

Р. О. Оморов

**ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ,
РОБАСТНОСТЬ
И ГРУБОСТЬ
ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ**



URSS

Р. О. Оморов

**ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ,
РОБАСТНОСТЬ
И ГРУБОСТЬ
ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ**



URSS
МОСКВА

517

0-

ББК 22.161

Оморов Роман Оморович

Чувствительность, робастность и грубость динамических систем.

М.: ЛЕНАНД, 2021. — 304 с.

В монографии рассмотрены вопросы чувствительности, робастности и грубости динамических систем. Представлены результаты, полученные автором в направлении исследований и разработки методов модальной чувствительности систем управления и синтеза модально-робастных многомерных систем. Приведены положения оригинального алгебраического метода исследования робастности интервальных динамических систем как в непрерывном, так и в дискретном времени. Представлены основные положения теории и метода топологической грубости, разработанные автором, использование результатов которых показывается на примерах известных синергетических систем, таких как системы Лоренца, Рёсслера, Белоусова—Жаботинского, цепи Чуа, преобразования Хенона, «хищник—жертва», модели экономических систем Калдора и Шумпетера, динамо Рикитакэ, а также бифуркации Хопфа.

Книга предназначена для широкого круга исследователей и ученых, интересующихся вопросами чувствительности, робастности и грубости систем управления, в особенности синергетикой и хаосом систем различной физической природы, а также студентам физико-математических, естественно-научных и технических специальностей, изучающих проблемы синергетики и динамических систем.

Формат 60×90/16. Печ. л. 19. Зак. № АТ-9852.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-8187-6

(мягкий переплет)

ISBN 978-5-9710-8188-3

(твёрдый переплет)

© Р. О. Оморов, 2020

© ЛЕНАНД, 2020



664686

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельцев.

Оглавление

Введение.....	6
Глава 1. Чувствительность динамических систем	10
1.1. Методы анализа чувствительности систем.....	10
1.2. Методы синтеза малочувствительных систем	15
1.2.1. Разработки Е. Н. Розенвассера и Р. М. Юсупова.....	15
1.2.2. Разработка М. В. Меерова.....	29
1.2.3. Метод сравнительной чувствительности Перкинса—Круса	30
1.2.4. Метод Крейнлдера.....	35
1.2.5. Метод Т. Мита.....	37
Глава 2. Модальная чувствительность систем управления	41
2.1. Математические основы модальной чувствительности	41
2.2. Метод функций модальной чувствительности	54
2.3. Число обусловленности матриц.....	60
Глава 3. Параметрическая чувствительность качества процессов в системах	64
3.1. Модальные оценки качества процессов в системах.....	64
3.2. Параметрическая чувствительность модальных оценок показателей качества процессов	90
Глава 4. Синтез модально-робастных многомерных систем управления.....	100
4.1. Выбор модально-робастной модели малой потенциальной параметрической чувствительности	100
4.1.1. Полиномиальные динамические модели (ПДМ) в задаче модального управления	100
4.1.2. Числа обусловленности матриц как аппарат оценки потенциальной параметрической чувствительности ПДМ	102

4.1.3. Числа обусловленности матриц состояний полиномиальных динамических моделей	109
4.1.4. Алгоритм синтеза модально-робастного регулятора на заданные показатели качества с минимальной параметрической чувствительностью	111
4.1.5. Синтез модально-робастного регулятора, обеспечивающего малую потенциальную параметрическую чувствительность при особых случаях объекта управления	115
4.2. Метод функций модальной чувствительности для синтеза модально-робастных многомерных систем минимальной модальной параметрической чувствительности	124
4.2.1. Основные положения подхода синтеза, построенного на методе функций модальной чувствительности	124
4.2.2. Вычислительный алгоритм синтеза модально-робастных систем МПЧ. Подход метода функций модальной чувствительности	143
4.3. Подход синтеза модально-робастных систем на основе метода чисел обусловленности матриц	150
4.4. Дополнительные вопросы синтеза модально-робастных систем малой параметрической чувствительности	157
4.4.1. Достижение минимальной параметрической чувствительности полей и выхода	158
4.4.2. Достижение малой чувствительности при особых случаях объекта управления	164
Глава 5. Робастность динамических систем	166
5.1. Робастная устойчивость интервальных динамических систем по В. Л. Харитонову	167
5.2. Робастная устойчивость линейных непрерывных интервальных динамических систем	171
5.3. Вопросы робастности интервальных динамических систем	182
5.4. Робастная устойчивость линейных дискретных интервальных динамических систем	185

Глава 6. Теория грубости и бифуркаций динамических систем	197
6.1. Свойство грубости динамических систем	197
6.1.1. Грубость динамических систем в современной теории	198
6.1.2. Метод мер топологической грубости ДС	204
6.2. Некоторые понятия и определения теории динамических систем	206
6.3. Бифуркации динамических систем	212
6.3.1. Основные понятия и определения теории бифуркации динамических систем	212
6.4. Понятие «типичности» динамических систем	216
Глава 7. Хаос в динамических системах	224
7.1. Возникновение хаотических колебаний (хаоса)	224
7.2. Системы с хаотическими колебаниями	230
7.3. Критерии хаотических колебаний	235
Глава 8. Основные положения теории и метода топологической грубости динамических систем	246
8.1. Топологическая грубость динамических систем	246
8.2. Применение метода топологической грубости к исследованию бифуркаций динамических систем	254
Глава 9. Приложения теории и метода топологической грубости к исследованиям грубости, бифуркаций и хаоса синергетических систем	260
Заключение	278
Литература	282

Введение

Вопросам свойств чувствительности, робастности и грубости динамических систем в современной науке уделяется все больше внимания. Это обусловлено прежде всего тем, что становится актуальным анализ и синтез систем при возмущениях как параметрических, так и внешних сигнальных, которые обусловлены реальными условиями функционирования различных динамических систем.

Рассматриваемые свойства чувствительности, робастности и грубости систем тесно взаимосвязаны. Свойства чувствительности в общем случае противоположны свойствам робастности и грубости. В то же время робастность и грубость отличаются тем, что робастность предполагает любые конечные возмущения, тогда как грубость рассматривается при малых возмущениях, т. е. вблизи невозмущенных состояний систем.

В данной работе рассматриваются вопросы чувствительности, робастности и грубости динамических систем, которые базируются на положениях соответствующих теорий.

Как известно, впервые *проблема чувствительности* применительно к физическим системам была сформулирована Г. Боде [1952]. Иные определения чувствительности предложены в работах известных советских и зарубежных ученых Е. Н. Розенвасера, Р. М. Юсупова [1969]; Р. Томовича, М. Вукобратовича [1964]; J. Cruz, W. Perkins [1964]; П. Кокотовича [1964]. Наиболее широкий обзор по теории чувствительности с обстоятельной библиографией приведен в работе М. Eslami [1994].

Прикладное значение теории чувствительности прежде всего связано с проектированием и созданием прецизионных малочувствительных систем автоматического управления. Один из методов (подходов) для решения проблем анализа и синтеза линейных систем управления малой параметрической чувствительности в пространстве состояний с применением функций модальной чув-

ствительности был разработан в диссертации автора [1985]. Положения этого метода (подхода), в частности, приведены в совместных работах автора и А. В. Ушакова [1982; 1984].

Традиционное понимание *грубости и робастности* в современной литературе определяет робастность как способность систем сохранять те или иные свойства не единственной системы, а множества систем, определенных тем или иным способом при конечных параметрических или внешних возмущениях, а грубость как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий систем.

Интересы, которые привлекают проблемы робастности и грубости в различных областях науки и техники, да и не только в теории управления, но и в экологии, синергетике и т. д., связаны с тем, что эти проблемы относятся к важнейшим свойствам систем, рассматриваемым при их реальном функционировании. Особенно расширяет границы проблемы грубости, ее связь с проблемами бифуркаций и катастроф.

Что касается непосредственно систем управления, то в настоящее время наиболее рассмотрены и решены вопросы робастной устойчивости. Решение этих вопросов прежде всего связано с основополагающими работами В. Л. Харитонова [1978], в которых решены вопросы робастной устойчивости для интервальных полиномов.

В этих работах В. Л. Харитоновым решены вопросы об устойчивости интервальных полиномов (или семейства полиномов) вида

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n, \quad (1)$$

где $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ — коэффициенты, заданные в интервалах $\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i$, $\underline{a}_i, \bar{a}_i$ — соответственно нижние и верхние границы коэффициентов a_i .

Показано, что необходимыми и достаточными условиями робастной устойчивости всего семейства действительных и комплексных полиномов (1) является соответственно устойчивость четырех и восьми (парных) угловых полиномов. Эти угловые полиномы теперь носят название *полиномов Харитонова*.

В настоящее время получены много новых результатов в теории робастной устойчивости, это прежде всего реберная теорема и дискретные аналоги и варианты теорем Харитоновна. Советскими и российскими учеными — Я. З. Цыпкиным и Б. Т. Поляком [1991], Ю. И. Неймарком [1992] разработаны частотные критерии робастной устойчивости типа Михайлова, Найквиста, D -разбиения.

В работах автора [1995, № 1; 1995, № 3] представлены оригинальные результаты, полученные для непрерывных и дискретных линейных интервальных динамических систем, названные в целом *Алгебраическим методом робастной устойчивости*.

В современной науке все больше внимания уделяется вопросам *грубости динамических систем* и это прежде всего связано с возросшим интересом исследователей к объединяющим направлениям науки, к которым относится наука о саморазвивающихся системах и явлениях — синергетика. Также важным для науки является проблемы исследований хаотических явлений или хаоса в синергетических системах, которые также связаны с проблемой грубости таких систем.

В классической постановке вопросы *грубости и бифуркаций* динамических систем были поставлены еще на заре становления топологии как нового научного направления математики великим французским математиком и физиком А. Пуанкаре [1947], в частности, термин бифуркация впервые введен им и означает дословно «раздвоение» или иначе от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения.

Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркаций получены А. А. Андроном и его школой. В работе А. А. Андронова, Л. С. Понтрягина [1937], впервые дано понятие грубости, которое впоследствии названо понятием грубости по Андронову—Понтрягину.

В работах автора [1990; 1991; 1992; 1997 и др.] получены результаты, развивающие понятие грубости по Андронову—Понтрягину, которые позволяют количественно исследовать и решать задачи грубости и бифуркаций динамических систем, в частности, эффективно применяемые к синергетическим системам.

В рассматриваемой работе представлены результаты исследований автора по проблемам чувствительности, робастности и грубости динамических систем, в частности, применительно к системам управления и синергетическим системам различной физической природы, опубликованные во многих авторских работах основная часть которых представлены в списке литературы.

Глава 1

Чувствительность динамических систем

1.1. Методы анализа чувствительности систем

Формирование теории чувствительности как самостоятельного научного направления в автоматике и технической кибернетике относится к началу 60-х годов XX века. Прикладное значение теории чувствительности связано с проектированием и созданием высокоточных, малочувствительных систем управления.

При исследовании чувствительности систем управления применяют различные методы:

- дифференциальные;
- структурные.

Достоинствами структурных методов является то, что они позволяют для линейных систем существенно сокращать количество моделей чувствительности для задач анализа.

Основные подходы к синтезу малочувствительных систем следующие:

- 1) выбор такой структуры системы, при которой место включения объекта, являющегося наименее стабильным звеном, наиболее полно отвечает требованиям уменьшения чувствительности системы;
- 2) использование естественных или искусственно введенных в систему избыточных элементов для удовлетворения требованиям малой чувствительности;
- 3) синтез системы по критериям параметрической инвариантности или нулевой чувствительности;
- 4) введение в систему новой обратной связи — обратной связи по функциям чувствительности;
- 5) синтез оптимальных по нечувствительности систем.

Реальные значения параметров систем практически всегда отличаются от расчетных. Это может вызываться неточностью изготовления отдельных элементов, изменениями параметров в процессе хранения и эксплуатации, изменениями внешних условий и т. д.

Изменения параметров приводят к изменениям статистических и динамических свойств систем в реальных условиях их функционирования. Это обстоятельство желательно учесть заранее в процессе проектирования и настройки систем. Степень влияния изменения отдельных параметров на различные характеристики систем оценивается посредством чувствительности.

Определение 1.1. *Параметрической чувствительностью* называется некоторый показатель, характеризующий свойство системы изменять режим работы при отклонении того или иного ее параметра от номинального, или исходного значения.

В качестве оценки чувствительности используются функции чувствительности.

Определение 1.2. *Функция чувствительности* — это частная производная i -координаты системы по вариации j -параметра:

$$U_{ij} = \partial x_i / \partial \alpha_j, \quad (1.1.1)$$

или частная производная от используемого критерия качества J по j -параметру:

$$V_j = \partial J / \partial \alpha_j. \quad (1.1.2)$$

Определение 1.3. *Исходной системой* называется система, у которой все параметры равны расчетным значениям и не имеют вариаций. Этой системе соответствует *основное движение*.

Определение 1.4. *Варьированной системой* называется система, у которой произошли вариации параметров. Движение этой системы называется *варьированным движением*.

Определение 1.5. *Дополнительным движением* называется разность между варьированным и основным движением.

Пусть исходная система описывается совокупностью нелинейных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i / \partial t = F(x_1, \dots, x_n, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_m), (i = \overline{1, n}). \quad (1.1.3)$$

Рассмотрим вариации параметров $\Delta \alpha_j (j = \overline{1, m})$, так, что параметры принимают значения $\alpha_j + \Delta \alpha_j$. Если изменения параметров не вызывают изменения порядка дифференциального уравнения, то варьированное движение описывается совокупностью уравнений

$$\dot{\tilde{x}}_i / \partial t = \tilde{F}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \alpha_1 + \Delta \alpha_1, \dots, \alpha_m + \Delta \alpha_m), (i = \overline{1, n}). \quad (1.1.4)$$

Для дополнительного движения имеем

$$\Delta x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t). \quad (1.1.5)$$

При условии дифференцируемости $\tilde{x}_i(t)$ и $x_i(t)$ по параметрам $\alpha_j (j = \overline{1, m})$ дополнительное движение можно разложить в ряд Тейлора. Для малых значений вариаций параметров допустимо ограничиться линейными членами разложения. Тогда получим уравнение первого приближения для дополнительного движения

$$\Delta x_i(t, \Delta \alpha_1, \dots, \Delta \alpha_m) = \sum_{j=1}^m (x_i / \alpha_j)^0 \Delta \alpha_j = \sum_{j=1}^m U_{ij} \Delta \alpha_j. \quad (1.1.6)$$

Частные производные в скобках, должны быть равны их значениям при $\Delta \alpha_j = 0$.

Таким образом, первое приближение для дополнительного движения может быть найдено при известных функциях чувствительности. При этом использование функций чувствительности удобнее для нахождения дополнительного движения по сравнению с прямой формулой (1.1.5) поскольку последняя во многих случаях может дать большие ошибки вследствие необходимости вычитать две близкие величины.

При значительных вариациях $\Delta \alpha_j$ может оказаться необходимым использование второго приближения с удержанием в ряде Тейлора, кроме линейных, также и квадратных членов.

Дифференцирование исходных уравнений (1.1.3) по α_j приводит к уравнениям чувствительности

$$\begin{aligned} \partial(dx_i / dt) / \partial \alpha_j &= d(\partial x_i / \partial \alpha_j) / dt = dU_{ij} / dt = \\ &= \sum_{k=1}^n (\partial F_i / \partial x_k) U_{kj} + \partial F_i / \partial \alpha_j. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Решение этих уравнений дает функции чувствительности U_{ij} . Однако уравнения (1.1.7) оказываются сложными и решение их затруднительно в общем случае.

По функциям чувствительности критериев качества. Если в системе произошли вариации ряда параметров $\Delta \alpha_j (j = \overline{1, m})$, то результирующее изменение некоторой используемой оценки качества

$$\Delta J = J - \tilde{J}, \quad (1.1.8)$$

где \tilde{J} — варьированное значение оценки качества, а J — ее исходное значение, можно посчитать по формуле полного дифференциала

$$\Delta J \approx \sum_{j=1}^m V_j \Delta \alpha_j. \quad (1.1.9)$$

Поскольку в большинстве случаев известны только вероятностные оценки вариаций $\Delta \alpha_j$, то целесообразно использование вероятностных методов. Так, если известны максимальные возможные отклонения $\Delta \alpha_{j \max}$, то при их независимости друг от друга можно найти среднеквадратичный максимум отклонения оценки качества

$$\Delta J_{\max} = \left(\sum_{j=1}^m (V_j \Delta \alpha_{j \max})^2 \right)^{1/2}, \quad (1.1.10)$$

и среднеквадратичный относительный максимум

$$\Delta_{\max} = \Delta J_{\max} / J. \quad (1.1.11)$$

Если заданы дисперсии отклонений параметров $D_j = M[(\Delta \alpha_j)^2]$ и отклонения независимы, то можно найти дисперсию оценки качества

$$D_J = \sum_{j=1}^m V_j^2 D_j. \quad (1.1.12)$$

В качестве критериев оценки качества системы могут использоваться, например, максимум ошибки, коэффициенты ошибок, оценки запаса устойчивости и быстродействия, интегральные оценки и т. п.

Как известно, систему низкой чувствительности к малым отклонениям принятых предположений от действительных, Бокс назвал робастными, т. е. грубыми, крепкими, малочувствительными. Сейчас термин «робастность» приобретает более широкий смысл. Он характеризует сохранение тех или иных свойств не единственной системы, а множества систем, определенных тем или иным способом.

Необходимость обеспечения многорежимности и многофункциональности современных систем управления обуславливает тот факт, что требования, предъявляемые к функционированию систем, должны выполняться в определенном (достаточно широком) диапазоне варьирования характеристик и параметров отдельных подсистем. Иными словами, при проектировании системы должны закладываться высокий уровень ее робастности. Последнее включает в себя в первую очередь наличие робастной устойчивости и робастного качества управления в разрабатываемой системе. В наиболее общем случае может идти речь и об оптимальности управления в условиях неопределенности.

Важным классом робастных систем являются линейные интервальные динамические системы (ИДС). Процессы в линейных ИДС описываются обыкновенными линейными дифференциальными или разностными уравнениями, коэффициенты которых

представляют интервальные числа. Вопросы робастности ИДС более подробно будут рассмотрены далее в Главе 3 настоящей книги.

1.2. Методы синтеза малочувствительных систем

1.2.1. Разработки Е. Н. Розенвассера и Р. М. Юсупова

Наиболее существенные результаты из советских, российских авторов в работах по анализу и синтезу малочувствительных систем были достигнуты профессорами Е. Н. Розенвассером и Р. М. Юсуповым, которые добились выдающихся результатов в разработке дифференциальных методов анализа и синтеза малочувствительных систем.

Выбор структуры системы управления, обеспечивающей минимальную чувствительность к вариациям параметров объекта

При выборе структуры системы с учетом требований нечувствительности встает задача определения типа корректирующего устройства.

Существуют три вида коррекции:

- последовательная;
- параллельная;
- с обратной связью.

Структуры систем с возможными видами коррекции представлены на рис 1.1.

Для выбора структуры систем по требованию минимума чувствительности к вариациям параметров объекта, необходимо проанализировать функции чувствительности соответствующих структур.

Для схемы рис. 1.1а

$$S_1(p) = \frac{\partial \ln W_{oi}(p)}{\partial \ln W_{ob}(p)} = \frac{1}{1 + W_{nc}(p)W_{ob}(p)}, \quad (1.2.1)$$

для схемы рис. 1.1б

$$S_2(p) = \frac{\partial \ln W_{02}(p)}{\partial \ln W_{об}(p)} = \frac{W_{об}(p)}{[1 + W_{пр}(p) + W_{об}(p)] \cdot [W_{пр}(p) + W_{об}(p)]}, \quad (1.2.2)$$

для схемы рис. 1.1в

$$S_3(p) = \frac{\partial \ln W_{03}(p)}{\partial \ln W_{об}(p)} = \frac{1}{1 + W_{ос}(p)W_{об}(p)}. \quad (1.2.3)$$

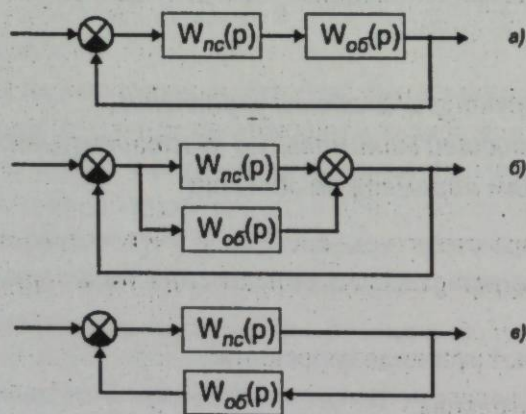


Рис. 1.1

Приводя вторую и третью структуры к структуре с последовательной коррекцией, имеем:

- для схемы рис. 1.1б

$$W_{пр}(p) = W_{об}(p)[W_{nc}(p) - 1]$$

и

$$S_2(p) = \frac{S_1(p)}{W_{nc}(p)}, \quad (1.2.4)$$

- для схемы рис. 1.1в

$$W_{ос}(p) = \frac{1 + W_{nc}(p)[W_{об}(p) - 1]}{W_{об}(p)W_{nc}(p)}$$

и

$$S_3(p) = S_1(p)W_{nc}(p). \quad (1.2.5)$$

Таким образом, для выбора той или иной структуры системы, удовлетворяющей требованиям минимальной чувствительности необходимо сравнить выражения (1.2.1), (1.2.4) и (1.2.5) с учетом конкретных свойств передаточной функции $W_0(p)$, в частности полосы пропускания, и функций $S_1(p)$ и $W_{nc}(p)$.

С позиции чувствительности хорошими качествами обладают системы с отрицательными обратными связями, поэтому необходимо стремиться объект управления в структуре системы располагать вместе с наибольшим количеством охватываемых обратных связей.

Использование избыточности при синтезе систем с учетом требований малой чувствительности

Ставится задача синтеза системы, удовлетворяющей передаточной функции $W_0(p)$ и желаемой функции чувствительности $S_0(p)$. Пусть в качестве базовой структуры выбрана структура схем рис. 1.1а. Тогда, задача сводится к выбору передаточной функции корректирующего устройства $W_k(p)$, удовлетворяющего условиям:

$$\begin{cases} W_0(p) = \frac{W_{об}(p)W_k(p)}{1 + W_{об}(p)W_k(p)} \\ S_0(p) = \frac{1}{1 + W_{об}(p)W_k(p)} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

664686



Для корректности поставленной задачи структура системы должна иметь избыточность. Это достигается путем введения в структуру дополнительных независимых корректирующих устройств, т. е. устройств несводимых путем структурных преобразований друг к другу. Таковыми являются структуры на рис. 1.2.

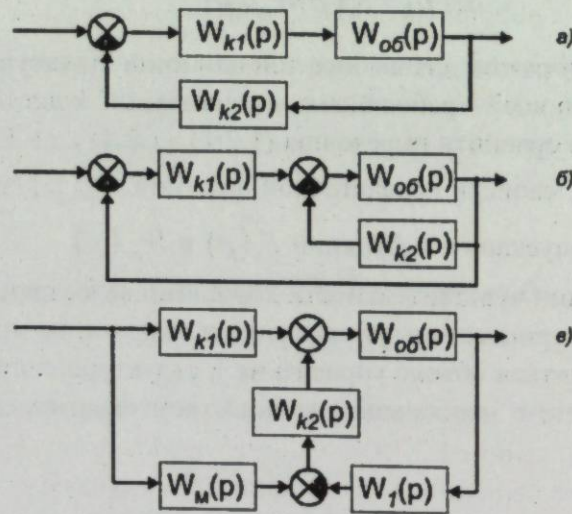


Рис. 1.2

Синтез систем по критериям параметрической инвариантности или нулевой чувствительности

Условием параметрической инвариантности называется тождественное равенство нулю дополнительного движения системы. Дополнительное движение можно определить $\Delta x = S \cdot \Delta \alpha$.

Тогда условие параметрической инвариантности сводится к условию равенства нулю функции чувствительности $S \equiv 0$, и это условие называется условием нулевой чувствительности.

Рассмотрим более подробно условия нулевой чувствительности систем автоматического управления к вариациям параметров.

Пусть система описывается уравнением с непрерывными правыми и левыми частями и с начальными условиями, не зависящими от варьируемых параметров.

$$\dot{x} = F(x, t, \alpha), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.2.7)$$

Уравнение чувствительности

$$\dot{S} = \frac{\partial F}{\partial x} S + \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \quad S(t_0) = 0. \quad (1.2.8)$$

При выполнении условий нулевой чувствительности $S(t) \equiv 0$.

Правильное решение линейного неоднородного уравнения (1.2.8) с нулевыми начальными условиями будет достигаться только при выполнении условия:

$$\frac{\partial F(x, t, \alpha)}{\partial \alpha} \equiv 0. \quad (1.2.9)$$

Для линейных систем это условие принимает вид:

$$\frac{\partial A(t)}{\partial \alpha} x(t) \equiv 0. \quad (1.2.10)$$

Из выражения (1.2.10) видно, что условие нулевой чувствительности выполняется в следующих трех случаях:

1) при $x(t) \equiv 0$. В решении стабилизации это означает выполнение условий абсолютной инвариантности к внешним воздействиям или начальным условиям. Таким образом, необходимым и достаточным условием независимости основного движения от вариаций параметров системы является выполнение условий обычной инвариантности;

2) при $\frac{\partial A}{\partial \alpha} \equiv 0$, т. е. при независимости элементов матрицы системы от параметров α . Этот случай характерен для специфических систем, уравнения которых не зависят от всех или от части параметров объекта. В качестве примера могут служить системы с переменной структурой и беспонсковые самонастраивающиеся системы с моделью. Системы с переменной структурой обладают параметрической инвариантностью в *скользящем режиме*. Самонастраивающиеся системы с моделью обладают двукратной инвариантностью;

3) при $\frac{\partial A}{\partial \alpha} \neq 0$; $x(t) \equiv 0$ и выполнении условия (1.2.10).

В данном случае рассматриваются условия нулевой чувствительности отдельных координат системы.

Пусть дана система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Du + R(t); \\ u = Qx, x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2.11)$$

где x — вектор состояния $x \in R^n$; R — вектор входа системы; u — вектор управления; A , D , Q — матрицы.

Далее можно записать

$$\dot{x} = (A + DQ)x + R, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.2.12)$$

Уравнение чувствительности для (1.2.12)

$$\dot{S} = (A + DQ)S + \frac{\partial A}{\partial \alpha} x, \quad S(t_0) = 0. \quad (1.2.13)$$

В операторной форме уравнение (1.2.13)

$$(Ep - B)S = Gx, \quad (1.2.14)$$

где $B = A + DQ$; $G = \frac{\partial A}{\partial \alpha}$; E — единичная матрица размерности $n \times n$.

Для составляющих вектора S получаем

$$S_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.15)$$

где $\Delta = |Ep - B|$;

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} p - b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1,k-1}q_1 - b_{1,k+1} & \dots & \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & p - b_{22} & \dots & -b_{2,k-1}q_2 - b_{2,k+1} & \dots & \dots & -b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \dots & -b_{n,k-1}q_n - b_{n,k+1} & \dots & \dots & p - b_{nn} \end{vmatrix}$$

Здесь b_{si} — элементы матрицы B , q_i — элементы вектора Gx . Отсюда условие нулевой чувствительности координаты x_j принимает вид:

$$\Delta_j = 0. \quad (1.2.16)$$

Обычно параметром α является один из элементов матрицы A . Пусть это будет a_{sj} . Тогда все составляющие вектора Gx , кроме s -й, будут нулевыми, а s -я будет равна x_j .

При этом имеем условие нулевой чувствительности:

$$B_{sj}x_j = 0. \quad (1.2.17)$$

где B_{sj} — алгебраическое дополнение к элементу δ_{sj} матрицы $(Ep - B)$.

Равенство (1.2.17) имеет место

$$\text{при } B_{sj} = 0, \quad (1.2.18)$$

$$\text{при } x_j = 0. \quad (1.2.19)$$

Известно, что соотношение (1.2.18) удовлетворяется при достижении инвариантности координаты $x_j(t)$ относительно возмущающего воздействия $r_s(t)$.

Соотношение (1.2.19) выражает требование выполнения условия независимости переменной x_j от всех возмущающих воздействий. Последнее условие является более жестким, т. к. требует выполнения равенств:

$$B_{sj} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Введение в систему обратной связи по функциям чувствительности

Для уменьшения чувствительности систем к вариациям параметров может быть применена обратная связь по функциям чувствительности. В этом случае образуется два контура. Назна-

чение первого контура — обеспечивать требуемые динамические свойства при номинальных расчетных характеристиках объекта и регулятора.

Назначение второго контура — уменьшать дополнительное движение, возникающее вследствие неконтролируемых изменений параметров объекта и регулятора.

В случае, когда дополнительная обратная связь осуществляется по функциям чувствительности первого порядка, то косвенно за счет «регулирования» этих функций чувствительности уменьшается линейная часть дополнительного движения:

$$\Delta x(t) = \sum_{i=1}^m S_i(t) \Delta \alpha_i.$$

Более полного ограничения дополнительного движения можно добиться, используя обратную связь по функциям чувствительности более высоких порядков.

Блок-схема системы автоматического управления с двумя обратными связями приведена на рис. 1.3, а структурная схема на рис. 1.4.

Синтез систем с обратными связями по функциям чувствительности сводится к выбору вида и параметров корректирующих устройств двух контуров.

Выявим условия выбора корректирующих устройств.

Передаточная функция исходной системы (основного контура) по выходному сигналу x относительно управляющего сигнала имеет вид:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_{oc}(p)W_1(p)}. \quad (1.2.20)$$

С учетом контура чувствительности получаем передаточную функцию

$$W^*(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)[W_{oc}(p) + W_k(p)W_m(p)]}. \quad (1.2.21)$$

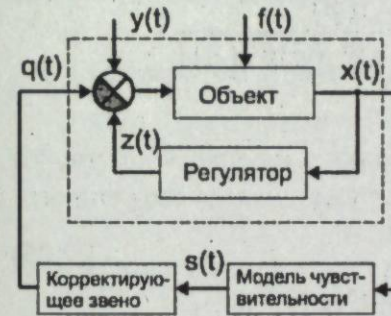


Рис. 1.3

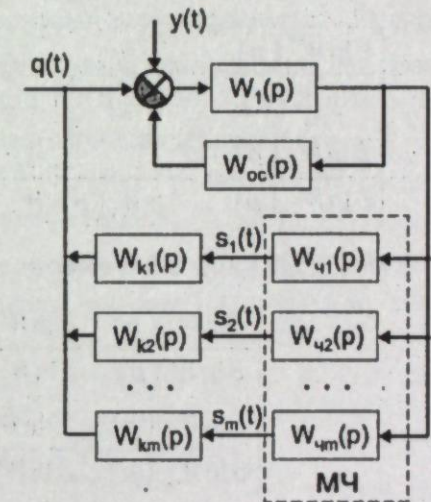


Рис. 1.4

Составим выражения для логарифмических функций чувствительности.

Имеем

$$\frac{\partial \ln W(p)}{\partial \ln \alpha} = \frac{\partial \ln W(p) \partial \ln W_1(p)}{\partial \ln W_1(p) \partial \ln \alpha} + \frac{\partial \ln W(p) \partial \ln W_{oc}(p)}{\partial \ln W_{oc}(p) \partial \ln \alpha}. \quad (1.2.22)$$

Сомножители

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln W(p)}{\partial \ln W_1(p)} = \frac{1}{1 + W_{oc}(p)W_1(p)}; \\ \frac{\partial \ln W(p)}{\partial \ln W_{oc}(p)} = \frac{W_1(p)W_{oc}(p)}{1 + W_{oc}(p)W_1(p)}. \end{cases} \quad (1.2.23)$$

При предположении, что характеристики модели чувствительности при изменении параметров основного контура сохраняются неизменными (что обычно и имеет место в действительности), получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln W^*(p)}{\partial \ln W_1(p)} = \frac{1}{1+W_1(p)[W_{oc}(p)+W_m(p)W_k(p)]}; \\ \frac{\partial \ln W^*(p)}{\partial \ln W_{oc}(p)} = -\frac{W_1(p)W_{oc}(p)}{1+W_1(p)[W_{oc}(p)+W_m(p)W_k(p)]}. \end{cases} \quad (1.2.24)$$

Из (1.2.23) и (1.2.24) имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln W^*(p)}{\partial \ln W_1(p)} = \frac{\partial \ln W(p)}{\partial \ln W_1(p)} C(p); \\ \frac{\partial \ln W^*(p)}{\partial \ln W_{oc}(p)} = \frac{\partial \ln W(p)}{\partial \ln W_{oc}(p)} C(p). \end{cases} \quad (1.2.25)$$

где

$$C(p) = \frac{1+W_{oc}(p)W_1(p)}{1+W_1(p)[W_{oc}(p)+W_k(p)W_m(p)]}. \quad (1.2.26)$$

Таким образом, изменение чувствительности системы определяется функцией $C(p)$.

Из всех передаточных функций, входящих в правую часть выражения (1.2.26), выделим коэффициенты усиления:

$$W_1(p) = K_1 \bar{W}_1(p); \quad W_{oc}(p) = K_{oc} \bar{W}_{oc}(p);$$

$$W_k(p) = K_k \bar{W}_k(p); \quad W_m(p) = K_m \bar{W}_m(p).$$

Тогда, в установившемся состоянии, т. е. при $p = 0$, имеем

$$C(0) = \frac{1+K_1 K_{oc}}{1+K_1 K_{oc} + K_1 K_k K_m}.$$

Отсюда видно, что в установившемся режиме чувствительность системы явно уменьшается за счет увеличения коэффициента усиления разомкнутой системы при введении дополнительной обратной связи по функциям чувствительности.

Стремление чрезмерно увеличивать коэффициент усиления $K_k K_m$ может ухудшить устойчивость системы.

Дополнительные свойства системы могут задаваться передаточной функцией $W_0(p)$, а требования к уменьшению чувствительности допустимыми функциями чувствительности $\frac{\partial \ln W_0(p)}{\partial \ln W_i(p)}$

или желаемой функцией $C(p)$, определяемой (1.2.26).

Таким образом, для выбора корректирующих устройств многоконтурной системы, изображенной на рис. 1.4, получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} W_0(p) = \frac{W_1(p)}{1+W_{oc}(p)W_1(p)+W_1(p)\sum_{i=1}^m W_{ki}(p)W_i(p)}; \\ S_{oi}(p) = \frac{\partial \ln W_0(p)}{\partial \ln W_i(p)}; \quad i=1,2,\dots,m. \end{cases} \quad (1.2.27)$$

Неизвестными здесь являются

$$W_{oc}(p), W_{k1}(p), \dots, W_{km}(p).$$

Для их нахождения имеем $(m+1)$ уравнений (1.2.27).

Синтез оптимальных по нечувствительности систем автоматического управления

Задача синтеза оптимальной системы формируется следующим образом. Необходимо найти управление $u(t)$ из области допустимых управлений Ω_u в виде:

$$u(t) = u(t, \alpha), \quad (1.2.28)$$

такое, чтобы минимизировался функционал качества системы

$$I = I(x, u, T, \alpha) \quad (1.2.29)$$

при условии, что векторы $u(t)$ и $x(t)$ удовлетворяют ограничениям

$$\dot{x} = F(x, u, \alpha, t) \quad (1.2.30)$$

и

$$\Phi_k(x, u, t) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (1.2.31)$$

Здесь u — вектор управления; Φ_k — скалярные функции; T — фиксированный момент времени.

При учете требований нечувствительности качество работы системы оценивается также с помощью второго функционала — функционала грубости J .

При этом можно сформулировать ряд возможных постановок задач синтеза оптимального управления.

Задача 1.

$$\begin{cases} \min_u I(x, u, T); \\ J(x, u, T) \leq J_0; \\ \Phi_k(x, u, t) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \end{cases} \quad (1.2.32)$$

Задача 2.

$$\begin{cases} \min_u [\beta_1 I(x, u, t) + \beta_2 J(x, u, T)]; \\ \Phi_k(x, u, t) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \end{cases} \quad (1.2.33)$$

Задача 3.

$$\begin{cases} \min_u J(x, u, T); \\ I(x, u, T) \leq I_0; \\ \Phi_k(x, u, t) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \end{cases} \quad (1.2.34)$$

В приведенных соотношениях величины I_0 , J_0 , β_1 , β_2 являются заданными постоянными числами.

Задача 4.

$$\begin{cases} \min_u I(x + \Delta x, u, T); \\ \Phi_k(x + \Delta x, u, t) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \end{cases} \quad (1.2.35)$$

Сформированные выше задачи сводимы одна к другой. Таким образом, задачи синтеза оптимальных грубых систем можно свести к задаче синтеза оптимальной системы, сформулированной в начале параграфа.

Задача формируется для расширенного фазового пространства размерности $(m+1)n$, где m — число варьируемых параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Фазовые координаты при этом определяются в результате интегрирования уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, u, t, \alpha); \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{S}_i = \frac{\partial F}{\partial x} S_i + \frac{\partial F}{\partial \alpha_i}; \quad S_i(t_0) = S_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (1.2.36)$$

Введем в рассмотрение $(m+1)n$ -мерный вектор, такой, что

$$z^T = [x^T; \dots; S_m^T].$$

При этом систему (1.2.36) можно записать:

$$\dot{z} = F(z, u, \alpha, t); \quad z(t_0) = z_0. \quad (1.2.37)$$

Предположим, что линейризуемый функционал в задаче 3 можно преобразовать к виду:

$$Q = Q(z, u, T). \quad (1.2.38)$$

Тогда может быть поставлена следующая задача синтеза.

Необходимо найти управление $u(t) \in \Omega_u$, такое, чтобы линейризовался функционал (1.2.38) при условии, что векторы $u(t)$ и $z(t)$ удовлетворяют ограничениям (1.2.37) и (1.2.31).

Можно рассмотреть, например, квадратичные функционалы

$$I = \int_0^T (x^T D_0 x + u^T C u) dt$$

и

$$J = \int_0^T \sum_{k=1}^m S_k^T D_k S_k dt,$$

где D_k , D_0 , C — положительно определенные симметричные матрицы.

Очевидно, можно образовать новый функционал

$$Q = \int_0^T (z^T D z + u^T C u) dt, \quad (1.2.39)$$

где D — диагональная матрица размерности $(m+1)n \times (m+1)n$;

$$D = \begin{bmatrix} D_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_m \end{bmatrix}.$$

Выражение (1.2.39) может использоваться как минимизируемый функционал в задаче синтеза в расширенном фазовом пространстве, где функции чувствительности играют роль обычных фазовых координат.

При этом оптимизируемая система усложняется за счет учета моделей чувствительности. Необходимым условием оптимизации системы во всем фазовом пространстве является ее *полная управляемость*. Для линейной стационарной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

записанной совместно с уравнениями чувствительности в виде:

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u,$$

$$\text{где } z^T = [x^T : (S_1^{(1)})^T : (S_2^{(1)})^T : \dots : (S_m^{(k)})^T],$$

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} & A & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial A}{\partial \alpha_m} & 0 & \dots & A & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_1^2} & 2 \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} & \dots & 0 & A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^k A}{\partial \alpha_1^k} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & A \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}^T = \left[B^T : \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_1} \right)^T : \dots : \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_m} \right)^T : \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \alpha_1^2} \right)^T : \dots : \left(\frac{\partial^k B}{\partial \alpha_1^k} \right)^T \right].$$

Условием полной управляемости является требование того, что ранг матрицы управляемости

$$P = [\tilde{B} : \tilde{A}\tilde{B} : \tilde{A}^2\tilde{B} : \dots : \tilde{A}^{N-1}\tilde{B}],$$

где $N = n(1 + mk)$ был не меньше N .

Таким образом, задачу синтеза грубой оптимальной системы можно свести к задаче синтеза обычной оптимальной системы.

1.2.2. Разработка М. В. Меерова

Результаты, полученные проф. М. В. Мееровым, относятся к структурным методам достижения минимальной чувствительности, т. е. ставится задача: найти класс структур и законы его построения, для которого изменение некоторых параметров оказывало бы минимальное влияние на его динамические свойства.

Из проведенных исследований было показано, что нечувствительность динамических свойств системы к изменениям ее

параметров может быть достигнута выбором структуры, принадлежащей к классу устойчивых при неограниченно большом коэффициенте усиления, в соответствующих контурах.

Такие структуры с бесконечно большими коэффициентами усиления, удовлетворяющие условиям устойчивости, могут быть реализованы на обычных электрических, механических, гидравлических и пневматических элементах.

Для полного использования свойств структур необходимо реализовать большие коэффициенты усиления K_y . Практически не вызывает затруднений реализовать структуры с $K_y = 100 + 1000$.

Но могут встретиться случаи, когда K_y должны быть практически бесконечно большими.

В таких случаях могут быть использованы релейные системы в скользящем режиме или так называемые системы с переменной структурой. Для того чтобы такие системы могли физически реализованы, необходимо и достаточно, чтобы их структура принадлежала к классу устойчивых при неограниченно большом K_y систем, и чтобы выполнялись условия устойчивости.

В качестве одного из методов достижения неограниченного большого K_y может быть использован метод введения местных положительных обратных связей.

Результаты использования скользящего режима, а также систем с переменной структурой (опять же в скользящем режиме) для достижения минимальной чувствительности исследованы в работах Б. Н. Петрова, С. В. Емельянова и других.

1.2.3. Метод сравнительной чувствительности Перкинса—Круса

Метод сравнительной чувствительности Перкинса—Круса основан на сравнении дополнительных движений, вызванных вариациями параметров двух систем: номинально эквивалентных разомкнутой и замкнутой.

Рассмотрим данный метод на примере линейной инвариантной во времени многомерной системы.

Пусть дана замкнутая система, приведенная на рис. 1.5.

Здесь $P(s, \alpha)$ — передаточные функции объекта; $G_c(s)$ — передаточные функции регулятора; $H_c(s)$ — передаточные функции наблюдателя; s — комплексная переменная преобразования Лапласа; α — параметры объекта; индекс c — индекс замкнутой системы (c — closed).

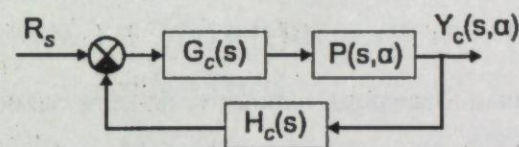


Рис. 1.5

Номинально эквивалентная (вход которой тождественно равен выходу замкнутой системы при номинальном значении параметра $\alpha = \alpha_0$ и при том же выходе) разомкнутая система приведена на рис. 1.6.

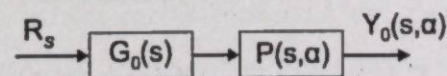


Рис. 1.6

Здесь индекс o — индекс разомкнутой системы (o — open).

Перкинс и Крус установили, что ошибки выхода разомкнутой и замкнутой систем, вызванные вариациями параметров, связаны соотношением

$$E_c(s, \alpha) = S E_o(s, \alpha), \quad (1.2.40)$$

где $E_c(s, \alpha) = Y_c(s, \alpha) - Y_c(s, \alpha_0)$, $E_o(s, \alpha) = Y_o(s, \alpha) - Y_o(s, \alpha_0)$, $E_c(s, \alpha)$, $E_o(s, \alpha)$ — ошибки, внесенные изменениями параметров $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ в замкнутой и разомкнутой системах; S — матрица чувствительности, которая дается выражением

$$S = [I + P(s, \alpha)G(s)H(s)]^{-1}. \quad (1.2.41)$$

Рассматриваются малые вариации параметров

$$\Delta\alpha = d\alpha.$$

В этом случае E_o и E_c также малы. Тогда в первом приближении можно записать

$$E_c(s, \alpha) = [I + P(s, \alpha_0)G(s)H(s)]^{-1} E_o(s, \alpha). \quad (1.2.42)$$

Следовательно, матрица чувствительности зависит от номинального объекта.

Эффект изменения качества системы оценивается функционалом чувствительности

$$J = \int_0^{\infty} e_c^T(t, \alpha) Q e_c(t, \alpha) dt, \quad (1.2.43)$$

где $e_c(t, \alpha)$ — оригинал, соответствующий Лапласову образу $E_c(s, \alpha)$; Q — положительно полуопределенная матрица или

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} E_o^T(-s, \alpha) S^T(-s) Q S(s) E_o(s, \alpha) ds. \quad (1.2.44)$$

Таким образом, функционал чувствительности J может рассматриваться как функционал матрицы чувствительности S , который должен быть минимизирован соответствующим выбором S .

Но, если S найдена, то G и H могут быть найдены из (1.2.41) и условия неизменяемости передаточной функции системы:

$$T = T_n = T(s, \alpha_0) = [I + P(s, \alpha_0)G(s)H(s)]^{-1} P(s, \alpha_0)G(s). \quad (1.2.45)$$

Имеем следующие уравнения относительно G и H :

$$PG = S^{-1}T, \quad (1.2.46)$$

$$TH = I - S. \quad (1.2.47)$$

В случае если (1.2.46) и (1.2.47) имеют неединственное решение для G и H , то мы имеем дополнительную свободу выбора компенсирующих цепей. Уравнения (1.2.46) и (1.2.47) также позволяют легко ввести условия физической реализуемости G и H в S . Однако свободным для выбора является только полином числителя S . Это видно из рассмотрения выражений (1.2.42) и (1.2.46), которые показывают, что знаменатель матрицы S тот же самый, что и знаменатель передаточной функции (матрицы) системы T_n , а именно

$$\det[I + PGH].$$

Таким образом, проблема минимальной чувствительности представляет одну из задач параметрической оптимизации, в которой параметрами являются коэффициенты полиномов числителей матрицы S , а оптимизируемый функционал есть функционал чувствительности (1.2.44).

Если изменения параметров объекта представляются $d\alpha \in \alpha$ и если коэффициенты полиномов числителей матрицы S представляются векторами β , где $\beta \in B$, тогда функционал чувствительности J может рассматриваться как функция $J(\beta, d\alpha)$ изменения параметров объекта и коэффициентов полиномов числителей матрицы чувствительности. Следовательно, оптимизация (1.2.43), предложенная здесь, может быть определена как

$$J = \min_{\beta \in B} \left\{ \max_{d\alpha \in \alpha} [J(\beta, d\alpha)] \right\}. \quad (1.2.48)$$

Для одномерного случая системы (один вход — один выход) матрица чувствительности (1.2.41) становится известной передаточной функцией чувствительности Боде. Если объект содержит только один параметр α , то проблема сводится к проблеме Mazera. В этом случае проблема значительно упрощается. Оптимальные параметры β не зависят от $(d\alpha)$, и минимум J по β может быть найден без максимизации по $d\alpha$.

Более сложная ситуация возникает при нескольких переменных параметрах объекта. В этом случае основным ключом к

решению этой проблемы является формула (1.2.40). Формула (1.2.40) описывает некую динамическую систему, у которой S (матрица чувствительности) — есть передаточная матрица; E_0 — вход системы; $E_c(s, \alpha)$ (ошибка замкнутой системы) — выход системы.

В заключение данного параграфа приведем некоторые результаты, полученные Перкинсом и Крусом по синтезу замкнутых систем менее чувствительных, чем соответствующие номинально эквивалентные разомкнутые системы.

Вводится понятие траекторной чувствительности (чувствительности выхода)

$$\sigma(t) = \frac{\Delta y(t)}{\Delta \alpha} \quad (1.2.49)$$

Если обозначить Лапласов образ $\sigma(t)$ через $\Sigma(s)$, то имеет место равенство

$$\Sigma_c(s) = S(s)\Sigma_o(s), \quad (1.2.50)$$

где $S(s)$ — матрица сравнительной чувствительности. Полагается, что эквивалентная замкнутая система имеет меньшую чувствительность, чем разомкнутая, если для введенных специально норм выполняется неравенство:

$$\|\sigma_c(t)\| < \|\sigma_o(t)\|. \quad (1.2.51)$$

Например, в качестве такого критерия можно принять:

$$\int_0^1 \sigma_c^T(t) Z \sigma_c(t) dt < \int_0^1 \sigma_o^T(t) Z \sigma_o(t) dt, \quad (1.2.52)$$

где Z — положительно определенная (или полуопределенная) матрица. Достаточным условием выполнения неравенства (1.2.52) является то, что для всех ω

$$S^T(-j\omega) Z S(j\omega) \leq Z \quad (1.2.53)$$

или

$$[I + P(-j\omega)H_c(j\omega)G_c(j\omega)]^T Z [I + P(j\omega)H_c(j\omega)G_c(j\omega)] \leq Z. \quad (1.2.54)$$

1.2.4. Метод Крейнндлера

Метод Крейнндлера касается уменьшения чувствительности замкнутых оптимальных систем и основана на развитии метода сравнительной чувствительности Перкинса—Круса на оптимальные системы.

Рассмотрим полностью управляемый объект управления (ОУ)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (1.2.55)$$

который оптимизируется относительно функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (1.2.56)$$

где Q, R — симметричные матрицы, представимые в виде

$$Q = L^T L, \quad (1.2.57)$$

$$R = M^T M, \quad (1.2.58)$$

где M — не особая матрица.

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$, причем $\Phi(0) = I$.

Пусть $\bar{\Phi}(t)$ — резольвента системы (Лапласов образ $\Phi(t)$):

$$\bar{\Phi}(s) = [sI - A]^{-1}. \quad (1.2.59)$$

Предположим, что имеет место

$$L\Phi(t)BZ \equiv 0, \quad \text{для всех } t \text{ только если } z \equiv 0. \quad (1.2.60)$$

Это предположение означает, что для всех t $L\Phi(t)x_0 \equiv 0$, только если $x_0 \equiv 0$, а также, что столбцы матрицы B — линейно независимы.

Известно, что оптимальное управление задается в виде

$$u = -Kx, \quad (1.2.61)$$

где $K = R^{-1}B^T P$,

P — симметричная положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного уравнения Риккати

$$PBR^{-1}B^T P - PA - A^T P = Q. \quad (1.2.62)$$

Положим, что матрица A и B в (1.2.55) зависят от скалярного параметра α и пусть

$$\lambda(t) \frac{\partial x}{\partial \alpha}.$$

Для оптимальных систем справедлива следующая теорема, доказанная Е. Крейнндлером.

Теорема. Если система (1.2.55) с законом управления (1.2.61), удовлетворяющая (1.2.60), оптимальна относительно функционала (1.2.56), тогда для всех $t' > 0$ выполняется

$$\int_0^{t'} \lambda_c^T(t) K^T R K \lambda_c(t) dt < \int_0^{t'} \lambda_o^T(t) K^T R K \lambda_o(t) dt, \quad (1.2.63)$$

где $\lambda_o(t)$ и $\lambda_c(t)$ — чувствительности по состоянию соответственно номинально эквивалентных разомкнутой и замкнутой оптимальной системы по сравнению с номинально эквивалентной разомкнутой системой.

Очевидно, было бы желательно иметь критерий, позволяющий сравнивать отдельные компоненты векторов $\lambda_c(t)$ и $\lambda_o(t)$. Но это возможно только в специальных случаях.

Например, если система с одномерным входом задана в базе фазовых координат

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -a_1 & -a_2 \dots -a_n \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; u = -K^T x. \quad (1.2.64)$$

Тогда для каждой составляющей вектора $\lambda(t)$, $\lambda'(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), выполняется соотношение

$$\lambda_o'(s) = (1 + K^T \bar{\Phi}(s) B) \lambda_c'(s), \quad (1.2.65)$$

и если при этом система (1.2.55) с управлением (1.2.61) оптимальна в смысле (1.2.56), то для всех $t' > 0$ выполняется

$$\int_0^{t'} [\lambda_c'(t)]^2 dt < \int_0^{t'} [\lambda_o'(t)]^2 dt. \quad (1.2.66)$$

1.2.5. Метод Т. Мита

Метод Т. Мита (Т. Мита) касается синтеза систем с нулевой чувствительностью.

Рассматривается линейный стационарный объект управления, описываемый уравнениями:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu, \quad (1.2.67a)$$

$$y = Cx, \quad (1.2.67b)$$

где x , u , y — состояние, вход и выход ОУ соответствующих размерностей; A , B , C — матрицы соответствующих размерностей; ΔA — вариация матрицы A , вызванная вариацией неизвестных параметров.

При этом предполагается, что пара (A, B) — управляема. Управление в виде обратной связи (ОС) задается в форме

$$u = Kx + g, \quad (1.2.68)$$

где K — матрица ОС, g — внешний вход.

Подставляя (1.2.68) в (1.2.67), получаем

$$\dot{x} = (A + \Delta A + BK)x + Bg; \quad (1.2.69a)$$

$$y = Cx \quad (1.2.69b)$$

и передаточная матрица системы будет

$$y(s) = C(sI - A - \Delta A - BK)^{-1} Bg(s). \quad (1.2.70)$$

Поставлена задача:

Определить матрицу ОС K такую, что

$$C(sI - A - \Delta A - BK)^{-1} B \equiv C(sI - A - BK)^{-1} B \quad (1.2.71)$$

удовлетворяется для всех s , т. е. передаточная матрица должна обладать нулевой чувствительностью относительно ΔA .

При этом система (1.2.67) называется системой с нулевой чувствительностью.

Предполагается, что ΔA можно представить в виде:

$$\Delta A = pqh, \quad (1.2.72)$$

где p , q и h — соответственно скалярный неизвестный параметр, вектор-столбец и вектор-строка мерности n .

Строка h и столбец q — постоянные.

Это предположение делается исключительно для простоты изложения.

Тогда как доказано — необходимым и достаточным условием выполнения (1.2.71) является:

$$C(sI - A - BK)^{-1} B \equiv 0. \quad (1.2.73)$$

Т. Мита вывел и доказал три условия относительно K , удовлетворяющего (1.2.73).

Прежде чем дать формулировки этих условий, примем следующие обозначения:

$$M(s) = C \operatorname{adj}(sI - A) B, \quad (1.2.74)$$

$$N(s) = C \operatorname{adj}(sI - A) q,$$

где $\operatorname{adj}(sI - A)$ — дополнения матрицы $(sI - A)$ и m — порядок $M(s)$, N — порядок $N(s)$, если $N(s) \neq 0$.

Тогда условие существования K , удовлетворяющего (1.2.73), формулируется:

Существует K , которая удовлетворяет (1.2.73), если и только если $N(s) \equiv 0$ или $N < m$.

Примечание 1. Если $N(s) \equiv 0$, то система (1.2.1) обладает нулевой чувствительностью и существует $K=0$ в качестве одного из решений.

Примечание 2. Если $M(s)$ и $N(s)$ не имеют общего делителя, то (C, A) — наблюдаема. Когда $M(s)$ и $N(s)$ имеют общие делители, то (C, A) — наблюдаема, только если они не являются делителями $\det(sI - A)$, в противном случае пара (C, A) — ненаблюдаемая.

Пусть $z_c(s)$ — наибольший общий делитель $M(s)$ и $N(s)$, а m_c порядок $z_c(s)$. Тогда второе условие для K дается следующей теоремой:

Теорема. Если условие теоремы о существовании K удовлетворяется, то K удовлетворяет (1.2.73), если и только если

$$\det(sI - A - BK) \equiv \left[\frac{M(s)}{z_c(s)} \right] P(s) \operatorname{const}, \quad (1.2.75)$$

где $P(s)$ — произвольный полином порядка $(n - m + m_c)$, а постоянная (const) выбирается так, что (1.2.75) становится (monic) полиномиальным.

Примечание 3. K в (1.2.75) может быть легко определено хорошо известным шифтинг-методом.

Условие устойчивости дается следующей теоремой:

Теорема. Система с нулевой чувствительностью асимптотически устойчива, если и только если все нули

$$\left[\text{Cadj}(sI - A - pqh)B / z_c(s) \right] = 0, \quad (1.2.76)$$

расположены в левой полуплоскости.

Примечание 4. Если (1.2.69) представляет собой систему с нулевой чувствительностью, то (1.2.70) принимает вид

$$y(s) = \frac{z_c(s)}{P(s)} \cdot \frac{[\text{Cadj}(sI - A - pqh)B / z_c(s)]}{[\text{Cadj}(sI - A - pqh)B / z_c(s)]} g(s) = \frac{z_c(s)}{P(s)} g(s) \quad (1.2.77)$$

для всех p , и передаточная функция вход—выход $(g(s) - y(s))$ может быть задана назначением $P(s)$.

Однако устойчивость зависит, очевидно, от диапазона изменения параметра p .

В заключение отметим, что полученные выше условия могут быть использованы с небольшой модификацией для случая, когда система (1.2.1) имеет

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{\sigma} p_i q_i h_i, \quad (1.2.78)$$

или система (1.2.67) заменяется системой вида

$$\dot{x} = Ax + (B + pq)u; \quad y = Cx, \quad (1.2.79)$$

где p и p_i — неизвестные изменяющиеся параметры.

Глава 2

Модальная чувствительность систем управления

2.1. Математические основы модальной чувствительности

Модальное управление представляет собой эффективный метод синтеза систем с заданными показателями качества. Одной из разработок этого метода является его модельная постановка, которая сформулирована как задача обеспечения подобия с точностью до линейного преобразования некоторой динамической системе (чаще той же, что и ОУ размерности), обладающей желаемым спектром (множеством) мод (собственных значений, полюсов).

Указанная эталонная динамическая система, которая в дальнейшем называется модальной моделью (ММ), задается в виде полностью наблюдаемой пары матриц (Γ, H) , удовлетворяющих матричному уравнению Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH, \quad (2.1.1)$$

а матрица линейной стационарной обратной связи K , определяющая закон управления вида

$$U = -Kx, \quad (2.1.2)$$

ищется как

$$K = HM^{-1}. \quad (2.1.3)$$

Здесь в (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) $x \in R^n$, $u \in R^r$ — соответственно вектора состояния и управления ОУ, Γ — $n \times n$ — матрица состояния ММ, определяющая желаемый спектр мод системы, M — $n \times n$ — матрица преобразования базисов подобных мат-

риц G и F . H — $r \times n$ — произвольная матрица, образующая с G наблюдаемую пару (G, H) .

Докажем теорему применительно к уравнению Сильвестра (2.1.1), которая является базовым для рассматриваемого метода анализа и синтеза систем малой (минимальной модальной) параметрической чувствительности.

Теорема 2.1. Для того, чтобы уравнение Сильвестра

$$MG - AM = -BH,$$

имело единственное невырожденное решение M , необходимо и достаточно выполнения условий:

а) спектры мод матриц A и G не пересекаются

$$\sigma\{A\} \cap \sigma\{G\} = \emptyset;$$

б) пара (A, B) — управляема;

в) пара (G, H) — наблюдаема;

г) матрица BH — невырожденная.

Доказательство.

Заметим, что, а) является необходимым и достаточным условием существования единственного решения уравнения Сильвестра (2.1.1). Далее будем полагать, что условие, а) удовлетворяется. Докажем, что условия б) и в) являются необходимыми условиями невырожденности M .

Рассмотрим последовательно возможные случаи задания матрицы G и A .

1. Случай диагональной формы задания матриц G и A . Рассмотрим условие б). Пусть $G = \text{diag}\{\lambda_i\}$, $i = \overline{1, n}$, A — произвольна.

Представим уравнение (2.1.1) в виде

$$M[G_1; G_2; \dots; G_n] - A[M_1; M_2; \dots; M_n] = B[H_1; H_2; \dots; H_n].$$

Отсюда для столбца матрицы M имеем

$$(\lambda_i I - A)M_i = -BH_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1.4)$$

где H_i — i -й столбец матрицы H , I — единичная матрица n -го порядка.

Из (2.1.4) нетрудно видеть очевидность условия а) теоремы, так как, если $\sigma\{G\} \cap \sigma\{A\} = \emptyset$, то существует обратная матрица $(\lambda_i I - A)^{-1}$, а значит, и единственное решение уравнения (2.1.1).

Пусть условие, а) удовлетворяется. Тогда будем иметь

$$M_i = -(\lambda_i I - A)^{-1} BH_i. \quad (2.1.5)$$

Применяя алгоритм Лекверье для матриц типа $(\lambda I - A)^{-1}$, получаем

$$M = -\frac{1}{\det(\lambda I - A)} \cdot \sum_{j=1}^n \lambda_j^{j-1} \cdot R_j \cdot BH_j. \quad (2.1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0, \\ \alpha_n &= 1, \quad R_n = I, \\ R_{n-k} &= \alpha_{n-k} I + AR_{n-k+1}, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$$\alpha_{n-k} = -\frac{1}{k} \cdot \text{tr}(AR_{n-k+1}),$$

$$R_0 = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

tr — след матрицы (\bullet) .

Раскроем выражения (2.1.6) и (2.1.7), для чего рассмотрим равенство

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(\lambda I - A)} \cdot \{R_n \lambda^{n-1} + R_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + R_1\}. \quad (2.1.8)$$

Из (2.1.8), умножая обе части на $(\lambda_1 I - A)$, получим

$$I \det(\lambda_1 I - A) = (\lambda_1 I - A)(R_n \lambda_1^{n-1} + R_{n-1} \lambda_1^{n-2} + \dots + R_1). \quad (2.1.9)$$

Далее, раскрывая правую часть (2.1.9) и приравнявая матричные коэффициенты при одинаковых степенях λ_1 , будем иметь

$$\begin{aligned} R_n &= I, \\ R_{n-1} &= A + I\alpha_{n-1}, \\ R_{n-2} &= A^2 + A\alpha_{n-1} + I\alpha_{n-2}, \\ &\dots \\ R_1 &= A^{n-1} + A^{n-2}\alpha_{n-1} + \dots + I\alpha_1. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Если теперь подставить (2.1.10) в (2.1.8), то получим

$$(\lambda_1 I - A)^{-1} = [\bar{d}_{n-1}(\lambda_1)I + \bar{d}_{n-2}(\lambda_1)A + \dots + \bar{d}_0(\lambda_1)A^{n-1}], \quad (2.1.11)$$

где

$$\bar{d}_k(\lambda_1) \stackrel{\Delta}{=} d_k(\lambda_1) / d_n(\lambda_1),$$

$$d_k(\lambda_1) = \lambda_1^k + \alpha_{n-1}\lambda_1^{k-1} + \dots + \alpha_{n-k}, \quad k = \overline{0, n},$$

$(\cdot)/(\cdot)$ — знак операции деления (далее в работе эквивалентно $\frac{(\cdot)}{(\cdot)}$). Отсюда

$$M_i = -[B; AB; \dots; A^{n-1}B][\bar{d}_{n-1}(\lambda_1)H_i; \bar{d}_{n-2}(\lambda_1)H_i; \dots; \bar{d}_0(\lambda_1)H_i]^T, \quad (2.1.12)$$

где $(\cdot)^T$ — знак транспонирования.

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_i &= \\ &= -[B; AB; \dots; A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \bar{d}_{n-1}(\lambda_1)H_i & \bar{d}_{n-1}(\lambda_2)H_i & \dots & \bar{d}_{n-1}(\lambda_n)H_i \\ \bar{d}_{n-2}(\lambda_1)H_i & \bar{d}_{n-2}(\lambda_2)H_i & \dots & \bar{d}_{n-2}(\lambda_n)H_i \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bar{d}_0(\lambda_1)H_i & \bar{d}_0(\lambda_2)H_i & \dots & \bar{d}_0(\lambda_n)H_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Из (2.1.13) следует, что если матрица M невырожденная, то ранг матрицы $[B; AB; \dots; A^{n-1}B]$ равен n , которая, как известно, означает полную управляемость рассматриваемой системы, то есть управляемость пары (A, B) .

Итак, необходимость условия б) при $\Gamma = \text{diag}\{\lambda_i\}$ доказана.

Аналогично можно доказать необходимость условия в) при $A = \text{diag}\{\mu_i\}$, μ_i — моды матрицы A .

Действительно, перейдя к сопряженному уравнению Сильвестра будем иметь

$$M^T A^T - \Gamma^T M^T = H^T B^T. \quad (2.1.14)$$

Как уже доказано для данного уравнения (отличается только знаком в правой части уравнения), мы можем утверждать, что необходимым условием невырожденности M^T (а значит, и M) является управляемость пары (Γ^T, H^T) , которая совпадает с условием наблюдаемости пары (Γ, H) , так как

$$[H^T; \Gamma^T H^T; \dots; (\Gamma^T)^{n-1} H^T] = \begin{bmatrix} H \\ H\Gamma \\ \vdots \\ H\Gamma^{n-1} \end{bmatrix}^T.$$

Докажем необходимость условия в) (наблюдаемости пары (Γ, H)) для случая $\Gamma = \text{diag}\{\lambda_i\}$, A — произвольна. Рассмотрим матрицу наблюдаемости пары (Γ, H)

$$Q_H = \begin{bmatrix} H \\ H\Gamma \\ \vdots \\ H\Gamma^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \dots & H_n \\ \lambda_1 H_1 & \lambda_2 H_2 & \dots & \lambda_n H_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} H_1 & \lambda_2^{n-1} H_2 & \dots & \lambda_n^{n-1} H_n \end{bmatrix}. \quad (2.1.15)$$

Предположим, что пара (Γ, H) наблюдаема, то есть пусть существует какой-либо столбец Q_{Hj} матрицы наблюдаемости Q_H , который является линейной комбинацией некоторых других столбцов

$$Q_{Hj} = \sum_{j \neq i} C_j Q_{Hj}, \quad (2.1.16)$$

где C_j — числовые коэффициенты. Тогда, очевидно, для любого $m = \overline{1, n}$ справедливо соотношение

$$\lambda_i^m H_i = \sum_{j \neq i} C_j \lambda_j^m H_j, \quad (2.1.17)$$

откуда следует

$$H_i = \sum_{j \neq i} C_j H_j, \quad (2.1.18)$$

$$\lambda_i = \lambda_j, \quad j \neq i, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.1.19)$$

Учитывая (2.1.16) и (2.1.19), из (2.1.6), (2.1.12) имеем

$$M_i = \sum_{j \neq i} C_j M_j, \quad (2.1.20)$$

то есть матрица M при ненаблюдаемом (Γ, H) является вырожденной.

Докажем теперь при не диагоналируемой матрице Γ .

2. Пусть матрица Γ задана в жордановой форме

$$\Gamma = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix}, \quad (2.1.21)$$

где J_i — i -я жорданова клетка.

Не теряя общности выводов, рассмотрим первую жорданову клетку матрицы Γ , полагая

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Тогда аналогично (2.1.4) для первого столбца матрицы M будем иметь

$$(\lambda_1 I - A)M_1 = -BH_1,$$

или

$$M_1 = -\frac{1}{\det(\lambda_1 I - A)} \sum_{j=1}^n \lambda_1^{j-1} \cdot R_j BH_1.$$

Далее для второго и третьего столбцов матрицы M имеем

$$M_2 = -(\lambda_1 I - A)^{-1}(BH_2 + M_1),$$

$$M_3 = -(\lambda_1 I - A)^{-1}(BH_3 + M_2).$$

В этом случае матрица наблюдаемости пары (Γ, H) будет

$$Q_H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & \dots \\ \lambda_1 H_1 & H_1 + \lambda_1 H_2 & H_2 + \lambda_1 H_3 & \dots \\ \lambda_1^2 H_1 & 2\lambda_1 H_1 + \lambda_1^2 H_2 & H_1 + 2\lambda_1 H_2 + \lambda_1^2 H_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} H_1 & (n-1)\lambda_1^{n-2} H_1 + \lambda_1^{n-1} H_2 & \frac{(n-1)(n-2)}{2} \lambda_1^{n-3} H_1 + (n-1)\lambda_1^{n-2} H_2 + \lambda_1^{n-1} H_3 & \dots \end{bmatrix}. \quad (2.1.22)$$

Пусть имеет место соотношение (2.1.16) (а как следствие справедливо и (2.1.18)).

