Механико-математический факультет

А. Х. АЗЗАМ

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ОБЛАСТЯХ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель доктор физико-математических наук В. А. Кондратьев

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА • 1967

Вопрос о существовании решения первой краевой задачи для квазилинейного эллиптического дифференциального уравнения:

$$A(x,y,z,z_x,z_y)\,z_{xx}+B(x,y,z,z_x,z_y)\,z_{xy}+C(x,y,z,z_x,z_y)\,z_{yy}=0 \quad (1)$$

в выпуклой двумерной области – впервые рассмотрел С.Н.Бернштейн [1]. Он доказал существование решения этой задачи в предположении, что коэффициенты уравнения не зависят от z. Затем Шаудер [6] доказал существование решения в предположении, что задача для соответствующего неоднородного уравнения с произвольной функцией от (x,y) справа и при произвольно заданных граничных значениях имеет самое большее одно решение.

Лере и Шаудер [3] показали, что этот вопрос может быть решен при помощи топологических теорем. Они предполагали, что коэффициенты уравнения дважды непрерывно дифференцируемы по всем аргументам.

Полученная Лере и Шаудером теорема существования была затем снова доказана Ниренбергом [4] в более слабых предположениях.

Во всех этих работах граница выпуклой области, в которой рассматривается задача, предполагается гладкой и не содержащей прямолинейных отрезков.

В многомерном случае, задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}=0 \qquad (2)$$

– была рассмотрена Кордесом [2].

Там тоже предполагается, что граница области гладкая. Настоящая работа посвящена рассмотрению задачи Дирихле для уравнений (1) и (2) в случае кусочно-гладких областей.

Пусть плоская выпуклая область G имеет границу Γ, имеющую одну угловую точку совпадающую с началом координат.

1-1340

В окрестности каждой точки границы можно ввести параметрическое уравнение кривой в виде $x = x(s)$ и $y = y(s)$ где s длина дуги измеряемая от начала координат; $x(s)$ и $y(s) \in C_{2+\gamma}$ $(0<\gamma<1)$. Кроме того, предполагается, что граница Γ не содержит прямолинейных отрезков, и всюду имеет положительную кривизну.

Для эллиптического уравнения

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

в данной области G рассматривается задача Дирихле, где

$u/_\Gamma = \varphi \in C_{2+\gamma_0}$, где функции a, b и $c \in C_{\gamma_0}$ $(0<\gamma_0<\gamma)$.

Известно [2], что существует единственное решение этой задачи. Это решение принадлежит $C_{2+\gamma_0}$ всюду, кроме угловой точки, где оно непрерывно [7]

В § I доказывается, что решение принадлежит $C_{1+\alpha}(\bar{G})$ $0<\alpha<1$ При этом константа Гельдера первых производных функций $u(x,y)$ зависит от модуля непрерывности коэффициентов уравнения (3).

Доказывается в § I также, что $r^{\tau} u''$ принадлежит $C_{\tau_0}(\bar{G})$, где r расстояние до начала координат, u'' любая вторая производная функции u и $0<\tau, \tau_0<1$.

Используя то, что функция $u(x) \in C_1(\bar{G})$ доказывается в § 2, что $u \in C_{1+\delta}(\bar{G})$ $(0<\delta<1)$, но уже константы Гельдера первых производных не зависят от модуля непрерывности функции $a(x,y), b(x,y)$ и $c(x,y)$.

В § 3 доказывается следующая теорема существования

Пусть относительно коэффициентов A, B и C уравнения (I) выполнены следующие предположения:

A, B и C определены для $(x,y) \in G$ и для всех z, z_x и z_y и для каждого положительного числа K и для всех x, y, z, z_x и z_y, удовлетворяющих условиям $(x,y) \in G$, $|z|, |z_x|, |z_y| \le K$, коэффициенты A, B и C удовлетворяют:

а) Гельдерову условию по x, y, z, z_x и z_y с коэффициентом $H(K)$ и показателем $\beta(K)$, зависящими только от K.

в) Неравенству

$$M(K)(\xi^2+\eta^2) \ge A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 \ge m(K)(\xi^2+\eta^2)$$

– для всех действительных ξ и η, где $M(K)$ и $m(K)$ положительные постоянные зависящие от K.

