Механико-математический факультет

На правах рукописи

Ю. А. АМИНОВ

ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА РАЗМЕРЫ ОБЛАСТИ ИХ СУЩЕСТВОВАНИЯ

006 — геометрия и топология

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель доктор физико-математических наук
профессор Н. В. ЕФИМОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1968

Ск

Работа выполнена на механико-математическом факультете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор Н. В. Ефимов.

Официальные оппоненты: 1. доктор физико-математических наук, профессор П. К. Рашевский, 2. кандидат физико-математических наук, доцент Ю. Д. Бураго.

Ведущее предприятие Ленинградский педагогический институт имени А. И. Герцена.

Автореферат разослан « » ________________ 1968 г.

Защита диссертации состоится « » ________________ 1968 г. на заседании Совета отделения математики механико-математического факультета МГУ, Ленгоры, МГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке.

Ученый секретарь Совета

31

A 15

п° I. Изучению двумерных поверхностей в трехмерном эвклидовом пространстве при условии, что гауссова кривизна $K \leq -K_0^2 < 0$, (K_0 – постоянное число) в последнее время было посвящено много работ Н.В.Ефимова, Э.Г.Позняка, Э.Р.Розендорна, Е.Гайнца, Амслера и других. В работе I Н.В.Ефимов доказал, что в трехмерном эвклидовом пространстве не существует полной регулярной поверхности с гауссовой кривизной $K \leq -K_0^2 < 0$. В частном случае однозначной поверхности , т.е. заданной уравнением $z = z(x,y)$, утверждение этой общей теоремы дополняется универсальной оценкой (см. [2]) : существует постоянная, зависящая только от K_0 , которой не может превзойти сторона квадрата в плоскости (x, y) , если на этот квадрат проектируется кусок регулярной поверхности $z = z(x,y)$ с кривизной $K \leq -K_0^2 < 0$ Естественно исследовать возможность обобщений этого результата по размерности. Этому вопросу посвящена I глава диссертации. Теорема Н.В.Ефимова из работы [2] получила другое доказательство в работе Е.Гайнца [3] , основанное на следующей формуле С.Н.Бернштейна:

$$2\iint\limits_{r \leq Const} (z_{xy}^2 - z_{xx} z_{yy})\,dx\,dy = \frac{d}{dr} \oint\limits_{r = Const} \frac{z_\varphi^2}{r}\,d\varphi - \oint\limits_{r = Const} z_r^2\,d\varphi \qquad (I)$$

где r и φ – полярные координаты в плоскости (x,y) . Недавно С.С.Черн установил обобщение формулы С.Н.Бернштейна для гиперповерхности $x_{n+1} = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ и суммы $\mathcal{J}^2=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\left(\Phi_{x_ix_i}\Phi_{x_jx_j}-\Phi^2_{x_ix_j}\right)$, которая рассматривается вместо $z_{xx}z_{yy}-z^2_{xy}$. Эта сумма некоторым простым образом связана со второй симметрической функцией главных кривизн. Отсюда С.С.Черном в n – мерном случае получены оценки типа Ефимова-Гайнца при ограничении на первую и вторую симметрические функции главных кривизн и добавочно на некоторые другие величины.

n° 2. С целью получения оценок типа Ефимова-Гайнца при ограничениях на другие симметрические функции мы устанавливаем в § 6 I главы интегральные формулы бернштейновского типа соответствующие всем симметрическим функциям главных кривизн гиперповерхности $x_{n+1}=\Phi(x_1,\dots,x_n)$. Чтобы пояснить структуру этих формул, заметим, что в двумерном случае имеет место формула, аналогичная (I) :

$$2\iint\limits_{V(t)}(z^2_{xy}-z_{xx}z_{yy})\,dx\,dy=\frac{d}{dt}\int\limits_{\Gamma(t)}(z_s^2+1)\,ds-2\sum_{i=1}^{4}\left(z^2_{\eta_i}(P_i)+1\right)\qquad(2)$$