Для определенности примем следующие допущения:

1. в соотношении (2.1.16) $i=3$;
2. правая часть (2.1.16) есть линейная комбинация l -го и f -го столбцов (2.1.22) ($l, f=1, 2, \dots, n$);
3. эти два столбца в п. 2 соответствуют k -й и s -й модам матрицы Γ ;
4. столбец k -й моды по п. 3 соответствует второму столбцу жордановой клетки третьего порядка

$$J_k^{(3)} \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix};$$

5. столбец s -й моды по п. 3 соответствует третьему столбцу жордановой клетки четвертого порядка

$$J_s = \begin{bmatrix} \lambda_s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_s \end{bmatrix}.$$

Таким образом, по вышеперечисленным допущениям для m -й строки (2.1.22) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{(m-1)(m-2)}{2} \cdot \lambda_1^{m-3} H_1 + (m-1) \lambda_1^{m-2} H_2 + \lambda_1^{m-1} H_3 = \\ & = C_l \left[(m-1) \lambda_k^{m-2} H_{l-1} + \lambda_k^{m-1} H_l \right] + \\ & + C_r \left[\frac{(m-1)(m-2)}{2} \cdot \lambda_s^{m-3} H_{f-2} + (m-1) \lambda_s^{m-2} H_{f-1} + \lambda_s^{m-1} H_f \right], \\ & m = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Для первой строки будем иметь

$$H_3 = C_l H_l + C_f H_f, \quad C_l \neq 0, \quad C_f = 0. \quad (2.1.24)$$

Подставляя (2.1.24) в (2.1.23), получим

$$\begin{aligned} & \frac{(m-1)(m-2)}{2} \cdot \lambda_1^{m-3} H_1 + (m-1) \lambda_1^{m-2} H_2 + \\ & + C_l \left[\lambda_1^{m-1} - \lambda_k^{m-1} \right] H_l + C_f \left[\lambda_1^{m-1} - \lambda_f^{m-1} \right] H_f - \\ & - C_l (m-1) \cdot \lambda_k^{m-2} H_{l-1} - C_f \frac{(m-1)(m-2)}{2} \cdot \lambda_s^{m-3} H_{f-2} - \\ & - C_f (m-1) \cdot \lambda_s^{m-2} H_{f-1} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Нетрудно видеть, что система (2.1.25) (при $m = \overline{1, n}$) имеет единственное тривиальное (нулевое) решение, так как ранг системы (однородной) равна числу неизвестных.

Итак, мы имеем

$$H_1 = H_2 = H_{l-1} = H_{f-2} = H_{f-1} = 0.$$

Следовательно,

$$M_1 = M_2 = M_{l-1} = M_{f-2} = M_{f-1} = 0.$$

Таким образом, в этом случае из не наблюдаемости пары (Γ, H) имеет место вырожденность матрицы M . Исключим такой случай из рассмотрения. Тогда будем иметь, что соотношение (2.1.16) справедливо только для столбцов (2.1.22), соответствующих некратным модам матрицы Γ , то есть в принятых выше допущениях по п. 4, п. 5 l -му и f -му столбцам (2.1.22) соответствуют жордановы клетки

$$J_k^{(1)} \triangleq [\lambda_k], \quad J_s^{(1)} \triangleq [\lambda_s].$$

Система (2.1.25) в этом случае запишется

$$C_l \left[\lambda_1^{m-1} - \lambda_k^{m-1} \right] H_l + C_f \left[\lambda_1^{m-1} - \lambda_f^{m-1} \right] H_f = 0, \quad m = \overline{1, n}, \quad (2.1.26)$$

откуда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_f.$$

Для соответствующих столбцов матрицы M имеем

$$M_3 = -(\lambda_1 I - A)^{-1} B H_3,$$

$$M_1 = -(\lambda_2 I - A)^{-1} B H_1,$$

$$M_f = -(\lambda_f I - A)^{-1} B H_f$$

или

$$M_3 = C_1 M_1 + C_f M_f. \quad (2.1.27)$$

Таким образом, мы доказали для случаев, когда матрица G задана в диагональной и жордановой формах следующее:

Утверждение 2.1. Если пара (G, H) ненаблюдаемая, то матрица M в уравнении Сильвестра вырождена.

Аналогичным образом, рассматривая жорданову форму матрицы A и строчное представление матриц M и B , можно доказать:

Утверждение 2.2. Если пара (A, B) неуправляема, то матрица M в уравнении Сильвестра вырождена.

При этом для случая утверждения 2.2 соотношения (2.1.18) и (2.1.19) примут вид

$$B^i = \sum_{j \neq i} C_j B^j, \quad (2.1.28)$$

$$\mu_i = \mu_j, \quad (2.1.29)$$

где B^i, B^j — соответственно i и j -е строки матрицы B ; μ_i, μ_j — i, j -е моды матрицы A .

Заметим, что утверждение 2.2 легко доказать путем рассмотрения (сопряженного) уравнения Сильвестра (2.1.14). Здесь дока-

зательство совпадает с доказательством утверждения 2.1, а именно, доказывается необходимость наблюдаемости пары (A^T, B^T) , что совпадает с условием необходимости управляемости пары (A, B) , поскольку

$$[B; AB; \dots; A^{n-1}B]^T = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^{n-1})^T \end{bmatrix}.$$

3. Случай G и A — произвольные $(n \times n)$ -матрицы.

Покажем, что и в этом случае условие в) теоремы 2.1 является необходимым.

Как известно, любая матрица может быть представлена преобразованием подобия в жорданову нормальную форму.

Пусть $G = T \bar{T} T^{-1}$, где \bar{T} — жорданова форма матрицы G ; T — матрица преобразования.

Тогда уравнение Сильвестра принимает вид

$$M T \cdot \bar{T} \cdot T^{-1} - A M = -B H.$$

Помножая справа на T , получим

$$M \bar{T} - A M T = -B H T,$$

обозначая

$$M T = \bar{M}, \quad H T = \bar{H},$$

имеем

$$\bar{M} \bar{T} - A \bar{M} = -B \bar{H}. \quad (2.1.30)$$

Для полученного уравнения (2.1.30) доказано, что если \bar{M} — невырожденная, то пара (G, H) наблюдаема. Но условия невырожденности \bar{M} и M полностью совпадают, поскольку матрица T невырожденная.

Необходимость условия б) в этом случае доказывается переходом к сопряженному уравнению (2.1.30) аналогично (2.1.14). Итак, условия *необходимости* б), в) теоремы 2.1 доказаны.

Докажем теперь условия *достаточности*. Покажем, что условия б) и в) не всегда достаточно для существования M^{-1} .

Действительно. Пусть матрица Γ задана в диагональном виде $\Gamma = \text{diag}\{\lambda_i\}$. Далее пусть BH — вырождена, то есть пусть, например, для определенности $BH_i = \beta \cdot BH_i$, $i = \overline{2, n}$, H_i — i -й столбец матрицы H , β — некоторое отличное от нуля действительное число.

Представим матрицу M (2.1.13) в виде

$$M = -[I; A; \dots; A^{n-1}] \begin{bmatrix} \bar{d}_{n-1}(\lambda_1)BH_1 & \bar{d}_{n-1}(\lambda_2)BH_2 & \dots & \bar{d}_{n-1}(\lambda_n)BH_n \\ \bar{d}_{n-2}(\lambda_1)BH_1 & \bar{d}_{n-2}(\lambda_2)BH_2 & \dots & \bar{d}_{n-2}(\lambda_n)BH_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{d}_0(\lambda_1)BH_1 & \bar{d}_0(\lambda_2)BH_2 & \dots & \bar{d}_0(\lambda_n)BH_n \end{bmatrix}. \quad (2.1.31)$$

Из (2.1.31) очевидно, что если $\lambda_i = \lambda_j$, то правая матрица в (2.1.31) имеет ранг меньше, чем n , что означает вырожденность матрицы M .

Таким образом, в том случае, когда имеются кратные моды матрицы Γ , достаточным (и необходимым) условием невырожденности M является выполнение условий а), б), в) и г) теоремы 2.1.

В то же время из (2.1.31) следует, что условие г) в общем случае не является необходимым условием невырожденности M , например, при $\Gamma = \text{diag}\{\lambda_i\}$ и некратных модах.

Доказательство достаточности в случае жордановой и произвольной формы матриц Γ и A может быть проведено аналогично доказательству условий *необходимости*.

Из доказательства теоремы 2.1 нетрудно заметить, что в случае прямоугольной матрицы M размерности $l \times k$ данная теорема также верна в смысле существования псевдообратной матрицы ранга, равного меньшему из чисел l и k или иначе, матрица M полного ранга.

Доказанная теорема 2.1 позволяет решить задачу синтеза, то есть методом модального управления синтезировать системы с заданным (желаемым) спектром мод в номинальном режиме, а также малой параметрической чувствительности.

Покажем это. Положим $H = KM$, то есть $K = HM^{-1}$. Тогда уравнение (2.1.1) примет вид

$$M\Gamma = (A - BK)M. \quad (2.1.32)$$

Если теперь положить матрицу замкнутой системы $F = F(\bar{g}) = A - BK$, то получим $F = M\Gamma M^{-1}$ или, что является условием подобия матриц F и Γ , а следовательно, спектры матриц F и Γ совпадают

$$\sigma\{F\} = \sigma\{\Gamma\}. \quad (2.1.33)$$

Задавая желаемый спектр мод системы (матрицы F), назначением матрицы Γ можем при удовлетворении условий теоремы 2.1 найти такую матрицу обратной связи $K = HM^{-1}$, что закон управления $u = -Kx$ доставляет желаемую структуру мод системе. Из той же теоремы 2.1 видно, что матрица H может быть выбрана в (2.1.2) любой, с ограничением только на наблюдаемость пары (Γ, H) .

Для одномерных систем ($r=1$) матрица $K = HM$ при заданных Γ , A , B — единственна. Для многомерных же систем ($r \geq 2$) матрица $K = HM^{-1}$ в общем случае неединственна.

Вышесказанные утверждения относительно уравнения (2.1.32) позволяют, на основе доказанной теоремы 2.1, провести синтез многомерных систем малой чувствительности, варьируя матрицу обратной связи K , доставляющую заданный спектр мод системе. При этом матрица K ищется в виде

$$K = HM^{-1},$$

где H — матрица, варьируемая в уравнении Сильвестра (2.1.1); M^{-1} — матрица, обратная матрице M , решения уравнения (2.1.1).

2.2. Метод функций модальной чувствительности

Для исследования параметрической чувствительности систем управления был разработан метод функций модальной чувствительности (МФМЧ). В первоначальной постановке данный метод был разработан для исследования параметрической чувствительности мод (собственных значений) матрицы замкнутой системы F (2.1.2) в задаче модального управления. Но применение МФМЧ не ограничивается этим случаем, а может найти самое широкое применение при исследовании чувствительности с использованием модальных оценок тех или иных показателей качества процессов.

Рассмотрим основные положения МФМЧ в постановке исследования параметрической чувствительности мод в задаче модального управления.

Пусть задан объект управления (2.1.1)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0), \quad y = Cx, \quad (2.2.1)$$

для которого про синтезирован закон управления $u = -Kx$, такой, что спроектированная замкнутая система (2.1.2)

$$\dot{x} = Fx, \quad x(0), \quad y = Cx \quad (2.2.2)$$

имеет желаемую структуру мод (собственных значений F).

Пусть далее в спроектированной системе имеются варьируемые (изменяющиеся) параметры, заданные вектором $q = [q_1; q_2; \dots; q_p]^T$ с номинальным значением $\bar{q} = [\bar{q}_1; \bar{q}_2; \dots; \bar{q}_p]^T$. Определим чувствительность мод спроектированной системы к вариациям ее параметров. Допустим, что система (2.2.2) спроектирована методом модального управления в модельной постановке в виде наблюдаемой пары матриц (Γ, H) . Как ранее отмечалось, в такой постановке матрица обратных связей K находится на основе решения уравнения Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH, \quad K = HM^{-1}, \quad (2.2.3)$$

где Γ — матрица состояния модальной модели; M — матрица преобразования базисов Γ и F ; H — произвольно задаваемая матрица, образующая с Γ полностью наблюдаемую пару (Γ, H) .

Будем считать, что уравнения (2.2.3) заданы в номинальном режиме $q = \bar{q}$, то есть

$$A(q)|_{q=\bar{q}} = A, \quad B(q)|_{q=\bar{q}} = B, \quad K(q)|_{q=\bar{q}} = K \quad \text{и т. д.}$$

В номинальном режиме имеет место соотношение

$$M\Gamma = FM, \quad (2.2.4)$$

которое при вариациях параметров (в возмущенном режиме) принимает вид

$$M(q)\Gamma(q) = F(q)M(q), \quad (2.2.5)$$

где $F(q) = A(q) - B(q)K(q)$.

Положим, что матрицы Γ и $\Gamma(q)$ имеют диагональную форму

$$\Gamma = \text{diag}\{\lambda_i\}, \quad \Gamma(q) = \text{diag}\{\lambda_i(q)\}, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\lambda_i, \lambda_i(q)$ — соответственно — i -я мода матрицы F в номинальном и возмущенном режиме.

Тогда, представляя матрицы $\Gamma(q)$ и $M(q)$ в строчном виде, соотношение (2.2.5) можно записать

$$\begin{aligned} [M_1(q); M_2(q); \dots; M_n(q)] [\Gamma_1(q); \Gamma_2(q); \dots; \Gamma_n(q)] = \\ = F(q) [M_1(q); M_2(q); \dots; M_n(q)]. \end{aligned}$$

Отсюда для i -х столбцов имеет место соотношение

$$M_i(q)\lambda_i(q) = F(q)M_i(q). \quad (2.2.6)$$

¹⁾ Далее, не нарушая общности выводов, будем рассматривать чувствительность к вариациям одного параметра q (скалярного), отмечая, где необходимо, векторность параметра q .

Дифференцируя (2.2.6) по q в точке $q = \bar{q}$, имеем

$$M_{iq} \lambda_i + M_i \lambda_{iq} = F_q M_i + F M_{iq}, \quad (2.2.7)$$

где $\lambda_{iq} = \frac{\Delta}{\Delta q} \lambda_i(q) / \partial q$ — чувствительность i -й моды к изменениям q в точке $q = \bar{q}$.

$$M_i = M_i(\bar{q}), \quad F = F(\bar{q}),$$

$$M_{iq} = \left. \frac{\Delta}{\Delta q} \frac{\partial M_i(q)}{\partial q} \right|_{q=\bar{q}}, \quad F_q = \left. \frac{\Delta}{\Delta q} \frac{\partial F(q)}{\partial q} \right|_{q=\bar{q}} \quad 1).$$

Умножим обе части равенства (2.2.7) слева на матрицу-строку \tilde{M}_i такую, что $\tilde{M}_i \cdot M_i = 1$, то есть \tilde{M}_i — i -я строка матрицы $\tilde{M} = M^{-1}$.

Тогда находим

$$\lambda_{iq} = \tilde{M}_i [F_q M_i + (F - \lambda_i I_n) M_{iq}], \quad (2.2.8)$$

где I_n — единичная матрица размерности $(n \times n)$.

Упростим выражение (2.2.8), для чего рассмотрим соотношение (2.2.4) в форме $\Gamma M^{-1} = M^{-1} F$.

Для i -х строк будем иметь

$$\lambda_i \tilde{M}_i = \tilde{M}_i F. \quad (2.2.9)$$

Подставляя (2.2.9) в (2.2.8), получим

$$\lambda_{iq} = \tilde{M}_i F_q M_i. \quad (2.2.10)$$

¹⁾ Далее значения величин, векторов и матриц для номинального значения $q = \bar{q}$ будем обозначать $(\cdot)_{|q=\bar{q}} \triangleq (\cdot)$, а первые производные по q в точке

$q = \bar{q}$ обозначим $\left. \frac{\partial (\cdot)}{\partial q} \right|_{q=\bar{q}} \triangleq (\cdot)_q$.

Матрицу F_q можем определить, дифференцируя равенство по параметру q в точке $q = \bar{q}$. $F(q) = A(q) - B(q)K(q)$. Имеем

$$F_q = A_q - B_q K - B K_q. \quad (2.2.11)$$

Легко заметить, что λ_{iq} в (2.2.11) есть i -й диагональный элемент матрицы

$$\Gamma_q = M^{-1} F_q M. \quad (2.2.12)$$

Полученные соотношения (2.2.10), (2.2.12) позволяют провести не только анализ чувствительности мод системы (2.2.2), но и синтезировать систему минимальной модальной параметрической чувствительности, используя аппарат модального управления.

Результаты (2.2.10) и (2.2.12) получены применительно к диагонализированным матрицам F . Но в случае наличия кратных мод, как нетрудно видеть из (2.2.8), возникает неопределенность в вычислении λ_{iq} для этих мод, обусловленная неопределенностью M_{iq} . Поэтому, строго говоря, (2.2.10) и (2.2.12) применимы для исследования чувствительности мод различных F . Однако можно предложить подход к разрешению этой неопределенности, а именно, для кратных мод рассматривать номинальную точку λ_i , возмущенную на достаточно малую величину Δq^* и считать

$$\lambda_{iq}(\bar{q}) = \lambda_{iq}(\bar{q} + \Delta q^*), \quad \Delta q^* \ll \Delta q. \quad (2.2.13)$$

При незначительном возмущении матрицы F , как известно, кратные собственные значения расходятся. Хотя для кратных мод диагонализированных матриц F и существует неопределенность в определении λ_{iq} , но их суммарная чувствительность равна сумме соответствующих диагональных элементов матрицы Γ_q , то есть

$$\sum_i \lambda_{iq} = \sum_i \tilde{M}_i F_q M_i. \quad (2.2.14)$$

Заметим, что матрица Γ_q (2.2.12) позволяет определять и чувствительности собственных векторов при различных модах F .

В случае не диагонализируемой матрицы F можно показать, что чувствительности мод, соответствующих недиагональным жордановым клеткам матрицы F , не определены при общем виде $F(q)$, точнее, стремятся к бесконечности при $\Delta q \rightarrow 0$. Этот вывод согласуется с выводом, сделанным при рассмотрении теории возмущений, где показано, что для мод жордановых клеток чувствительность стремится к бесконечности при $\Delta q \rightarrow 0$, но если рассматривать чувствительность в точке вблизи номинала, то чем больше порядок жордановой клетки, тем больше чувствительность соответствующей моды.

Заметим, что в случае не диагонализируемой матрицы F для простых мод также чувствительности не определены, то есть $\lambda_{iq} \neq M_i F_q M_i$, что обусловлено неопределенностью M_{iq} в выражении (2.2.8).

Выше сделанные выводы, полученные на основе равенства первого приближения (2.2.7), а также дополнительные исследования автора на конкретных примерах, показали, что случай не диагонализируемых матриц замкнутых систем управления является бифуркационным относительно изменения мод и нежелателен в смысле достижения малой чувствительности. Более того, для достижения малой параметрической чувствительности необходимо по возможности выбирать такие номиналы параметров систем, чтобы моды были достаточно удалены друг от друга.

Поэтому, далее рассматривается случай только диагонализируемых матриц.

Таким образом, для случая диагонализируемых матриц имеем следующий алгоритм исследования модальной чувствительности систем вида (2.2.2).

1. При заданных матрицах $A(\bar{q})$, $B(\bar{q})$ и известной модальной модели (G, H) , заданной в диагональном базисе (виде), решаем относительно M матричное уравнение Сильвестра

$$MG - AM = -BH.$$

2. Определяем M^{-1} .

3. Находим $F_{qj} = A_{qj} - B_{qj}K - BK_{qj}$ по каждому варьируемому параметру q_j , $j = 1, 2, \dots, p$.

4. Определяем по каждому параметру q_j диагональные (и только) элементы матрицы

$$\Gamma_{qj} = M^{-1}F_{qj}M.$$

5. Строим матрицу модальной чувствительности, как

$$S_\lambda = [\lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{np} \end{bmatrix},$$

где λ_{ij} — функция (от \bar{q}) модальной чувствительности i -й моды по j -му варьируемому параметру.

6. Определяем модальную чувствительность системы, как какую-либо норму матрицы S_λ , например, как евклидову норму $\|S_\lambda\|_E$.

В случае, если заданы (известны) доминирующий (существенный) параметр q_d , или доминирующая мода λ^d , находим чувствительность мод по q_d или λ^d по всем параметрам, как евклидовы нормы векторов, соответственно

$$\lambda_{q_d} = [\lambda_{1d}; \lambda_{2d}; \dots; \lambda_{nd}]^T \text{ и } \lambda_q^d = [\lambda_1^d; \lambda_2^d; \dots; \lambda_p^d]^T,$$

$$\|\lambda_{q_d}\|_E = (\sum \lambda_{id}^2)^{1/2},$$

$$\|\lambda_q^d\|_E = (\sum (\lambda_j^d)^2)^{1/2}.$$

Примечания

1. В случае комплексно-сопряженных мод $\alpha_i \pm j\beta_i$ необходимо задать матрицу Γ в вещественном виде

$$G = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_i & -\beta_i & & \\ & & \beta_i & \alpha_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.2.15)$$

При этом чувствительность вещественных и мнимых частей комплексно-сопряженных мод определяется равенствами

$$\alpha_{iq} = \frac{1}{2}(\Gamma_{i,j} + \Gamma_{i+1,j+1}), \quad (2.2.16)$$

$$\beta_{iq} = \frac{1}{2}(\Gamma_{i+1,j} - \Gamma_{i,j+1}), \quad (2.2.17)$$

где $\Gamma_{i,j}$, $\Gamma_{i+1,j+1}$, $\Gamma_{i+1,j}$, $\Gamma_{i,j+1}$ — элементы матрицы Γ_q в (2.2.12).

2. При наличии кратных мод, для определения их чувствительности использовать (2.2.13).

3. Для произвольной системы пункт 1 данного алгоритма будет заключаться в определении матрицы преобразования M , приводящего матрицу системы F к диагональному виду.

В заключение настоящего раздела необходимо отметить, что для исследования чувствительности мод (собственных значений) систем применяются и другие способы. Но положительной особенностью метода исследования, рассмотренного выше является однотипность алгоритмического обеспечения задач как анализа, так и синтеза систем с требованием минимальной модальной чувствительности, основанное на использовании уравнения Сильвестра в задаче модального управления.

2.3. Число обусловленности матриц

Использование чисел обусловленности матриц, как эффективного аппарата исследований первоначально было связано с реше-

нием некоторых задач линейной алгебры. В частности, было показано, что ошибка решения системы алгебраических уравнений

$$Gv = w, \quad (2.3.1)$$

где $v, w \in R^n$, G — $(n \times n)$ -матрица, при вариациях элементов (параметров) матрицы G или вектора w определяется числом обусловленности матрицы G .

Действительно. Рассмотрим систему, полученную изменением правой части (2.3.1) на величину Δw :

$$G(v + \Delta v) = w + \Delta w. \quad (2.3.2)$$

Если считать Δw — неточностью выполнения (знания, задания) w , то Δv — суть соответствующая ошибка в оценке вектора. В приращениях (2.3.1) принимает вид:

$$G\Delta v = \Delta w. \quad (2.3.3)$$

Рассмотрим векторные нормы $\|\cdot\|$ — какого-либо типа, нетрудно видеть, что

$$\|w\| \leq M\|v\| \text{ и } \|\Delta w\| \geq m\|\Delta v\|, \quad (2.3.4)$$

где

$$M = \max_v \frac{\|Gv\|}{\|v\|}; \quad m = \min_v \frac{\|Gv\|}{\|v\|},$$

и, следовательно,

$$\frac{\|\Delta v\|}{\|v\|} \leq \text{cond}(G) \frac{\|\Delta w\|}{\|w\|}, \quad (2.3.5)$$

где $\text{cond}(G)$ — число обусловленности матрицы G .

Таким образом, число обусловленности $\text{cond}(G)$ представляет собой оценку «коэффициента усиления» относительной ошибки. Изменение правой части уравнения (2.3.1) на Δw может вызвать за собой изменение решения (2.3.1) большие в $\text{cond}(G)$ раз.

Заметим, что аналогичное соотношение справедливо и для случая изменения самой матрицы G . При возмущении матрицы G на ΔG имеем

$$\frac{\|\Delta v\|}{\|v + \Delta v\|} \leq \text{cond}(G) \frac{\|\Delta G\|}{\|G\|}. \quad (2.3.6)$$

Итак, число обусловленности может быть использовано в качестве оценки чувствительности задачи (2.3.1) к вариациям параметров как правой части, так и матрицы G .

Число обусловленности $\text{cond}(G)$ является количественной мерой близости матрицы G к вырожденности и определяется соотношением:

$$\text{cond}(G) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\max_v \|\sigma_v\| / \|v\|}{\min_v \|\sigma_v\| / \|v\|}, \quad (2.3.7)$$

а вычисляется по выражению

$$\text{cond}(G) = \|G\| \cdot \|G^{-1}\|, \quad (2.3.8)$$

и обозначается $\text{cond}(G)$ или $c\{G\}$. Далее будем обозначать $c\{G\}$. Итак,

$$c\{G\} \stackrel{\Delta}{=} \|\sigma\| \cdot \|\sigma^{-1}\|. \quad (2.3.9)$$

При этом в качестве нормы матрицы $\sigma(\sigma^{-1})$ могут быть выбраны любые матричные нормы. Для удобства вычислений будем рассматривать матричную норму

$$\|\sigma\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |g_{ij}|, \quad (2.3.10)$$

где g_{ij} — элементы матрицы G .

Из выражения (2.3.7) легко заметить, что в случае симметрической матрицы G , число обусловленности можно вычислить по формуле

$$c\{G\} = \frac{|\lambda_{\max}(G)|}{|\lambda_{\min}(G)|}. \quad (2.3.11)$$

Используя (2.3.9), нетрудно обнаружить важные свойства числа обусловленности:

1. $c\{G\} \geq 1$;
2. $c\{\alpha G\} = c\{G\}$, где α — скаляр;
3. $c\{G\} = c\{\sigma^{-1}\}$;
4. $c\{\sigma\} = c\{G^T\}$ для спектральных и евклидовых норм.

Свойство 3 позволяет рассматривать чувствительность задачи (2.3.1) в эквивалентной форме

$$v = G^{-1}w = Qw. \quad (2.3.13)$$

То есть задачи $w = \sigma v$ и $v = Qw$ одинаково обусловлены.

Глава 3

Параметрическая чувствительность качества процессов в системах

3.1. Модальные оценки качества процессов в системах

Для определения модальных оценок показателей качества исследуются экстремальные свойства соответствующих специально вводимых пучков квадратичных форм, характеризующих эллипсоидные покрытия процессов в одномерных и многомерных системах.

Модальные оценки времени переходных процессов

Рассматривается линейный объект управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0), \quad y(t) = Cx(t), \quad (3.1.1)$$

для которого синтезирован закон управления (для удобства записей в дальнейшем по возможности обозначения функций от времени будем опускать) такой, что замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = Fx, \quad x(0), \quad y = Cx, \quad (3.1.2)$$

где $F = A - BK$ — $n \times n$ -матрица состояния замкнутой системы.

Рассмотрим три случая систем:

- произвольная устойчивая система;
- система, спроектированная, как оптимальная в смысле квадратичного функционала качества;
- система, спроектированная методом модального управления.

а) Произвольная устойчивая система.

Для исследования свойств устойчивой замкнутой системы (3.1.2) введем в рассмотрение функции состояния (Ляпунова) с матрицами P , Q , которые на траекториях устойчивой системы удовлетворяют уравнению Ляпунова

$$F^T P + PF = -Q, \quad (3.1.3)$$

где $(\cdot)^T$ — знак транспонирования.

Тогда, как известно, время переходного процесса в системе (3.1.2) может быть оценено как $t_n = \sigma \mu_*$, где μ_* — максимальное собственное значение (мода) пучка квадратичных форм

$$P(x, x) - \mu Q(x, x) = x^T P x - \mu x^T Q x. \quad (3.1.4)$$

Покажем справедливость этого. Для устойчивой системы (3.1.2) может быть введена функция состояния (Ляпунова) $V(x)$, характеризующая процессы в системе, такая, что на траекториях системы имеет место:

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t), \quad (3.1.5)$$

$$\dot{V}(x(t)) = -x^T(t) Q x(t), \quad (3.1.6)$$

где P , Q — положительно определенная и полуопределенная симметрические матрицы, удовлетворяющие (3.1.3). Далее, для оценки времени переходного процесса введем в рассмотрение параметр α , удовлетворяющий соотношению

$$\dot{V}(x(t)) = e^{-\alpha t} \cdot V(x(0)), \quad (3.1.7)$$

или

$$\dot{V}(x(t)) = -\alpha V(x(t)). \quad (3.1.8)$$

Подставляя в (3.1.8) из (3.1.5), (3.1.6), имеем

$$-x^T(t) Q x(t) = -\frac{1}{\mu} x^T(t) P x(t). \quad (3.1.9)$$

Из (3.1.9) получим квадратичную форму

$$x^T(t)(P - \mu Q)x(t) = 0, \quad (3.1.10)$$

где параметр $\mu = \frac{1}{\alpha}$ — является модой (собственным значением) пучка квадратичных форм (3.1.4).

Перейдя в (3.1.7) к векторным нормам с весом P , имеем

$$\|x(t)\|_P^2 = e^{-\alpha t} \|x(0)\|_P^2. \quad (3.1.11)$$

Отсюда, совокупная переходная функция по состоянию системы (3.1.2), определяемая как

$$h_x(t) \triangleq \frac{\|x(t) - x(0)\|_P}{\|x(0)\|_P}, \quad (3.1.12)$$

выразится

$$h_x(t) = \frac{\|x(t) - x(0)\|_P}{\|x(0)\|_P} \leq \frac{\|x(t)\|_P}{\|x(0)\|_P} + \frac{\|x(0)\|_P}{\|x(0)\|_P} = e^{-\frac{t}{2\mu}}. \quad (3.1.13)$$

Но так как $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} h_x(t) = 1$, положив как принято в классической теории время переходного процесса

$$t_n = t: |h_x(t) - h_x(\infty)| \leq \varepsilon = 0,05,$$

получим $t_n \approx 3(2\mu_+) = 6\mu_+$, для одномерного случая, где μ_+ — максимальная мода пучка квадратичных форм (3.1.4), определяющая медленно затухающую компоненту переходного процесса в системе (3.1.2).

Итак, оценка времени переходного процесса в произвольной устойчивой системе (3.1.2)

$$t_n = 6\mu_+ \triangleq 6\mu_+. \quad (3.1.14)$$

Величина μ_+ определяется как максимальная мода пучка (3.1.4), удовлетворяющая характеристическому уравнению

$$\det[P - \mu Q] = 0, \quad (3.1.15)$$

в случае, если Q невырожденная, μ находится из уравнения

$$\det[G - \mu I_n] = 0, \quad (3.1.16)$$

где $G = Q^{-1}P$, I_n — единичная матрица размерности $n \times n$.

Таким образом, вопрос определения модальной оценки t_n , решается определением матриц P и Q из уравнения Ляпунова (3.1.3). Но, как нетрудно видеть, задача решается неоднозначно, если не накладывать относительно пары (P, Q) каких-либо ограничений.

б) Система, спроектированная как оптимальная, в смысле квадратичного функционала качества.

Одним из условий, снимающих неопределенность выбора пары матриц (P, Q) , удовлетворяющих уравнению Ляпунова (3.1.3) в произвольной устойчивой системе, является оптимальность управления системы в смысле удовлетворения квадратичному функционалу качества

$$J = \int_0^{\infty} (x^T \bar{Q} x + u^T \bar{R} u) dt. \quad (3.1.17)$$

В этом случае пара матриц (P, Q) , удовлетворяющих уравнению Ляпунова, может быть найдена из матричных соотношений

$$Q = \bar{Q} + \bar{P} B \bar{R}^{-1} B^T \bar{P}; \quad P = \bar{P}, \quad (3.1.18)$$

где \bar{P} есть решение уравнения Риккати

$$A^T \bar{P} + \bar{P} A - \bar{P} B \bar{R}^{-1} B^T \bar{P} = -\bar{Q}. \quad (3.1.19)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (3.1.18) получены путем преобразования уравнения Риккати (3.1.19) к уравнению Ляпунова (3.1.3).

Таким образом, для устойчивости системы (3.1.2), спроектированной на минимум квадратичного функционала качества (3.1.17)

модальная оценка времени переходного процесса (3.1.14) определяется максимальной модой пучка квадратичных форм (3.1.4) с матрицами (\bar{P}, Q) , определяемыми по (3.1.18) и (3.1.19).

в) Система, спроектированная методом модального управления.

Рассмотрим устойчивую систему (3.1.2), (3.1.3), спроектированную методом модального управления в модельной постановке, с модальной моделью в виде полностью наблюдаемой пары матриц (Γ, H) , где Γ обладает желаемой структурой мод, а матрица H проектирует их на выход модели. В этом случае матрица обратной связи K модального регулятора ищется в результате решения матричного уравнения Сильвестра

$$M\Gamma - A M = -B H, \quad K = H M^{-1}, \quad (3.1.20)$$

где Γ — $(n \times n)$ -матрица состояния модели, H — $(r \times n)$ -произвольная матрица, образующая с Γ наблюдаемую пару, M — $(n \times n)$ -матрица преобразования базисов Γ и $F = A - B K$. Из (3.1.20) получаем

$$M\Gamma = F M \text{ или } F = M\Gamma M^{-1}. \quad (3.1.21)$$

Подставляя (3.1.21) в (3.1.3), имеем

$$(M^{-1})^T \Gamma^T M^T P + P M \Gamma M^{-1} = -Q, \quad (3.1.22)$$

полагая $P = (M^{-1})^T M^{-1}$, получаем

$$Q = -(M^{-1})^T (\Gamma^T + \Gamma) M^{-1}. \quad (3.1.23)$$

Итак, в рассматриваемом случае модальную оценку времени переходного процесса (3.1.15), находим как максимальную моду пучка форм (3.1.4) с матрицами (P, Q) , определяемыми по (3.1.22), (3.1.23). Из (3.1.23) видно, что Q вида (3.1.23), если матрица Γ содержит лишь устойчивые моды, не вырожденное. В силу сказанного, для вычисления мод пучка (P, Q) можно вос-

пользоваться выражением (3.1.16), где матрица $G = Q^{-1}P$ принимает вид

$$G = Q^{-1}P = -M(\Gamma^T + \Gamma)^{-1}M^{-1}. \quad (3.1.24)$$

Откуда для спектра матрицы G имеем

$$\sigma\{G\} = \sigma\{-(\Gamma^T + \Gamma)^{-1}\}.$$

Если матрица Γ задана в диагональном виде, т. е. $\Gamma = \text{diag}\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$, то

$$\sigma\{G\} = \left\{ -\frac{1}{2\lambda_i}, i = \overline{1, n} \right\} \text{ или } \mu_* = -\frac{1}{2\lambda_*}, \quad (3.1.25)$$

т. е. определяется ближайшим к мнимой оси модой матрицы системы F .

Модальная оценка перерегулирования

Будем рассматривать совокупные переходные процессы (функции) в многомерных системах как по состоянию, так и по выходу системы (3.1.1), определяемые соответственно

$$h_x(t) \triangleq \|x(t) - x(0)\|_r / \|x(0)\|_r, \quad (3.1.26)$$

$$h_y(t) \triangleq \|y(t) - y(0)\|_r / \|y(0)\|_r, \quad (3.1.27)$$

где $\|\cdot\|_r$ — норма вектора (\cdot) с весом P , определяемая как

$$\|\cdot\|_r \triangleq \{(\cdot)^T P (\cdot)\}^{1/2}.$$

Если принять $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, то $h_x(\infty) = 1$, $h_y(\infty) = 1$. Тогда перерегулирование по состоянию и по выходу определяются соответственно

$$\sigma_x^{\Delta} = (h_{x\sigma} - h_x(\infty)) / h_x(\infty) = h_{x\sigma} - 1, \quad (3.1.28)$$

$$\sigma_y^{\Delta} = (h_{y\sigma} - h_y(\infty)) / h_y(\infty) = h_{y\sigma} - 1, \quad (3.1.29)$$

где $h_{x\sigma} = h_x(t_{\sigma})$, $h_{y\sigma} = h_y(t_{\sigma})$ — соответственно максимальные значения переходных функций по состоянию и по выходу, соответствующие моменту времени t_{σ} .

а) *Переходная функция по состоянию.*

Рассмотрим вначале переходную функцию по состоянию (3.1.26) с весом $P = I$.

Тогда (3.1.26) принимает вид

$$h_x(t) = \|x(t) - x(0)\| / \|x(0)\|, \quad (3.1.30)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Для нормы $h_x(t)$ имеем

$$\|h_x(t)\| = \|x(t) - x(0)\| / \|x(0)\|$$

или

$$\|h_x(t)\|^2 = (x(t) - x(0))^T (x(t) - x(0)) / x^T(0)x(0).$$

Решение системы (3.1.2) можно представить в виде $x(t) = e^{Ft}x(0)$, отсюда $x(t) - x(0) = (e^{Ft} - I)x(0)$, тогда

$$\|h(t)\|^2 = x^T(0)(e^{Ft} - I)^T (e^{Ft} - I)x(0) / x^T(0)x(0). \quad (3.1.31)$$

Согласно определения (3.1.28) из (3.1.31) получаем

$$\begin{aligned} h_{x\sigma}^2 &= \max_i \max_{x(0)} \|h(t)\|^2 = \\ &= \max_i \max_{x(0)} \left[x^T(0)(e^{Ft} - I)^T (e^{Ft} - I)x(0) \right] / x^T(0)x(0). \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

В правой части равенство (3.1.32) имеем отношение Релея, следовательно,

$$h_{x\sigma}^2 = \mu_+(t) \Big|_{t=t_{\sigma}} = \mu_+(t_{\sigma}) = \mu_{\sigma}, \quad (3.1.33)$$

где $\mu_+(t)$ есть максимальная мода пучка квадратичных форм с матрицами $(e^{Ft} - I)^T (e^{Ft} - I)$ и I .

Обозначим

$$(e^{Ft} - I)^T (e^{Ft} - I) = G. \quad (3.1.34)$$

Тогда $\mu_+(t)$ — максимальная мода, удовлетворяющая характеристическому уравнению

$$\det(\mu I - G) = 0. \quad (3.1.35)$$

Подставляя в (3.1.28) выражение (3.1.33) имеем

$$\sigma_x = [\mu_+(t_{\sigma})]^{1/2} - 1 = \mu_{\sigma}^{1/2} - 1. \quad (3.1.36)$$

Пользуясь полученными результатами, можно показать все основные свойства переходных процессов в зависимости от спектра мод (корней, полюсов).

Действительно. Пусть матрица F диагонализуема. Тогда существует матрица диагонализации M такая, что

$$MA = FM,$$

или

$$M \text{diag}\{\lambda_i\} = FM,$$

отсюда

$$F = M \text{diag}\{\lambda_i\} M^{-1}.$$

Следовательно,

$$e^{Ft} - I = M \text{diag}\{e^{\lambda_i t} - 1\} M^{-1},$$

$$(e^{Ft} - I)^T = (M^{-1})^T \text{diag}\{e^{\lambda_i t} - 1\} M^T,$$

матрица

$$Q = (e^{Ft} - I)^T (e^{Ft} - I) = (M^{-1})^T \text{diag}\{e^{\lambda_i t} - 1\} M^T M \text{diag}\{e^{\lambda_i t} - 1\} M^{-1}. \quad (3.1.37)$$

Перейдем к рассмотрению случая оценки переходного процесса $h_x(t)$ с помощью нормы с весом $P \neq I$, то есть

$$h_x(t) = \|x(t) - x(0)\|_P / \|x(0)\|_P,$$

или

$$\|h_x(t)\|_P^2 = \left[x^T(0)(e^{Ft} - I)^T (e^{Ft} - I)x(0) \right] / x^T(0)x(0). \quad (3.1.38)$$

Аналогично случаю $P = I$, проведем диагонализацию матрицы F . Здесь будем иметь

$$G = (M^{-1})^T \text{diag}\{e^{\lambda_i t} - 1\} M^T P M \text{diag}\{e^{\lambda_i t} - 1\} M^{-1}. \quad (3.1.39)$$

Из (3.1.38), используя экстремальные свойства отношений квадратичных форм, имеем

$$\|h_{x\sigma}\|_P^2 = \mu_+(t)|_{t=t_\sigma} = \mu_+(t_\sigma),$$

где $\mu_+(t)$ — максимальная мода пучка квадратичных форм с матрицами (P, Q) .

Значение $\mu_+(t)$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\det[G - \mu P] = 0. \quad (3.1.40)$$

Положим $P = (M^{-1})^T M^{-1}$, подстановка которого в (3.1.39) дает

$$G = (M^{-1})^T \text{diag}\{(e^{\lambda_i t} - 1)^2\} M^{-1},$$

или, учитывая, что матрица P неособенная, из (3.1.40) получаем

$$\det[\text{diag}(e^{\lambda_i t} - 1)^2 - \mu I] = 0,$$

отсюда

$$\mu_+(t) = \max_{\lambda_i} (e^{\lambda_i t} - 1)^2. \quad (3.1.41)$$

В данном случае анализ характера переходного процесса в зависимости от расположения мод на комплексной плоскости очевиден. Так, например, при действительных отрицательных модах $\mu_+(t) < 1$ для всех t и процесс аperiodический ($\sigma_x = 0$). Здесь в случае наличия комплексно-сопряженных мод выражение (3.1.36) упрощается и принимает вид

$$U = (M^{-1})^T \begin{bmatrix} e^{2\alpha t} - 2e^{\alpha t} \cos \beta t + 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\alpha t} - 2e^{\alpha t} \cos \beta t + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag}\{(e^{\lambda_i t} - 1)^2\} \end{bmatrix}. \quad (3.1.42)$$

Из (3.1.42) и (3.1.40) имеем

$$\mu_+(t) = 1 - 2e^{\alpha t} \cos \beta t + e^{2\alpha t}. \quad (3.1.43)$$

Отсюда нетрудно видеть, что модальная оценка $\mu_+(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$(1 - e^{\alpha t})^2 \leq \mu_+(t) = 1 - 2e^{\alpha t} \cos \beta t + e^{2\alpha t} \leq (1 + e^{\alpha t})^2. \quad (3.1.44)$$

Если положить для $t \geq t_n$

$$\|x(0)\|_P \leq \eta, \quad \|x(t)\|_P \leq \varepsilon,$$

то для переходной функции $h_x(t)$ имеем

$$1 - \frac{\varepsilon}{\eta} \leq h_x(t) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\eta}, \quad (3.1.45)$$

откуда, сравнивая (3.1.44) и (3.1.45) для $t \geq t_n$, будем иметь

$$e^{\alpha t} \leq \varepsilon/\eta,$$

или

$$e^{\alpha t_n} = \varepsilon/\eta,$$

откуда

$$t_n = (1/\alpha) \cdot \ln(\varepsilon/\eta).$$

Найдем время достижения максимального значения переходной функции t_σ , такое, что $h_x(t_\sigma) = h_{x\sigma}$. Время t_σ удовлетворяет условию $d\mu_+(t)/dt = 0$. Имеем

$$d\mu_+(t)/dt = 2\alpha \cdot e^{2\alpha t} - 2\alpha \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t + 2\beta \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t = 0,$$

откуда

$$\alpha \cdot e^{\alpha t} = \alpha \cdot \cos \beta t - \beta \cdot \sin \beta t.$$

Продлав тригонометрические преобразования последнего выражения, получаем

$$e^{\alpha t} = \cos(\beta t + \varphi) / \cos \varphi, \quad (3.1.46)$$

где $\varphi = \arccos[\alpha / (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}]$.

Поскольку t_σ удовлетворяет (3.1.46) из (3.1.43) будем иметь

$$\mu_+(t) \Big|_{t=t_\sigma} = (\sin^2 \beta t_\sigma) / \cos^2 \varphi = \mu_\sigma. \quad (3.1.47)$$

Тогда

$$\sigma = [\mu_+(t_\sigma)]^{1/2} - 1 = |\sin \beta t_\sigma / \cos \varphi| - 1. \quad (3.1.48)$$

Итак, мы получили выражения для модальной оценки μ_σ и перерегулирования в виде (3.1.47), (3.1.48), где μ_σ удовлетворяет (3.1.46).

Заметим, что в случае наличия множества пар комплексно-сопряженных мод, оценки перерегулирования σ , как и времени переходного процесса, определяются доминирующими модами матрицы системы F .

б) *Переходная функция по выходу.*

Определим модальную оценку перерегулирования по выходу системы. Рассмотрим переходную функцию по выходу (3.1.27)

$$h_y(t) = \|y(t) - y(0)\|_P / \|y(0)\|_P.$$

Аналогично пункту (3.1.2.а) имеем

$$\|h_y(t)\|_P^2 = [(y(t) - y(0))^T P (y(t) - y(0))] / [y^T(0) P y(0)];$$

или, учитывая $y = Cx$, получаем

$$\|h_y(t)\|_P^2 = [x^T(0)(e^{Ft} - I)^T C^T P C (e^{Ft} - I)x(0)] / [x^T(0) C^T P C x(0)],$$

далее

$$\begin{aligned} h_{y\sigma} &= \max_t \max_{x(0)} \|h_y(t)\|_P^2 = \\ &= \max_t \max_{x(0)} [x^T(0)(e^{Ft} - I)^T C^T P C (e^{Ft} - I)x(0)] / [x^T(0) C^T P C x(0)] = \\ &= \mu_{y+}(t) \Big|_{t=t_\sigma} = \mu_{y+}(t_\sigma) = \mu_{y\sigma}, \end{aligned}$$

где μ_{y+} — максимальная мода, удовлетворяющая уравнению

$$\det(\mu I - V) = 0. \quad (3.1.49)$$

Здесь $V = (C^T P C)^{-1} (e^{Ft} - I)^T C^T P C (e^{Ft} - I)$.

Если рассматривать норму с весом $P = I$, то

$$V = [C(e^{Ft} - I)C^{-1}]^T [C(e^{Ft} - I)C^{-1}]. \quad (3.1.50)$$

Модальная оценка перерегулирования по выходу будет

$$\sigma_y = \mu_{y\sigma}^{1/2} - 1,$$

где $\mu_{y\sigma} = \mu_{y+}(t_\sigma)$, $\mu_{y+}(t)$ — определяется из (3.1.49), t_σ — время, при котором

$$\mu_{y+}(t_\sigma) = \max_t \mu_{y+}(t). \quad (3.1.51)$$

Модальная оценка точностных показателей в установившемся режиме при детерминированном входе

Одним из прямых показателей качества процессов является показатель точности в виде установившейся ошибки при детерминированном входе системы. Больше трудности возникают при

исследовании точности многомерных (многосвязных) систем автоматического управления. В настоящем под параграфе дан один подход к исследованию точности динамических систем, основанный на использовании модальной оценки точности в установившемся режиме.

Пусть задан объект управления (ОУ)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0), \quad y = Cx, \quad (3.1.52)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^m$, а матрицы A , B , C — соответствующих размерностей, пара (A, B) управляема.

Пусть далее задан источник внешних воздействий в виде командного генератора (КГ), описываемого системой

$$\dot{z} = \Gamma z, \quad z(0), \quad g = Pz, \quad (3.1.53)$$

где $z \in R^l$ — вектор состояния КГ с начальным значением $z(0)$; $g \in R^m$ — вектор выхода КГ или вектор внешних воздействий ОУ; Γ и P — матрицы состояния и выхода КГ соответствующих размерностей, за выходом $g(t)$ которого должен следить или его парировать выход системы $y(t)$.

Закон управления для ОУ (3.1.52) ищем в виде

$$u = u_x + u_z, \quad (3.1.54)$$

где u_x , u_z — соответственно компоненты вектора управления в виде обратной связи по состоянию ОУ и прямой связи по состоянию КГ, определяемые

$$u_x = -Kx, \quad u_z = g + Lz.$$

Здесь K и L соответственно $(m \times n)$ и $(m \times l)$ матрицы.

Тогда замкнутая система с введенным законом управления (3.1.54) примет вид

$$\dot{x} = Fx + BEz, \quad x(0), \quad y = Cx, \quad (3.1.55)$$

где $F = A - BK$, $E = P + L$.

Предположим, что матрица K определена методом модального управления (см. (3.1.20)), заданием модальной модели в виде полностью наблюдаемой пары матриц (G, H)

$$MG - AM = -BH, \quad K = HM^{-1}, \quad (3.1.56)$$

где пересечение спектров мод матриц G и A есть пустое множество

$$\sigma\{G\} \cap \sigma\{A\} = \emptyset.$$

Пусть в установившемся режиме вектора состояния ОУ и КГ связаны линейным преобразованием T таким, что

$$x_y(t) = Tz(t), \quad (3.1.57)$$

где T — $(n \times l)$ -матрица преобразования.

Тогда из уравнений (3.1.53) и (3.1.54) имеем

$$TG - FT = BE, \quad (3.1.58)$$

решение которого существует при выполнении условия

$$\sigma\{\Gamma\} \cap \sigma\{F\} = \emptyset.$$

Рассмотрим установившуюся ошибку в системе (3.1.55), определяемую как

$$\varepsilon_y(t) = g(t) - y_y(t).$$

Выражая $\varepsilon_y(t)$ через состояние КГ, будем иметь

$$\varepsilon_y(t) = (P - CT)z(t),$$

далее, используя известное соотношение $z(t) = e^{\Gamma t}z(0)$, имеем

$$\varepsilon_y(t) = (P - CT)e^{\Gamma t}z(0). \quad (3.1.59)$$

Из (3.1.59) заметим, что нулевая установившаяся ошибка достижима тогда и только тогда, когда матрица T удовлетворяет равенству

$$P - CT = 0. \quad (3.1.60)$$

Это означает, что для проектируемых систем нулевая установившаяся ошибка достижима только в случае, если можно отыскать такие K и L , что для T , определенного по (3.1.58), имеет место равенство (3.1.60).

Рассмотрим квадрат евклидовой нормы ошибки $\|\varepsilon_y(t)\|^2 = \varepsilon_y^T(t) \cdot \varepsilon_y(t)$, которая, согласно (3.1.59), выразится

$$\|\varepsilon_y(t)\|^2 = z^T(0)(e^{nt})^T G e^{nt} z(0), \quad (3.1.61)$$

где $G = (P - CT)^T (P - CT)$.

Определим модальную оценку установившейся ошибки $\varepsilon_y(t)$ в виде

$$\delta_y^2 = \max_{z(0)} \left(\frac{\|\varepsilon_y(t)\|^2}{\|z(0)\|^2} \right) = \max_{z(0)} \left[z^T(0)(e^{nt})^T G e^{nt} z(0) / z^T(0) z(0) \right] = \mu_s(t) = \mu_e(t), \quad (3.1.62)$$

где $\mu_s(t)$ — максимальная $\forall t$ (для всех t) мода уравнения

$$\det \left[\mu(t) I - (e^{nt})^T G e^{nt} \right] = 0,$$

или

$$\det \left[\mu(t) (e^{-r't}) e^{-n} - G \right] = 0. \quad (3.1.63)$$

Из (3.1.62) следует, что величину $\delta_y = [\mu_s(t)]^{1/2}$ можно определить как нормированную установившуюся ошибку системы.

Таким образом, при определении модальной оценки $\mu_s(t)$ встает задача решения характеристического уравнения (3.1.63).

Как принято в классической теории управления типовыми воздействиями при определении точности являются гармонические и полиномиальные сигналы. Не нарушая общности выводов, будем рассматривать случай подачи на вход системы, одномерных сигналов. Рассмотрим эти случаи.

Пусть на вход системы (3.1.55) подается одномерное гармоническое воздействие (то есть на все входы системы подается один и тот же сигнал) $g(t) = A_m \cdot \sin wt$ — с частотой w и амплитудой A_m .

Тогда матрицы КГ

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{bmatrix}; P = [1:0],$$

а начальные состояния $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = A_m$. Фундаментальная матрица e^{nt} , тогда будет

$$e^{nt} = \begin{bmatrix} \cos wt & \sin wt \\ -\sin wt & \cos wt \end{bmatrix},$$

отсюда

$$e^{r't} = \begin{bmatrix} \cos wt & -\sin wt \\ \sin wt & \cos wt \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрицы e^{nt} и $e^{r't}$ ортогональны, следовательно,

$$e^{-r't} \cdot e^{nt} = I.$$

Тогда $\mu_s(t) = \varepsilon = \mu_e$ — постоянная величина.

Итак, в случае гармонического входного воздействия $g(t) = A_m \cdot \sin wt$, алгоритм определения модальной оценки установившейся ошибки в системе (3.1.55) оказывается следующим.

1. По заданным матрицам $F = A - BK$, B , $E = P + L$, Γ из уравнения

$$T\Gamma - FT = BE$$

определим матрицу T .

2. При заданной матрице выхода системы C определяем матрицу

$$G = (P - CT)^T (P - CT).$$

3. Модальную оценку μ_* определяем как максимальную моду матрицы G , удовлетворяющую характеристическому уравнению

$$\det[\mu I - G] = 0.$$

Далее по величине μ_* можно определить нормированную установившуюся ошибку $\delta_y = (\mu_*)^{1/2}$ и величину ε_m установившейся ошибки как

$$\varepsilon_m = \delta_y \cdot A_m,$$

где A_m — амплитуда входного воздействия.

Рассмотрим теперь случай полиномиального входного воздействия

$$g(t) = g_0 + v_0(t) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot t^2 + \dots + \frac{\varepsilon_i}{i!} \cdot t^i, \quad (3.1.64)$$

где $g_0, v_0, \varepsilon, \dots, \varepsilon_i$ — постоянные, $i! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot i$.

Установившуюся ошибку при воздействии типа (3.1.64) можно рассматривать как сумму установившихся ошибок при подаче на вход системы отдельных составляющих $g_i(t) = \frac{\varepsilon_i}{i!} \cdot t^i, i = 1, 2, \dots$

Поэтому будем рассматривать установившуюся ошибку системы (3.1.55) при воздействии $g(t) = \frac{\varepsilon_i}{i!} \cdot t^i$.

В этом случае для одномерных систем имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть на вход одномерной линейной системы, передаточная функция в разомкнутом состоянии

$$w(s) = \frac{\xi_1 S^{n-1} + \xi_2 S^{n-2} + \dots + \xi_n}{S^n + \alpha_1 S^{n-1} + \dots + \alpha_n}, \quad (3.1.65)$$

подается сигнал

$$g = (\varepsilon_i / i!) \cdot t^i, i = 1, 2, \dots$$

Пусть далее

$$\delta_y = \max_{z(0)} \frac{\| \varepsilon_y \|}{\| z(0) \|} = [\mu_*(t)]^{1/2}$$

— нормированная установившаяся ошибка системы замкнутой обратной связью относительно (3.1.65).

Тогда

$$\mu_*(t) \Big|_{t=0} = \mu_* = c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 \left(\frac{1}{2!} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{i!} \right)^2 \cdot c_i^2,$$

где $c_0, c_1, c_2, \dots, c_i$ — коэффициенты ошибок системы (безразмерные, то есть их числовые значения).

Доказательство.

Так как ошибка δ_y инвариантна относительно базисного представления системы, то будем рассматривать систему в каноническом управляемом базисе.

Как известно, коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \dots, c_i, \dots$ получают при представлении передаточной функции системы по ошибке $w_\varepsilon(s)$ в виде полинома по возрастающим степеням комплексной величины s , то есть

$$w_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + w(s)} = c_0 + c_1 s + \frac{c_2}{2!} s^2 + \dots + \frac{c_i}{i!} s^i + \dots \quad (3.1.66)$$

Рассмотрим случай $n=1$.

Передаточная функция системы в разомкнутом виде будет

$$w_1(s) = \frac{\xi_1}{s + \alpha_1},$$

в замкнутом состоянии

$$\Phi(s) = [w_1(s) / (1 + w_1(s))] = \frac{\xi_1}{s + \alpha_1 + \xi_1}.$$

В пространстве состояний матрицы системы следующие

$$A = [-\alpha_1]; B = [1]; C = [\xi_1]; K = [\xi_1];$$

$$F = [A - BK] = [-(\alpha_1 + \xi_1)].$$

Передаточная функция системы по ошибке представленная в виде полинома по возрастающим степеням s имеет вид

$$w_{e1}(s) = \frac{1}{1 + w_1(s)} = \frac{s + \alpha_1}{s + \alpha_1 + \xi_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \xi_1} + \frac{\xi_1}{(\alpha_1 + \xi_1)^2} \cdot s - \frac{\xi_1}{(\alpha_1 + \xi_1)^3} \cdot s^2 + \dots + (-1)^{i+1} \frac{\xi_1}{(\alpha_1 + \xi_1)^{i+1}} \cdot s^i + \dots$$

Отсюда

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \xi_1}, c_1 = \frac{\xi_1}{(\alpha_1 + \xi_1)^2}, c_2 = -\frac{\xi_1}{(\alpha_1 + \xi_1)^3}, \dots \quad (3.1.67)$$

Найдем $\mu_+(t)|_{t=0} = \mu_+$.

$\mu_+(t) = \delta_y^2 = \max_{z(0)} \|\varepsilon_y\|^2 / \|z(0)\|^2$ — максимальная мода уравнения

$$\det[\mu \cdot e^{-r^T t} \cdot e^{\Lambda t} - G] = 0, \quad (3.1.68)$$

где Γ — матрица состояния командного генератора, вырабатывающего входной сигнал $g = \frac{\varepsilon_i}{i!} \cdot t^i$, $i = 1, 2, \dots$; $\varepsilon_0 = g_0$, $\varepsilon_1 = v_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$ — постоянные.

Не теряя общности рассуждений, для простоты изложения положим, то есть рассмотрим, когда на вход системы подается сигнал с постоянным ускорением ε , $g = (\varepsilon/2)t^2$.

Согласно алгоритму определения $\mu_+(t)$ имеем. Командный генератор (КГ)

$$\dot{z} = \Gamma_z, z(0), g = P_z.$$

$$\text{При } g = \frac{\varepsilon}{2} \cdot t^2 \text{ имеем } \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; P = [1 \mid 0 \mid 0].$$

Найдем матрицу T :

$$\begin{aligned} T\Gamma - FT &= BP, \\ T &= [t_1 \mid t_2 \mid t_3], \end{aligned} \quad (3.1.69)$$

в развернутом виде

$$\begin{cases} (\alpha_1 + \xi_1)t_1 = 1, \\ t_1 + (\alpha_1 + \xi_1)t_2 = 0, \\ t_2 + (\alpha_1 + \xi_1)t_3 = 0. \end{cases}$$

Решая, находим

$$t_1 = 1/(\alpha_1 + \xi_1); t_2 = -1/(\alpha_1 + \xi_1)^2; t_3 = 1/(\alpha_1 + \xi_1)^3.$$

Далее при $t=0$, $\mu_+(t) = \mu_+(0) = \mu_+$ — есть максимальная мода, удовлетворяющая

$$\det[\mu I - G] = 0,$$

где матрица

$$G = (P - CT)^T (P - CT).$$

Находим

$$P - CT = \left[1 - \frac{\xi_1}{\alpha_1 + \xi_1} \mid \xi_1/(\alpha_1 + \xi_1)^2 \mid -\xi_1/(\alpha_1 + \xi_1)^3 \right].$$

Поскольку $[P - CT]^T$ — вектор, то

$$\begin{aligned} \mu_+ &= (P - CT)(P - CT)^T = \\ &= \left[1 - \frac{\xi_1}{(\alpha_1 + \xi_1)^2} \right]^2 + \left[\frac{\xi_1}{(\alpha_1 + \xi_1)^2} \right]^2 + \left[-\frac{\xi_1}{(\alpha_1 + \xi_1)^3} \right]^2, \end{aligned} \quad (3.1.70)$$

то есть $(\mu_+)^{1/2}$ — евклидова норма вектора $(P-CT)^T$. Действительно, для любого вектора v имеет место

$$\mu_+ \stackrel{\Delta}{=} \max_v (v^T G v) / (v^T v), \quad (3.1.71)$$

тогда при $v = [P-CT]^T$ имеем

$$\mu_+ = \max_v \frac{v^T (v \cdot v^T) v}{v^T v} = v^T v = [P-CT][P-CT]^T. \quad (3.1.72)$$

Сравнивая выражения (3.1.70) и (3.1.67), приходим к доказуемому

$$\mu_+ = c_0^2 + c_1^2 + \left(\frac{c_2}{2}\right)^2. \quad (3.1.73)$$

Аналогично можно доказать и для произвольного $n = 2, 3, \dots$. При этом, если передаточная функция разомкнутой системы $w(s) = \frac{\xi_1 S^{n-1} + \xi_2 S^{n-2} + \dots + \xi_n}{S^n + \alpha_1 S^{n-1} + \dots + \alpha_n}$, то коэффициенты ошибок

$$c_0 = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \xi_n}; \quad c_1 = \frac{\alpha_{n-1} \xi_n - \alpha_n \xi_{n-1}}{(\alpha_n + \xi_n)^2};$$

$$\frac{1}{2} c_2 = \frac{(\alpha_n + \xi_n)(\alpha_{n-2} \xi_n - \alpha_n \xi_{n-2}) - (\alpha_{n-1} + \xi_{n-1})(\alpha_{n-1} \xi_n - \alpha_n \xi_{n-1})}{(\alpha_n + \xi_n)^3},$$

а $\mu_+ = c_0^2 + c_1^2 + \frac{1}{2} c_2^2.$ (3.1.74)

Так как n и i , рассмотренные при доказательстве, произвольны, то теорема 3.1 доказана.

Аналогичное утверждение имеет место и при рассмотрении многомерных систем, но в этом случае выражение для μ_+ усложняется тем, что в нее будут входить слагаемые, обусловленные перекрестными связями. Доказательство в виду громоздкости здесь опустим, но укажем, что в многомерном случае ($g, y \in R^m$) имеет место соотношение

$$P-CT = \begin{bmatrix} K_{11}^{(0)} & K_{11}^{(1)} & \dots & K_{21}^{(0)} & \dots & K_{21}^{(v_2)} & \dots & K_{m1}^{(0)} & \dots & K_{m1}^{(v_m)} \\ K_{12}^{(0)} & K_{12}^{(1)} & \dots & K_{22}^{(0)} & \dots & K_{22}^{(v_2)} & \dots & K_{m2}^{(0)} & \dots & K_{m2}^{(v_m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{1m}^{(0)} & K_{1m}^{(1)} & \dots & K_{2m}^{(0)} & \dots & K_{2m}^{(v_2)} & \dots & K_{mm}^{(0)} & \dots & K_{mm}^{(v_m)} \end{bmatrix}, \quad (3.1.75)$$

где $K_{ij}^{(s)}$ — коэффициент ошибки s порядка ($s = 0, 1, 2, \dots$), соответствующий i -му сепаратному каналу ($\varepsilon_i = g_i = y_i$) по j -му входу (g_j) ($i, j = 1, 2, \dots, m$) — порядок астатизма i -го канала.

Поскольку имеем смысл рассматривать ошибки, соответствующие только порядку астатизма канала, то все $K_{ij}^{(s)} = 0$ при $s \leq \gamma_i - 1$. Соответственно необходимо рассматривать случай подачи на вход всех каналов сигнала

$$g = \frac{\varepsilon_{v_{\max}+1}}{(v_{\max}+1)!} \cdot t^{v_{\max}+1}, \quad (3.1.76)$$

где v_{\max} — максимальный порядок астатизма каналов.

При этом командный генератор многомерный с m каналами.

Итак, алгоритм определения модальной оценки и нормированной установившейся ошибки δ_y при гармонических и полиномиальных сигналах совпадают.

При этом в случае с полиномиальными воздействиями (3.1.64), используя (3.1.75), можно определить ошибку при $m = 1$ как

$$\varepsilon_y = c_0 \cdot g_0 + c_1 \cdot v_0 + \frac{c_2}{2!} \varepsilon + \dots + \frac{c_l}{l!} \varepsilon_l, \quad (3.1.77)$$

где c_0, c_1 — коэффициенты ошибок, c_k для $k \leq v-1$, v — порядок астатизма, при $m > 1$ как

$$\varepsilon_{y_i} = K_{ii}^{(v_i)} \cdot \varepsilon_{v_i+1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m K_{ij}^{(v_j)} \cdot \varepsilon_{v_j+1}, \quad (3.1.78)$$

где ε_{yi} — установившаяся ошибка i -го сепаратного канала; $K_y^{(v_i)}$ — коэффициент ошибки v_i -го порядка i -го канала по входному сигналу j -го канала; ε_{v_i+1} — постоянная j -го сигнала

$$g_j = \frac{\varepsilon_{v_i+1}}{(v_i+1)!} \cdot t^{v_i+1},$$

v_i — порядок астатизма i -го канала по j -му входному воздействию.

Совокупную установившуюся ошибку можно определить по евклидовой норме

$$\|\varepsilon_y\| = \varepsilon_y^T \varepsilon_y, \quad (3.1.79)$$

где

$$\varepsilon_y = [\varepsilon_{y1}, \varepsilon_{y2}, \dots, \varepsilon_{ym}]^T.$$

Иной подход к определению совокупной установившейся ошибки

$$\|\varepsilon_y\| = \delta_y \|z(0)\| = \mu^{1/2} \|z(0)\|, \quad (3.1.80)$$

где $\|z(0)\|$ — евклидова норма вектора начального состояния командного генератора.

В случае рассмотрения многомерной (многоканальной) системы при гармонических воздействиях $g_i(t) = A_{mi} S_{in} w_i t$ на входах i -х сепаратных каналов, алгоритмы определения модальной оценки μ_e сохраняется, но в этом случае командный генератор будет иметь структуру, составленную из автономных каналов, вырабатывающих соответствующие выходные сигналы. При этом для установившейся ошибки j -го канала можно записать

$$\varepsilon_{yj} = \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m A_{mj} K_{ij}, \quad (3.1.81)$$

где A_{mj} — амплитуда входного сигнала j -го канала, $K_y^{(s)}$ — определим (аналогично (3.1.75)) как коэффициент ошибки s -го порядка (независимо от астатизма) i -го канала по j -му сигналу.

Так же, как и в случае полиномиального входа можно определить евклидову норму установившейся ошибки (3.1.79) и (3.1.80).

Модальные оценки дисперсий состояния, выхода и ошибки при входном сигнале типа «белый шум» и «окрашенный шум»

Рассмотрим замкнутую систему. При воздействии на входе случайного сигнала типа «белый шум» $\omega(t)$ с интенсивностью N

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + B\omega(t), \quad x(0), \quad y(t) = Cx(t), \quad (3.1.82)$$

где $M[\omega(t)] = 0$, $x(0)$ — случайная величина, независимая от $\omega(t)$ с нулевым средним $M[x(0)] = 0$.

Для стационарного режима рассматриваемой системы имеет место уравнение Ляпунова

$$FD_x + D_x F^T = -BNB^T, \quad (3.1.83)$$

где $D_x = M[x(t)x^T(t)]$ — матрица дисперсий по состоянию.

Матрица дисперсий по выходу определяется выражением

$$D_y = CD_x C^T. \quad (3.1.84)$$

Подобное выражение для матрицы дисперсий по ошибке $D_e = M[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)]$ определяется только в случае воздействия «окрашенного шума».

Введем на входе системы формирующий фильтр, который «белый шум» $\omega(t)$ преобразует в «окрашенный шум», т. е. гауссовский марковский процесс $\xi(t)$, подаваемый на вход системы (3.1.82).

Простейшим формирующим фильтром является динамическая система первого порядка с полосой пропускания Ω , описываемая передаточной функцией

$$\Phi_\Phi(s) = \frac{\Omega}{s + \Omega}, \quad (3.1.85)$$

или в терминах пространства состояний

$$\dot{z}(t) = \Gamma_\Phi z(t) + G_\Phi \omega(t), \quad \xi(t) = P_\Phi z(t), \quad (3.1.86)$$

где $\Gamma_\Phi = [-\Omega]$, $G_\Phi = [\Omega]$, $P_\Phi = [1]$, $z(t)$ — состояние формирующего фильтра.

