ВИЛЬНЮССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. КАПСУКАСА

Г. Ю. АЛЕШКЯВИЧЮС

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ЗАДАННЫХ НА ЦЕПИ МАРКОВА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Вильнюс — 1967

ВИЛЬНЮССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. КАПСУКАСА

Г. Ю. АЛЕШКЯВИЧЮС

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ЗАДАННЫХ НА ЦЕПИ МАРКОВА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физ.-мат. наук, доц. В. А. СТАТУЛЯВИЧЮС

Вильнюс — 1967

Объединенный Ученый Совет Факультета физики и Факультета математики и механики Вильнюсского государственного университета им. В. Капсукаса направляет Вам для ознакомления автореферат кандидатской диссертации Г. Ю. Алешкявичюса.

Работа выполнена в Институте физики и математики АН Литовской ССР.

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, проф. Р. Л. Добрушин и кандидат физ.-мат. наук, доц. Р. В. Уждавинис.

Коллективный рецензент: Вильнюсский государственный педагогический институт.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке университета (ул. Университета 3).

Защита намечается на «......»....сентябрь.......... 1967 г.

Ваши отзывы и пожелания просим прислать по адресу: г. Вильнюс, ул. Партизану 22, Факультет математики и механики.

Дата рассылки автореферата «..1..» августа 1967 г.

Ответственный редактор кандидат физ.-мат. наук
Н. Калинаускайте

Одной из основных задач теории вероятностей является проблема суммирования случайных величин, которая включает в себя следующие вопросы: 1) найти класс возможных предельных законов для распределений сумм $S_n = \sum_1^n X_j^{(n)}$ случайных величин, 2) найти условия сходимости к законам этого класса.

В монографиях Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова, И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника, в работах А. Н. Колмогорова, Ю. В. Прохорова, В. В. Петрова, В. М. Золотарева, С. Х. Сираждинова, С. В. Нагаева, В. А. Статулявичюса и др. указанная проблема почти полностью решена для взаимно независимых, а также для стационарно связанных случайных величин.

Фундаментальные исследования А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова, Ю. В. Линника, Н. А. Сапогова, Р. Л. Добрушина, А. А. Боровкова, В. А. Статулявичюса, работы Б. А. Ряубы, А. К. Рауделюнаса и др. посвящены выяснению условию для асимптотической нормальности суммы S_n связанных в неоднородную цепь Маркова случайных величин (т. е. функций от цепи Маркова), слабо зависимых случайных величин и процессов.

В работах Р. Л. Добрушина, Л. Д. Мешалкина и др. рассмотрена задача отыскания всех предельных законов для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова с конечным числом состояний.

Некоторые результаты для условно независимых случайных величин были получены Р. З. Хасьминским, Г. Д. Миллером, Б. Дьереш, а также в совместной работе Ю. Кейлзона и Д. Вишарта.

В предлагаемой работе рассматриваются случайные величины X_j, $j \in Z$ (Z — множество всех целых чисел), представляющие собой следующее обобщение связанных в цепь Маркова случайных величин. Пусть $(\xi_j)_{j \in Z}$ — неоднородная цепь Маркова сложности r и, если фиксирована траектория этой цепи, то случайные величины X_j, $j \in Z$, условно независимы и имеют функции распределения $F_j(\xi_{j-s}, \ldots, \xi_j; x)$, зависящие от $s+1$ подряд идущих состояний цепи Маркова, как от некоторых параметров. Точнее, пусть имеет место равенство: с вероятностью единица

$$\mathbf{P}\{\bigcap_1^k [X_j<x_j] \mid \xi_k, \xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots\} =$$

$$=\prod_1^k \mathbf{P}\{X_j<x_j \mid \xi_j, \xi_{j-1}, \ldots, \xi_{j-s}\} = \prod_1^k F_j(\xi_{j-s}, \ldots, \xi_j; x_j).$$

Следуя Г. Д. Миллеру, такие случайные величины будем называть случайными величинами, заданными на цепи Маркова.

Основной целью предлагаемой работы является изучение некоторых вопросов суммирования случайных величин, заданных на цепи Маркова, обобщение на более общий случай некоторых теорем, известных для независимых или связанных в цепь Маркова случайных величин.

Диссертация состоит из трех глав и дополнения.

Первая глава посвящена анализу строения сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова, и доказательству усиленного закона больших чисел. В первом параграфе дана оценка сверху для дисперсии суммы заданных на цепи случайных величин. Во втором параграфе показано, что рассматриваемая сумма может быть разложена на две части, одна из которых является условным мартингалом, а вторая является измеримой функцией от max (r, s) подряд идущих последних состояний цепи Маркова, причем это достигается с помощью центрирования случайных величин X_j по формуле

$$X_j^* = X_j - \mathbf{M}X_j + \Theta_j - \Theta_{j-1},$$

где для краткости положено

$$\Theta_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} \mathbf{M}\{X_i - \mathbf{M}X_i \mid \xi_j, \xi_{j-1}, \ldots\}.$$

Оценена погрешность дисперсии суммы, образовавшаяся при центрировании слагаемых, найдены необходимые и достаточные условия сходимости в среднем квадратичном рядов случайных величин, заданных на цепи Маркова. В том случае, когда последовательность $(\xi_j, X_j)_{j\in Z}$ однородна, выведена формула М. Фреше для удельной дисперсии суммы. В третьем параграфе доказан усиленный закон больших чисел А. Н. Колмогорова для рассматриваемых нами случайных величин, причем достаточным условием его справедливости в неоднородном случае является сходимость ряда $\sum_1^{\infty} \frac{\gamma_j \mathbf{D}X_j}{j^2}$, а в однородном случае — равномерная регулярность цепи Маркова $(\xi_j)_{j\in Z}$ и существование $\mathbf{M}|X_1|<\infty$ по стационарному закону цепи Маркова. (Здесь γ_j — те же коэффициенты, что и в оценке сверху дисперсии суммы).

