C_1 = const)$. По известным теоремам такие квазирешения сходятся при $n \to \infty$ к решению интегрального уравнения. Устойчивость решений системы и их сходимость к решению интегрального уравнения показана лишь экспериментально. Для полной гарантии сходимости предлагается решать регуляризованную систему $A_n f_n + \frac{1}{n} f_n = V_n$, где n – порядок системы, равный числу узлов применяемой квадратурной формулы.

В главе II дается описание алгоритма расчета поля потенциала, градиентов и траекторий заряженных частиц для произвольного контура, состоящего из кусков эллипсов и прямых, то-есть описание задачи, для которой составлены программы на ЭВМ. Счет градиентов сводится к квадратурам, для счета траекторий интегрируются уравнения движения методом, представляющим вариант метода Рунге-Кутта. Этот вариант имеет второй порядок точности и требует для расчета одного шага однократного вычисления градиента поля.

Алгоритмы, построенные с использованием интегральных уравнений, привлекательны тем, что, обладая в большой степени независимостью от вида контурной кривой, позволяют создавать удобные в эксплуатации типовые программы. Рассмотренные в работе задачи электростатики: I) расчет поля потенциала для широкого круга осесимметричных областей, 2) расчет градиентов этого поля, 3) расчет траекторий заряженных частиц – завершены созданием типовых программ на ЭВМ, содержащихся в подробном отчете [5].

В последнем параграфе главы II приведены некоторые результаты расчетов и численных экспериментов, производится сравнение с известными точными результатами (в случае диска, шара, в задаче Кепплера).

Основные результаты диссертации:

I. Дается разработка численных методов решения важного круга задач математической физики с использованием интегрального уравнения I-го рода;

2. Предложен метод регуляризации интегрального уравнения I-го рода, рассмотрены вопросы устойчивости и сходимости приближенных решений к точному.

3. Для рассмотренных в работе задач созданы типовые программы на ЭВМ.

Проведенные численные эксперименты показали эффективность предложенного метода.

Основные результаты опубликованы в работах [3] , [4] . Они докладывались на I-ом (Новосибирск, 1967) и Ш-ем (Ленинград, 1969) Всесоюзных семинарах по численным методам расчета электронно-оптических систем, обсуждались на научных семинарах ВЦ СО АН СССР.

В заключение автор выражает глубокую благодарность руководителю темы, доктору физ-мат.наук С.М.Белоносову за постановку задачи, постоянное внимание к ее решению; доктору ф-м.н. Ю.В.Воробьеву за руководство прикладной стороной работы, члену-корр. АН СССР М.М.Лаврентьеву, идеи которого способствовали теоретическому обоснованию метода; кандидатам ф-м.н. В.П.Ильину и В.Г.Васильеву за ряд ценных советов.

Литература

1. С.М.Белоносов. Интегральные уравнения краевых задач для уравнения Лапласа и Гельмгольца в случае тел вращения Сб. тр. "Вычислительные системы", выпуск I2, Новосибирск, 1964.
2. М.М.Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
3. О.Ф.Антоненко. Численное решение задачи Дирихле для незамкнутых поверхностей вращения. Сб. тр."Вычислительные системы", вып.I2, Новосибирск, 1964.
4. О.Ф.Антоненко. Численное решение интегрального уравнения I-го рода для задачи Дирихле в случае тел вращения. Сб."Математические проблемы геофизики" вып.I, Новосибирск, 1969.

5. В.П.Ильин, О.Ф.Антоненко, С.В.Лебедев. Расчет электростатических полей и траекторий. Отчет ВЦ СО АН СССР, 1970 г.

МН0-07093. Подписано к печати 17.II.1971г.
Формат бумаги 60 х 90/16, п.л. 0,5,
Тираж 200 экз. Заказ 73.

Отпечатано на ротапринте ВЦ СО АН СССР,
Новосибирск-90.