Из уравнения Ляпунова находим дисперсию «окрашенного шума»

$$D_\xi = \sigma_\xi^2 = \frac{N \cdot \Omega}{2}. \quad (3.1.87)$$

Расширенная система с введенным формирующим фильтром описывается

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{F}\bar{x}(t) + \bar{B}\omega(t), \quad \bar{x}(0), \quad \bar{y}(t) = C_y \bar{x}(t), \\ \bar{e}(t) &= \xi(t) - y(t) = C_e \bar{x}(t), \end{aligned} \quad (3.1.88)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} F & | & BP_\Phi \\ 0 & | & \Gamma_\Phi \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_\Phi \end{bmatrix}, \\ C_y &= [C \mid 0], \quad C_e = [-C \mid P_\Phi]. \end{aligned}$$

Дисперсия состояния расширенной системы $D_{\bar{x}}$ будет удовлетворять уравнению Ляпунова

$$\bar{F}D_{\bar{x}} + D_{\bar{x}}\bar{F}^T = -\bar{B}M\bar{B}^T. \quad (3.1.89)$$

Далее имеем

$$D_y = C_y D_{\bar{x}} - C_y^T, \quad D_{\bar{e}} = C_e D_{\bar{x}} C_e^T. \quad (3.1.90)$$

Если теперь поставить задачу определения направлений и величин наибольших и наименьших дисперсий в пространстве состояний, выходов и ошибок, то они характеризуются наибольшими и наименьшими полуосями соответствующих гиперэллипсоидов правдоподобия

$$\begin{aligned} \bar{x}^T(t) D_{\bar{x}}^{-1} \bar{x}(t) &= l_x^2, \quad \bar{y}^T(t) D_{\bar{y}}^{-1} \bar{y}(t) = l_y^2, \\ \bar{e}^T(t) D_{\bar{e}}^{-1} \bar{e}(t) &= l_e^2, \end{aligned} \quad (3.1.91)$$

где $l_{(\cdot)}$ — число, характеризующее уровень правдоподобия в пространстве (\cdot) , при $l_{(\cdot)} = 3$ эта величина называется вероятностью трех сигм, то есть вероятность попадания величин (\cdot) в такой гиперэллипсоид соответствует уровню трех сигма (3σ).

Гиперэллипсоид правдоподобия уровня 3σ характеризуется максимальным и минимальным полуосями, равными соответственно

$$\text{и } 3(\mu_{+(\cdot)})^{1/2}, \text{ и } 3(\mu_{-(\cdot)})^{1/2}, \quad (3.1.92)$$

где $\mu_{+(\cdot)}, \mu_{-(\cdot)}$ — максимальная и минимальная моды дисперсий.

Итак, введем в рассмотрение модальные оценки дисперсий состояния, выхода и ошибки, как максимальные и минимальные моды соответствующих уравнений типа

$$\det(\mu I - D_{(\cdot)}) = 0. \quad (3.1.93)$$

Тогда, будем иметь следующий алгоритм определения модальных оценок дисперсий состояния, выхода и ошибки при входных воздействиях типа «белый шум» и «окрашенный шум».

1. При заданных $F, B, C, N, \Omega, \sigma_\xi^2$ находим из уравнения Ляпунова (3.1.83) и (3.1.89) матрицы дисперсий D_x и $D_{\bar{x}}$.
2. Определяем D_y и $D_{\bar{e}}$ соответственно из (3.1.84) и (3.1.90).

3. Модальные оценки дисперсий состояния, выхода и ошибки находятся как максимальные и минимальные моды соответствующих матриц по уравнениям (3.1.93).

4. Для оценки размеров гиперэллипсоидов правдоподобия вероятностей трех сигма, используем их максимальные и минимальные полуоси по выражениям (3.1.92).

3.2. Параметрическая чувствительность модальных оценок показателей качества процессов

В данном параграфе будем рассматривать параметрическую чувствительность показателей качества на основе исследования чувствительности модальных оценок качества процессов, полученных в параграфе 3.1. Чувствительность модальных оценок определяется на базе аппарата функций модальной чувствительности.

Чувствительность модальной оценки времени переходного процесса

Напомним, что в данном случае базовым уравнением, определяющим модальную оценку, является уравнение Ляпунова

$$F^T P + P F = -Q. \quad (3.2.1)$$

Пусть в замкнутой системе (3.2.1) имеется варьируемый параметр q с номинальным значением \bar{q} . Тогда модальная оценка времени переходного процесса (3.1.15) будет функцией от q ,

$$\mu_i = \mu_i(q).$$

Используя метод функций модальной чувствительности (МФМЧ), имеем для чувствительности модальной оценки

$$\mu_{iq} = \frac{\Delta \mu_i(q)}{\partial q} \Big|_{q=\bar{q}} = \bar{\pi}_j \mu_q \pi_j, \quad (3.2.2)$$

где $G = Q^{-1}P$ — матрица с минимальной модой μ_i ; π — матрица диагонализации G ; $\bar{\pi}_j$ — матрица-строка матрицы $\bar{\pi} = \pi^{-1}$, соответствующая μ_i ; π_j — матрица-столбец матрицы π , соответствующий максимальной моде μ_i матрицы G .

Матрицу

$$G_q = -Q^{-1}Q_qQ^{-1}P + Q^{-1}P_q \quad (3.2.3)$$

определяем, используя уравнение Ляпунова (3.2.1). При этом, если исследуется чувствительность модальной оценки времени переходного процесса произвольной устойчивой системы, то отыскать P_q и Q_q не без наложения дополнительных ограничений на пару (P, Q) , не удастся. Например, для этой цели рекомендуется на траекториях параметрической возмущенной системы фиксировать $Q(q) = Q_0 = const$, скажем, $Q = I$. В этом случае для отыскания имеем уравнение

$$F^T P_q + P_q F = -(F_q^T P + F_q P). \quad (3.2.4)$$

В случае, если система спроектирована методами оптимального или модального управления, то для P и Q появляются дополнительные связи в виде уравнений Риккати и Сильвестра, что позволяет корректно оценить P_q и Q_q .

В системе оптимальной в смысле квадратичного функционала качества, имеем

$$Q_q = \bar{Q}_q + \bar{P}_q B R^{-1} B^T \bar{P} + \bar{P} (B_q R^{-1} B^T + B R_q^{-1} B^T + B R^{-1} B_q^T) \bar{P} + \bar{P} B R^{-1} B^T P_q, \quad (3.2.5)$$

где $P_q = \bar{P}_q$ находится из уравнения Риккати (3.1.19)

$$A^T \bar{P}_q + \bar{P}_q A - \bar{P}_q B R^{-1} B^T \bar{P} - P B R^{-1} B^T P_q = = P (B_q R^{-1} B^T + B R_q^{-1} B^T + B R^{-1} B_q^T) P - \bar{Q}_q. \quad (3.2.6)$$

В (3.2.5) и (3.2.6) \bar{Q}_q и R_q^{-1} определяются дифференцированием по q матриц $\bar{Q}(q)$ и $R^{-1}(q)$, задающих функционал качества (3.1).

В системе, спроектированной методом модального управления имеем

$$u = Q^{-1}P = M \text{diag} \left\{ -\frac{1}{2\lambda_j} \right\} M^{-1}, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.2.7)$$

или

$$\mu_+ = -1/2 \lambda_+. \quad (3.2.8)$$

Следовательно,

$$\mu_+(q) = -1/2 \lambda_+(q), \quad (3.2.9)$$

откуда

$$\mu_+(q) = (1/2 \lambda_+^2) \lambda_{+,q}. \quad (3.2.10)$$

Исследование чувствительности обеспечивается отысканием функций модальных чувствительностей $\lambda_{+,q}$ в задаче модального управления.

Таким образом, имеем следующий алгоритм определения чувствительности модальной оценки времени переходного процесса.

1. Определение P и Q в номинальном режиме $q = \bar{q}$ на основе уравнений Ляпунова (3.2.1), $Q = I$, Риккати (3.1.18), (3.1.19).

2. Определение $\bar{\pi}_1$ и π диагонализацией матрицы $G = Q^{-1}P$ (3.2.2).

3. Отыскание P_q, Q_q из уравнений (3.2.4) или (3.2.5–3.2.7).

4. Вычисление G по (3.2.3).

5. Определение чувствительности модальной оценки времени переходного процесса $\mu_{+,q} = \bar{\pi}_1 u_q \pi_1$.

В случае системы, спроектированной методом модального управления с матрицей Γ диагонального вида $\mu_{+,q} = \frac{1}{2\lambda_+^2} \cdot \lambda_{+,q}$, где

$\lambda_{+,q} = \bar{M}_1 F_q M_1$, $F_q = A_q - B_q K - B K_q$, \bar{M}_1, M_1 — матрицы строка и столбец, соответствующие максимальной моде λ_+ матрицы F .

6. Определение чувствительности времени переходного процесса как

$$t_{nq} = \sigma \cdot \mu_{iq} = \sigma \cdot \mu_{+,q}.$$

7. Если в системе варьирует множество параметров, задаваемых вектором $q = [q_1 \mid q_2 \mid \dots \mid q_p]^T$, то совокупную чувствительность по всем варьируемым параметрам q_j , $j = \overline{1, p}$ можно оценить по какой-либо норме вектора модальной чувствительности.

$$\mu_{iq} = [\mu_{iq_1} \mid \mu_{iq_2} \mid \dots \mid \mu_{iq_p}]^T.$$

Соответственно, можно оценить совокупную чувствительность времени переходного процесса через выражение, приведенное выше в п. 6.

Чувствительность модальной оценки перерегулирования

Ранее в разделе 3.1 были получены модальные оценки перерегулирования переходного процесса по состоянию и выходу для случаев норм с весами $P = I$ и $P = (M^{-1})^T M^{-1}$. Здесь рассмотрим чувствительность перерегулирования процессов на основе исследования чувствительности модальных оценок к вариациям параметров системы.

а) Переходная функция по состоянию

При норме векторов с весом $P = I$ (евклидова норма) было получено (3.1.36)

$$\sigma_x = \mu_\sigma^{1/2} - 1, \quad (3.2.11)$$

где μ_σ — модальная оценка перерегулирования по состоянию.

Дифференцируя (3.2.11) по параметру q в точке \bar{q} , имеем

$$\sigma_{\sigma q} = 1/2 \cdot \mu_{\sigma}^{-1/2} \cdot \mu_{\sigma q}. \quad (3.2.12)$$

Пользуясь аппаратом функций модальной чувствительности получим

$$\mu_{\sigma q} = \bar{\pi}_1 G \pi_1. \quad (3.2.13)$$

Матрицу G находим, дифференцируя (5.1.37) по \bar{q} в точке и $q = \bar{q}$, $t = t_{\sigma}$

$$G_q = (e^{F t_{\sigma}} F t_{\sigma})^T (e^{F t_{\sigma}} - I) + (e^{F t_{\sigma}} - I) e^{F t_{\sigma}} F_{q t_{\sigma}}, \quad (3.2.14)$$

где $t_{\sigma} = t$ такому, что $\partial \mu_+(t) / \partial t = 0$.

Матрица-строка $\bar{\pi}_1$ и матрица-столбец π_1 определяются из условия диагонализации матрицы G и соответствуют максимальной моде $\mu_i = \mu_{\sigma}$

$$\pi_1 \mu_{\sigma} = G \pi_1, \quad (3.2.15)$$

$$\mu_{\sigma} \bar{\pi}_1 = \pi_1 G, \quad (3.2.16)$$

где $G = (e^{F t} - I)^T (e^{F t} - I)$.

Таким образом, имеем следующий алгоритм определения чувствительности перерегулирования при норме с весом $P = I$.

1. Определить $\mu_+(t)$ (такое, что):

$$\det(\mu I - G) = 0,$$

где $G = (e^{F t} - I)^T (e^{F t} - I)$.

2. $t_{\sigma} = t : \mu_+(t_{\sigma}) = \max_i \mu_i(t) = \mu_{\sigma},$

3. $G = \mu_{\sigma}^{1/2} - 1,$

4. $G_q = e^{F t_{\sigma}} (F_{q t_{\sigma}})^T (e^{F t_{\sigma}} - I) + (e^{F t_{\sigma}} - I) e^{F t_{\sigma}} F_{q t_{\sigma}}, t_{\sigma q} = 0,$

5. $\mu_{\sigma q} = \bar{\pi}_1 G \pi_1,$

где $\bar{\pi}_1$, π_1 определяются из

$$\pi_1 \mu_{\sigma} = G \pi_1, \quad \mu_{\sigma} \bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_1 G.$$

6. Чувствительность перерегулирования

$$\sigma_q = \frac{1}{2} \mu_{\sigma}^{-1/2} \mu_{\sigma q}.$$

Теперь рассмотрим случай нормы с весом $P = (M^{-1})^T M^{-1}$, где M — матрица диагонализации F .

Пользуясь результатами (3.1.48), (3.1.49), полученными ранее в разделе 3.1, при наличии комплексно-сопряженных мод матрицы системы F имеем

$$\mu_{\sigma q} = 2 \cdot \frac{\cos(\beta t_{\sigma} + \varphi)}{\cos \varphi} t_{\sigma} \cdot \left(\beta_q - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha_q \right), \quad (3.2.17)$$

$$\sigma_q = \left[(\mu_{\sigma})^{1/2} - 1 \right]_q = \frac{\cos(\beta t_{\sigma} - \varphi)}{\sin \beta t_{\sigma}} t_{\sigma} \cdot \left(\beta_q - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha_q \right), \quad (3.2.18)$$

где

$$\varphi = \arccos \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}},$$

а

$$t_{\sigma} = t : e^{\alpha t} = (\cos(\beta t + \varphi)) / \cos \varphi.$$

Заметим, что в случае наличия нескольких комплексно-сопряженных мод α , β в (3.2.17) определяются доминирующими модами

$$\alpha : \alpha = \max_i \alpha_i.$$

Алгоритм определения чувствительности модальной оценки перерегулирования по состоянию при норме с весом $P = (M^{-1})^T M^{-1}$ будет следующий:

1. Определяются доминирующие комплексно-сопряженные моды матрицы F с действительной частью $\alpha : \alpha = \max_i \alpha_i, i = 1, 2, \dots$

Положим

$$\lambda_d = \lambda_1 = \alpha_1 + j\beta_1, \lambda_d = \lambda_2 = \alpha_1 - j\beta_1.$$

2. Определяется

$$t_\sigma = t : e^{at} = [\cos(\beta t + \varphi)] / \cos \varphi,$$

где

$$\varphi = \arccos \alpha / (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}.$$

3. Пользуясь МФМЧ (см. 3.2.13, 3.2.14), определяем α_q и β_q

$$\alpha_q = \frac{1}{2}(\Gamma_{11} + \Gamma_{22}), \beta_q = \frac{1}{2}(\Gamma_{21} - \Gamma_{12}),$$

где $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}$ — соответствующие элементы матрицы

$$F_q = M^{-1} F_q M.$$

4. Находим $\mu_{\sigma q}$ по (3.2.17).

5. Определяем σ_q по (3.2.18).

Переходная функция по выходу

Здесь будем рассматривать оценку по норме с весом $P=I$ (евклидова норма).

Тогда, пользуясь (3.1.51, 3.1.52), имеем

$$\sigma_{yq} = \frac{1}{2} \mu_{y\sigma}^{-1/2} \mu_{y\sigma q}, \quad (3.2.19)$$

где

$$\mu_{y\sigma q} = \bar{\pi} V_q \pi_1, \quad (3.2.20)$$

$$V_q = (c^{-1})^T \left[(e^{F_{1\sigma}} F_q t_\sigma)^T c^T + (e^{F_{1\sigma}} - I)^T c_q^T - c_q^T (c^{-1})^T (e^{F_{1\sigma}} - I)^T c^T \right] \times \\ \times \left[c(e^{F_{1\sigma}} - I)^T c^{-1} \right] + \left[c(e^{F_{1\sigma}} - I)^T c^{-1} \right]^T \left[c_q(e^{F_{1\sigma}} - I) + \right. \\ \left. + c(e^{F_{1\sigma}} F_q t_\sigma) - c(e^{F_{1\sigma}} - I)^{-1} c \cdot c_q \right] \cdot c^{-1}. \quad (3.2.21)$$

Таким образом, имеем следующий алгоритм определения чувствительности перерегулирования по выходу.

1. Определяем максимальную моду

$$\mu_{y+}(t) : \det(\mu_y I - V) = 0,$$

где $V = [c(e^{Ft} - I)c^{-1}]^T [c(e^{Ft} - I)c^{-1}]$.

2. Находим $t_\sigma = t :$

$$\mu_{y+}(t_\sigma) = \max_t \mu_{y+}(t) = \mu_{y\sigma}.$$

3. Определяем

$$\mu_y \sigma_q = \bar{\pi}_1 V_q \pi_1,$$

где V_q по (3.2.21), а $\bar{\pi}_1, \pi_1$ находятся из

$$\pi_1 \cdot \mu_{y\sigma} = V(t_\sigma) \pi_1, \bar{\pi}_1 \cdot \mu_{y\sigma} = \bar{\pi}_1 V(t_\sigma).$$

4. Находим

$$\sigma_{yq} = \frac{1}{2} \cdot \mu_y^{-1/2} \sigma \cdot \mu_{y\sigma q}.$$

Чувствительность модальной оценки установившейся ошибки в режиме слежения

Пользуясь результатами, полученными ранее, при вариациях параметра q для чувствительности нормированной установившейся ошибки будем иметь

$$\delta_q = \frac{1}{2} \cdot \mu_e^{-1/2} \cdot \mu_{eq}, \quad (3.2.22)$$

где $\mu_{eq} = \bar{\pi}_1 G_q \pi_1$.

Матрица G_q находится дифференцированием по q матрицы

$$G = (P - CT)^T (P - CT).$$

Матрица-строка $\bar{\pi}_1$ и матрица-столбец π_1 находятся из уравнений

$$\pi_1 \mu_\varepsilon = G \pi_1, \quad (3.2.23)$$

$$\mu_\varepsilon \bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_1 G. \quad (3.2.24)$$

Итак, имеем следующий алгоритм:

1. Найти матрицу T : $T\Gamma - FT = BE$, $E = P + L$.
2. Определить $G = (P - CT)^T (P - CT)$, где $D_{\bar{x}q}$ определяется дифференцированием по q уравнения Ляпунова (3.1.91).

$$\bar{F}D_{\bar{x}q} + D_{\bar{x}q}\bar{F}^T = -[\bar{B}_q N \bar{B}^T + \bar{B} N \bar{B}_q^T + \bar{F}D_{\bar{x}} + D_{\bar{x}}\bar{F}^T]. \quad (3.2.25)$$

Матрицу-строку $\bar{\pi}_1$ и матрицу-столбец π_1 найдем из соотношений

$$\pi_1 \mu_{x+} = D_{\bar{x}} \pi_1, \quad \bar{\pi}_1 \mu_{x+} = \bar{\pi}_1 D_{\bar{x}}. \quad (3.2.26)$$

Аналогично для μ_{y+} имеем

$$\mu_{y+q} = \bar{T}_1 D_{yq} T_1,$$

где чувствительность матрицы дисперсии выхода D_{yq} находится дифференцированием по q выражения $D_y = C_y D_{\bar{x}} C_y^T$, получим

$$D_{yq} = C_{yq} D_{\bar{x}} C_y^T + C_y D_{\bar{x}q} C_y^T + C_y D_{\bar{x}} C_{yq}^T.$$

Матрицу-строку \bar{T}_1 и матрицу-столбец T_1 найдем из соотношений

$$T_1 \mu_{y+} = D_{\bar{y}} T_1, \quad \bar{T}_1 \mu_{y+} = \bar{T}_1 D_{\bar{y}}. \quad (3.2.27)$$

Аналогично для μ_{z+}

$$\mu_{z+q} = \bar{S}_1 D_{zq} S_1,$$

где

$$D_{zq} = C_{zq} D_{\bar{x}} C_z^T + C_z D_{\bar{x}q} C_z^T + C_z D_{\bar{x}} C_{zq}^T, \quad (3.2.28)$$

$$S_1 \mu_{z+} = D_{\bar{z}} S_1, \quad \bar{S}_1 \mu_{z+} = \bar{S}_1 D_{\bar{z}}.$$

Имеем следующий алгоритм определения чувствительности модальных оценок (матриц) дисперсий состояния, выхода и ошибки системы.

1. Определяем $D_{\bar{x}}$ из уравнения $\bar{F}D_{\bar{x}} + D_{\bar{x}}\bar{F}^T = -\bar{B}N\bar{B}^T$.

2. Найдем $D_{\bar{y}}$ и $D_{\bar{z}}$ из

$$D_{\bar{y}} = C_y D_{\bar{x}} C_y^T, \quad D_{\bar{z}} = C_z D_{\bar{x}} C_z^T,$$

где

$$C_y = [c \mid 0], \quad C_z = [-c \mid P_\Phi].$$

3. Определяем $D_{\bar{x}q}$ из уравнения (3.2.25).

4. Находим чувствительность матриц дисперсий выхода и ошибки

$$D_{yq} = C_{yq} D_{\bar{x}} C_y^T + C_y D_{\bar{x}q} C_y^T + C_y D_{\bar{x}} C_{yq}^T,$$

$$D_{zq} = C_{zq} D_{\bar{x}} C_z^T + C_z D_{\bar{x}q} C_z^T + C_z D_{\bar{x}} C_{zq}^T,$$

где

$$C_{yq} = [c_q \mid 0], \quad C_{zq} = [-c_q \mid 0].$$

5. Находим модальную оценку μ_{x+} , μ_{y+} и μ_{z+} как максимальные моды характеристических уравнений

$$\det(\mu_x I - D_{\bar{x}}) = 0, \quad \det(\mu_y I - D_{\bar{y}}) = 0, \quad \det(\mu_z I - D_{\bar{z}}) = 0.$$

6. Из соотношений (3.2.26), (3.2.27) и (3.2.28) находим π , $\bar{\pi}_1$, T_1 , \bar{T}_1 , S_1 , \bar{S}_1 .

7. Определяем чувствительности модальных оценок

$$\mu_{x+q} = \bar{\pi}_1 D_{\bar{x}q} \pi_1, \quad \mu_{y+q} = \bar{T}_1 D_{yq} T_1, \quad \mu_{z+q} = \bar{S}_1 D_{zq} S_1.$$

8. Чувствительности размеров гиперэллипсоидов правдоподобия оцениваются по чувствительностям соответствующих максимальных и минимальных полуосей

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_{(\cdot)+}}} \cdot \mu_{(\cdot)+q} \quad \text{и} \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_{(\cdot)-}}} \cdot \mu_{(\cdot)-q}.$$

Глава 4

Синтез модально-робастных многомерных систем управления

4.1. Выбор модально-робастной модели малой потенциальной параметрической чувствительности

4.1.1. Полиномиальные динамические модели (ПДМ) в задаче модального управления

В методе модального управления в модельной постановке, модель (ММ) может быть задана в произвольном базисе с матрицей состояния заданной в одной из канонических форм. В случае, если эта матрица является сопровождающей некоторый стандартный характеристический многочлен (полином), то такая ММ называется полиномиальной динамической моделью (ПДМ), то есть матрица Γ задается в канонической форме Фробениуса

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -V_n & -V_{n-1} & -V_{n-2} & \dots & -V_2 & -V_1 \end{bmatrix}, \quad (4.1.1)$$

где V_i — коэффициенты стандартного полинома ($i = \overline{1, n}$),

$$V(s) = S^n + V_1 S^{n-1} + V_2 S^{n-2} + \dots + V_n. \quad (4.1.2)$$

Очевидно, что модальный регулятор (МР) с матрицей K , синтезированный на заданную модель с матрицей Γ вида (4.1.1), доставит системе матрицу состояний $F = A - BK$, обладающую характеристическим многочленом, совпадающим с заданным стандартным $\det(SI - F) = V(s)$.

Задание модальной модели с матрицей Γ в форме сопровождающей стандартный полином, позволяет связать процедуру синтеза модального управления (регулятора), с достижениями желаемых значений динамических характеристик, широко используемых в инженерной практике: времени переходного процесса t_n , перерегулирования σ , добротности по скорости D_V , полосы частот и другими.

Наиболее широко используемыми на практике являются ПДМ, построенные на следующих стандартных полиномах:

1. биноме Ньютона;
2. полиноме Баттерворта;
3. полиноме, минимизирующем квадратичный функционал

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt, \quad \varepsilon(t) = g(t) - y(t);$$

4. полиноме, реализующем эллиптический фильтр Чебышева с параметром $\delta = 0, 1$, где δ — точность аппроксимации амплитудной характеристики в полосе $(0 + \omega_0)$;

5. полиноме с фиксированным коэффициентом затухания $\xi = 0, 75$;

6. полиноме, характеризующемся модами (корнями) с одинаковыми вещественными частями, и мнимыми частями, образующими арифметическую прогрессию.

Аналитические выражения перечисленных стандартных полиномов $(СП) V_j(s)$ с их широко используемыми параметрами t_n, σ, D_V , для порядков полиномов до шестого включительно, приведены в литературе, в частности, в приложении 3 кандидатской диссертации автора [1985]. Заметим, что все СП параметри-

зованы с помощью параметра ω_0 , называемого характеристической частотой полинома так, что $v_i = \alpha_i \omega_0^i$ ($i = \overline{1, n}$), где α_i свои для каждого типа полиномов.

Известно, что требования, предъявляемые к динамическим свойствам проектируемой системы, могут быть достигнуты методами модального управления на различных полиномиальных моделях. Такая избыточность решения может быть использована для удовлетворения дополнительным требованиям к системе. В качестве такого требования выступает малая чувствительность качественных показателей проектируемой системы к вариациям ее параметров в реальных условиях эксплуатации.

В связи с вышесказанным, при синтезе модального регулятора по требованиям малой параметрической чувствительности встает задача оценки потенциальной параметрической чувствительности, назначенной полиномиальной динамической модели.

Для решения задачи оценки потенциальной чувствительности ПДМ предлагается подход, основанный на использовании аппарата чисел обусловленности матриц, который излагается в последующих параграфах настоящей главы.

4.1.2. Числа обусловленности матриц как аппарат оценки потенциальной параметрической чувствительности ПДМ

Пусть для объекта управления (ОУ)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0), \quad y = Cx$$

про синтезирован закон управления $u = -Kx$.

Тогда полученная замкнутая система описывается уравнениями

$$\dot{x} = F(x), \quad x(0), \quad y = Cx, \quad F = A - BK,$$

или в каноническом управляемом базисе

$$\dot{x}_k = F_k x_k, \quad x_k(0), \quad y = C_k x_k.$$

Очевидно, что при номинальных значениях параметров системы матрица F_k совпадает с матрицей Γ , являющейся сопровождающей стандартный полином (СП), то есть задающей полиномиальную динамическую модель

$$\dot{z} = \Gamma z, \quad z(0), \quad (4.1.3)$$

где $z \in R^n$ — вектор состояния модели. Отмеченное совпадение матриц F_k и Γ , а также независимость структурных свойств систем от базиса математического представления, позволяет заменить исследование потенциальной чувствительности системы исследованием потенциальной чувствительности полиномиальной модели, которая понимается как характеристика возможной чувствительности проектируемой системы в физическом (реальном) базисе.

Решение уравнения (4.1.3) принимает известный вид

$$z(t) = e^{\Gamma t} z(0), \quad (4.1.4)$$

где $z(0)$ — начальное состояние (значение) системы (4.1.3), $e^{\Gamma t}$ — фундаментальная матрица решений системы (4.1.3).

Нетрудно видеть, что уравнение (4.1.4) аналогично уравнению (2.3.13), а, следовательно, мы можем оценить чувствительность решения задачи (4.1.3) к изменениям как начальных состояний, так и изменениям параметров матрицы Γ , определяя $c\{e^{\Gamma t}\}$ для различных желаемых моделей.

Такой подход к оценке чувствительности позволит оценить потенциальную параметрическую чувствительность желаемых моделей, заданных в частности стандартными полиномами с тем, чтобы выбрать СП с наименьшей потенциальной параметрической чувствительностью.

Вычислительные затраты при оценке потенциальной параметрической чувствительности ПДМ существенно сокращаются в результате использования теоремы 4.1, определяющей свойства чисел обусловленности сопровождающих матриц стандартных полиномов.

Пусть заданы стандартные полиномы n -го порядка

$$\begin{aligned} V(s) &= S^n + V_1 S^{n-1} + V_2 S^{n-2} + \dots + V_{n-1} S + V_n, \\ V'(s) &= S^n + V'_1 S^{n-1} + V'_2 S^{n-2} + \dots + V'_{n-1} S + V'_n, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

которым соответствуют сопровождающие матрицы G_1 и G_2 :

$$\begin{aligned} G_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -V_n & -V_{n-1} & -V_{n-2} & \dots & -V_1 \end{bmatrix}, \\ G_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -V'_n & -V'_{n-1} & -V'_{n-2} & \dots & -V'_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Матрицы, обратные к G_1 и G_2 , имеют вид

$$\begin{aligned} G_1^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{V_{n-1}}{V_n} & -\frac{V_{n-2}}{V_n} & \dots & -\frac{1}{V_n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \\ G_2^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{V'_{n-1}}{V'_n} & -\frac{V'_{n-2}}{V'_n} & \dots & -\frac{1}{V'_n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Определим числа обусловленности матриц G_1 и G_2 в виде

$$c\{G\} = \|G\| \cdot \|G^{-1}\|, \quad (4.1.8)$$

рассматривая матричные нормы типа

$$\|G\| = \max_j \sum_i |g_{ij}|, \quad (4.1.9)$$

где g_{ij} — элементы матрицы G .

Для сопровождающих матриц G_1 и G_2 , матричных экспонент e^{G_1} , e^{G_2} и чисел обусловленности (4.1.8) справедлива

Теорема 4.1. Если $c\{G_1\} > c\{G_2\}$,

то $c\{e^{G_1}\} > c\{e^{G_2}\}$.

Для доказательства теоремы предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Если $c\{G_1\} > c\{G_2\}$,

то для любого $k = 1, 2, \dots$ имеет место

$$c\{G_1^k\} > c\{G_2^k\}.$$

Доказательство.

Пусть $c\{G_1\} > c\{G_2\}$, т. е.

$$\|G_1\| \cdot \|G_1^{-1}\| > \|G_2\| \cdot \|G_2^{-1}\|, \quad (4.1.10)$$

где

$$\|G_1\| = 1 + V_{n-i}; \quad \|G_2\| = 1 + V'_{n-j}.$$

При этом в общем случае $i \neq i'$ и $j = j'$.

Нетрудно показать, что

$$G_1^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ -V_n & -V_{n-1} & \dots & -V_{k+1} & \dots & -V_1 \\ W_{1,n} & W_{1,n-1} & \dots & W_{1,k+1} & \dots & W_{1,1} \\ W_{2,n} & W_{2,n-1} & \dots & W_{2,k+1} & \dots & W_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ W_{k-1,n} & W_{k-1,n-1} & \dots & W_{k-1,k+1} & \dots & W_{k-1,1} \end{bmatrix} \quad (4.1.11)$$

$$(G_1^k)^{-1} = \begin{bmatrix} W'_{(n-k+1),n} & W'_{(n-k+1),n-1} & \dots & W'_{(n-k+1),1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W'_{n-2,n} & W'_{n-2,n-1} & \dots & W'_{n-2,1} \\ W'_{n-1,n} & W'_{n-1,n-1} & \dots & W'_{n-1,1} \\ \frac{V_{n-1}}{V_n} & \frac{V_{n-2}}{V_n} & \dots & \frac{1}{V_n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 1 & \dots 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.12)$$

где

$$W_{i,j} = (-V_i) \cdot (-V_j) + (-V_{i-1}) \cdot (W_{1,j}) + \dots + (-V_1) \cdot W_{i-1,j};$$

$$W'_{i,j} = \left(-\frac{V_{j-1}}{V_n}\right) \cdot W_{i+1,j} + \left(-\frac{V_{j-2}}{V_n}\right) \cdot W_{i+2,j} + \dots + \left(-\frac{1}{V_n}\right) \cdot W_{j,j}.$$

Аналогичным образом можно представить и матрицы G_2^k и $(G_2^k)^{-1}$.

Из (4.1.11) и (4.1.12) видно, что столбцы, определяющие нормы матриц G_1^k и $(G_1^k)^{-1}$, сохраняют свой номер, но тогда из структур матриц (4.2.11) и (4.1.12) в силу соотношения (4.1.10),

определяющего сравнительные величины коэффициентов стандартных полиномов, следует, что приращения норм G_1^k и $(G_1^k)^{-1}$, вызванные приращением показателя степени k на единицу, будут больше соответствующих приращений норм G_2^k и $(G_2^k)^{-1}$.

При величинах коэффициентов шести стандартных полиномов, рассматриваемых в работе, справедливо следующее.

Замечание. При значениях параметра ω_0 близких к верхней границе интервала сравнения имеет место смещение номера столбца определяющего норму матрицы $\|G^k\|$ ($k \geq 2$) на один столбец влево. Это смещение обуславливается соотношениями коэффициентов СП.

Например, при $n=2$. Для $\|G\|$ и $\|G^2\|$, если $\|G\|=1+V_1$, то $1+V_1=V_2$ или $1+\alpha_1\omega_0 > \alpha_2\omega_0^2$. Отсюда верхняя граница интервала, для бинорма Ньютона $\omega_0 \approx 2,43$.

Определим $\|G^2\|$. Сравниваем $V_2+V_1V_2$ и $V_1+V_1V_2-V_2$ или через коэффициенты α_1, α_2

$$\alpha_2\omega_0^2 + \alpha_1\alpha_2\omega_0^3 \text{ и } \alpha_1\omega_0 + \alpha_1^2\omega_0^2 - \alpha_2\omega_0^2.$$

При

$$\omega_0 \approx 2,43 (\omega_0 \leq 1,6)$$

$$\|G^2\| = V_2 + V_1^2 - V_2 = \alpha_2\omega_0^2 + \alpha_1\omega_0 - \alpha_2\omega_0^2.$$

При

$$\omega_0 \rightarrow 2,43 (\omega_0 > 1,6)$$

$$\|G^2\| = V_2 + V_1V_2 = \alpha_2\omega_0^2 + \alpha_1\alpha_2\omega_0^3.$$

Это свойство характерно для всех n , и для любого СП.

Таким же образом можно показать, что происходит смещение номера столбца, определяющего норму матрицы $\|G^{-1}\|$, но в данном случае это смещение происходит вправо на один столбец.

Но при сравнении норм сопровождающих матриц СП (и матриц обратных к ним), приращения, определяемые этими смещениями, меньше приращений, вызванных ростом показателя степени k .

Поэтому, относительные отношения порядка между нормами $\|G^k\|$ и $(\|G^{-k}\|)$ различных СП сохраняются. Таким образом, достаточно считать, что нормы $\|G^k\|(\|G^{-k}\|)$ определяются номером столбцов $\|G\|(\|G^{-1}\|)$.

Доказательство теоремы. Из доказательства леммы следует, что норма суммы $\sum_{i=0}^n G_i^i$ определяется суммой норм отдельных слагаемых, так как номер столбца с наибольшей абсолютной суммой одинаков для всех G_i^i . Такое же место имеет и для $\sum_{i=0}^n G_2^i$, следовательно, для матричных экспонент

$$e^{G_1} = I + G_1 + \frac{G_1^2}{2!} + \dots,$$

$$e^{G_2} = I + G_2 + \frac{G_2^2}{2!} + \dots,$$

справедливо соотношение

$$\|e^{G_1}\| > \|e^{G_2}\|.$$

Аналогично

$$\|e^{-G_1}\| > \|e^{-G_2}\|,$$

так как

$$(e^{G_i})^{-1} = e^{-G_i} = I - G_i + G_i^2/2! + \dots$$

и, очевидно, норма $(e^{G_i})^{-1}$ также определяется тем же столбцом, что и G_i . Таким образом, теорема доказана.

Доказанная теорема 4.1 позволяет перейти от рассмотрения соотношения порядка между $c\{e^{\Gamma_i t}\}$ и $c\{e^{\Gamma_j t}\}$ к эквивалентному в смысле сохранения этого соотношения сравнению чисел обусловленности соответствующих матриц $c\{\Gamma_i\}$ и $c\{\Gamma_j\}$.

Эта теорема позволяет упростить вычисления и сравнение полиномиальных моделей по потенциальной параметрической чувствительности, ограничившись при этом оценкой $c\{\Gamma_i\}$, где i — номер модели (стандартного полинома).

4.1.3. Числа обусловленности матриц состояний полиномиальных динамических моделей

В данном разделе получены характеристики чисел обусловленности матриц состояний шести наиболее широко используемых на практике ПДМ.

Пусть задан стандартный полином (СП)

$$V(s) = S^n + V_1 S^{n-1} + \dots + V_n, \quad (4.1.13)$$

где n — порядок полинома, а коэффициент $V_i = \alpha_i \omega_0^i$, ($i = \overline{1, n}$) представляют собой степенные функции от параметра ω_0 , именуемого характеристикой частотой, α_i — положительные коэффициенты.

Соответствующая матрица состояний ПДМ будет

$$\Gamma \triangleq \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & I_{n-1} \\ \hline -\alpha_n \omega_0^n & -\alpha_{n-1} \omega_0^{n-1} & \dots & -\alpha_1 \omega_0 \end{array} \right], \quad (4.1.14)$$

где I_{n-1} — единичная матрица $(n-1)$ -го порядка; 0 — $(n-1)$ -размерный нулевой вектор-столбец. Обратная ей матрица имеет вид

$$\Gamma^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{\omega_0} & \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{\omega_0^2} & \dots & \frac{1}{\alpha_n} & \frac{1}{\omega_0^n} \\ \hline & & & & \\ & & I_{n-1} & & 0 \end{array} \right]. \quad (4.1.15)$$

Если будем рассматривать первую матричную норму вида (4.1.9), то нормы матриц Γ и Γ^{-1} определяются выражениями

$$\|\Gamma\| = 1 + \alpha_i \omega_0^i, \quad i = \overline{1, n-1} \quad \text{или} \quad \|\Gamma\| = \alpha_n \omega_0^n, \quad (4.1.16)$$

$$\|\Gamma^{-1}\| = 1 + \frac{\alpha_i}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{\omega_0^{n-i}}, \quad i = \overline{1, n-1} \quad \text{или} \quad \|\Gamma^{-1}\| = \frac{1}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{\omega_0^n}, \quad (4.1.17)$$

где и далее рассматриваются $\omega_0 > 0$.

Из выражений (4.1.16) и (4.1.17) нетрудно видеть, что нормы $\|\Gamma\|$ и $\|\Gamma^{-1}\|$ являются непрерывными функциями ω_0 . Но тогда и $c\{\Gamma\} = \|\Gamma\| \cdot \|\Gamma^{-1}\| = f(\omega_0)$ есть непрерывная функция от ω_0 .

В силу сказанного, вытекает следующий алгоритм определения чисел обусловленности матрицы состояния ПДМ как функции от ω_0 .

1. Находятся интервалы постоянства функций (в смысле формулы), определяющих нормы матриц $\|\Gamma\|$ и $\|\Gamma^{-1}\|$, то есть находим точки пересечения функций (4.1.16) при $i = \overline{1, n}$, и функций (4.1.17) также при $i = \overline{1, n}$.

2. Определяем значения чисел обусловленности в найденных точках пересечения функций норм.

3. По найденным формулам функций, при необходимости определяем числа обусловленности для точек внутри интервалов постоянства.

В соответствии с приведенным алгоритмом построены графики зависимостей $c\{\Gamma_i\} = f_i(\omega_0)$, для шести рассматриваемых

ПДМ (СП) при $n = 2 \div 6$, которые приведены в приложении 3 кандидатской диссертации автора [1985].

Из графиков $c\{\Gamma_i\} = f_i(\omega_0)$ видно, что выбор ПДМ с наименьшей $c\{\Gamma_i\}$ определяется однозначно, только для конкретного интервала изменения ω_0 и заданного порядка системы. В общем случае, в окрестностях наблюдаемого минимума $\omega_0 \approx 1c^{-1}$, меньшими значениями $c\{\Gamma_i\}$ обладают ПДМ, построенные на полиноме Чебышева $V_4(S, \omega_0)$ и полиноме $V_3(S, \omega_0)$, а большими значениями $c\{\Gamma_i\}$ на бинOME Ньютона $V_1(S, \omega_0)$.

Полученные графики могут быть использованы для выбора ПДМ, обеспечивающей минимальную потенциальную параметрическую чувствительность заданных показателей качества проектируемой системы, если учесть известные зависимости этих показателей от ω_0 .

4.1.4. Алгоритм синтеза модально-робастного регулятора на заданные показатели качества с минимальной параметрической чувствительностью

Зависимости чисел обусловленности матриц состояний ПДМ от характеристической частоты ω_0 стандартных полиномов, полученные в предыдущем разделе, а также существующие функциональные связи показателей качества проектируемых систем от ω_0 , установленные в работах автора, часть которых приведена в кандидатской диссертации [1985], позволяют сформулировать следующий алгоритм синтеза модально-робастного (модального) регулятора с дополнительным требованием малой параметрической чувствительности системы.

1. Построить модель ОУ в форме

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx.$$

Проверить управляемость пары (A, B) . Если пара (A, B) не управляема, то она модально управляема не полностью, а частично. Этот случай рассмотрен в следующем разделе.

2. Отобразить набор требований к динамическим свойствам проектируемой системы (добротность D_r , время переходного процесса t_n , перерегулирование σ и другие) на характеристическую частоту ω_{0i} для каждого из $V_i(S, \omega_0)$, $i = \overline{1, 6}$ мерности, совпадающей с мерностью ОУ.

3. Оценить числа обусловленности матриц Γ_i ПДМ $c\{\Gamma_i\}$ для значений ω_{0i} .

4. Выбрать полиномиальную динамическую модель минимальной потенциальной параметрической чувствительности

$$\Gamma = \Gamma^* : c\{\Gamma^*\} = \min_i c\{\Gamma_i\}.$$

5. Найти модальный регулятор, на базе решения уравнения Сильвестра с предварительным назначением матрицы H , образующей с Γ^* полностью наблюдаемую пару (Γ^*, H) ,

$$M\Gamma^* - AM = -BH,$$

$$K = HM^{-1}.$$

Модальный регулятор реализует закон управления $u = -Kx$.

Продемонстрируем полученный алгоритм на примере.

Пусть ОУ описывается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{K(1+q)}{s^3}, \text{ где } K=10, q \text{ — изменяющийся параметр с}$$

номинальным значением $\bar{q}=0$, q в процессе эксплуатации принимает значения из интервала $[-0,5; 0,5]$.

Требуется, чтобы синтезированный модальный регулятор, обеспечивал системе следующие показатели качества:

$$G \leq 10\%, t_n \leq 1 \text{ с.}$$

Следуя приведенному выше алгоритму:

1. Построим модель ОУ в форме

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K(1+q) \end{bmatrix} \Big|_{q=\bar{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, C = [1:0:0].$$

2. По требованиям к $\sigma \leq 10\%$ и $t_n \leq 1$ с выбираем полиномиальные динамические модели. Все ПДМ третьего порядка удовлетворяют требованию $\sigma \leq 10\%$. Требование ко времени переходного процесса дают значение ω_0 :

- для бинома Ньютона $\omega_0 = 6 \frac{1}{\text{с}}$;
- для полинома Баттерворта $\omega_0 = 6,25 \frac{1}{\text{с}}$;
- для полинома, минимизирующего квадратичный функционал

$$\int_0^{\infty} E^2(t) dt, \omega_0 = 8,8 \frac{1}{\text{с}};$$

- для полинома, реализующего фильтр Чебышева $\omega_0 = 4,85 \frac{1}{\text{с}}$;
- для полинома с фиксированным коэффициентом затухания $S=0,75$, $\omega_0 = 4,7 \frac{1}{\text{с}}$;
- для полинома с мнимыми частями, образующими арифметическую прогрессию $\omega_0 = 4,2 \frac{1}{\text{с}}$.

3. Оцениваем числа обусловленности матриц ПДМ

$$c\{\Gamma_1\} = 324; c\{\Gamma_2\} = 322,3; c\{\Gamma_3\} = 836,4;$$

$$c\{\Gamma_4\} = 194,36; c\{\Gamma_5\} = 159,6; c\{\Gamma_6\} = 116,25.$$

4. Осуществляем выбор полиномиальной модели минимальной потенциальной параметрической чувствительности

$$\Gamma = \Gamma^*, c\{\Gamma^*\} = \min_i c\{\Gamma_i\} = 116,25,$$

$$\Gamma_6 = \Gamma^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -74,1 & -42,2 & -8,61 \end{bmatrix}.$$

5. Производим синтез модального регулятора на базе матричных уравнений $M\Gamma - AM = -BH$, $K = HM^{-1}$. Зададим $H = [1:0:0]$, образующую полностью наблюдаемую пару (Γ, H) . Действительно, матрица наблюдаемости

$$Q_H = \begin{bmatrix} H^T : \Gamma^T H^T : (\Gamma^T)^2 H^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Решение матричных уравнений дает матрицу ОС модального регулятора

$$K = [7,4:4,2:0,86].$$

Модальный регулятор реализует закон управления

$$u = -Kx = -7,4x_1 - 4,2x_2 - 0,86x_3.$$

Для проверки состоятельности оценки потенциальной параметрической чувствительности по числу обусловленности матрицы состояния Γ полиномиальной модели, выборочно исследовалась реальная чувствительность к изменению такого параметра, как коэффициент передачи ОУ $K(1+q)$ для двух ПДМ с полиномом Баттерворта и полиномом, минимизирующим квадратичный функционал, характеризующих заметным расхождением числе обусловленности $c\{\Gamma_i\}$ для значений $q = \{-0,5; -0,3; 0; 0,5\}$. Полученные результаты сведены в таблицу (табл. 4.1).

Как нетрудно видеть из таблицы, большей оценке потенциальной чувствительности соответствует большая реальная чувствительность к изменению параметров.

Таблица 4.1

№ п/п	Стандартные полиномы	$c\{\Gamma\}$	t_m, c				$\sigma, \%$			
			$q = -0,5$	$q = -0,3$	0	$q = 0,5$	$q = -0,5$	$q = -0,3$	0	$q = 0,5$
1	Стандартный полином Баттерворта	322,3	1,685	1,05	1,0	0,95	24,6	14,7	8,2	5,2
2	Минимизирующий функционал	836,4	-	1,2	1,0	0,67	100	19,6	7,3	0,4

4.1.5. Синтез модально-робастного регулятора, обеспечивающего малую потенциальную параметрическую чувствительность при особых случаях объекта управления

Алгоритм синтеза модального регулятора (МР), приведенный в предыдущем разделе, реализуем только в случае полной управляемости и измеряемости вектора состояния x ОУ. Невыполнение указанных условий, далее в работе будем называть особыми случаями ОУ.

Рассмотрим синтез МР для этих случаев ОУ.

Случай неуправляемого ОУ.

Пусть ОУ не полностью управляем, то есть ранг матрицы управляемости Q_y ОУ равен ρ

$$\text{rank} Q_y = \text{rank} [B : AB : \dots : A^{n-1}B] = \rho < n. \quad (4.1.18)$$

Тогда, как известно, ОУ модально управляем только частично, а именно, возможно управление только ρ модами.

Задача модального управления в модельной постановке сводится к отысканию матрицы на основе решения уравнения Сильвестра

$$MG - AM = -BH,$$

$$K = HM^{-1}.$$

Согласно теореме 2.1, утверждающей, что одним из необходимых и достаточных условий существования невырожденного решения M уравнения Сильвестра, является полная управляемость пары (A, B) , или иначе ОУ. Таким образом, в рассматриваемом случае M^{-1} , а значит, и матрица K не существует.

Для того чтобы разрешить задачу синтеза частичного модального управления, можно привести ОУ к базису пространства состояний, когда матрица A имеет форму Шура (или треугольную форму). Не останавливаясь на подробностях такого преобразования, которое можно найти в литературе по линейной алгебре, сформулируем следующий алгоритм синтеза модального регулятора, обеспечивающего малую потенциальную чувствительность системы для случая, когда ранг управляемости ОУ равен ρ .

1. Найти матрицу преобразования P , приводящую матрицу A ОУ к нижней форме Шура \bar{A} (нижней блочно-треугольной форме с диагональными блоками первого и второго порядков). В новом базисе матрицы ОУ находятся

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \bar{B} = PB, \bar{C} = CP^{-1}.$$

Предполагается, что матрица P ищется таким образом, что управляемые ρ мод матрицы A соответствуют диагональным блокам, расположенным сверху.

2. Разбить матрицы \bar{A} и \bar{B} на блоки

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} - \rho \times \rho, \bar{A}_{12} - \rho \times (n - \rho), \bar{A}_{21} - (n - \rho) \times \rho, \\ \bar{A}_{22} - (n - \rho) \times (n - \rho), \bar{B}_1 - \rho \times r, \bar{B}_2 - (n - \rho) \times r. \end{aligned}$$

3. Отобразить набор требований к качественным показателям системы (D_V, t_n, σ и другие) на частоту ω_{0i} для каждого полинома $V_i(s, \omega_0)$, $i = \overline{1, 6}$ мерности $\rho < n$.

4. Оценить числа обусловленности матриц $\Gamma_{i\rho}$ ПДМ мерности ρ $c\{\Gamma_{i\rho}\}$ для соответствующих значений ω_{0i} .

5. Выбрать ПДМ с матрицей $\Gamma_\rho = \Gamma_\rho^*$:

$$c\{\Gamma_\rho^*\} = \min_i c\{\Gamma_{i\rho}\}.$$

6. Найти матрицу $\bar{K}_1 - (r \times \rho)$ на основе решения уравнения Сильвестра, предварительно назначив матрицу $H_1 - (r \times \rho)$, образующую наблюдаемую пару (Γ_ρ^*, H_1)

$$M_{11}\Gamma_\rho^* - \bar{A}_{11}M_{11} = -\bar{B}_1H_1,$$

$$\bar{K}_1 = HM_{11}^{-1}.$$

7. Проверить разрешимость уравнения относительно M_{21}

$$M_{21}\Gamma_\rho - \bar{A}_{21}M_{11} - \bar{A}_{22}M_{21} = -\bar{B}_2H_1,$$

где M_{ij} — соответствующие блоки матрицы преобразования M . Если это уравнение не имеет решений, то изменить H_1 в уравнении Сильвестра с тем, чтобы обеспечить разрешимость данного уравнения.

Пусть $M_{21} = \bar{M}_{21}$ и $H_1 = \bar{H}_1$ такие, что удовлетворяют уравнению Сильвестра.

8. Матрица обратной связи K , определяющая искомый модальный регулятор, осуществляющий управление ρ модами ОУ, будет

$$\bar{K} = [\bar{H}_1 \bar{M}_{11}^{-1} : \bar{K}_2],$$

где \bar{K}_2 — нулевая матрица размерности $r \times (n - \rho)$.

9. Переход к исходному базису. Матрица $K = \bar{K}P$. Соответствующий закон управления примет вид

$$u = -\bar{K}Px = -\bar{K}\bar{x},$$

где $\bar{x} = \left[\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \dots : \bar{x}_\rho : \underbrace{* : \dots : *}_{n-\rho} \right]$.

Теперь рассмотрим второй особый случай ОУ, когда не все состояния ОУ измеряемы.

Случай наличия не измеряемых состояний ОУ

Как известно, модальный регулятор, осуществляющий управление всеми n модами, который будем называть невырожденным МР, реализуем только в случае полной измеримости вектора состояния x ОУ, что не всегда физически осуществимо. В таком случае, непосредственное измерение не измеряемых составляющих вектора состояния, заменяется его асимптотической оценкой с помощью дополнительной системы, называемой *наблюдателем*.

Для всякой наблюдаемой системы, как известно, наблюдатель существует и синтезируется на основе использования всей измеряемой информации об объекте управления, то есть информации о векторе управления u и векторе измерений y_n состояния ОУ. Пусть ОУ n -го порядка с измерителями (датчиками) состояния описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad y_n = C_n x, \quad (4.1.19)$$

где $y_n \in R^{n_n}$ — информационный выход или вектор измерений состояния ОУ, размерность которого определяется числом измеряемых состояний ОУ; C_n — $n_n \times n$ -матрица информационного выхода.

Тогда наблюдатель для такого ОУ будет иметь вид

$$\dot{\bar{x}} = \Gamma_n \bar{x} + Nu + Ly_n, \quad (4.1.20)$$

где $\bar{x} \in R^{n_n}$ — вектор состояния наблюдателя, размерность которого соответствует числу не измеряемых состояний ОУ; N, L —

матрицы входа, согласованные размерностями \bar{x} , u , y_n . Размерности систем (4.1.19) и (4.1.20) связаны следующим равенством $n_n + n_n = n$. Как и любая динамическая система, наблюдатель, в предположении, что она управляема (пара (Γ_n, L) управляема), может быть построена в произвольном базисе, например, в каноническом базисе, управляемом с матрицей Γ_n в виде сопровождающего некоторый стандартный полином. Но тогда в этом случае, для синтеза наблюдателя можно использовать аппарат полиномиальных динамических моделей, приведенный в предыдущих разделах.

Поскольку наблюдатель вырабатывает асимптотическую оценку состояний, то в установившемся режиме существует стационарное линейное преобразование, которое определяет соотношение

$$\bar{x}(t) = M_n x(t), \quad (4.1.21)$$

где M — $n_n \times n$ -матрица преобразования с $\text{rank} M_n = n_n$.

Из уравнений (4.1.19), (4.1.20), (4.1.21) нетрудно получить соотношения, которым должны удовлетворять матрицы наблюдателя и объекта.

$$M_n A - \Gamma_n M_n = LC_n, \quad (4.1.22)$$

$$N = M_n B. \quad (4.1.23)$$

Отсюда видно, что эта система, первое уравнение которой есть уравнение Сильвестра, разрешима относительно M_n , Γ_n , L , N только в случае управляемости пары (Γ_n, L) . Процесс сходимости $\bar{x}(t)$ и $M_n x(t)$ полностью определяется свойствами матрицы Γ_n . Действительно. Введем в рассмотрение вектор невязки

$$e(t) = M_n x(t) - \bar{x}(t). \quad (4.1.24)$$

Тогда из (4.1.19), (4.1.20), учитывая (4.1.22), (4.1.23), будем иметь

$$\dot{e}(t) = \Gamma_H e(t), \quad e(0) = M_H x(0) - \alpha(0). \quad (4.1.25)$$

Таким образом, задавая темп оценивания и характер асимптотического приближения $\alpha(t)$ и $M_H x(t)$ или $e(t)$ к нулю величинами t_n и σ , можно корректно выбрать матрицу Γ_H наблюдателя с заданными показателями качества и минимальной потенциальной чувствительности, если воспользоваться аппаратом числа обусловленности ПДМ, рассмотренным в предыдущих параграфах.

Перейдем к рассмотрению алгоритма синтеза модального регулятора с наблюдателем, называемого динамическим модальным регулятором в отличие от обычного модального регулятора, называемого статическим.

Динамический модальный регулятор реализует закон управления в виде

$$u = -Kx_e, \quad (4.1.26)$$

где x_e — оценка вектора состояния, вырабатываемая датчиками (измерителями) и асимптотическим наблюдателем, удовлетворяющая соотношению

$$x_e = \begin{bmatrix} C_H \\ M_H \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_H \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (4.1.27)$$

Представим закон управления (4.1.26) в виде

$$u = -Du_H - E\alpha, \quad (4.1.28)$$

где матрицы D и E удовлетворяют условию

$$[D : E] = K \begin{bmatrix} C_H \\ M_H \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4.1.29)$$

Тогда, алгоритм синтеза динамического регулятора, обеспечивающего системе заданные показатели качества и малую потенциальную параметрическую чувствительность, будет следующий.

1. Представить ОУ с набором датчиков в форме «вход—состояние—выход»

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad y_H = C_H x.$$

2. Отобразить набор требований к динамике (показателям качества) проектируемой системы, на величину характеристической частоты ω_{0i} для каждого из $V_i(s, \omega_0)$ мерности n , совпадающей с мерностью ОУ.

3. Оценить числа обусловленности матриц ПДМ $c\{\Gamma_i\}$ и выбрать

$$\Gamma = \Gamma^* : c\{\Gamma^*\} = \min_i c\{\Gamma_i\}.$$

4. Найти матрицу K статического модального регулятора по уравнениям

$$M\Gamma^* - AM = -BH,$$

$$K = HM^{-1},$$

где (Γ^*, H) — наблюдаема.

5. Отобразить набор требований к динамике процесса асимптотического оценивания неизмеримых датчиками составляющих вектора состояния, на величину ω_{0i} для каждого $V_H(s, \omega_0)$ мерности, равной числу не измеряемых состояний n_H .

6. Оценить числа обусловленности матриц ПДМ Γ_H , построенных как сопровождающие $V_H(s, \omega_0)$ и выбрать

$$\Gamma_H = \Gamma_H^* : c\{\Gamma_H^*\} = \min_i c\{\Gamma_H\}.$$

7. Найти матрицу M_H и N , удовлетворяющие уравнениям

$$M_H A - \Gamma_H^* M_H = LC_H, \quad N = M_H B,$$

где L задается с требованием управляемости пары (Γ_H^*, L) .

8. Построить наблюдатель в виде

$$\dot{\alpha} = \Gamma_H^* \alpha + Nu + Ly_H.$$

9. Найти матрицы D и E , удовлетворяющие

$$[D : E] = K \begin{bmatrix} C_H \\ M_H \end{bmatrix}^{-1}$$

10. Построить динамический модальный регулятор, реализующий закон управления

$$u = -Dy_H - E\alpha.$$

Полная схема системы с динамическим модальным регулятором, осуществляющим закон управления $u = g - Dy_H - E\alpha$, где g — внешний вход, примет вид, показанный на рис. 4.1, где обозначены ОУ — объект управления, H — наблюдатель, ДР — динамический модальный регулятор.

Итак, имеем следующее множество уравнений, описывающих спроектированную систему с динамическим модальным регулятором

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, y = Cx, y_H = C_H x; \\ \dot{\alpha} = \Gamma_H \alpha + Nu + Ly_H; \\ u = g - Dy_H - E\alpha, \end{cases} \quad (4.1.30)$$

или, если использовать уравнение невязки $e(t) = M_H x(t) - \alpha(t)$, то выражения (4.1.30) принимают вид

$$\dot{\xi} = F_\xi \xi + B_\xi g, y = C_\xi \xi, \quad (4.1.31)$$

где

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}; F_\xi = \begin{bmatrix} A - BK & BE \\ 0 & \Gamma_H \end{bmatrix}; B_\xi = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}; C_\xi = [C : 0]. \quad (4.1.32)$$

Из (4.1.32) видно, что собственные значения ОУ с регулятором и наблюдателем разделены, но последние оказывают влияние на динамику процессов в системе, что требует дополнительной проверки качества спроектированной системы.

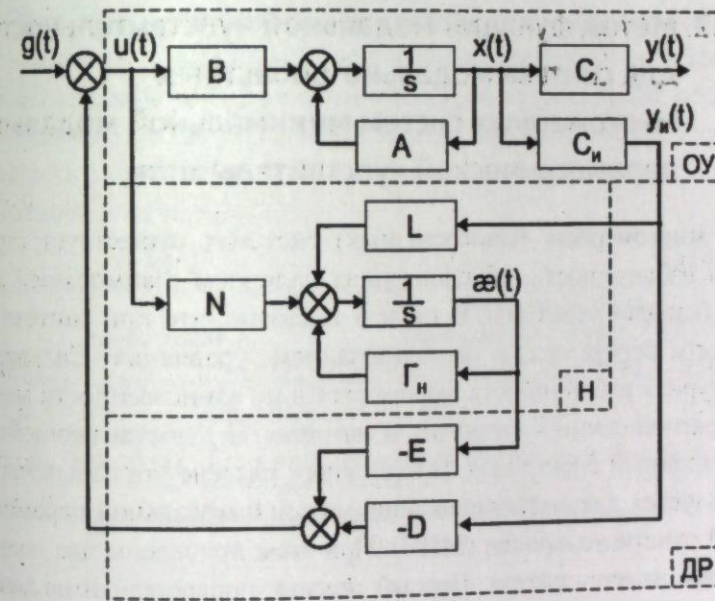


Рис. 4.1

В случае, если суммарный порядок объекта управления и наблюдателя не очень высокий, то есть существует ПДМ соответствующего порядка с набором динамических свойств, то необходимо для учета влияния наблюдателя на динамику всей системы выбирать оптимальный стандартный полином порядка $n + n_H$ так, что

$$V^*(s, \omega_0) = \det(sI - F) \det(sI - \Gamma_H) = V_F(s) V_H(s),$$

где

$$F = A - BK, V_F(s) = \det(sI - F), V_H(s) = \det(sI - \Gamma_H),$$

и вести синтез в соответствии с описанным алгоритмом (без минимизации по $c\{\Gamma\}$) на полиномы $V_F(s)$ и $V_H(s)$, которые не будучи стандартными, в совокупности дают стандартный с известными свойствами.

Заметим, что приведенный выше алгоритм синтеза динамического регулятора, реализуем только в случае управляемости и наблюдаемости ОУ. В случае не полной управляемости ОУ, про синтезировать вырожденный ДР, воспользовавшись алгоритмом, приведенным в пункте 4.5.1 настоящего параграфа.

4.2. Метод функций модальной чувствительности для синтеза модально-робастных многомерных систем минимальной модальной параметрической чувствительности

В многомерных (многосвязных) системах существует структурная избыточность, обусловленная наличием взаимосвязей контуров (каналов) системы. В главе 1 показано, что при синтезе модального регулятора с использованием уравнения Сильвестра структурная избыточность выражается в не единственности матрицы обратной связи K (а значит, и матрицы H), доставляющей системе заданный спектр мод. В настоящем разделе эта избыточность используется для достижения минимальной модальной параметрической чувствительности (МПЧ). При этом приведены два подхода к данной задаче синтеза. Первый подход, построенный на методе функций модальной чувствительности, позволяет синтезировать системы МПЧ при конкретно известных и малых (до $30 \div 40\%$ от номинала) вариациях параметров, а второй подход, основанный на базе аппарата числе обусловленности матриц, рекомендуется использовать при априори неизвестных варьируемых параметрах.

4.2.1. Основные положения подхода синтеза, построенного на методе функций модальной чувствительности

Пусть для объекта управления синтезируется система с модальным регулятором, матрица K которого находится на основе решения уравнения Сильвестра

$$MG - AM = -BH, \quad (4.2.1)$$

$$K = HM^{-1}, \quad (4.2.2)$$

где все матрицы те же, что и в главе 1, пара (A, B) — управляема.

Пусть далее выбрана (или задана) в диагональном виде матрица состояния модальной модели

$$\Gamma = \text{diag} \{ \lambda_i \}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь будем считать, что матрицу Γ мы выбрали с привлечением аппарата ПДМ на основе алгоритма, приведенного выше, то есть моды совпадают с модами матриц состояния ПДМ, обеспечивающей минимальную потенциальную параметрическую чувствительность системе. Моды ПДМ 6 типов, рассматриваемых в работе, приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

№	Моды ПДМ		Полиномиальные динамические модели (ПДМ)							
			1	2	3	4	5	6		
1	λ_1	λ_1 / ω_0	-1	-1	-1	-2	-1	-1		
2	$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm j\beta_1$	α_1 / ω_0	-1(2)	-0,707	-0,5	-0,55	-0,75	-0,69		
			-	0,707	0,87	0,9	0,661	0,724		
3	λ_1	λ_1 / ω_0	-1(3)	-1	-0,57	-0,5	-1	-0,683		
			$\lambda_{2,3} = \alpha_1 \pm j\beta_1$	α_1 / ω_0	-	-0,5	-0,215	-0,25	-0,75	-0,683
					β_1 / ω_0	-	0,866	1,31	0,97	0,661
4	$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm j\beta_1$	α_1 / ω_0	-1(4)	-0,924	-0,395	-0,342	-0,75	-0,65		
			β_1 / ω_0	-	0,383	0,505	0,41	0,662	0,51	
		$\lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm j\beta_2$	α_2 / ω_0	-	-0,383	-0,105	-0,142	-0,75	-0,65	
				β_2 / ω_0	-	0,924	1,57	0,988	0,661	1,021
5	λ_1	λ_1 / ω_0	-1(5)	-1	-0,41	-0,29	-1	-0,5		
			$\lambda_{2,3} = \alpha_1 \pm j\beta_1$	α_1 / ω_0	-	-0,809	-0,235	-0,235	-0,75	-0,5
					β_1 / ω_0	-	0,588	0,88	0,611	0,661
			$\lambda_{4,5} = \alpha_2 \pm j\beta_2$	α_2 / ω_0	-	-0,309	-0,06	-0,09	-0,75	-0,5
β_2 / ω_0	-	0,951			1,70	0,989	0,661	1,497		
6	$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm j\beta_1$	α_1 / ω_0	-1(6)	-0,966	-0,315	-0,232	-0,75	-0,622		
			β_1 / ω_0	-	0,259	0,235	0,267	0,661	0,397	
		$\lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm j\beta_2$	α_2 / ω_0	-	-0,707	-0,155	-0,17	-0,75	-0,622	
				β_2 / ω_0	-	0,707	1,50	0,728	0,661	0,794
$\lambda_{5,6} = \alpha_3 \pm j\beta_3$	α_3 / ω_0	-	-0,259	-0,03	-0,062	0,75	-0,622			
		β_3 / ω_0	-	0,966	1,78	0,995	0,661	1,191		

Отметим, что в случае одномерных систем выбором матрицы Γ ПДМ достигается возможная из заданного множества моделей минимальная потенциальная параметрическая чувствительность проектируемой системы. А в случае же многомерных систем, как уже ранее отмечалось, существует дополнительная возможность выбора матрицы, обеспечивающей минимальную модальную параметрическую чувствительность. Не единственность матрицы K при использовании для синтеза МР уравнения Сильвестра (4.2.1) выражается в произвольности матрицы H с ограничением только на наблюдаемость пары (Γ, H) .

Итак, поставим задачу найти матрицу H , удовлетворяющую уравнению Сильвестра, такую, что она:

1. образует наблюдаемую пару (Γ, H) ;
2. обеспечивает минимум функционалу чувствительности в виде евклидовой нормы матрицы модальной чувствительности S_λ

$$J_{S_\lambda} = \|S_\lambda\|_E = \left(\sum_{i,j} |\lambda_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (4.2.3)$$

Как было показано в главе 2, при доказательстве теоремы 2.1. ограничение 1) на матрицу H не является сильным, то есть множество H , удовлетворяющее (4.2.1) с данным ограничением велико, например, при λ_i различных, H — любая ненулевая матрица.

В поставленной задаче синтеза, как и во всякой задаче нахождения экстремумов функционалов, естественным образом возникают вопросы существования локальных и глобальных экстремумов. В данном случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. Существует и притом единственная область минимального уровня функционала $J_{S_\lambda} = \|S_\lambda\|_E$ по параметрам (элементам) матрицы H .

Для доказательства теоремы 4.2 предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 1. Для того чтобы задать произвольную матрицу $H - r \times n$, удовлетворяющую (4.2.1) в задаче минимизации функционала (4.2.3), достаточно положить параметры (элементы) первой строки матрицы H равными единицами, а остальные параметры считать произвольными, то есть

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \gamma_1^{(2)} & \gamma^{(2)} & \dots & \gamma_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1^{(r)} & \gamma^{(r)} & \dots & \gamma_n^{(r)} \end{bmatrix}, \quad (4.2.4)$$

где $\gamma_i^{(d_k)}$ — произвольные вещественные числа,

$i = \overline{1, n}$, $d_k = \overline{2, r}$ — индексы.

Прежде чем сформулировать вторую лемму, дадим определение.

Определение 4.1. Линейными произведениями некоторых параметров p_1, p_2, \dots, p_k , где k — натуральное число, будем считать произведения вида $\alpha \cdot \Pi \cdot p_i = \alpha \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_i \cdot \dots \cdot p_k$, где k — скаляр (вещественное число, не равное нулю), Π — знак произведения, любые из p_i , $i = \overline{1, k}$ могут отсутствовать под знаком произведения.

Определение 4.2. Дробно-линейной функцией некоторых величин $l_1, l_2, l_3, \dots, l_s$, где s — натуральное число, будем называть функцию, заданную в виде дроби, где в числителе и знаменателе стоят суммы

$$\sum \beta_i l_i = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \dots + \beta_s l_s,$$

где β_i — скаляр (число, которое для некоторых $i = \overline{1, s}$ возможно равно нулю).

Итак, справедлива лемма.

Лемма 2. Элементы матрицы S_λ есть дробно-линейные функции линейных произведений параметров (элементов) матрицы H .

Доказательство леммы 1.

Представим алгоритм определения функций модальной чувствительности применительно к задаче синтеза, граф-схемой, приведенной на рис. 4.2.



Рис. 4.2

Не теряя общности рассуждений, докажем лемму для случая r_2 .

