АКАДЕМИЯ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР
ОБЪЕДИНЕННЫЙ УЧЕНЫЙ СОВЕТ
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ И ТЕХНИЧЕСКИМ НАУКАМ

На правах рукописи

Алымкулов Келдибай

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Диссертация написана на русском языке

(01.01.02 — дифференциальные и интегральные уравнения)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Фрунзе 1972

АКАДЕМИЯ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР

ОБЪЕДИНЕННЫЙ УЧЕНЫЙ СОВЕТ
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ И ТЕХНИЧЕСКИМ НАУКАМ

На правах рукописи

АЛЫМКУЛОВ КЕЛДИБАЙ

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Диссертация написана на русском языке

(01.01.02 – дифференциальные и интегральные уравнения)

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Фрунзе – 1972

Работа выполнена в Институте физики и математики Академии наук Киргизской ССР.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, член-корреспондент Академии наук Киргизской ССР, профессор Иманалиев М.И.

Официальные оппоненты:

– доктор физико-математических наук, профессор Рябов Ю.А.;

– доктор физико-математических наук, доцент Рожков В.И.

Ведущее предприятие – Ордена Трудового Красного Знамени институт математики Академии наук Украинской ССР.

Автореферат разослан "___"____________________1972 г.

Защита диссертации состоится в____________________1972 г. на заседании Объединенного ученого совета по физико-математическим и техническим наукам АН Киргизской ССР, г. Фрунзе, 71, ул. XXП – партсъезда, 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке АН Кирг.ССР, ул. Дзержинского, 30.

Ученый секретарь совета –
доктор физико-математических наук

И.Б. Биибосунов

Ряд задач, возникающих в теории нелинейных колебаний приводит к исследованию сингулярно- возмущенных периодических систем, поэтому разработка методов асимптотических разложений решений таких систем имеет большое практическое и теоретическое значение.

Периодическим решениям сингулярно-возмущенных систем посвящены работы А.А. Дородницына, Е.Ф. Мищенко, Л.С. Понтрягина, Л. Флатто, Н. Левинсона, И.М. Волка, В.М. Волосова, К.В. Задирака, В. Вазова, Дж. Хейля, Т. Сейферта, Я.В. Быкова, М. Иманалиева, А. Халаная, В.А. Треногина и др.

В данной работе излагается метод асимптотических разложений периодических решений сингулярно-возмущенных систем в критическом случае, т.е. когда соответствующая вырожденная система имеет семейство периодических решений, зависящих от одного или нескольких произвольных параметров.

Построению периодических решений регулярно возмущенных систем в критическом случае посвящена обширная литература. Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в /I-3/.

Диссертация состоит из десяти параграфов объединенных в три главы.

В § I-3 первой главы рассматривается система вида

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= A(t)u + B(t)z + \varepsilon a_1(t,u,z), \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} &= Bz + \varepsilon a_2(t,u,z), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\varepsilon$ – малый положительный параметр, $A(t)$, $B(t)$ соответственно $n \times n$, $n \times m$ мерные $\omega$ – периодические по $t$ матрицы, $a_1$; $a_2$ – $n$, $m$, мерные $\omega$ – периодические по $t$ векторы, $B$ – постоянная $m \times m$ – матрица, характеристические числа которой имеют ненулевые вещественные части.

Всюду в дальнейшем под периодичностью будем понимать периодичность с периодом $\omega$.

Полагая $\varepsilon = 0$, из (I) получаем вырожденную систему

$$\frac{du_0}{dt} = A u_0, \quad z_0 = 0. \qquad (2).$$

Для простоты предполагается, что все решения системы (2) периодические. Обозначим через $W(t)$ фундаментальную матрицу решений уравнения (2), $W(0) = E$ – единичная матрица. Тогда любое периодическое решение системы (2) представляется в виде

$$u_0 = W(t) c_0, \quad z_0 = 0,$$

где $c_0$ – произвольный $n$ – мерный постоянный вектор. Функции $A(t)$, $B(t)$, $a_k(t,u,z)$ будем предполагать достаточно гладкими.