Существует решение z уравнения (I) совпадающее на границе Γ области G с заданной функции $\varphi \in C_{2+\gamma}$, это решение принадлежит $C_{1+\delta}(\bar{G})$ $(0<\delta<\frac{1}{2})$, и всюду кроме угловой точки, принадлежит $C_{2+\gamma_0}$ $(0<\gamma_0<\gamma)$.

Доказательство теоремы существования следует, из следующих соображений:

i) В пространстве $C_{1+\delta'}$, $(0<\delta'<\delta)$, (δ определяется в § 2) рассматривается множество M функций z

$|z|_1 \le \tilde{K}$, $|z|_{1+\delta} < \tilde{\tilde{K}}$, где $\tilde{\tilde{K}}$ достаточно большое число.

Представим функции z, z_x и z_y из M в коэффициенты A, B и C. Обозначим

$$A(x,y,z(x,y),z_x(x,y),z_y(x,y)) = a(x,y)$$

и так же определяются $b(x,y)$ и $c(x,y)$.
Применим результаты § I и § 2 к уравнению

$$a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}=0$$, где $u|_{\Gamma}=\varphi$

функции $a(x,y)$, $b(x,y)$ и $c(x,y)$ принадлежат C_{γ_0}, $\gamma_0=\gamma\delta'<\gamma$. Тогда $u\in C_{1+\delta}(\bar{G})$ $r^{2}u''\in C_{\tau}$.

$ii)$ Теорема Шаудера о неподвижной точки утверждает "Если T непрерывное отображение замкнутого выпуклого множества M банахова пространства B, в компактное его подмножество M_0, то T имеет в M неподвижную точку".

Рассмотрим решение u соответствующее функции $z\in M$, как преобразование $u(z)$, определенное в множестве M, и отображающее его в себя.

С помощью доказанных утверждений $u\in C_{1+\delta}$ и $r^{2}u''\in C_{\tau}$ показывается, что все условия теоремы Шаудера выполнены, так что существует неподвижная точка z_0 преобразования $u(z)$ т.е. $u(z_0)=z_0$.

Этот элемент и есть решение уравнения (I) совпадающее на границе Γ с заданной функцией φ.

В § 4 рассматривается гладкость полученного решения при дальнейших предположениях о гладкости коэффициентов уравнения (I), функции φ и границы Γ. Полученная гладкость оказалась зависящей от раствора угла на границе и от значения граничной функции в угловой точке.

ТЕОРЕМА. Пусть граница Γ, имеющая одну угловую точку удовлетворяет условиям теоремы существования, и всюду кроме угловой точки принадлежит $C_{m+2+\gamma}$ $(0<\gamma<1,\ m\geq 0)$.

Пусть коэффициенты уравнения (I) принадлежат $C_{m+\mu}$ $(0<\mu<1)$ по всем аргументам, а $\varphi\in C_{m+2+\gamma}$
Будем предполагать, что угловая точка находится в начале координат и что граница Γ в этой точке имеет в качестве правой полукасательной положительную полуось оси абцисс.

Обозначим

$$\xi_{11}=A(0,0,\varphi(0,0),\varphi_x(0,0),\varphi_e(0,0)\sin\theta_0)$$

$$\xi_{12}=\tfrac{1}{2}B(0,0,\varphi(0,0),\varphi_x(0,0),\varphi_e(0,0)\sin\theta_0)$$

$$\xi_{22}=C(0,0,\varphi(0,0),\varphi_x(0,0),\varphi_e(0,0)\sin\theta_0)$$

и

$$\omega=\operatorname{arctg}\frac{(\xi_{11}\xi_{22}-\xi_{12}^{2})^{1/2}}{\xi_{22}\operatorname{ctg}\theta_0-\xi_{12}},$$

где θ_0 раствор угла, φ_e производная граничной функции по направлению $\theta=\theta_0$.