Пусть

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \end{bmatrix}. \quad (4.2.5)$$

Решаем уравнение Сильвестра в общем виде, то есть пусть

$$A = [a_{ij}], \quad i, j = \overline{1, n}; \quad B = [b_{ks}], \quad k = \overline{1, n}, \quad s = 1, 2; \quad (4.2.6)$$

$$M = [m_{ld}], \quad l, d = \overline{1, n}; \quad \Gamma = \text{diag}\{\lambda_i\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда для первого столбца матрицы M будем иметь

$$\begin{aligned} \lambda_1 m_{11} - \sum a_{1l} m_{l1} &= -(b_{11} h_{11} + b_{12} h_{21}) \\ \lambda_1 m_{21} - \sum a_{2l} m_{l1} &= -(b_{21} h_{11} + b_{22} h_{21}) \\ &\dots \\ \lambda_1 m_{n1} - \sum a_{nl} m_{l1} &= -(b_{n1} h_{11} + b_{n2} h_{21}). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Предполагая единственность решения уравнения Сильвестра, из системы (4.2.7) по правилу Крамера находим

$$m_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1}; \quad m_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_1}; \quad \dots; \quad m_{n1} = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_1}, \quad (4.2.8)$$

где Δ_1 — определитель системы (4.2.7), Δ_{1i} ($i = \overline{1, n}$) — определитель, получаемый из определителя системы Δ_1 заменой i -го столбца правой частью системы (4.2.7).

Если теперь положим

$$h_{21} = \gamma_1 \cdot h_{11}, \quad (h_{11} \neq 0), \quad (4.2.9)$$

то очевидно

$$m_{11} = \frac{h_{11} \cdot f'_i(\lambda_1, a_{ij}, b_{ks}, \gamma_1)}{f(\lambda_1, a_{ij})}, \quad (4.2.10)$$

где индексы $i, j, k, l = \overline{1, n}$; $s = 1, 2$, а $f(\lambda_1, a_{ij})$ и $f'_i(\lambda_1, a_{ij}, b_{ks}, \gamma_1)$, соответственно, некоторые функции от элементов λ_1, a_{ij} и $\lambda_1, a_{ij}, b_{ks}, \gamma_1$.

Аналогично (4.2.10) для элементов остальных столбцов матрицы M , полагая

$$h_{22} = \gamma_2 \cdot h_{12}, h_{23} = \gamma_3 \cdot h_{13}, \dots, \\ h_{2n} = \gamma_n \cdot h_{1n},$$

будем иметь

$$m_{12} = \frac{h_{12} \cdot f'_i(\lambda_2, a_{ij}, b_{ks}, \gamma_2)}{f(\lambda_2, a_{ij})}, \\ \dots \dots \dots \\ m_{1n} = \frac{h_{1n} \cdot f'_i(\lambda_n, a_{ij}, b_{ks}, \gamma_n)}{f(\lambda_n, a_{ij})}. \quad (4.2.11)$$

Для удобства записей обозначим

$$\frac{f'_i(\lambda_d, a_{ij}, b_{ks}, \gamma_d)}{f(\lambda_d, a_{ij})} = f_i(\lambda_d, a_{ij}, b_{ks}, \gamma_d), \quad (4.2.12)$$

тогда элементы матрицы будут равны

$$m_{id} = [h_{1d} \cdot f_i(\lambda_d, a_{ij}, b_{ks}, \gamma_d)]. \quad (4.2.13)$$

Если теперь искать M^{-1} в виде

$$M^{-1} = \text{adj}M / \det M, \quad (4.2.14)$$

где $\text{adj}M$ и $\det M$ — соответственно матрицы, присоединенные к и определитель матрицы M , то из (4.2.13) нетрудно найти

$$\det M = h_{11} \cdot h_{12} \cdot h_{13} \cdot \dots \cdot h_{1n} \cdot F_0(\lambda_1, a_{ij}, b_{ks}, \gamma_1), \quad (4.2.15)$$

$$(\text{adj}M)_{id} = \left[\left(\prod_{\substack{d=1 \\ d \neq i}}^n h_{1d} \right) \cdot F_d(\{\lambda \cdot d\}, a_{ij}, b_{ks}, \{\gamma_d\}) \right], \quad (4.2.16)$$

где $F_d(d = \overline{0, n})$ — некоторые функции от элементов, заключенных в скобках; $\{\lambda \cdot d\}$ и $\{\gamma_d\}$ — множества, такие, что $d = \overline{1, n}$, $d \neq l$.

Для матрицы чувствительности по j -му параметру будем иметь

$$\Gamma_{qj} = M^{-1} F_{qj} M^{-1} F_{qj} M, \quad (4.2.17)$$

где

$$F_{qj} = A_{qj} - B_{qj} K - B K_{qj}.$$

Заметим, что в задаче синтеза предполагаем $K_{qj} = 0$. Пусть

$$F_{qj} = [f_{ij}],$$

где f_{ij} — числовые элементы матрицы.

Тогда, рассматривая диагональные элементы матрицы Γ_{qj} , представляющие функции чувствительности мод матрицы системы F , получим

$$\Gamma_{qj} = \begin{bmatrix} F_n(\lambda_1, a_{ij}, b_{ks}, f_{ij}) & * & \dots & * \\ * & F_{22}(\lambda_1, a_{ij}, b_{2s}, f_{ij}, \gamma_1) & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & F_m(\lambda_1, a_{ij}, b_{ms}, f_{ij}, \gamma_1) \end{bmatrix}, \quad (4.2.18)$$

где F_u — некоторые функции от элементов

$$\lambda_1, a_{ij}, b_{ks}, f_{ij}, \gamma_i, i = \overline{1, n}.$$

Итак, мы получили функции модальной чувствительности, не зависящие от элементов первой строки матрицы H .

Так как параметр q_j рассматривался произвольным, то и $\|S\|_E$ не зависит от $h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1n}$, а является функцией от

$$\lambda_i, a_{ij}, b_{ks}, \gamma_i, f_{ij} \quad (i, j, k = \overline{1, n}; s = 1, 2).$$

Доказанная лемма позволяет сократить вычислительные затраты при решении задачи синтеза и констатирует тот факт, что первые n элементов матрицы H — не свободны, а определяются условием обеспечения требуемой структуры мод проектируемой системы.

Примечание к лемме 1. Если при некотором $i = \overline{1, n}$, $h_{1i} = 0$, то согласно (4.2.9) необходимо рассматривать $h_{ij} = \gamma_j \cdot h_{ij}$, где $h_{ij} \neq 0, s \neq 1$.

Доказательство леммы 2.

Будем искать элементы матрицы S_x согласно алгоритму синтеза (см. рис. 4.2).

Решим уравнение Сильвестра, задавая матрицы в виде (4.2.6), а матрицу

$$B = [b_{ks}], \quad k = \overline{1, n}; \quad s = \overline{1, r}. \quad (4.2.19)$$

Предполагая единственность решения уравнения Сильвестра аналогично результату (4.2.8) леммы 1, будем иметь

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{bmatrix} = -G^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} + \sum_{s=2}^r b_{1s} \cdot \gamma_1^{(s)} \\ b_{21} + \sum_{s=2}^r b_{2s} \cdot \gamma_1^{(s)} \\ \dots \\ b_{n1} + \sum_{s=2}^r b_{ns} \cdot \gamma_1^{(s)} \end{bmatrix}, \quad (4.2.20)$$

где G^{-1} — матрица, обратная матрице

$$G = \begin{bmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda_1 - a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Из (4.2.20) нетрудно видеть, что элементы 1-го столбца матрицы M есть линейные комбинации параметров 1-го столбца матрицы H (т. е. линейные комбинации параметров $\gamma_1^{(2)}, \gamma_1^{(3)}, \dots, \gamma_1^{(r)}$ и 1).

Введем следующие обозначения линейных комбинаций параметров (элементов) первого столбца матрицы

$$\begin{aligned} L_1^{(1)} &\triangleq \sum_{k=1}^n g_{1k} \left[b_{k1} + \sum_{s=2}^r b_{ks} \cdot \gamma_1^{(s)} \right], \\ L_1^{(2)} &\triangleq \sum_{k=1}^n g_{2k} \left[b_{k1} + \sum_{s=2}^r b_{ks} \cdot \gamma_1^{(s)} \right], \\ &\dots \dots \dots \\ L_1^{(n)} &\triangleq \sum_{k=1}^n g_{nk} \left[b_{k1} + \sum_{s=2}^r b_{ks} \cdot \gamma_1^{(s)} \right], \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

где g_{ik} — элементы матрицы G . Тогда (4.2.20) примет вид

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1^{(1)} \\ L_1^{(2)} \\ \vdots \\ L_1^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (4.2.22)$$

Аналогично можно видеть, что элементы 2-го столбца матрицы образуются линейными комбинациями 1, $\gamma_2^{(s)}$ ($s = \overline{2, r}$) и так далее, элементы n -го столбца есть линейные комбинации параметров n -го столбца матрицы H , то есть 1, $\gamma_n^{(s)}$ ($s = \overline{2, r}$).

Если ввести для элементов j -го столбца матрицы M обозначения, аналогичные (4.2.21), (4.2.22) с соответствующими нижними индексами j ($i=1, n$), то матрица M примет вид

$$M = [M_1 | M_2 | \dots | M_n] = [L_j^{(i)}]. \quad (4.2.23)$$

Рассмотрим обратную матрицу M^{-1}

$$M^{-1} = \text{adj}^T M / \det M.$$

Из (4.2.23) получаем

$$\det M = \det [M_1 | M_2 | \dots | M_n] = \prod_{i=1}^n L_i^{(0)}, \quad (4.2.24)$$

где через $L_i^{(0)}$ обозначена некоторая (отличная от (4.2.23)) линейная комбинация параметров i -го столбца матрицы H , а \prod — знак произведения.

Представим присоединенную матрицу в виде

$$\text{adj} M = [M'_1 | M'_2 | \dots | M'_n]^T,$$

где M'_i ($i=\overline{1, n}$) — минор i -го столбца матрицы M .

Тогда из (4.2.23) получим

$$(\text{adj} M)_{id} = \prod_{i=1}^n L_{di}^{(ld)}, \quad l, d = \overline{1, n}, \quad (4.2.25)$$

где $L_i^{(ld)}$ — линейные комбинации i -го столбца матрицы H с точностью до значений коэффициентов.

Таким образом, используя (4.2.23–4.2.25) для вектора модальной чувствительности по j -му варьируемому параметру, определяющегося диагональными элементами матрицы $\Gamma_{qj} = M^{-1} F_{qj} M$, будем иметь

$$\Gamma_{qj} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^n L_{ik}^{1q_j}}{\prod_{i=1}^n L_i^{(0)}} & * & \dots & * \\ * & \frac{\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^n L_{ik}^{2q_j}}{\prod_{i=1}^n L_i^{(0)}} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \frac{\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^n L_{ik}^{nq_j}}{\prod_{i=1}^n L_i^{(0)}} \end{bmatrix}, \quad (4.2.26)$$

где $L_{ik}^{jq_j}$ — некоторые линейные комбинации от параметров i -го столбца матрицы H .

Определяя матрицы Γ_{qj} по всем варьируемым параметрам q_j , $j = \overline{1, p}$, получим матрицу модальной чувствительности

$$S_\lambda = [\lambda_{ij}], \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (4.2.27)$$

где функция чувствительности i -й моды по j -му параметру

$$\lambda_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n L_{sk}^{iq_j}}{\prod_{s=1}^n L_s^{(0)}}, \quad (4.2.28)$$

представляет собой дробно-линейную функцию линейных произведений параметров матрицы H , что и требовалось доказать по лемме 2.

Следствия из леммы 2.

1. В декартовых плоскостях любой пары параметров матрицы H числитель и знаменатель (4.2.28) представляет уравнение

гиперболы, так как при этом числитель и знаменатель (4.2.28) представляется функцией

$$f(\gamma_i^{d_1}, \gamma_j^{d_2}) = c_1 + c_2 \gamma_i^{d_1} + c_3 \gamma_j^{d_2} + c_4 \gamma_i^{d_1} \gamma_j^{d_2}, \quad (4.2.29)$$

где $\gamma_i^{d_1}, \gamma_j^{d_2}$ — любые два параметра H ($i \neq j$), c_1, c_2, c_3, c_4 — числовые коэффициенты.

Из этого следствия вытекает вывод, что в плоскости любой пары $\gamma_i^{d_1}, \gamma_j^{d_2}$ можно найти значение нуля λ_{ij} ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$), определяемое гиперболой (4.2.29).

2. В сечениях плоскостями $JO\gamma_i^{d_k}$ ($i = \overline{1, n}, d_k = \overline{2, r}$) λ_{ij} также определяются гиперболой

$$\lambda_{ij} = \frac{c'_1 + c'_2 \gamma_i^{d_k}}{c''_1 + c''_2 \gamma_i^{d_k}}, \quad (4.2.30)$$

где c', c'_2, c'', c''_2 — коэффициенты.

Перейдем к доказательству теоремы 4.2.

Доказательство теоремы 4.2.

Возьмем из (4.2.30) модуль

$$|\lambda_{ij}| = \left| \frac{c'_1 + c'_2 \gamma_i^{d_k}}{c''_1 + c''_2 \gamma_i^{d_k}} \right|, \quad (4.2.31)$$

тогда в плоскостях $JO\gamma_i^{d_k}$ будем иметь для (4.2.31) штрихпунктирную кривую, показанную на рис. 4.3.

Если же взять квадраты λ_{ij}^2 , то очевидно, что мы будем иметь сплошную кривую, т. е. в каждой плоскости $JO\gamma_i^{d_k}$ квадрат λ_{ij}^2 будет иметь единственное минимальное значение, равное нулю, а в остальных областях плоскости кривая λ_{ij}^2 монотонно стремится либо к бесконечности, либо к некоторой положительной величине.

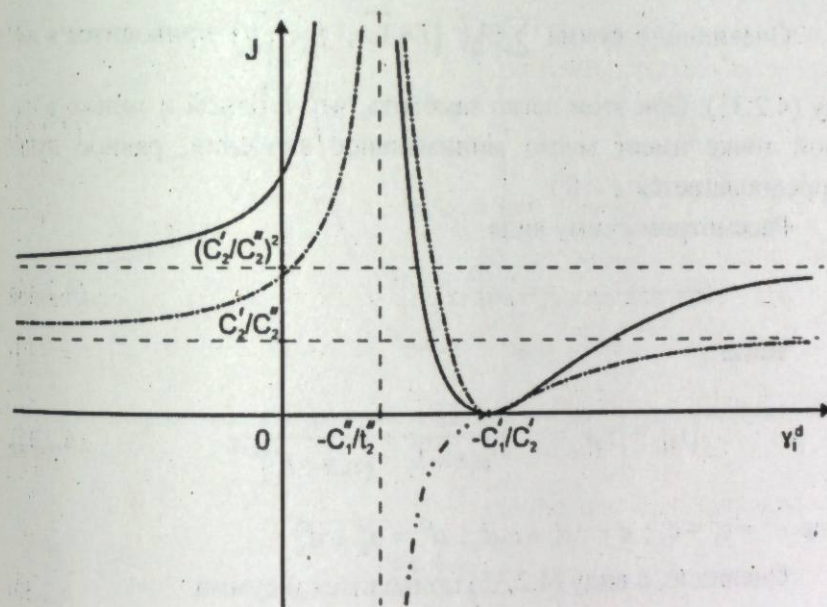


Рис. 4.3

Очевидно, суммирование всех λ_{ij}^2 даст также единственную (по параметрам $\gamma_i^{d_k}$) область минимума суммы $\sum \lambda_{ij}^2$. Покажем это.

Пусть уравнения гипербол y_1 и y_2 имеют вид

$$y_1 = c_1 + \frac{d}{a_1 x + b_1}, \quad y_2 = c_2 + \frac{d_2}{a_2 x + b_2}.$$

Просуммируем по абсолютной величине

$$y = |y_1| + |y_2|. \quad (4.2.32)$$

Так как знаменатели всех $|\lambda_{ij}|$ одинаковы, а именно, равны $\det M$, то $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Тогда, очевидно, сумму (4.2.32) можно привести к виду

$$y = |y_1| + |y_2| = c + \frac{d}{a_1 x + b_1}. \quad (4.2.33)$$

Очевидно, и сумма $\sum_{i,j} |\lambda_{ij}|$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$) приводится к виду (4.2.33). При этом легко заметить, что в одной и только в одной точке имеет место минимальное значение, равное нулю (предполагается $c \neq 0$).

Рассмотрим сумму вида

$$y = |y_1|^2 + |y_2|^2. \quad (4.2.34)$$

Тогда

$$|y_1|^2 + |y_2|^2 = c^2 + \frac{2e}{a_1 x + b_1} + \frac{d^2}{(a_1 x + b_1)^2}, \quad (4.2.35)$$

где $c^2 = c_1^2 + c_2^2$; $e = c_1 d_1 + c_2 d_2$; $d^2 = d_1^2 + d_2^2$.

Очевидно, к виду (4.2.35) приводится и сумма

$$\sum_{i,j} |\lambda_{ij}|^2 = S_x^2 = J = y, \quad (4.2.36)$$

где

$$c^2 = c_{11}^2 + c_{12}^2 + \dots + c_{np}^2; \quad d^2 = d_{11}^2 + d_{12}^2 + \dots + d_{np}^2;$$

$$e = c_{11} d_{11} + c_{12} d_{12} + \dots + c_{np} d_{np};$$

постоянные $a_1 \neq 0, b_1, c_y, d_y$ ($i = \overline{1, n}; d = \overline{1, p}$) — есть соответствующие коэффициенты слагаемого $|\lambda_{ij}|^2$, определяемые при фиксированных значениях остальных параметров

$$\gamma^{d_i} (j = \overline{1, n}, d_k = \overline{2, r}, j \neq i, d_k \neq d).$$

В дальнейшем мы будем иметь в виду именно такой функционал.

Таким образом, сечение гиперповерхности определяемой функционалом J любой плоскостью $JO\gamma_i^d$ есть кривая, показанная на рис. 4.4, которая является элементарной нелинейной дробно-рациональной функцией.

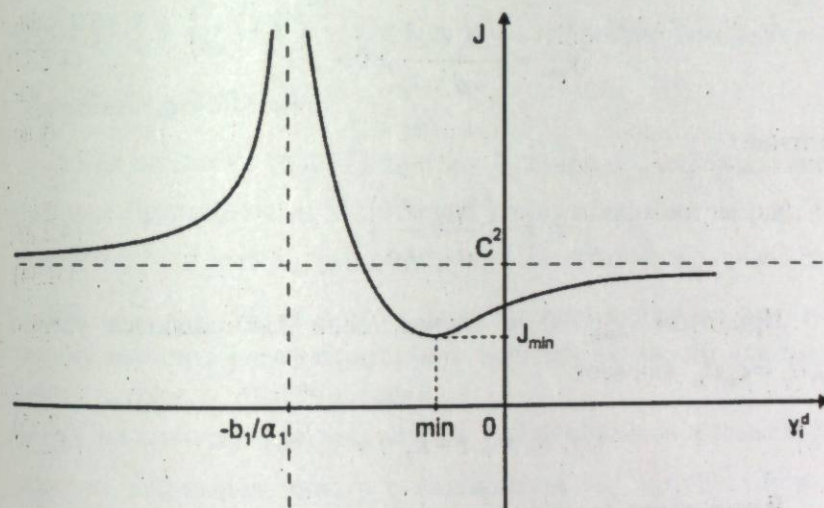


Рис. 4.4

Такая же картина имеет место во всех плоскостях «параллельных» плоскости $JO\gamma_i^d$ (с наличием единственного минимума).

Учитывая очевидное утверждение (в силу элементарности рассматриваемой функции), что функция (4.2.34) непрерывна (кроме точки $x = -b_1/a_1$), приходим к выводу о существовании единственного минимума функционала J .

Действительно, во-первых, единственный минимум элементарной функции (4.2.35) существует.

Во-вторых, если предположить, что существует любой второй минимум функционала J , то из непрерывности вытекает, что существует хотя бы один максимум (или поверхность постоянного уровня) функционала J . Но тогда картина в сечении гиперповерхности плоскостью «параллельно» хотя бы одной плоскости $JO\gamma_i^d$ будет иметь вид отличный от рис. 4.3, то есть будет характеризоваться наличием максимума или горизонтального участка.

Функция (4.2.35) подробно исследована в общедоступной литературе, поэтому подробное ее исследование опустим. Рассматриваемая функция в общем случае имеет единственный минимум

$$y_{\min} = \frac{c_2 d_2 - e^2}{d^2} \geq 0, \quad (4.2.37)$$

в точке

$$x_0 = -\left(\frac{b_1}{a} + \frac{d^2}{a_1 e}\right). \quad (4.2.38)$$

При этом $y_{\min} = 0$ в случае, если выполняются условия $c_j d_{jj} = c_k d_{kk}$ для всех

$$i, j, k, s : i \neq k, j \neq s. \quad (4.2.39)$$

В этой точке $x = -(b_1/a_1 - e/c^2 a_1)$.

Таким образом, утверждение о наличии единственного минимума функции y (4.2.36), а также положение о непрерывности функционала J , позволяют сделать вывод о наличии единственного минимального значения J . При этом значение J_{\min} определяется точкой (точками) подпространства размерности $n(r-1)$, в которой имеет место равенство y_{\min} (4.2.37) по всем координатам этой точки.

Из следствия 1 леммы (4.2.29) вытекает, что в общем случае проекции поверхности уровня (одинакового значения J) на плоскостях любых пар параметров

$$\gamma_i^{d_1}, \gamma_j^{d_2} \quad (i \neq j, d_1 \neq d_2, i, j = \overline{1, n}, d_1, d_2 = \overline{2, r})$$

представляют собой гиперболы, то есть имеет место не минимум функционала J , а область минимального значения J .

Итак, теорема 4.2 доказана.

Примечания к теореме 4.2

1. В процедуре отыскания $H = H^*$, доставляющей системе МПЧ в первоначальной постановке, необходима минимизация

нормы $\|S_\lambda\|_E = \left(\sum |\lambda_{ij}|^2\right)^{1/2}$, которая здесь корректно заменена рассмотрением функционала $J = \sum |\lambda_{ij}|^2$.

2. Как видно из (4.2.37), при $e = 0$ точки x_0 , определяющей минимум (функционала J) не существует и картина на рис. 4.3 изменяется, а именно, при $x \rightarrow \pm\infty$, $y(J)$ стремится к значению c^2 (см. (4.2.36)). Но и в этом случае теорема справедлива, поскольку наличие рассматриваемого сечения не вносит противоречия в алгоритм доказательства.

3. При наличии кратных мод λ_i , как отмечалось в главе 2 существует неопределенность в нахождении λ_{iq} , которую можно разрешить, используя (2.2.13). Но как нетрудно видеть из алгоритма доказательства и при использовании (2.2.13) данная теорема также верна.

4. В случае наличия комплексно-сопряженных мод $\alpha_i + j\beta_i$, как отмечалось в главе 2, необходимо овеществление матрицы модальной модели Γ . Но тогда, рассматривая в качестве модуля функций чувствительности комплексно-сопряженных мод величину $(\alpha_{iq}^2 + \beta_{iq}^2)^{1/2}$ при вычислении $(\|S_\lambda\|)^2$ будем иметь не квадраты от параметров матрицы H , а величины 4-й степени от этих параметров. И в этом случае сохраняются условия существования единственного минимального уровня гиперповерхности, определяемой функционалом J потому что, во-первых, для вещественных мод выводы теоремы 4.2 справедливы, во-вторых, если рассматривать не овеществленные (комплексные) моды матрицы Γ , то теорема 4.2 справедлива.

5. В частном случае, когда в одной из плоскостей сечения $J_0 \gamma_i^{d_1}$ знаменатель (4.2.31) равен постоянной, т. е. коэффициент при $\gamma_i^{d_1}$ равен нулю, компонента λ_{ij}^2 парабола и функционал J при $\gamma_i^{d_1} \rightarrow \pm\infty$ стремится к $\pm\infty$, но и в этом случае имеет место единственный минимум.

6. Теорема 4.2 верна и для случая произвольной модальной модели, заданной диагонализуемой матрицей Γ .

Действительно, пусть существует такая неособенная T , что

$$\Gamma = T\Lambda T^{-1},$$

где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$, λ_i — мода Γ , тогда уравнение Сильвестра принимает вид

$$MT\Lambda T^{-1} - AM = -B\bar{N}.$$

Умножая обе части уравнение на T справа, получаем

$$\bar{M}\Lambda - A\bar{M} = -B\bar{N},$$

где $\bar{M} = MT$, $\bar{N} = NT$.

Таким образом, мы получили исходную форму уравнения Сильвестра, что и доказывает сделанное утверждение.

Из результата (4.2.28) леммы 2 и ее следствий (4.2.29) и (4.2.30) нетрудно видеть, что в общем случае синтеза систем МПЧ возможно обеспечение нулевой модальной параметрической чувствительности только к вариациям $r-1$ параметров. В постановке, приведенной в настоящей работе, решается задача достижения минимально возможной модальной параметрической чувствительности. При этом условия достижимости нулевой параметрической чувствительности определяются выражениями (4.2.39).

Поставленная задача отыскания $H(K)$, обеспечивающей минимум функционалу (4.2.3), как нетрудно видеть из доказательства теоремы 4.2, является задачей, нелинейного программирования. На основе сравнения различных методов нелинейного программирования, с учетом специфики задачи и оптимизируемого функционала, в качестве эффективного алгоритма выбран метод Нелдера—Мида (деформируемого многогранника).

Основным достоинством метода Нелдера—Мида по сравнению с другими методами нелинейного программирования является простота. Кроме того, метод Нелдера—Мида отвечает специфике задачи, как-то дробно-квадратичный вид оптимизируемого функционала, а также многократное решение матричного уравнения Сильвестра.

4.2.2. Вычислительный алгоритм синтеза модально-робастных систем МПЧ. Подход метода функций модальной чувствительности

Используя метод функций модальной чувствительности (МФМЧ), на основе метода нелинейного программирования Нелдера—Мида будем иметь следующий алгоритм синтеза модально-робастных систем минимальной модальной параметрической чувствительности (МПЧ), блок-схема которой представлена на рис. 4.5 и рис. 4.6.

1. А. Ввод данных

$$A(q), B(q), \Gamma, \varepsilon, A_{qj}, j = \overline{1, p}; n, r, p, s,$$

где $A - (n \times n)$, $B - (n \times r)$ — матрицы объекта управления ОУ;

$q = [q_1, q_2, \dots, q_p]^T$ — вектор варьируемых параметров с номинальным значением $\bar{q} = [\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_p]^T$;

$$A_{qj} = \left. \frac{\Delta \partial A(q)}{\partial q_j} \right|_{q=\bar{q}},$$

$$B_{qj} = \left. \frac{\Delta \partial B(q)}{\partial q_j} \right|_{q=\bar{q}},$$

$\Gamma = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ — матрица модальной модели λ_i , $i = \overline{1, n}$ — желаемые моды системы.

Величина ε определяет необходимую точность достижения оптимума. Для практических целей достаточно положить $\varepsilon = 10^{-5} + 10^{-7}$.

Величина s указывает на количество комплексно-сопряженных пар мод желаемой модальной модели, то есть первые s пар

мод вводятся комплексно-сопряженными в квазидиагональном виде.

1. Б. Ввод вершин симплекса. Начальный симплекс выбираем в виде регулярного симплекса со стороной равной 1, центр тяжести которого находится в начале координат $n(r-1)$ -мерного евклидова пространства $E^{n(r-1)}$.

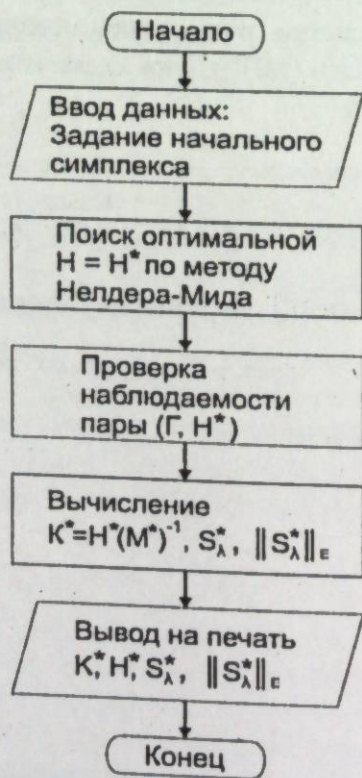


Рис. 4.5

Пусть $V_i^{(0)}$ ($i = 1, \overline{n(r-1)+1}$) — i -я вершина начального симплекса в $n(r-1)$ -мерном евклидовом пространстве $E^{n(r-1)}$ с координатами соответственно

$$x_{i1}^{(0)}, x_{i2}^{(0)}, \dots, x_{in(r-1)}^{(0)} \quad 1).$$

Тогда координаты определяются i -й строкой матрицы

$$R = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_2 & -l_3 & \dots & -l_n(r-1)-1 & -l_n(r-1) \\ R_1 & -l_2 & -l_3 & \dots & -l_n(r-1)-1 & -l_n(r-1) \\ 0 & R_2 & -l_3 & \dots & -l_n(r-1)-1 & -l_n(r-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_n(r-1)-1 & -l_n(r-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R_n(r-1) \end{bmatrix},$$

где $l_i = 1/\sqrt{2i(i+1)}$, $R_i = \sqrt{i/2(i+1)}$.

2. Отображение $V_i^{(0)} \rightarrow H_i^{(0)}$. Каждой вершине начального симплекса $V_i^{(0)}$ ($i = 1, n(r-1)+1$) сопоставляется матрица $H_i^{(0)}$ начального симплекса такая, что:

$$H_i^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{i1}^{(0)} & x_{i2}^{(0)} & \dots & x_{in}^{(0)} \\ x_{i(n+1)}^{(0)} & x_{i(n+2)}^{(0)} & \dots & x_{i2n}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{in(r-2)+1}^{(0)} & x_{in(r-2)+2}^{(0)} & \dots & x_{in(r-1)}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

3. Вычисление значения целевой функции в вершинах начального симплекса.

$$f(V_i^{(0)}) = J_{S_\lambda}(H_i^{(0)}) = \|S_\lambda\|_E = \left(\sum |\lambda_{mj}^2|^2 \right)^{1/2}.$$

Этот пункт выполняется в следующем порядке:

¹⁾ Здесь и далее в алгоритме верхний индекс (0) соответствует номеру шага, обозначенного на рис. 4.5 через k , то есть для начального симплекса $k = 0$.

3.1. Решается уравнение Сильвестра, то есть по введенным данным $A(\bar{q}), B(\bar{q}), \Gamma, H_i^{(0)}$ определяется матрица M в уравнении

$$M\Gamma - A(\bar{q})M = -B(\bar{q})H_i^{(0)}.$$

3.2. Вычисляется псевдообратная (обратная) матрица $M^{-1} = M$.

3.3. Определяется матрица

$$\Gamma_{qj} = M^{-1}(F_{qj})M = M^{-1}(A_{qj}M - B_{qj}H_i^{(0)}),$$

где

$$F_{qj} = A_{qj} - B_{qj}H_i^{(0)}M^{-1}, j = \overline{1, p}.$$

Диагональные элементы Γ_{qj} суть λ_{qj} .

3.4. Вычисляется евклидова норма матрицы модальной чувствительности S_λ , которая соответствует данной $H_i^{(k)}$

$$f(V_i^{(k)}) = J_{S_\lambda} = \|S_\lambda\|_E = \left(\sum |\lambda_{mj}|^2\right)^{1/2}, m = \overline{1, n}; j = \overline{1, p}.$$

Номеру шага первоначально присваивается значение ноль, то есть $k=0$.

В случае наличия s комплексно-сопряженных пар мод используются формулы (4.1.24), (4.1.24) и вычисляется

$$2(d^2mq + \beta^2mq); m = \overline{1, s}.$$

3.5. Вычисления по пунктам 3.1–3.4 повторяются для всех вершин $V_i(0)$, то есть для всех $i = \overline{1, n(r-1)+1}$.

4. Определение вершин, соответствующих максимальному и минимальному значениям функционала J_{S_λ} , то есть найти $V_k^{(k)}$ и $V_e^{(k)}$ такие, что

$$J_{S_\lambda}(V_n^{(k)}) \geq J_{S_\lambda}(V_i^{(k)}), \forall (i = \overline{1, n(r-1)+1}),$$

$$J_{S_\lambda}(V_e^{(k)}) \leq J_{S_\lambda}(V_i^{(k)}), \forall (i = \overline{1, n(r-1)+1}).$$

Далее до п. 2.3 следует стандартный алгоритм минимизации функционала J по методу Нелдера—Мида (см. рис. 4.6).

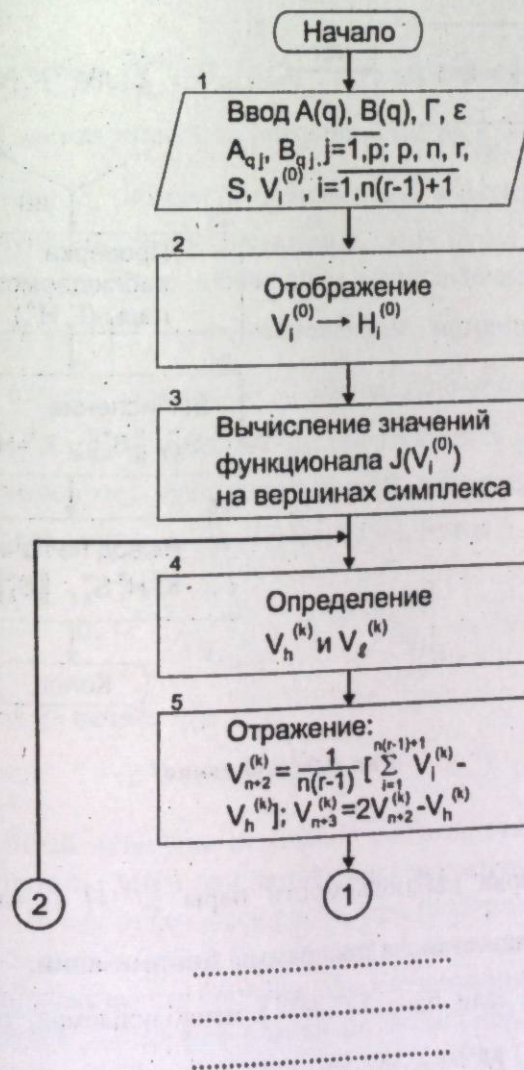


Рис. 4.6

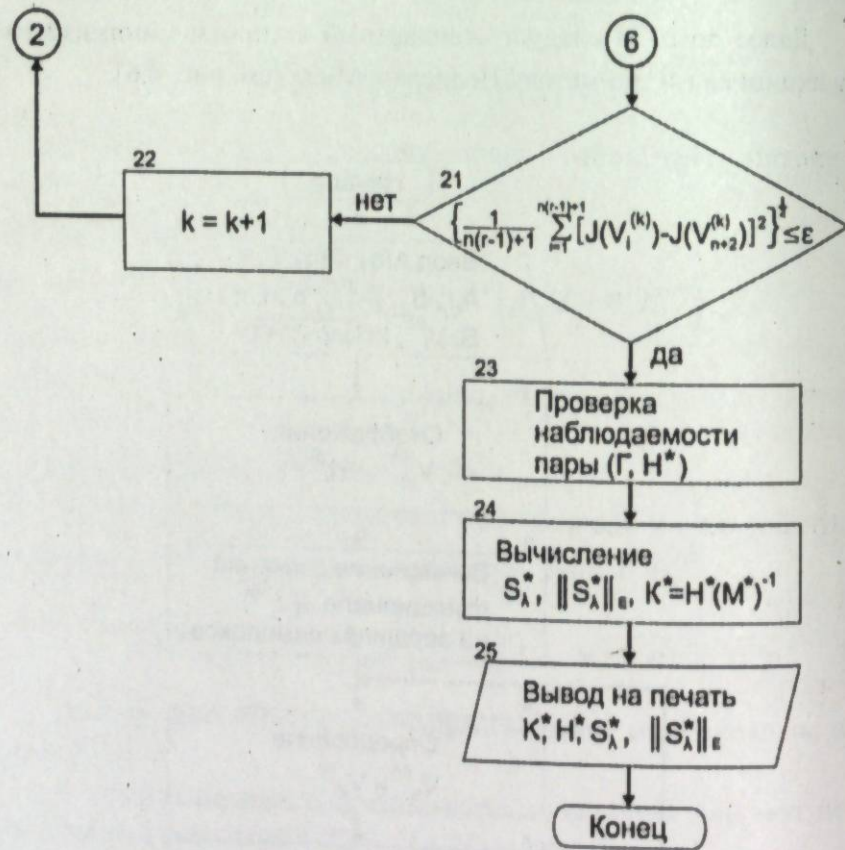


Рис. 4.6 (окончание)

23. Проверка наблюдаемости пары (Γ, M^*) , где M^* есть $H_o^{(s)}$, s — шаг, остановка программы минимизации.

В случае если пара $(\Gamma, H_o^{(s)})$ ненаблюдаемая, то переход к следующему $H_o^{(s+1)}$, который находится отбрасыванием из рассмотрения и определением нового $V_o^{(s)}$ по п. 4. И так до тех пор,

пока не получим наблюдаемую пару $(\Gamma, H_o^{(s')})$ или $(\Gamma, H_o^{(s'*)})$, где s' — некоторый предыдущий шаг минимизации.

При этом $H^* = H_o^{(s'*)}$ соответствует наблюдаемой паре $(\Gamma, H_o^{(s'*)})$. Ясно, что для найденного H^* существует $(M^*)^{-1}$ (см. теорему 2.1).

24. Вычисления: $K^* = H^*(M^*)^{-1}$ — матрицы обратной связи; $S_\lambda^* = S_\lambda(H^*)$ — матрицы чувствительности; $\|S_\lambda^*\|_E$ — евклидовой нормы матрицы S_λ^* искомой, оптимальной в смысле минимума модальной чувствительности системы. Этот пункт выполняется аналогично пп. 3.1–3.4 с добавочным вычислением в п. 3.3 матрицы $K^* = H^*(M^*)^{-1}$ и формированием матрицы $S_\lambda^* = [\lambda_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$. В случае наличия s — комплексно-сопряженных пар мод, первые $2s$ строк матрицы S_λ^* образуются s парами функций (коэффициентов) чувствительностей действительных мнимых частей этих мод α_{ij}, β_{ij} , $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, p}$, где

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j} \Big|_{q=j}, \quad \beta_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial q_j} \Big|_{q=j}.$$

25. Вывод на печать

$$K^*, H^*, S^*, \|S_\lambda^*\|_E = J_{S_\lambda}^*.$$

Приведенный алгоритм позволяет синтезировать модально-робастные системы МПЧ при любых диагонализуемых матрицах системы F . Но как отмечалось ранее, при наличии кратных мод необходимо применить (2.2.13), однако, если учесть (2.2.14), то можно предположить, что система, спроектированная по общему алгоритму, будет достаточно близка по модальной чувствительности к системе с использованием (2.2.13). Там же (глава 2) было показано, что случай недиагонализуемых матриц F характеризуется наличием бифуркационных точек в числовом поле изменения

мод, где модальная чувствительность не определена (бесконечно большая величина), и, является нежелательным для синтеза в смысле достижения малой параметрической чувствительности.

Вычислительная фортрана программа задачи синтеза систем МПЧ строится на основе применения стандартных подпрограмм метода Нелдера—Мида (деформируемого многогранника) и метода Бартелса—Стьюарта (*bs*) для матричного уравнения Сильвестра.

4.3. Подход синтеза модально-робастных систем на основе метода чисел обусловленности матриц

Синтез систем минимальной модальной чувствительности может быть осуществлен вышеприведенным подходом на основе МФМЧ, только при конкретно известных варьируемых параметрах. При априори неизвестных варьируемых параметрах, синтез систем МПЧ можно осуществить подходом, предложенным в настоящем разделе.

Пусть матрица системы $F = F(\bar{q})$, зависящая от параметра q , получает возмущение

$$\Delta F = F(\bar{q} + \Delta q) - F(\bar{q})$$

вследствие изменения q на Δq (без ограничения на малость).

Пусть далее μ — любая мода возмущенной матрицы $F(\bar{q} + \Delta q)$, а λ_i — i -я ($i = \overline{1, n}$) мода матрицы $F(\bar{q})$.

Тогда, как известно из линейной алгебры имеет место неравенство

$$\min_i |\lambda_i - \mu| \leq c\{M\} \|\Delta F\|, \quad (4.3.1)$$

где $\|\Delta F\|$ — любая норма матрицы ΔF , для которой справедливо равенство

$$\|diag(\lambda_i - \mu)^{-1}\| = \max_i (\lambda_i - \mu)^{-1}, \quad (4.3.2)$$

$c\{M\}$ — число обусловленности матрицы M , диагонализующей матрицу Γ , согласованная с нормой $\|\cdot\|$.

Выражение (4.3.1) позволяет провести синтез систем МПЧ на основе метода модального управления и решения задачи минимизации функционала

$$J_{sc} = c\{M\}, \quad (4.3.3)$$

по параметрам матрицы H в уравнении Сильвестра. При этом, как выше было отмечено, малость Δq не имеет существенного значения, то есть в смысле сохранения соотношения (4.3.1). Как нетрудно видеть из (4.3.1), система, спроектированная по $\min c\{M\}$ будет характеризоваться минимальной модальной чувствительностью, средней к возможным вариациям ее параметров, поэтому этот подход назовем *интегральным*. Очевидно, что чем больше вариация Δq и меньше неопределенность в варьируемых параметрах, тем ближе минимальная интегральная модальная чувствительность к действительной минимальной модальной чувствительности к конкретным вариациям параметров системы. При данном подходе справедливо следующее утверждение, аналогичное теореме 4.2.

Теорема 4.3. Существует и единственная пара точек минимума функционала $J_{sc} = c\{M\}$ по параметрам матрицы H .

Доказательство.

Для определенности и удобства доказательства будем рассматривать первую столбцовую матричную норму

$$\|M\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |m_{ij}|, \quad (4.3.4)$$

далее будем обозначать $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|$. Соответственно

$$c\{M\}_1 \overset{\Delta}{=} c\{M\} = \|M\| \cdot \|M^{-1}\|.$$

Воспользуемся результатами леммы 2 для теоремы 4.2. Тогда

$$\|M\| = \max_{jd} \sum_{l=1}^n |L_d^{(l)}|, \quad (4.3.5)$$

$$\|M^{-1}\| = \max_d \frac{\sum_{l=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n L_i^{(ld)}}{\prod_{i=1}^n L_i^{(0)}}, \quad (4.3.6)$$

где $L_i^{(0)}$, $L_d^{(l)}$, $L_i^{(ld)}$ — соответственно некоторые отличные друг от друга коэффициентами линейные комбинации параметров (элементов) i -й, d -й и i -й ($i, d = \overline{1, n}$) матрицы H , верхние обозначения $(0), (i), (ld)$ — относятся к индексам элементов матриц M и M^{-1} .

Напомним, что матрицы M и M^{-1} имеют вид

$$M = \begin{bmatrix} L_1^{(1)} & L_2^{(1)} & \dots & L_n^{(1)} \\ L_1^{(2)} & L_2^{(2)} & \dots & L_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_1^{(n)} & L_2^{(n)} & \dots & L_n^{(n)} \end{bmatrix},$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\prod_{l=1}^n L_l^{(0)}} \begin{bmatrix} \prod_{i=2}^n L_i^{(11)} & \prod_{i=2}^n L_i^{(12)} & \dots & \prod_{i=2}^n L_i^{(1n)} \\ \prod_{i=2}^n L_i^{(21)} & \prod_{i=2}^n L_i^{(22)} & \dots & \prod_{i=2}^n L_i^{(2n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \prod_{i=1}^{n-1} L_i^{(n-1)} & \prod_{i=1}^{n-1} L_i^{(n2)} & \dots & \prod_{i=1}^{n-1} L_i^{(nm)} \end{bmatrix}.$$

Для доказательства используем аналогично случаю $J_{S_1} = \|S_1\|_E$ принцип сечений, т. е. рассмотрим сечения гиперповерхности $J_{sc} = c\{M\} (H^*)^{1)}$ плоскостями «параллельными» плоскостями $J_x O\gamma_i^{d_i}$, фиксируя некоторые значения параметров, кроме γ^{d_i}

$$(i = \overline{1, n}, d_i = 2, r).$$

Положим параметр, относительно которого рассматриваем сечение

$$\gamma_i^{d_i} \overset{\Delta}{=} x,$$

функционал J обозначим $J \overset{\Delta}{=} y$, то есть рассмотрим декартовы плоскости, «параллельные» xOy .

Тогда в рассматриваемом сечении имеем

$$y = c\{M\} = |a_1 x + b_1| \cdot \frac{|a_2 x + b_2|}{|a_3 x + b_3|}, \quad (4.3.7)$$

где $a_i, b_i (i = \overline{1, 3})$ — некоторые числовые коэффициенты,

$$a_i \neq 0, a_1, a_2, a_3 > 0.$$

При этом, согласно определения, нормы типа 1, очевидно, коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 , вообще говоря, для разных значений x различные, но a_3 и b_3 фиксированные (коэффициенты $\det M$).

Представим (4.3.7) в виде

$$y = \frac{a_1 a_2}{a_3} \cdot \left[\left| x + \frac{b_3}{a_3} \right| + c_1 + \frac{c_2}{\left| x + \frac{b_3}{a_3} \right|} \right], \quad (4.3.8)$$

¹⁾ Далее в данном параграфе в обозначении J_{sc} индекс sc будем опускать.

где

$$c_1 = \pm \left(\frac{b_2}{a_2} + \frac{b_1}{a_1} - 2 \frac{b_3}{a_3} \right),$$

$$c_2 = \left(\frac{b_1}{a_1} \right) \left(\frac{b_2}{a_2} \right) - \left(\frac{b_3}{a_3} \right)^2 - \frac{b_3}{a_3} \cdot c_1.$$

Поскольку величина $a_1 a_2 / a_3$ в (4.3.8) на характер изменения y (качественную картину) не оказывает влияния, то положим

$$\frac{a_1 a_2}{a_3} = 1, \quad \frac{b_3}{a_3} = b.$$

Получим

$$y = |x+b| + c_1 + \frac{c_2}{|x+b|}. \quad (4.3.9)$$

Найдем экстремумы y по x .

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1 \mp \frac{c_2}{(x+b)^2}.$$

Необходимое условие экстремума

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad (x+b)^2 = c_2,$$

т. к. y в (5) $y > 1$, то c_2 , и точки экстремума (нетрудно показать, что они точки минимума) существуют и

$$x = \pm \sqrt{c_2} - b. \quad (4.3.10)$$

Из (4.3.9) видно, что значения y в точках минимума (4.3.10) одинаковы.

График функции (4.3.9) представлен на рис. 4.6.

Для строгости доказательства предположим, что мы нашли минимум при некоторых a_1, b_1, a_2, b_2 , то есть нормы (сечения) $\|M\|$ и $\|M^{-1}\|$ в точках определяются суммами по столбцам с числовыми коэффициентами a_1, b_1, a_2, b_2 . Тогда, если коэффициен-

ты изменяются около этих точек, то по определению нормы матриц $\|M\|$ и $\|M^{-1}\|$, значения $\|M\|$ и $\|M^{-1}\|$ (которые непрерывны) с другими коэффициентами a_1, b_1, a_2, b_2 , будут больше, чем значения при данных, фиксированных a_1, b_1, a_2, b_2 , то есть и в этом случае точки x_{\min} (4.3.10) будут определять минимум функции (4.3.9).

Итак, мы показали, что если найдены минимумы y при некоторых a_1, b_1, a_2, b_2 , то они являются и минимумами и при других возможных значениях a_1, b_1, a_2, b_2 .

Теперь, если положим, что y при данных a_1, b_1, a_2, b_2 в точках x_{\min} , выбран минимальным из множества y_{\min} с различными a_1, b_1, a_2, b_2 , то такая точка определяет абсолютный минимум $y = y_{\min}$.

Итак, мы доказали, что гиперповерхность функционала $J = c\{M\}$, в сечениях плоскостями, «параллельными» плоскостям $JO\gamma_i^{d_i}$, определяется кривой, представленной на рис. 4.7, с парой одинаковых минимумов в точках (4.3.10).

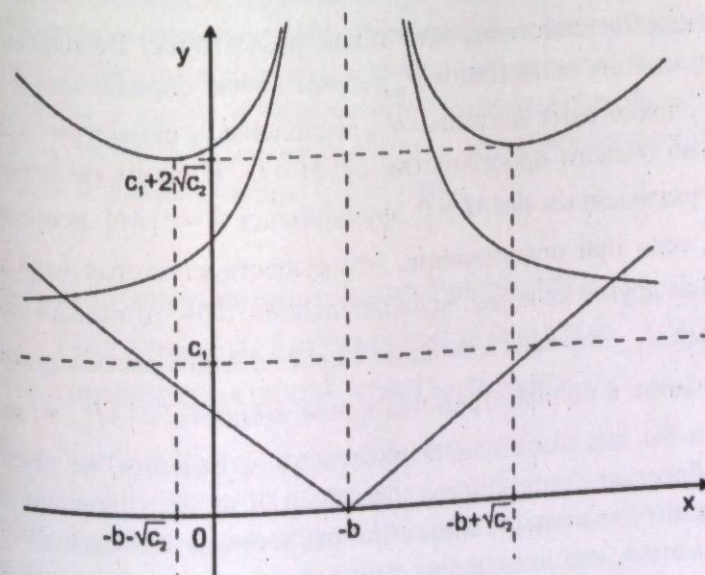


Рис. 4.7

Теперь докажем, что есть и притом только два одинаковые значения (точек) минимума функционала $c\{M\} = J$.

Пусть мы выбрали, рассмотрев все множество кривых $JO\gamma_i^d$ (при всех всевозможных значениях других параметров $\gamma_j^d, j \neq i, d_e \neq d; j = \overline{1, n}; d_e, d_t = \overline{2, r}$), наименьшее значение $J = c\{M\}$. Здесь будем полагать, что могут быть несколько таких пар точек с одинаковыми $c\{M\}$. Выберем сечение с любой парой таких точек.

Так как $J = c\{M\}$ всюду непрерывна, кроме области пространства $\det M = 0$, то по определению $c\{M\}$, в силу непрерывности значения $J = c\{M\}$ в других всевозможных сечениях не могут быть меньше данной величины J_{\min} . Иначе и на данном рассматриваемом сечении была бы точка (пересечение с другим сечением) с меньшим значением J . Такое положение имеет во всех всевозможных, пересекающихся с данным, сечениях гиперповерхности J .

Докажем единственность такой пары точек. Во-первых, заметим, что для найденного J_{\min} , пара точек, определяемые искомыми параметрами матрицы H , расположены симметрично относительно области пространства $\det M = 0$. В обоих подпространствах, разделенных $\det M = 0$, функционал $J = c\{M\}$ непрерывен. Тогда, если при предложении, что существует вторая пара точек J_{\min} или другое сечение, «параллельное» $JO\gamma_i^d$ с такими же значениями J_{\min} , провести сечение, пересекающее рассматриваемые два сечения в подпространстве непрерывности $c\{M\}$, то мы получили бы два минимума в проведенном сечении, не разделенные областью пространства $\det M = 0$, что противоречит ранее доказанным выводам. Таким образом, теорема 4 доказана.

Заметим, что доказанная теорема верна и при других видах матричных норм, удовлетворяющих (4.3.2). Это можно доказать

непосредственно, или, если учесть существующие мажорирующие связи между различными видами матричных норм. В частности, теорема 4.3 верна и для евклидовых норм.

Вычислительный алгоритм при данном подходе, который далее в настоящей работе будем называть *интегральным* подходом в отличие от первого подхода на основе МФМЧ, строится на базе алгоритма, приведенного в предыдущем разделе с учетом вида функционала $J_{sc} = c\{M\}$. Но поскольку в данном случае не имеет значения величина элементов матрицы M , то можно предложить алгоритмы и на основе других типов норм, например, первой (столбцовой) нормы (4.3.4). При любой норме, как нетрудно видеть, вычислительные затраты на синтез ощутимо сократятся, вследствие исключения некоторых операций алгоритма. Очевидно, интегральный подход можно использовать и при выборе модальных моделей, заданных в диагональном (квазидиагональном) каноническом базисе.

Существенными недостатками интегрального подхода по сравнению с подходом МФМЧ, является достижение не действительной минимальной модальной чувствительности при конкретно известных и малых вариациях параметров, а средней (интегральной) к возможным вариациям априори неизвестных варьируемых параметров, а также невозможность выделения из функционала под функционалы чувствительности, определяющие доминирующие моды и доминирующие параметры.

4.4. Дополнительные вопросы синтеза модально-робастных систем малой параметрической чувствительности

При синтезе систем автоматического управления малой параметрической чувствительности с использованием модального подхода, изложенного в главах 3 и 4, возникает ряд специфических вопросов, которые последовательно рассмотрим в данном параграфе.

4.4.1. Достижение минимальной параметрической чувствительности нулей и выхода

Как было отмечено выше, нулевая параметрическая чувствительность выхода не всегда достижима. Поэтому возникает задача синтеза систем с минимально возможной параметрической чувствительностью выхода. Здесь показывается, что модальный подход позволяет синтезировать системы с малой чувствительностью нулей и выхода.

Пусть задана система

$$\dot{x} = Ax + Bu + Bg, \quad x(0), \quad (4.4.1)$$

$$y = Cx, \quad (4.4.2)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$, $y \in R^m$ — соответственно вектора состояния, управления и выхода, а $g \in R^r$ — вектор внешнего входа системы, которая с синтезированным модальным регулятором (МР) имеет вид

$$\dot{x} = Fx + Bg, \quad x(0), \quad (4.4.3)$$

$$y = Cx, \quad (4.4.4)$$

где $F = A - BK$ — матрица состояния замкнутой системы.

Тогда передаточная матрица замкнутой системы равна

$$\Phi(s) \triangleq c(sI - F)^{-1} B, \quad (4.4.5)$$

а передаточная функция i -го выхода относительно j -го входа будет

$$\Phi_{ij}(s) \triangleq \frac{y_i(s)}{g_j(s)} = c^i (sI - F)^{-1} B_j, \quad (4.4.6)$$

где s — комплексная переменная преобразования Лапласа отношения «вход—выход» рассматриваемой системы; c^i — i -я строка матрицы C , B_j — j -й столбец матрицы.

В литературе по системам управления имеется ряд подходов к определению нулей многомерных систем. Классическое определение рассматривает поканальное представление передаточной матрицы, где нулями являются корни полиномов числителя (4.4.6), а другое определение, рассматривает совокупные нули многомерной системы как корни полинома числителя

$$\det[\Phi(s)]. \quad (4.4.7)$$

Далее в настоящей работе будем рассматривать нули в классическом понимании, то есть поканальные нули системы. Если воспользоваться выводами, полученными в главе 2, относительно алгоритма Леверье (2.1.11), обращения матрицы, то (4.4.5) можно представить в виде

$$c(sI - F)^{-1} B = \frac{1}{\det(sI - F)} [cB \mid cFB \mid \dots \mid cF^{n-1}B] \begin{bmatrix} d_{n-1}(s)I_r \\ d_{n-2}(s)I_r \\ \vdots \\ d_0(s)I_r \end{bmatrix}, \quad (4.4.8)$$

где

$$\det(sI - F) \triangleq d_n = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0,$$

$$d_k(s) \triangleq s^k + \alpha_{n-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_{n-k}, \quad k = \overline{0, n-1},$$

I_r — единичная матрица порядка $r \times r$, а выражение (4.4.6) принимает вид

$$\Phi_{ij}(s) \triangleq \frac{y_i(s)}{g_j(s)} = \frac{1}{\det(sI - F)} [c^i B_j \mid c^i F B_j \mid \dots \mid c^i F^{n-1} B_j] \begin{bmatrix} d_{n-1}(s) \\ d_{n-2}(s) \\ \vdots \\ d_0(s) \end{bmatrix}. \quad (4.4.9)$$

Пусть матрица системы F — диагонализуема. Тогда каждый вектор B_j можно разложить по собственным векторам F , образующим базис n -мерного линейного пространства

$$B_j = \beta_{1j}M_1 + \beta_{2j}M_2 + \dots + \beta_{nj}M_n, \quad (4.4.10)$$

где M_i — i -й ($i = \overline{1, n}$) — собственный вектор матрицы F , β_{ij} — числовые коэффициенты.

Следовательно, нули отношения $y_i(s)/g_j(s)$, обозначаемые N_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$ определяются как корни полинома

$$P(s) = \left[c' \left(\sum_{i=1}^n \beta_{ij} M_i \right) \middle| c' \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_{ij} M_i \right) \middle| \dots \middle| c' \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{n-1} \beta_{ij} M_i \right) \right] \cdot [d_{n-1}(s) \middle| \dots \middle| d_0(s)]^T. \quad (4.4.11)$$

Из (4.4.11) видно, что чувствительности нулей N_{ij} систем управления к вариациям параметра при заданных $c(q)$, $B(q)$, $A(q)$, λ_i будет зависеть как от чувствительности мод λ_{iq} , так и от чувствительности собственных векторов M_{iq} . Однако, если учесть, что λ_i , в свою очередь, зависит от, а коэффициенты множителя правого выражения (4.4.11) есть функции мод, то очевидно, что система, спроектированная по минимуму модальной чувствительности, будет достаточно близка к системе с минимальной нулевой чувствительностью, если ввести в качестве функционала нулевой чувствительности евклидову норму от функций нулевой чувствительности

$$J_N = \sum_{j=1}^r \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial N_{ij}}{\partial q} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.4.12)$$

В случае, если ставится задача достижения малой параметрической чувствительности выхода, то необходима одновременная минимизация как (4.4.12), так и функционала модальной чув-

ствительности (4.1.3), что можно достичь минимизацией евклидовых норм матриц Γ_q по параметрам матрицы H в уравнении Сильвестра (вне диагональные элементы матрицы F_q , определяют коэффициенты разложения M_{iq} по собственным векторам M_i). При этом нетрудно доказать теорему, аналогичную теореме 4.2, о существовании и единственности минимального уровня функционала

$$J = \sum_{j=1}^r \|\Gamma_{qj}\|_E, \quad (4.4.13)$$

оптимизируемых на множестве матриц H . Заметим, что для вне диагональных элементов матриц Γ_{qj} , числители выражений типа (4.1.26) и (4.1.28) будут иметь не линейный вид, а квадратичный.

Справедливость утверждения о том, что при выборе $H = H^*$ (а значит, K^*), доставляющего минимум функционалу (4.4.13), мы достигнем минимальной чувствительности выхода системы, согласуется с широко известными выводами, что полулогарифмическая функция чувствительности передаточной функции l -номерной системы равна

$$\frac{\partial \ln w(s)}{\partial q} = \frac{\partial \ln k}{\partial q} - \sum_{i=1}^l \frac{1}{s - N_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial q} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial q}, \quad (4.4.14)$$

где l — количество нулей N_i ; k — общий коэффициент усиления; λ_i — моды системы с передаточной функцией $w(s)$. Ясно, что минимум по норме выражения (4.4.14) при различных переменных s будет наблюдаться в случае, если

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \left| \frac{\partial N_i}{\partial q} \right| &= \min_H \sum_{i=1}^l \left| \frac{\partial N_i}{\partial q} \right|, \\ \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \lambda_i}{\partial q} \right| &= \min_H \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \lambda_i}{\partial q} \right| \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

и

$$N_i = \lambda_i, \quad i = \overline{1, l}. \quad (4.4.16)$$

Действительно, в многомерных системах при поиске $H(K)$, доставляющего минимум (4.4.13) с обеспечением заданных мод λ_i ($i = \overline{1, n}$) номинальной системе, нули сепаратных каналов $g_j \rightarrow y_i$ меняются. При этом обе суммы в (4.4.15) спускаются к минимуму (см. (4.4.11)). Из (4.4.14) вытекает и то, что при спуске к минимуму сумм (4.4.15) происходит асимптотическое приближение нулей N_i к модам (полюсам) λ_i . Очевидно, количество нулей l по каждому каналу определяется структурой матриц C и B . Этот факт асимптотического приближения нулей N_i к модам подтверждается и исследованиями других авторов. Например, известно, что при синтезе систем с неограниченно большими коэффициентами усиления, параметрическая чувствительность снижается и стремится к нулю, но при этом также известно, что l ближайших к мнимой оси полюсов (мод одномерной системы) асимптотически стремятся к l нулям системы.

Таким образом, основные этапы алгоритма синтеза систем с минимальной параметрической чувствительностью выхода (и нулей) будут следующие.

1. По алгоритму, аналогичному приведенному в разделе 4.3, проводится минимизация на множестве матриц H функционала в виде суммы евклидовых норм Γ_q (4.4.13).

2. Для точного вычисления чувствительности нулей и выхода при найденном $H = H^*$ поступим следующим образом.

2.1. По найденной K^* находим

$$F^* = A - BK^*.$$

Далее для всех $i, j = \overline{1, m}$ определяем нули $N_\rho^{(j)}$ ($\rho \leq n-1$) Φ_{ij} как корни полиномов числителей (4.4.8).

2.2. Чувствительности нулей $N_\rho^{(j)}$ вычисляем, дифференцируя числители Φ_{ij} , как неявно заданные функции.

Тогда

$$\frac{\partial N_\rho^{(j)}}{\partial q} = - \frac{\left[C_q^i B_j + C B_{jq} \mid C_q^i F B_j + C^i F_q B_j + C^i F B_{jq} \mid \dots \mid C_q^i F B_j + \dots + C^i (F_q F^{n-2} + F F_q F^{n-3} + \dots + F^{n-2} F_q) B_j + C^i F^{n-1} B_{j2} \right]}{\left[C^i B_j \mid C^i F B_j \mid \dots \mid C^i F^{n-1} B_j \right]} \cdot \frac{\left[d_{(n-1)s}(s) \mid d_{(n-2)s}(s) \mid \dots \right]}{\left[d_{(n-1)q}(s) \mid d_{(n-2)q}(s) \mid \dots \mid d_{2q}(s) \right]^T} \Bigg|_{\substack{q=\bar{q} \\ s=N_\rho^{(j)}}}, \quad (4.4.17)$$

где

$$d_{kq}(s) \triangleq \frac{\partial d_k(s)}{\partial q} = \frac{\partial \alpha_{n-1}(q)}{\partial q} s^{k-1} + \dots + \frac{\partial \alpha_{n-k}}{\partial q} \Bigg|_{q=\bar{q}}$$

$$\alpha_{n-1}(q) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(q)$$

.....

$$\alpha_0(q) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(q)$$

$$d_{kq}(s) \triangleq \partial d_k(s) / \partial s = k s^{k-1} + \alpha_{n-1}(k-1) s^{k-2} + \dots + \alpha_{n-(k+1)}.$$

2.3. Общую чувствительность нулей синтезированной системы будем оценивать по величине функционала (4.4.12).

2.4. Чувствительность выхода будем оценивать по абсолютной величине разности функционалов (4.1.3) и (4.4.12), с учетом количества рассматриваемых каналов, то есть

$$J_y = |m^2 J_\lambda - J_N|. \quad (4.4.18)$$

2.5. При необходимости по (4.4.14) можно найти и чувствительности передаточных функций отдельных каналов, а также передаточной матрицы системы в целом.

В заключении отметим, что в данном разделе рассматривался вопрос синтеза системы с МПЧ выхода и нолей при малых и конкретно известных вариациях параметров. Для случая с априори неизвестными варьируемыми параметрами можно утверждать, что модальный регулятор, спроектированный по $\min c\{M\}$, будет обеспечивать и минимальную чувствительность нолей и выхода системы. Также необходимо отметить, что если для одномерных систем поставить задачу отыскания $\lambda_i^* \in D$, которые обеспечиваются некоторой K^* , определяемой по уравнению Сильвестра и доставляющей минимальную модальную чувствительность, то эта система будет обладать и минимальной чувствительностью нолей и выхода, поскольку ноли однозначно определяются матрицей K^* .

4.4.2. Достижение малой чувствительности при особых случаях объекта управления

В случае многомерных систем с особыми объектами управления, описанными выше, также применимы результаты, полученные в настоящей главе. Так, при не полностью управляемом объекте можно поставить задачу отыскания $K^* = [K_1^* \mid K_2]$ такого, что доставляет минимальную модальную чувствительность ρ -управляемым модам. Здесь $K_1^* - (r \times \rho)$, K_2 — нулевая матрица размерности $r \times (n - \rho)$. Далее можно провести частичное снижение чувствительности нолей и выхода, минимизируя $\|G_q\|$ для вырожденной системы размерности $\rho \times \rho$.

При синтезе систем с МПЧ для ОУ с неизмеримыми состояниями возможны два уровня подхода.

1. Для статического МР отыскивается $K = K_1^*$, доставляющая системе МПЧ (мод или нолей и выхода). Если чувствительность и качество расширенной (с наблюдателем) системы не удовлетворяет требованиям, то перейти к следующему уровню оптимизации.

2. Отыскание $K = K_2^*$, доставляющей МПЧ всей расширенной системе, используя результаты раздела 2.5 и настоящей главы.

Глава 5

Робастность динамических систем

Интерес к проблемам робастности и грубости в различных областях науки и техники, в частности в теории управления, связан с тем, что эти понятия относятся к важнейшим свойствам систем, рассматриваемых при их реальном функционировании.

Касательно систем управления, в настоящее время наиболее рассмотрены и решены вопросы робастной устойчивости. Решение этих вопросов прежде всего связано с основополагающими работами В. Л. Харитонова, в которых решены вопросы робастной устойчивости для интервальных полиномов.

Первые задачи по проблеме робастности были поставлены и решались при обработке статистических информации.

К настоящему времени недостаточно рассмотрены вопросы построения робастных и грубых нелинейных систем управления.

При этом для инженерных применений необходимо рассмотреть и большие (конечные) возмущения, т. е. вопросы робастности и грубости в большом, а также следует отметить, что на практике модели и параметры возмущений могут быть не только известны, но и неопределенны.

Появление тенденции «робастизации» в развитии теории управления не случайно, она продиктована необходимостью рассмотрения современных сложных систем управления (не только традиционных систем автоматического управления, а более широкого класса систем управления различной природы) в динамике, со всеми возможными изменениями и возмущениями в реальных условиях функционирования и развития (эволюции).

Как известно, известные работы В. Л. Харитонова 1978 года, явились основой современной теории робастной устойчивости.

В настоящее время получены много новых результатов в теории робастной устойчивости, это прежде всего реберная теорема и дискретные аналоги и варианты теорем Харитонова. Советскими и российскими учеными — Я. З. Цыпкиным, Б. Т. Поляком, Ю. И. Неймарком разработаны частотные критерии робастной устойчивости типа Михайлова, Найквиста, D -разбиения.

В данной главе рассмотрены вопросы робастной устойчивости интервальных динамических систем. Рассмотрены робастная устойчивость линейных интервальных динамических систем как в непрерывном, так и в дискретном времени. При этом, представлены методы алгебраического направления исследований робастности систем.

Также в данной главе, представлены оригинальные результаты, полученные автором для непрерывных и дискретных линейных интервальных динамических систем, названный *Алгебраическим методом робастной устойчивости*.

5.1. Робастная устойчивость интервальных динамических систем по В. Л. Харитонову

Основополагающие работы В. Л. Харитонова, со времени выхода в свет, вызвали огромный поток публикаций, связанных с чрезвычайной актуальностью решения проблем робастности и грубости систем.

В этих работах В. Л. Харитоновым решены вопросы об устойчивости интервальных полиномов (или семейства полиномов) вида

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_m, \quad (5.1.1)$$

где $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$, $i = \overline{1, n}$ — коэффициенты заданные в интервалах $\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i$ (далее придерживаемся записи $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$), $\underline{a}_i, \bar{a}_i$ — соответственно нижние и верхние границы коэффициентов a_i , $i = \overline{1, n}$.

