На правах рукописи

Д. В. АЛЕКСЕЕВСКИЙ

Римановы пространства с необычными группами голономии

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент Э. Б. ВИНБЕРГ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 196

Ученый совет механико-математического факультета МГУ направляет Вам автореферат диссертации Д. В. Алексеевского. Защита состоится на заседании Ученого совета механико-математического факультета МГУ.

Официальные оппоненты:
член-корреспондент АН СССР, профессор С. П. Новиков, доктор физико-математических наук, профессор А. С. Солодовников.
Отзывы просим направлять по адресу: Москва, В-234, Ленинские горы, отделение математики.

Дата рассылки реферата

МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1. Как показали Дж. Хано и Одзеки [8], всякая связная линейная группа Ли реализуется как группа голономии пространства линейной связности. Для групп голономии римановых пространств положение иное. Именно, М. Берже доказал в 1953 г. следующую теорему:

Ограниченная группа голономии локально-неприводимого риманова пространства V^n, не являющегося локально-симметрическим, содержится в следующем списке компактных линейных групп Ли:

$$SO(n),\quad U\left(\frac{n}{2}\right),\quad SU\left(\frac{n}{2}\right),\quad \mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}\left(\frac{n}{4}\right),\quad \mathrm{Sp}\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$G_2\ (n=7),\quad \mathrm{Spin}(7)\ (n=8),\quad \mathrm{Spin}(9)\ (n=16).$$

Как правило, группой голономии n-мерного ориентируемого риманова пространства является специальная ортогональная группа $SO(n)$. (Малой деформацией метрики в окрестности произвольной точки этого можно добиться).

В случае, когда это не так, знание группы голономии $\Gamma \neq SO(n)$ риманова пространства V^n позволяет получить информацию о дифференциальной геометрии и топологии пространства V^n.

В представленной диссертации изучаются свойства римановых пространств V^n с различными группами голономии $\Gamma \neq SO(n)$ из списка Берже. Диссертация делится на две части. В первой части описываются возможные тензоры кривизны римановых пространств в различными группами голономии. Вторая часть посвящена классификации компактных однородных локально-неприводимых римановых пространств V^n с группой голономии $\Gamma \neq SO(n)$.

2. Пусть V — касательное пространство к риманову пространству V^n в произвольной точке p . Отождествим с помощью римановой метрики сопряженное пространство V^* с пространством V. Тогда алгебра голономии Γ пространства V^n в точке p

(т. е. алгебра Ли группы голономии) отождествится с подпространством пространства $V \wedge V = \{x \wedge y = x \oplus y - y \oplus x,\ x, y \in V\}$, а тензор кривизны пространства V^n в точке p — с элементом R пространства $S^2(\Gamma) = \Gamma \vee \Gamma = \{A \vee B = A \odot B + B \odot A;\ A, B \in \Gamma\}$, который удовлетворяет тождеству Бьянки: $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$ (здесь $R(x, y)z$ свертка тензора R с векторами $x, y, z \in V$). Множество $R(\Gamma)$ тензоров из $S^2(\Gamma)$, удовлетворяющих тождеству Бьянки, называется пространством тензоров кривизны типа Γ.

В первой части диссертации описываются пространства $R(\Gamma)$ для различных алгебр Ли Γ, соответствующих группам Ли из списка Берже. Для $n=4$ такое описание известно и приводит, как показали Гольдберг и Керр [7], к классификации А. З. Петрова полей тяготения в общей теории относительности. Способ описания

Таблица 1

Γ	$R_p(\Gamma)$	$R'(\Gamma)$	$R_0(\Gamma)$
$SO(3)$	π^1	$\pi^5_{(4)}$	—
$SO(4)$	π^1	$\pi^9_{(2,2)}$	$\pi^5_{(4,0)} + \pi^5_{(0,4)}$
$SO(n)$ $n \geq 4$	π^1	$\pi^{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)}_{(20\cdots0)}$	$\pi^{\frac{1}{12}(n-3)(n+2)(n+1)n}_{(020\cdots0)}$
$U(m)$ $n=2m$	π^1	$\pi^{m^2-1}_{(10\cdots01)}$	$\pi^{\frac{1}{4}(m+3)m^2(m-1)}_{(20\cdots02)}$
$SU(m)$	—	—	$R_0(SU(m)) = R_0(U(m))$
$Sp(1)+Sp(m)$ $n=4m;\ m>1$	π^1	—	$\pi^{\frac{1}{6}(2m+3)(2m+1)(m+1)m}_{(40\cdots0)}$
$Sp(m)$	—	—	$R_0(Sp(m)) = R_0(Sp(1)+Sp(m))$
$Spin(9)$ $n=16$	π^1	—	—
$Spin(7)$ $n=8$	—	—	$\pi^{168}_{(0,2,0)}$
G_2 $n=7$	—	—	$\pi^{77}_{(2,0)}$