Ставится задача, имеет ли система (I), периодическое решение, которое при $\varepsilon \to 0$ стремится к определенному периодическому решению вырожденного уравнения (2).

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{du}{dt} = Au + Bz + \varepsilon a_1(t,u,z) - \\ - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} [W(t)W^{-1}(s)[B(s)z(s) + \varepsilon a_1(s,u,z)] ds, \qquad (3)$$

$$\frac{dz}{dt} = Bz + \varepsilon a_2(t,u,z).$$

Формальные периодические решения системы (3) можно представить в виде

$$u(t, c_0 + c, \varepsilon) = W(t)(c_0 + c) + \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t, c_0 + c)\varepsilon^i,$$

$$z(t, c_0 + c, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t, c_0 + c)\varepsilon^i \qquad (4)$$



где $v_i(t, c_0 + c)$, $z_i(t, c_0 + c)$ – известные периодические функции, $c$ – произвольный $n$ – мерный "малый" вектор. В свою очередь $v_i(t, c_0 + c)$; $z_i(t, c_0 + c)$ можно разложить в ряды по степеням $c$. Доказывается асимптотический характер ряда (4). Справедлива.

Т е о р е м а I. Если I) характеристические числа матрицы не имеет нулевых вещественных частей; 2) все решения системы (2) периодические; 3) $A(t)$, $B(t)$, $a_k(t,u,z)$ непрерывно дифференцируемы до ( $p+1$ ) – порядка включительно по своим аргументам, то периодическое решение системы (3) можно представить в виде

$$u(t, c_0 + c, \varepsilon) = W(t)(c_0 + c) + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \neq 0}}^{p+1} v_{ij}(t, c_0)\varepsilon^i c^j + v_{p+2}(t, \varepsilon, c);$$

$$z(t, c_0 + c, \varepsilon) = \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \neq 0}}^{p+1} z_{ij}(t, c_0)\varepsilon^i c^j + z_{p+2}(t, \varepsilon, c),$$

где $v_{ij}(t, c_0)$; $z_{ij}(t, c_0)$ – известные периодические функции. Периодические вектор функции $v_{p+2}(t, \varepsilon, c)$; $z_{p+2}(t, \varepsilon, c)$ удовлетворяют неравенствам

$$\|v_{p+2}(t,\varepsilon,c)\|, \ \|z_{p+2}(t,\varepsilon,c)\| \le \varepsilon N \sum_{i+j=p+1} \varepsilon^i \|c\|^j,$$

$$\|v_{p+2}(t,\varepsilon,c^{(1)}) - v_{p+2}(t,\varepsilon,c^{(2)})\| \le \varepsilon N \|c^{(1)} - c^{(2)}\| \sum_{i+j=p} \varepsilon^i \alpha^j;$$

$$\|z_{p+2}(t,\varepsilon,c^{(1)}) - z_{p+2}(t,\varepsilon,c^{(2)})\| \le \varepsilon N \|c^{(1)} - c^{(2)}\| \sum_{i+j=p} \varepsilon^i \alpha^j,$$

при $\varepsilon \le \varepsilon_0$, $\|c\| \le \alpha$, $\|c^{(1)}\| \le \alpha$, $\|c^{(2)}\| \le \alpha$,

где $\varepsilon_0$, $\alpha$ – достаточно малые числа.

Для того, чтобы (4) было формальным периодическим решением системы (I), необходимо и достаточно выполнение условия

$$P(c_0+c,\varepsilon)=\int_0^\omega W^{-1}(s)\Big[B(s)\sum_{i=1}^\infty v_i(s,c_0+c)\varepsilon^{i-1}+ \qquad (6)$$

$$+a_2\Big(s, W(s)(c_0+c)+\sum_{i=1}^\infty v_i(s,c_0+c)\varepsilon^i, \sum_{i=1}^\infty z_i(s,c_0+c)\varepsilon^i\Big)\Big]ds=0.$$

Предполагается, что алгебраическое уравнение

$$P(c_0,0)=\int_0^\omega W^{-1}(s)[v_1(s,c_0)+a_2(s,W(s)c_0,0)]ds=0, \qquad (7)$$

имеет некоторое решение $c_0=c_{00}$. Учитывая (7) разлагаем в ряд Тейлора по степеням $\varepsilon$ и $c$ :

$$P_c(c_0,0)c+P_\varepsilon(c_0,0)\varepsilon+\sum_{i+j\geq 2}^\infty \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}P(c_0,0)}{\partial c^i\partial\varepsilon^j}c^i\varepsilon^j=0. \qquad (8)$$

Из этого уравнения определяется $c=c(\varepsilon)$ так что: $c(0)=0$ .