Здесь в работах решены задачи для полиномов (5.1.1) с действительными коэффициентами, а также с комплексными коэф-

коэффициентами. Показано, что необходимыми и достаточными условиями робастной устойчивости всего семейства действительных и комплексных полиномов (5.1.1) является соответственно устойчивость четырех и восьми (парных) угловых полиномов с коэффициентами:

1) в случае действительных коэффициентов:

$$\begin{aligned} & \{a_0, a_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, a_4, \dots\}, \\ & \{a_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, a_3, a_4, \dots\}, \\ & \{\bar{a}_0, a_1, a_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \dots\}, \\ & \{\bar{a}_0, \bar{a}_1, a_2, a_3, \bar{a}_4, \dots\}, \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

2) в случае комплексных коэффициентов, определенные парами:

$$\begin{aligned} & (h_1, g_1), (h_1, g_2), (h_2, g_1), (h_2, g_2), \\ & (h_3, g_3), (h_3, g_4), (h_4, g_3), (h_4, g_4), \end{aligned}$$

$h_i, g_i, i = \overline{1,4}$ — соответственно действительные и мнимые части комплексного полинома (5.1) $f(j\omega) = h(\omega) + jg(\omega)$ с действительными коэффициентами множеств типа (5.1.2).

Эти угловые полиномы теперь носят название *полиномов Харитонова*.

Как известно, В. Л. Харитоновым получены фундаментальные результаты в области робастной устойчивости, которые сформулированы в виде трех теорем. При этом, Теорема 1 в литературе часто называют *слабой теоремой Харитонова*, результат которой формулируется следующим образом.

Теорема 1, Харитонова. Для робастной устойчивости семейства полиномов (5.1.1), необходимо и достаточно, чтобы все 2^{n+1} угловые полиномы были гурвицевы.

Угловые полиномы — это все полиномы вида (5.1.1), которые имеют коэффициенты, соответствующие угловым значениям интервалов принадлежности этих коэффициентов.

Результат *сильной теоремы Харитонова* — Теоремы 2 Харитонова, формулируется следующим образом.

Теорема 2, Харитонова. Для робастной устойчивости семейства полиномов (5.1), необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевы лишь четыре угловых полинома с наборами коэффициентов (5.1.2).

Для представления Теоремы 3, Харитонова рассмотрим динамическую систему вида

$$\dot{x} = F(x, q), \quad (5.1.3)$$

где $x \in R^n$, $q \in R^p$, $q_i \in [q_i, \bar{q}_i]$, $i = \overline{1, p}$, q — вектор параметров, граничные (угловые) значения параметров q_i, \bar{q}_i . Предполагается, что изменения q квазистационарные (медленные, $dq/dt = 0$).

Тогда в окрестностях точек равновесия $F(x, q) = 0$, систему (5.1.3) можно представить линейными интервальными системами

$$\dot{x} = A_k(q) x, \quad (5.1.4)$$

где $A_k(q) \in R^{n \times n}$ — интервальная матрица с элементами a_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, являющимися функциями от q , т. е. представимы как интервальные величины $a_{ij} \in [a_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ с угловыми значениями $a_{ij}, \bar{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$, $k = 1, 2, \dots$ — номера особых точек. В общем случае $A_k(q)$ является многогранником матриц со взаимосвязанными элементами.

Таким образом, мы приходим к необходимости решения задачи В. Л. Харитонова для интервальных матриц и задачи 3 для многогранников матриц.

В работе В. Л. Харитонова была сформулирована теорема (третья) об асимптотической устойчивости системы типа (5.1.4), без доказательства и каких-либо уточнений.

Теорема 3, Харитонова. Для асимптотической устойчивости точки (положения) равновесия $x = 0$ всех систем вида (5.1.4), достаточно, чтобы четыре полинома из теоремы 2 были гурвицевы.

Эта работа В. Л. Харитонова вызвала огромный поток публикаций отечественных и зарубежных исследователей. Так в работе Bialas S. (1983), было опубликовано доказательство теоремы типа указанной теоремы Харитонова, которая как было показано на контрпримерах, оказалась неверной.

Таким образом, в современной теории робастной устойчивости интервальных динамических систем существуют два альтернативных направления:

- алгебраическое или Харитоновское направление;
- частотное или направление Цыпкина—Поляка.

В алгебраическом или Харитоновском направлении исследований проблемы робастной устойчивости, известны работы многих авторов.

В работе Б. Т. Поляка и П. С. Щербакова [2002], предложено понятие сверхустойчивости линейных систем управления. При этом сверхустойчивые системы обладают свойствами выпуклости, допускающими простые решения многих классических задач теории управления, в частности, задачи робастной стабилизации при матричной неопределенности. Но существенным ограничением таких систем является практическая узость их класса, определяемого условиями наличия доминирующих диагональных элементов матрицы системы с отрицательными величинами.

В работе В. М. Кунцевича [2006] получены интересные результаты по робастной устойчивости для линейных дискретных систем. При этом матрица системы задается в классе сопровождающих характеристический полином системы, т. е. в Фробениусовой форме, что также сужает класс рассматриваемых реальных систем.

В работах В. R. Barmish и др. [1984; 1988] предложены контрпримеры к теореме Биаласа [1983], которые аннулированы в работе автора [1995, № 1].

В работах М. Mansour и др. [1987; 1988] получены дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова [1978], которые имеют ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов или, применяется сложная процедура проектирования корней полиномов на отрезок $[-1, 1]$.

В последующих разделах данной главы рассматривается алгебраический метод Харитоновского направления исследования робастной устойчивости непрерывных и дискретных интервальных динамических систем, в случае интервальных матриц систем общего вида и без определенных ограничений, основы которого заложены в работах автора [1995, № 1; 1995, № 3].

5.2. Робастная устойчивость линейных непрерывных интервальных динамических систем

В работе автора [1995, № 1] сформулирована и доказана теорема типа третьей теоремы Харитонова [1978], которая аннулирует контрпримеры к теореме Bialas [1983], более того на ее основе доказана реберная теорема для многогранников матриц. Новая реберная теорема также аннулирует контрпримеры для этого случая.

Прежде, чем сформулировать основную теорему введем следующие обозначения: A — матрица A_k в (5.1.4) при фиксированном значении k ; D_a — множество матриц с интервальными элементами a_{ij} ,

$$D_a = \{a_{ij}: \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, i, j = \overline{1, n}\};$$

$a_i, i = \overline{1, n}$ — коэффициенты характеристического уравнения (полинома) системы (5.1.4)

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (5.2.1)$$

где $a_l \in [\underline{a}_l, \bar{a}_l], i = \overline{1, n}, a_0 = 1$, а коэффициенты $\underline{a}_i, \bar{a}_i$ называются угловыми; четыре угловых полиномов Харитонова $f_l(\lambda), l = \overline{1, 4}$ характеризуются множествами коэффициентов, представленных в (5.1.2), начиная с a_1 .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. Для того, чтобы особая точка (положение равновесия) $x = 0$ системы (5.1.4) была асимптотически устойчива при всех $A \in D_a$ необходимо и достаточно, чтобы были сурвицевы все четыре угловых полиномов Харитонова, составленных по отдельным угловым коэффициентам $a_i (\underline{a}_i, \bar{a}_i), i = \overline{1, n}$, характеристических полиномов системы (5.2.1).

Данная теорема доказывается на основе следующей леммы.

Лемма. Сепаратные угловые коэффициенты $a_i (\underline{a}_i, \bar{a}_i), i = \overline{1, n}$, образуются как соответствующие коэффициенты полиномов (5.2.1), либо при угловых значениях элементов $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$, матрицы A , либо при нулевых значениях некоторых элементов (если интервал принадлежности включает нуль).

Как нетрудно видеть из леммы, для нахождения коэффициентов $a_i(\underline{a}_i, \bar{a}_i)$, $i = \overline{1, n}$, в общем случае необходимо применение оптимизационных методов нелинейного программирования.

К теореме 5.1, доказательство которой приведено в приложении работы Оморов (1995, № 1) и здесь ниже, необходимо сделать следующее уточняющее замечание.

Замечание. Из основного аргумента доказательства теоремы 5.1, связанного с наличием четырех угловых полиномов Харитонова следует, что при отсутствии полного множества (набора) из четырех угловых полиномов условия теоремы 5.1 необходимы, но могут быть недостаточны для устойчивости системы (5.1.4).

Случай соответствующий приведенному замечанию может возникнуть тогда, когда сепаратные угловые коэффициенты полиномов (5.2.1) взаимосвязаны и в итоге сужают набор угловых полиномов до количества менее четырех, включая и кратные, совпадающие полиномы.

Доказательство леммы. Определим аналитические выражения для коэффициентов интервального характеристического полинома через элементы интервальной матрицы A . Вычисляя определитель $\det[\lambda I_n - A]$ находим

$$\begin{aligned} a_1 &= -\sum_{i=1}^n a_{ii}, \\ a_2 &= \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} - \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ji}, \\ a_3 &= \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jk} a_{kj} - \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{jk} a_{ki} - \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} a_{kk}, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

$$\begin{aligned} \dots \dots \dots \\ a_{n-2m} &= \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jk} a_{ks} \dots a_{ij} - \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} a_{ks} a_{sk} \dots a_{pq} a_{qp} + \\ &+ \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} a_{kk} a_{ss} a_{lm} a_{ml} \dots a_{pq} a_{qp} - \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} \dots a_{ss} a_{pq} a_{qp} + \\ &+ \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} \dots a_{kk} + \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ji} a_{ks} a_{sk} \dots a_{pq} a_{qp} - \\ &- \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{jk} a_{ks} \dots a_{pq} a_{qp} \\ a_{2m+1} &= \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jk} a_{ks} \dots a_{ij} - \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jk} a_{kj} a_{sk} \dots a_{pq} a_{qp} - \\ &- \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} a_{ks} a_{sl} \dots a_{pq} a_{qp} + \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} a_{kk} a_{sl} a_{ls} \dots a_{pq} a_{qp} - \\ &- \dots - \prod_i a_{ii} + \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ji} a_{ks} a_{sl} \dots a_{pq} a_{qp} - \\ &- \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{jk} a_{ks} \dots a_{pq} a_{qp} \end{aligned}$$

где все индексы i, j, k, \dots принимают только различные значения, а во всех суммах по n сомножителей.

Из (5.2.2) видно, что произвольно взятый коэффициент $a_p(\rho = \overline{1, n})$ полинома (5.2.1) представима линейной зависимостью от любого из a_{ij} ($i, j = \overline{1, \dots, n}$) при фиксированных значениях всех остальных элементов a_{ij} , т. е.

$$a_p = c a_{ij} + d, \quad (5.2.3)$$

где c, d — некоторые действительные постоянные. При всевозможных значениях элементов, коэффициенты c и d есть интервальные величины.

Допустим, при некоторых c и d достигнуты угловые (экстремальные) значения a_p равные \underline{a}_p и \bar{a}_p

$$\underline{a}_p = c_1 a_{ij} + d_1, \quad \bar{a}_p = c_2 a_{ij} + d_2 \quad (5.2.4)$$

где $c_1, c_2 \neq 0$.

Тогда, в силу линейности зависимостей (5.2.4) очевидно, что \underline{a}_p и \bar{a}_p достижимы только при угловых значениях a_{ij} (см. рис. 5.1).

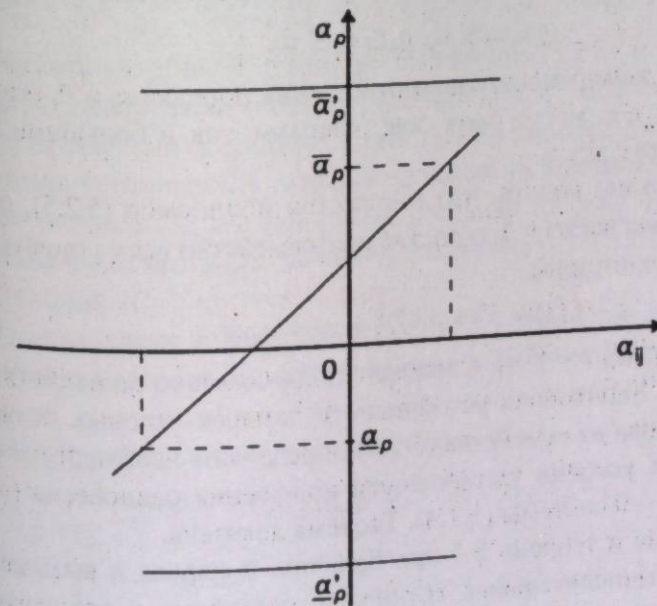


Рис. 5.1

Если же c_1 или c_2 равны нулю, что возможно при равенстве нулю одного из остальных элементов, то \underline{a}_p и (или) \bar{a}_p не зависят от a_{ij} , что эквивалентно достижимости угловых значений $\underline{a}_p, \bar{a}_p$ при нулевом a_{ij} . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5.1.

Пусть для устойчивой системы (5.1.4) каким-либо оптимизационным методом (дискретного программирования с n^2 элементами с возможными двумя ($\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}$) или тремя ($\underline{a}_{ij}, 0, \bar{a}_{ij}$) значениями для каждого из них) по выражениям (5.2.2) получены угловые значения *сепаратных* коэффициентов $a_i (i = \overline{1, n}), a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$.

Обозначим матрицы с соответствующими элементами через $\underline{A}_i, \bar{A}_i, i = 1, \dots, n$.

Тогда характеристические полиномы \underline{A}_i и \bar{A}_i соответственно примут вид

$$f_{\bar{A}_i}(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_i \lambda^{n-i} + \dots + \bar{a}_n \quad (5.2.5)$$

$$f_{\underline{A}_i}(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + \underline{a}_i \lambda^{n-i} + \dots + a_n$$

где $a_j, \bar{a}_j, j = \overline{1, n}, j \neq i$ удовлетворяют неравенствам

$$\underline{a}_j \leq a_j \leq \bar{a}_j, \underline{a}_j \leq \bar{a}_j \leq \bar{a}_j \quad (5.2.6)$$

При этом относительно отношения порядка a_j и \bar{a}_j ограничений нет, т. е. могут быть, как равными, так и большими (меньшими) друг друга.

Нетрудно видеть, что множество полиномов (5.2.5), образованное для всех $i = \overline{1, n}$ составляет семейство всех угловых полиномов Харитонова.

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (5.2.7)$$

где $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i, i = \overline{1, n}]$. Следовательно, согласно сильной (второй) теореме Харитонова устойчивость четырех угловых полиномов Харитонова из семейства (5.2.7) определяют необходимые и достаточные условия устойчивости положения равновесия (особой точки) $x = 0$ системы (5.1.4). Теорема доказана.

Лемма и теорема 5.1 при больших порядках n вызывают немалые вычислительные трудности, связанные с оптимизационным нахождением коэффициентов $\underline{a}_i, \bar{a}_i, i = \overline{1, n}$.

Для уменьшения этих трудностей воспользуемся результатами теории мажоризации, а именно теоремой Фана (1950), позволяющей сравнивать действительные части собственных значений матрицы A с собственными значениями матрицы $(A + A^*)/2$.

Теорема Фан. Для любой комплексной ($n \times n$) — матрицы A ($\text{Re} \lambda_1(A), \dots, \text{Re} \lambda_n(A)$) $c(\lambda_1((A + A^*)/2), \dots, \lambda_n((A + A^*)/2))$. (5.2.8)

Здесь c — знак мажорирования, которая представляет (5.12) в виде

$$\sum_1^k \lambda_i((A + A^*)/2) \geq \sum_1^k \text{Re} \lambda_i(A), i, k = \overline{1, n}. \quad (5.2.9)$$

где $\lambda_1((A + A^*)/2)$ и $\lambda_1(A)$ считаются упорядоченными, т. е.

$$\lambda_1((A + A^*)/2), \dots, \lambda_n((A + A^*)/2),$$

$$\text{Re} \lambda_1(A) \geq \dots \geq \text{Re} \lambda_n(A),$$

A^* — сопряженная (транспонированная) к A матрица.

Элементы a_{ij}^c симметрической матрицы $A_c = (A + A^*)/2$ будут соответственно равны: диагональные $a_{ii}^c = a_{ii}, i = \overline{1, n}$; внедиагональные $a_{ij}^c = a_{ji}^c = (a_{ij} + a_{ji})/2, i, j = \overline{1, n}$.

Для такой матрицы A_c очевидно выражения (5.2.2), а значит и процедура оптимизации соответствующих коэффициентов (5.2.2) характеристических полиномов существенно упрощается.

Доказав устойчивость четырех угловых полиномов Харитонова для матрицы A_c , мы тем самым согласно теореме Фана (определяющей достаточные условия) докажем устойчивость исходной системы (5.1.4).

Справедливость доказанной теоремы 5.1 подтверждается аннулированием известных контрпримеров к теореме Bialas (далее Биалас).

Действительно, для контрпримера имеем:

$$A = \Omega_r = \begin{vmatrix} -0.5 - r & -12.06 & -0.06 \\ -0.25 & 0 & 1 \\ 0.25 & -4 & -1 \end{vmatrix}, \quad (5.2.10)$$

где $r \in [0, 1]$.

По Биаласу матрица A устойчива. Но известно, что при $r \in [0.5 - \sqrt{0.06}, 0.5 + \sqrt{0.06}]$ интервальная матрица A неустойчива (негурвицева), поскольку $a_1 a_2 - a_0 a_3 = r^2 - r + 0.19 < 0$.

А по результатам данной работы имеем

$$a_1 = -\sum_1^3 a_{ii} = 1.5 + r,$$

$$a_2 = \sum_1^3 a_{ii} a_{jj} - \sum_1^3 a_{ij} a_{ji} = 1.5 + r,$$

$$a_3 = -\sum_1^3 a_{ii} a_{jj} a_{kk} + \sum_1^3 a_{ii} a_{jk} a_{kj} - \sum_1^3 a_{ij} a_{jk} a_{ki} = 4r + 2.6,$$

отсюда $\underline{a}_1 = 1.5$, $\bar{a}_1 = 2.5$; $\underline{a}_2 = 1.5$, $\bar{a}_2 = 2.5$; $\underline{a}_3 = 2.06$, $\bar{a}_3 = 6.06$.

Тогда четыре угловых полинома Харитонова будут

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + 1.5 \lambda^2 + 1.5 \lambda + 6.06,$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^3 + 1.5 \lambda^2 + 2.5 \lambda + 6.06,$$

$$f_3(\lambda) = \lambda^3 + 2.5 \lambda^2 + 1.5 \lambda + 2.06,$$

$$f_4(\lambda) = \lambda^3 + 2.5 \lambda^2 + 2.5 \lambda + 2.06.$$

Вычисляя получаем, что $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ неустойчивы, а $f_3(\lambda)$ и $f_4(\lambda)$ — устойчивы. Для

$$f_1(\lambda): a_1 a_2 = 2.25, a_0 a_3 = 6.06,$$

$$f_2(\lambda): a_1 a_2 = 3.75, a_1 a_2 = 6.06,$$

$$f_3(\lambda): a_1 a_2 = 3.75, a_0 a_3 = 2.06,$$

$$f_4(\lambda): a_1 a_2 = 6.25, a_0 a_3 = 2.06.$$

Следовательно, интервальная матрица $A = \Omega_r$ неустойчива.

Теперь рассмотрим примеры, которые наглядно поясняют смысл *Замечания* к теореме 5.1.

Пример 1. Покажем, что система (5.1.4) с интервальной матрицей вида $A = \Omega_r$ (5.2.3), которая не обладает полным набором из четырех характеристических полиномов Харитонова, является неопределенной робастности.

Действительно, если положим $r_1 = 0.5 - \sqrt{0.06}$, $r_2 = 0.5 + \sqrt{0.06}$, то, как известно система (5.1.4) является неустойчивой при $r_1 < r < r_2$, а в интервалах $r \in [0, r_1)$ и $r \in (r_2, 1]$ эта система устойчива. Если теперь предположить, что коэффициенты характери-

стического полинома (5.2.1) не зависят друг от друга и мы имеем четыре угловых полинома системы (5.1.4), то нетрудно вычислить, что только в малых частях указанных выше интервалов робастной устойчивости $r \in [0, r_1)$ и $r \in (r_2, 1]$ имеет место устойчивость всех четырех характеристических полиномов, а именно при $r \in [0, 0.475)$ и $r \in (0.9617, 1]$.

Так, например, для интервала $r \in [0, r_1)$ имеем следующие четыре угловых полинома:

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + 1.5 \lambda^2 + 1.5 \lambda + (2.06 + 4r_1),$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^3 + 1.5 \lambda^2 + (1.5 + r_1) \lambda + (2.06 + 4r_1),$$

$$f_3(\lambda) = \lambda^3 + (1.5 + r_1) \lambda^2 + 1.5 \lambda + 2.06,$$

$$f_4(\lambda) = \lambda^3 + (1.5 + r_1) \lambda^2 + (1.5 + r_1) \lambda + 2.06,$$

из которых два первых неустойчивы, а следующие два устойчивы.

Данный пример показывает, что из-за зависимости между коэффициентами характеристического полинома (5.2.1), здесь действительно имеет место неполный набор из двух угловых полиномов, и мы не можем однозначно установить интервалы робастной устойчивости системы (5.1.4), как и следовало согласно *Замечанию* к теореме 5.1.

Пример 2. Пусть задан характеристический полином интервальной системы (5.1.4) в виде

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 1.5 \lambda^2 + 2.5 \lambda + a_3, \quad (5.2.11)$$

где коэффициент $a_3 \in [2, 3]$. Такой случай системы (5.4) возможен, например, при Фробениусовой или сопровождающей форме матрицы A .

Тогда, четыре угловых характеристических полинома системы (5.1.4) будут следующие:

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + 1.5 \lambda^2 + 2.5 \lambda + 3,$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^3 + 1.5 \lambda^2 + 2.5 \lambda + 3,$$

$$f_3(\lambda) = \lambda^3 + 1.5 \lambda^2 + 2.5 \lambda + 2,$$

$$f_4(\lambda) = \lambda^3 + 1.5 \lambda^2 + 2.5 \lambda + 2.$$

Как нетрудно видеть, в данном случае все четыре характеристических полинома системы (5.1.4) устойчивы ($a_1 a_2 > a_3$) и система (5.1.4) робастно устойчива. Если же, положим $a_3 \in [2,06, 4,06]$, то в этом случае, первые два полинома $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ неустойчивы, а два следующих $f_3(\lambda)$ и $f_4(\lambda)$ устойчивы, а, следовательно, система (5.1.4) робастно неустойчива.

В этом примере мы рассмотрели два случая интервальной системы (5.1.4), когда имеются две пары совпадающих или кратных характеристических полиномов, но при этом имеются полные наборы четырех полиномов Харитоновна, в отличие от случая системы (5.1.4) с матрицей $A = \Omega$, (5.2.3), где нет полного набора из четырех угловых характеристических полиномов, а только два угловых полинома, вследствие жесткой зависимости коэффициентов a_i , $i = 1, 2, 3$ от параметра r . Поэтому, в обоих случаях рассматриваемого Примера 2 в соответствии с Замечанием к теореме 5.1 можно сделать вполне определенный вывод о робастной устойчивости или неустойчивости интервальной системы (5.1.4) с характеристическим полиномом (5.2.1), в то время как в случае с матрицей вида $A = \Omega$, мы определенный вывод о робастной устойчивости не можем сделать.

Пример 3. Для наглядности рассмотрим простой пример интервальной системы второго порядка.

Пусть система (5.1.4) имеет интервальную матрицу $A = [a_{11}, a_{12}; 1, -2]^T$, где элементы первой строки являются интервальными: $a_{11} \in [-1, 0]$; $a_{12} \in [-2, -1]$.

Тогда последовательные сепаратные угловые коэффициенты интервального характеристического полинома будут следующие:

$\underline{a}_1 = 2, \bar{a}_1 = 3; \underline{a}_2(a_1) = 1, \bar{a}_2(a_1) = 2; \underline{a}_2(\bar{a}_1) = 3, \bar{a}_2(\bar{a}_1) = 4$, следовательно, имеем полный набор следующих четырех угловых характеристических полиномов Харитоновна:

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1,$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2,$$

$$f_3(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 3,$$

$$f_4(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

Как видно, все четыре угловые полиномы устойчивы, а значит система (5.1.4) с рассмотренной интервальной матрицей робастно устойчива.

Полученные теорема 5.1 и лемма позволяют решить и задачу о реберной теореме для многогранников матриц.

Как известно Джури (1990), многогранником матриц называется множество

$$P = \{P_s = \sum_{i=1}^m s_i P_i: s_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m s_i = 1\}, \quad (5.2.12)$$

где P_i , $i = \overline{1, m}$ постоянные матрицы.

В обзоре Джури (1990) сформулирована гипотеза об условиях устойчивости P в следующем виде (с точностью до обозначений).

Гипотеза. Многогранник P устойчив тогда, и только тогда, когда ребра P устойчивы, т. е. матрица

$$sP_i + (1-s)P_j \quad (5.2.13)$$

устойчива при любых $i, j = \overline{1, m}$, $s \in [0, 1]$.

Но как показано на контрпримерах, гипотеза неверна для строго гурвицева случая. Эти контрпримеры аннулируются теоремой 5.2, полученной на основе теоремы 5.1 и леммы.

Теорема 5.2. Для устойчивости многогранника матриц P необходимо и достаточно, чтобы выпуклые ребра P были устойчивы, т. е. матрица

$$s_1 P_i + s_2 P_j \quad (5.2.14)$$

устойчива при любых $i, j = \overline{1, m}$, $s_1 \in [-1, 0]$, $s_2 \in [0, 1]$.

Доказательство теоремы 5.2.

Необходимость. Представим множество (5.2.14) в виде

$$P = \{P_s = P_{s1} + P_{s2}: P_{s1} = \sum_{i=1}^m s_{1i} P_i, P_{s2} = \sum_{i=1}^m s_{2i} P_i, \quad (5.2.15)$$

$$s_{1i} + s_{2i} = s_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m s_i = 1\}.$$

Очевидно s_{1i} и s_{2i} можно представить как $s_{1i} \in [-1, 0]$, $s_{2i} \in [0, 1]$, $i = \overline{1, m}$. Но тогда, если многогранник матриц P устойчив, то устойчивы и P_{s1} , P_{s2} в отдельности

$$P_{s1} = \sum_1^m s_{1i} P_i, P_{s2} = \sum_1^m s_{2i} P_i \quad (5.2.16)$$

при $s_{1i} \in [-1, 0]$, $s_{2i} \in [0, 1]$, $i = \overline{1, m}$. Следовательно, устойчивы и любая пара $s_{1i} P_i$, $s_{2i} P_j$ в отдельности и в сумме

$$s_{1i} P_i + s_{2j} P_j, \text{ где } s_{1i} \in [-1, 0], s_{2j} \in [0, 1], i, j = \overline{1, m}. \quad (5.2.17)$$

Достаточность. Пусть все выпуклые ребра (которые соответствуют выпуклой оболочке множества матриц P)

$$s_{1i} P_i + s_{2j} P_j \quad (5.2.18)$$

при $s_{1i} \in [-1, 0]$, $s_{2j} \in [0, 1]$, $i, j = \overline{1, m}$ устойчивы.

Тогда, поскольку s_{1i} и s_{2j} независимы и i, j принимают любые значения от 1 до m , то будут устойчивы и отражения (5.2.12), т. е.

$$s_{2i} P_i + s_{1j} P_j, \quad (5.2.19)$$

где $s_{2i} \in [0, 1]$, $s_{1j} \in [-1, 0]$, $i, j = \overline{1, m}$.

Следовательно, суммируя (5.2.15) и (5.2.16) по всем $i, j = \overline{1, m}$ будем иметь, что

$$P_{s1} + P_{s2} = \sum_1^m s_{1i} P_i + \sum_1^m s_{2i} P_i \quad (5.2.20)$$

будет устойчива. Теорема 5.2 доказана.

Заметим, что в формулировке теоремы 5.2 в силу независимости s_1 и s_2 дополнительные индексы i, j опущены.

Покажем, что действительно контрпримеры не противоречат теореме 5.2.

Контрпример 1. Рассматриваются матрицы

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1.0 & 0 & 1.0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0.1 \end{vmatrix}; P_2 = M_2 = \begin{vmatrix} -1.0 & 0 & 1.0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0.1 \end{vmatrix};$$

$$P_3 = M_3 = \begin{vmatrix} -1.0 & 0 & -1.0 \\ 0 & -1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.1 \end{vmatrix}.$$

В работе Barmish (1988) (далее Бармиш) показано, что ребра типа (5.2.14) строго гурвицевы, которое утверждается по гипотезе об устойчивости многогранника матриц P .

Но там же показано, что матрица

$$\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 = \begin{vmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{vmatrix}$$

неустойчива.

По теореме 5.2 имеем для пары (P_1, P_2)

$$\det[\lambda I - (s_1 P_1 + s_2 P_2)] = (\lambda + s_1 + s_2)[\lambda^2 + 0.9(s_1 + s_2)\lambda - 0.1(s_1 + s_2)^2 + s_1 s_2 + s_1^2].$$

Отсюда очевидно, что при независимых s_1 и s_2 принадлежащих соответственно интервалам $s_1 \in [-1, 0]$, $s_2 \in [0, 1]$ например, при $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, матрица $s_1 P_1 + s_2 P_2$ неустойчива.

Контрпример 2. Рассматривается матрица

$$M = \begin{vmatrix} m_{11} & -12.06 & -0.06 & 0 \\ -0.25 & -0.03 & 1.00 & 0.5 \\ 0.25 & -4.0 & -1.03 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & m_{44} \end{vmatrix},$$

где $m_{11} \in [-1.5, -0.5]$; $m_{44} \in [-4.0, -1.0]$, которые представлены в виде

$$m_{11} = -0.5 - q_1, m_{44} = -1.0 - q_2, q_1 \in [0, 1], q_2 \in [0, 3].$$

Характеристический полином

$$f(\lambda, q_1, q_2) = \lambda^4 + (2.56 + q_1 + q_2)\lambda^3 + (2.871 + 2.06q_1 + 1.561q_2 + q_1 q_2)\lambda^2 + (3.164 + 4.841q_1 + 1.56q_2 + 1.06q_1 q_2)\lambda + (1.853 + 3.773q_1 + 1.985q_2 + 4.032q_1 q_2).$$

В работе Бармиш [1988], рассматривая 4 случая:

$$\begin{aligned} q_1 = 0, q_2 \in [0, 3], \\ q_1 \in [0, 1], q_2 = 0, \\ q_1 = 1, q_2 \in [0, 3], \\ q_1 \in [0, 1], q_2 = 3, \end{aligned}$$

показывается, что во всех этих случаях множества (семейства) M строго гурвицевы. Однако, в точке множества $q = 0.5$ и $q = 1.0$ получен полином

$$f(\lambda, 0.5, 1.0) = \lambda^4 + 4.06\lambda^3 + 5.961\lambda^2 + 7.676\lambda + 7.741,$$

который неустойчив.

Для нашего случая, представляя как в (5.2.15) $q_1 = q_{11} + q_{12}$, $q_2 = q_{21} + q_{22}$, где $q_{11} \in [-1, 0]$, $q_{12} \in [0, 1]$, $q_{21} \in [-3, 0]$, $q_{22} \in [0, 3]$, получим для пары (q_{11}, q_{22}) следующие четыре полинома Харитонова

$$f_1(\lambda) = \lambda^4 + 2.56\lambda^3 + 2.871\lambda^2 + 15.865\lambda + 23.677,$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^4 + 2.56\lambda^3 + 12.614\lambda^2 + 15.865\lambda + 1.853,$$

$$f_3(\lambda) = \lambda^4 + 6.56\lambda^3 + 2.871\lambda^2 + 3.164\lambda + 23.677,$$

$$f_4(\lambda) = \lambda^4 + 6.56\lambda^3 + 12.614\lambda^2 + 3.164\lambda + 1.853.$$

Для полиномов четвертого порядка как известно при положительности всех коэффициентов условие устойчивости определяется неравенством $\Delta = a_1 a_2 a_3 - (a_3^2 + a_4 a_1^2) > 0$.

Вычисляя соответственно находим, что полиномы $f_1(\lambda)$ и $f_3(\lambda)$ неустойчивы $\Delta_1 = -290.264$, $\Delta_3 = -969.327$, а полиномы $f_2(\lambda)$ и $f_4(\lambda)$ устойчивы $\Delta_2 = 248.468$, $\Delta_4 = 172.062$.

Таким образом, и для этого примера нет противоречий с теоремами 5.1 и 5.2.

Контрпример 3. В работе Бармиш [1988] утверждается, что между выпуклыми оболочками многогранника матриц и соответствующих полиномов нет соответствия. По результатам леммы, теорем 5.1 и 5.2 это подтверждается в силу того, что множества угловых коэффициентов полиномов содержат только два значения $\underline{a}_i, \bar{a}_i$, $i = \overline{1, n}$ и для каждого коэффициента, а множества угловых элементов матриц могут содержать в общем случае три значения $\underline{a}_{ij}, 0, \bar{a}_{ij}$, $ij = \overline{1, n}$, т. е. множество матриц шире (мощнее) множества полиномов, относительно угловых элементов и коэффициентов.

5.3. Вопросы робастности интервальных динамических систем

Результаты предыдущего параграфа позволяют решать ряд нерешенных вопросов робастной устойчивости. Рассмотрим эти вопросы.

Комплексные матрицы. В случае комплексных матриц A и многогранников матриц P , результаты полученные в параграфе 5.2 в сочетании с результатами работы Харитонова для комплексных полиномов позволяют решать задачи робастной устойчивости, а именно в этом случае требуется рассмотрение восьми полиномов Харитонова по четыре для действительной и мнимой частей (парамии). Соответственно оптимизируются коэффициенты мнимых и вещественных частей полиномов $f(j\omega) = h(\omega) + jg(\omega)$.

Таким образом, нетрудно доказать следующие теоремы.

Теорема 5.3. Для того, чтобы интервальная матрица A с комплексными коэффициентами $a_{ij} = \alpha_{ij} + j\beta_{ij}$, $ij = \overline{1, n}$; $\alpha_{ij} \in [\underline{\alpha}_{ij}, \bar{\alpha}_{ij}]$, $\beta_{ij} \in [\underline{\beta}_{ij}, \bar{\beta}_{ij}]$ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы восемь угловых вещественных полиномов Харитонова, определенных парами (h_1, g_1) , (h_1, g_2) , (h_2, g_1) , (h_2, g_2) , (h_3, g_2) , (h_3, g_3) , (h_4, g_3) , (h_4, g_4) были устойчивы.

Замечание 1. Оптимизация коэффициентов отдельных угловых полиномов здесь ведется раздельно по вещественным и мнимым частям.

Замечание 2. Если использовать доказанную выше теорему, то в этом случае верна и реберная теорема для комплексных матриц.

Условие апериодичности. Как известно, условие апериодичности (строгой апериодичности) означает, что все корни (собственные значения) вещественны и отрицательны (различны, вещественны и отрицательны).

В этом случае, используя результаты Джури (1990) получим следующую теорему.

Теорема 5.4. Для того, чтобы интервальная матрица A была строго апериодична, необходимо и достаточно, чтобы были строго апериодичны четыре пары полиномов Соха, ассоциированные с четырьмя полиномами Харитонова, полученными в соответствии с теоремой 5.1.

Замечание 1. Аналогичное место имеет и условие нестрогой апериодичности.

Замечание 2. Условие строгой и нестрогой апериодичности нетрудно сформулировать и для многогранников матриц, используя теорему 5.2 и полиномы Соха.

Доказательство теоремы 5.4 нетрудно провести используя теорему 5.1, а также теорему Соха об условиях апериодичной робастности многочленов.

Теорема Соха. *Необходимым и достаточным условием строго апериодичной робастности многочлена $f(\lambda)$ является строгая апериодичность многочленов $f_{s1}(\lambda)$ и $f_{s2}(\lambda)$, полученных из $f(\lambda)$ следующим образом:*

$$f_{s1}(\lambda) = \sum_0^n t_{1k} \lambda^{n-k},$$

$$\text{где } t_{1k} = \begin{cases} \overline{a_k}, & k \text{ нечетно,} \\ a_k, & k \text{ четно,} \end{cases}$$

$$f_{s2}(\lambda) = \sum_0^n t_{2k} \lambda^{n-k},$$

$$\text{где } t_{2k} = \begin{cases} \overline{a_k}, & k \text{ четно,} \\ a_k, & k \text{ нечетно,} \end{cases} \quad k = \overline{0, n}.$$

Модальность. Термин модальности введен российскими исследователями, в зарубежной литературе пользуются термином D -устойчивости и означает, что область устойчивости (локализации корней, собственных значений) представляет некоторую односвязную область D — любой формы. Для этого случая справедлива теорема.

Теорема 5.5. *Для того, чтобы многогранник матриц P был модальным с областью D , необходимо и достаточно, чтобы были модальными с этой же областью все матрицы*

$$s_1 P_i + s_2 P_j \quad (5.3.1)$$

$$\text{где } s_1 \in [-1, 0], s_2 \in [0, 1], i, j = \overline{1, m}.$$

5.4. Робастная устойчивость линейных дискретных интервальных динамических систем

Как известно, публикация работы Харитонов [1978] дала импульс для поиска многими исследователями дискретных аналогов теорем Харитонова. Так в работе Джури [1990] указано, что «дискретный вариант харитоновского условия четырех многочленов отсутствует». В этой работе показывается, что действительно для дискретных систем возникают сложности, связанные с тем, что «имеется несовместимость между областью устойчивости, которая в данном случае представляет собой единичный круг и областью изменения коэффициентов, которая является прямоугольником со сторонами параллельными координатным осям». Здесь же отмечается, что в настоящее время получены дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова с помощью декомпозиции рассматриваемого интервального многочлена

$$f(z) = \sum_0^n a_{n-i} z^i, \quad a_i \in [a_i, \overline{a_i}], \quad (5.4.1)$$

на симметричную и антисимметричную части:

$$h(z) = (1/2)[f(z) + z^n f(z^{-1})],$$

$$g(z) = (1/2)[f(z) - z^n f(z^{-1})].$$

Но эти аналоги теорем Харитонова имеют определенные ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов (пары коэффициентов) a_i и a_{n-i} образуют прямоугольники наклоненные под углом 45° к осям). Эти ограничения были сняты в работах автора [1995, № 3; 2002], где получены аналоги теорем Харитонова с использованием теоремы Шура. При этом сформулированы теоремы, являющиеся дискретными аналогами результатов для непрерывных систем по интервальным матрицам и многогранникам матриц.

Далее, рассматривается обобщение результатов, полученных в работах указанных выше с учетом выводов приведенных выше для непрерывных систем.

Пусть задана дискретная интервальная динамическая система

$$x(m+1) = Ax(m), m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4.2)$$

где $x(m)$ — вектора состояния, $A \in R^{n \times n}$ — интервальная матрица с элементами a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, представляющими интервальные величины $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ с угловыми значениями $\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$.

Для дискретных систем, используя z -преобразование, получаем интервальный характеристический полином системы (5.4.2)

$$f(z) = \det(zI - A) = \sum a_i z^{n-i}, a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i], \underline{a}_i \leq \bar{a}_i. \quad (5.4.3)$$

Тогда, как известно, полином (система) (5.4.3) устойчив, если все его корни лежат внутри единичного круга, т. е.

$$|z_i| < 1, \quad (5.4.4)$$

где $z_i, i = \overline{1, n}$ корни (5.4.3). Для определения условий устойчивости воспользуемся подходом теоремы Шура, т. е. путем проверки выполнения условий вида

$$|a_0| < |a_n| \quad (5.4.5)$$

для последовательности полиномов, определяемых рекуррентными соотношениями

$$f_1(z) = (a_0 f(z) - a_n f(1/z)z^n)/z, \dots \dots \dots \quad (5.4.6)$$

$$f_{i+1}(z) = (a_{0,i} f_i(z) - a_{n,i} f_i(1/z)z^{n-i})/z,$$

где $a_{0,i}, a_{n,i}$ — соответственно старший и младший коэффициенты i -го ($i = \overline{1, n-2}$) полинома $f_i(z)$. Введем определение.

Определение. Точками переменяемости для коэффициента $a_i, i = \overline{0, n}$, будем называть точки на действительной оси, в которых происходят переходы корней полинома (5.4.3) через единичную окружность на плоскости корней, а интервалами переменяемости соответственно интервалы в которых корни находятся либо внутри, либо вне единичного круга (рис. 5.2).

Используя (5.4.5) и (5.4.6) получены следующие утверждения.

Теорема 5.6. Для полинома (5.4.3), в общем случае, количество точек переменяемости при изменениях a_{n-1} или $a_n, i = \overline{0, n}$, по всей действительной оси и фиксированных значениях остальных коэффициентов будет не более $N_1 = 2(2^{n-1} - 1)$.

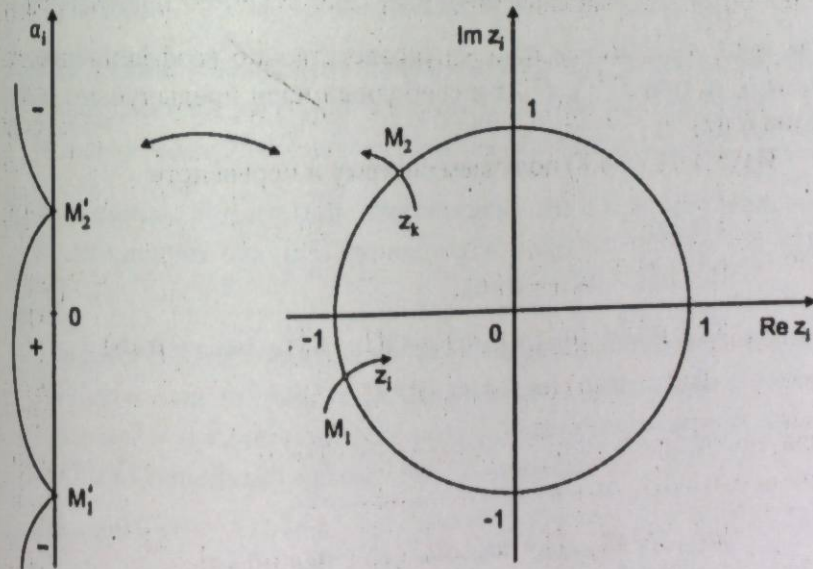


Рис. 5.2. Точки (M_1, M_2) и интервалы переменяемости $(-\infty, M_1)^-, [M_1, M_2]^+, [M_2, +\infty)^-$ для коэффициента a_i

Доказательство теоремы 5.6. Запишем полином (5.4.3) в развернутом виде

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \quad (5.4.7)$$

где $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i], i = \overline{0, n}$. Положим $a_0 = 1$.

Для определения условий устойчивости (5.4.4) воспользуемся теоремой Шура, которая приводит к проверке условий (5.4.5) для последовательности n полиномов (5.4.6). Определим эту последовательность:

$$\begin{aligned}
 f_1(z) &= (1 - a_n^2)z^{n-1} + (a_1 - a_n a_{n-1})z^{n-2} + \dots + (a_{n-1} - a_n a_1), \\
 f_2(z) &= [(1 - a_n^2)^2 - (a_{n-1} - a_n a_1)^2]z^{n-2} + [(1 - a_n^2)(a_1 - a_n a_{n-1}) - \\
 &\quad - (a_{n-1} - a_n a_1)(a_{n-2} - a_n a_2)]z^{n-3} + \dots + \\
 &\quad + [(1 - a_n^2)(a_{n-2} - a_n a_2) - (a_{n-1} - a_n a_1)(a_1 - a_n a_{n-1})], \\
 &\dots\dots\dots \\
 f_i(z) &= [a_{0,i-1}^2 - a_{n,i-1}^2]z^{n-i} + \dots + [a_{0,i-1} a_{n-1,i-1} - a_{n,i-1} a_{1,i-1}],
 \end{aligned}
 \tag{5.4.8}$$

где $a_{0,i-1}$, $a_{1,i-1}$, $a_{n-1,i-1}$, $a_{n,i-1}$ — соответственно коэффициенты a_0 , a_1 , a_{n-1} , a_n при z^{n-i+1} , z^{n-i} , z и свободный член предыдущего полинома $f_{i-1}(z)$.

Из (5.4.7), (5.4.8) получаем систему n неравенств

$$\begin{aligned}
 1 &> |a_n|, \\
 |1 - a_n^2| &> |a_{n-1} - a_n a_1|, \\
 |(1 - a_n^2)^2 - (a_{n-1} - a_n a_1)^2| &> |(1 - a_n^2) - (a_{n-2} - a_n a_2) - \\
 &\quad - (a_{n-1} - a_n a_1)(a_1 - a_n a_{n-1})|, \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 |a_{0,n-1}^2 - a_{0,n-1}^2| &> |a_{0,n-1} a_{n-1,n-1} - a_{n,n-1} a_{1,n-1}|.
 \end{aligned}
 \tag{5.4.9}$$

Из (5.4.8) и (5.4.9) нетрудно видеть, что наивысшая степень многочлена от a_i , $i = \overline{1, n}$, при фиксированных значениях остальных коэффициентов в (5.4.9), будет равна 2^{n-i+1} . В следующем $n-1$ -ом неравенстве (5.4.9) степень a_i будет 2^{n-i-2} и т. д. до первой степени. В итоге, если предположить наихудший случай, когда все корни, удовлетворяющие равенствам вида

$$F_j(a_i) = 0, j = \overline{0, n}, \tag{5.4.10}$$

полученным из неравенств (5.4.9) (где F_j некоторые полиномиальные функции, приведенных левых частей (5.4.9), действительны и различны, то всего для i -го коэффициента a_i будет

$$N_2 = 2(2^{n-1} - 1), i = \overline{0, [n/2]}, ([n/2] — \text{целая часть } n/2) \tag{5.4.11}$$

точек перемежаемости на действительной оси (сомножитель 2 перед скобкой в (5.4.11) обусловлен тем, что неравенства (5.4.9) в абсолютных величинах).

Как видно из (5.4.8), количества точек N_1 для a_i и a_{n-i} совпадают. Отметим, что при конкретно заданных ограниченных интервалах для коэффициентов a_i , $i = \overline{0, n}$ величина N_1 будет существенно меньшей, но их количество зависит от соотношений коэффициентов и точная оценка трудно определима.

Следствие. Интервалов перемежаемости по a_i или a_{n-i} коэффициентам будет в общем случае на всей оси не более $N_1 + 1$, из них не более $N_1 - 1$ внутренних (не включающих $-\infty, +\infty$).

Замечание. Интервалов перемежаемости в практических задачах следует ожидать существенно меньше, чем $N_1 + 1$ или $N_1 - 1$.

Теорема 5.7. Для того, чтобы интервальный полином (5.4.3) был устойчив (в смысле (5.4.11) в общем случае, при изменениях a_i , $i = \overline{0, n}$, на всей оси, необходимо и достаточно, чтобы было устойчиво множество, состоящее из

$$N_2 = 2^{n+1}(2^{n-1} - 1)^2(2^{n-2} - 1)^2 \dots (2^{n-m} - 1)^2(2^{n-m-1} - 1)^2 \tag{5.4.12}$$

интервальных полиномов, где $n = 2m$ или $n = 2m + 1$.

Доказательство теоремы 3.7. Очевидность доказательства вытекает из выводов леммы.

Действительно, если составить пары a_i, a_{n-i} , $i = \overline{0, n}$, то в случае $n = 2m$ будем иметь максимальное количество полиномов (или интервалов перемежаемости)

$$N_2 = 2^{n+1}[(2^{n-1} - 1)^2(2^{n-2} - 1)^2 \dots (2^{n-m} - 1)^2(2^{n-m-1} - 1)^2]. \tag{5.4.13}$$

Если же $n = 2m + 1$ (нечетно), то максимальное число полиномов равно

$$N_2 = 2^{n+1}[(2^{n-1} - 1)^2(2^{n-2} - 1)^2 \dots (2^{n-m-1} - 1)^2]. \tag{5.4.14}$$

Следовательно, в общем случае, необходимо и достаточно проверка всех полиномов в количестве N_2 , определяемой по (5.4.5), (5.4.6). Теорема доказана.

Заметим, что чем больше порядок полинома n и больше число интервальных коэффициентов, тем мельче становятся интервалы перемежаемости, удовлетворяющие системе (5.4.9).

Поскольку в теореме 5.7 предполагается, что $a_i, i = \overline{0, n}$ изменяются по всей действительной оси, то очевидно при конкретных заданных интервалах для a_i оценка (5.4.12) будет существенно сужатся. Учитывая выводы при доказательстве теоремы 5.7, можно сформулировать вероятностное утверждение, которое приведем за следующими определением и обозначениями.

Определение. Если интервал принадлежности коэффициента $a_i, i = \overline{0, n}$ содержит число нуль, то интервал $[a_i, \bar{a}_i]$ делим на две части, а интервалы $[a_i, 0]$ и $[0, \bar{a}_i]$ будем называть *левым* и *правым* интервалами коэффициента a_i и обозначать соответственно a_i^-, a_i^+ . Каждый из интервалов a_i^- и a_i^+ будем делить ровно на три части и обозначим точки деления соответственно a_{i1}^-, a_{i2}^- и a_{i1}^+, a_{i2}^+ .

Тогда левый интервал $[a_i, 0]$ разбивается на интервалы

$$[a_i, a_{i1}^-], [a_{i1}^-, a_{i2}^-], [a_{i2}^-, 0],$$

а правый на

$$[0, a_{i1}^+], [a_{i1}^+, a_{i2}^+], [a_{i2}^+, \bar{a}_i].$$

Образует интервальные полиномы Харитонова в следующем виде

$$\begin{aligned} [f_1(z)] &= a_0^- z^n + a_1^- z^{n-1} + a_2^+ z^{n-2} + a_3^+ z^{n-3} + \dots, \\ [f_2(z)] &= a_0^- z^n + a_1^+ z^{n-1} + a_2^+ z^{n-2} + a_3^- z^{n-3} + \dots, \\ [f_3(z)] &= a_0^+ z^n + a_1^- z^{n-1} + a_2^- z^{n-2} + a_3^+ z^{n-3} + \dots, \\ [f_4(z)] &= a_0^+ z^n + a_1^+ z^{n-1} + a_2^- z^{n-2} + a_3^- z^{n-3} + \dots \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Для каждого из полиномов (5.4.15) будем строить по 16 полиномов в следующем порядке, например для $[f_1(z)]$:

$$\begin{aligned} f_{11}(z) &= a_0^- z^n + a_1^- z^{n-1} + a_2^+ z^{n-2} + a_3^+ z^{n-3} + \\ &+ a_{41}^- z^{n-4} + a_{51}^- z^{n-5} + a_{61}^+ z^{n-6} + a_{71}^+ z^{n-7} + \\ &+ a_{82}^- z^{n-8} + a_{92}^- z^{n-9} + a_{102}^+ z^{n-10} + a_{112}^+ z^{n-11} + \\ &+ a_{12}^- z^{n-12} + a_{13}^- z^{n-13} + a_{14}^+ z^{n-14} + a_{15}^+ z^{n-15} + \dots, \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

$$\begin{aligned} f_{12}(z) &= a_0^- z^n + a_1^- z^{n-1} + a_2^+ z^{n-2} + a_3^+ z^{n-3} + \\ &+ a_{42}^- z^{n-4} + a_{52}^- z^{n-5} + a_{62}^+ z^{n-6} + a_{72}^+ z^{n-7} + \\ &+ a_{81}^- z^{n-8} + a_{91}^- z^{n-9} + a_{101}^+ z^{n-10} + a_{111}^+ z^{n-11} + \\ &+ a_{12}^- z^{n-12} + a_{13}^- z^{n-13} + a_{14}^+ z^{n-14} + a_{15}^+ z^{n-15} + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{116}(z) &= a_0^- z^n + a_1^- z^{n-1} + a_2^+ z^{n-2} + a_3^+ z^{n-3} + \\ &+ a_{44}^- z^{n-4} + a_{55}^- z^{n-5} + a_{66}^+ z^{n-6} + a_{77}^+ z^{n-7} + \\ &+ a_{82}^- z^{n-8} + a_{92}^- z^{n-9} + a_{102}^+ z^{n-10} + a_{112}^+ z^{n-11} + \\ &+ a_{121}^- z^{n-12} + a_{131}^- z^{n-13} + a_{141}^+ z^{n-14} + a_{151}^+ z^{n-15} + \dots \end{aligned}$$

Отметим, что в общем случае получим 48 различных полиномов (остальные из 64 по (5.4.16) совпадают). При этом в (5.4.16) $\bar{a}_i^- = a_i^+ = 0$.

Утверждение 5.1. Для того, чтобы установить устойчивость интервального полинома (5.4.3) при заданных интервалах коэффициентов $a_i \in [a_i, \bar{a}_i], i = \overline{0, n}$, с большей вероятностью для практики достаточно ограничиться 48 различными полиномами вида (5.4.16).

Замечание 1. В качестве области корней может служить любая односвязная область D , если соответственно видоизменить (5.4.13).

Замечание 2. Утверждение 5.1 проще теоремы Мансура—Крауса [1987] и сводит задачу к рассмотрению меньшего числа полиномов при больших порядках n . При небольших порядках $n \leq 6$ возможны существенные уменьшения количества полиномов.

Аналоги слабой и сильной теорем Харитонова для дискретного случая формулируются соответственно в виде теорем 5.9 и 5.10, полученных на основе теоремы 5.8.

Теорема 5.8. При изменении любого из действительных коэффициентов a_i , $i = \overline{0, n}$ полинома (5.4.3), действительные корни претерпевают строго монотонные изменения, а смена монотонности действительной части комплексно-сопряженных корней возможна только при их переходе в действительную область.

Доказательство теоремы 5.8 проведем от противного.

Пусть теорема неверна, т. е. при изменении некоторого коэффициента a_k монотонность изменения рассматриваемого действительного корня z_m или действительной части α_m комплексно-сопряженных корней $\alpha_m \pm j\beta_m$ полинома (5.4.3) нарушается. Для определенности положим изменения a_k в возрастающем порядке.

Допустим значение z_m или α_m , при котором нарушается монотонность, равно α_{m0} , а соответствующее значение a_k равно a_{k0} .

Тогда, вводя новую переменную $z = z - (\alpha_{m0} - \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — малая величина, из (5.4.3) получим новый полином

$$f(z) = \sum a_i z^{n-i}. \quad (5.4.17)$$

Пусть (5.4.17) имеет корни z_i , $i = \overline{0, n}$, а рассматриваемое значение $z_m = z_{m0} = 0$.

Тогда, при дальнейшем возрастании a_k значение z_m или α_m в точке a_{k0} достигнет α_{m0} , а при некотором значении $a_k = a_{k1} > a_{k0}$ вследствие смены монотонности полином (5.4.17) снова будет иметь $z_{m1} = \alpha_{m1} = 0$, т. е. получим, что на оси $a_k \in R$ происходит вторая смена устойчивости (5.4.17), что по известным теоремам Харитонова невозможно. Но в случае комплексно-сопряженных корней указанное противоречие с теоремами Харитонова не имеет места, если смена монотонности одного из таких корней происходит при переходе в действительную область, поскольку другой действительный корень сохраняет свою монотонность относительно действительной части этих корней. Таким образом, теорема 5.8 справедлива.

Теорема 5.9. Для того чтобы интервальный полином (5.4.3) был строго устойчив в дискретной области, необходимо и достаточно, чтобы для каждого коэффициента a_i все точки перемежаемости, полученные по всем 2^n угловым полиномам, не лежали в заданных интервалах $a_i \in [a_i, \bar{a}_i]$.

Теорема 5.10. Для того чтобы интервальный полином (5.4.3) был строго устойчив в дискретной области, необходимо и достаточно, чтобы для каждого коэффициента a_i все точки перемежаемости, полученные по соответствующим четырем полиномам Харитонова, не лежали в заданных интервалах $a_i \in [a_i, \bar{a}_i]$.

Доказательства теорем 5.9 и 5.10. Необходимость очевидна. Достаточность вытекает из теоремы 5.8.

Действительно, пусть имеем некоторое уравнение порядка $i = \overline{1, n}$, для определения точек перемежаемости коэффициента a_i :

$$[a_{0,i-1}^2 - a_{n,i-1}^2] = \pm [a_{0,i-1} a_{i-1,i-1} - a_{n,i-1} a_{i,i-1}],$$

или, далее

$$F_i^+(a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0, F_i^-(a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0, \quad (5.4.18)$$

Согласно теореме 5.8, действительные решения (5.4.18) относительно a_i имеют монотонные изменения при вариациях любого из остальных коэффициентов, но тогда к ним применимы слабая и сильная теоремы Харитонова.

Следовательно, непринадлежность точек перемежаемости коэффициента a_i , которые найдены по полиномам Харитонова, заданным интервалам $[a_i, \bar{a}_i]$, гарантирует устойчивость интервального полинома (5.4.3). Теоремы 5.9 и 5.10 доказаны.

Относительно матриц и многогранников матриц в дискретном случае справедливы теоремы.

Теорема 5.11. Для того, чтобы интервальная матрица A_d была устойчива с областью собственных значений

$$|z_i| < 1 \text{ (или } z_i \in D), i = \overline{1, n},$$

необходимо и достаточно, чтобы были устойчивы с той же областью множество 48 полиномов (5.4.17), полученных из множества всех характеристических полиномов $\{f(z)\}$, каждый полином которой есть полином с отдельными угловыми коэффициентами найденными согласно теореме 5.1.

Теорема 5.12. Для того чтобы многогранник матриц P_d был устойчив с областью собственных значений $|z_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$, необходимо и достаточно, чтобы были устойчивы с той же областью все выпуклые ребра P_d

$$s_1 P_i + s_2 P_j$$

при любых $i, j = \overline{1, n}$, $s_1 \in [-1, 0]$, $s_2 \in [0, 1]$.

Доказательства теорем 5.11 и 5.12 нетрудно провести, пользуясь результатами для непрерывных систем.

Справедливость теорем 5.9, 5.10 покажем на известных контрпримерах.

Пример 1. Для контрпримера:

$$f(z) = z^4 + a_1 z^3 + (3/2)z^2 - (1/3),$$

где $a_1 \in [-17/8, 17/8]$, справедливость утверждения очевидна, поскольку при $a_1 = 0$, полином $f(z)$ неустойчив.

Пример 2. Контрпример 1:

рассматривается полином четвертого порядка

$$f(z) = z^4 + a_1 z^3 + (109/288)z^2 + 0.5z - 0.5, \quad (5.4.19)$$

где $a_1 \in [-1, 0]$.

Согласно Cieslik [1987], по полиномам Харитонова

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z^4 - z^3 + (109/288)z^2 + 0.5z - 0.5, \\ f_2(z) &= z^4 + (109/288)z^2 + 0.5z - 0.5, \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

мы получим, что интервальный полином (5.4.19) устойчив (если предполагать справедливость теоремы Харитонова для дискретного случая), т. к. $f_1(z)$ и $f_2(z)$ устойчивы. Но здесь показывается, что при $a_1 = -1/8$ и $a_1 = -3/8$ полином (5.4.19) неустойчив (на границе устойчивости), т. к. имеет корни $|z_i| = 1$.

Теперь рассмотрим данный пример, пользуясь результатами данной работы. Имеем для a_1 интервалы

$$[\underline{a}_1, \overline{a}_{11}], [a_{11}, \overline{a}_{12}], [a_{12}, \overline{a}_1],$$

где $\underline{a}_1 = -1$, $\overline{a}_{11} = -2/3$, $\overline{a}_{12} = -1/3$, $\overline{a}_1 = 0$.

Согласно теореме 5.11 полиномам (5.4.20) добавляются следующие два полинома

$$f_3(z) = z^4 - (2/3)z^3 + (109/288)z^2 + 0.5z - 0.5,$$

$$f_4(z) = z^4 - (1/3)z^3 + (109/288)z^2 + 0.5z - 0.5,$$

из которых $f_3(z)$ устойчив, а $f_4(z)$ неустойчив. Действительно, корни

$$f_3(z): \{z_1 = 0.6655, z_2 = -0.7715, z_{3,4} = 0.3864 \pm j0.9081\}, |z_i| < 1,$$

$$f_4(z): \{z_1 = 0.8265, z_2 = 0.6042, z_{3,4} = 0.2778 \pm j0.9613\}, |z_{3,4}| > 1.$$

Следовательно, контрпример не противоречит указанным теоремам.

Пример 3. Контрпример 2:

рассматривается полином

$$f(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3, \quad (5.4.21)$$

где $a_1 \in [-1/2, 1/4]$, $a_2 \in [-1/2, 1/2]$, $a_3 \in [-1/2, 1/4]$.

В Cieslik [1987] показывается, что каждый из четырех полиномов Харитонова

$$f_1(z) = z^3 + (1/4)z^2 - (1/2)z - 1/2,$$

$$f_2(z) = z^3 + (1/4)z^2 + (1/2)z - 1/2,$$

$$f_3(z) = z^3 - (1/2)z^2 - (1/2)z + 1/4,$$

$$f_4(z) = z^3 - (1/2)z^2 + (1/2)z + 1/4$$

имеет корни внутри единичного круга, но при $a = [a_1, a_2, a_3] = [-1/2, -1/2, -1/2]$ имеет корни, которые не лежат внутри единичного круга.

Образуя полиномы (5.4.17) можно убедиться, что полином (5.4.21) неустойчив. Например, полином

$$f_{11}(z) = z^3 + \underline{a}_1 z^2 + \underline{a}_2 z + \underline{a}_3 = z^3 - (1/2)z^2 - (1/2)z + 0,$$

имеет корни $z_1 = -0.5$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, т. е. является неустойчивым.

Итак, и данный пример также не противоречит теоремам 5.9, 5.10.

В заключении данного раздела, сформулируем следующий алгоритм определения робастной устойчивости линейных дискретных интервальных динамических систем.

1. Пользуясь формулами леммы к теореме 5.1, оптимизацией по элементам a_{ij} : $\underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, интервальной матрицы A , находятся сепаратные угловые коэффициенты $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$, $i = \overline{0, n}$, интервального характеристического полинома (5.4.3).

2. Определяются четыре полинома Харитонова, соответствующие интервальному полиному (5.4.3):

$$f_1(z) : \{\underline{a}_0, \underline{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \underline{a}_4, \dots\}; f_2(z) : \{\underline{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \dots\};$$

$$f_3(z) : \{\bar{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \dots\}; f_4(z) : \{\bar{a}_0, \bar{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \bar{a}_4, \dots\}.$$

3. Составляются n неравенств вида (5.4.19).

4. Относительно каждого коэффициента a_i , $i = \overline{0, n}$, считая остальные коэффициенты фиксированными, последовательно находят точки переменяемости для всех четырех полиномов Харитонова и по всем n неравенствам (см. п. 3), начиная с меньших порядков.

5. Если все точки переменяемости по всем коэффициентам a_i , $i = \overline{0, n}$, не принадлежат заданным интервалам, то исходный полином (система) устойчив, в противном случае — неустойчив.

Глава 6

Теория грубости и бифуркаций динамических систем

6.1. Свойство грубости динамических систем

Свойство грубости является одним из фундаментальных свойств динамических систем. В современной зарубежной литературе по динамическим системам свойство грубости названо свойством структурной устойчивости. Мы в этой работе будем придерживаться термина «грубость».

Итак самое общее определение понятия «грубость динамических систем» (далее ДС) — это гладкая ДС, обладающая свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $S > 0$, что при любом возмущении ДС, отстоящем от нее в C^1 -метрике не более чем на S , существует «гомеоморфизм» фазового пространства (или многообразия), который сдвигает точки невозмущенной системы в соответствующие траектории возмущенной системы.

Определение, приведенное выше является определением понятия грубости ДС «в узком», т. е. грубость в определенном топологическом пространстве. В более широком понятии грубость предполагает свойства сохранения некоторого свойства системы при определенных малых возмущениях.

Понятие грубости было впервые введено выдающимися советскими учеными А. А. Андроным и Л. С. Понтрягиным.

Понятие грубости с требованием «гомеоморфизма» возмущенной и невозмущенной систем до ε для грубых ДС носит название грубости по Андронову—Понтрягину, в отличие от понятия грубости, введенной бразильским математиком М. Пейксото, когда «гомеоморфизм» не требуется до ε малого.

Обычно грубость рассматривается в некотором замкнутом многообразии или в компактной области с гладкой границей.

Поскольку при рассмотрении грубости систем предполагается, что возмущение ДС малое в смысле C^1 , то важно понятие локальной грубости.

Локальная грубость некоторого компактного инвариантного множества, F гладкой ДС — это свойство сохранять все топологические свойства в некоторой окрестности F при любых достаточно малых возмущениях системы.

Если F — положение равновесия «потока» (или неподвижная точка «каскада», т. е. ДС с дискретным временем), то локальная грубость означает сохранение топологических свойств системы при линеаризации в точке F .

Необходимые и достаточные условия локальной грубости для положений равновесия или неподвижных точек (особых точек) отвечают теореме Гробмана—Хартмана, известной из теории ДС. Аналогичные условия сформулированы и для периодических траекторий и «гиперболических множеств», которые рассматриваются далее в этой главе.

6.1.1. Грубость динамических систем в современной теории

В общей постановке грубость или структурная устойчивость динамических систем (ДС) в современной теории формулируется следующими определениями.

Определение 6.1.1. Для данного числа $z \geq 0$ два C^r -отображения $f: M \rightarrow M$ и $g: N \rightarrow N$ называются «топологическими сопряженными», если существует такой гомеоморфизм $\varphi: M \rightarrow N$, что $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$.

Определение 6.1.2. Отображение $g: N \rightarrow N$ называется «фактором» (или «топологическим фактором») отображение $f: M \rightarrow M$, если существует такое сюръективное непрерывное отображение $\varphi: M \rightarrow N$, что $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Отображение φ называется «полусопряжением».

Определение 6.1.3. C^r -отображение f называется « C^m -грубым» ($1 \leq m \leq r$), если существует такая окрестность \mathcal{U} отображения f в C^m -топологии, что каждое отображение $g \in \mathcal{U}$ топологически сопряжено с f .

Определение 6.1.4. C^r -отображение называется « C^m -сильно грубым», если оно структурно устойчиво и кроме того для любого отображения $g \in \mathcal{U}$ можно выбрать сопрягающий гомеоморфизм $\varphi = \varphi_g$ таким образом, что $\varphi_g \varphi_g^{-1}$ равномерно сходятся к тождественному отображению при приближении $g < f$ в C^m -топологии.

Определение 6.1.5. C^r -диффеоморфизм называется «топологически устойчивым» (или «грубым»), если он является фактором любого гомеоморфизма, достаточно близкого к нему в равномерной C^0 -топологии.

Относительно потоков имеет место следующие определения.

Определение 6.1.6. C^r -поток φ^t называется « C^m -грубым» ($1 \leq m \leq r$) или соответственно « C^m -сильно грубым», если любой поток, достаточно близкий к φ^t в C^m -топологии, C^0 -траекторно эквивалентен ему C или соответственно если, кроме того, обсуждаемый гомеоморфизм может быть выбран достаточно близким к тождественному для малых возмущений.

Определение 6.1.7. Поток $\psi^t: N \rightarrow N$ называется «орбитальным фактором» потока $\varphi^t: M \rightarrow M$ если существует сюръективное непрерывное отображение $f: M \rightarrow N$, которое переводит орбиты φ^t в орбиты ψ^t . C^r -поток φ^t называется «топологически устойчивым» («грубым»), если он является орбитальным фактором любого непрерывного потока, достаточно близким к нему в равномерной топологии.

Во всех выше сформулированных определениях компактность соответствующих фазовых пространств несущественна. Кроме того, эти определения справедливы и для случаев, когда для некоторых точек динамическая система определена только на конечном

отрезке времени, как например, в окрестности гиперболической неподвижной точки линейного отображения. Такое обращение приводит к понятиям локальной грубости как приведено выше.

Для двумерного тора справедливо утверждение.

Утверждение 6.1.1. Любой гиперболический линейный автоморфизм двумерного тора C^1 -сильно грубый. Аналогичное утверждение верно и для любого m -мерного ($m \geq 2$) тора.

Важным понятием для определения свойств грубости ДС является понятие «гиперболической точки».

Определение 6.1.8. Точка p называется «гиперболической периодической точкой» диффеоморфизма f , если $(Df^n)_p: T_p M \rightarrow T_p M$ — гиперболическое линейное отображение. Ее орбита называется «гиперболической периодической орбитой»

Определение 6.1.9. Линейное отображение R^n называется «гиперболическим», если абсолютные величины всех его собственных значений отличны от единицы.

Для ДС с непрерывным временем. Предполагается, что гладкое векторное поле определено в \mathcal{U} и что орбита точки $p \in \mathcal{U}$ находится в \mathcal{U} .