основан на следующем замечании. Пространство $R(\Gamma)$ инвариантно относительно действия алгебры Ли Γ в пространстве $S^2(\Gamma)$, индуцированного присоединенным представлением алгебры Γ на Γ. Поэтому для описания $R(\Gamma)$ достаточно разложить пространство $S^2(\Gamma)$ на Γ — неприводимые неэквивалентные компоненты и проверить, какие из них удовлетворяют тождеству Бьянки.

Полученные результаты приведены в таблицах 1 и 2.

В таблицах приняты следующие обозначения: $Rp(\Gamma)$ — подпространство в $R(\Gamma)$ Γ — инвариантных тензоров; $R_0(\Gamma)$ — подпространство в $R(\Gamma)$, состоящее из тензоров с нулевой кривизной Риччи (т. е. свертка по 1 и 3 индексам равна нулю). $R'(\Gamma)$ — Γ-инвариантное дополнение к $R_0(\Gamma) + Rp(\Gamma)$ в $R(\Gamma)$; $\pi^N_{(k_1,\dots,k_l)}$ — представление компактной алгебры Ли Γ в пространстве размерности N, комплексная оболочка которого задается доминантой $(\kappa_1,\dots,\kappa_l)$.

Алгебры Ли классических групп Ли обозначаются теми же символами, что и сами группы.

Таблица 2

Явный вид некоторых неприводимых компонент пространств $R(\Gamma)$.

$$R_P(SO(n)) = \{R_{PR} : R_{PR}(x, y) = x \wedge y \quad x, y \in V\},$$

$$R_P(U(m)) = \Big\{R_{PC} : R_{PC}(x, y) = -\frac{1}{2} < Ix, y > I + \frac{1}{4}[x \wedge y + Ix \wedge Iy]\Big\},$$

$$R_P(Sp(1) + Sp(m)) = \Big\{R_{PK} : R_{PK}(x, y) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} < I_\alpha x, y > I_\alpha + \frac{1}{4}\Big[x \wedge y + \sum_{\alpha=1}^{3} I_\alpha x \wedge I_\alpha y\Big]\Big\},$$

$$R_P(Spin(9)) = \{R_{PO}\},$$

$$R'(SO(n)) = \{R_S : R_S(x, y) = Sx \wedge y + x \wedge Sy;\ S \in V \vee V,\ spS = 0\},$$

$$R'(U(m)) = \Big\{\tilde{R}_S : \tilde{R}_S(x, y) = < Ix, y > IS + < ISx, y > I - \frac{1}{2}[Ix \wedge ISy + ISx \wedge Iy + Sx \wedge y + x \wedge Sy];\ S \in V \vee V, sp S = 0\Big\}.$$

Замечание. R_{PR}, R_{PC}, R_{PK} и R_{PO} являются тензорами кривизны, соответственно, вещественного, комплексного кватернионного проективных пространств и октавной проективной плоскости.

Замечание. Явный вид всевозможных тензоров из других неприводимых компонент не приводится в силу его громоздкости.

Приведем некоторые следствия полученных результатов.

1. Риманово пространство V^n, алгебра голономии которого содержится в одной из алгебр Ли $SU\left(\frac{n}{2}\right)$, G_2, ($n = 7$) или Spin (7) ($n = 8$) имеет нулевую кривизну Риччи.

2. Риманово пространство V^{4m} ($m>1$) с алгеброй голономии, содержащейся в алгебре Ли $Sp(1) + Sp(m)$ является пространством Эйнштейна.