Если $\det P_c\neq 0$, то система (I) имеет единственное формальное периодическое решение, разлагающееся по целым положительным степеням параметра $\varepsilon$ . Оценивается остаточный член этого ряда.

Т е о р е м а 2. Пусть I) выполнены условия I)–3) – теоремы I; 2) $\det P_c\neq 0$ . Тогда периодическое решение системы (I) представимо в виде

$$u(t,\varepsilon)=W(t)c_{00}+u_1(t)\varepsilon+\dots+u_p(t)\varepsilon^p+u_{p+1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{p+1},$$

$$z(t,\varepsilon)=z_1(t)\varepsilon+z_2(t)\varepsilon^2+\dots+z_p(t)\varepsilon^p+z_{p+1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{p+1}, \qquad (9)$$

$$\|u_{p+1}(t,\varepsilon)\|\leq N, \quad \|z_{p+1}(t,\varepsilon)\|\leq N,$$

где $u_i(t), z_i(t)$ – известные периодические функции. Теорема 2 другими методами изучались Халанаем /7/; Иманалиевым и Какишовым /9/.

Будем говорить, что выполнено условие ( $S$ ), если $\det P_c=0$, и минор ( $n-1$ ) – порядка расположенный в нижнем правом углу



матрицы $P_c$ отличен от нуля. Пусть $c_1, c_2, \dots, c_n$ компоненты вектора $c$ . Предположим, что условие ( $S$ ) выполнено. Исключая из последних ( $n-1$ ) уравнений системы (8) $c_2, c_3, \dots, c_n$ и подставляя их значения в первое уравнение системы (7), получаем скалярное уравнение относительно $c_1$ :

$$\lambda_{01}\varepsilon+\sum_{i+j\geq 2}^\infty \lambda_{ij}c_1^i\varepsilon^j=0, \qquad (10)$$

где $\lambda_{ij}$ – известные постоянные. Для нахождения формальных решений уравнения (IO) можно применять диаграмму Ньютона /2/, /3/.

Вообще говоря, формальные решения уравнения (IO) разлагается по целым или дробным степеням параметра $\varepsilon$ . Соответственно и система (I) будет иметь формальные периодические решения разлагающиеся в ряд по целым или дробным степеням параметра $\varepsilon$ . Доказывается асимптотический характер полученных формальных рядов. В частности справедливы.

Т е о р е м а 3. Пусть I) выполнены условия I)–3)–теоремы I, 2) условие ( $S$ ), 3) $\lambda_{01}\neq 0$, $\lambda_{20}\neq 0$, $\operatorname{sign}\lambda_{20}=-\operatorname{sign}\lambda_{01}$. Тогда уравнение (I) имеет два действительных периодических решений представимых во виде:

$$u(t,\varepsilon)=W(t)c_{00}+u_1(t)\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\dots+u_p(t)\varepsilon^{\frac{p}{2}}+u_{p+1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{p+1}{2}},$$

$$z(t,\varepsilon)=z_1(t)\varepsilon+z_2(t)\varepsilon^{\frac{3}{2}}+\dots+z_p(t)\varepsilon^{\frac{p}{2}}+z_{p+1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{p+1}{2}}, \qquad (11)$$

$$\|u_{p+1}(t,\varepsilon)\|\leq N, \quad \|z_{p+1}(t,\varepsilon)\|\leq N,$$

где $u_i(t), z_i(t)$ – известные периодические функции.

