На правах рукописи

М. В. АВДУЛОВ

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНОМАЛИЙ НАД ТЕЛАМИ ПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель член-корреспондент АН СССР В. А. МАГНИЦКИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1965

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения принять участие в заседании Ученого совета отделения геофизики физического факультета МГУ или прислать свои отзывы. О дне и времени защиты будет сообщено в газете «Вечерняя Москва».

Ориентировочная дата защиты декабрь 1965 г., январь 1966 г.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук (*Л. Н. Рыкунов*)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Количественная интерпретация гравитационных аномалий тесно связана с оценкой точности гравиметрических материалов. Без оценки точности, правильно проведенной, результаты наблюдений нельзя использовать для практических целей. Наиболее правильное представление о точности гравиметрической карты дает полная ошибка интерполяции (1),

$$\overline{E}_{и} = \sqrt{E_{и}^2 + \varepsilon_a^2}, \tag{1}$$

здесь $\overline{E}_{и}$ — полная ошибка интерполяции $E_{и}$ — чистая ошибка интерполяции, ε_a — ошибка вычисления аномалии на гравиметрическом пункте. Для вычисления чистой ошибки интерполяции обычно используют выражение (2):

$$E_{и} = 2K\sqrt{x}, \tag{2}$$

где X — сторона отсека, K — коэффициент, зависящий от аномальности гравитационного поля.

Методика определения K в выражении (2) заключается в следующем. Сеть наблюденных значений силы тяжести разрежается в несколько раз. В точках, исключенных из рассмотрения, путем интерполяции определяется новое значение силы тяжести. Разность между наблюденным и вычисленным значением определяет чистую ошибку интерполяции. Таким путем удается составить систему уравнений, единственным неизвестным в которых является K. Решая эту систему относительно K по методу наименьших квадратов, находят искомое значение коэффициента. Методика определения коэффициента K в выражении (2) основана на допущении постоянства K в пределах данной территории при разных расстояниях между точками измерительной сети. Однако можно показать, что величина K не остается постоянной, а меняется с изменением X. При размерах отсека, сравнимых с поперечником аномалии, коэффициент K имеет максимальное значение, с уменьшением x K быстро уменьшается и становится равным нулю для тех расстояний, при которых поле внутри отсека меняется по линейному закону. Отсюда можно сделать вывод, что хотя ошибка интерполяции наиболее правильно характеризует точность гравиметрической карты, методы ее определения все еще весьма несовершенны и для ее вычисления должен быть предложен другой подход.

В ряде случаев интерпретации гравиметрических материалов поле внутри отсека нужно представить одним числом. Ошибка, которая при этом допускается, носит название ошибки представительства. Если поле внутри отсека постоянно, то ошибки интерполяции и представительства равны нулю. Если в отсеке сила тяжести меняется по линейному закону, то ошибка интерполяции равна нулю; а ошибка представительства нулю не равна и тем выше, чем больше градиент аномалии в отсеке. Когда в отсеке поле меняется по сложному закону, ошибки представительства и интерполяции совпадают в пределах точности наблюдений. Было показано, что чистая ошибка представительства связана со средним градиентом аномалии простым уравнением $E=0{,}25\cdot c\cdot x$ (3), где c — средний градиент аномалии. Сделанные замечания позволяют дать следующие рекомендации по оценке точности гравиметрических карт. Для тех участков, на которых поле постоянно или изменяется линейно, точность карты целиком определяется ошибкой вычисления аномалии на гравиметрическом пункте. На участках со сложной структурой гравитационного поля ошибку интерполяции можно вычислить с помощью равенства (3).

В целом ряде случаев обработки и интерпретации гравиметрических материалов возникает необходимость в графическом интегрировании аномалий силы тяжести. При этом допускается ошибка, которая носит название ошибки интегрирования. Понятие ошибки интегрирования можно ввести следующим путем.

