АКАДЕМИЯ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР
Институт физики и математики
Объединенный Ученый Совет отделения естественных и
технических наук

на правах рукописи

Т. АМАНКУЛОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
кандидат физико-математических наук,
доцент КРИВОШЕИН Л.Е.

Фрунзе, 1967.

V

Глубокоуважаемому Виталию Аркадьевичу Афанасьеву

[signature]

10/IX 67 г.

АКАДЕМИЯ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР

Институт физики и математики

Объединенный Ученый Совет отделения естественных и технических наук

на правах рукописи

Т. АМАНКУЛОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
кандидат физико-математических наук,
доцент КРИВОШЕИН Л.Е.

Фрунзе, 1967.

Объединенный Ученый Совет Отделения естественных и технических наук АН Киргизской ССР направляет Вам для ознакомления автореферат диссертационной работы Т. Аманкулова.

Работа выполнена на кафедре математического анализа Киргизского госуниверситета.

Защита диссертации намечается на ____________ 1967 г.

Ваши отзывы и замечания просим направлять по адресу: г. Фрунзе, ул. 22-го Партсъезда, № 267.

Ученый Секретарь Совета,
кандидат химических наук -

(В.А. АФАНАСЬЕВ)

Отдел КМП МСС при ЦСУ Киргизской ССР
Д-00853 Зак. 456 Тир. 250 экз.
Подписано в печать 1/УП-1967 г. Объем 0,75 п.л.

В последние годы сильно возрос интерес к различного рода уравнениям с отклоняющимися аргументами и в настоящее время эта область является бурно развивающимся разделом математики. Во многом это связано с тем, что приложения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений (и.-д.у.) с отклоняющимися аргументами сильно расширились, захватив не только проблемы физики и техники, но и некоторые области экономических, биологических и других наук.

В развитие теории уравнений с отклоняющимися аргументами большой вклад внесли А.Н. Тихонов [18], А.Д. Мышкис [11,...], Л.Э. Эльсгольц [19,...], С.Б. Норкин [5,...], Н.Н. Красовский [6,...], А.Б. Васильева [2,...], Г.А. Каменский [5,...], E.M. Wright [14,...], А.М. Зверкин [3,...], Ю.А. Рябов [12,...], В.П. Рубаник [11,...], Д. Манжерон [7,...], К.Г. Валеев [1,...], А.Д. Горбунов [3,...], Э. Пинни [12] и многие другие.

В процессах с последействием встречается случай "распределенного" запаздывания. Это означает, что $y'(x)$ зависит не только от значений неизвестной функции и её производной в какие-то фиксированные моменты времени x, но также и от всех значений $y(x)$ и $y'(x)$ при x, изменяющихся в целом на некотором отрезке. При этом мы приходим к интегро-дифференциальным уравнениям нейтрального типа.

Изучению некоторых вопросов основной начальной задачи для и.-д.у. нейтрального типа посвящена настоящая работа.

Диссертация состоит из введения и пяти параграфов. Первый параграф содержит теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от известных функций решений системы и.д.у нейтрального типа

$$
\begin{aligned}
y_k'(x) = \mathcal{F}_k\{&x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1(\alpha_1(x)), \ldots, y_n(\alpha_1(x)), \ldots \\
&, y_1(\alpha_p(x)), \ldots, y_n(\alpha_p(x)), y_1'(\alpha_1(x)), \ldots, y_n'(\alpha_1(x)), \ldots \\
&, y_1'(\alpha_p(x)), \ldots, y_n'(\alpha_p(x)), \int_a^x \mathcal{K}_k[x, t, y_1(t), \ldots, y_n(t), \ldots \\
&, y_1(\alpha_1(t)), \ldots, y_n(\alpha_1(t)), \ldots, y_1(\alpha_p(t)), \ldots, y_n(\alpha_p(t)), \\
&, y_1'(\alpha_1(t)), \ldots, y_n'(\alpha_1(t)), \ldots, y_1'(\alpha_p(t)), \ldots, y_n'(\alpha_p(t))]dt\} \equiv \\
\equiv \mathcal{F}_k\{&x, y_\nu(x), y_\nu(\alpha_j(x)), y_\nu'(\alpha_j(x)), \int_a^x \mathcal{K}_k[x, t, y_\nu(t), y_\nu(\alpha_j(t)), y_\nu'(\alpha_j(t))]dt\}
\end{aligned}
\tag{I}
$$

$$(k, \nu = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, p)$$

с дополнительными условиями

$$y_k^{(i)}(x) = \varphi_k^{(i)}(x) \quad (i = 0, 1;\ k = 1, \ldots, n) \quad \text{при } x \in E_a = \cup E_j, \tag{2}$$