Т е о р е м а 4. Пусть I) выполнены условия I)–2) теоремы 3; 2) $\lambda_{01}=0$, $\lambda_{20}\neq 0$, $\lambda_{02}\neq 0$, $\Delta_0=\lambda_{11}^2-4\lambda_{20}\lambda_{02}>0$. Тогда для двух периодических решений уравнения (I) имеет место асимптотика вида (9).

Т е о р е м а 5. Пусть 1) выполнены условия 1–2) теоремы 3); 2) $A_{20}=0,\ A_{01}=0,\ A_{30}\neq 0,\ A_{11}\neq 0,\ \operatorname{sign} A_{30}=-\operatorname{sign} A_{11}$. Тогда для одного периодическогор решения системы (I) имеет место асимптотика вида (9), для двух – асимптотика вида (II).

Т е о р е м а 6. Пусть 1) выполнены условия 1–2) теоремы 3, 2) $A_{10}=\dots=A_{k-1,0}=0,\ A_{k0}\neq 0,\ A_{01}\neq 0,\quad k\le p-1$, причем при четном $k$; $\operatorname{sign} A_{k0}=-\operatorname{sign} A_{01}$. Тогда для периодического решения системы (I), имеет место асимптотика:

$$u(t,\varepsilon)=u(t)x_{0}+u_1(t)\varepsilon^{\frac{1}{k}}+\dots+u_p(t)\varepsilon^{\frac{p}{k}}+u_{p+1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{p+1}{k}},$$

$$z(t,\varepsilon)=z_1(t)\varepsilon+z_2(t)\varepsilon^{\frac{2}{k}}+\dots+z_p(t)\varepsilon^{\frac{p}{k}}+z_{p+1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{p+1}{k}},$$

$$\|u_{p+1}(t,\varepsilon)\|\le N,\quad \|z_{p+1}(t,\varepsilon)\|\le N,$$

где $u_i(t),\ z_i(t)$ – определяются двузначно или однозначно в зависимости от четности или нечетности $k$.

В § 4–5 рассматривается система уравнений с постоянным запаздыванием

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+Bx(t-\tau)+Cy(t)+\varepsilon a_1(t,x(t),x(t-\tau),y(t),y(t-\tau)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=Dy(t)+\varepsilon a_2(t,x(t),x(t-\tau),y(t),y(t-\tau)),\qquad (12)$$

где $A, B, C, D$ – соответственно $n\times n,\ n\times n,\ n\times k,\ k\times k$ – мерные постоянные матрицы, $a_1, a_2$ – соответственно $n$ и $k$ мерные периодические по $t$ векторы, характеристические числа матрицы $D$ имеют ненулевые вещественные части. Полагая $\varepsilon=0$ вырожденную систему

$$\frac{dx_0}{dt}=Ax_0(t)+Bx_0(t-\tau),\quad y_0=0$$



Предполагается, что уравнение

$$\det[A+B\exp(-\lambda\tau)-\lambda E]=0,$$

имеет $m$ простых корней вида $\sqrt{-1}s$, где $s$ – целое число. При этом предположении и некоторых дополнительных ограничениях на систему (I2) переносятся результаты § I–3.

В § I–3 главы II рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=x+\int_0^\omega K(t,s)x(s)ds+\varepsilon f(t,x),\qquad (13)$$

где $K(t,s),\ f(t,x)$ – достаточно гладкие периодические функции переменных $t,s$. Полагая $\varepsilon=0$, из (I3) получаем вырожденную систему:

$$x_0(t)+\int_0^\omega K(t,s)x_0(s)ds=0\qquad (14)$$

Пусть единица является собственным значением ядра $K(t,s)$ ранга равного единице. Обозначим через $\varphi(t), \psi(t)$ нормированные собственные функции ядер $K(t,s),\ K(s,t)$ – соответственно. Периодическое решение уравнения (I4) можно представить в виде: $x_0=c_0\varphi(t)$, где $c_0$ – произвольная постоянная.