3. Риманово пространство V^{16} с алгеброй голономии Spin (9) локально-изометрично октавной проективной плоскости $F_4/SO(9)$ или двойственному симметрическому пространству.

4. Пусть V^n — ориентируемое локально-неприводимое риманово пространство, не являющееся локально-симметрическим. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

а) Поле тензоров Риччи пространства V^n не равно нулю.

б) V^n компактно и допускает однопараметрическую группу движений.

Тогда группа голономии пространства V^n равна

$$SO(n),\ U\left(\frac{n}{2}\right) \text{ или } Sp(1) \times Sp\left(\frac{n}{4}\right).$$

5. Пусть V^{4m} ($m>1$) — кватернионное риманово многообразие, т. е. риманово пространство с группой голономии $\Gamma \subset Sp(1)\times Sp(m)$

Предположим, что кривизна Риччи пространства V^{4m} отлична от нуля. Тогда пространство V^{4m} локально-неприводимо.

Если, вдобавок, пространство V^{4m} не является локально-симметрическим, то его группа голономии равна $Sp(1) \times Sp(m)$.

Предположим, что кривизна Риччи пространства V^{4m} равна нулю. Тогда пространство V^{4m} локально-изометрично прямому произведению евклидова пространства и односвязных пространств V^{4m_i} с группами голономии $Sp(m_i)$.

Замечание. Утверждение следствия 1 относительно риманова пространства V^n с алгеброй голономии $SU\left(\frac{n}{2}\right)$ давно известно (см., например, [9]), остальные утверждения следствия 1, а также следствие 2 доказаны другим методом в последних работах Бонана и Берже.

3. Вторая часть диссертации посвящена классификации компактных однородных кватернионных римановых многообразий. К этому сводится более общая задача классификации всех компактных однородных локально-неприводимых римановых пространств

с алгеброй голономии $\Gamma \neq SO(n)$. Действительно, согласно следствию 4 компактное однородное локально-неприводимое ориентируемое риманово пространство V^n, не являющееся локально-симметрическим, имеет группу голономии $\Gamma = SO(n)$, $U\left(\frac{n}{2}\right)$ или $Sp(1) \times Sp\left(\frac{n}{4}\right)$. Но все однородные локально-симметрические пространства классифицированы Дж. Вольфом и Г. Фрейденталем [10,6], а все компактные однородные римановы пространства с группой голономии $\Gamma = U(m)$ — А. Лихнеровичем и А. Борелем [9,5].

Основной полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 1. Пусть V^{4m} ($m>1$) — однородное компактное кватернионное риманово многообразие.

1. Если пространство V^{4m} приводимо, то это тор.

2. Если пространство V^{4m} неприводимо, то оно является односвязным симметрическим пространством.

Замечание. Как показал Дж. Вольф, односвязное симметрическое пространство, являющееся кватернионным римановым многообразием, изометрично фактор-пространству, снабженному инвариантной римановой метрикой, простой группы Ли без центра по нормализатору трехчленной регулярной подгруппы, соответствующей длинному корню.

Теорема 1 следует из двух утверждений:

I. Однородное компактное риманово пространство V^{4m} с группой голономии $Sp(1) \times Sp(m)$ является локально-симметрическим.

II. Всякое локально-симметрическое (не обязательно однородное) кватернионное риманово многообразие с положительной кривизной Риччи односвязно.

Доказательство утверждения II основано на формуле 2-й вариации длины геодезической.

Доказательство утверждения I состоит в детальном изучении локальной структуры однородных кватернионных римановых многообразий. Схема доказательства утверждения I следующая.

Пусть $V^{4m} = G/H$ — компактное однородное кватернионное риманово многообразие с ненулевой кривизной Риччи.

1. Доказывается, что стационарная группа H нетривиальна.

Именно из предположения тривиальности стационарной группы выводится прямым построением различающего коцикла, что отличная от нуля параллельная 4-форма, существующая в любом кватернионном многообразии, когомологична нулю, что противоречит теореме де Рама.