Тогда решение уравнения (I), совпадающее на границе с заданной функцией φ, принадлежит всюду в замыкании области G, кроме угловой точки, пространству $C_{m+2+\gamma_0}$ $(\gamma_0=\delta\min(\mu,\gamma))$
Здесь δ, найденное в теореме существования, число

В угловой точки справедливы следующие утверждения

$i)$ Если $\frac{\pi}{\omega}>m+2+\gamma_0$, то $z\in C_{m+2+\gamma_0}$

$ii)$ Если $\frac{\pi}{\omega}\leq m+2+\gamma_0$, то $z\in C_{\frac{\pi}{\omega}-\varepsilon}$

Кроме того, если $\frac{\pi}{\omega}\leq m+2$, то $r^{\tau}z^{([\frac{\pi}{\omega}-\varepsilon]+1)}\in C_{\tau_0}$

где $(0<\tau,\tau_0<1)$ и r означает расстояние до начала координат.

Замечание: все полученные результаты верны и в случае когда граница области G содержит конечное число угловых точек

В § 5 и § 6 рассматривается задача Дирихле для уравнения (2)

– в замкнутой области $\mathcal{D}$ пространства $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ограниченной конечным числом замкнутых поверхностей класса $C_{2+\gamma}$, пересекающихся вдоль гладких кривых под углами меньшими π.

Пусть выполнены следующие условия:

I. a_{ik} определены для $x \in \mathcal{D}$, $-\infty < u, u_{/i} < \infty$ и удовлетворяют условию Гельдера с показателем γ для $x \in \mathcal{D}$, $|u|, |u_{/i}| \leq K$ и константа Гельдера соответствующая показателю γ равномерна по $2n+1$ переменных $x_j, u, u_{/i}$ $i,j=1,\dots,n$

2. Существуют такие положительные числа m, M, p, P, δ и ε, что для любого $x_0 \in \mathcal{D}$ найдется неособенная матрица T_{x_0} порядка n с постоянными коэффициентами, удовлетворяющая условиям

а) $p|\xi| \leq |T_{x_0}\xi| \leq P|\xi|$ для любого $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

б) Матрица $A^{T_{x_0}}(x, u, u_{/i}) \equiv T'_{x_0} A(x, u, u_{/i}) T_{x_0}$

для всех $x \in \mathcal{D}$, таких, что $|x - x_0| \leq \delta$

и для $-\infty < u, u_{/i} < \infty$, имеют собственные значения, удовлетворяющие условию

$$(n-1)\left(1 + \frac{n(n-2)}{(n-1)(n+1)}\right)\sum_{i<k} (\lambda_i - \lambda_k)^2 \leq (1-\varepsilon)\left(\sum_i \lambda_i\right)^2$$

где $$A(x, u, u_{/j}) \equiv ((a_{ik}(x, u, u_{/j})))$$

в) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$

Существует решение u уравнения (2) совпадающее на границе Γ области $\mathcal{D}$ с функцией $\phi \in C_{2+\gamma}$

это решение принадлежит $C_{2+\gamma_0}(\mathcal{D}/\mathcal{J})$ $(0 < \gamma_0 < \gamma)$

а на $\mathcal{J}$ принадлежит $C_{1+\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$

где $\mathcal{J}$ обозначает гладкие кривые границы вдоль которых пересекаются поверхности границы.

Кроме того, $r^{\tau} u'' \in C_{\tau_0}$, где $0 < \tau, \tau_0 < 1$, а r означает расстояние до $\mathcal{J}$.

Пользуясь случаем, диссертант выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю В.А.Кондратьеву за постановку задач и помощь при выполнении реферируемой работы.

Литература

I. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений т.3.

2. Кордес О первой краевой задаче для квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка более чем с двумя переменными. Математика. Сб.пер. 1959, 3:2, 73-107.

3. Лере и Шаудер Топология и функциональные уравнения. УМН, 1946, т.I, 3-4, 71-95.

4. Ниренберг О нелинейных эллиптических дифференциальных уравнениях в частных производных и непрерывности по Гельдеру. Математика. Сб.пер. 1959 3:3, 9-55.

5. Олейник О.А. О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа. Матем.сб. (Н.С.) I949. т.24, вып. 1, 3-I4.

6. Schauder J., Uber das Dirichletsche problem im Grossen für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen, Math.Z., 37, N 4 (I933), 623- 634.

7. Schauder J., Uber lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math.Z., 38, N 2 (I934), 257- 282.

Подп. к печати 11/У-67г. Л-41934. Ф. 60х90 1/16
Физ.п.л. 0,5. Заказ 1348. Тираж 200

Отпечатано на ротапринтах в тип. Изд-ва МГУ
Москва, Ленинские горы.

2k