Исследуется вопрос, существует ли периодическое решение системы (I3), которые при $\varepsilon\to 0$ стремится к определенному периодическому решению вырожденной системы (I4). Подстановкой $x=x_0+v$, уравнение (I3) приводится к виду

$$\varepsilon\frac{dv}{dt}=v+\int_0^\omega K(t,s)v(s)ds+\varepsilon f(t,x_0+v)-\varepsilon\frac{dx_0}{dt}.\qquad (15)$$

Положим $K(t,s)=E(t,s)+\varphi(t)\psi(s)$, тогда (I5) перепишется в виде

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = v + \int_0^{\omega} E(t,s)v(s)ds + \varphi(t)c + \varepsilon f(t, x_0 + v) - \varepsilon \frac{dx_0}{dt}, \qquad (16)$$

$$c = \int_0^{\omega} \varphi(s)v(s)ds \qquad (17)$$

Уравнение (I6) формально рассматривается, как нелинейное интегро-дифференциальное, зависящее от двух параметров $\varepsilon$ и $c$. Отметим, что по лемме Шмидта единица не является собственным значением ядра $E(t,s)$. Формальное периодическое решение уравнений (I6) представляется в виде

$$v(t,\varepsilon,c) = \varphi(t)c + \sum_{\substack{i,j=1\\ j\ge 0}}^{\infty} v_{ij}(t)c^i\varepsilon^j. \qquad (18)$$

Доказывается асимптотический характер ряда (I8).

Т е о р е м а 7. Пусть I) единица является собственным значением ядра $K(t,s)$ ранга равного единице 2) $K(t,s)$, $f(t,x)$ непрерывно дифференцируемы до $(p+1)$ – порядка включительно. Тогда периодическое решение уравнения (I6) можно представить в виде

$$v(t,\varepsilon,c) = \varphi(t)c + \sum_{\substack{i,j=1\\ j\ge 0}}^{p+1} v_{ij}(t,c_0)\varepsilon^i c^j + v_{p+1}(t,\varepsilon,c),$$

где $v_{ij}(t,c_0)$ – известные периодические функции, а периодическая функция $v_{p+1}(t,\varepsilon,c)$ удовлетворяет условиям

$$\|v_{p+1}(t,\varepsilon,c)\| \le N\varepsilon \sum_{i+j=p+1} \varepsilon^i |c|^j,$$

$$\|v_{p+1}(t,\varepsilon,c^{(1)}) - v_{p+1}(t,\varepsilon,c^{(2)})\| \le N\varepsilon |c^{(1)} - c^{(2)}| \sum_{i+j=p} \varepsilon^i \alpha^j,$$

при $\varepsilon \le \varepsilon_0$, $|c| \le \alpha$, $|c^{(1)}| \le \alpha$, $|c^{(2)}| \le \alpha$.



Подставляя (I8) в (I7) и учитывая нормированность $\varphi(t)$, получаем

$$\alpha_{00} + \alpha_{01}\varepsilon + \alpha_{10}c + \sum_{i+j=2}^{\infty} \alpha_{ij}c^i\varepsilon^j = 0, \qquad (19)$$

$$\alpha_{ij} = \int_0^{\omega} \varphi(t) v_{ij+1}(t,c_0)dt$$

Пусть $c_0$ – есть корень уравнения

$$\alpha_{00} = \int_0^{\omega} \varphi(t) v_{01}(t,c_0)dt = 0. \qquad (20)$$

Из уравнения (29) $c = c(\varepsilon)$ определяется так что: $c(0) = 0$.

Т е о р е м а 8. Пусть выполнены I) условия I)–2) теоремы 7, 2) $c_0$ – является корнем уравнения (20), 3) $\alpha_{10} \ne 0$. Тогда для периодического решения уравнения (I3) имеет место асимптотика

$$x(t) = \varphi(t)c_0 + x_1(t)\varepsilon + \dots + x_p(t)\varepsilon^p + x_{p+1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{p+1},$$
$$\|x_{p+1}(t,\varepsilon)\| \le N, \qquad (21)$$

где $x_i(t)$ – известные периодические функции.