где

$$E_j = \{x \geq a;\ \alpha_j(x) \geq a\}.$$

Относительно известных функций, входящих в уравнение (I), предполагается, что

а) функции запаздывания $\alpha_j(x) \leq x$ $(j = 1, \ldots, p)$ непрерывны при $x \in [a, b]$;

б) функции $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{K}_k$ непрерывны по совокупности аргументов соответственно в областях

$$\mathcal{D} = \{a \leq x \leq b,\ \sum_{i=0}^{1} \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu^{(i)}(\cdot)| \leq H,\ |\gamma_k(x)| \leq H\}$$

и

$$\mathcal{D}_1 = \{a \leq x \leq t \leq b,\ \sum_{i=0}^{1} \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu^{(i)}(\cdot)| \leq H\},$$

где

$$\gamma_k(x) = \int_a^x \mathcal{K}_k[x, t, y_\nu(t), y_\nu(\alpha_j(t)), y_\nu'(\alpha_j(t))]dt$$

и в них удовлетворяют условию Липшица:

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{F}_k\{x, y_\nu(x), y_\nu(\alpha_j(x)), y_\nu'(\alpha_j(x)), \int_a^x \mathcal{K}_k[x, t, y_\nu(t), y_\nu(\alpha_j(t)), y_\nu'(\alpha_j(t))]dt\} - \\
&- \mathcal{F}_k\{x, z_\nu(x), z_\nu(\alpha_j(x)), z_\nu'(\alpha_j(x)), \int_a^x \mathcal{K}_k[x, t, z_\nu(t), z_\nu(\alpha_j(t)), z_\nu'(\alpha_j(t))]dt\}| \leq \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{n} \Big\{ L_{0\nu k}(x) |y_\nu(x) - z_\nu(x)| + \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=1}^{p} L_{j\nu k}^{i}(x) |y_\nu^{(i)}(\alpha_j(x)) - z_\nu^{(i)}(\alpha_j(x))| + \\
&+ \int_a^x \Big[M_{0\nu k}(x, t) |y_\nu(t) - z_\nu(t)| + \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=1}^{p} M_{j\nu k}^{i}(x, t) |y_\nu^{(i)}(\alpha_j(t)) - z_\nu^{(i)}(\alpha_j(t))| \Big] dt \Big\}.
\end{aligned}
$$

Кроме того, пусть выполняется неравенство

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k,\nu=1}^{n} \Big\{ \sum_{j=1}^{p} L_{j\nu k}(x) + \int_a^x \Big[L_{0\nu k}(x) + \sum_{j=1}^{p} \big(L_{j\nu k}^{0}(x) + L_{j\nu k}^{1}(x) + M_{j\nu k}^{1}(x, t) \big) + \\
&+ \int_a^t \Big[M_{0\nu k}(x, t) + \sum_{j=1}^{p} \big(M_{j\nu k}^{0}(x, t) + M_{j\nu k}^{1}(t, \tau) \big) \Big] d\tau \Big] dt \Big\} < 1, \quad x \in [a, b].
\end{aligned}
$$

Тогда задача (I), (2) имеет в промежутке $[a, a+h]$ единственное непрерывно дифференцируемое решение, которое можно построить методом последовательных приближений, причем это решение непрерывно зависит от малых возмущений известных функций: $\mathcal{F}_k$, $\mathcal{K}_k$, $\alpha_j(x)$ и $\varphi_k^{(i)}(x)$, входящих в (I) , (2).

Поскольку и.-д.у. с отклоняющимся аргументом интегрируется в замкнутой форме лишь в исключительных случаях, то качественные и приближенные методы исследования их решений имеют большое значение. В параграфах 2-5 изложены приближенные методы решения начальной задачи для различных видов и.-д.у. нейтрального типа с запаздывающим аргументом.

