В библиотеку

АКАДЕМИЯ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР
ОБЪЕДИНЕННЫЙ УЧЕНЫЙ СОВЕТ ОТДЕЛЕНИЯ
ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Т. АЖЫМУДИНОВ

МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ ЛЯМЕ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Фрунзе 1963

АКАДЕМИЯ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР
ОБЪЕДИНЕННЫЙ УЧЕНЫЙ СОВЕТ ОТДЕЛЕНИЯ
ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Т. АЖЫМУДИНОВ

Метод собственных функций для решения краевых задач, связанных с оператором Ляме

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель —
член-корреспондент АН УзССР,
доктор физико-математических наук,
профессор *Н. С. Аржаных.*

Фрунзе 1963

Работа выполнена в Ташкентском государственном университете им. В. И. Ленина.

Объединённый Ученый Совет Отделения естественно-технических наук АН Киргизской ССР просит Вас, и сотрудников Вашего учреждения, интересующихся темой диссертации Ажымудинова, Т., принять участие в заседании Ученого Совета или прислать свои отзывы.

Защита диссертации намечается на « » 1964 г.
Отзывы просим направлять по адресу: г. Фрунзе, ул. Пушкина, 78.
Дата рассылки « » 1963 г.

Ученый секретарь Совета (М. Кыдынов).

Метод собственных функций является одним из часто применяемых методов для решения краевых задач математической физики. Поэтому обоснование применимости этого метода к тем или иным задачам математической физики, имеет важное значение.

Настоящая работа посвящена решению первой плоской задачи математической теории упругости методом собственных функций (как для одного, так и для систем уравнений) и применению вариационного метода для вычисления собственных чисел и собственных функций этой задачи.

Работа состоит из введения и трех глав.

Во введении дается краткий обзор исследований, посвященных изучению решений первой задачи теории упругости. Здесь же изучается решение уравнения вида

$$Au-\lambda_0 Bu=F, \quad u\in D_0, \quad F\in H, \qquad (1)$$

где D_0—линейное множество, плотное в полном вещественном гильбертовом пространстве H, A и B—линейные симметричные и перестановочные между собой операторы, действующие из D_0 в H. К рассмотрению уравнений вида (1) приводят различные краевые задачи математической физики, в частности, краевые задачи теории упругости.

Для изучения первой задачи математической теории упругости доказывается следующее:

Теорема 1. Если выполнены следующие условия:

1) A—положительно определенный оператор;
2) оператор B представим в виде $B=M\Lambda$, где M и Λ—линейные операторы;
3) множество линейно независимых собственных векторов уравнения

$$Au-\lambda Bu=0 \qquad (2)$$

не более чем счетно;

4) собственные векторы $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ уравнения (2) ортогонализованы в смысле
$(\Lambda u_m, \Lambda u_n) = \delta_{mn}$ (δ_{mn} — символ Кронекера);
5) $(Au - \lambda_0 Bu, u) \geqslant \alpha^2 \| u \|_1^2$, то для единственного решения u уравнения (1) справедлива формула

$$u = A^{-1}F + \lambda_0 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(\Lambda u_\kappa, \Lambda A^{-1}F)}{\lambda_\kappa - \lambda_*} u_\kappa, \tag{3}$$

причем ряд в (3) сходится по норме пространства H.

Т е о р е м а 2. а) Собственные векторы уравнения (2), отвечающие различным собственным числам, ортогональны в H.

б) Последовательность собственных векторов уравнения (2) полна в пространстве H.

Проблема собственных чисел уравнения (2) рассматривалась в 1950 году С. Г. Михлиным [6] при положительной определенности операторов A и B.

В дальнейшем рассуждения проводятся для области S в плоскости (x,y), ограниченной замкнутой гладкой линией L.

Первая глава посвящена решению следующего уравнения:

$$a_0 graddiv w - b_0 rotrot w - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k_0^2 w = F, \quad a_0 > 2b_0 > 0, \tag{4}$$

при краевом и начальных условиях

$$w/_L = 0;$$

$$w/_{t=0} = \varphi(x,y);$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y).$$

Здесь $w(x,y,t)$ — двумерная векторная функция. Если через $W(x,y,\sigma)$, $F^*(x,y,\sigma)$ обозначить операторы Микусинского соответственно для функций $w(x,y,t)$, $f(x,y,t)$, то по известным формулам уравнение Ляме (4) преобразуется к виду

$$a_0 graddiv W - b_0 rotrot W - (\sigma^2 + k_0^2) W = F, \tag{5}$$

где $F(x,y\sigma) = F^*(x,y,\sigma) - \sigma\varphi(x,y) - \psi(x,y)$.