где $V(t)$ – квадрат $\{-t\le x_i\le t\ ,\ i=1,2\}$. $\Gamma(t)$ – граница квадрата, z_s – производная по дуге $\Gamma(t)$, $z_{\eta_i}(P_i)$ – производные по направлениям диагоналей квадрата, взятые в его вершинах. В общем, n – мерном случае, мы выражаем интеграл от $\mathcal{J}^m$:

$$\mathcal{J}^m=\sum_{i_1\dots i_m=1}^{n}\begin{vmatrix}\Phi_{x_{i_1}x_{i_1}} & \dots & \Phi_{x_{i_1}x_{i_m}}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \Phi_{x_{i_m}x_{i_1}} & \dots & \Phi_{x_{i_m}x_{i_m}}\end{vmatrix}$$

по n – мерному кубу $V(t)$: $\{-t\le x_i\le t\ ,\ i=1,\dots,n\}$

через производную по t от интеграла по поверхности куба и через интегралы по $(n-2)$ – мерным граням. Выберем направления нормалей к поверхности и к её сечениям вертикальными гиперплоскостями так, чтобы эти нормали составляли с положительным направлением оси x_{n+1} угол меньше $\frac{\pi}{2}$.

Введём обозначения:

$S^m=\sum\limits_{i_1\dots i_m=1}^{n}\frac{1}{R_{i_1}\cdots R_{i_m}}$ – m – ая симметрическая функция главных кривизн $1/R_i$ поверхности $x_{n+1}=\Phi(x_1,\dots,x_n)$;

Q_j – сечение поверхности вертикальной гиперплоскостью $x_j=\mathrm{const}$, $j\le n$

Q_{ij} – сечение вертикальной гиперплоскостью проходящей через центр куба и его ($n-2$) – мерную грань $x_i=\pm t$, $x_j=\pm t$.

Правильнее было бы в обозначении Q_{ij} при i и j писать значки + или $-$, однако мы их для простоты записи опустим.

S^m_j – (при $m>0$) – m – ая симметрическая функция сечения Q_j ;

S_{ij}^m - (при $m>0$) - m - ая симметрическая функция сечения Q_{ij}.

Положим $S_i^0 = S_{ji}^0 = 1$. Обозначим: dv_i - элемент объема ($n-1$) - мерной грани $x_i = \pm t$ (без учета ориентации); dv_{ij} - элемент объема ($n-2$) - мерной грани $x_i=\pm t,\ x_j=\pm t$

Пусть $e_1,\dots,e_{n+1}$ - единичные векторы по осям $x_1,\dots,x_{n+1}$

Обозначим: $e_{ij} = (e_i \pm e_j)/\sqrt{2}$, $\Phi_{s_{ij}}$ - производная по направлению e_{ij}. Тогда, при $m\geqslant 2$ имеет место формула:

$$\int\limits_{V(t)} J^m dv = -\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{x_j=\pm t} S_j^{m-2}\Big(\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq j}}^{n}\Phi_{x_\alpha}^2+1\Big)^{\frac{m}{2}} dv_j + \tag{3}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\substack{x_i=\pm t\\ x_j=\pm t}} S_{ij}^{m-2}\Big(\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i\neq j}}^{n}\Phi_{x_\alpha}^2+\Phi_{s_{ij}}^2+1\Big)^{\frac{m}{2}} dv_{ij}$$

Если положить в этих формулах $m=n=2$, получим формулу С.Н.Бернштейна, записанную в виде (2).

n° 3. В § 4 главы I дается разложение m - ой симметрической функции главных кривизн S^m $(m<n)$ на две составляющие, инвариантно зависящие от произвольного единичного вектора e:

$$S^m = A^m(e) + B^m(e), \tag{4}$$

при условии, что вектор e не лежит в касательной гиперплоскости.

Поясним способ образования величин $A^m(e)$ и $B^m(e)$

Рассмотрим в точке P поверхности ортонормированный репер, один из ортов которого совпадает с вектором e. Возьмем ($m+1$) различных ортов из репера. Проведем в точке P через эти орты ($m+1$) - мерную плоскость. Пусть φ - угол между этой плоскостью и нормалью к поверхности $x_{n+1} = \Phi(x_1,\dots,x_n)$

Если сечение в точке P имеет m - мерную касательную плоскость, то возьмем произведение его гаусс-кронекеровской кривизны на $(\cos\varphi)^{m+2}$, в других случаях возьмем 0. Суммируя полученные величины по всем наборам, составленным из $m+1$ векторов, которые ортогональны вектору e, получим $(m+1)A^m(e)$