Пусть дан интеграл $I=\int\limits_0^{\Sigma} f(x)\,dx$. По определению интеграла имеем

$$\int\limits_0^{\Sigma} f(x)\,dx=\lim\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\,\Delta x_i,\quad n\to\infty,\ \text{когда}\ \Delta x_i\to 0. \qquad (4)$$

Если теперь в (4) приращение аргумента Δx_i получит конечный размер, то n также станет конечной величиной. В этом случае правая часть выражения (4) уже не будет равна левой:

$$\int\limits_0^{\Sigma} f(x_i)\,dx-\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\,\Delta x_i=R_n, \qquad (5)$$

здесь R_n — ошибка интегрирования.

Удалось установить, что ошибка интегрирования в пределах одного отсека связана с ошибкой представительства уравнением $E=1{,}46\cdot E\cdot K$(6), где K — коэффициент, зависящий от параметров отсека. Поэтому ошибку интегрирования для всех отсеков получим по правилу среднеквадратичной погрешности суммы:

$$E=1{,}46\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} m_i E_{in}^2 K_i^2}, \qquad (7)$$

где n — количество кольцевых зон, m — количество отсеков в каждой зоне.

Одна из главных задач гравиметрии заключается в определении параметров масс, вызывающих возмущения поля силы тяжести. Для решения этой задачи используются разные способы интерпретации. Среди них важное место принадлежит методу сравнений. Метод обладает рядом достоинств:

1. Он прост, но вместе с тем в значительном числе случаев позволяет получать достаточно устойчивые решения.

2. При интерпретации гравитационных аномалий методом сравнений определяются форма, глубина погружения, размеры, а иногда и плотность аномального тела.

Хотя метод обладает отмеченными достоинствами, его возможности существенно ограничены тем, что прямая задача гравиметрии решена для небольшого числа тел сравнительно простой формы. В этом отношении применение вычислительной техники раскрывает новые возможности.

Приняв земную поверхность за плоскость XOY, а ось z направив вниз, в сторону аномальных масс, имеем следующее выражение для аномалий силы тяжести в точках профиля наблюдений x:

$$V_z=f\sigma\iiint\frac{L\,d\varepsilon\,d\eta\,dL}{[(\varepsilon-x)^2+L^3+\eta^2]^{3/2}}. \qquad (8)$$

Для второй производной гравитационного потенциала

$$V_{zz}=f\sigma\iiint\frac{[2L^2-(\varepsilon-x)^2-\eta^2]}{[(\varepsilon-x^2)+\eta^2+L^2]^{5/2}}\,d\varepsilon\,d\eta\,dL. \qquad (9)$$

Путем решения первой и второй квадратуры в равенствах (8) и (9) удалось получить выражение аномалий силы тяжести и их вертикальных производных для следующих тел правильной геометрической формы:

1) вертикальный круговой цилиндр,
2) горизонтальный цилиндрический сегмент,
3) вертикальный эллиптический цилиндр,
4) горизонтальный эллиптический цилиндр,
5) вытянутая антиклиналь, ограниченная плоскими гранями,
6) тело с вертикальным сечением в форме параллелограмма, наклоненного на угол α.

Полученные выражения можно использовать для расчета теоретических кривых. Применение для этой цели электронно-счетных машин позволит решить задачу достаточно быстро и с любой нужной степенью приближения. На основании расчетов, выполненных в вычислительном центре МГУ, составлен альбом теоретических кривых, который может быть использован для количественной интерпретации гравитационных аномалий. Кривые построены в билогарифмическом масштабе, что позволило исключить влияние избыточной плотности.