Граничное условие теперь запишется в виде

$$W|_L = 0. \tag{6}$$

На основании векторного тождества

$$\Delta W = graddiv W - rotrot W$$

задача (5), (6) сводится к решению одной из следующих краевых задач:

$$-\Delta W + b^2 W - \lambda_0 graddiv W = F_1, \tag{7}$$

$$W|_L = 0; \tag{8}$$

или

$$-\Delta W + a^2 W - \mu_0 rotrot W = F_2, \tag{9}$$

$$W|_L = 0. \tag{10}$$

Здесь

$$b^2 = \frac{\sigma^2 + k_0^2}{b_0}, \quad \lambda_0 = \frac{a_0 - b_0}{b_0}, \quad F_1 = -\frac{F}{b_0},$$

$$a^2 = \frac{\sigma^2 + k_0^2}{a_0}, \quad \mu_0 = \frac{a_0 - b_0}{a_0}, \quad F_2 = -\frac{F}{a_0}.$$

В § 1 главы 1 решается задача (7), (8). Через D_0 обозначим линейное множество функций, непрерывных вместе со своими первыми и вторыми производными в замкнутой области $\bar{S} = S + L$ и обращающихся в нуль на контуре L.

В качестве пространства Гильберта H рассмотрим множество векторных функций из L_2 со скалярным произведением

$$(u,v) = \iint_S [\overset{(1)}{u}(x,y)\overset{(1)}{v}(x,y) + \overset{(2)}{u}(x,y)\overset{(2)}{v}(x,y)]dxdy.$$

Тогда множество D_0 является плотным в пространстве L_2. На множестве D_0 зададим операторы

$$A = -\Delta + b^2, \quad B = graddiv, \quad M = grad, \quad \Lambda = div.$$

При этом краевая задача (7), (8) запишется в виде операторного уравнения

$$AW - \lambda_0 BW = F_1.$$

Показывается, что операторы A и B удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Тогда по формуле (3) решение задачи (7), (8) представимо в виде

$$W=\Box_b^{-1}F_1+\lambda_o\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(div W_\kappa, div\Box_b^{-1}F_1)}{\lambda_\kappa-\lambda_o}W_\kappa, \qquad (11)$$

где $\Box_b=-\Delta+b^2$, λ_n, W_n—собственное число и собственная функция для однородной краевой задачи*

$$\left.\begin{aligned}&(\Box_b-\lambda graddiv)W=0,\\&W|_L=0.\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

При получении формулы (11) предполагается, что λ_o не является собственным числом задачи (12).

В § 2 главы 1 рассматривается краевая задача (9), (10). Если в D_o рассмотрим операторы

$$A=-\Delta-a^2, \quad B=rotrot, \quad M=rot, \quad \Lambda=rot,$$

то краевая задача (9), (10) запишется в виде одного операторного уравнения

$$AW-\mu_o BW=F_2.$$

Показывается, что и в этом случае операторы A и B удовлетворяют всем условиям теоремы 1.

Решение задачи (9), (10) представимо в виде

$$W=\Box_a^{-1}F_2+\mu_o\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(rot z_\kappa, rot\Box_a^{-1}F_2)}{\mu_\kappa-\mu_o}z_\kappa, \qquad (13)$$

где $\Box_a=-\Delta+a^2$, z_n и μ_n—собственная функция и собственное число краевой задачи

$$\left.\begin{aligned}&(\Box_a+\mu rotrot)z=0,\\&z|_L=0.\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Так же предполагается, что μ_o не равен собственному числу задачи (14).

Сходимость рядов (11) и (13) вытекает из условия полноты собственных функций. Оригинал решения определяется по формуле обращения Римана-Меллина.

*) Задачей нахождения собственных функций и собственных чисел краевой задачи (12) при $b^2=0$ впервые занимался Е. и Ф. Коссера [2], [3], для нахождения которых они применили метод, отличный от нашего.

Разложения решений указанных задач в ряды по собственным функциям можно также получить из интегрального уравнения для объемного расширения и вихря вектора смещений.