Определение 6.1.10. При $\xi(p) = 0$ точка p называется «гиперболической неподвижной точкой» (локального) потока φ_t порожденного векторным полем ξ , если $(D\varphi_t)_p: T_p M \rightarrow T_p M$ является гиперболическим линейным отображением для каждого $t \neq 0$.

При $\xi(p) \neq 0$ точка p называется «гиперболической периодической точкой» периода t для потока φ_t , если $\varphi_t(p) = p$ и линейный оператор $(D\varphi_t)_p: T_p M \rightarrow T_p M$ имеет единицу в качестве простого собственного значения и при этом не имеет никаких других собственных значений по модулю равных единице.

Для анализа локальной грубости очень важной является теорема Хартмана—Гробмана о топологической сопряженности

отображения своей линейной части вблизи гиперболических неподвижных точек.

Утверждение 6.1.2 (Теорема Хартмана—Гробмана). Пусть множества $\mathcal{U} \subset R^n$ непрерывно не дифференцируемо и $O \in \mathcal{U}$ — гиперболическая неподвижная точка f . Тогда существует такие окрестности $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, V_1, V_2$ точки O и такой гомеоморфизм $\varphi: \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \rightarrow V_1 \cup V_2$, что $f = \varphi^{-1} Df_O \circ \varphi$ на \mathcal{U}_1 , т. е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} f: \mathcal{U}_1 & \rightarrow & \mathcal{U}_2 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Df_O V_1 & \rightarrow & V_2 \end{array}$$

Локальная грубость определяется следующими утверждениями и следствием из него.

Утверждение 6.1.3. Два обратимых линейных сжимающих отображения с одинаковой ориентацией топологически сопряжены.

Следствие 6.1.1. Пусть отображение $f: \mathcal{U} \rightarrow R^n$, $g: V \rightarrow R^n$ имеют гиперболические неподвижные точки $p \in \mathcal{U}$ и $q \in V$ соответственно,

$$\dim E^+(Df_p) = \dim E^+(Dg_q), \dim E^-(Df_p) = \dim E^-(Dg_q), \quad (6.1.1)$$

$$\sin n \det Df_p | E^-(Df_p) = \sin n \det Dg_q | E^-(Dg_q). \quad (6.1.2)$$

Тогда существуют такие окрестности $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ и $V_1 \subset V_2$ и такой гомеоморфизм

$$\varphi: \mathcal{U}_1 \rightarrow V_1, \text{ что } \varphi \circ f = g \circ \varphi.$$

В (6.1.1), (6.1.2) пространство $E^+(\cdot)$ и $E^-(\cdot)$ определяются как прямые суммы нуль-пространств E_λ соответствующих собственных значений $\lambda(\cdot)$, т. е. пространств векторов $\vartheta \in R^n$, удовлетворяющих соотношению

$$((\cdot) - \lambda I)^k \vartheta = 0, \quad (6.1.3)$$

где k — некоторое целое, а также нуль пространств $E_\lambda, \bar{\lambda}$ в случае комплексно сопряженных собственных значений $\bar{\lambda}, \lambda$:

$$E^-(\cdot) = \bigoplus E_\lambda \oplus E_{\lambda\bar{\lambda}}, \quad (6.1.4)$$

$$E^+(\cdot) = \bigoplus E_\lambda \oplus \bigoplus E_{\lambda\bar{\lambda}}. \quad (6.1.5)$$

Таким образом, всякий C^1 -дiffeоморфизм локально грубый вблизи какой-либо неподвижной точки (особой точки) тогда и только тогда, когда неподвижная точка гиперболическая.

Относительно грубости преобразований типа «подкова» справедливо следующее.

Утверждение 6.1.4. Пусть $\Lambda = \bigcap f^n(\Delta')$, $n \in \mathbb{Z}$ — максимальное инвариантное относительно C^1 -дiffeоморфизма $f: N \rightarrow M$ подмножество подковы. Тогда для любого отображения f' , достаточно близкого к f в C^1 -топологии, имеется такое инвариантное множество Λ' и такой гомеоморфизм $\varphi: \Lambda \rightarrow \Lambda'$, что $\varphi \circ f \mid \Lambda = \varphi \circ f' \mid \Lambda'$.

О грубости гиперболических множеств справедливо.

Утверждение 6.1.5. (Сильная грубость гиперболических свойств). Пусть $\Lambda \subset M$ — гиперболическое множество diffeоморфизма $f: N \rightarrow M$.

Тогда для любой открытой окрестности $V \subset N$ множества Λ и любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что если $f': N \rightarrow M$ и $d_c^1(f \mid_V, f') < \varepsilon$, то найдется гиперболическое множество $\Lambda' = f'(\Lambda) \subset V$ diffeоморфизма f' и такой гомеоморфизм $\varphi: \Lambda \rightarrow \Lambda'$, $d_c^0(I, \varphi^{-1}) < \delta$, что $\varphi \circ f \mid \Lambda = \varphi \circ f' \mid \Lambda'$. Такой гомеоморфизм φ единствен, если δ достаточно мало.

Следствие 6.1.2. Diffeоморфизмы Аносова грубы. Сопряжение единственно, если оно достаточно близко к тождественному отображению.

Для потоков так же верно следующее.

Утверждение 6.1.6. Пусть $\Lambda \subset M$ — гиперболическое множество гладкого потока φ^t на M . Тогда для любой открытой окрестности V множества Λ и каждого $\delta > 0$ существует также $\varepsilon > 0$, что если φ'^t — другой гладкий поток и $d_c^1(\varphi^t, \varphi'^t) < \varepsilon$, то существует инвариантное множество Λ' для φ' и гомеоморфизм $\varphi: \Lambda \rightarrow \Lambda'$, где $d_c^0(I, \varphi) + d_c^0(I, \varphi^{-1}) < \delta$, который является гладким вдоль орбит φ^t и задает орбитальную эквивалентность потоков φ^t, φ'^t . Кроме того векторное поле $\varphi \circ \dot{\varphi}^t \circ \varphi^{-1}$ близко к $\dot{\varphi}^t$, и если φ_1, φ_2 — два таких гомеоморфизма, то $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ — замена времени потока φ^t (близкая к тождественной).

Следствие 6.1.3. Потоки Аносова C^1 -сильно грубы.

Определение 6.1.11. C^1 -дiffeоморфизм $f: M \rightarrow M$ компактного многообразия M называется «дiffeоморфизмом Аносова», если M — гиперболическое множество для f .

Определение 6.1.12. C^1 -поток $\varphi^t: M \rightarrow M$ на компактном многообразии M называется «поток Аносова», если M — гиперболическое множество потока φ^t .

Пусть M — гладкое многообразие, $N \subset M$ открытое подмножество, $f: N \rightarrow M$ — C^1 -дiffeоморфизм на свой образ, $\Lambda \subset N$ — некоторое компактное, f -инвариантное множество.

Тогда множество Λ называется «гиперболическим множеством» отображения f , если в открытой окрестности N множества Λ такие числа λ, m , $\lambda < 1 < m$, что для любой точки $x \in \Lambda$ последовательность дифференциалов $(Df)_x^n: T_x^n M \rightarrow T_x^{n+1} M$, $n \in \mathbb{Z}$, допускает (λ, m) разложение.

Определение 6.1.13. Пусть $\lambda < m$. Последовательность обратимых линейных отображений $L_m: R^n \rightarrow R^n$, $m \in \mathbb{Z}$, допускает « (λ, m) разложение», если существуют такие разложения $R^n = E_m^+ \oplus E_m^-$, что $L_m E_m^+ = E_{m+1}^+$ и

$$\|L_m|_{E_m^-}\| \leq \lambda, \|L_m^{-1}|_{E_{m+1}^+}\| \leq \mu^{-1}. \quad (6.1.6)$$

Таким образом, в этом разделе рассмотрены известные теоретические положения современной теории грубости динамических систем, которые по существу определяют только качественные условия грубости ДС, не рассматривая каких-либо количественных характеристик грубости.

Такие количественные характеристики грубости весьма важны особенно при прикладных целях, когда необходимо сравнивать системы по грубости топологической или каких-либо свойств систем.

Такой количественный подход к рассмотрению свойства грубости предлагается на основе исследований в следующем разделе.

Из теории известно, что грубые ДС при малых размерностях составляют всюду плотны множества в пространстве всех ДС (так называемые «Морса—Смейла системы»), снабженных C^1 -топологией. При разных размерностях пространств ДС хотя абсолютных аналогов «систем Морса—Смейла» нет, но выше даны некоторые необходимые и достаточные качественные условия грубости ДС, которые также утверждают плотности множеств грубых ДС в определенной мере. Сказанное выше требует постановки задачи сравнения грубых систем по степени грубости т. е. введения количественных мер грубости ДС.

6.1.2. Метод мер топологической грубости ДС

Мера топологической грубости ДС по гиперболическим диффеоморфизмам

Многие основополагающие результаты в теории грубости ДС были получены А. А. Андроновым и его школой. В известной работе А. А. Андронova и Л. С. Понтрягина, опубликованной в 1937 г. в докладах Академии наук СССР, было впервые введено понятие грубости, которое впоследствии названо понятием грубости по Андронову—Понтрягину. Но это понятие определяет качественную картину грубости, т. е. определяет лишь ϵ -близость гомеоморфизма, осуществляющего эквивалентность возмущенной и невозмущенной систем к тождественному.

Остановимся на понятии грубости по Андронову—Понтрягину. Рассматривается динамическая система порядка n .

$$\dot{x} = F(x), \quad (6.1.7)$$

где $x = x(t) \in R^n$ — вектор фазовых координат, F — n -мерная нелинейная дифференцируемая вектор-функция.

Система называется грубой по Андронову—Понтрягину (далее грубой системой) в некоторой области G , если исходная система (6.1.7), и определенная в подобласти \tilde{G} области G возмущенная система

$$\dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}) + f(\tilde{x}), \quad (6.1.8)$$

где $f(x)$ — дифференцируемая малая по норме вектор-функция, являются ϵ -тождественными, т. е. существуют открытые области D, \tilde{D} такие, что $D, \tilde{D} \subset \tilde{G} \subset G$ и для них выполняется условие: каково бы ни было $\epsilon > 0$, можно найти такое $\delta > 0$, что если (6.1.8) δ близка к системе (6.1.7) в области \tilde{G} , тогда разбиения областей траекториями систем (6.1.8) и (6.1.7) ϵ -тождественны («имеют одинаковые топологические структуры и „искажены“ или „сдвинуты“ одно по отношению к другому меньше, чем на ϵ »). Этот факт записывается в виде

$$(\tilde{D}, (6.1.8)) \equiv (D, (6.1.7)). \quad (6.1.9)$$

Если последнее условия не выполняется, то система будет не грубой по Андронову—Понтрягину.

Отметим, что определения δ -близости и ϵ -тождественности соответственно означают: — для всех аналитических $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ имеют место $\|f_i(x)\| < \delta$, $\|\partial f_i(x)/\partial x_j\| < \delta$, $j = \overline{1, n}$; — существуют взаимно однозначные и непрерывные функции $\tilde{x}_i = \varphi_i(x)$, переводящие каждую траекторию системы (6.1.8) и такие что

$$\|x_i - \tilde{x}_i\| < \epsilon,$$

где $\|\cdot\|$ — векторные нормы какого-либо вида.

Таким образом, в данном определении грубости предполагается, что возмущения мультипликативные (параметрические) и

касаются правой части (6.1.7), но очевидно можно расширить понятие предполагая, что возмущения правой части возможны и аддитивные (внешние, сигнальные). В таком случае, систему (6.1.7) представляем в виде

$$\dot{x} = F(x, q, g), \quad (6.1.10)$$

где $q \in R^p$ — вектор варьируемых параметров, $g \in R^l$ — вектор внешних аддитивных входов (возмущений) системы. Тогда исходная система принимает вид

$$\dot{x} = F(x, q_0, g_0), \quad (6.1.11)$$

где $q_0 \in R^p$, $g_0 \in R^l$ — номинальные (невозмущенные) значения векторов q , g .

В дальнейшем, в этой главе грубость системы (6.1.7) понимается в смысле введенном выше, т. е. грубость по Андронову—Понтрягину.

6.2. Некоторые понятия и определения теории динамических систем

Здесь в этом разделе рассмотрим некоторые понятия и определения теории динамических систем, необходимые для изложения и понимания теории грубости, излагаемой в этой главе.

Вначале не теряя общности (для наглядности) будем рассматривать системы ДС второго порядка, т. е. с геометрией на плоскости или вида

$$\dot{x} = F_1(x, y), \dot{y} = F_2(x, y), \quad (6.2.1)$$

где $x, y \in R$ — фазовые координаты, F_1, F_2 — непрерывные функции.

Тогда, плоскость x, y называется *фазовой плоскостью*, и каждая точка на ней изображает состояние системы. Траектория каждой точки («изображающей» точки) в процессе изменения состояния системы во времени носит название *фазовой траектории*.

Если решение системы (6.2.1) соответствующее данной траектории T , определено для всех значений t , $-\infty < t < +\infty$, то эту траекторию называют *целой траекторией*.

Множества точек T при $t \geq t_0$ (или же $t \leq t_0$) называется положительной (отрицательной) *полутраекторией* выделенной из T , и обозначается через T^+ , (T^-).

Интегральной кривой называется кривая на фазовой плоскости, являющаяся решением дифференциального уравнения, полученного делением второго уравнения (6.2.1) на первое

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)}, F_1(x, y) \neq 0. \quad (6.2.2)$$

При этом в частном случае, интегральные кривые и фазовые траектории могут совпадать, а в общем случае нет.

Каждой точке (x, y) системы (6.2.1) можно сопоставить вектор с компонентами $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$. В таком случае ДС определяет на фазовой плоскости *векторное поле*. *Особыми точками* векторного поля или системы (6.2.1) называется точки, в которых $\dot{x} = \dot{y} = 0$, т. е. правая часть (6.2.2) равна нулю и направление вектора неопределенно

$$F_1(x, y) = 0, F_2(x, y) = 0. \quad (6.2.3)$$

На фазовой плоскости различают 6 типов особых точек: «узел», «дискритический узел», «вырожденный узел», «седло», «фокус» и «центр». Эти типы особых точек определяются по собственным значениям λ_1, λ_2 и собственными векторами x_1, x_2 матрицы линейной части в этих точках

$$A \triangleq \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}_{x_0, y_0}. \quad (6.2.4)$$

Соответствующие совокупности фазовых траекторий, которые называются фазовыми портретами показаны на рис. 6.1.

При этом для особых точек (ОТ), кроме типа «центр» и «седло» в зависимости от знака действительной части λ_1, λ_2 различают устойчивые и неустойчивые ОТ (рассматривается устойчивость по Ляпунову).

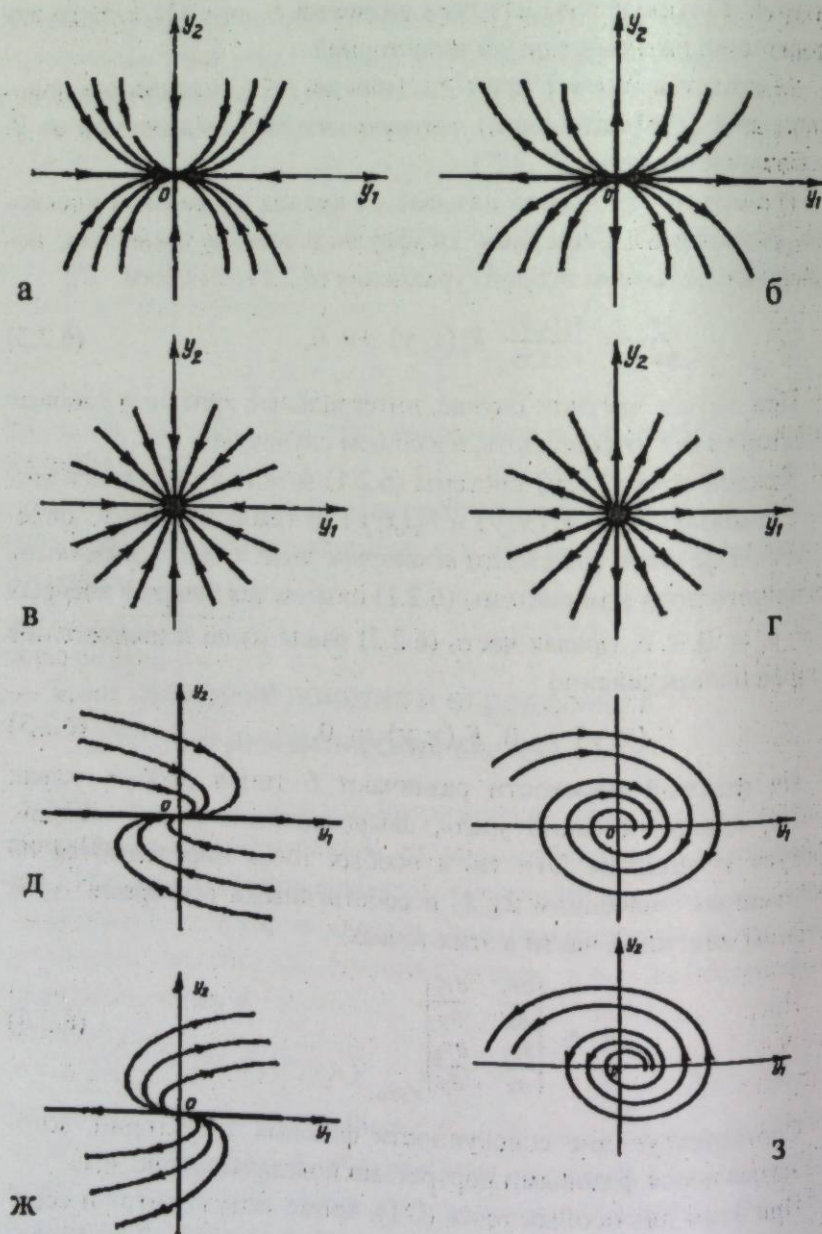


Рис. 6.1

Особая точка (x_0, y_0) называется изолированной, если существуют окрестность точки (x_0, y_0) в которой, кроме этой точки, не лежит больше ни одной особой точки. В том случае, если все точки кривой являются особыми точками (состояниями равновесия) т. е. для всех точек выполняется (6.2.4), то такая кривая называется *особой линией* системы.

Одним из способов построения фазовых портретов является метод *изоклин*. *Изоклинами* называются кривые, определяемые соотношениями:

$$F_1(x, y) + c_1 F_2(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) + c_2 F_1 = 0, \quad (6.2.5)$$

где c_1, c_2 — постоянные, во всех точках которых направления касательных к траекториям одинаковы. При $c_1 = 0$ получаем изоклину вертикальных наклонов, а при $c_2 = 0$ горизонтальных наклонов.

В случае линейных ДС тип особой точки определяет движение системы при любых отклонениях от особой точки. Для нелинейной же систем тип особой точки определяет поведение фазовых траекторий лишь в некоторой малой окрестности ОТ.

При исследовании нелинейных систем важную роль играют особые траектории. К ним относятся: кроме особых точек — изолированные замкнутые траектории, которые называются *предельными* циклами и особые линии — *сепаратрисы*.

Предельные циклы могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Устойчивые предельные циклы получили название *автоколебаний*. Когда говорят об устойчивости предельных циклов, то в старом смысле говорят только об *орбитальной устойчивости*.

Предельный цикл называется орбитальной устойчивым, если как для положительной полутраектории T^+ , так и отрицательной полутраектории T^- при любом заданном $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что у всякой траектории T' проходящей при $t = t_0$ через любую точку M' принадлежащей δ окрестности M' полутраектория T^{**} (соответственно T^-). Всякая траектория, не являющаяся орбитально-устойчивой является *орбитально-неустойчивой* или *особой*. Отметим, что орбитальная устойчивость отличается от устойчивости по Ляпунову.

Сепаратрисы разделяют фазовую плоскость на области с фазовыми траекториями различных типов. В окрестности особой точки типа «седло» сепаратрисы являются асимптотами и называются так же *усами седла*. Особые точки разделяют область на подобласти, точки которых являются точками неособых траекторий. Такие области называются *элементарными ячейками* (или просто *ячейками*) динамической системы на фазовой плоскости.

Важными понятиями качественного исследования динамических систем являются понятия гомеоморфизма и тождественности.

Определение 6.2.1. *Топологическим отображением* или *гомеоморфизмом* плоскости (области) в себя называется взаимно однозначное и двусторонне непрерывное отображение плоскости (области), а геометрические образы, которые могут быть получены друг из друга топологическим отображением является *гомеоморфными*.

При все возможных топологических отображениях некоторые черты разбиения фазовой плоскости на траектории могут изменяться, а другие могут остаться неизменными или *топологически инвариантными*: например, замкнутая траектория остается замкнутой, остается число и типы особых точек, остаются неизменными типы ячеек и т. д. Для сравнительной характеристики топологических структур ДС существует понятие тождественности.

Определение 6.2.2. Две топологические структуры, или иначе качественные картины разбиения фазовой плоскости на траектории (или области на траектории), заданные двумя системами вида (6.1.12) называются *тождественными*, если существуют гомеоморфизм, при котором траектории одной системы отображаются в однотипные траектории другой. При этом совокупность сведений о характере состояния равновесия (о типе особых точек) взаимном расположении предельных циклов и ходе сепаратрис называется *схемой разбиения на траектории*.

В случае систем высокого порядка ($n \geq 3$) в фазовом пространстве, характер (тип) особых точек, особых линий и пре-

дельных циклов усложняется и говорить о конкретных типах точек не всегда так просто, как на фазовой плоскости, хотя бы потому, что при этом собственных значений матрицы линейной част на две, а множество и который из них определенным образом характеризует тип особой точки.

При $n \geq 3$ в динамических системах возникают явления невозможные для двумерных систем. К таким явлениям относятся возникновение *хаотических колебаний* и *странных аттракторов* (притягивающих многообразий) в них, которые появляются в фазовых пространствах с неустойчивым поведением траекторий. Эти явления могут возникнуть при изменениях параметров систем *нелинейных* дифференциальных уравнений, в частности, их появление связано с возникновением турбулентности.

Термин «странный аттрактор» был введен Д. Рюзлем и Ф. Такенсом в 1970 г., но до работ связанных с исследованиями модели Е. Лоренца мало употреблялось в научной литературе. При этом термин «аттрактор» означает любое притягивающее многообразие (непрерывное множество), например, состояния равновесия (особые точки — ОТ), предельные циклы, а термин «странный аттрактор» означает квазипериодические движения к ним и укоренился только после появления интереса к работе американского метеоролога Е. Лоренца 1963 г., где рассматривалась модель динамики атмосферы в которой при определенных параметрах в некоторой ограниченной области фазового пространства появляются хаотические колебания называемые сейчас «странным аттрактором Лоренца» (иногда просто «аттрактором Лоренца»).

Наиболее разработана теория динамических систем, в частности, теория грубости ДС, только для случая $n = 2$ на фазовой плоскости, для высоких порядков ($n \geq 3$) в настоящее время ведутся активные исследования, прежде всего математиками, особенно в новых многообещающих научном и прикладном аспектах направлениях, связанных с изучением странных аттракторов, бифуркаций и катастроф.

Вместе с тем, по проведенному автором обзору литературы в области теории динамических систем можно утверждать, что

эффективных методов количественного исследования свойств ДС, в частности свойства грубости, в настоящее время не существует. Но идет поиск и разработка таких методов. Одна из попыток восполнения такого пробела в теории грубости ДС и осуществляется на базе теории предложенного автором в данной работе, которая названа «теорией обусловленности топологической грубости» или вкратце «теорией топологической грубости», базирующейся на соответствующем методе «топологической грубости».

6.3. Бифуркации динамических систем

С понятием грубости динамических систем тесно связано и понятие бифуркации этих систем. Как уже ранее отмечалось, термин *бифуркация* означает «раздвоение» и относится к любому скачкообразному изменению, происходящему при главном изменении параметров в любой системе, будь то динамическая, экологическая, экономическая, синергетическая и т. д.

Начало работ по теории бифуркаций следует отнести к работам А. Пуанкаре, где он исследовал зависимости состояний равновесия от параметра. Значительный вклад в теорию бифуркаций внес и американский ученый Е. Хопф.

Огромный вклад в теорию бифуркаций внес А. А. Андронов и его школа. По существу ими рассмотрены все вопросы бифуркаций на фазовой плоскости: бифуркации положений равновесия (особых точек), бифуркации предельных циклов и т. д.

Большое внимание уделяется вопросам бифуркаций в работах В. И. Арнольда, Д. В. Аносова и их коллег. В этих работах уже проводятся исследования бифуркаций и особенностей для больших порядков систем ($n \geq 3$), на базе современных топологических методов.

6.3.1. Основные понятия и определения теории бифуркации динамических систем

При расширенном и строгом определении понятия бифуркации имеет место следующее.

Определение 6.3.1. Значение параметра $q = q_0$ (как скалярного, так и векторного), от которого зависит некоторое качественное свойство $S = S(q)$, называется *обыкновенным*, если существует конечное малое $\varepsilon > 0$, такое, что для всех q удовлетворяющих неравенству

$$\|q - q_0\| < \varepsilon, \quad (6.3.1)$$

выполняется условие подобия

$$S(q) \equiv S(q_0). \quad (6.3.2)$$

Если же не существует окрестностей $q = q_0$, для которых выполняется (6.3.2), то такое значение параметра q называется *бифуркационным*, а явление соответствующее этому значению параметра q называется *бифуркацией*.

В случае динамических систем в фазовой пространстве в качестве рассматриваемого свойства принимают топологическую структуру разбиения фазового пространства на интегральные кривые. Во многих источниках зарубежной литературы вместо термина *бифуркация* часто встречается термин *катастрофа*, в частности, в работах по теории особенностей отображений.

Значение теории бифуркаций для исследования динамических систем непреложно, что очевидно, например, достаточно привести известные перефразированные слова А. Пуанкаре о том, «что бифуркации как факелы, освещают путь от исследованных динамических систем к неисследованным».

На фазовой плоскости бифуркациями могут быть: возникновение или исчезновение и особых точек (состояний равновесия), предельных циклов, слияние или разделение сепаратрис и т. д. При этом бифуркация возникновения или исчезновения предельных циклов носит специальное название бифуркации Пуанкаре—Андронова—Хопфа по именам ученых, внесших наибольший вклад в теорию бифуркаций и исследовавших данный вид бифуркации исторически первыми и наиболее полно. Но в современной литературе наиболее укрепилось название этой бифуркации как бифуркации Хопфа, которого мы будем придерживаться в данной работе.

В многомерных динамических системах возможны и более сложные бифуркации, в частности, бифуркации возникновения или исчезновения различных инвариантных множеств, например, так называемых *странных аттракторов*.

Странными аттракторами названы притягивающие многообразия в фазовом пространстве, в которых движения фазовых траекторий носят хаотический характер, т. е. исследующие координаты точек траекторий не детерминированы предыдущими координатами точек (непредсказуемость поведения траекторий). В последние десятилетия изучению таких явлений, связанных с хаосом и турбулентностями придают огромное значение, как с познавательной точки зрения, так и прикладной точки зрения. Это прежде всего связано с обобщающей мировоззренческой ролью познания явлений хаоса и порядка.

Для изучения бифуркаций используются различные методы в основном качественного исследования систем, например, методы теории особенностей непрерывных отображений или в простейшем случае теория зависимостей состояния равновесия от параметра. Количественные аналогические методы исследований используются редко и как правило для систем низкого порядка.

Различают *локальные* и *нелокальные бифуркации*.

Локальные бифуркации это такие бифуркации фазовых портретов, которые происходят вблизи особых точек и предельных циклов, а нелокальные соответственно вдали от последних.

Приведем некоторые термины и определения из теории бифуркаций.

Определение 6.3.2. *Гиперболической* особой точкой называется особая точка, в которой ни одна из собственных значений линейной части системы не лежит на мнимой оси соответственно *негиперболической* называется особая точка, в которой какое-либо собственное значение лежит на мнимой оси.

В однопараметрических множествах векторных полей встречаются негиперболические особые точки двух типов: одна собственное значение особой точки равно нулю или два чиста мнимых

отличных от нуля собственные значения, а остальные не лежат на мнимой оси.

Определение 6.3.3. *Бифуркационной диаграммой* называется диаграмма, в которой показывается вставление бифуркационных решений уравнений динамических систем в зависимости от параметров с указанием их устойчивости и неустойчивости.

Определение 6.3.4. *Бифуркационным уравнением* называется уравнение, которое определяет «амплитуды» ветвлений решений уравнений динамических систем вблизи точки бифуркации.

Для пояснения смысла определений 6.3.3 и 6.3.4 приведем широко известный пример.

Пусть система описывается уравнением

$$\dot{x} = F(x, q), \quad (6.3.3)$$

где q — параметр, $x \in R^n$ — вектор состояний.

Далее пусть для i -й координаты состояния системы (6.3.3) имеем уравнение

$$\dot{x}_i = F_i(x, q). \quad (6.3.4)$$

Тогда в окрестности некоторого бифуркационного значения параметра $q = q_c$ будем иметь решения

$$x_i(t, q) = x_{oi}(q_c) + a_i \varphi_i(t), \quad (6.3.5)$$

где $x_{oi}(q_c)$ — стационарное (равновесное) состояние при $q = q_c$, a_i — «амплитуды», выявленных решений $x_i(t, q)$, $\varphi_i(t)$ — функции ветвлений (6.3.3) вблизи точки бифуркации $q = q_c$. При этом «амплитуды» a_i определяются из бифуркационных уравнений

$$\dot{a}_i = G(a_i, \rho). \quad (6.3.6)$$

Для примера уравнения

$$\dot{a} = -a^3 + qa, \quad (6.3.7)$$

будем иметь два стационарных решения

$$a = 0 \text{ и } a = \pm\sqrt{a}, \quad (6.3.8)$$

а бифуркационная диаграмма представлена на рис. 6.2.

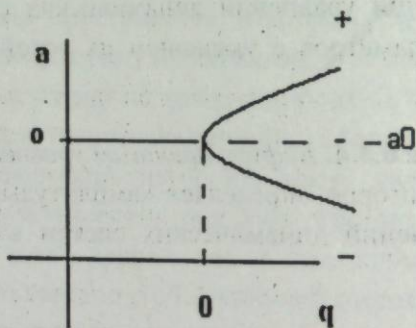


Рис. 6.2

6.4. Понятие «типичности» динамических систем

Соотношение «грубости», «типичности» и «гиперболичности»

«Типичность» является одним из фундаментальных понятий современной математики. «Типичность» определяют, как свойство систем относится к некоторому устойчивому непрерывному множеству систем. Иногда о «типичности» говорят как о свойстве систем «общего положения», т. е. о свойстве характерных систем для некоторого множества математических объектов.

Например, грубые системы на плоскости образуют именно «типичные» системы и представляют из себя открытое повсюду плотное множество в пространстве всех систем рассматриваемого типа, снабженное C^1 -топологией. Школой А. А. Андронова доказано совпадение понятий грубости и «типичности». Для систем низкого порядка $n \leq 2$ они полностью совпадают. Для систем более высокого порядка $n \geq 3$ эти понятия не всегда совпадают и

имеют свои отличия. С точки зрения «типичности» бифуркация определяется как «перестройка» типичного объекта, зависящего от параметра (параметров), при критических значениях этого параметра.

Используя понятие «типичности» можно говорить и о «типичных» бифуркациях систем. Идею «типичности» активно использовал в своих работах и французский ученый Р. Тома для вывода результатов по теории катастроф, при этом по существу описывая множества «типичных» бифуркаций для описания так называемых элементарных катастроф. Последние в сущности бифуркации «типичных» семейств систем, зависящих от большого числа параметров.

Исходя из «типичности» на плоскости имеются только пять «типичных» бифуркаций. Три из них являются локальными бифуркациями это — рождение вырожденного положения равновесия (особой точки), распадающегося на два гиперболических («седло» и «узел»); рождение предельного цикла из вырожденного фокуса; рождение вырожденного предельного цикла, распадающегося на два гиперболических («фокус», «седло»). Две другие бифуркации глобального характера это рождение предельного цикла из петли сепаратрисы седла или из петли сепаратрисы седла — узла и они относятся к вырожденным ситуациям.

В многомерном случае, траектории систем становятся более сложными. В этом случае «сложное» поведение траекторий не является исключительным явлением, а «простыми» поведениями характеризуются только так называемые системы Морса—Смейла.

Определение 6.4.1. Системой (поток, каскадом) Морса—Смейла называется гладкая динамическая система (поток или каскад), заданная на замкнутом многообразии M , если все ее траектории стремятся (в обе стороны во времени) к некоторым периодическим траекториям (включая положения равновесия в случае потока и неподвижные точки в случае каскада), причем периодических траекторий конечное число и все они гиперболические, а их инвариантные устойчивые и

неустойчивые многообразия находятся в общем положении, т. е. пересекаются только трансверсально. При этом диффеоморфизма μ , при итерировании которого получается каскад Морса—Смейла, называется *диффеоморфизмом Морса—Смейла*.

Системы такого рода были введены С. Смейлом в 1960 г. Им были получены неравенства, связывающие число периодических траекторий различных типов с гомологиями фазового многообразия. Известные неравенства Морса для числа критических точек гладкой функции f можно рассматривать как частный случай, получающийся, когда динамическая система есть поток $\dot{x} = \text{grad } f$.

Системы Морса—Смейла представляют по существу естественное обобщение на многомерный случай условий, которые были указаны Андроном и Понтрягиным как условия грубости потоков на плоскости. Но поскольку первый содержательный результат о системах Морса—Смейла напоминал результаты Морса и не имел отношения к грубости, то укоренилось название систем Морса и Смейла.

В то же время Смейл, с самого начала имел в виду связь с теорией грубых систем и предполагал, что системы Морса—Смейла являются грубыми. Позднее это было доказано Смейлом и Дж. Пейлисом.

В системах Морса—Смейла важное значение имеет понятие о «неблуждающих траекториях»

Определение 6.4.2. Точка ∂ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности A и любого $T > 0$ найдется $t > T$, что $\varphi_t A \cap A \neq \emptyset$. Тогда и все точки φ_t^∂ является «неблуждающими»; соответствующая траектория $\{\varphi_t^\partial\}$ называется *неблуждающей траекторией*.

Неблуждающие точки образуют замкнутое инвариантное подмножество Ω фазового пространства.

В системе Морса—Смейла неблуждающими являются только периодические траектории (включая положения равновесия).

Поэтому систему Морса—Смейла определяют еще как систему, у которой множество неблуждающих точек состоит из конечного числа гиперболических периодических траекторий, инвариантные многообразия которых пересекаются только трансверсально.

В случае малой размерности фазового пространства грубые системы — это в точности системы Морса—Смейла. Но в многомерном случае существуют грубые системы, более сложного характера. Такой случай был обнаружен Смейлом, на примере так называемой «подковы Смейла», где наблюдается грубая система с бесконечным числом периодических траекторий. Такие «сложные» грубые системы отличаются от систем Морса—Смейла в основном тем, что ту роль, которую играют в них периодические траектории, в «сложных» грубых системах, играют так называемые гиперболические множества.

Для гладкого каскада $\{f^n\}$ с замкнутым фазовым многообразием G имеет место следующее.

Определение 6.4.3. Компактное инвариантное (состоящее из целых траекторий) множество $M \in G$ называется *гиперболическим*, если для каждой точки $x \in M$ касательное пространство $T_x G$ разлагается в прямую сумму

$$G = E_x^s \oplus E_x^u, \quad (6.4.1)$$

таким образом, что при $\xi \in E_x^s, \eta \in E_x^u, n \geq 0$:

$$\text{а) } |(f^n)' \xi| \leq a |\xi| e^{-cn}, |(f^{-n})' \xi| \geq b |\xi| e^{cn};$$

$$\text{б) } |(f^n)' \eta| \geq b |\eta| e^{cn}, |(f^{-n})' \eta| \leq a |\eta| e^{-cn},$$

где a, b, c — положительные константы, не зависящие от x, η, ξ, n . Подпространство E_x^s называется *устойчивым (сжимающимся)*, а E_x^u — *неустойчивым (расширяющимся)*.

Эти подпространства определяются своими свойствами а), б) однозначно, их размерности локально постоянны, а сами они зависят от x непрерывно.

Для гладкого потока $\dot{x} = F(x)$ на G .

Определение 6.4.4. Компактное инвариантное множество $M \subset G$ называется *гиперболическим*, если все принадлежащие ему положения равновесия (когда таковые имеются) гиперболически (их конечное число), множество

$$B = M \setminus \{x = f(x) = 0\}$$

— замкнутое и для каждой точки $x \in B$ касательное пространство $T_x G$ разлагается в прямую сумму

$$T_x G = E_x^s \oplus E_x^u \oplus Rf(x), \quad (6.4.2)$$

таким образом, что при $\xi \in E_x^s, \eta \in E_x^u, t \geq 0$:

$$а) |\varphi'_t \xi| \leq a |\xi| e^{-ct}, |\varphi'_{-t} \xi| \leq b |\xi| e^{-ct};$$

$$б) |\varphi'_t \eta| \leq b |\eta| e^{ct}, |\varphi'_{-t} \eta| \leq a |\eta| e^{-ct},$$

где a, b, c — положительные константы, не зависящие от x, η, ξ, t .

В общем случае, конечный набор периодических траекторий (к которым относятся и гиперболические положения равновесия в случае потока) образуют гиперболическое множество. Частный случай — когда все фазовое многообразие является гиперболическим множеством.

Системы с последним случаем были введены и изучены известным математиком Д. В. Аносовым, которые им названы *У-системами*, но в литературе носят и другое название *систем (потоки, каскады, диффеоморфизмы) Аносова*. В общем случае определение гиперболического множества было дано С. Смейлом. Доказано что, системы Аносова грубые.

В гиперболической теории известны условия грубости динамических систем, определяемые гипотезой Смейла. В соответствии с этой гипотезой для грубости динамических систем необходимо и достаточно, чтобы множество неблуждающих точек было гиперболическим и периодические траектории были плотны в нем, а устойчивые и неустойчивые многообразия неблуждающих траекторий пересекались всюду трансверсально. Смейл доказал, что при выполнении этих условий строение множества неблуж-

дающих точек, а затем и всю качественную картину можно исследовать достаточно подробно.

Достаточность условий грубости доказана Р. Робинсоном. Что касается условий грубости доказаны не для общего случая, а в частных случаях систем малой размерности.

Вопрос о необходимости в многомерном случае остается открытым, в силу того, что как показал Смейл это связано с вопросом о «типичных» свойствах динамических систем, которые не полностью раскрыты. Смейл так показал, что в многомерном случае грубые системы не плотны в пространстве всех систем.

К настоящему времени еще не удалось найти таких условий для многомерных систем, которые подобно грубости в случае малой размерности выполнялись бы для «типичной» системы и определяли бы ее возможные свойства (пример аттрактор Лоренца).

Таким образом, вопрос о качественном свойстве грубости, прежде всего связано с вопросом о «типичности», хотя в многомерном случае как упоминалось ранее несколько отличается от случая систем малой размерности, а именно такие системы образуют не открытое всюду плотное множество, а образуют множество, содержащее всюду плотные локальные множества.

В теории грубых систем известны следующие два основных результата о «типичных» свойствах динамических систем.

1. Теорема Купки—Смейла. В пространстве всех гладких динамических систем (потоков или каскадов) класса $C^z, z \geq 1$, на некотором фазовом многообразии «типичны системы», у которых все периодические траектории (включая положения равновесия (особые точки)) являются гиперболическими, а инвариантные устойчивые и неустойчивые многообразия этих траекторий пересекаются всюду трансверсально. Системы с такими свойствами называются системами (потоками, каскадами, диффеоморфизмами) Купки—Смейла, т. е. системы Купки—Смейла «типичны». Из этой теоремы следует, что грубая система должна быть системой Купки—Смейла.

2. Лемма о замыкании (Лемма Ч. Пью). Если a — неблуждающая точка гладкой динамической системы, то сколь угодно близко в смысле C^1 к этой системе существует система, для которой a является периодической.

Следствие из этой леммы: в пространстве всех динамических систем класса C^1 «типичны» системы, у которых периодические точки (включая положения равновесия (особые точки)) всюду плотны в множестве неблуждающих точек. В случае C^2 эта лемма не доказана и справедлива только для C^1 .

Если обратиться к физическим корням понятия грубости систем, то как известно из работы Андронова и Понтрягина такие системы ассоциируются системами с «простым» поведением траекторий.

В связи со сказанным выше многие исследователи задаются вопросом а что же дало обобщающая математическая постановка вопроса о грубости, когда рассматриваются «сложные» поведения траекторий. На этот вопрос полагают, что нового и интересного немного. Так, проверять в конкретных случаях достаточные условия грубости весьма сложно. В частности трудно устанавливается гиперболичность всего множества неблуждающих точек. Еще труднее установить трансверсальность инвариантных устойчивых и неустойчивых многообразий. Но конечно же, локальная грубость гиперболических множеств вполне легко обнаруживается, и таких примеров достаточно в современной литературе по теории грубости и его приложениям.

В то же время, развитие новых разделов теории грубости привело к возникновению современной «гиперболической» теории, а также способствовало развитию теории бифуркаций. А эти две теории очень важны прикладном аспекте науки.

Системы с простым поведением траекторий заслуживают внимания, хотя потому что существенно что, системы с таким характером поведения — системы Морса—Смейла являются грубыми. Но в то же время, существенным является и тот факт, что в пространстве динамических систем имеются области, целиком заполненные системами со сложным поведением траекто-

рий (например, система с аттрактором Лоренца). Факт, что одна из систем со сложным поведением траекторий грубые, а другие — негрубые, и что как те, так и другие сами заполняют некоторые области, не столь существенно.

Известно, что в пространстве динамических систем имеются области, целиком заполненные системами, у которых некоторые детали качественной картины поведения траекторий изменяются при сколь угодно малых возмущениях, иначе говоря заполнены негрубыми системами. Но в известных примерах такой крайней чувствительности к изменению системы обладают некоторые, «тонкие» детали качественной картины. В реальных же физических системах эти детали «размываются» из — за внешних и внутренних шумов, поэтому в реальности возможно не столь важно, сохраняются ли они при малых возмущениях или нет.

Сказанное, приводит к идее модифицировать понятие грубой системы так, чтобы у грубой системы при малых возмущениях сохранялись не все качественные свойства, а только какие-то основные, тогда возможно такие системы, будут «типичными». Но такого результата относительно «типичности» и «грубости» не получено.

В определенных примерах негрубых систем наблюдается некоторое гиперболичность, более слабая, чем в гиперболических множествах, но не имеется общей формулировки, которые охватывала бы все эти случаи гиперболичности.

Глава 7

Хаос в динамических системах

7.1. Возникновение хаотических колебаний (хаоса)

Системы, не удовлетворяющие условиям грубости, изложенным в параграфе 6.1. называются негрубыми. Многочисленными исследованиями установлено, что множества негрубых систем, как и грубых систем образуют непрерывные множества в пространстве динамических систем. Так же известно, что множества грубых и негрубых систем разделены друг от друга точками и областями бифуркации, т. е. через бифуркации системы переходят не только от одной области (множества) грубых систем к другой но и от грубых к негрубым системам и наоборот.

Наглядным примером негрубых систем являются системы с точкой равновесия типа «центр». В терминах теории динамических систем негрубые системы это системы с негиперболическими особыми точками.

Одним из явлений в синергетических системах, вызывающих огромное внимание исследователей в различных областях, науки являются так называемые странные аттракторы, представляющие притягивающие многообразия в фазовом пространстве с хаотическим поведением (хаосом) траекторий в этих многообразиях. Исследование странных аттракторов вызывает интерес и потому, что многие ученые видят в изучении этого феномена ключ к разгадке тайн природы турбулентности и хаоса в системах различной физической природы — физических, химических, биологических а также в экономических и социальных системах. Становится актуальным и задача управления хаосам в синергетических системах.

С точки зрения теории грубости система с хаотическим движением (хаосом) негрубая система, т. е. таким образом, странные аттракторы определяют множества негрубых систем.

Первым классическим примером хаотических систем со странным аттрактором явилась система с моделью Лоренца, открытая 1963 г. американским метеорологом Эдвардом Лоренцом (Массачусетский технологический институт).

Э. Лоренц занимаясь исследованиями атмосферных течений для прогнозирования погоды получил модель тепловой конвекции в атмосфере в виде системы третьего порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (7.1.1)$$

где x — переменная, пропорциональная амплитуде скорости движения, а переменные y, z отражают распределение температуры в конвективном кольце, параметр σ — представляет собой число Прандтля, ρ — число Рэлея, а $\beta = 8/3$ — геометрический множитель.

Наиболее часто полагают $\sigma = 10$, а управляющим параметром является величина ρ .

Установлено, что странный аттрактор Лоренца с хаотическим движением в фазовом пространстве, возникает при значении $\rho = 24,74$, за точкой бифуркации Пуанкаре—Андронova—Хопфа (Хопфа) в системе (7.1.1). При этом в фазовом пространстве системы имеются два неустойчивых седлофокусов и одна седловая точка, вокруг которой происходят хаотические движения во многих синергетических системах, в частности, такие движения возникают в газовых лазерах.

Хаос возникает во многих синергетических системах с различной физической природой, но имеются некоторые стандартные сценарии перехода к хаотическим движениям.

Характерным являются следующие сценарии перехода к хаосу:

- А. Переход к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода (универсальный сценарий М. Фейгенбаума);
- Б. Переход через перемежаемость;
- В. Переход через бифуркации Хопфа.

А. Универсальный сценарий перехода через бесконечную последовательность удвоения периода был открыт американским ученым в области математической и теоретической физики Митчеллом Фейгенбаумом в 1976 г.

Ко времени открытия Фейгенбаума было известно, что в дискретных отображениях типа

$$x_{n+1} = \lambda f(x_n), \quad (7.1.2)$$

при изменении параметра $\lambda > 0$ существующий цикл, имеющий период T , теряет устойчивость, а устойчивым становится цикл с периодом $2T$, затем $4T$ и т. д. (рис. 7.1). Интервал изменения параметра λ , в пределах которого цикл периода 2^n устойчив, быстро сужается. Например, при функции правой части (7.1.2) в виде

$$f(x_n) = \lambda x_n(1 - x_n), \quad (7.1.3)$$

при $1 < \lambda < 3$ логическое уравнение (7.1.3) имеет две особые точки: $x = 0$; и $x = (\lambda - 1)/\lambda$, при этом начало координат — неустойчивая точка, а вторая точка устойчива.

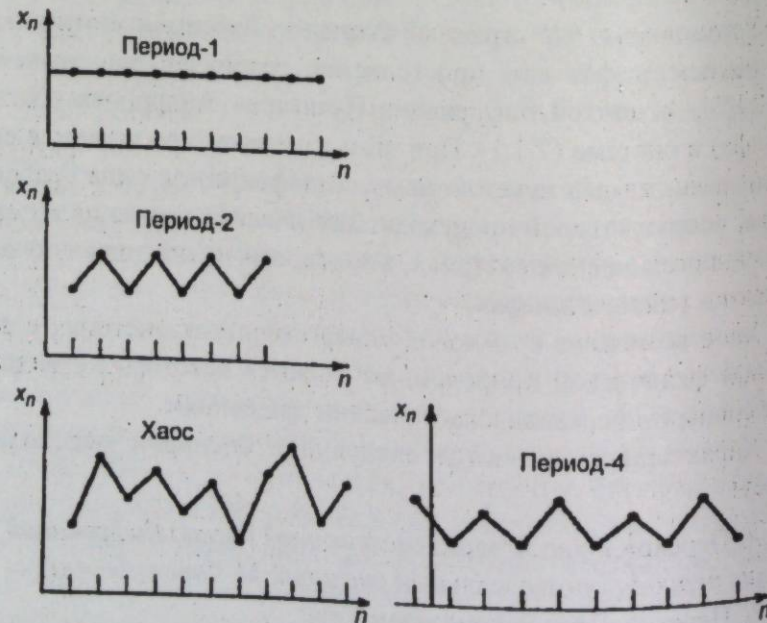


Рис. 7.1

При $\lambda = 3$ наклон при $x = (\lambda - 1)/\lambda$, превышает единицу ($f' = 2 - \lambda$) и обе точки равновесия становятся неустойчивыми. При $3 < \lambda < 4$ это простое разностное уравнение описывает множество многопериодических и хаотических движений.

Процесс перехода продолжается до тех пор, пока λ не достигнет значения $\lambda_\infty = 3,56994\dots$. Вблизи этого значения λ , при которых происходят удвоения периода, подчиняется точному закону

$$\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \rightarrow 4,66920 \dots \quad (7.1.4)$$

Это предельное отношение называется числом Фейгенбаума.

При значениях λ , λ_∞ , могут возникать хаотические итерации, т. е. поведение модели на больших временах не укладывается в рамки простых периодических движений, т. е. возникает хаос.

Исследованиями показано, что и другие отображения вида (7.1.2), где $f(x)$ — квадратичная или более сложная функция, ведут себя аналогично, удовлетворяя тому же закону (7.1.4).

Явления удвоения периода или регулярного изменения бифуркационного параметра называется универсальным сценарием Фейгенбаума по возникновению хаоса, которая характерна и непрерывным системам, в частности системе Ресслера.

Б. Наиболее часто встречающийся в приложениях переход к хаосу *перемежаемость* (обнаружено французскими физиками П. Манневилем и И. Помо, 1980 г.). Перемежаемость выглядит как постоянное (при изменении параметра) исчезновение периодических колебаний за счет их прерывания хаотическими всплесками. По мере изменения параметра вспышка хаоса становятся все более частыми и длительными. Например, исследовалось конвекция в ячейке с градиентом температуры (конвекция Рэлея—Бенара) или гидродинамическая система.

При этом средняя длительность хаотичной или турбулентной фазы движения τ определенным образом меняется с изменением некоторого параметра системы, например, это зависимость имеет вид

$$\tau \approx \frac{1}{(\lambda - \lambda_c)^{1/2}}, \quad (7.1.5)$$

где λ_c — значение, при котором периодическое движение становится хаотическим.

Переход к хаосу через перемежаемость в гидродинамической системе связан со слиянием и последующим исчезновением устойчивой и неустойчивой периодических траекторий.

Переход к хаосу через перемежаемость возможен и в системе Лоренца при достаточно больших числах Рэлея ($\rho = 166,2$; $\sigma = 10$; $\beta = 8/3$).

В. Переход к хаосу через бифуркацию Хопфа (Пуанкаре—Андропова—Хопфа) была рассмотрена на примере системы (аттрактора) Лоренца (7.1.1). Этот сценарий перехода к хаосу является так же стандартной (характерной) для многих синергетических систем.

Как правило предвестником такого сценария перехода к хаосу является присутствие в системе двух или более одновременных периодических колебаний. Когда частоты этих колебаний ω_1 и ω_2 несоизмеримы, наблюдаемое движение по существу непериодично, т. е. квазипериодично. Такие движения можно представить происходящими на поверхности тора в фазовом пространстве.

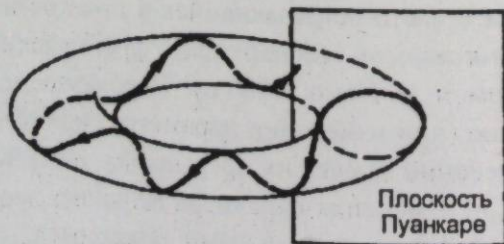


Рис. 7.2

В такой системе хаотические движения характеризуются разрушением квазипериодической тороидальной структуры при изменении параметров системы.

В некоторых синергетических системах при разных значениях параметров можно наблюдать все три типа сценариев возникновения хаоса.

Исследователям хаоса известны и обратные переходы от хаотических движений к периодическим, когда хаотические колебания, возникнув при определенных значениях параметров, через определенный промежуток времени вырождаются в периодическое или квазипериодическое движение. Этот переходный хаос следствие бифуркации или внезапного исчезновения установившегося хаотического колебания.

Хаос возможен не только в диссипативных системах, но и в консервативных системах. Более того, как известно именно поиск решений уравнений небесной механики привел в конце XIX века Пуанкаре, к предположению, что решения многих задач динамики чувствительны к начальным условиям и движения тел по орбитам оказываются непредсказуемыми. При этом физические примеры консервативных систем связаны с проблемами расчета орбит в небесной механике и поведения частиц в электромагнитных полях.

Хотя как правило, в реальных земных условиях в динамических системах происходят потери энергии, в некоторых из них, например, в структурированных конструкциях или микроволновых резонаторах, затухание очень мало, и на конечных интервалах времени их можно считать консервативными или гамильтоновыми системами.

В консервативных системах, обнаруживаются те же типы ограниченных колебательных движений, что и в диссипативных системах, т. е. возможны периодические, субгармонические, квазипериодические и хаотические движения. Основное отличие между колебаниями в диссипативных и консервативных системах заключается в том, что хаотические колебания в диссипативных системах (с потерей энергии) обнаруживают фрактальную структуру в отличие от консервативных, где нет такой структуры.

Консервативные системы характеризуются однородной плотностью вероятностей в ограниченных областях фазового пространства и имеют другие отображения Пуанкаре, чем диссипативные системы. Но к ним также применима мера расхождения близких колебаний, как показатели Ляпунова.

7.2. Системы с хаотическими колебаниями

Во многих синергетических системах обнаруживаются хаотические колебания или хаос. Это такие системы, как система Лоренца, Лэнгфорда, Ресслера, Белоусова—Жаботинского, Чуа, осцилляторы Ван дер Поля и Дуффинга и другие. Из примеров дискретных отображений, характерными являются логистическое уравнение, описывающее рост популяций, а также отображение Энона типа «подковы» («подковы Смейла») и преобразование «пекаря».

Классическими примерами систем с хаотической динамикой являются система или аттрактор Лоренца и логистическое уравнение. Эти два примера характеризуются многими особенностями хаотической динамики, такими, как субгармонические бифуркации, разбегающиеся траектории, удвоение периода, отображения Пуанкаре и фрактальные размерности.

В данном разделе рассмотрим некоторые широко известные системы с хаотической динамикой.

Система Лоренца

Система или аттрактор Лоренца является исторически первой моделью систем с хаотической динамикой, где по существу в детерминированной системе возникают непредсказуемые казались бы случайные колебания, в некоторой ограниченной области фазового пространства, названной «аттрактором» Лоренца.

Система Лоренца была получена в результате моделирования динамики атмосферы.

Рассматривается слой жидкости, находящийся под действием силы тяготения и который подогревается снизу. Поперек этого слоя возникает некоторая разность температур. При достижении разности температур достаточно большой величины, возникают циркуляционные, вихревые движения жидкости, в которых теплый воздух (жидкость) поднимается, а холодный опускается. Двумерное конвективное течение описывается с помощью классического уравнения Навье—Стокса.

При малых разностях температур ΔT жидкость неподвижна, но при некотором критическом значении ΔT возникает конвективное, т. е. циркуляционное течение. Это движение называют конвекцией Рэлея—Бенара.

Лоренц исследуя уравнение Навье—Стокса разлагая по фурье-гармоникам вдоль пространственных направлений оставил три гармоники.

В итоге, в безразмерной форме получены уравнения Лоренца (7.1.1), которые при наборе параметров $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ и варьируемом ρ имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - 8/3z. \end{cases} \quad (7.2.1)$$

В системе (7.2.1) при $\rho < r_1 = 1,0$ существует единственная особая точка $OT_1(0,0,0)$ типа «устойчивый узел». Далее при $\rho = r_1 = 1,0$ в системе (7.2.1) появляются еще две симметричные относительно OT_1 особые точки $OT_2([8/3(\rho - 1)]^{1/2}, [8/3(\rho - 1)]^{1/2}, \rho - 1)$ и $OT_3(-[8/3(\rho - 1)]^{1/2}, -[8/3(\rho - 1)]^{1/2}, \rho - 1)$ типа «неустойчивые фокусы». При этом, особая точка OT_1 при $\rho > r_1$ превращается в особую точку типа «седлоузел».

При значении $\rho = r_f = 1,345$ в системе (7.2.1) происходит бифуркация изменения типа особых точек OT_2 и OT_3 , а именно, последние превращаются в особые точки типа «устойчивые фокусы». При $\rho = r_2 = 13,926$ в рассматриваемой системе возникает метастабильный хаос, когда аттракторы OT_2 и OT_3 из глобальных превращаются в локальные аттракторы с некоторыми областями притяжения.

Далее, при $\rho = r_3 \approx 24,74$, в системе происходит бифуркация Пуанкаре—Андронova—Хопфа (Хопфа), когда собственные значения $\lambda_{2,3}$ в особых точках $OT_{2,3}$ становятся чисто мнимыми. Значение параметра $\rho = r_3$ привлекает большое внимание исследователей тем, что при $\rho > r_3$ в системе (7.2.1) возникает интересное явление, названное «странным аттрактором» Лоренца. Здесь, в ограниченной области пространства R^3 вокруг неустойчивых седлофокусов $OT_{2,3}$ возникают хаотические колебания, охваты-

вающие седловую точку OT_1 . В системе имеются и другие точки и виды бифуркаций, которые в данной работе не рассматриваются.

Установлено, что в странном аттракторе Лоренца движение глобально ограничено внутри эллипсоидальной области фазового пространства.

Логистическое отображение (уравнение)

Как известно, логистическое уравнение получило свое название в связи с задачей о пропитании популяции животных (*logistics* — снабжение, пропитание) и является упрощенной моделью динамики популяций.

Пусть x_n представляет собой число особей на изолированной территории в году с номером n , деленное на максимальное число особей, которое эта территория способна прокормить. Численность популяции в следующем году — x_{n+1} , зависит от того, сколько особей было в этом году, т. е. от x_n . Эта зависимость представляется логистическим отображением вида (7.1.3):

$$f(x_n) = \lambda x_n(1 - x_n), 0 \leq x_n \leq 1. \quad (7.2.2)$$

Очевидно, величина $1 - x_n$ пропорциональна количеству имеющейся пищи. Или иначе, по мере приближения числа популяций x_n к критическому значению 1, количество пищи, постоянно сокращаясь, приближается к нулю. Физический смысл параметра λ представляет плодовитость популяции. Чем больше значение λ , тем быстрее популяция оправится после любой катастрофы. Но большие значения параметра λ как правило приводят к хаотическим популяциям. Основные выводы, связанные с хаотическим движением в системах, описываемых логистическим уравнением, приведены в предыдущем разделе 5.1, где отмечено, что хаос в системе логистического уравнения возникает через последовательность удвоения периода, характеризуемой числом Фейгенбаума (7.1.4).

Нелинейные электрические цепи

Пример хаоса в электрических цепях был продемонстрирован японским ученым Уздой в цепи с нелинейным индуктивным элементом. Эта цепь описывается следующим уравнением

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = r \cos t, \quad (7.2.3)$$

которое по существу является частным случаем уравнения Дуффинга. Посредством моделирования на аналоговой и цифровой вычислительной технике Узда получил хаотическую динамику системы (7.2.3), контуры отображения Пуанкаре которой показаны на рис. 7.3.

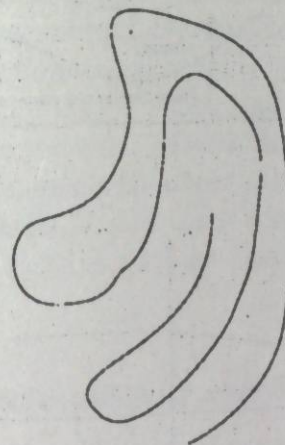


Рис. 7.3

Хаос в системах управления

В системах управления также возможны хаотические движения и колебания.

Рассмотрим систему третьего порядка, описываемую следующими уравнениями

$$m\ddot{x} + \delta\dot{x} + f(x) = -y, \quad (7.2.4)$$

$$\dot{y} + ay = k_1[x - x_g(t)] + k_2\dot{x},$$

где y — величина силы, создаваемой петлей обратной связи, а k_1 и k_2 соответственно коэффициенты обратной связи по положению и скорости, $x_g(t)$ — внешний опорный сигнал.

Для системы (7.2.4) возможны два типа задач для исследований. В первом случае, полагают что система автономна, т. е. опорный сигнал нулевой $x_g(t) = 0$. В этом случае, исследуется

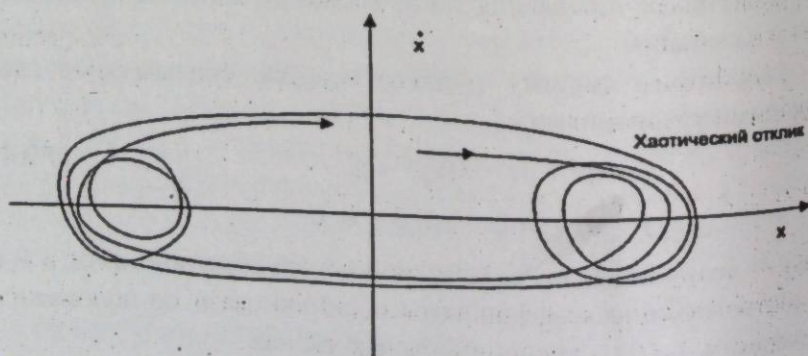
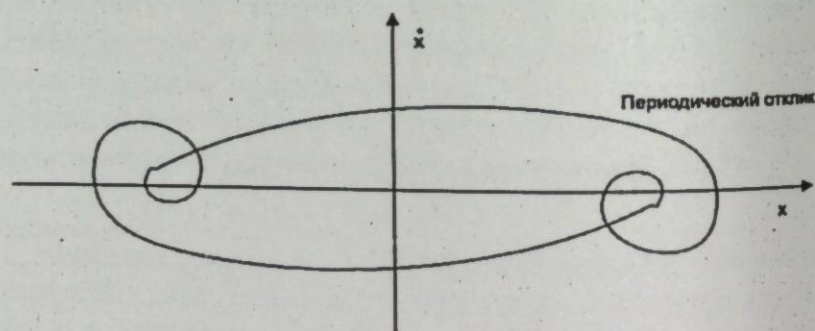
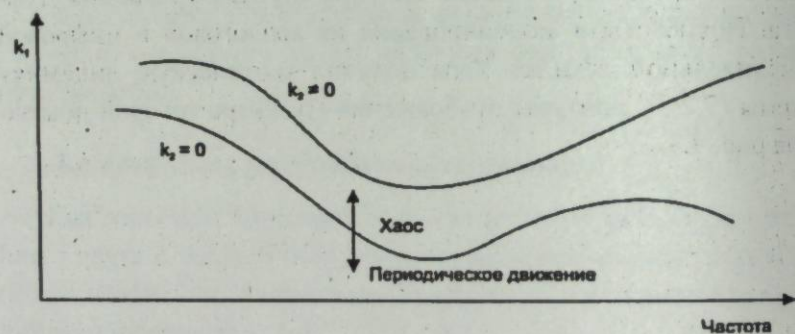


Рис. 7.4

пространство коэффициентов k_1 и k_2 для поиска областей равновесия, периодических или хаотических колебаний. Во втором случае, сигнал $x_g(t)$ периодический, т. е. масса перемещается по заданной траектории периодически. Тогда, ищутся значения частоты и коэффициента усиления, при которых система ведет себя по периодически замкнутой траектории или хаотически (рис. 7.4).

Хаотические колебания в системе (7.2.4), возникающие как в первом случае для автономных систем, так и во втором случае с периодическим $x_g(t)$ были исследованы многими учеными. Например, при $f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - r)$ эта управляемая механическая система имеет три положения равновесия (особые точки), и в системе возникают как периодические на предельном цикле, так и хаотические колебания. Также были исследованы хаотические колебания в системе (7.2.4) с кусочно-линейной функцией обратной связи.

7.3. Критерии хаотических колебаний

Существуют ряд подходов к определению критериев возникновения хаотических колебаний или хаоса в динамических системах. Критерии делятся на два типа: на *прогностические или теоретические*, позволяющие предсказывать возникновение хаоса, и на *диагностические или экспериментальные*, позволяющие устанавливать наличие или отсутствие хаоса.

Прогностическим критерием для предсказания возникновения хаотических колебаний (движений) называется такой критерий, который определяет совокупность управляющих параметров (или значение отдельного параметра), приводящую к хаосу. К прогностическим критериям прежде всего относятся критерий удвоения периода, критерии перемежаемости и переходного хаоса, а также критерий существования гомоклинической траектории и критерий Чирикова о перекрытии резонансов для консервативного хаоса.

Диагностическим критерием возникновения хаотических колебаний (движений) называется тест, который по результатам измерений или обработки данных позволяет определить, находилась ли находится ли конкретная система в состоянии хаотической

динамики. К диагностическим критериям относятся критерии установленные с помощью физических и численных (машинных) экспериментов, при которых часто используют такие диагностические характеристики как показатели Ляпунова и фрактальную размерность.

Диагностические экспериментальные критерии хаоса

Многочисленными экспериментами установлено, что хаотические колебания возникают во многих *нелинейных системах* в широком диапазоне значений параметров.

Ряд примеров возникновения хаоса были рассмотрены выше в этой главе, поэтому здесь рассмотрим лишь два экспериментально исследованных примера хаоса, а именно электрическую цепь с нелинейной индуктивностью и частицу в потенциале с двумя ямами или продольный изгиб балки, которые характеризуются уравнением Дуффинга.

1) Вынужденные колебания нелинейной индуктивности в электрической цепи

В предыдущем параграфе было приведено уравнение (7.2.3) исследованное И. Уздой, которое представлено в безразмерном виде

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = r \cos t, \quad (7.3.1)$$

где x — ток в индуктивности, k — сопротивление цепи, r — вынуждающее напряжение.

Динамика системы (7.3.1) определяется двумя параметрами k , r и начальными условиями $(x(0), \dot{x}(0))$. При вариации этих двух параметров, были получены множество различных периодических, субгармонических и хаотических движений, которые приведены во многих работах, в частности у Ф. Муна.

2) Вынужденные колебания частицы в потенциале с двумя ямами

Вынужденные движения частицы между двумя положениями равновесия — минимумами потенциала с двумя ямами, описываются уравнение типа Дуффинга

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - 1/2x(1-x^2) = r \cos \omega t, \quad (7.3.2)$$

где δ — безразмерный коэффициент затухания, r — вынуждающая сила, ω — вынуждающая частота, обезразмеренная с помощью частоты собственных малых колебаний системы в одной из потенциальных ям.

Уравнение (7.3.2) может описывать движение частицы в плазме, дефекта в твердом теле или, динамику продольного изгиба балки.

Диагностической характеристикой при этом служит показатель Ляпунова. При этом, на плоскости (r, ω) при заданном коэффициенте затухания δ существуют области хаотических колебаний сложной конфигурации. При очень большой вынуждающей силе $r \gg 1$, динамический режим в системе (7.3.2) будет близок к режиму, который исследовал Уэда в случае (7.3.1).

Прогностические (теоретические) критерии хаоса

Поиск теоретических критериев для определения того, при каком наборе условий или параметров, рассматриваемая динамическая система войдет в хаотический режим, ведется лишь для конкретного случая отдельно. Примером может служить последовательность бифуркаций удвоения периода, рассмотренная в частности, Фейгенбаумом для квадратичного отображения. Хотя эти результаты были обобщены для широкого класса одномерных отображений с помощью ренормгрупповой теории, критерии удвоения периода не всегда выполняется для отображений более высокого порядка. Тем не менее, сценарий удвоения периода является одним из возможных путей перехода к хаосу. В более сложных физических системах, понимание модели типа Фейгенбаума может оказаться полезным для определения того, когда и почему появляются хаотические движения.

Основные теории хаоса, приводящие к критериям, которые являются полезными для прогнозирования или диагностики хаотического поведения в реальных системах, включают в себя следующие:

- удвоение периода;
- гомоклинические траектории и отображения типа подковы;
- перемежаемость и переходный хаос;
- критерии перекрытия резонансов для консервативного хаоса;
- частные теории для задач с потенциалом, имеющим несколько ям.

Ряд критериев из перечисленных выше были рассмотрены выше в этой главе, поэтому далее остановимся на критериях, связанных с гомоклиническими траекториями и отображением типа подкова, а также с критериями перекрытия резонансов для консервативного хаоса.