2. Доказывается, что алгебра Ли H стационарной группы обладает следующим свойством (C): Существуют три элемента h_1, h_2, h_3 из H, что

$$C(h_\alpha) = \{h_\alpha\} + \overline{\mathrm{H}} \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

где $C(h_\alpha)$ — централизатор элемента h_α в алгебре Ли группы G, $\overline{\mathrm{H}}$ — идеал в Н.

Доказательство основано на изучении однородных вполне геодезических подмногообразий, существование которых обеспечивается следующей леммой:

Пусть $V = G/H$ — однородное риманово пространство и M — подмножество в H. Тогда орбита связного централизатора множества M в G, проходящая через точку $p = eH$, является вполне геодезическим подмногообразием.

3. Пусть Н — подалгебра компактной алгебры Ли G, обладающая свойством (C).

Тогда доказывается, что Н — регулярная подалгебра в G, совпадающая с нормализатором в G трехчленной регулярной подалгебры A, которая соответствует длинному корню алгебры Ли G.

4. Используя 3, показывается, что существует нетривиальная однопараметрическая подгруппа φ_t из H, которая индуцирует в касательном пространстве к кватернионному риманову многообразию $V^{4m} = G/H$ в точке $p = eH$ однопараметрическую подгруппу φ_t, содержащуюся в группе Ли $\mathrm{Sp}(1)$. (Здесь как и всюду под $\mathrm{Sp}(1)$ подразумевается трехмерный нормальный делитель группы голономии $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$ кватернионного многообразия, определяющий в касательном пространстве структуру векторного пространства над телом кватернионов.)

5. Очевидно, что преобразования φ_t сохраняют тензор кривизны в точке p R и его ковариантную производную ∇R. Доказывается, что преобразования из $\mathrm{Sp}(1)$ не могут сохранять ненулевые тензоры, удовлетворяющие всем алгебраическим условиям, которые выполнены для ковариантной производной тензора кривизны кватернионного многообразия. Из этого следует, что $\triangle$ R = O, т. е. рассматриваемое кватернионное многообразие локально-симметрично.

З а м е ч а н и е. Вместо пп. 4 и 5 можно было бы воспользоваться результатами Дж. Вольфа.

Выражаю глубокую и искреннюю благодарность моему научному руководителю Э. Б. Винбергу за внимание и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. А л е к с е е в с к и й Д. В. О группах голономии римановых пространств. «Укр. мат. журнал», 1967, т. 19, № 2, стр. 100—104.

2. B e r g e r M. Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexions affines et des variétés riemanniennes. Bull. Soc. Math. Fr., 1955, v. 83, pp. 279—330.

3. B e r g e r M. Remarques sur les grupes d'holonomie des variétés riemanniennes. Comp. Rend., 1966, v. 262, pp. 1316—1318.

4. B o n a n E. Sur les variétés riemanniennes à groupe d'holonomie G_2 ou Spin (7). Comp. Rend., 1966, v. 262, pp. 127—129.

5. B o r e l A. Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, v. 40, pp. 1147—1151.

6. F r e u d e n t h a l H. Clifford—Wolf Isometrien symmetrische Räume Math. Ann., 1963, v. 150, pp. 136—149.

7. G o l d b e r g S. I., K e r r R. P. Application the holonomy group to Petrov classification. J. Math. Phys., 1961, v. 2, No. 3, pp. 327—332.

8. H a n o I., O z e k i H. On the holonomy groups of the linear connections. Nag. Math. Journ., 1955, v. 10, pp. 97—100.

9. L i c h n e r o w i c z A. Espaces homogeneous Kählerian Coll. int. de geom. diff. Strasbourg, 1953, pp. 171—184.

10. W o l f I. A. Locally symmetric homogeneous spaces. Comm. Math. Helv., 1962, v. 37, pp 65—101.

11. W o l f I. A. Complex Homogeneous Contact Manifolds and Quaternionic Symmetric Spaces. Journ. Math. Mech., 1965, v. 14 pp. 1033—1047.

Сдано в набор 25/V 1967 г. Подписано к печати 19/VI 1967 г.
Л-42023 Формат $60 \times 90/_{16}$ Физ. печ. л. 0.5
Зак. 178 Тир. 200 экз.

Издательство Московского университета Москва, Ленинские горы
Административный корпус
Типография Изд-ва МГУ (филиал), Москва, проспект Маркса, 20