В § 3 построена теория Гильберта—Шмидта для операторного уравнения (1) в другом виде, чем в [8]. Уравнение вида (1) рассматривалось в 1959 г. Д. Ф. Харазовым [8], при условии положительности оператора A и симметричности B, и для этого уравнения им построена теория Гильберта—Шмидта.

Теорема 3. Если имеют место условия 1—3 теоремы 1 и:

а) спектр оператора $A^{-1}B=D$ не содержит никаких точек кроме, быть может, собственных значений конечной кратности, множество которых не имеет предельных точек на конечном расстоянии;

б) $(\Lambda Du, \Lambda v)=(\Lambda u, \Lambda Dv)$ для $u, v\in D_o$;

в) для любого собственного элемента u уравнения

$$Au-\lambda Bu=0$$

имеет место неравенство

$$(\Lambda u, \Lambda u)\neq 0, \quad (\text{т. е. } \Lambda u\neq 0).$$

то для уравнения (1) справедлива теория Гильберта—Шмидта, т. е.

1) существует по крайней мере одно собственное значение уравнения (2);

2) все собственные значения вещественны, а собственные функции u_m и u_n, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в смысле

$$(\Lambda u_m, \Lambda u_n)=0, \quad m\neq n;$$

3) множество собственных значений

$$|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots\leqslant|\lambda_n|\leqslant\ldots$$

с соответствующими собственными функциями

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

нормированными условиями

$$(\Lambda u_m, \Lambda u_n)=\delta_{mn},$$

обладает следующими экстремальными свойствами: на множестве элементов $u\in D_o$, удовлетворяющих условиям:

$$(\Lambda u,\Lambda u)=1,\ (\Lambda u,\Lambda u_\kappa)=0\ (\kappa=1,2,\ldots,n)$$

функционал $|(\Lambda A^{-1}Bu,\Lambda u)|$ достигает на элементе $u=u_n$ максимума, равного $\frac{1}{|\lambda_n|}$;

4) для любого $f\in D_0$, ряд $\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(\Lambda f,\Lambda u_\kappa)}{\lambda_\kappa}\Lambda u_\kappa$ сходится слабо в D_0 к $\Lambda A^{-1}Bf$;

5) для единственного решения u уравнения (1) справедлива формула Шмидта

$$\Lambda u=\Lambda A^{-1}F+\lambda_0\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(\Lambda A^{-1}F,\Lambda u_\kappa)}{\lambda_\kappa-\lambda_0}\Lambda u_\kappa, \qquad (15)$$

причём ряд в (15) сходится слабо в D_0.

Результаты, изложенные в этом параграфе, применимы к изучению задач (7), (8) и (9), (10), так как эти задачи могут быть записаны в виде одного операторного уравнения

$$AW-\lambda BW=F, \qquad (16)$$

где операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 3.

Если $\Gamma(x,y;\xi,\eta)$—функция Грина оператора A (A—положительно-определенный оператор, поэтому существует A^{-1}), то задача (16) эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению

$$W=\lambda\iint\limits_S\Gamma(p,q)BW(q)dS_q-\iint\limits_S\Gamma(p,q)F(q)dS_q. \qquad (17)$$

В § 4 строятся интегро-дифференциальные уравнения вида (17), которые с помощью оператора Λ сводятся к следующим симметричным интегральным уравнениям:

$$\Theta(p)=\Theta_0(p)+\mu_0\iint\limits_S K(p,q)\Theta(q)dS_q \qquad (18)$$

для задачи (7), (8);

$$\Omega(p)=\Omega_0(p)+\lambda_0\iint\limits_S T(p,q)\Omega(q)dS_q \qquad (19)$$

для задачи (9), (10);

здесь

$$\Theta=divW,\quad \Omega=rotW;\quad \Theta_0=\frac{div\Box_b^{-1}F_1}{1+\lambda_0};\quad \Omega_0=\frac{rot\Box_a^{-1}F_2}{1-\mu_0};$$

$$K(p,q)=-\frac{1}{2\pi}[(\nabla_p,\nabla_q)G_b(p,q)-b^2K_0(br)],$$

$$T(p,q)=-\frac{1}{2\pi}[(\nabla_p,\nabla_q)G_a(p,q)+\begin{Bmatrix}10\\01\end{Bmatrix}(a^2K_0(ar)-(\nabla_p,\nabla_q)G_a(p,q)],$$

$K_0(cr)$—функция Бесселя 2-го рода с нулевым индексом от мнимого аргумента.