Если просуммировать по тем наборам, которые содержат вектор e, то получим $B^m(e)$. Если вектор e совпадает с нормалью, то $A^m(e)=0$. Разложение (4) используется нами в том случае, когда $e=e_{n+1}$, при этом:

$$B^m(e_{n+1}) = J^m\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\Phi_{x_i}^2\Big)^{-\frac{m+2}{2}}$$

а величина $A^m(e_{n+1})$ выражается через гаусс-кронекеровские кривизны m - мерных горизонтальных сечений. Очевидно, если при некотором четном m будет $S^m<0$, то поверхность будет седловой (т.е. никакой гиперплоскостью от неё нельзя отсечь компактную часть). Если же при m четном будет $B^m(e)<0$

для некоторого e, то поверхность седловая относительно вектора e (т.е. нельзя отсечь компактную часть гиперплоскостью ортогональной вектору e). Следующая теорема (глава I § 7) относится при m четном к поверхностям седловым относительно вертикального направления. Будем рассматривать поверхность $x_{n+1} = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ над кубом $-\frac{a}{2} \le x_i \le \frac{a}{2}$, $i=1,\ldots,n$. Обозначим через T_j пирамиду, вершина которой находится в центре куба, а основанием является грань $x_j = \frac{a}{2}$ или $x_j = -\frac{a}{2}$

ТЕОРЕМА 2: Пусть при некотором $m \geq 2$ выполнены условия:

1) $\mathcal{J}^m \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \Phi_{x_i}^2\right)^{-\frac{m+2}{2}} \leq -K_0^2 < 0$ во всём кубе,

2) $0 \leq S_j^{m-2} \leq S_0^2$ в пирамиде T_j, $j=1,\ldots,n$.

3) $0 \leq S_{ij}^{m-2}$ в пересечении T_i с T_j $i,j=1,\ldots,n$.

Тогда

$$a \leq C(n,m)\, S_0/K_0$$

где $C(n,m)$ – некоторая функция зависящая только от чисел n и m. Заметим, что в кубе достаточно малых размеров условия теоремы 2 могут выполняться. При $m=2$ условия 2) и 3) выполняются автоматически, если положить $S_0 = 1$. В доказательстве теоремы используется формула (3).

n° 4. Если накладывать ограничения на симметрическую функцию S^m и кривизны m – мерных горизонтальных сечений, то из приведенной теоремы и формулы (4), также получается оценка для стороны куба. Как простое следствие такого рода теорем отметим утверждение: пусть над кубом со стороной a задана поверхность: $x_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3)$, у которой вторая симметрическая функция главных кривизн меньше $-K_0^2 < 0$, асимптотические направления в каждой точке не параллельны горизонтальной плоскости. Тогда $a \leq C/K_0$, где C – абсолютная постоянная.

Вопрос, можно ли в приведенных теоремах (как в двумерном случае) ограничиться лишь условиями на симметрические функции поверхности, остался невыясненным.

В § 2 I главы доказана следующая теорема I:

Пусть внутри n – мерного куба со стороной a существует семейство поверхностей $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = const$ с изолированными точками, где $\Phi_{x_1}^2 + \cdots + \Phi_{x_n}^2 = 0$. Пусть средняя кривизна $S^1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{R_i}$ каждой поверхности больше S_0 ($S_0 > 0$). Тогда $a \leq 2n/S_0$.

По своему характеру эта теорема сходна с теоремой Черна С.С. для одной гиперповерхности, см. § 2 [4].

Заметим, что формула (3), может оказаться полезной также при изучении дифференциальных уравнений в частных производных. Так, например, формула С.Н.Бернштейна используется в работе [6], для оценки нормы решения в классе $W_2^2(\Omega)$.

n^0 5. Предметом второй главы является геометрия векторных полей (в частности семейств поверхностей) в трехмерном эвклидовом, а также – в римановом пространстве, точнее – влияние кривизны поля на его структуру, или на размеры содержащей поле области, или на искривленность объемлющего пространства. Локальная геометрия векторных полей изучалась многими авторами: Ли, Лилиенталь, Фосс, Синцов, Бланк, Вагнер, Бюшгенс и др., в работах которых для векторных полей определен ряд понятий и инвариантов по некоторой аналогии с теорией поверхностей. В том числе определены полная кривизна K (аналог гауссовой кривизны поверхности) и средняя кривизна H (см. С.С.Бюшгенс [7]). Мы устанавливаем для K и H дивергентные представления:

$$H=\frac{1}{2}\,div\,n\,, \qquad K = div\,(x,n)P = (n,P)$$

где n – единичный вектор поля, x – радиус-вектор, $P=\{(n_{x_2}n_{x_3}n),\,(n_{x_3}n_{x_1}n),\,(n_{x_1}n_{x_2}n)\}$. Отсюда, в частности, получается формула выражающая интеграл от K по объему V через граничные значения поля, при условии, что внутри V нет особых точек:

$$\int\limits_V K\,dv = \int\limits_{\partial V}(x,n)(n_\alpha n_\beta n)\,d\alpha\,d\beta = \int\limits_{\psi(\partial V)}(x,n)\,d\sigma\,, \qquad (5)$$

где ψ – отображение границы ∂V на единичную сферу σ векторным полем n.

Легко строится пример поля без особых точек, для которого модуль $|K|$ сколь угодно велик равномерно во всем кубе фиксированных размеров. Однако, если векторное поле без особых точек имеет алгебраический характер, т.е. для некоторой функции $\lambda\neq 0$ компоненты $A_i=A_i(x_1,x_2,x_3)$ вектора $\lambda n=(A_1,A_2,A_3)$ являются многочленами относительно x_1, x_2, x_3 порядка не выше m, то сторона куба a, в котором существует поле с условием $|K|\geqslant K_0>0$, удовлетворяет неравенству:

$$a\leqslant\frac{2\sqrt{3\pi\sqrt{3}}\;m}{\sqrt{K_0}}$$

Эта оценка получается с помощью интегральной формулы (5) (см. § 3 - 2-й главы, теорема I).

n^0 6. Кроме того, теорема 2 и (при некоторых предположениях) теорема 3 главы 2 показывает, что если рассматривать модуль кривизны векторного поля как параметр, то под действием равномерного во всем кубе увеличения этого параметра, увеличивается, хотя бы в отдельных точках, величина $|(n,rot\,n)|$. Функцию $\rho=\frac{1}{2}(n,rot\,n)$ естественно называть величиной неинтегрируемости поля, так как при $\rho=0$ семейство ортогональных полю площадок будет по теореме Якоби интегрируемым.

Будем называть поверхностной мерой множества в трехмерном пространстве нижнюю грань площади замкнутых кусочно-гладких поверхностей заключающих это множество.

ТЕОРЕМА 2. Если внутри куба со стороной a существует векторное поле n, с условием, что полная кривизна $K \geq K_0 > 0$, величина неинтегрируемости ρ удовлетворяет неравенствам: $|\rho| \leq \rho_0$; $K_0 - \rho_0^2 > 0$, а поверхностная мера множества особых точек поля n равна 0, то :

$$a \leq \frac{3}{\sqrt{K_0 - \rho_0^2}}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть в кубе $-\frac{a}{2} \leq x_i \leq \frac{a}{2}$, $i = 1, 2, 3$ задано регулярное векторное поле не зависящее от x_3 и такое, что $(n, e_3) \neq 0$ (e_3 - орт по оси x_3)

Пусть $K \leq -K_0^2 < 0$, $|\rho| \leq \rho_0$. Тогда :

$$a \leq \frac{19}{\sqrt{K_0 + \rho_0^2} - \rho_0}$$

Теорема 3 доказывается также, как цитированная выше теорема Н.В.Ефимова из работы [2] .

п.^{0} 7. Однако, если зафиксировать размеры области, то можно также рассматривать кривизну векторного поля как некоторую нагрузку на область трехмерного пространства, так что под действием нагрузки, большей некоторой критической, будет изменяться метрика объемлющего пространства, т.е. евклидово пространство перейдет в

искривленное; величина искривления в какой-то мере будет определяться нагрузкой. Наглядно это можно представить в виде искривления пластинки. Под влиянием внутренних напряжений в пластинке изменятся взаимные положения точек и расстояния между ними, а это внешне проявится в том, что пластинка выгнется и выйдет из плоскости в трехмерное пространство.

В § 6 2 главы дается оценка искривления объемлющего трехмерного пространства в шаре радиуса 1, зависящая от минимума внешней кривизны $K_e > 0$ семейства поверхностей, расположенного в этом шаре.