Гомоклинические траектории и отображение типа подковы

Один из теоретических методов, который привел к созданию частных критериев хаотических движений, основан на поиске отображений типа подковы и гомоклинических траекторий в математических моделях динамических систем. Такая математическая процедура, известная как метод Мельникова, привела к критериям хаоса типа числа Рейнольдса, связывающим параметры системы.

Критерий гомоклинической траектории является математическим методом получения прогностического соотношения между безразмерными группами переменных физической системы. Этот критерий дает необходимое, но недостаточное условие возникновения хаоса. В то же время, критерий гомоклинической траектории может также порождать необходимое и достаточное условие предсказуемости поведения динамической системы. При этом, по существу этот метод позволяет определить, обладает ли модель свойствами отображения типа подковы или преобразования пекаря.

В случае отображения типа подковы внимание сосредотачивается на множестве начальных условий для траекторий, заполняющем некоторый шар в фазовом пространстве. Если система ведет себя как отображение типа подковы, то этот начальный

объем в фазовом пространстве под действием динамики системы принимает новую форму: первоначальный шар вытягивается и складывается (рис. 7.5). После многих итераций эти складывания и растяжения порождают фракталообразную структуру, и точная информация о начальных условиях утрачивается. Для установления соответствия между начальным и последующим состояниями системы требуется все большая точность. При конечной точности постановки задачи предсказание становится невозможным.

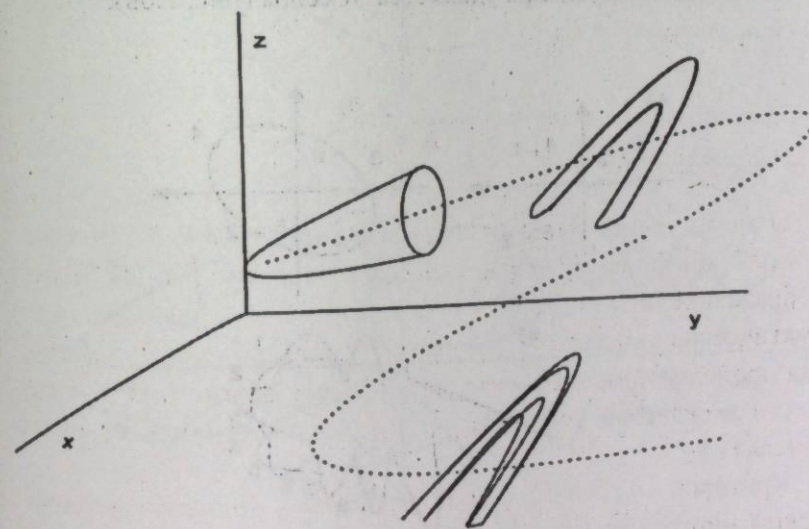


Рис. 7.5

Гомоклинические траектории. Поведение нелинейной динамики и хаоса часто удается разгадать, по дискретной выборке из движения, которая называется *сечением Пуанкаре*. В сечении Пуанкаре точки, образуют последовательность точек в n -мерном пространстве, располагающейся вдоль некоторых непрерывных кривых, называемых *многообразиями*.

Гомоклинические траектории представляют из себя последовательность точек, называемых траекторией.

Например, если речь идет о периодической траектории с периодом 3, то последовательность точек поочередно посещает три

состояния на фазовой плоскости (рис. 7.6а). А квазипериодическая траектория соответствует последовательности точек, перемещающихся по некоторой замкнутой кривой (рис. 7.6б).

В динамике отображений встречаются особые точки, при прохождении через которые траектории по одним направлениям движутся от них, а по другим — к ним.

Пример — седло. У такой особой точки существуют две кривые — многообразия, вдоль которых траектории приближаются к ней, и две кривые — многообразия, вдоль которых последовательность точек Пуанкаре удаляется от седла (рис. 7.6в).

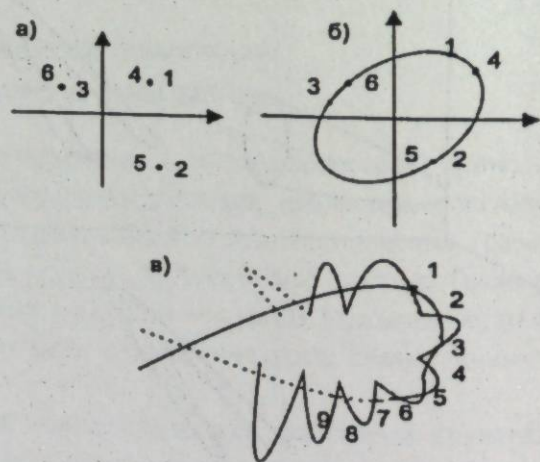


Рис. 7.6

Для понимания гомоклинических траекторий рассмотрим динамику маятника, колеблющегося с затуханием под действием вынуждающей силы.

Отображение Пуанкаре, синхронизированное с частотой вынуждающей силы, имеет седловую особую точку в окрестности $\theta = \pm n\pi$ (n — нечетное), как показано на рис. 7.7 для случая маятника, колеблющегося под действием вынуждающей силы.

При достаточно малой амплитуде вынуждающей силы устойчивое и неустойчивое многообразия седла не касаются друг друга. Но при возрастании вынуждающей силы эти два многообразия

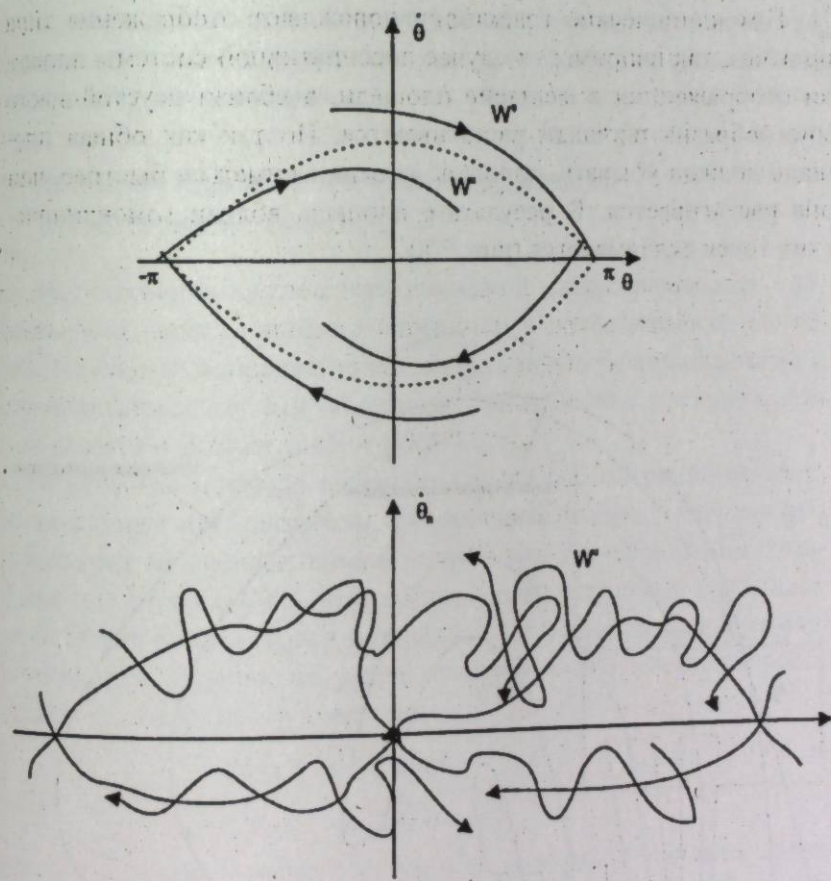


Рис. 7.7

пересекаются, и это происходит бесконечное число раз. При этом точки пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий называются *гомоклиническими точками*. Точка Пуанкаре вблизи одной из этих точек отображается на окрестности всех остальных точек пересечения. Совокупность таких точек Пуанкаре называется *гомоклинической траекторией* (рис. 7.6в).

Пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий при отображении Пуанкаре порождает в окрестности каждой гомоклинической точки отображение типа подковы, приводящей к непредсказуемости или чувствительной зависимости от начальных условий, которая является отличительным признаком хаоса.

Гомоклинические траектории порождают отображения типа подковы, так например, в случае диссипативной системы площади отображаются в меньшие площади, а вблизи неустойчивого многообразия площади растягиваются. Но так как общая площадь должна убывать, площадь должна сжиматься быстрее, чем она растягивается. В результате площадь вблизи гомоклинических точек складывается (рис. 7.8).

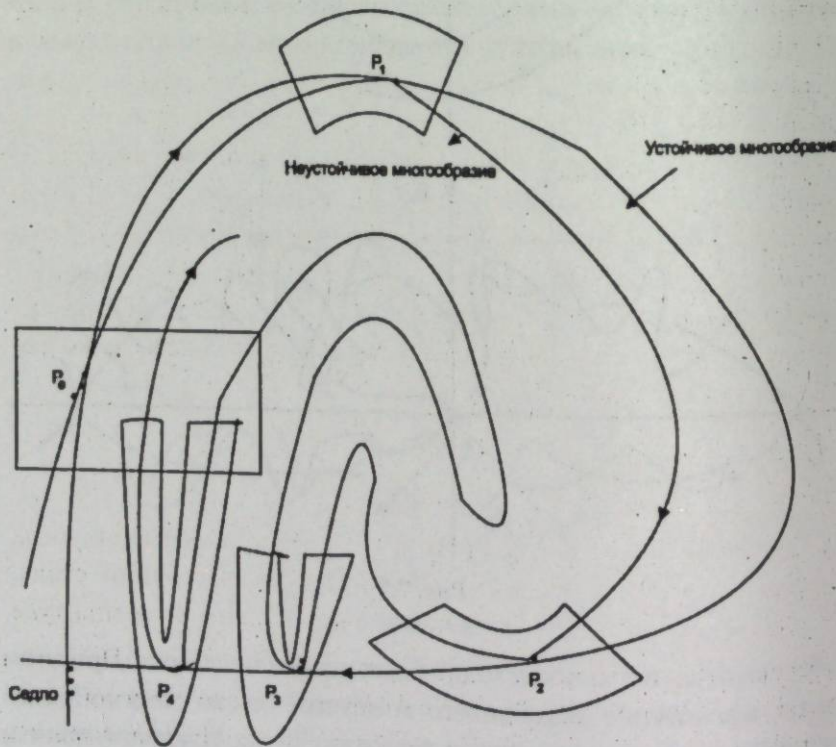


Рис. 7.8

Таким образом, динамическая система рассматривается как преобразование фазового пространства, т. е. объем точек, представляющих различные возможные начальные условия, преобразуется со временем в какой-то деформированный объем. Регулярный поток в фазовом пространстве возникает, когда трансформированный объем имеет гладкие очертания. Хаотический

поток возникает, когда первоначальный объем растягивается, сжимается и складывается, как при *преобразовании пекаря* или *отображении типа подковы*.

Критерий Чирикова перекрытия резонансов для консервативного хаоса

Исследования хаотических движений в консервативных системах были начаты намного ранее, чем в диссипативных системах. Но случаи консервативных систем менее распространены и ограничиваются такими областями, как небесная механика, физика плазмы и физика ускорителей.

В качестве примера в данном случае рассматривается хаос, возникающий при движении прыгающего шарика, упруго отражающегося от горизонтальной плоскости. Но разностные уравнения для этого случая, описывают также поведение связанных нелинейных осцилляторов и поведение электронов в электромагнитном поле. Уравнения удара гравитирующей массы о колеблющуюся поверхность имеет вид

$$x_{n+1} = x_n + k \sin \varphi_n, \quad (7.3.3)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + x_{n+1},$$

где x_n — скорость перед ударом, а φ_n — момент времени, когда происходит удар, нормированный на частоту колебаний стола, т. е. $\varphi \equiv \omega t \pmod{2\pi}$, k — величина пропорциональная амплитуде колеблющегося стола. Поскольку рассматривается консервативная система (без потери энергии), то области начальных условий в фазовом пространстве (x, φ) сохраняют свою площадь при повторных итерациях отображений (7.3.3).

Отображения Пуанкаре фазовых траекторий системы (7.3.3) на плоскости (x, φ) при двух значениях $k = 0,6$ и $k = 1,2$ показаны в работе Ф. Мун. Так при $k = 0,6$, точки $x = 0,2 \pi$ соответствуют траекториям с периодом 1, т. е.

$$x_1 = x_1 + k \sin \varphi_1,$$

$$\varphi_1 = \varphi_1 + x_1.$$

Решение этой системы уравнений имеет вид $\varphi_1 = 0, \pi; x_1 = 0$ (φ_1 и x_1 взяты по mod 2π). При этом решение вблизи $\varphi = \pi$ устойчиво при $|2 - k| < 2$, но вблизи $\varphi = 0, 2\pi$ неустойчиво при $|2 + k| < 2$ и соответствует седловым точкам отображения.

Вблизи $x = \pi$ получена траектория с периодом 2, задаваемая решением системы уравнений

$$x_2 = x_1 + k \sin \varphi_1, \varphi_2 = \varphi_1 + x_2,$$

$$x_1 = x_2 + k \sin \varphi_2, \varphi_1 = \varphi_2 + x_1.$$

И в этом случае, существуют и устойчивые, и неустойчивые точки периода 2, также утверждается, что устойчивые точки существуют при условии $k < 2$.

При $k = 1,2$ получены движения третьего типа: вблизи мест, где при меньших значениях параметра k существовали седла и сепаратрисы, идущие из седла в седло, получено облако точек, которое соответствует консервативному хаосу. При $k < 1$ оно локализовано в окрестности седловых точек. Но при $k \approx 1$ блуждающая траектория становится глобальной и «размазывается» по всему фазовому пространству.

При этом показано, что все типы движений можно получить, простым выбором начальных условий (так как нет затухания, то нет и аттракторов).

Критерий глобального хаоса в системе (7.3.3) был предложен советским физиком Чириковым, который заметил, что при увеличении параметра k расстояние по вертикали между сепаратрисами, связанными с периодическими движениями периода 1 и периода 2, убывает. Если бы не вмешательство хаоса, то сепаратрисы перекрылись бы (рис. 7.9), отсюда название критерия — критерий перекрытия.

Стандартным разложением (7.3.3) вблизи одного из таких периодических резонансов по малым k , получим, что размер области, ограничиваемой соответствующей сепаратрисой, составляет величину

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 4k^{1/2}, \\ \Delta_2 &= k. \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

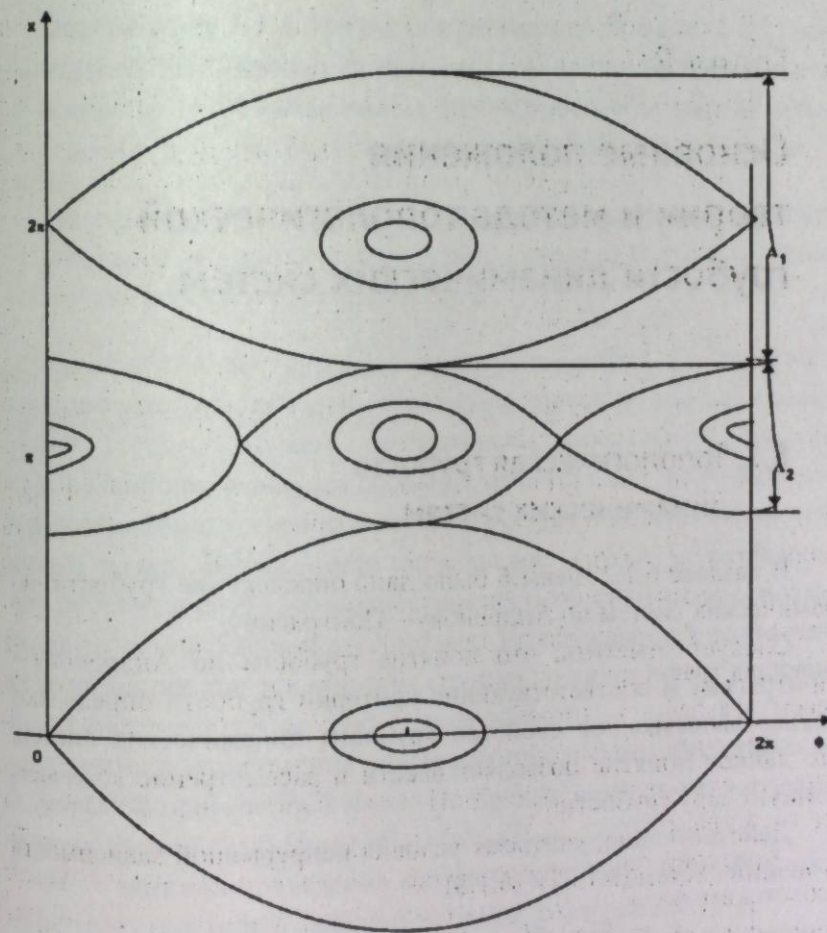


Рис. 7.9

В каждом из разложений не учитываются влияние остальных резонансов. Условие перекрытия заключается в том, что $\Delta_1 + \Delta_2 = 2\pi$, или

$$4k_c^{1/2} + k_c = 2\pi. \quad (7.3.5)$$

Из уравнения (7.3.5) находим $k_c = 1,46$, которое является оценкой сверху критического значения $k = k_c$ для глобального хаоса, численно равного $k_c \approx 1,0$.

Глава 8

Основные положения теории и метода топологической грубости динамических систем

8.1. Топологическая грубость динамических систем

В разделе 6.1.2 главы 6 было дано определение грубости динамических систем по Андронову—Понтрягину.

Следует отметить, что понятие грубости по Андронову—Понтрягину и соответствующие критерии грубости определяют только качественное свойство грубости динамических систем. Но данное понятие позволяет ввести в рассмотрение количественную меру грубости.

Действительно, учитывая условия непрерывной зависимости решений систем (6.1.7) и (6.1.8)

$$\dot{x} = F(x), \bar{x}' = F(\bar{x}) + f(\bar{x})$$

от начальных условий и правых частей этих систем, можем утверждать, что для систем различных топологических структур величины δ — близости (6.1.7) и (6.1.8), приводящие к ε -тождественности (при фиксированном малом $\varepsilon > 0$), в общем случае различны.

Следовательно можно ввести следующие определения.

Определение 8.1.1. Грубая в области G система (6.1.7) называется *максимально грубой* на множестве систем N , если величина δ -близости систем (6.1.7) и (6.1.8), приводящие к ε -тождественности, будет (для каждого $\varepsilon > 0$) *максимальна*.

Определение 8.1.2. Негрубая в области G система (6.1.7) называется *минимально негрубой* на множестве систем N , если величина ε -тождественности, при которой еще выполняется условие грубости, будет (для каждого $\delta > 0$) *минимально*.

Замечание. Множество N в определениях сформулированных выше это множество всех динамических систем, которые топологически тождественны друг другу.

Как известно из теории динамических систем, необходимые и достаточные условия грубости определяются по особым траекториям (особым точкам, сепаратрисам, предельным циклам и т. д.). Наиболее важными особыми траекториями, во — многом определяющими топологическую структуру системы являются особые точки. Возможности определения грубости динамических систем по грубости в окрестностях особых точек обосновывается теоремой Гробмана—Хартмана, утверждающей о том, что в окрестностях *гиперболических* (грубых) особых точек динамическая система подобна своей линейной части.

Условия достижимости максимальной грубости определяют теоремой приведенной ниже. Но прежде чем сформулировать теорему, введем следующие обозначения:

M — матрица приведения матрицы линейной части A к диагональному (квазидиагональному) базису с матрицей Γ , т. е.

$$M\Gamma = AM, \tag{8.1.1}$$

где $\Gamma = \text{diag}\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$, или $\Gamma = \text{diag}\{\lambda_{1,2}^k = \delta \pm j\beta, k = \overline{1, \ell}; \lambda_i, i = \overline{2\ell, n}\}$, а $c\{M\}$ — число обусловленности (обычно спектральное число) матрицы M . Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 8.1. Для того, чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки (x_0) была *максимально грубой*, а в окрестности негиперболической — *минимально негрубой*, необходимо и достаточно иметь

$$M^* = \text{argmin } c\{M\}. \tag{8.1.2}$$

Доказательство.

В работе Оморов (1991) приведено доказательство теоремы 8.1.1 для случая $n = 2$. Рассмотрим случай грубой системы.

Необходимость. Пусть динамическая система, заданная уравнением

$$\dot{x} = F(x), \quad (8.1.3)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, F — n -мерная вектор-функция, является грубой в области G . Тогда согласно критериям грубости Андронова—Понтрягина в особых точках области G :

- а) $\det A \neq 0$, $\text{tr } A \neq 0$;
- б) если $\text{tr } A = 0$, то $\det A < 0$,

где $\text{tr } A$ и $\det A$ — соответственно след и определитель матрицы A .

Допустим, система (8.1.3) грубая вблизи особой точки с матрицей линейной части A , т. е. пусть $\det A \neq 0$.

Тогда, по определению грубости по Андронову—Понтрягину, возмущенная система, определенная в ограниченной замкнутой подобласти \bar{G} области G

$$\dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}) + f(\tilde{x}), \quad (8.1.4)$$

будет ϵ -тождественной системе (8.1.3).

Если теперь учесть непрерывную зависимость решений (8.1.3) и (8.1.4) от начальных условий и правых частей, то для систем различных топологий величины δ -близости (8.1.3) и (8.1.4), приводящие к ϵ -тождественности (при фиксированном малом $\epsilon < 0$), в общем случае различны.

Но в то же время, условие $\det A \neq 0$ эквивалентно отсутствию нулевого собственного значения λ_i ($i = \overline{1, n}$) матрицы A .

При изменениях правых частей в системе (8.1.4), собственные значения $\tilde{\lambda}_i$ изменяются по отношению к λ_i (8.1.3) тем меньше, чем меньше величина числа обусловленности матрицы M , приводящей к диагональному (квазидиагональному) базису матрицу линейной части A в особой точке (x_0) .

$$|\tilde{\lambda}_i - \lambda_j| \leq c\{M\} \|\tilde{A} - A\|, \quad (8.1.5)$$

где $\tilde{\lambda}_i, \lambda_j - i, j = \overline{1, n}$ — собственные значения возмущенной и исходной систем в особой точке с матрицами линейной части соответственно $\tilde{A}, A, \|\cdot\|$ — какая-либо норма матрицы. Следовательно, число обусловленности $c\{M\}$ оценивает величину δ -близости систем (8.1.3) и (8.1.4), при которой для фиксированного $\epsilon > 0$, выполняются условия грубости:

$$(\bar{D}, (8.1.4) \equiv (D, (8.1.3))), \quad (8.1.6)$$

а значит $c\{M\}$ является мерой грубости исходной системы (8.1.3).

В таком случае, существует максимально грубая в особой точке (x_0) система, для которой $\delta = \delta_{\max}$ и $M^* = \text{argmin } c\{M\}$.

Достаточность. Пусть выполняется условие (8.1.2).

Тогда, изменения λ_i матрицы A будут минимальны, а следовательно (8.1.3) будет максимально грубой.

Теперь рассмотрим случай негрубой системы.

Пусть особая точка (x_0) системы (8.1.3) является негиперболической тогда, либо $\text{tr } A \neq 0, \det A = 0$, либо $\text{tr } A = 0, \det A > 0$.

По аналогии со случаем грубой системы (или гиперболической точки) нетрудно сделать вывод, что негрубые системы (8.1.3) могут различаться величинами минимальными значениями $\epsilon_{\min} > 0$, для которых выполняется (8.1.2), т. е. и для негрубых систем можно ввести меру негрубости, которой может служить величина $c\{M\}$.

Следовательно, для минимально негрубой системы значения $\epsilon_{\min} > 0$, до которого выполняется (8.1.6), будет минимальным из всего множества N негрубых систем, δ — близких к (8.1.3).

В таком случае, для минимально негрубой системы выполняется условие (8.1.2) и, наоборот, если имеет место (8.1.2), то система (8.1.3) будет минимально негрубой.

Теорема 8.1. доказана.

Замечания к теореме 8.1

1. Возможность рассмотрения и негиперболических особых точек вытекает из непрерывности функции $c\{M\}$. Следует заметить, что из анализа известно, что конкретного решения, для

негиперболических точек строго говоря не существует (в общем случае n ветвящихся решений).

2. Как следует из определений 8.1.1 и 8.1.2, а также теоремы 8.1 существуют и минимально грубые, и максимально негрубые системы, для которых $c\{M\} \rightarrow \infty$. Иначе, множества грубых и негрубых систем образуют непрерывные множества по отношению к показателю грубости $c\{M\}$. При этом системами для которых $c\{M\} \rightarrow \infty$ будут системы с жордановой квазидиагональной формой матриц линейной части.

Определения 8.1.1 и 8.1.2, а также условия теоремы 8.1 инвариантны относительно размерности рассматриваемого фазового пространства.

Введенная мера $c\{M\}$ грубости динамических систем позволяет решать задачи управления грубостью систем в окрестностях особых точек фазового пространства.

Действительно, пусть задана система

$$\dot{x} = \phi(x, u), \quad (8.1.7)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$ — соответственно вектора фазовых координат и управлений системы, $\phi(\cdot)$ — n -мерная нелинейная дифференцируемая вектор — функция.

Далее, пусть

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (8.1.8)$$

является системой линейной части для (8.1.7) в особой точке (x_0, u_0) .

$$\Phi(x_0, u_0) = 0. \quad (8.1.9)$$

В (8.1.8) матрицы A и B :

$$A = [\phi_{ix_j}(x_0, u_0)], i, j = \overline{1, n},$$

$$B = [\phi_{iu_j}(x_0, u_0)], i = \overline{1, n}, j = \overline{1, r},$$

где $\phi_{ix_j}(x_0, u_0)$, $\phi_{iu_j}(x_0, u_0)$ — соответственно частные производные $\partial\phi_i/\partial x_j$, $\partial\phi_i/\partial u_j$ в точке (x_0, u_0) .

Для системы (8.1.7) справедлива следующая теорема.

Теорема 8.2. Для того, чтобы в управляемой динамической системе (8.1.7), описываемой в фазовом пространстве $x \in R^n$ окрестности особой точки (x_0, u_0) с помощью матриц линейной части A и B , существовало управление $u = -Kx$, обеспечивающее вблизи соответствующей особой точки замкнутой системы с синтезированной матрицей $F = A - BK$ максимальную грубость или минимальную негрубость системе (8.1.7), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия невырожденной разрешимости уравнения Сильвестра для замкнутой системы.

Доказательство.

Необходимость. Пусть существует $u = -Kx$, переводящее систему (8.1.8) вблизи особой точки (x_0, u_0) с матрицей линейной части A , в максимально грубую (или минимально негрубую) систему с матрицей линейной части в той же точке $F = A - BK$.

Тогда по теореме 8.1.1 выполняется (8.1.2), а значит, существует невырожденная M , такая, что $MG = FM$, откуда получаем уравнение Сильвестра

$$MG - AM = -BH, \quad (8.1.10)$$

где $H = KM$.

Следовательно выполняются условия невырожденной разрешимости уравнения Сильвестра, а именно:

1. Управляемость пары (A, B) ;
2. Наблюдаемость пары (G, H) ;
3. Непересекаемость спектров A и G ;
4. Невырожденность BH (при кратных собственных значениях).

Достаточность. Пусть выполняется условие невырожденной разрешимости уравнения Сильвестра, т. е. существует невырожденное решение M .

Тогда, синтезируя управление

$$u = -Kx, \quad (8.1.11)$$

где $K = HM^{-1}$, с помощью какого-либо алгоритма (метода) минимизации

$c\{M\}$ можно достичь минимального $c\{M\}$ или

$$M = \arg \min c\{M\}.$$

Теорема 8.2 доказана.

Таким образом, в результате использования теоремы 8.2, задача достижения максимальной грубости сводится к задаче нелинейного программирования по минимизации $c\{M\}$, выбором матрицы H или (K) в уравнении Сильвестра с последующим нормированием найденной матрицы M (для достижения единственности).

В итоге, алгоритм достижения максимальной грубости динамических систем по совокупности особых точек в области G будет следующий.

1. Определяются особые точки в данной области G . Пусть таких точек будет p .

2. Проводится синтез управлений $u_i, i = \overline{1, p}$, таких, что в особых точках обеспечивается $M_i = \arg \min c\{M_i\}, i = \overline{1, p}$.

3. Определяются новые координаты особых точек (x_{oj}) с номерами j отличными от данного, т. е. $j \neq i$, для которых вычисляются $c\{M_i\}, i = \overline{1, p}$.

4. Выбирается то управление $u^* = u_i = -Kx$, которое обеспечивает минимум

$$\sum_{i=1}^p c\{M_i\}.$$

5. Система (8.1.7) с матрицей линейной части $F_i = A_i - B_i K_i$ в особой точке x_{oi} , которая соответствует управлению u^* и будет максимально грубой системой в области G .

Если в области G кроме особых точек имеются и предельные циклы, то предложенный метод, которого будем называть методом «обусловленности топологической грубости» или просто методом «топологической грубости», позволяет распространить его и на области в окрестностях предельных циклов. Покажем это.

Пусть в области G фазового пространства имеется некоторый предельный цикл.

Тогда если известна фундаментальная матрица решений $X(t)$ системы

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad (8.1.12)$$

то по ней может быть найдена матрица *монодромии* $X(T)$ предельного цикла с периодом T .

Если фундаментальная матрица $X(t)$ аналитически не найдена, то матрица монодромии находится одним из численных методов, например так называемым методом «стрельбы».

По методу «стрельбы», для системы (8.1.12) задаются некоторыми начальными условиями

$$x(0) = \bar{x}_i, i = \overline{1, n}, \quad (8.1.13)$$

и определенным значением периода T .

Далее система (8.1.12) интегрируется от точки $t = 0$ до точки $t = T$.

В результате получаются значения x_i в точке

$$t = T: x_i(T) = \varphi_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, T), i = \overline{1, n}. \quad (8.1.14)$$

Матрицей монодромии будет матрица $X(T)$ с элементами $\partial \varphi_i / \partial \bar{x}_j, i, j = \overline{1, n}$

$$X(T) = [\partial \varphi_i / \partial \bar{x}_j], i, j = \overline{1, n}. \quad (8.1.15)$$

Матрица монодромии $X(T)$ однозначно определяет локальные свойства окрестности предельного цикла, в частности, орбитальная устойчивость определяется по собственным значениям $\mu_j, i = \overline{1, n}$ называемым мультипликаторами этой матрицы. Если $|\mu_j| < 1$, кроме одного который всегда равен +1, то предельный цикл орбитально устойчив. В противном случае предельный цикл орбитально неустойчивый.

Теперь, аналогично случаю особых точек можно ввести меру $S_T\{M\}$ для оценки грубости динамических систем в окрестностях предельных циклов, как число обусловленности матрицы $M(T)$, предельных циклов, как число обусловленности матрицы $X(T)$, т. е. диагонализующего (или квазидиагонализующего) матрицу $X(T)$, т. е.

$$S_T\{M\}: M(T)\Gamma(T) = X(T)M(T), \quad (8.1.16)$$

где $\Gamma(T) = \text{diag} \{\mu_i, i = \overline{1, n}\}$,
или $\Gamma(T) = \text{diag} \{\Gamma_1, \mu_i, i = \overline{3, n}\}, \Gamma_1 = [\alpha, \beta; \delta, -\beta]$.

Для предельных циклов справедлива теорема.

Теорема 8.3. Для того, чтобы в окрестности орбитально-устойчивого предельного цикла динамическая система было максимально грубая, а в окрестности орбитально-неустойчивого цикла минимально негрубая, необходимо и достаточно, чтобы

$$M(T) = \arg \min c\{M(T)\}. \quad (8.1.17)$$

Теорема 6.3 доказывается аналогично теореме 6.1.

Метод «топологической грубости» нетрудно распространить и на кусочно-гладкие динамические системы, рассматривая совокупную грубость по областям гладкости системы, если особые точки не находятся на границе этих областей. В случае негладких систем можно расширить использование предлагаемого метода, используя какую-либо обобщенную производную из негладкого анализа для определения матрицы линейной части.

8.2. Применение метода топологической грубости к исследованию бифуркаций динамических систем

Основные положения применения метода топологической грубости к исследованию бифуркаций сформулируем в виде следующих проблем.

Теорема 8.4. Для негиперболических особых точек с одним нулевым действительным собственным значением при изменениях параметров q , в точке q^* имеет место

$$c\{M(q^*)\} = \min_q c\{M(q)\}. \quad (8.2.1)$$

Доказательство. Применим известную из высшей алгебры теорию возмущений в части положений основанных на теоремах Гершгорина.

Для определенности доказательство проведем для случая простых собственных значений.

Пусть матрица линейной части A_0 в особой точке (q^*) имеет простые собственные значения и пусть $\lambda_1(q^*) = 0$.

Далее, пусть $A = A_0 + \Delta A = A_0 + \varepsilon A_\varepsilon$ — возмущенная матрица вблизи точки $q = q^*$ пространства параметров $q \in R^p$, $A = A_0 - \varepsilon A_0$ и $\bar{A} = A_0 + \varepsilon A_0$, возмущенные матрицы вблизи точки (q^*) соответственно слева и справа от $\lambda_1(q^*) = 0$ на комплексной плоскости собственных значений. Здесь $\varepsilon > 0$ — малая величина.

Тогда из теории возмущений, можно представить

$$M_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon M_\varepsilon = \text{diag}\{\lambda_i^\varepsilon\} + \varepsilon \begin{bmatrix} \beta_{11}^\varepsilon/S_1^\varepsilon & \beta_{12}^\varepsilon/S_1^\varepsilon & \beta_{1n}^\varepsilon/S_1^\varepsilon \\ \beta_{21}^\varepsilon/S_2^\varepsilon & \beta_{22}^\varepsilon/S_2^\varepsilon & \beta_{2n}^\varepsilon/S_2^\varepsilon \\ \beta_{n1}^\varepsilon/S_n^\varepsilon & \beta_{n2}^\varepsilon/S_n^\varepsilon & \beta_{nn}^\varepsilon/S_n^\varepsilon \end{bmatrix}. \quad (8.2.2)$$

где $k = 1, 2, 3$ индекс, относящийся обозначенные величины соответственно к матрицам A , \underline{A} и \bar{A} ; M_k — матрица диагонализации A_k , $\beta_{ij}^\varepsilon = (y_i^T)^\varepsilon A_\varepsilon x_j^\varepsilon$; $(y_i^T)^\varepsilon$; x_i^ε — соответственно нормированные левый и правый собственные вектора i -го и j -го собственных значений матрицы A_k ; $S_i^\varepsilon = (y_i^T)^\varepsilon x_i^\varepsilon$, $i = \overline{1, n}$ — параметры ориентации векторных пространств $(y_i^T)^\varepsilon$ и (при вещественных $(y_i^T)^\varepsilon$ и x_i^ε , $i = \overline{1, n}$ — это косинусы x_i^ε углов между $(y_i^T)^\varepsilon$ и x_i^ε .

Если полагать, что $|\beta_{\varepsilon ij}| < 1$ — элементы A_ε — то согласно теории возмущений центр и радиус для i -го круга Гершгорина будут равны

$$(\lambda_i^\varepsilon + \varepsilon \beta_{ij}^\varepsilon/S_i^\varepsilon), \varepsilon \sum_{j \neq i} |\beta_{ij}^\varepsilon/S_i^\varepsilon|,$$

или иначе, радиус круга для λ_i^ε — собственного значения будем иметь меньше чем

$$[n(n-1)\varepsilon]/|S_i^\varepsilon|. \quad (8.2.3)$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$ этот круг будет изолированным.

Будем полагать, что для всех $k = 1, 2, 3$ величина ε одинакова.

Тогда, величина возмущения λ_i^ε , оцениваемая по (8.2.3) будет определяться величиной S_i^ε .

Покажем, что эта величина будет наибольшим (из трех случаев $k = 1, 2, 3$) для $k = 1$, когда $\lambda_i^\varepsilon = 0$.

Действительно, для $k=1$ будем иметь $Ax_1^T = 0, y_1^T = 0$, отсюда $x_1^T = y_1^T, |S_1| = |x_1^T| = 1$.

А для $k=2,3, x_1^T = y_1^T$, т. к. в общем случае $x_1^T \neq y_1^T A^T$, но тогда $|x_1^{2,3}| < 1$.

Следовательно, величина оценки (8.2.3), а значит и возмущения собственного значения для $k=1$, $\lambda(q^*) = 0$ будет наименьшим, что согласно теории мажоризации собственных значений и векторов означает, что $c\{M_k\}$ для точки $q = q^*$ будет наименьшим (здесь предполагается очевидное утверждение, что мы всегда имеем возможность подобрать A_ε так, чтобы возмущение λ_1 будет наибольшим из всех собственных значений).

Теорема 8.4 доказана.

Замечание к теореме 8.4

Согласно доказательству теоремы 8.4 следует, что если $\lambda(q^*) = j_0$, т. е. чисто мнимая величина, что при переходе через мнимую ось собственного значения $\lambda(q^*)$ (и сопряженного $\lambda(q^*) = \bar{j}_0$) величина $|S_1|$ в общем случае не равна 1, а следовательно, в этом случае (8.2.1) не имеет место.

Теорема 8.5. Если в фазовой плоскости особая точка (q^*) такая что:

1) Имеет места, что мнимые собственные значения матрицы линейной части;

2) $c\{M(q^*)\} = \min c\{M(q)\}$, то она является особой точкой типа сложный параметра $q = q^*$ бифуркационное, и при этом появляется или исчезает предельный цикл в окрестности этой особой точки, т. е. имеет место бифуркация Хопфа.

Доказательство. По условию 1) особая точка (q^*) является негиперболической, и следовательно это точка либо типа «центр», либо типа «сложный фокус», а поскольку при этом выполняется условие 2) о минимальной негрубости.

Окрестности особой точки, то очевидно она может быть только типа «сложный фокус», а значит имеет место бифуркация возникновения (исчезновения) предельного цикла, которая назы-

вается бифуркацией Пуанкаре—Андрона—Хопфа или как принято в научной литературе бифуркация Хопфа.

Простейший пример бифуркации Хопфа наблюдается для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -[-q + (x^2 + y^2)]x - \omega y, \\ \dot{y} &= -[-q + (x^2 + y^2)]y + \omega x, \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

линейная часть которого

$$[\dot{x}, \dot{y}]^T = A[x, y]^T,$$

где матрица $A = \begin{bmatrix} q & -\omega \\ \omega & q \end{bmatrix}$,

а собственные значения $\lambda_{1,2} = q \pm j\omega$.

При переходе значения через нулевое значение q наблюдается бифуркация Хопфа, собственные значения пересекает мнимую ось, а величина $c\{M\} = 1$.

Теорема 8.6. Для того, чтобы в области G n -мерной динамической системы при значении параметра $q = q^*$, $q \in R^p$, возникла бифуркация топологической структуры, необходимо и достаточно, чтобы:

1) либо в рассматриваемой области G существует негиперболические особые точки, или орбитально-неустойчивые предельные циклы, для которых имеет место:

$$c\{M(q^*)\} = \min_q \sum_{i=1}^p c_i\{M(q^*)\}, \quad (8.2.5)$$

где p — количество общих точек или предельных циклов в области G ;

2) либо в области G динамической систем имеются гиперболические точки или предельные циклы, для которых выполняется условие:

$$c\{M(q^*)\} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p c_i\{M(q^*)\} \rightarrow \infty. \quad (8.2.6)$$

Доказательство.

Необходимость. Как известно бифуркация означает, что при переходе через точку $q = q^*$ происходит скачкообразное изменение картины характера движений фазового пространства в области G .

Поэтому, если имеет место случай 2), то оно является и достаточным условием бифуркации, т. к. при этом происходит разрыв оператора векторного поля (фазового потока) $\dot{x} = F(x)$.

Этот случай соответствует переходу двух кратных действительных собственных значений в комплексно-сопряженные и наоборот (жорданова форма матрицы линейной части A не диагональна).

Если же этот случай не выполняется, тогда необходима выполнения случая 1) и будем иметь негиперболические особые точки или орбитально-неустойчивые предельные циклы при переходе через $q = q^*$, такие, что должны скачком изменить фазовые потоки в G .

Пусть в G имеется какая-либо негиперболическая особая точка. Тогда в этой точке, либо одна из собственных значений равно нулю, либо чисто мнимое $j\omega$.

В таком случае, как доказано по теоремам 8.4 и 8.5 в точке $q = q^*$ выполняется условие

$$c\{M_1(q^*)\} = \min_q c\{M_1(q)\},$$

и в окрестности этой особой точки происходит какая-либо локальная бифуркация. И для области G условие 1) достаточно очевидно, происходит либо локальная бифуркация, если в некоторых особых точках выполняется это условие, либо глобальная бифуркация во всей области G , если условие 1) выполняется во всех особых точках этой области.

При выполнении условия 2) теоремы, очевидно в окрестности $q = q^*$ происходит глобальная бифуркация, если в G имеется некоторое множество особых точек, либо локальная бифуркация если в G только одна особая точка и происходит изменение характера особой точки, либо «седла» в «узел» и наоборот, либо из устойчивого в неустойчивый «фокус» и наоборот.

Теорема доказана.

Относительно сепаратрис «седла» (третье условие критерия грубости по Андронову—Понтрягину) справедлива теорема.

Теорема 8.7. Для существования сепаратрисы из «седла» в «седло», необходимо и достаточно, чтобы в такой паре особых точек выполнялось условие

$$c\{M_1\} = c\{M_2\}. \quad (8.2.7)$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть для каких-либо двух особых точек типа «седло» существует сепаратриса из седла в седло.

Тогда, при $n = 2$ (на фазовой плоскости) для первой особой точки:

$$\dot{y}/\dot{x} = k = F_2(x, kx)/F_1(x, kx) = f_1(k),$$

или $f_1(k) - k = 0$ уравнения сепаратрисы, где k — угловой коэффициент сепаратрисы в особой точке:

$$F_2'(x, kx)/F_1'(x, kx) = f_2(k), f_2(k) - k = 0.$$

По предположению: $f_1(k) = f_2(k)$, или

$$F_2(x, kx)/F_1(x, kx) = F_2'(x, kx)/F_1'(x, kx) = f(k). \quad (8.2.8)$$

Для функций F_1, F_2, F_1', F_2' общего вида соотношение (8.2.8) при любом x возможно, только в том случае, если $F_1 = \partial F_1'$, $F_2 = \partial F_2'$, где ∂ — постоянная неравная нулю, т. е. $A_1 = \partial A_2$, следовательно $c\{M_1\} = c\{M_2\}$.

Достаточность.

Если выполняется (8.2.7), то очевидно $A_1 = \partial A_2$, или $F_1 = \partial F_1'$, $F_2 = \partial F_2'$, откуда получаем (8.2.8).

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 8.7 доказана для случая $n = 2$. При $n \geq 3$ можно поступить аналогично, последовательно рассматривая сечения фазового пространства плоскостями параллельными плоскостям системы координат.

Доказанные в этом разделе теоремы позволяют использовать показатели грубости $c(\sigma)$ для определения бифуркаций в динамических системах определением матриц линейной части (или матриц монодромии) и вычислением $c(\sigma)$ в особых точках или на предельных циклах.

Глава 9

Приложения теории и метода топологической грубости к исследованиям грубости, бифуркаций и хаоса синергетических систем

В главе 8 изложены основы теории и метода «топологической грубости», позволяющей исследовать грубость и бифуркации динамических систем.

В данной главе представлены приложения разработанной теории и метода «топологической грубости» к исследованию грубости, бифуркаций и хаоса синергетических систем различной физической природы. При этом некоторые уравнения и положения исследований могут иметь повторения из ряда предыдущих глав настоящей работы, но для цельности изложения результатов данной главы автор допустил эти повторения.

Система (странный аттрактор) Лоренца

Как известно, впервые открытие А. Пуанкаре (1892 г.) о том, что в некоторых механических системах, описываемых детерминированными уравнениями, могут возникнуть хаотические колебания, подтвердил метеоролог Е. Лоренц, который в 1963 г. предложил и исследовал математическую модель тепловой конвекции в атмосфере. Этой работой Лоренц открыл один из первых примеров детерминированного хаоса в диссипативных системах, который в его честь носит название *аттрактора (странного аттрактора) Лоренца*.

В безразмерной форме уравнения Лоренца принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - \beta z,\end{aligned}\tag{9.1.1}$$

где $x, y, z \in R$ — переменные состояния системы, x — пропорциональна амплитуде скорости движения, а переменные y, z отражают распределение температуры в конвективном кольце, σ, ρ — положительные параметры, связанные с числами Прандтля и Рейлея, $\beta > 0$ — параметр, характеризующий геометрию системы.

Возьмем за основу при исследовании уравнения и аттрактора Лоренца значения параметров σ и ρ , использованные им в работе, т. е. $\sigma = 10, \beta = 8/3$, а параметр ρ будем варьировать.

Тогда система (9.1.1) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - (8/3)z.\end{aligned}\tag{9.1.2}$$

Исследованиями системы (9.1.2) с использованием меры грубости C подтверждены основные бифуркации этой системы, описанные в литературе и отвечающие условиям критериев, приведенных в главе 8.

Действительно (рис. 9.1), при $\rho \rightarrow 0, c(\rho) \rightarrow 2.6$, далее по мере увеличения ρ значение $c(\rho)$ для существующей единственной $OT_1(0,0,0)$ типа устойчивый «узел» (собственные значения матрицы линейной части $\lambda_{1,2} = -5.5 \pm [20.25 + 10\rho]^{1/2}; \lambda_3 = -8/3$ будет уменьшаться, достигнув значения 2.11 при $\rho = r_1 = 1.0$. При $\rho > r_1 = 1.0$ в системе (9.1.2) появляются две симметричные относительно OT_1 особые точки $OT_2(a = [(8/3)(\rho - 1)]^{1/2}, a, \rho - 1)$ и $OT_3(-a, -a, \rho - 1)$ типа устойчивые «фокусы», собственные значения матриц линейной части в которых удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\lambda^3 + \frac{41}{3}\lambda^2 + \frac{8}{3}(10 + \rho)\lambda + \frac{160}{3}(\rho - 1) = 0,\tag{9.1.3}$$

а средний показатель $\bar{c} = \frac{1}{3} \sum_1^3 c_1(\rho)$ будет равен 2.11. Особая точка OT_1 при $\rho > r_1$ превращается в OT типа «седлоузел».

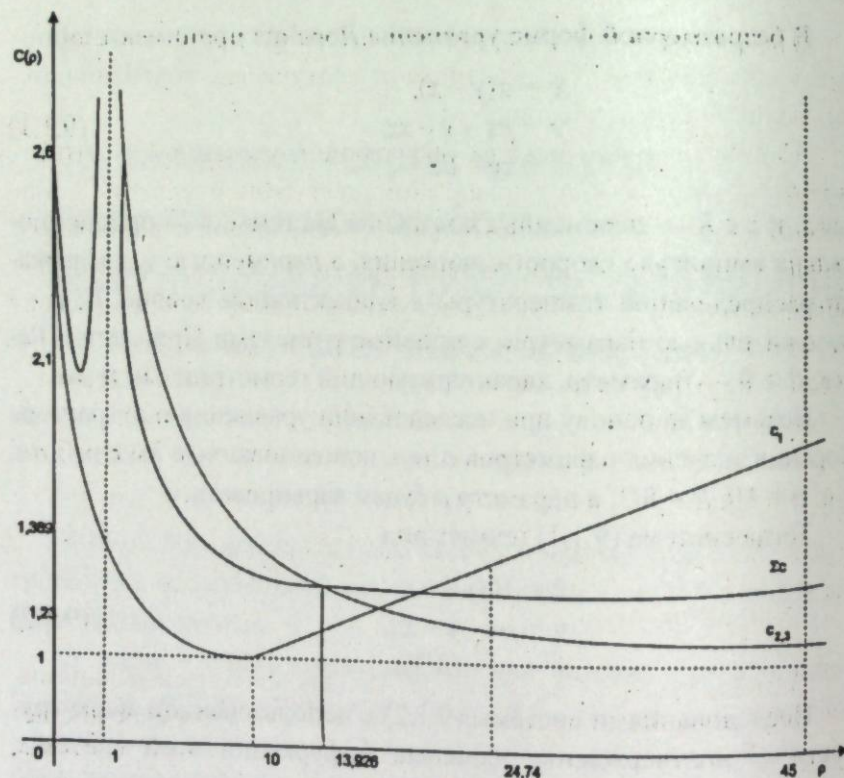


Рис. 9.1. График зависимости $C(\rho)$ для системы Лоренца

Далее, при $\rho \rightarrow r_f = 1.345$ значение $\bar{c} \rightarrow \infty$ и в системе происходит бифуркация изменения типа OT_2 и OT_3 , а именно: последние превращаются в OT типа устойчивые «фокусы». При $\rho = r_2 = 13.926$ показатель c достигает локального минимума, равного 1.372, а в системе (9.1.2) возникает метастабильный хаос, когда аттракторы OT_2 и OT_3 из глобальных превращаются в локальные аттракторы с некоторыми областями притяжения. Далее, при $\rho = r_4 \approx 24.74$, $\bar{c} = 1.389$ происходит бифуркация Пуанкаре—Андропова—Хопфа, когда собственные значения $\lambda_{2,3}$ в $OT_{2,3}$ становятся чисто мнимыми, равными $\pm j 9,624$. Значение параметра $\rho = r_4$ привлекает большое внимание исследователей тем, что при $\rho > r_4$ в системе (9.1.2) возникает интересное явление, названное странным аттрактором Лоренца.

В ограниченной области пространства R^3 вокруг неустойчивых «седлофокусов» $OT_{2,3}$ возникают хаотические колебания, охватывающие седловую точку OT_1 .

Остальные точки и виды бифуркаций, указанные в литературе (r_3 , r_∞ , r_a , r_c и т. п.) пока с помощью данной меры не обнаружены и требуют дополнительного исследования, возможно с привлечением каких-либо нелинейных оценок. Но в то же время обнаружена еще одна точка, заслуживающая интереса, а именно: точка $\rho = r_m = 45$, где показатели $c(\rho)$ в точках $OT_{2,3}$ достигают абсолютного минимума, равного 1.23. В этой точке следует ожидать наибольшей «стабильности» странного аттрактора Лоренца, т. е. малые возмущения в системе (9.1.2) приводят к минимальным изменениям области существования странного аттрактора.

Система Рёсслера

Система Рёсслера представляет модель хаотической динамики химических реакций, протекающих в некоторой емкости с перемешиванием и описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + 0,2 y, \\ \dot{z} &= 0,2 + z(x - \mu). \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

где μ — варьируемый параметр.

Известно, что бифуркации в данной системе происходят через последовательные удвоения периода цикла. Для вычислений матрицы монодромии цикла используется метод известный под названием «метод стрельбы».

Заданы начальные данные: период $T = 1,0$, $x = -1$, $y = -1$, $z = 1,2$, интервал значений для μ от 0 до 11.

Полученная зависимость показателя грубости $C\{M\}$ от параметра μ представлена на рис. 9.2.

Из графика на рис. 9.2 видно, что полученный результат на основе метода топологической грубости полностью соответствует результатам, приведенным в литературе.

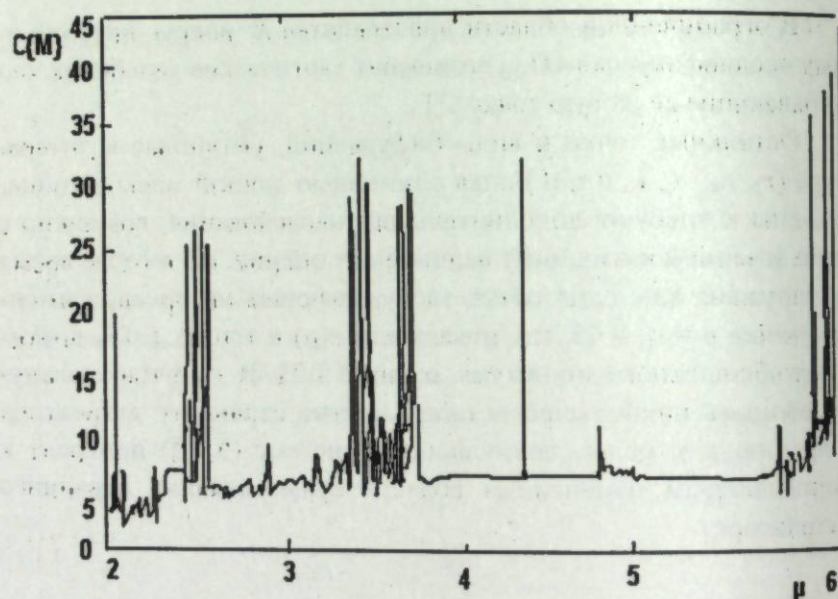


Рис. 9.2. График зависимости $C\{M\} = f(\mu)$ для системы Рёсслера

Система Белоусова—Жаботинского

Эта система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1 a y + k_2 a x - k_3 x y - 2k_4 x^2, \\ \dot{y} &= -k_1 a y - k_3 x y + 1/2 f k_5 b z, \\ \dot{z} &= 2k_2 a x - k_5 b z, \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

где x, y, z — химические вещества $\text{HBrO}_2, \text{Br}^-, \text{Ce}^{4+}$ соответственно; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — скорости изменений этих веществ; a — вещества BrO_3^- , b — органические вещества, которые окисляются; k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 — коэффициенты реакций; f — безразмерный параметр реакций; значения коэффициентов следующие: $k_1 = 1,28$; $k_2 = 8,0$; $k_3 = 8,0 \cdot 10^5$; $k_4 = 2,0 \cdot 10^3$; $k_5 = 1,0$ (в единицах $\text{моль}^{-1} \text{лс}^{-1}$); концентрации веществ — $a = 0,06 \text{ М}$; $b = 0,020 \text{ М}$; интервал изменений параметра f : $0,5 < f < 2,4$.

Система Белоусова—Жаботинского — это химическая реакция, где возникают колебания концентрации веществ и представляет собой каталитическое окисление малоновой кислоты

$\text{CH}_2(\text{COOH})_2$. Реакция происходит в водном растворе при простом смещении следующих реагентов:

$$[\text{H}^+] = 2,0 \text{ моль}; [\text{CH}_2(\text{COOH})_2] = 0,28 \text{ моль};$$

$$[\text{BrO}_3^-] = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ моль}; [\text{Ce}^{4+}] = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ моль}.$$

Реакция наблюдается по изменению окраски раствора, вызванному изменениями концентрации Ce^{4+} от бесцветной до желтой.

В системе (9.1.5) в зависимости от f существуют две или три особые точки (ОТ), одна из которых — начало координат. Особые точки $\text{OT}_i (x_0, y_0, z_0)$, в которых правые части уравнений (9.1.5) равны нулю, определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} x_0 &= [6 \cdot 10^{-5} (1-f) - 0,48 \cdot 10^{-7}] \pm \\ &\pm \{ [6 \cdot 10^{-5} (1+f) - 0,48 \cdot 10^{-7}]^2 - 0,1152 \cdot 10^{-10} (1+f) \}^{1/2}, \\ y_0 &= 0,48 f x_0 / (0,078 + 8 \cdot 10^5 x_0), \\ z_0 &= 0,48 x_0. \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

Результаты исследований системы (9.1.6) с использованием показателя грубости $C\{M\}$ показаны на рис. 9.3.

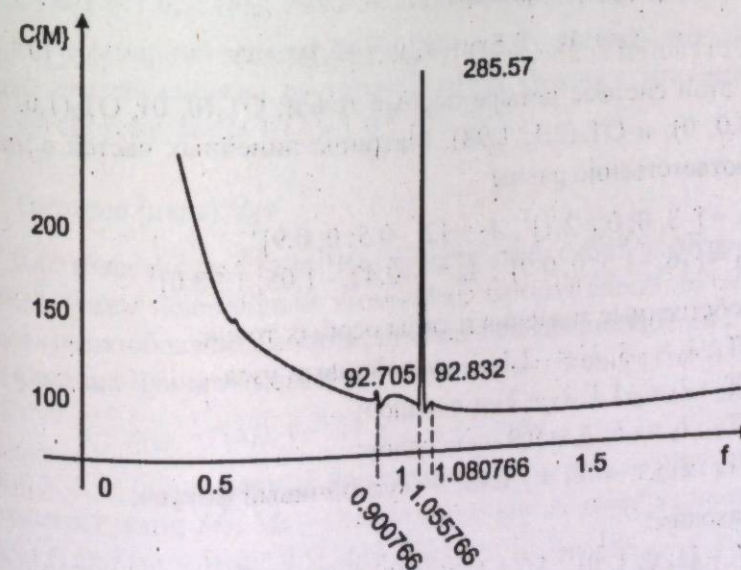


Рис. 9.3. Зависимость показателя грубости $C\{M\}$ от параметра f системы Белоусова—Жаботинского

В реакции Белоусова—Жаботинского обнаружены разнообразные колебания, включая хаотические. Последние происходят при $0.9208 < f < 1.0808$, бифуркации при $f = 0.9208$, $f = 1.0808$. При этом, максимальная грубость колебаний наблюдается при $f \approx 2.0$.

Система «хищник—жертва»

Впервые эта система была рассмотрена итальянским математиком В. Вольтерра. В двумерном случае эта система описывается уравнениями

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy, \quad \dot{y} = \kappa \beta xy - ty, \quad (9.1.7)$$

где x, y — численности популяций соответственно жертв и хищников, α, β — мальтузианская и трофическая постоянные жертвы, показывающие соответственно скорость роста количеств жертв при отсутствии хищников и скорость потребления жертв одним хищником, κ — к.п.д. переработки биомассы жертвы в биомассу хищника, t — коэффициент смертности хищника.

Рассматривается пример:

$$\dot{x} = -3x + 4x - 0.5xy - x, \quad \dot{y} = -2.1y + xy. \quad (9.1.8)$$

В этой системе четыре особые точки: $OT_1(0, 0)$; $OT_2(1.0, 0)$; $OT_3(3.0, 0)$; и $OT_4(2.1, 1.98)$. Матрицы линейных частей в этих ОТ соответственно равны

$$A_1 = [-3, 0; 0, -2.1]^T, \quad A_2 = [2, -0.5; 0, 0.9]^T, \\ A_3 = [-6, -1.5; 0, 0.9]^T, \quad A_4 = [-0.42, -1.05; 1.98, 0]^T.$$

Собственные значения и типы особых точек:

$$OT_1: \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2.1 \text{ — «устойчивый узел»};$$

$$OT_2: \lambda_1 = -1.1, \lambda_2 = 2 \text{ — «седло»};$$

$$OT_3: \lambda_1 = -6, \lambda_2 = 0.9 \text{ — «седло»};$$

$$OT_4: \lambda_{1,2} = -0.21 \pm j 1.43, \text{ — «устойчивый фокус»}.$$

Находим:

$$M_1 = [1, 0; 1, 0]^T, \quad M_2 = [1, 0.159; 0, 0.987]^T,$$

$$M_3 = [1, 0.2124; 0, -0.977]^T, \quad M_4 = [0.389, 0.737; 0.924, -0.676]^T.$$

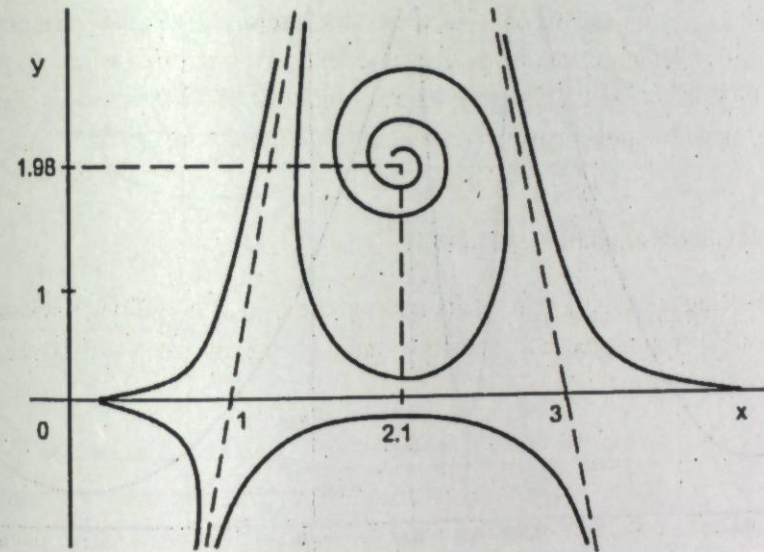


Рис. 9.4. Фазовый портрет системы «хищник—жертва»

Значения $C\{M_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$C\{M_1\} = 1.0; \quad C\{M_2\} = 1.174; \quad C\{M_3\} = 1.241; \quad C\{M_4\} = 1.421.$$

По суммарной оценке $\frac{1}{4} \sum C\{M_i\} = 1.21$ видно, что данная экологическая система достаточно груба, близка к максимально грубой системе, когда $\frac{1}{i} \sum C\{M_i\} = 1$.

Система (цепь) Чуа

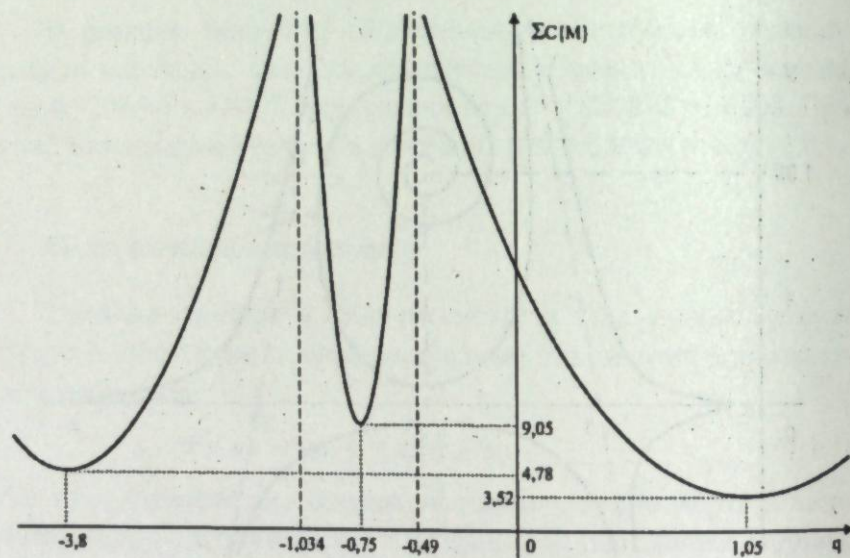
Как известно, система Чуа представляет собой электронную цепь с одним нелинейным элементом, которая способна генерировать разнообразные, в частности, хаотические колебания.

Система Чуа описывается уравнениями:

$$\dot{x} = p(y - f(x)), \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = -qy, \quad (9.1.9)$$

где x, y, z — безразмерные переменные цепи; p, q — постоянные параметры цепи; M_1, M_0 — геометрические параметры нелинейности $f(x)$; $f(x) = M_1 x + 0.5(M_1 - M_0)(x + 1) - |x - 1|$.

При $p = 9$, $q = 14.3$, $M_1 = -6/7$, $M_0 = 5/7$, в системе (9.1.9) наблюдаются хаотические колебания.

Рис. 9.5. Зависимость $C\{M\}$ от параметра q в системе Чуа

В данном случае имеем три особые точки (ОТ): $ОТ_1(0,0,0)$; $ОТ_{2,3}(\pm 11/6, 0, 11/6)$.

Исследованиями установлены, что хаотические движения обнаруживаются и при значениях $q: -1,034 < q < -0,49$, а при $q = -3,8$ и $q = 1,05$ наблюдается максимальная грубость движений в системе (9.1.9) (минимум на рис. 9.5).

Бифуркация Хопфа

Эту бифуркацию иногда называют бифуркацией Пуанкаре—Андронova—Хопфа по именам первых исследователей этого типа бифуркаций. Данная бифуркация есть бифуркация возникновения (исчезновения) предельного цикла в синергетической системе.

Простейший пример бифуркации Хопфа наблюдается для двумерной системы:

$$\dot{x} = -[-q + (x + y)]x - \omega y, \quad \dot{y} = -[-q + (x + y)]y + \omega x, \quad (9.1.10)$$

линейная часть которой $[\dot{x}, \dot{y}]^T = A[x, y]^T$, где $A = [q, -\omega; \omega, q]^T$, а собственные значения $\lambda_{1,2} = q \pm j\omega$.

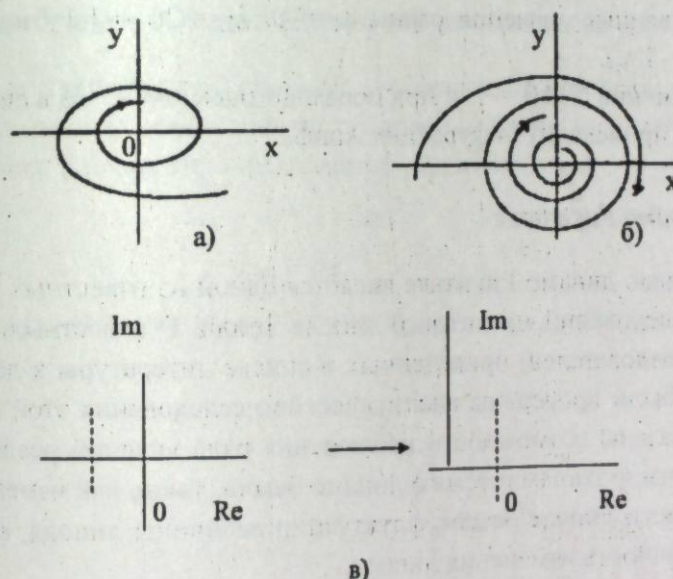


Рис. 9.6. Бифуркация Хопфа в системе (9.1.10)

При переходе значения q через нулевое значение $q = 0$, наблюдается бифуркация Хопфа (см. рис. 9.6). При этом, собственные значения пересекают мнимую ось, а величина $C\{M\} = 1$.

Более сложный пример бифуркации Хопфа наблюдается в трехмерной системе, называемой *системой Лизгорда*:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2a-1)x - y + xz, \\ \dot{y} &= x + (2a-1)y + yz, \\ \dot{z} &= -az - (x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned} \quad (9.1.11)$$

В этой системе, моделирующей турбулентность в жидкости, возникает бифуркация Хопфа при $a_0 = 1/2$ и $T_0 = 2\pi$.

Система имеет две особые точки $ОТ_1(0,0,0)$ и $ОТ_2(0,0,-a)$.

Матрицы линейной части в особых точках $ОТ_1$ и $ОТ_2$ соответственно

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2a-1 & -1 & 0 \\ 1 & 2a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

а собственные значения равны $\lambda_1 = -a$, $\lambda_{2,3} = 2a - 1 \pm j$ и $\lambda_1 = a$, $\lambda_{2,3} = a - 1 \pm j$.

Величина $C\{M\} = 1$; и при переходе значения $a = 1/2$ в системе (9.1.11) происходит бифуркация Хопфа.

Динамо Рикитаке

Модель динамо Рикитаке является одной из известных моделей исследований магнитного диполя Земли. В известных работах исследователей, приведенных в списке литературы к данной работе были проведены аналитические исследования этой модели. Показаны возможности наблюдения ряда явлений реального магнитогидродинамического динамо Земли, такие как изменения полярности диполя Земли, флуктуации величины диполя, квазипериодичность изменения диполя.

Модель динамо Рикитаке описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu x + zy, \\ \dot{y} &= -\alpha x - \mu y + xz, \\ \dot{z} &= 1 - xy, \end{aligned} \quad (9.1.12)$$

где α, μ — положительные параметры, $\alpha = \text{const} = \mu(k^2 - k^{-2})$, k — коэффициент.

Исследуется случай, когда $k = 2$, $\alpha = 3,75 \mu$.

В этом случае, система (9.1.12) в фазовом пространстве имеет две особые точки типа «неустойчивый фокус».

$$\text{OT}_1: (x_0 = 2, y_0 = 0,5, z_0 = 4\mu),$$

$$\text{OT}_2: (x_0 = -2, y_0 = -0,5, z_0 = 4\mu).$$

Собственные значения в особых точках:

$$\lambda_1 = -2\mu, \lambda_{2,3} = \pm j 2,0615.$$

Вычислением $C\{M\}$ при различных значениях μ обнаруживается, что при $\mu = 1,1$ и $\mu \rightarrow 0$, $C\{M\} = 1$, что подтверждает выводы о возникновении при значении $\mu = 1,1$ периодических движений в системе (9.1.12), т. е. происходит бифуркация Хопфа.