Решения интегральных уравнений (18) и (19) запишутся по формуле Шмидта (в виде (15)).

Тогда решение вышеназванной задачи определяется в виде:

$$W=\Box_b^{-1}[F_1-\lambda_0 grad\Theta_0-\lambda_0\mu_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\Theta_0,\Theta_n)}{\kappa_n-\mu_0}grad\Theta_n]$$

в случае собственных функций Θ_n,

$$W=\Box_a^{-1}[F_2-\mu_0 rot\Omega_0-\lambda_0\mu_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\Omega_0,\Omega_n)}{\chi_n-\lambda_0}rot\Omega_n]$$

в случае собственных функций Ω_n, здесь κ_n,Θ_n и χ_n,Ω_n—соответствующие собственные числа и собственные функции однородных уравнений, соответствующих интегральным уравнениям (18) и (19).

Во второй главе излагается решение первой краевой задачи уравнения Ляме вариационным методом.

В § 1 главы II на основе неравенства Фридрихса доказывается, что оператор первой задачи теории упругости положительно—определенный. По сравнению с работами [7] и [8] доказательство этого предложения проводится несколько иным способом:

§ 2 главы II посвящен вариационной задаче, связанной с нахождением собственных чисел и собственных функций краевой задачи (12) и (14). Вариационная задача, связанная с задачами теории упругости, была рассмотрена следующими авторами: Р. Курант, Д. Гильберт [5], А. Кнешке [4], К. Фридрихс [8], Л. С. Лейбензон [6], С. Г. Михлин [7]. Во всех этих исследованиях вариационные задачи даются на основе принципа минимума потенциальной энергии.

В этом параграфе нахождение собственных чисел и собственных функций задачи (12) связывается с вариационной проблемой о минимуме обобщенного интеграла Дирихле

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dxdy \tag{20}$$

при условии нормировки

$$\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dxdy=1. \tag{21}$$

Если требуется найти собственные элементы задачи (14), то соответствующая вариационная задача также сводится к нахождению минимума функционала (20), но условие (21) заменяется условием

$$\iint_S\left(\frac{dv}{dx}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy=1.$$

Устанавливается, что если найдены $n-1$ собственных чисел, то n-ое собственное число отыскивается как минимум функционала (20), но n-я собственная функция, кроме условий (6) и (21), еще подчиняется условию ортогональности к предыдущим собственным функциям в смысле

$$(\Theta,\Theta_1)=(\Theta.\Theta_2)=\ldots=(\Theta,\Theta_{n-1})=0.$$

Доказывается теорема об отрицательности всех собственных чисел задачи (7), (8) и о положительности собственных чисел задачи (9), (10).

В более общем виде формулируется вариационная задача для трехмерного пространства в случае задачи типа (14) и для n-мерного пространства, когда задача имеет вид (12).

В качестве иллюстрации применения вариационного метода в § 3 главы II вычислены методом Ритца собственные числа и собственные функции для области, имеющей форму прямоугольника и эллипса. Полученные результаты согласуются с результатами Е. и Ф. Коссера [3].

В главе III результаты главы I переносятся на следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\Delta\omega_i+P\sum_{k=1}^{m}a_{ki}w_k=f_i \quad (i=1,2\ldots,m) \tag{22}$$

в статическом случае и

$$\Delta\omega_i+P\sum_{k=1}^{m}a_{ki}w_k-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\omega_i}{\partial t^2}-\kappa^2{}_0w_i=f_i \tag{23}$$

в динамическом случае, здесь P—оператор вида *graddiv* или *rotrot*, a_{kl}—постоянные, определяющие матрицу $\overline{A}=\|a_{kl}\|$, $w(x,y,t)$—двумерная векторная функция.