Одна из наиболее трудных задач интрепретации заключается в разделении гравитационных полей. Разными авторами предложено много способов разделения аномалий, однако до сих пор эта проблема далека от своего полного решения. В общем случае на кривой аномалии силы тяжести можно выделить три отдельных зоны. Назовем их первой, второй и третьей и обозначим соответственно через ε_1, ε_2, ε_3. В первой и третьей зонах изменение силы тяжести происходит по достаточно сложному закону. График изменения силы тяжести во второй зоне с некоторым приближением можно представить прямой линией, причем тангес угла наклона прямой к оси X приближенно равен максимальному значению градиента для данной аномалии. Если сравнить теоретическую кривую с кривой, снятой с гравиметрической карты, то главное отличие заключается в том, что во втором случае отсутствует зона ε_3. Это связано с тем, что на значительном расстоянии от центра сказывается влияние соседних аномалий, которые искажают граничную часть локальной аномалии над изучаемым объектом. Таким образом, при количественной интерпретации исследователь вынужден ограничиваться только той частью аномалии, которая сравнительно хорошо снимается с гравиметрической карты. В результате допускается ошибка. Она может быть весьма велика. Между тем в случае тела достаточно правильной формы все три части локальной аномалии выражаются одной математической формулой. Это означает, что между третьей зоной и теми зонами, которые определяются по гравиметрической карте, существует функциональная связь. Обозначим общую амплитуду первой и второй зон через A', амплитуду третьей зоны аномалии через ΔA. Тогда A' и ΔA будут связаны между собой простым уравнением: $A' + \Delta A = A$, где A — полная амплитуда аномалии. Рассмотрим проекции ε_1 и ε_2 на ось X и через η обозначим их отношение $\eta = \frac{\text{пр}\varepsilon_1}{\text{пр}\varepsilon_2}$. Коэффициент η, так же как и период аномалии r, является главным параметром аномалии. При известных r и η в большинстве случаев можно определить основные параметры гравитирующей массы. Полное значение амплитуды аномалии можно определить с помощью графика, выражающего зависимость отношения $\frac{\Delta A}{A'}$ от параметра аномалии η. При расчетах кривой в качестве модели гравитирующей массы использовался вертикальный цилиндр. Размеры и глубина погружения цилиндров менялись в следующих пределах: R от 1 до 15, h от 1 до 8, H от 4 до 20.

Для тел, по своей форме мало отличающихся от вертикального цилиндра, полученный график позволяет определять среднее значение амплитуды аномалии со средней ошибкой около 6%.

В общем случае обратная задача гравиметрии считается решенной, если параметры возмущающей массы выражены через параметры аномалии с помощью элементарных функций. В случае вертикального кругового цилиндра интеграл (8) в элементарных функциях не выражается. Следовательно, строгое решение поставленной задачи в данных условиях невозможно. Однако, если имеется достаточно большой набор теоретических кривых, связь между параметрами гравитирующей массы и параметрами аномалии можно установить эмпирически. Рассмотрим параметр η и функцию $P = \frac{r}{z}$, здесь z — глубина центра тяжести тела, r — период аномалии. Значения η и P целиком определяются заданием параметров гравитирующего тела. Это означает, что P и η зависят от одних и тех же переменных и между ними должна существовать функциональная связь. Были построены графики зависимости функции P от η. Полученные кривые имеют форму эллипсов. Следовательно, каждому η отвечают два значения z. Однако в большинстве случаев при известном η, принимая во внимание результаты интерпретации другими методами, можно получить ограничения, которые позволят однозначно определить глубину центра тяжести гравитирующей массы со средней ошибкой 10%.

Как уже отмечалось, r и η несут основную информацию о параметрах тела, и их значения можно использовать для определения поперечных размеров возмущающей массы. Рассмотрим функцию $F = \frac{r}{R}$, где r — период аномалии, R — радиус цилиндра. Значения этой функции весьма чувствительны к изменению поперечных размеров аномального тела. Был составлен график функции F от η. С помощью полученной кривой при известном η легко определяются поперечные размеры цилиндра. При больших η R вычисляется достаточно точно, при малых η поперечник тела определяется значительно менее надежно. Следует отметить, что оценка точности вычисления полной амплитуды аномали A и вертикальной координаты центра тяжести z дана без учета ошибок вычисления коэффициента η. Поскольку η определяется с ошибкой, реальная точность метода должна быть несколько ниже.