Т е о р е м а 9. Пусть выполнены I) условия I–2) теоремы 8, 2) $\alpha_{20} \ne 0$, $\alpha_{01} \ne 0$, $\operatorname{sign}\alpha_{20} = -\operatorname{sign}\alpha_{01}$. Тогда для двух периодических решений уравнения (I3) имеет место асимптотика

$$x(t,\varepsilon) = \varphi(t)c_0 + x_1(t)\varepsilon^{1/2} + \dots + x_p(t)\varepsilon^{p/2} + x_{p+1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{p+1}{2}},$$

$$\|x_{p+1}(t,\varepsilon)\| \le N.$$

Т е о р е м а IO. Пусть I) выполнены условия I–2 теоремы 8; 2) $\alpha_{20} \ne 0$, $\alpha_{01} \ne 0$, $\alpha_{02} \ne 0$, $\Delta_0 = \alpha_{11}^2 - 4\alpha_{20}\alpha_{02} > 0$. тогда для двух периодических решений уравнения (I3) имеет место асимптотика вида (2I).

В § 4–5 второй главы исследуется асимптотические разложения особых периодических решений для сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения вида

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = b(t)y + \int_0^{\omega} K(t,s)y(s)ds + \varepsilon \sum_{i=0}^{m} A_i(t)y^i; \qquad (22)$$

где $b(t), K(t,s), A_i(t)$ – гладкие периодические функции $t$ и $s$, $m \geq 2$ – натуральное число. Периодическое решение уравнения (22) называется особым, если: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|y(t,\varepsilon)\| = \infty$.

В (22) сделаем подстановку $\varepsilon = \lambda^{m-1}$; $x = \lambda y$, тогда получим

$$\lambda^{m-1} \frac{dx}{dt} = b(t)x + \int_0^{\omega} K(t,s)x(s)ds + \sum_{i=0}^{m} \lambda^{m-i} A_i(t)x^i. \qquad (23)$$

Полагая $\lambda = 0$, из (23) получаем

$$b(t)x_0 + \int_0^{\omega} K(t,s)x_0(s)ds + A_m(t)x_0^m = 0 \qquad (24)$$

Предполагается, что уравнение (24) имеет нетождественно равное нулю достаточно гладкое периодическое решение $x_{00}(t)$. Следовательно, задача свелась к исследованию асимптотического разложения периодического решения уравнения (23), которое при $\varepsilon \to 0$ стремится к $x_{00}(t)$. Она проводится при помощи методики § 1–3 главы 2.

Глава 3 посвящена асимптотическим разложениям особых периодических решений систем вида

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + Bu + \varepsilon \sum_{i+j=0}^{r_1} A_{ij}^{(1)}(t) z^i u^j, \\ \varepsilon \frac{du}{dt} &= Du + \varepsilon \sum_{i+j=0}^{r_2} A_{ij}^{(2)}(t) z^i u^j, \end{aligned} \qquad (25)$$



где $z, u$ – $n$ и $m$ мерные векторы, $A, B, D$ – постоянные $n\times n$, $n\times m$, $m\times m$ – мерные матрицы, $A_{ij}^{(k)}(t) z^i u^j$ – форма $i$-го, $j$-го порядков относительно $z$ и $u$ соответственно, коэффициенты которой – достаточно гладкие периодические функции по $t$; $r_1$ и $r_2$ – натуральные числа больше двух. Здесь рассматривается периодическое решение системы (25) одного из следующих типов

а) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|z(t,\varepsilon)\| = \infty$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u(t,\varepsilon)\| = \infty$,

б) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|z(t,\varepsilon)\| = \infty$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u(t,\varepsilon)\| = 0$,

в) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|z(t,\varepsilon)\| = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u(t,\varepsilon)\| = \infty$.