В § 1 система (22) с помощью подстановки

$$w_i=\sum_{k=1}^{m}\beta_{kl}W_k,\quad \overline{B}=\|\beta_{kl}\|\neq 0$$

сводится к системе

$$\Delta W_i+\lambda_iPW_i=g_i,\quad g_i=\overline{B}^{-1}f_i \tag{24}$$

в случае, когда характеристические числа матрицы $\overline{A}$ почти простые*, и к системе

$$\left.\begin{array}{l}\Delta W_1+\mu_1PW_1=g_1\\ \Delta W_2+\mu_1PW_2=g_2-PW_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta W_k+\mu_1PW_k=g_k-PW_{k-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta W_m+\mu_ePW_m=g_m-PW_{m-1}\end{array}\right\} \tag{25}$$

*) Характеристическое число λ матрицы $\overline{A}$ назовем почти простым, если все элементарные делители этой матрицы, отвечающие характеристическому числу λ, являются простыми. В противном случае характеристическое число назовем кратным.

в случае, когда корни характеристического полинома кратные. Дается решение системы уравнений (24), (25).

В § 2 на основании результатов главы I и § 1 главы III показывается, что система (23) при заданных граничных и начальных условиях решается полностью. Следует отметить, что при построении интегро-дифференциального уравнения вида (17) для системы типа (7) строится одна функция Грина для всех уравнений системы, а для каждого уравнения системы типа (9) строится своя функция Грина.

Основное содержание данной диссертации опубликовано в заметках [11]—[16] и доложено: на Ташкентском городском семинаре по математическому анализу, на заседании кафедры математического анализа Ташкентского госуниверситета, на семинаре математиков г. Фрунзе и на первой Казахстанской межвузовской конференции по математике и механике в г. Алма-Ата.

Цитированная литература

1. *Аржаных И. С.*, Обращение волновых операторов. Ташкент. АН Уз. ССР, 1962.

2. *Cosserat E.* и *F.*, Sur les équations de la theorie élasticite. Comptes Rendus, т. 126, p. 1089, Paris, 1898.

3. *Cosserat E.* и *F.*, Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoide élastiqul. Comptes Rendus, т. 127, p. 315, Paris, 1898.

4. *Kneschke A.* Differentialgleichungen und Randwertprobleme. Band III. Berlin, 1962.

5. *Курант Р., Гильберт Д.*, Методы математической физики, т. II, 1945.

6. *Лейбензон Л. С.*, Вариационные методы решения задач теории упругости. Гостехиздат, 1943.

7. *Михлин С. Г.*, Вариационные методы в математической физике, Москва, ГИТТЛ, 1957.

8. *Friedrichs K.*, On the boundary-value problems of the theory elasticity and Korn's inequality. Annals of mathematics. V. 48, № 2, 1947.

9. *Харазов Д. Ф.*, К спектральной теории полуограниченных операторов. Труды Тбилисского матем. института им. А. М. Размадзе. Т. XXVI. Тбилиси, 1959, стр. 153—171.

10. *Харазов Д. Ф.*, О некоторых свойствах линейных операторов, обеспечивающих справедливость теории Гильберта—Шмидта. Успехи математических наук, т. XII, выпуск 4 (76), 1957, стр. 201—207.

11. *Ажымудинов Т.*, Решение плоской задачи динамики теории упругости методом фундаментальных функций. Известия АН Уз. ССР, № 5, 1962, серия физико-математических наук.

12. *Ажымудинов Т.*, О решении одной гиперболической системы, связанной с теорией упругости методом фундаментальных функций. Научные труды, Таш. ГУ, № 208, Математика, Ташкент, 1962.

13. *Ажымудинов Т.*, О решении методом фундаментальных функций некоторых краевых задач. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, вып. II, Фрунзе, 1962.

14. *Ажымудинов Т.*, Вариационная задача, связанная с нахождением собственных чисел и фундаментальных функций двухмерного уравнения

Ляме. Известия АН Уз. ССР, серия физико-математических наук, № 2, 1963.

15. *Ажымудинов Т.*, Нахождение фундаментальных функций и собственных чисел по методу Ритца для первой задачи теории упругости. Материалы XI-ой научной конференции проф.-препод. состава физ.-матем. факта Кирг. ГУ, секция математики, Фрунзе, 1963.

16. *Ажымудинов Т.*, О положительной определенности оператора первой задачи теории упругости. Материалы VII-ой научной конференции кафедры высшей математики Фрунзенского политехнического института. Фрунзе, 1963.

Подписано в печать 20/XII-1953 г. Объем 1 п. л. Формат бумаги $60 \times 90^1/_{16}$
Д — 03960 Зак. 3012/1 Тираж 150 экз.

Г. Фрунзе, типография АН Киргиз. ССР.