В § 2 даётся применение метода "возмущения" (относительно правой части) для приближенного решения и.-д.у.

$$y'(x) = f[x, y(x), y'(\alpha(x))] + \int_a^x \mathcal{K}[x, t, y(\alpha(t)), y'(\alpha(t))]dt \tag{2.1}$$

с дополнительными условиями

$$y^{(i)}(x)=0 \quad (i=0,1),\ x\in E_a,\ f[a,0,0]=0. \tag{2.2}$$

Функции f и $\mathcal{K}$ определены соответственно в областях $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$, непрерывны по x и t, а по $y^{(i)}$ $(i=0,1)$ аналитичны,

$$f[x,y(x),y'(\alpha(x))]\equiv\sum_{k,j=0}^{\infty}A_{kj}(x)[y(x)]^k[y'(\alpha(x))]^j,$$

$$\mathcal{K}[x,t,y(\alpha(t)),y'(\alpha(t))]\equiv\sum_{k,j=0}^{\infty}\mathcal{B}_{kj}(x,t)[y(\alpha(t))]^k[y'(\alpha(t))]^j,$$

кроме того,

$$\max_{\bar{D}}\left|\frac{\partial f[x,y(x),y'(\alpha(x))]}{\partial y'(\alpha(x))}\right|=q<1.$$

Идея этого метода состоит в следующем. Вместо исходного уравнения рассматривается "возмущенное" уравнение

$$z'(x)=f[x,\lambda z(x),\lambda z'(\alpha(x))]+\int_a^x\mathcal{K}[x,t,\lambda z(\alpha(t)),\lambda z'(\alpha(t))]dt.$$

Решение последнего уравнения ищется в виде ряда

$$z(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\dots+\lambda^n\varphi_n(x)+\dots,$$

причем коэффициенты этого ряда легко определяются из рекуррентной системы. Доказывается сходимость полученного ряда в области $g=\{-1\le\lambda\le 1,\ a\le x\le b\}$. В качестве приближенных решений задачи берутся частные суммы построенных рядов при $\lambda=1$; образующиеся при этом погрешности оцениваются. Этим методом удобно пользоваться для построения первоначального приближения итерационных процессов. Одним из эффективных итерационных методов является метод функциональных поправок, который обладает той особенностью, что в ней процесс ускоряется за счет добавления улуч-

шающей поправки к каждому приближению.

В § 3 для уравнения

$$y'(x)=f(x)+\mathcal{F}\{x,y(x),y(\alpha(x)),y'(\alpha(x)),\int_a^x\mathcal{K}[x,t,y(t),y(\alpha(t)),y'(\alpha(t))]dt\} \tag{3.I}$$

с дополнительными условиями

$$y^{(i)}(x)=0 \quad (i=0,1) \text{ при } x\in E_a, \tag{3.2}$$

$$y'(a)=f(a)=0,\quad \mathcal{F}\{a,0,0,0\}=0$$

строится процесс функциональных поправок

$$y_n'(x)=f(x)+\mathcal{F}\{x,y_{n-1}(x)+\gamma_n,y_{n-1}(\alpha(x))+\gamma_n,y_{n-1}'(\alpha(x))+\gamma_n,$$
$$,\int_a^x\mathcal{K}[x,t,y_{n-1}(t)+\gamma_n,y_{n-1}(\alpha(t))+\gamma_n,y_{n-1}'(\alpha(t))+\gamma_n]dt\},$$

$$\gamma_n=\frac{1}{E}[z_n(\alpha(c))-z_{n-1}(\alpha(c))],\quad \alpha(c)>a,\quad a<c\le b;$$

E – некоторое число, выбранное так, что имеет место неравенство

$$E>\max_{x\in[a,b]}\{L_0(x-a)+L_1(\alpha(x)-a)+L_2+\int_a^x(M_0(t-a)+M_1(\alpha(t)-a)+M_2)dt\}.$$

Тогда нелинейное уравнение относительно γ_n имеет единственное решение и это решение можно находить методом последовательных приближений. Изучена сходимость процесса, оценены погрешности и подсчитано число итераций, которое достаточно выполнить для получения приближения с заданной точностью. Изложенный метод обобщает канонический вариант метода Ю.Д. Соколова [I7].