Отображение Хенона (Энона) или отображение «подкова»

В исследованиях Хенона показывается, что свойствами, аналогичными системе Лоренца, обладает простое дискретное отображение плоскости, определяемое уравнениями:

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2, \quad (9.1.13)$$

$$y_{n+1} = bx_n,$$

где a и b — параметры отображения.

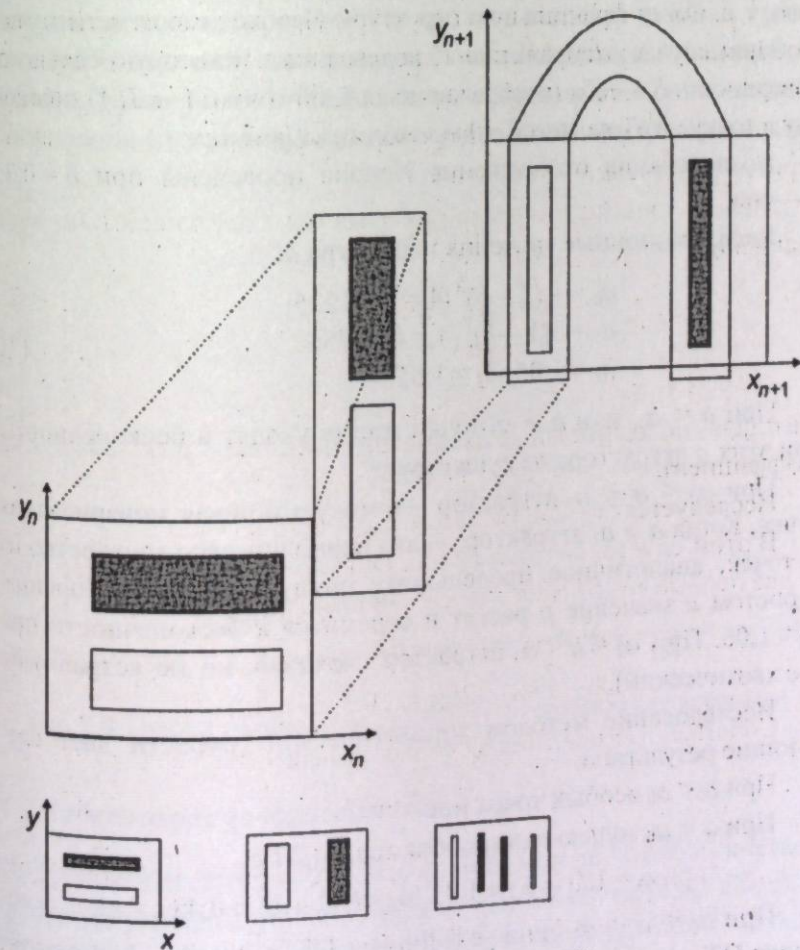


Рис. 9.7. Отображение «подкова»

Численные эксперименты проведены при $a = 1,4$; $b = 0,3$ (рис. 9.7).

При этом отображении производятся вытягивание, сжатие и складывание, которые после большого числа итераций отображения приводят к фрактальной структуре:

В зависимости от начальной точки, последовательности точек, получаемые путем итераций отображения, либо уходят в бесконечность, либо стремятся к аттрактору.

Аттрактор, к которому стремится точка отображения, представляет произведение одномерного многообразия на канторово множество, т. е. имеет фрактальную структуру. Необходимо отметить, что в общем случае отображение T , переводящее некоторую секущую поверхность S в себя (отображение каждой точки $A \rightarrow T(A)$ переводит в точку на S), является *отображением Пуанкаре*.

Исследования отображения Хенона проведены при $b = 0,3$; a — var.

Бифуркационные значения параметра a :

$$a_0 = -(1 - b)^2 / 4 = -0,1225;$$

$$a_1 = 3(1 - b)^2 / 4 = 0,3675;$$

$$a_2 \approx 1,06; a_3 \approx 1,55.$$

При $a < a_0$, или $a > a_3$ точки всегда уходят в бесконечность, при этих a аттрактора не существует.

При $a_0 < a < a_1$ аттрактор — это устойчивая инвариантная точка. Когда $a > a_1$ аттрактор — это периодическое множество из p точек, аналогичное предельному циклу в системе Лоренца. С ростом a значение p растет и стремится к бесконечности при $a_2 \approx 1,06$. При $a_2 < a < a_3$ аттрактор сложный, но не «странный» (не хаотический).

Исследование методом топологической грубости дает следующие результаты:

При $a < a_0$ особых точек нет.

При $a = a_0$ только одна особая точка (ОТ):

$$x_0 = 1/(1 - b) \approx 1,43, y_0 = b/(1 - b) \approx 0,43.$$

При $a_0 < a < a_1$ одна устойчивая ОТ, а другая — неустойчивая ОТ.

Матрица состояния ОТ:

$$A_0 = [-2ax_0, 1; b, 0]^T,$$

Координаты ОТ:

$$x_0 = 1/2a [-0,7 \pm \sqrt{(0,49 + 4a)}], y_0 = bx_0.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = ax_0 \pm \sqrt{(a^2 x_0^2 + b)}.$$

График зависимости $\sum C\{M\} = \frac{1}{2}[\sum C_i^2\{M\}]^{1/2}$, $i = 1, 2$ от параметра a приведен на рис. 9.8.

Исследования показывают, что локальный минимум $\sum C\{M\} = 1$ или $\sum C\{M\} = 0,707$ не достижим при конечном a , а это согласуется с известными результатами Хенона и др.

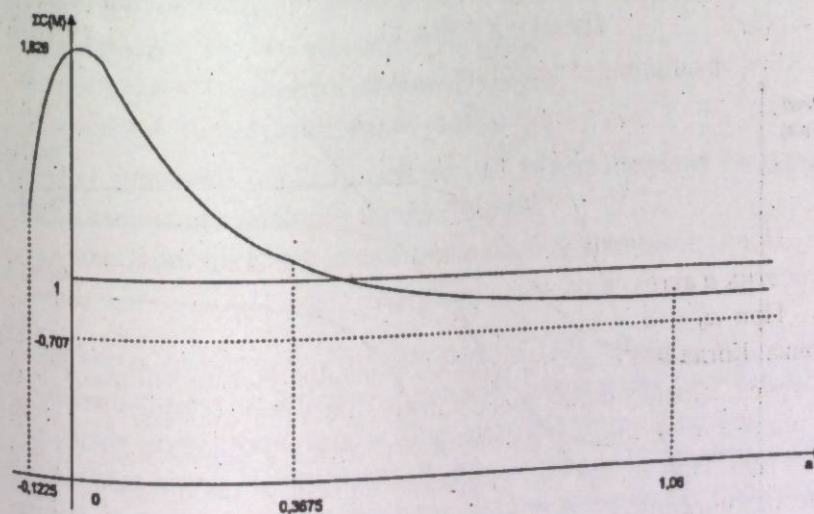


Рис. 9.8. График зависимости $\sum C\{M\} = f(a)$ отображения «подкова»

Модели экономических систем

Положения теории и возможности метода «топологической грубости» успешно апробированы на различных моделях синергетической экономики, таких как: усовершенствованная модель Калдора; модель Кейнса; модель Салоу; модель типа Шумпетера.

Здесь, рассмотрим две модели экономических систем: усовершенствованную модель Калдора и модель типа Шумпетера.

Усовершенствованная модель Калдора характеризует деловые циклы и представляется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha [R(x, z) + I(x, y) - x], \\ \dot{y} &= I(x, y) - I_0, \end{aligned} \quad (9.1.14)$$

где x, y, z — соответственно переменные национального дохода, капитала и благосостояния; $R(x, z), I(x, y)$ — соответственно функции расходов на потребление и объемов инвестиций; I_0 — «замещение» инвестиций; α — коэффициент адаптации цикла (скорость установления).

Функция расходов на потребление:

$$R(x, z) = r(z)x + S(z), \quad (9.1.15)$$

а функция сбережений:

$$T(x, z) = x - R(x, z). \quad (9.1.16)$$

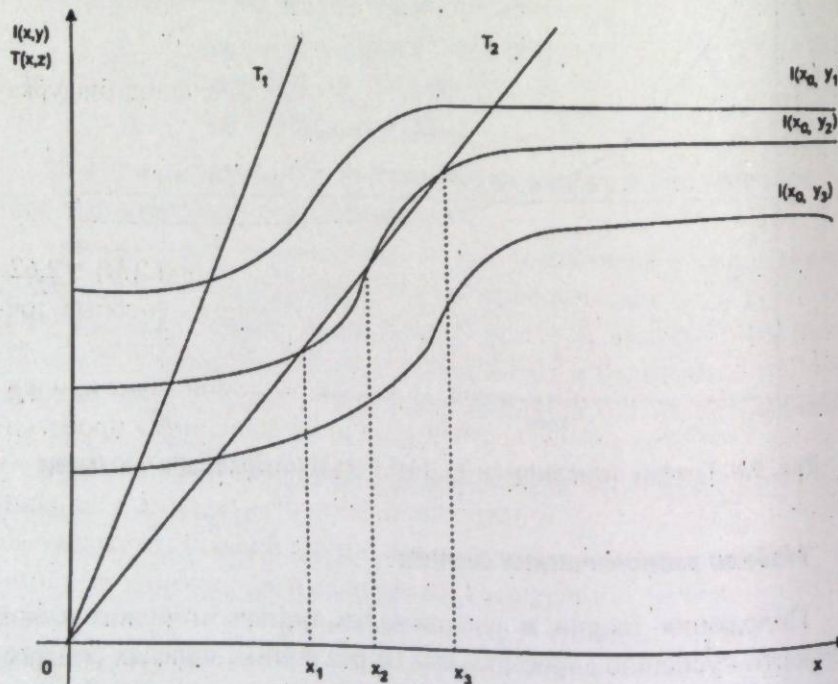


Рис. 9.9. Точки равновесия системы (9.1.14)

Функция инвестиций $I(x, y)$ имеет вид логистической функции, показанной на рис. 9.9.

Состояния равновесия системы (9.1.14) удовлетворяют соотношениям:

$$T(x, z) = I(x, y), I(x, y) = I_0. \quad (9.1.17)$$

Из рис. 9.9 очевидно, что в системе (9.1.14) возможны либо одна, либо три точки равновесия (особые точки (ОТ)).

Полагая $R(x, z) = \text{const}$, $I(x, y) = \beta$ и принимая во внимание функции $I(x, y)$, $T(x, z)$ соответствующими рис. 9.9, будем иметь следующие матрицы линейной части (9.1.14) в окрестностях ОТ:

$$A_{1,3} = [-1, -1; 0, -1]^T, A_2 = [\beta - 1, -1; \beta, -1]^T. \quad (9.1.18)$$

Соответственно в особых точках (x_1, x_3) будем иметь «устойчивый узел», а в особой точке (x_2) :

- при $0 < \beta < 2$ — «устойчивый фокус»;
- при $2 < \beta < 4$ — «неустойчивый фокус»;
- при $\beta > 4$ — «неустойчивый узел».

При значении $\beta = 2$ в системе (9.1.14) происходит бифуркация рождения предельного цикла (Хопфа).

Характеристическое уравнение в особой точке (x_2) :

$$\lambda^2 - \lambda(\beta - 2) + 1 = 0,$$

а показатель грубости $C\{M\}$ будет равен $C\{M\} = \min_{\beta} C\{M\} \approx 2,62$.

Возможные устойчивые состояния равновесия (особые точки) имеют форму катастрофы (бифуркаций) типа «сборка».

Модель типа Шумпетера. В рассматриваемой модели, идентичной частному и государственному промышленному производству, исследуется поведение инвестора (и инноватора), а также их стратегия в условиях конкуренции, нечувствительные к влияниям макроэкономики и инвестициям, «индуцированным спросом». На этой модели исследуются неравновесные движения экономических систем индустрий стран и регионов.

Изменения стратегий инвестиций от экспансионного характера к рационализационным и обратно вызывают промышленные флуктуации. В поисках монопольных прибылей инноваторы и

предприниматели-пионеры действуют в направлении, противоположном циклическому движению инвестиционных стратегий.

Таким образом, рассматривается модель типа Шумпетера, описываемая системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= sh(y + kx) - xch(y + kx) = P(x, y, k), \\ \dot{y} &= -\mu[a_0 sh(\delta x) + (y - a_1)ch(\delta x)] = Q(x, y, \gamma), \end{aligned} \quad (9.1.19)$$

где x, y — соответственно переменные индекса конфигураций инвесторов и «альтернатора» — переключателя предпочтений инвестора между инвестициями экспансионного и рационализационного типов; k — параметр координатора, отражающий интенсивность взаимодействия индивидуальных инвесторов; $sh(\cdot), ch(\cdot)$ — функции гиперболических синуса и косинуса; $\mu = M/\delta$ — относительный параметр, M — параметр стратегической гибкости инвесторов относительно изменения стратегии от экспансионной к рационализационной и обратно, δ — параметр временного масштаба, определяющий реальное время $t = \tau / 2\delta$, где τ — переменная времени в системе (9.1.19); γ — параметр скорости тенденции к повороту стратегии; a_1 — параметр влияния стратегии — положительный при экспансионном и отрицательный при рационализационном, выборе; a_0 — амплитуда стратегического выбора.

Условия положений равновесия (особых точек, ОТ):

$$P(x_0, y_0, k) = 0, Q(x_0, y_0, \gamma) = 0,$$

определяют либо одну, либо три, либо пять особых точек, которые соответствуют конкретным параметрам системы (9.1.19).

Установлено, что в системе (9.1.19) возможны бифуркации Хопфа с возникновением предельных циклов.

В частности, при значениях параметров: $a_0 = 0,5; a_1 = 0; \gamma = 4,0; \mu = 0,5$, имеем единственную особую точку в начале координат $x_0 = y_0 = 0$.

Матрица якобиана имеет вид:

$$A_0 = [k - 1, 1; -1, -0,5]^T.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda(1,5 - k) - 0,5k + 1,5 = 0,$$

а собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = (k - 1,5) / 2 \pm 1/2 \sqrt{[(k - 1,5)2 + 2k - 6]}.$$

Если в качестве управляющего параметра принять параметр k , то при значениях $k = 1,5; k = 2,5; k = 3$ происходят бифуркации в системе (9.1.19). При этом, при $k = 1,5$ наблюдается бифуркация перехода с «устойчивого фокуса» на «неустойчивый фокус». При $k = 2,5$ происходит бифуркация изменения топологии пространства (x, y) , ОТ $(0,0)$ меняется от «неустойчивого фокуса» на «неустойчивый узел», а при $k \geq 3$ происходит переход на «седло».

Результаты исследования грубости системы (9.1.19) вблизи ОТ $(0,0)$ показаны на рис. 9.10.

Как видно из рисунка, при $k = 0,5$ система будет максимально грубой с $C\{M\} = 1$, или иначе, моделируемая экономическая система будет при этом с наилучшей устойчивостью.

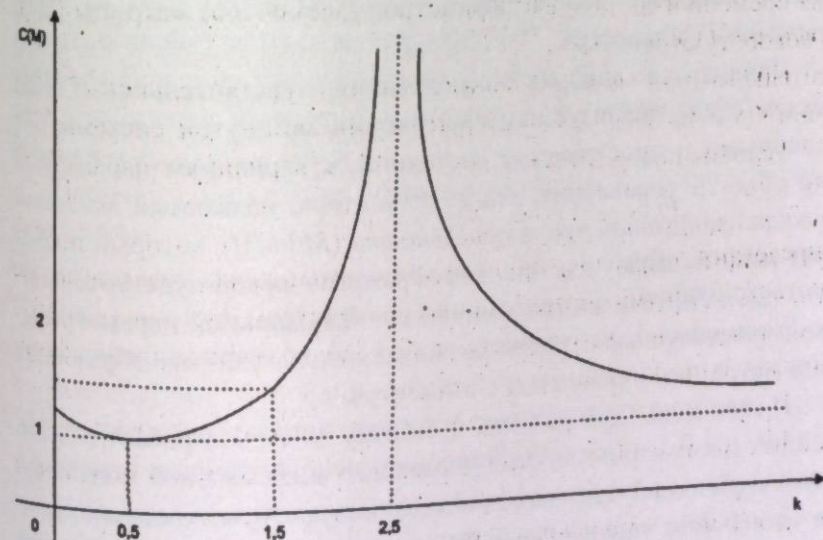


Рис. 9.10. График зависимости $C\{M\} = f(k)$

Заклучение

В монографии рассмотрены вопросы чувствительности, робастности и грубости динамических систем.

Вопросам анализа чувствительности и синтеза модально-робастных систем посвящены первые четыре главы монографии, в которых представлен метод модальной чувствительности анализа и синтеза малочувствительных систем управления, базирующийся на аппарате теории модального управления.

Так, для многомерных систем ($r \geq 2$) неединственность матрицы K , доставляющей заданный спектр мод системе, можно использовать для достижения малой чувствительности системы к вариациям ее параметров. Неединственность матрицы K выражается в свободе выбора параметров (элементов) матрицы H в уравнении Сильвестра.

Приводится аппарат исследования чувствительности мод систем с диагонализруемыми матрицами замкнутой системы F , заданными в пространстве состояний, к вариациям параметров как объекта управления, так и регулятора, названный методом функций модальной чувствительности (МФМЧ), который позволяет решить задачу как анализа параметрической чувствительности, так и синтеза систем минимальной модальной параметрической чувствительности алгоритмически однотипным образом на базе матричного уравнения Сильвестра.

Предложены два подхода к синтезу модально-робастных линейных многомерных систем управления минимальной модальной параметрической чувствительности, построенные на основе метода модального управления и метода нелинейного программирования Нелдера—Мида, с минимизацией по множеству матриц H в уравнении Сильвестра, соответственно функционалов чувствительности в виде евклидовой нормы матрицы модальной чувствительности S_λ и числа обусловленности модальной матрицы M .

Первый подход, названный подходом МФМЧ, рекомендуется к применению при конкретно известных малых (до 30+40% от номинала) вариациях параметров.

Второй подход синтеза, названный подходом метода чисел обусловленности матриц (МЧМ), обеспечивает системе желаемые динамические свойства (t_m , D_V , σ и др.) в номинальном режиме, а также малую потенциальную параметрическую чувствительность, как в случае одномерных, так и многомерных систем.

На основе предложенных подходов метода модальной чувствительности можно достичь и малой чувствительности нолей и выхода синтезируемых систем, более того, если в качестве оптимизируемого функционала чувствительности рассматривать сумму евклидовых норм матриц Γ_{qj} , $j = \overline{1, p}$, то возможно достижение минимальной параметрической чувствительности выхода (и нолей).

Для оценки качества процессов в системах управления введены скалярные, так называемые модальные оценки показателей качества, которые получены как оценки последних через экстремальные свойства пучков квадратичных форм с соответствующими специально вводимыми матрицами, P и Q . При этом модальные оценки инварианты относительно мерности входа, состояния и выхода системы.

Получены модальные оценки следующих показателей качества систем:

- времени переходного процесса;
- перерегулирования по состоянию и по выходу;
- установившейся ошибки при детерминированном входном воздействии;
- дисперсий состояния, выхода и ошибки, при входном сигнале типа «белый шум» и «окрашенный шум».

Исследование чувствительности модальных оценок показателей качества, обладает однотипным алгоритмическим обеспечением, построенном на базе метода функций модальной чувствительности.

Алгебраический метод робастной устойчивости Харитоновского направления исследований робастной устойчивости интервальных динамических систем, рассмотренный в пятой главе

данной работы, является дальнейшим развитием основных результатов работ автора 1995 года, позволяющим решать проблему робастной устойчивости при общем виде интервальной матрицы системы. При этом метод направлен для решения задач робастной устойчивости как для линейных непрерывных интервальных динамических систем, так и для линейных дискретных интервальных динамических систем.

Следует отметить, что *Замечание* к теореме 5.1 существенным образом уточняет результаты вышеуказанных работ, а именно подчеркивает необходимость полного набора из четырех угловых полиномов Харитоновы (с учетом кратности полиномов) для определения робастной устойчивости интервальных динамических систем. Также, условия необходимости и достаточности по теореме 5.1 соответствуют угловым сепаратным коэффициентам, определяемым последовательно от 1-го до n -го коэффициента характеристического полинома системы, которые могут быть найдены с использованием методов нелинейного программирования.

Рассмотренные в главах 6–9 данной монографии *теория и метод топологической грубости* систем, приложения которых для исследования синергетических систем различной физической природы приведены в главе 9, предполагает формализованность математической модели исследуемых систем.

В случае слабо формализуемых и не формализуемых математическими моделями систем, предлагается применение *подхода аналогий теоретико-множественной топологии и абстрактного подхода* к исследованиям таких систем.

Основы подхода аналогий

Пусть задано некоторое множество M_1 , с которым связано множество M_2 , отношения которых определяется некоторым морфизмом \rightarrow , т. е. имеет место соотношение

$$M_1 \rightarrow M_2, \quad (1)$$

такое что

$$F(M_1) = M_2, \quad (2)$$

где F — функтор, служащий отображением между множествами.

Определение 1. Соотношение (1) определяет некоторое пространство множеств $\{M\}$, в котором определена топология этого пространства T .

Определение 2. Особыми многообразиями μ пространства $\{M\}$ назовем особые точки, особые линии и многомерные многообразия в этом пространстве, где возможны определенные особые (сингулярные) разрывы в соотношении (2), в смысле топологии T .

Определение 3. Возмущением множества M назовем множество $F(M)$, такое что $M + F(M)$ образует возмущенное множество в пространстве $\{M\}$.

Определение 4. Вводится метрика δ для возмущений и метрика ϵ для возмущенных множеств.

Определение 5. Назовем топологию пространства $\{M\}$ вблизи некоторого особого многообразия μ *грубой*, если при малом возмущении δ множества M , возмущенное множество $M + F(M)$ будет отличаться от множества M не более чем на некоторое малое ϵ .

При введенных выше определениях мы можем воспользоваться всеми основными положениями теории и метода топологической грубости динамических систем, изложенными в главе 8 данной работы, т. е. рассматривать вопросы максимальной грубости и минимальной не грубости и др.

Предложенный здесь подход может быть использован для таких слабо формализуемых и не формализуемых систем как информационные системы, социальные и политические системы. При этом, очевидно основная трудность исследования таких систем будет заключаться на определении соответствующих множеств M , функторов F , особых многообразий μ , а также внедрения метрик δ и ϵ пространства $\{M\}$, что является задачами перспективы.

- Акунов Т. А., Алишеров С., Оморов Р. О., Ушаков А. В. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами. — Бишкек: Илим, 1991. — 61 с.
- Акунов Т. А., Алишеров С., Оморов Р. О., Ушаков А. В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах. — Бишкек: Илим, 1991. — 59 с.
- Акунов Т. А., Алишеров С., Оморов Р. О., Ушаков А. В. Матричные уравнения в исследовании дискретных процессов над бесконечными и конечными полями. — Бишкек: Илим, 1993. — 67 с.
- Акунов Т. А., Ушаков А. В. Синтез систем гарантированной модальной стабильности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. — С. 9–16.
- Александров П. С. Пуанкаре и топология // В кн.: А. Пуанкаре. Избранные труды. В 3-х т. Под ред. Н. Н. Боголюбова. — М.: Наука. Т. 2. — С. 808–816.
- Алиева К. М., Тишин А. И. Философия и синергетика о сложности. — Б.: Илим, 2003. — 360 с.
- Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. — 424 с.
- Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. Асимптотическая математика и синергетика: Путь к целостной простоте. — М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2020. — 304 с.
- Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 5. — С. 3–45.
- Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Управление хаосом: методы и приложения. II. Приложения // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 4. — С. 3–34.
- Андронов А. А., Поптягин Л. С. Грубые системы // Докл. АН СССР, 1937. — Т. 14. — № 5. — С. 274–250.
- Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 568 с.
- Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем. — М.: Наука, 1966. — 568 с.
- Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1967. — 488 с.

- Аносов Д. В. Грубые системы / Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сб. обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды МИАН СССР. Т. 169). — М.: Наука, 1985. — С. 59–93.
- Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984. — 272 с.
- Арнольд В. И. Теория катастроф // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНТИ, 1986. — Т. 5. — С. 219–277. (Итоги науки и техники.); М.: URSS, 2020. — 136 с.
- Баев А. П., Оморов Р. О., Ушаков А. В. Оценки переходных функций линейных многомерных систем управления // Изв. вузов. Электромеханика, 1989. № 1. — С. 90–96.
- Бак П. Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности. Пер. с англ. / Вступ. сл. Г. Г. Малинецкого. — М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2017. — 276 с.
- Баранцев Р. Г. Синергетика в современном естествознании. Изд. 2-е, доп. — М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2009. — 160 с.
- Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1990. — 486 с.
- Безручко Б. П., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Путь в синергетику: Экскурс в десяти лекциях / Предисл. С. Мирова, Г. Г. Малинецкого. Изд. 2-е. — М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010. — 304 с.
- Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука, 1983. — 336 с.
- Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1972. — 768 с.
- Бесекерский В. А., Небылов А. В. Робастные системы управления. М.: Наука, 1983. — 240 с.
- Бодэ Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. — М.: ИЛ, 1952.
- Браверман М. Э., Розоноэр А. И. О грубости линейных динамических систем I // Автоматика и телемеханика. 1991. — № 11. — С. 17–23, II // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 1. — С. 41–52.
- Брайсон А., Хо-Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления / Пер. с англ. — М.: Мир, 1972. — 544 с.
- Буданов В. Г. Методология синергетики в пост неклассической науке и в образовании. Изд. 4-е, доп. — М.: URSS, 2017. — 272 с.
- Вайшберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М., 1969, Наука. — 528 с.

- Венгеров А. А., Щаренский В. А. Прикладные вопросы оптимальной линейной фильтрации. М.: Энергоиздат, 1982. — 192 с.
- Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
- Вальтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976. — 286 с.
- Воронов А. А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985. — 352 с.
- Воронов К. В., Коралева О. И., Никифоров В. О. Робастное управление нелинейными объектами с функциональными неопределенностями // Автоматика и телемеханика. 2001. № 2. — С. 112–121.
- Галавкин В. В. Синергетическая физика, или Мир наоборот. — М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2016. — 120 с.
- Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
- Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: в 2-х книгах. Пер. с англ. — Мир, Кн. 1, 1984. — 350 с., Кн. 2, 1984. — 285 с.
- Глейк Дж. Хаос: Создание новой науки / Пер. с англ. М. Нахмансона, Е. Барашковой. — СПб.: Амфора, 2001. — 398 с.
- Глобализация: синергетический подход / Под общ. ред. В. К. Егорова. — М.: РАГС, 2002. — 472 с.
- Горовиц А. М. Синтез систем с обратной связью. — М.: Сов. радио, 1970. — 600 с.
- Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. — Л.: Машиностроение, 1983. — 245 с.
- Гришченко В. Т., Мацытура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. — М.: Ленанд/URSS, 2019. — 280 с.
- Гробман Д. М. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений. — Докл. АН СССР, 1959. Т. 128, — № 5. — С. 880–881.
- Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г. и др. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 1. — С. 3–23.
- Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г. и др. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). II. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 2. — С. 3–30.
- Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квази-дифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990. — 432 с.
- Джури Э. И. Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С. 4–28.

- Дискуссия по проблеме робастности в системах управления // Автоматика и телемеханика. 1992. № 1. — С. 165–176.
- Долгоносоев Б. М. Нелинейная динамика экологических и гидрологических процессов / Отв. ред. М. Г. Хубларян; Предисл. Г. Г. Малинецкого. — М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2009. — 440 с.
- Дульнев Г. Н. Введение в синергетику. — Санкт-Петербург: «Проспект», 1998. — 256 с.
- Ермаченко А. И. Методы синтеза систем управления низкой чувствительности. — М.: Радио и связь, 1981. — 104 с.
- Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. — М.: Наука, 1970. — 703 с.
- Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории // Пер. с англ. — М.: Мир, 1999. — 335 с.
- Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1984. — 368 с.
- Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. — М.: Наука, 1991. — 240 с.
- Иванов Б. Н. Мир физической гидродинамики: От проблем турбулентности до физики космоса. — М.: URSS, 2021. — 240 с.
- Икрамов Х. Д. Численное решение матричных управлений / Под. ред. Д. К. Фаддеева. — М.: Наука, 1984. — 192 с.
- Йосс Ж., Дездеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. — М.: Мир, 1983. — 301 с.
- Калман Р., Фалб П., Арbib М. Очерки по математической теории систем: Пер. с англ. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
- Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего. 4-е изд. — М.: URSS, 2020. — 536 с. (В 2-х кн.)
- Капица С. П. Парадоксы роста: Законы развития человечества. — М.: Альпина нон-фикшн, 2010. — 192 с.
- Капустин В. С. Введение в теорию социальной самоорганизации. — М.: Изд-во РАГС, 2003. — 137 с.
- Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999. — 768 с.
- Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
- Кейлис-Борок В. И. Динамика литосферы и прогноз землетрясений // Природа. — 1989. — № 12. — С. 10–18.
- Климонтович Ю. Л. Турбулентное движение и структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем. — М.: URSS, 2014. — 328 с.
- Князева Е. Н. Случайность, которая творит мир. Новые представления о самоорганизации в природе и обществе // В поисках нового мировидения: И. Пригожин, Е. и Н. Рерихи. — М.: Знание, 1991. — С. 3–31.

- Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Синергетика как новое мировидение: диалог с И. Пригожиным // Вопросы философии. — 1992. — № 12. — С. 9–20.
- Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Основания синергетики. Человек, конструирующий себя и свое будущее. — М.: URSS, 2018. — 264 с.
- Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Синергетика: Нелинейность времени и ландшафты коэволюции. — М.: URSS. — 2014. — 272 с.
- Кокотович П. Метод точек чувствительности в исследовании и оптимизации линейных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1964. № 12. — С. 22–31.
- Колесников А. А. Синергетическая теория управления. — Таганрог: ТРТУ. — М.: Энергоатомиздат, 1994. — 344 с.
- Колесников А. А. Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза. Изд. 2-е. — М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2019. — 240 с.
- Колмановский В. Б., Стивак А. К. Об управлении по быстрдействию системой хищник—жертва // Прикладная математика и механика. — 1990. — Т. 54. — Вып. 3. — С. 502–506.
- Кольцова Э. М., Гордеев Л. С. Методы синергетики в химии и химической технологии: Учебное пособие для вузов. — М.: Химия, 1999. — 256 с.
- Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматки и технической кибернетики. — М.: Госэнергониздат, 1962. — 600 с.
- Красовский А. А. Некоторые актуальные проблемы науки управления // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 6. — С. 8–16.
- Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968. — 475 с.
- Кузнецова М. Дезорганизация и организация как свойства социальных систем // Проблемы теории и практики управления. — 1994. — № 6. — С. 93–96.
- Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. — М.: Машиностроение, 1976. — 184 с.
- Кунцевич В. М., Лычак М. М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. — М.: Наука, 1977. — 400 с.
- Кунцевич В. М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев: Наук. думка, 2006. — 264 с.
- Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы. — М.: Знание, 1983. — 265 с.
- Кухтенко А. И. Проблемы инвариантности в автоматике. — Киев.: ГИТЛ УССР, 1963. — 376 с.
- Летов А. М. Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969. — 359 с.

- Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.
- Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Нелинейная динамика и хаос: Основные понятия. — М.: URSS, 2019. — 240 с.
- Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. — М.: URSS, 2017s. — 312 с.
- Малинецкий Г. Г., Пространство синергетики: Взгляд с высоты. — М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2013. — 248 с.
- Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Изд. 3-е. — М.: URSS, 2010. — 248 с.
- Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983. — 576 с.
- Мельников Г. И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. — Л.: Машиностроение, 1975. — 200 с.
- Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р. А. Нелепина. — М.: Наука, 1975. — 448 с.
- Мирошник И. В. Согласованное управление многоканальными системами. — Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. Отд., 1990. — 128 с.
- Многорежимные и нестационарные системы автоматического управления / Под ред. Б. Н. Петрова. — М.: Машиностроение, 1978. — 240 с.
- Моделирование и прогнозирование глобального, регионального и национального развития / Отв. ред. А. А. Акаев, А. В. Коротаев, Г. Г. Малинецкий, С. Ю. Малков. — М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2012. — 488 с.
- Мун Ф. Хаотическая колебания: вводный курс для научных работников и инженеров: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 312 с.
- Назаретян А. П. Цивилизационные кризисы в контексте Универсальной истории. (Синергетика — психология — прогнозирование): 2-е изд. — М.: Мир, 2004. — 367 с.
- Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. — М.: URSS, 2009. — 424 с.
- Неймарк Ю. И. Робастная устойчивость и Д-разбиения // Автоматика и телемеханика, 1992. № 7. — С. 10–18.
- Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: URSS, 2017. — 552 с.
- Несенчук А. А., Федорович С. М. Метод параметрического синтеза интервальных систем на основе корневых годографов полиномов Харитоновна // Автоматика и телемеханика. № 7. 2008. — С. 37–46.
- Никифоров В. О. Робастное управление линейным объектом по выходу // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. — С. 87–99.

- Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Введение: Пер. с англ. Изд. 8-е. — М.: URSS, 2017. — 360 с.
- Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику / Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 304 с.
- Олемской А. И., Кацнельсон А. А. Синергетика конденсированной среды. — М.: URSS, 2010. — 336 с.
- Оморов Р. О. Разработка и исследование фотоэлектрических следящих систем малой параметрической чувствительности. Автореферат. дисс.... канд. техн. наук. Л.: ЛИТМО, 1985. — 21 с.
- Оморов Р. О. Разработка и исследование фотоэлектрических следящих систем малой параметрической чувствительности. Дисс. канд. техн. наук. — Л.: ЛИТМО, 1985. — 264 с.
- Оморов Р. О., Ушаков А. В. Синтез систем минимальной модальной чувствительности: Сб. науч. тр. / Ленингр. ин-т точн. мех. и оптики. — Л., 1986. — С. 50–60.
- Оморов Р. О. Максимальная грубость динамических систем управления. — В кн.: Дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов Республиканской научной конференции. (Фрунзе, 14–15 сентября 1989). — Фрунзе, 1989. — С. 119.
- Оморов Р. О. Оценка грубости управляемых динамических систем. // Изв. вузов. Электромеханика. — 1990. — № 7. — С. 81–87.
- Оморов Р. О., Ушаков А. В. Оценки робастности в задачах управления и наблюдения // Изв. вузов. Электромеханика. — 1991. — № 1. — С. 78–85.
- Оморов Р. О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 8. — С. 36–45.
- Оморов Р. О. Исследование грубости и бифуркаций экологических систем «хищник—жертва» // Тезисы докл. — Харьков, 1991. — С. 79–80.
- Оморов Р. О. Синтез грубых сингулярно возмущенных нелинейных систем управления / Сборник докл. — М., 1991. — С. 139–141.
- Оморов Р. О. Методы оценки грубости динамических систем и их применения для исследования бифуркаций и синтеза грубых управляемых систем // Тр. конф. по оптической обработке информац. — Бишкек, 1991. — С. 65–73.
- Оморов Р. О. Оценка грубости динамических систем и их применения для синтеза робастных нелинейных и семейств линейных систем управления // X Научн. конф. Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях. М., 1992. — С. 18–20.
- Оморов Р. О. Мера грубости динамических систем и критерии возникновения хаотических колебаний и бифуркаций в синергетических системах // Синтез алгоритмов стабилизации систем: Межведомств. сб. — Вып. 8. — Таганрог, 1992. — С. 128–134.

- Оморов Р. О. Оценка грубости динамических систем на основе функций Ляпунова // в межведомств. сборн. Синтез алгоритмов стабилизации систем. — Вып. 8. — Таганрог, 1992. — С. 134–138.
- Оморов Р. О., Ушаков А. В. Модальная робастность многомерных стохастических систем управления // в межвуз. сборн. Вероятностные методы исследований динамических систем. — Л.: СПБИТМО, 1992. — С. 136–147.
- Оморов Р. О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Дисс. докт. техн. наук. — Санкт-Петербург: СПб ИТМО, 1992. — 188 с.
- Оморов Р. О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Автореф. дисс. докт. техн. наук. — Санкт-Петербург: СПб ИТМО, 1993. — 38 с.
- Оморов Р. О. Робастность интервальных динамических систем. I. Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем // Теория и системы управления. 1995. № 1. — С. 22–27.
- Оморов Р. О. Робастность интервальных динамических систем. II. Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем // Теория и системы управления. 1995. № 3. — С. 3–7.
- Оморов Р. О. Оценка грубости экологических систем «хищник—жертва» // Наука и техника. — 1996. — № 1. — С. 54–61.
- Оморов Р. О., Айдралиев А. О., Токочев Т. Б. Чувствительность и робастность интервальных динамических систем / Рук. деп. РНТБ. — Бишкек: 1996. — 144 с.
- Оморов Р. О. Синергетические системы: проблемы грубости, бифуркаций и катастроф // Наука и новые технологии. — 1997. — № 2. — С. 26–36.
- Оморов Р. О. Синергетические системы: Аспекты грубости, бифуркаций и катастроф // Известия ТРТУ. — 2001. — № 5(23). — С. 70–79.
- Оморов Р. О. Исследование грубости аттракторов синергетических систем // Наука и новые технологии. — 2002. — № 2. — С. 125–130.
- Оморов Р. О. О дискретном аналоге теоремы Харитоновой // Наука и новые технологии. — 2002. — № 3. — С. 5–9.
- Оморов Р. О. Синергетический подход к экономическим системам // Наука и новые технологии. — 2003. — № 2. — С. 100–105.
- Оморов Р. О. Управление грубостью синергетических систем // Проблемы автоматизации и управления. — 2009. — № 1. — С. 23–30.
- Оморов Р. О. Метод топологической грубости: Теория и приложения. I. Теория // Изв. НАН КР. — 2009. — № 3. — С. 144–148.
- Оморов Р. О. Метод топологической грубости: Теория и приложения. II. Приложения // Изв. НАН КР. — 2010. — № 1. — С. 32–36.

- Оморов Р. О. Топологическая теория и метод исследования грубости и бифуркаций синергетических систем // Проблемы автоматизации и управления. — 2010. — № 1. — С. 31–34.
- Оморов Р. О. Топологическая грубость синергетических систем // Международный журнал «Проблемы управления и информатики». — № 2. — 2012. — С. 5–12.
- Оморов Р. О. Хаос и порядок в синергетических системах: применение метода топологической грубости // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. — 2012. — вып. 43. — С. 175–181.
- Оморов Р. О., Джаманбаева З. А. Исследования грубости, бифуркаций и хаоса синергетических систем в области химии // Проблемы управления и информатики. — № 1. — 2012. — С. 12–25.
- Оморов Р. О., Омуралиев М. О., Землянский А. А. Исследование динамической модели процессов деформации горных массивов в период подготовки сильного землетрясения // Известия Национальной академии наук Кыргызской Республики. — 2012. — № 4. — С. 73–79.
- Оморов Р. О. Робастная грубость интервальных динамических систем: Алгебраический метод // Доклады НАН КР. 2014. № 2. — С. 7–11.
- Оморов Р. О., Такырбашев Б. К. Многомерный нелинейный регулятор генератора электроэнергетической системы // Известия Национальной академии наук Кыргызской Республики. — 2015. — № 3. — С. 12–17.
- Оморов Р. О. Робастная грубость интервальных систем // Доклады Национальной академии наук Кыргызской Республики. — 2017. Т. 2. № 2. — С. 5–11.
- Оморов Р. О. Метод топологической грубости: Приложения к синергетическим системам // Доклады Национальной академии наук Кыргызской Республики. — 2017. Т. 2. № 2. — С. 12–18.
- Оморов Р. О. Метод топологической грубости: Приложения к синергетическим системам и хаосу // Известия Национальной академии наук Кыргызской Республики. 2017. № 4. С. 13–19.
- Оморов Р. О. Метод топологической грубости динамических систем: Приложения к синергетическим системам и хаосу // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. — 2017. № 4(44). — С. 212–219.
- Оморов Р. О. Чувствительность, робастность и грубость динамических систем // Известия Национальной академии наук Кыргызской Республики. — 2018. № 3. — С. 7–16.
- Оморов Р. О. Чувствительность, робастность и грубость управляемых динамических систем // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2018. Т. 61. № 4. — С. 64–69.
- Оморов Р. О. Робастная устойчивость интервальных динамических систем. — Бишкек: Илим, 2018. — 104 с.

- Оморов Р. О. Метод топологической грубости динамических систем: Приложения к некоторым нелинейным системам // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. — 2019. № 3(51). — С. 26–33.
- Оморов Р. О. Робастность интервальных динамических систем: Алгебраический метод // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. — 2019. № 2–1(50). — С. 334–340.
- Оморов Р. О. Робастность интервальных динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2019. Т. 20, № 6. — С. 333–340.
- Оморов Р. О. Топологическая грубость динамических систем // в сборнике: XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019 Труды. Под общей редакцией Д. А. Новикова. 2019. — С. 243–247.
- Оморов Р. О. Теория топологической грубости систем. — Бишкек: Илим, 2019. — 288 с.
- Палис Ж., ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем: Введение / Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 301 с.
- Пелевин А. Е. Синтез робастного закона управления при неопределенностях параметров модели объекта // Гироскопия и навигация. 1999. № 2(25). — С. 63–74.
- Пелевин А. Е. Робастная стабилизация линейного объекта при неопределенных параметрах модели // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 1. — С. 40–46.
- Петроуз Р. Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики. Пер с англ. / Под общ. ред. В. О. Малышенко. Предисл. Г. Г. Малинецкого. Изд. 6-е. — М.: URSS, 2020. — 416 с.
- Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка: Пер. с англ. — М.: Мир, 2000. — 333 с.
- Петров В. В., Гордеев А. А. Нелинейные сервомеханизмы. — М.: Машиностроение, 1979. — 471 с.
- Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003. — 496 с.
- Плисс В. А. О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе. — Вести ЛГУ. Сер. Математика, механика. — 1960. — № 13. — вып. 3. — С. 15–23.
- Подчукаев В. А. Анализ грубости свойства асимптотической устойчивости регулируемых систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1985. — № 6. — С. 131–137.
- Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. — С. 45–54.

- Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т. 32. — М.: ВИНТИ, 1991. — С. 3–31.
- Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Робастная устойчивость при комплексных возмущениях параметров // Автоматика и телемеханика. — 1991. № 8. — С. 45–55.
- Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Робастный критерий Найквиста // Автоматика и телемеханика. — 1992. № 7. — С. 25–31.
- Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. — 384 с.
- Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика, 2002. № 8. — С. 37–53.
- Попов Е. П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. — М.: Наука, 1973. — 584 с.
- Пригожин И., Стенгерс Н. Время, хаос, квант: К решению вопроса времени / Пер. с англ. — М.: URSS, 2020. — 240 с.
- Пригожин И., Стенгерс Н. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой / Пер. с англ. Ю. А. Данилова. 5-е изд. — М.: URSS, 2014. — 304 с.
- Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках: Пер. с англ. / Под ред., с предисл. и послесл. Ю. Л. Климонтовича. Изд. 4-е. — М.: URSS, 2016. — 288 с.
- Пригожин И., Кондетуди Д. Современная термодинамика: От тепловых двигателей до диссипативных структур / Пер. с англ. — М.: Мир, 2002. — 461 с.
- Проблемы математической истории: Математическое моделирование исторических процессов / Отв. ред. Г. Г. Малинецкий, А. В. Кортаев. — М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2008. — 208 с.
- Пространство циклов: Мир — Россия — регион / Под ред. В. Л. Бабурина, П. А. Чистякова. — М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007. — 320 с.
- Пуанкаре А. О кривых определяемых дифференциальными уравнениями / Пер. с франц.; Под ред. А. А. Андропова. — М., Л.: Гостехиздат, 1947. — 392 с.
- Пуанкаре А. Избранные труды. В 3-х т. Пер. с франц. Под ред. Н. Н. Боголюбова. Т. 1., 1971. — 771 с.; Т. 2., 1972. — 999 с.; Т. 3., 1974. — 771 с.
- Пуанкаре А. О науке: Пер. с франц. — М.: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит. 1983. — 560 с.
- Распознавание. Аутодиагностика. Мышление. Синергетика и наука о человеке / Под ред. Д. С. Чернавского. — М.: Радиотехника, 2004. — 272 с.
- Рейзинь Л. Э. Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений. — Рига: Зинатне, 1971. — 235 с.

- Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем автоматического управления. — М.: Энергия, 1969. — 264 с.
- Розенвассер Е. Н. Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления. — М.: Наука, 1977. — 344 с.
- Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
- Садовский М. А., Балховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф. Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. — М.: Наука, 1987. — 100 с.
- Свирижев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
- Свирижев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М.: Наука, 1987. — 368 с.
- Синай Я. Г. Неустойчивость и стохастичность динамических систем. — М.: ИТЭФ, 1982. — 25 с.
- Синергетика: Сб. статей / Пер. с англ. сост. А. И. Рязанов, А. Д. Суханов; Под ред. Б. Б. Кадомцева. — М.: Мир, 1984. — 248 с.
- Синергетика и психология. Тексты. Вып. 2. Социальные процессы / Под ред. И. Н. Трофимовой. — М.: «Янус-К», 1999. — 272 с.
- Синергетика и проблемы теории управления / Под ред. А. А. Колесникова. — М.: Физматлит, 2004. — 504 с.
- Синергетика. Антрология / Научный редактор, составитель, автор переводов и вступ. статьи Е. Н. Князева. — М.: СПб.: Центр гуманитарных инициатив, 2013. — 408 с.
- Смейл С. Грубые системы не плотны. — Сб. пер. Математика, 1976. Т. 11, — № 4. — С. 107–112.
- Смейл С. Успехи матем. наук. 1970. Т. 25. № 1. — С. 113–185.
- Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / Под ред. В. И. Арнольда. Т. 1., 1985. Т. 5., 1986.
- Салодовников В. В. О синтезе многомерных САР и проблеме грубости // Изв. вузов. Приборостроение. — 1988. — С. 5–15.
- Спротт Дж. К. Элегантный хаос: алгебраически простые хаотические потоки. — М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2012. — 328 с.
- Странные аттракторы: Сб. / Пер. с англ.; Под ред. Я. Г. Синай, Л. П. Шильникова. — М.: Мир, 1981. — 253 с.
- Стрэнг Г. Линейная алгебра и ее применение. — М.: Мир, 1980. — 454 с.
- Теория систем. Математические методы и моделирование. Сб. статей. Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 384 с.
- Теория систем с переменной структурой / Под ред. С. В. Емельянова. — М.: Наука, 1970. — 592 с.

- Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб., 1952. Т. 31.. № 3. — С. 575–586.
- Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
- Томович Р., Вукобратович М. Общая теория чувствительности. — М.: Сов. радио, 1972. — 240 с.
- Том Р. Успехи математических наук. 1972. Т. 27. — № 5. — С. 7–51.
- Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сб. обзорных статей. Вып. 2. К 50-летию института (Труды МИАН СССР. Т. 169). — М.: Наука, 1985. — 256 с.
- Трубецков Д. И. Введение в синергетику: Хаос и структуры. — М.: URSS, 2010. — 240 с.
- Труды I Международного симпозиума по чувствительности систем автоматического управления. — М.: Наука, 1968. — 253 с.
- Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970. — 564 с.
- Уонг М. Линейные многомерные системы управления. — М.: Наука, 1980. — 476 с.
- Уткин В. И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. — М.: Наука, 1974. — 272 с.
- Ушаков А. В. Условия нулевой параметрической чувствительности в задаче слежения // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 9. — С. 30–37.
- Ушаков А. В., Джаманбаев А. А. Геометрический подход в задаче отыскания класса регуляторов, обеспечивающих нулевую параметрическую чувствительность // Автоматика. — 1987. Т. 20. № 5. — С. 84–87.
- Ушаков А. В. Модальные оценки качества процессов управления многомерными системами при гармоническом внешнем воздействии // Автоматика и телемеханика, 1989. № 11. — С. 76–85.
- Ушаков А. В., Оморов Р. О. Оценка потенциальной параметрической чувствительности желаемой динамической модели в задаче модального управления // Изв. вузов. Электромеханика. — 1982. — № 7. — С. 800–805.
- Ушаков А. В., Оморов Р. О. Оценка параметрической чувствительности линейных объектов управления по степени их управляемости и наблюдаемости // Изв. вузов. Электромеханика. — 1984. — № 8. — С. 53–58.
- Ушаков А. В., Оморов Р. О. Использование аппарата функций модальной чувствительности для оценки точности динамических систем. Информационное сообщение о Всесоюзном координационном совещании по проблемам адаптации и XI семинаре по адаптивным системам (Фрунзе, 16–25 апреля 1982 г.) // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 9. — С. 171.

- Ушаков А. В., Оморов Р. О. Синтез регуляторов модально-робастных систем автоматического управления // Структуры сложных систем и алгоритмы управления / Под ред. Ю. А. Борцова, В. Б. Яковлева (Вопросы теории систем автоматического управления. Вып. 8). — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. — С. 92–103.
- Ушаков А. В., Оморов Р. О. Свойства чисел обусловленности сопровождающих матриц стандартных полиномов // В кн.: Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В. — Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983. — С. 227–234.
- Ушаков А. В., Оморов Р. О. Оценки модальной робастности и синтез семейств линейных многомерных стохастических систем управления // В кн.: Международная конференция по интервальным и стохастическим методам в науке и технике. Сб. трудов (Москва, сентябрь 1992 г.). — М., 1992. Т. 1. — С. 180–183.
- Ушаков А. В., Оморов Р. О., Алишеров С. Аналитическое решение задачи стохастического модального управления // Известия АН Кирг. ССР. — 1989. — № 4. — С. 43–52.
- Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Численные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1963. — 734 с.
- Федер Е. Фракталы: Пер. с англ. — М.: Ленанд/URSS, 2014. — 264 с.
- Филимонов Н. Б. Системы многорежимного регулирования: Концепция, принципы построения, проблемы синтеза // Известия вузов. Приборостроение. — 1988. № 2. — С. 18–33.
- Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
- Форсайт Дж., Мальколм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. — 279 с.
- Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах. — М.: Наука, 1990.
- Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. — М.: Наука, 1977. — 247 с.
- Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 423 с.
- Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам: Пер. с англ. / Предисл. Ю. Л. Климонтовича. Изд. 3-е, испр., и знач. доп. — М.: Ленанд/URSS, 2014. — 320 с.
- Хакен Г. Синергетика: Принципы и основы. Перспективы и приложения. Ч. 1: Принципы и основы: Неравновесные фазовые переходы и самоорганизация в физике, химии и биологии. Пер. с англ. / Под ред. и с предисл. Ю. Л. Климонтовича и С. М. Осовца. Изд. 2-е, доп. — М.: Ленанд/URSS, 2015. — 448 с.

- Хаген Г. Синергетика: Принципы и основы. Перспективы и приложения. Ч. 2: Перспективы и приложения: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. Пер. с англ. / Под ред. и с предисл. Ю. Л. Климонтовича и С. М. Осовца. Изд. 2-е, доп. — М.: Ленанд/URSS, 2015. — 432 с.
- Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. — 1978. Т. 14. — № 11. — С. 2086–2088.
- Харитонов В. Л. Об одном обобщении критерия устойчивости // Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. — 1978. — № 1. — С. 53–57.
- Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Пер. с англ. под ред. В. М. Алексеева. — М.: Мир, 1970. — 720 с.
- Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 534 с.
- Хиценко В. Самоорганизация и менеджмент // Проблемы теории и практики управления. — 1996. — № 3. — С. 120–124.
- Ходько С. Т. Проектирование систем управления с нестабильными параметрами. — Л.: Машиностроение, 1987. — 232 с.
- Хокинг С. Краткая история времени: От большого взрыва до черных дыр / Пер. с англ. Н. Смородиной. — СПб.: ТИД Амфора, 2009. — 231 с.
- Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. — М.: Мир, 1991. — 368 с.
- Хьюбер П. Робастность в статистике / Пер. с англ. под ред. Н. Г. Журбенко. — М.: Мир, 1984. — 304 с.
- Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. — М.: Физматгиз, 1958. — 724 с.
- Цыпкин Я. З. Робастность в системах управления и обработки данных // Автоматика и телемеханика, 1992. № 1. — С. 165–169.
- Цыпкин Я. З., Поляк Б. Т. Частотные критерии робастной модальности линейных дискретных систем // Автоматика. — Киев, 1990. № 4. — С. 3–9.
- Чернавский Д. С. Синергетика и информация. Динамическая теория информации. — М.: Ленанд/URSS, 2017. — 304 с.
- Четаев Н. Г. Устойчивость движения. — М.: Наука, 1990. — 176 с.
- Чиллингуорт Д. Структурная устойчивость математических моделей. Значение методов теории катастроф // В кн.: Математическое моделирование / Под ред. Дж. Эндрюса, Р. Мак-Лоуна. Пер. с англ. — М.: Мир, 1979. — С. 249–276.
- Чистилин Д. К. Самоорганизация мировой экономики: Евразийский аспект. — М.: ЗАО «Издательство „Экономика“», 2004. — 237 с.
- Шароватов В. Т. Обеспечение стабильности показателей качества автоматических систем. — Л.: Энергоатомиздат, 1987. — 176 с.
- Шахтмарин Б. И. Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием. — М.: Машиностроение, 1991. — 192 с.

- Шашихин В. Н. Методы интервального анализа в синтезе робастного управления // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6. № 6. — С. 118–123.
- Шашихин В. Н. Робастная стабилизация линейных интервальных систем. // Прикладная математика и механика. Т. 66. Вып. 3, 2002. — С. 402–409.
- Шель Э. Самоорганизация в полупроводниках. Неравновесные фазовые переходы в полупроводниках, обусловленные генерационно-рекомбинационными процессами: Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. — 464 с.
- Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение / Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 240 с.
- Эбеллинг В., Энгельс А., Файстель Р. Физика процессов эволюции. Синергетический подход. — М.: URSS, 2001. — 255 с.
- Эзембердиев Т. М. Синергия человека. — Сергиев Посад, 2006. — 145 с.
- Эткинс П. Порядок и беспорядок в природе: Пер. с англ. / Предисл. Ю. Г. Рудого. — М.: Мир, 1987. — 224 с.
- Юдашкин А. А. Бифуркации стационарных решений в синергетической нейронной сети и управление распознаваниями образов // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 11. — С. 136–147.
- Юсупбеков Н. Р., Цацкин М. Л. Робастность многосвязных систем управления. — М.: Наука, 1990. — 149 с.
- Якубович В. А., Старожинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
- Ackerman J. D. Sampled-data control systems/ Analysis and Synthesis, Robust System Design (Lecture notes in control and information sciences). — Springer-verlag Berlin, Heidelberg, 1985.
- Barmish B. R., Hollot C. V. Counter-example to a recent result on the stability of interval matrices by S. Bialas // Int. J. Control. 1984. V. 39. № 5. P. 1103–1104.
- Barmish B. R., Fu M., Saleh S. Stability of a Polytope of Matrices: Counterexamples // IEEE Transactions Automatic Control. 1988. V. AC-33. № 6. P. 569–572.
- Bartels R. H., Stewart G. W. Solution of the matrix equation $AX+XB=C$ // Commun. ACM. 1972. V. 15. № 9. P. 820–826.
- Bartlett A. C., Hollot C. V., Lin H. Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges // Math. Contr., Signals, Syst. 1987. V. 1. № 1. P. 61–71.
- Basar T. A dynamic games approach to controller design: Disturbance rejection in discrete-time // IEEE-TAC. 1991. V. AC-36. № 8. P. 936–952.
- Bhattacharyya S. P., de Souza E. Pole assignment via Sylvester's equation // System and Controls letters. 1981. V. 1. № 3.

- Bhattacharyya S. P.* Robust stabilization against structural perturbation (Lecture notes in control and information sciences). Springer-verlag Berlin, Heidelberg. 1987. — 172 p.
- Bialas S.* A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices // *Int. J. Control.* 1983. V. 37. № 4. P. 717–722.
- Bose N. K., Zeheb E.* Kharitonov's theorem and stability test of multidimensional digital filters // *IEEE Proc. Pt. G.* 1986. V. 133. № 4. P. 187–190.
- Bax E. E. P.* Non-normality and test variants // *Biometrika*, 1953. V. 40. № 3–4. P. 318–335.
- Cavin R. K., Bhattacharyya S. P.* Robust and wellconditioned Eigen structure assignment via Sylvester's equation. — Proceedings. 1982. American Control Conferens. P. 1053–1057.
- Chow S. N., Hale J. K.* Methods of bifurcation theory. — Springer. — 1982. — 515 p.
- Cieslik J.* On possibilities of the extension of Kharitonov's stability test for interval polynomials to the discrete case // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1987. V. AC-32. № 3. P. 237–238.
- Cook A. E., Roberts P. H.* The Rikitake two-disc Dynamo System. — Proceeding of Cambridge Philosophical Society, 68. (1970). P. 547–569.
- Cruz J. B., Perkins W. B.* A new approach to the sensitivity problem in multivariable feedback system design. *IEEE Trans. On Automatic control*, 1964, vol. AC-9. № 3. P. 216–223.
- Davison E. J.* The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems // *IEEE Trans. AC-21.* № 2. 1976. P. 25–34.
- Dorato P. A.* Historical review of robust control // *IEEE Trans. Contr. Syst. Magazine.* 1987. V. 7. № 2. P. 44–47.
- Eslami M.* Theory of Sensitivity in Dynamic Systems: An introduction. Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 1994. — 600 p.
- Faedo S.* Un nuova problema di stabilita per le equazioni algebriche a coefficienti reali // *Ann. Scuola Norm. Super. Piza, Sci. Fiz. e Math.*, 1953. V. 7. № 1–2. P. 53–63.
- Fan K.* On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations II // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1950. V. 36. P. 31–35.
- Glad S. T.* Robust of nonlinear feedback systems on state // *Automatica.* 1987. V. 23. № 4. P. 425–435.
- Goh B. S., Keitmann G., Vincent T. H.* Optimal control of a Prey — Predator system // *Math. Biosc.* 1974. V. 1933. — P. 263–268.
- Golub G. H., Reinsh C.* Singular value decomposition and least squares solutions // *Numer. Math.* V. 14. 1970. P. 403–420.
- Haken H.* Synergetics: Introduction and advanced Topics. — London: Springer. 2004. — 356 p.

- Hartman H.* A lemma in the theory of structural stability of differential equations // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1960. V. 11. № 4. P. 610–620.
- Henon M. A.* A two-dimensional mapping with a strange attractor. — *Comm. Math. Phys.*, 1976, 50. P. 69.
- Hopf E.* Abzweigungen einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential systems: Wissenschaften, Leipzig. 1942.94. — P. 1–22.
- Kapitaniak T.* Chaos for Engineers: theory, applications, and control. — Berlin, Paris, Springer, 2000. — 142 p.
- Karl W. C., Greshak J. P., Verghese G. C.* Comments of the necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices // *Int. J. Control.* 1984. V. 39. № 4. P. 849–651.
- Khorosani K.* Robust stabilization of a non-linear systems with unmodelled dynamics // *Int. J. Control.* 1989. V. 50. № 3. P. 627–844.
- Klema V. C., Laub A. J.* The singular value decomposition: Its computation and some applications // *IEEE Trans. Automat. contr.*, Vol. AC-25. — 1980. — P. 164–176.
- Kraus F. J., Anderson B. D. O., Jury E. I., Mansour M.* On the robustness of low order Shur polynomials // *IEEE Trans. Circ. Systems.* 1988. — V. CAS-35. № 5. P. 570–577.
- Kraus F. J., Anderson B. D. O., Mansour M.* Robust Shur polynomial stability and Kharitonov's theorem // *Int. J. Control.* 1988. V. 47. № 5. P. 1213–1225.
- Kreindler E.* Closed-loop sensitivity of linear optimal control systems // *IEEE Trans. On Automatic Control.* 1968. AC-13. № 3. P. 254–262.
- Lorenz E. N.* Deterministik Non-Periodic Flow // *G. Atmos. sci.* — 1963. — V. 20. — P. 130–141.
- Mita T.* Design of a zero-sensitivity system // *Int. J. Control.* 1976. V. 24. № 1. P. 75–61.
- Mansour M., Kraus F. J.* On robust stability of Shur polynomials // Report. № 87–05. Inst. Automat. Const. Ind. Electronics. — Swiss Fed. Inst. Tech. (ETH). Zurich. 1987.
- Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences.* Vol. 2: Vibration with Measurements and Control / Editors: J. M. Balthazar, P. B. Goncalves, J. Clayssen. — Published by ABCM, SBMAC, SIAM, 1999. — 250 p.
- Omorov R. O.* On measure robustness of dynamic systems and its applications for research of the bifurcations and chaotic vibrations in synergetic systems / Soviet-Chinese Joint Seminar "Holography and Optical Information Processing" (Scjshoip-91) Proceedings (Bishkek, September, 1991). — Bishkek: 1991. — P. 251–253.
- Omorov R. O.* Maximal roughness of dynamic systems // *Автоматика и телемеханика.* 1991. № 8. С. 36–45.

- Omorov R. O.* Maximal coarseness of dynamical systems // Automation and Remote Control. 1992. T. 52. № 8 pt. 1. P. 1061–1068.
- Omorov R. O.* Robustness of Interval Dynamic Systems I. Robustness in Continuous Linear Interval Dynamic Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. T. 34. № 3. C. 69–74.
- Omorov R. O.* Robustness of Interval Dynamic Systems I. Robustness of Discrete Linear Interval Dynamical Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. T. 34. № 4. C. 1–5.
- Omorov R. O.* Topological Roughness of Synergetic Systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2012. T. 44. C. 61–70.
- Omorov R. O.* Algebraic Method of the Robust Stability of Interval Dynamic Systems // Journal of Mathematics and Statistical Science. 2017. V3. № 5. P. 139–143.
- Omorov R. O.* Robust Stability of Interval Dynamic Systems. — Beau Bassin, 2017. — 74 p.
- Omorov R. O.* Theory of Topological Roughness of Systems. — Beau Bassin, 2019. — 213 p.
- Ortega R., Tanq V.* Robustness of adaptive controllers. — a Survey / automatic. V. 25.
- Peak D., Frame M.* Chaos Under Control: The Art and Science of Complexity. — New York: W. H. Freeman and Company, 1994. — 408 p.
- Peixoto M. M.* On structural stability // Ann. Math. — 1959. — V. 69. — № 1. — P. 199–222.
- Perkins W. R., Cruz J. B., Gonzales R. L.* Design of minimum sensitivity systems // IEEE Trans. on Automatic control, vol. AC-13. — № 2. — 1968. — P. 159–167.
- Rao N. D., Elmetwally M. M.* Multi-parameter sensitivity analysis of linear dynamic systems through the second method of Liapunov // Int. J. Control. — 1973, vol. 17. — № 5. — P. 1105–1112.
- Rohn J.* Regularity of Interval Matrices and Theorems of Alternatives // Reliable Computing (2006) 12. P. 99–105.
- Romanishin I. M., Sinitskii L. A.* HD-SYSTEMS // J. of Automat. and Inform. Sciences. 1998. V. 30. № 1. P. 82–95.
- Rossler O. E.* Chemical Turbulence: Chaos in a Small Reaction — Diffusion System // Z. Naturforsch. — 1976. V. 31. — P. 1168–1172.
- Ruelle D.* Chance and Chaos. — Penguin Books, 1993. — 195 p.
- Soh C. B., Berger C. S., Dabke K. P.* On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients // IEEE Trans. Automat. Control. 1985. V. AC-30. № 10. P. 1033–1036.
- Soh C. B.* Parameter space approach to control problems, Ph. D. Dissertation Ch5. Dept. Elect. Engineering, Monash Univ. Clayton., Victoria, Australia, 1986.

- Tan N., Atherton D. P.* Describing Function Analysis of Nonlinear Discrete Interval Systems / In coll.: European Control Conference, ECC 1999 — Conference Proceedings 1999. P. 2835–2840.
- Ushakov A. V., Omorov R. O.* Estimations of Modal Robustness and Synthesis of Sets Linear Multivariable Stochastic Control Systems // International Conference on Interval and Stochastic Methods in Science and Engineering (INTERVAL-92). Proceedings (Moscow, September, 1992). — M., 1992. — V. 2. — P. 114.
- Vidyasagar M.* Control System Synthesis: A Factorization Approach. Cambridge, MA: MIT Press, 1985.

Издательская группа

URSS



представляет

Ф. КАПРА, П. Л. ЛУИЗИ



СИСТЕМНЫЙ ВЗГЛЯД НА ЖИЗНЬ

Целостное представление

В предлагаемой книге собраны многочисленные идеи, модели и теории, составляющие основу системного подхода к изучению жизни; все они представлены в рамках единой согласованной концепции. Глубокие исторические экскурсы и широкий междисциплинарный подход позволяет авторам подробно исследовать причины появления таких ключевых понятий системного мышления, как аутопоэз, диссипативные структуры, социальные сети, системное понимание эволюции. Обсуждаются результаты применения системного метода в здравоохранении и теории управления, а также для поиска путей преодоления назревшего глобального кризиса в экономике и для решения экологических проблем.

ЭТА КНИГА НЕОБХОДИМА, ЧТОБЫ ВСТРЕТИТЬ БУДУЩЕЕ С ШИРОКО ОТКРЫТЫМИ ГЛАЗАМИ.

Роб Колл, основатель сайта OpEdNews.com

Это и прекрасный обзор новых захватывающих исследований в системной биологии, полезный для студентов-биологов или естественников, и смелая программа того, как мы можем обеспечить наше будущее на Земле.

Журнал «New Scientist»

Глубокое исследование научных основ комплексного взгляда на мир в его целостности, что проглядели поколения однобоких редукционистов... Авторы блестяще справились с задачей!

Дэвид Орр, Оберлинский колледж

...Впечатляющий синтез лучших научных идей, теории взаимосвязи всего живого, динамики возникновения и самоорганизации в концепции Франсиско Варелы. Настоящая книга закладывает основы глубокого понимания нашего места на планете, хорошо это или плохо. Если мы воспримем мудрые советы Капры и Луизи, это будет нам во благо...

ОНА АДРЕСОВАНА ВСЕМ, КОГО ВОЛНУЕТ ЖИЗНЬ НА НАШЕЙ ПЛАНЕТЕ, И ОБЯЗАТЕЛЬНА К ПРОЧТЕНИЮ СОВРЕМЕННЫМ МОЛОДЫМ ЛЮДЯМ, ЗАВТРАШНИМ ЛИДЕРАМ.

Дэниел Гоулман, автор книги «Эмоциональный интеллект»

Роман Оморович ОМОРОВ

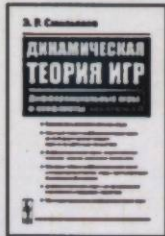
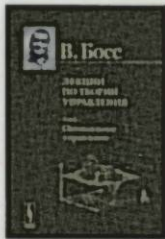


Доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Киргизской Республики, академик Международной инженерной академии, Инженерной академии Киргизской Республики, Нью-Йоркской академии наук, заслуженный деятель науки Киргизской Республики.

Выпускник Фрунзенского политехнического института по специальности «Автоматика и телемеханика» (1973). Окончил аспирантуру и докторантуру Ленинградского института точной механики и оптики (ЛИТМО) (1984, 1992). С отличием окончил Киргизский национальный университет им. Ж. Баласагына по специальности «Юриспруденция» (1996). Ведет исследования в области синергетики, хаоса и систем управления; в области инноватики и интеллектуальной собственности.

Автор более 400 научных и учебно-методических работ, в том числе 20 монографий, 4 учебников и 11 учебных и методических пособий. Лауреат золотой медали Всемирной организации интеллектуальной собственности (2003) и золотой медали им. В. И. Блиникова Евразийской патентной организации (2006). Является основателем и первым руководителем (1993–2007) Патентного ведомства и ведомства интеллектуальной собственности Киргизской Республики (Кыргызпатент).

Наше издательство предлагает следующие книги:



Издательская группа
URSS
 Каталог изданий
 в Интернете:
<http://URSS.ru>
 E-mail: URSS@URSS.ru

117335, Москва, Телефон / факс
 Нахимовский (многоканальный)
 проспект, 56 +7 (499) 724 25 45

Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru.
 Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги на сайте <http://URSS.ru>

29037 ID 266078



9 785971 081883