С этой целью в § 5 главы 2 устанавливается обобщенно-дивергентный вид средней кривизны поверхности из семейства $\varphi(u^1, u^2, u^3) = const$, лежащего в римановом пространстве:

$$H = \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{g^{i\alpha} \varphi_{u^\alpha} \sqrt{g}}{\sqrt{g^{\alpha\beta} \varphi_{u^\alpha} \varphi_{u^\beta}}} \right)$$

В § 6 главы 2 устанавливается неравенство, связывающее объем шара V и площадь его поверхности S в трехмерном римановом пространстве при ограничениях на кривизну двумерных площадок K_R и скаляр Риччи R . Получен следующий результат: пусть $Q_0 = max \left| \frac{R}{2} + K_R \right|$ по всем точкам шара радиуса I и по всем двумерным площадкам. Тогда :

$$\frac{S}{V} \leq \frac{\sqrt{Q_0} \left(e^{\sqrt{Q_0}} + e^{-\sqrt{Q_0}} - 2 \right)}{2 \left(\sqrt{Q_0} - \sin\sqrt{Q_0} \right)}$$

Отсюда получена следующая:

ТЕОРЕМА 5. Пусть в шаре единичного радиуса в метрике риманова пространства задано семейство поверхностей $\varphi(u^1,u^2,u^3)=const$ и внешняя кривизна удовлетворяет неравенству $K_e \geqslant K_0^2 > 0$, причем множество точек, где $\varphi_{u^1}=\varphi_{u^2}=\varphi_{u^3}=0$ имеет поверхностную меру 0. Тогда имеют место оценки:

$$Q_0 \geqslant \frac{K_0 - 3/2}{K_0/20 + e^{20}/8}, \quad \text{при} \quad Q_0 < 20$$

$$ch\sqrt{Q_0} \geqslant \frac{\pi-2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} K_0 + 1, \quad \text{при} \quad Q_0 \geqslant \frac{\pi}{2}$$

Отсюда видно, что искривление объемлющего пространства в шаре единичного радиуса возникает при $K_0 > 3/2$.

Автор выражает свою глубокую благодарность руководителю профессору Н.В.ЕФИМОВУ за постановку задач, ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

I. ЕФИМОВ Н.В. Невозможность в трехмерном евклидовом пространстве полной регулярной поверхности с отрицательной верхней гранью гауссовой кривизны. ДАН СССР, I50, № 6, I206-I209, I963.

2. ЕФИМОВ Н.В. Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны. ДАН СССР, 93, № 4, 609-6II, I953.

3. Heinz E. Über Flächen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind. „Math. Ann.", 129, H. 5, 451-454, 1955.

4. Chern S.S. On the Curvatures of a Piece of Hypersurface in Euclidean Space. „Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg", 29, H. 1/2, 77-91, 1965.

5. ГАНТМАХЕР Ф.Р. Теория матриц. М., "Наука", I966.

6. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А., УРАЛЬЦЕВА Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., "Наука", I964.

7. БЮШГЕНС С.С. Геометрия векторного поля. "Изв. АН СССР" сер.мат. I0, 73-96, I946.

8. ВАГНЕР В. Геометрическая интерпретация вектора кривизны семейства площадок в R_3. "Математический сборник", (46), 4, вып. 2, I938.

9. РАШЕВСКИЙ П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М. "Наука", 1967.

IO. ЭЙЗЕНХАРТ Л.П. Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948.

II. АМИНОВ Ю.А. Дивергентные свойства кривизн векторных полей и семейств поверхностей . "Математические заметки", 3, № I, 1968.

I2. АМИНОВ Ю.А. Интегральная кривизна семейства гиперповерхностей в евклидовом пространстве. Второй всесоюзный симпозиум по геометрии в целом. Петрозаводск, стр. 7-8, 1967.

I3. АМИНОВ Ю.А. n - мерные аналоги интегральной формулы С.Н.Бернштейна. "Математический сборник" 75 (II7) : 3 , 1968.

ПОДП. К ПЕЧАТИ I2/IУ-68 Г. Л-95657. Ф.60х90/16
ОБЪЕМ 1,0. ЗАКАЗ 1349. ТИРАЖ 200

ОТП. НА РОТАПРИНТАХ В ТИП. ИЗД-ВА МГУ
МОСКВА, ЛЕНГОРЫ.