Параграф 4 посвящен применению метода мажорантно-минорантных функций для приближенного решения задачи

$$y_k'(x)=\mathcal{F}_k[x,y_\nu(x),y_\nu(\alpha(x)),y_\nu'(\alpha(x))]+$$
$$+\int_a^x\mathcal{K}_k[x,t,y_\nu(t),y_\nu(\alpha(t)),y_\nu'(\alpha(t))]dt, \tag{4.I}$$

$$y_k^{(i)}(x)=\varphi_k^{(i)}(x),\ x\in E_a;\quad \varphi_k'(a)=\mathcal{F}_k\{a,\varphi_\nu(a),\varphi_\nu(\alpha(a)),\varphi_\nu'(\alpha(a))\} \tag{4.2}$$
$$(i=0,1;\ k,\nu=1,\dots,n).$$

Несмотря на сравнительно медленную сходимость построенного процесса этот метод имеет то преимущество перед другими методами, рассмотренными в диссертации, что с его помощью можно получить очень простую двустороннюю оценку погрешности и подсчитать число итераций, достаточных для получения приближения с наперед заданной точностью. Здесь же указан способ выбора первоначальной пары аппроксимирующих решение функций.

В последнем параграфе рассматривается линейное и.-д.у. с отклоняющимся аргументом

$$y'(x) = f(x) + \int_0^1 [\mathcal{K}_0(x,t)y(t) + \mathcal{K}_1(x,t)y'(\alpha(t))]dt \qquad (5.I)$$

с начальным условием

$$y^{(i)}(x) \equiv 0 \ (i=0,1),\ x\in E_0,\ y'(0)=f(0)=0, \qquad (5.2)$$

где функции $\alpha(x)\le x$, $f(x)$, $\mathcal{K}_0(x,t)$ и $\mathcal{K}_1(x,t)$ определены, непрерывны при $0\le x,t\le 1$, $\mathcal{K}_0(x,t)\equiv\mathcal{K}_1(x,t)\equiv 0$, $x\in E_0$; 1 – не является собственным числом ядра

$$\mathcal{K}_1(x,t) + \int_t^1 \mathcal{K}_0(x,\tau)d\tau \equiv \mathcal{K}_1(x,t)+\mathcal{K}_2(x,t)$$

и

$$\mathcal{P} = \max_{[0,1]} \int_0^1 [|\mathcal{K}_1(x,t)| + |\mathcal{K}_2(x,t)|]dt \gtrless 1.$$

Здесь изучается возможность решения задачи (5.I), (5.2) методом полос [13] и численно-аналитическим методом.

В методе полос задача (5.I), (5.2) заменяется специально построенным интегральным уравнением

$$z(x) = f(x) + \int_0^1[\mathcal{M}_1(x,t)z(t) + \mathcal{M}_2(x,t)z(\alpha(t))]dt + \sum_{i=1}^k \gamma_i(x)E_i \equiv f(x)+\mathcal{M}[z] + \sum_{i=1}^k\gamma_i(x)E_i$$

с таким расчетом, чтобы $\mathcal{M}[z]$ был оператором сжатия. Тогда неизвестные функционалы E_i определяются алгебраическим путем. Изучается сходимость процесса, когда $\mathcal{M}[z]$ заменяется на $\mathcal{M}_n[u]$ и приводятся оценки погрешности. Случай $\mathcal{P}<1$ решается гораздо проще.

В численно-аналитическом методе используются квадратурные суммы и решение строится либо в виде таблицы, либо в виде аналитического выражения. Погрешности оцениваются.

Теоретические выкладки §§ I – 5 иллюстрируются решением конкретных примеров. Численные расчеты в § 5 велись на ЭВМ "Минск-I" Вычислительного Центра АН Киргизской ССР.

Отдельные части работы докладывались на отчетных конференциях Кирг. ГУ, на 2-ой межвузовской конференции Каз. ССР в 1965 году, на 2-ой , 3-ей межвузовских конференциях факультетов физико-математических и естественных наук Университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы в 1966 г. и в 1967 году, на 6-ой конференции ВУЗ'ов Дальнего Востока в 1966 году, на семинаре проф. Л.Э. Эльсгольца по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в 1967 году.