Пусть $r_1 = r_2 = r$. В (25) сделаем преобразование

$$x = \lambda z, \quad y = \lambda u, \quad \varepsilon = \lambda^{r-1},$$

тогда, получим

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + By + \lambda a_1(t,x,y,\lambda) + b_1(t,x,y), \\ \lambda^{r-1}\frac{dy}{dt} &= Dy + \lambda a_2(t,x,y,\lambda) + b_2(t,x,y), \end{aligned} \qquad (26)$$

где

$$a_k(t,x,y,\lambda) = \sum_{i+j=0}^{r-1} \lambda^{r-1-i-j} A_{ij}^{(k)}(t) x^i y^j,$$

$$b_k(t,x,y) = \sum_{i+j=r} A_{ij}^{(k)}(t) x^i y^j.$$

Формально полагая в (26) $\lambda = 0$, получаем вырожденную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= Ax_0 + By_0 + b_1(t,x_0,y_0), \\ Dy_0 &+ b_2(t,x_0,y_0) = 0. \end{aligned} \qquad (27)$$

Пусть система (27) имеет семейство периодических решений зависящих от $k \leq n$ параметров $h_1, h_2, \ldots, k_k$ :

$$x_0 = \varphi_1(t, h_1, \ldots, k_k), \quad y_0 = \varphi_2(t, k_1, \ldots, k_k);$$

Далее рассматриваются периодические решения уравнения (26), которые при $\lambda \to 0$ сходятся к определенному периодическому решению вырождению уравнения (27). Эта задача исследуется методами § I–3 главы I.

Результаты диссертации докладывались на семинаре проф. Васильевой А.Б. в МГУ, на третьей Всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (г.Черновцы, 1972) и опубликованы в работах /9/ – /II/.

### Цитированная литература


I. Хейль ДЖ. Колебания в нелинейных системах. "Мир" 1964.

2. Вайнберг М.М., Треногин В.А. теория ветвления решений нелинейных уравнений. "Наука", 1969.

3. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений "Мир", 1964.

4. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. Наука 1969.

5. Халанай А. Сингулярные возмущения периодических систем. Критический случай. Revue Roumain Math. Pur et Appl. 1966, т.XI, № 8.





6. Халанай А. Сингулярные возмущения системы с запаздывающим аргументом. там же. т.7, № 2, 1962.

7. Иманалиев М., Тукешев О. О периодических решениях сингулярно-возмущенных линейных наследственных уравнений. Материалы XII научной конференции, проф. преп. сост. физмат ф–та КГУ. Фрунзе 1965.

8. Иманалиев М., Какишов. Асимптотические методы в теории периодических решений сингулярно-возмущенных наследственных систем в критическом случае. Труды 5-й международной конференции по нелинейным колебаниям т.I, Киев, 1970.

9. Иманалиев М., Алымкулов К. Асимптотические методы в теории ветвления периодических решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. Изв. АН Кирг. ССР. № 3, 1972.

10. Иманалиев М., Алымкулов К. Асимптотические методы в теории ветвления периодических сингулярно-возмущенных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием в критическом случае. В сб. "Материалы третьей всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. 1972 г., г. Черновцы.

II. Иманалиев М., Алымкулов К. Асимптотические методы в теории ветвления периодических решений сингулярно-возмущенных систем дифференциальных уравнений. В сб. "Исследования по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии". вып. 9. (в печати).

I2. Алымкулов К., О периодических решениях неавтономных систем". Там же вып. 5. 1969, изд. "Илим", Фрунзе.

I3. Алымкулов К. О построении почти периодических решений некоторых дифференциальных уравнений. Там же вып. 6. 1969, Фрунзе.

14. Алымкулов К. О методах Пуанкаре и Ляпунова-Линдштета для (автономных) систем дифференциальных уравнений. Там же вып.7. 1970.

15. Алымкулов К., О двух методах в теории периодических решений неавтономных систем. Сбн."Материалы I-й конференции молодых ученых АН Кирг. ССР, 1965", Фрунзе, "Илим", 1970 г.

ПОДПИСАНО В ПЕЧАТЬ 21/XI-1972 Г. ФОРМАТ БУМАГИ
$60\times90^1/_{16}$. ОБЪЕМ 1 П. Л.
Д—00547. ЗАКАЗ 2588. ТИРАЖ 200 ЭКЗ.
Г. ФРУНЗЕ, ТИП. АН КИРГИЗ. ССР
УЛ. ПУШКИНА, 144