Во второй главе рассматривается схема серий случайных величин $X_j^{(n)}$, $j \in Z$, заданных на простой цепи Маркова $(\xi_j)_{j\in Z}$, и описывается класс возможных предельных законов для распределений сумм таких случайных величин. В первом параграфе строятся «сопровождающие» случайные величины, доказываются некоторые оценки. Основной результат, доказанный во втором параграфе этой главы, утверждает, что предельными законами для распределений сумм равномерно бесконечно малых случайных величин, заданных на равномерно регулярной цепи Маркова, могут быть только безгранично делимые законы и, в частности, законы класса $\mathcal{L}$ или устойчивые законы, если рассматриваются нормированные нарастающие суммы неоднородной или однородной последовательности $(X_j)_{j\in Z}$. Из третьего параграфа отметим следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Если с вероятностью единица

$$|X_j^{(n)}| < C^{(n)}, \quad \mathbf{M}\{X_j^{(n)} \mid \xi_{j-1}^{(n)}\} = 0$$

и $\frac{\alpha(n) B_n}{C^{(n)}} \to \infty$, то существует константа C такая, что

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| < C \frac{C^{(n)}}{\alpha(n) B_n} \ln \frac{\alpha(n) B_n}{C^{(n)}}.$$

Здесь $\Phi(x)$ — нормальный закон, $F_n(x)$ — функция распределения нормированной суммы величин $X_j^{(n)}$, $B_n^2 = \sum_1^n \mathbf{D}X_j^{(n)}$, $\alpha^{(n)}$ — коэффициент равномерной эргодичности цепи Маркова $(\xi_j^{(n)})_{j\in Z}$, введенный Р. Л. Добрушиным.

ТЕОРЕМА 2. Если существуют такие значения λ_{nj} масштабного параметра устойчивого закона $V_\alpha(\lambda, x)$ с показателем устойчивости α, $0<\alpha\leq 2$, что $B_n^\alpha = \sum_j \lambda_{nj}^\alpha$ и для целых ν, $\nu+1 \leq [\alpha]+1=\varkappa$, с вероятностью единица

$$\sup_{j,\, \xi_{j-1}^{(n)}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} y^\nu \, d[F_{nj}(\xi_{j-1}^{(n)}, x) - V^\alpha(\lambda_{nj}, X)] \right| = 0,$$

$$L_{\varkappa, n} = \sum_j \mathbf{M} \int_{-\infty}^{\infty} |y|^\varkappa \, | dF_{nj}(\xi_{j-1}^{(n)}, yB_n) - dV_\alpha(\lambda_{nj}, yB_n) | \to 0$$

то $F_n(x) \to V_\alpha(1, x)$, когда $n \to \infty$.

Здесь $F_{nj}(\xi_{j-1}^{(n)}, x) = \mathbf{P}\{X_j^{(n)} < x \mid \xi_{j-1}^{(n)}\}$.

В третьей главе методом спектральной теории линейных операторов, разработанным С. Х. Сиражлиновым и С. В. Нагаевым, рассмотрено уточнение предельных теорем для сумм однородной последовательности $(X_j)_{j \in Z}$ случайных величин, заданных на однородной равномерно регулярной цепи Маркова $(\xi_j)_{j \in Z}$. В первом параграфе дано спектральное разложение оператора $P(t)$, определенного с помощью переходной характеристической функции

$$p(t, \omega, A) = M\{\chi_A(\xi_j) e^{itX_j} \mid \xi_{j-1} = \omega\},$$

(здесь $\chi_A(\cdot)$ — индикатор события A), и асимптотический анализ его максимального по модулю собственного числа $\lambda(t)$. Во втором параграфе оценена скорость сходимости к предельному нормальному закону и к устойчивому закону $V_\alpha(x)$ с показателем устойчивости, α, $1<\alpha<2$. В третьем параграфе дано некоторое уточнение остаточного члена в предельных теоремах.

В дополнении собраны некоторые сведения о сложных цепях Маркова, использованные без доказательств в первых трех главах. В первом параграфе дано определение и свойства сложных цепей, позволяющие сводить сложные цепи к простым, но многомерным цепям Маркова. Во втором параграфе рассмотрены свойства коэффициента эргодичности сложных цепей Маркова и доказаны теоремы о сильной эргодичности равномерно регулярных неоднородных цепей Маркова. В третьем параграфе собраны некоторые известные эргодические свойства простых однородных цепей Маркова.

Результаты диссертации докладывались на V—VIII республиканских совещаниях математиков Литовской ССР, обсуждались на заседаниях семинара по теории вероятностей в г. Вильнюс. Основные результаты опубликованы в следующих работах:

1. О центральной предельной проблеме для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова, Литовский Матем. сб., 6, 1 (1966), 15—22.

2. Некоторые предельные теоремы для сумм случайных величин, заданных на однородной регулярной цепи Маркова, Литовский матем. сб., 6, 3 (1966), 297—311.

3. Предельные теоремы для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова, Литовский матем. сб., 6, 4 (1966), 633—634.

4. О предельных теоремах для сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова, «Математика—физика—кибернетика», труды научной конф. молодых ученых Лит. ССР, посвященный 50-летию Окт. Соц. Рев., Вильнюс, 1967 (в печати).

Вильнюс, «Вайздас». Заказ № 2296. ЛВ 05418. Тираж 200.

2к