Считаю приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. Л.Э. Эльсгольцу и доцентам А.М. Зверкину и Л.Е. Кривошеину за советы и внимание к реферируемой работе.

Содержание диссертации изложено в работах автора [20-27].

Литература

I. Валеев К.Г. Численное решение линейного дифференциального уравнения с экспоненциальными коэффициентами и линейным запаздыванием аргумента, В Сб. "Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы". М. "Наука", 1964.

2. Васильева А.Б., Родионов А.М. Применение метода возмущений к уравнению с запаздывающим аргументом в случае малого запаздывания. Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов, I, 1962.

3. Горбунов А.Д. и Будак Б.М. О сходимости некоторых конечно-разностных процессов для уравнений $y=f(x,y)$ и $y'(x)=f(x, y(x), y(x-\tau(x)))$, ДАН СССР, 119, 1958.

4. Зверкин А.М. Теорема существования и единственности для уравнений с отклоняющимся аргументом в критическом случае. Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов, I (1962).

5. Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, УМН, т. 17. вып. I, 1962.

6. Каменский Г.А. Существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных условий решений системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, Матем. сб., 55 (97), 4 (1961).

7. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения, 1959.

8. Логунов А.М., Цалюк З.Б. О единственности решений интегральных уравнений Вольтерра с запаздывающим аргументом, ДАН СССР, 160, 5, 1965.

9. MANGERON D., KRIVOŠEIN L.E., Sistemi policalorici a rimanenza ed a argomento ritardato problemi al contorno per le equazioni integrodifferenziali con operatore calorico ed argomento ritardato, Rend. Mat. UNIV. DI PADOVA, 1965.

10. Мисник В.П. К теории интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Сб. "Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии", 3, "Илим", Фрунзе, 1965.

11. Мышкис А.Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УМН, 5 (33), (1949).

12. Пинни Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М. ИЛ. 1961.

13. Положий Г.Н., Чаленко П.И. Решение интегральных уравнений методом полос, Изд. I, АН УССР, 1964.

14. Wright E.M. The Stability of solutions of non-linear difference-differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 63, 1, 1950.

15. Рубаник В.П. О взаимодействии двух нелинейных колебательных систем при наличии малых запаздывающих сил связи, Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов, 2 (1963).

16. Рябов Ю.А. Применение метода малого параметра для построения решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, ДАН СССР, 133, 2 (1960).

17. Соколов Ю.Д. О применении метода осреднения функциональных поправок к нелинейным интегральным уравнениям, УМЖ, 9, 4, 1957.

18. Тихонов А.Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики, Бюлл. МГУ, секция А, вып. 8 (1938).

19. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, "Наука", М. 1964.

20. Аманкулов Т. Об одном способе решения интегро-дифференциальных уравнений нейтрального типа, Тр. по матем. механ. и физике ФПИ, серия математика, вып. 24, 1965.

21. А м а н к у л о в Т. Решение основной начальной задачи для одного класса интегро-дифференциальных уравнений, Матер. первой межвузовской научно-теоретической конференции научно-педагогических работников и аспирантов высших учебных заведений Киргизской ССР, "Мектеп", Фрунзе, 1966.
22. А м а н к у л о в Т. Решение интегро-дифференциального уравнения нейтрального типа. Тезисы докладов 2-ой научной конференции факультетов физико-математических и естественных наук Университета дружбы народов (секция математики), Москва, 1966.
23. А м а н к у л о в Т. Решение интегро-дифференциального уравнения нейтрального типа. Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов, Москва, т. УП, (в печати).
24. А м а н к у л о в Т. Приближенное решение интегро-дифференциального уравнения с помощью мажорантно-минорантных функций, Аннотация, Известия высших учебных заведений, математика, 8, 1967.
25. А м а н к у л о в Т. Решение одного класса интегро-дифференциальных уравнений численно аналитическим методом, Сб. научных трудов аспирантов Кирг. ГУ, 1967.
26. К р и в о ш е и н Л.Е., А м а н к у л о в Т. Об одном способе решения линейных интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Тезисы докладов 3-ей научной конференции факультета физико-математических и естественных наук Университета дружбы народов, подсекция дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Москва, 1967.
27. А м а н к у л о в Т. К решению линейных интегральных уравнений с запаздывающим аргументом, там же.