На основании известной теоремы Гаусса для потенциалов можно получить выражение, которое связывает аномалию силы тяжести с избыточной массой гравитирующего тела.

$$\frac{1}{2\pi f}\int\limits_{\infty} V_z\,ds = M, \tag{10}$$

здесь интегрирование проводят по бесконечной плоскости.

На гравиметрической карте аномалия имеет конечные размеры, поэтому интеграл, состоящий в левой части равенства (10), распадается на два:

$$\frac{1}{2\pi f}\int\limits_{\infty} V_z\,ds = \frac{1}{2\pi f}\int\limits_{0}^{s_r} V_z\,ds + \frac{1}{2\pi f}\int\limits_{s_r}^{\infty} V_z\,ds, \tag{11}$$

или

$$M = M_1 + M_2.$$

Первое слагаемое в правой части выражения (11) достаточно быстро и с хорошей точностью определяется по гравиметрической карте. Для вычисления второго интеграла обычно используют формулу

$$M_2 = \frac{r^2 V_z(r)}{f}. \quad (12)$$

В выражение (12) входит величина $V_z(r)$, где r — период аномалии. Однако при интерпретации величину $V_z(r)$ принимают за условный нуль. Подставив в выражение (12) $V_z(r) = 0$, получаем 0. Поэтому в обычных условиях исследователь лишен возможности оценить величину M_2. Эта оценка станет возможной, если $V_z(r)$ положить равной ΔA. Как показало вычисление массы тел для моделей, на M_2 падает до 80% общей величины M. Поэтому определение остаточного интеграла является обязательным условием точного вычисления избыточной массы аномального тела.

Допустим, что при расстояниях, которые больше или равны r, аномалию с достаточным приближением можно аппроксимировать аномалией над телом сферической формы.

Тогда получим

$$\frac{1}{2\pi f}\int_{s_r}^{\infty} V_z ds = \frac{V_z(r)}{f} r^2\left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right), \quad (13)$$

отсюда

$$M_2 = \frac{V_z(r)}{f} r^2\left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right) \quad (14)$$

и, если $r \gg z$, выражение (14) переходит в (12). Определим второе слагаемое в выражении (14). С этой целью было построено семейство кривых V_z для тела сферической формы. Глубина центра тяжести последовательно менялась от 1 до 10. Для каждой кривой графически определена величина r и вычислено отношение $\frac{z}{r}$. Во всех случаях оно оказалось равным единице.

Таким образом, для сферы

$$\frac{z^2}{r^2} = 1$$

и, следовательно, для вычисления величины M_2 при сделанных ранее предположениях более правильной является формула (15).

$$M_2 = \frac{2V_z(r)}{f} r^2. \quad (15)$$

Аналогичные выражения были получены для двухмерного тела, а также для остаточного интеграла при вычислении вертикальной координаты центра тяжести массы. В случае двухмерного тела остаточный интеграл имеет вид $M_2 = \frac{U_z(r) \cdot r}{f}$, при вычислении вертикальной координаты $z_2 = 0{,}414\ r$.

В настоящее время наиболее перспективными являются интегральные методы решения обратной задачи, так как они позволяют производить оценку параметров гравитирующей массы без каких-либо предположений о ее форме. Однако эти методы требуют интегрирования аномалий по бесконечной плоскости. На практике приходится ограничиваться интегрированием аномалий в пределах того участка, где аномалия достаточно хорошо снимается с гравиметрической карты. Выражения для оценки остаточных интегралов можно получить в предположении, что на значительном удалении от центра гравитационное поле хорошо определяется массой сферической формы. Последнее условие выполняется далеко не всегда. Чтобы освободиться от сделанного предположения, нужно аналитически продолжить гравитационную аномалию в плоскости наблюдений.

Пусть имеется аномалия, вызванная телом достаточно правильной формы. Будем считать, что аномалия задана на отрезке от 0 до r и требуется получить распределение аномалии на отрезке от r до d, $d \gg r$. С этой целью допустим справедливость следующего утверждения: пусть V_z и V_z^1 — аномалии силы тяжести, периоды которых совпадают и равны r. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\max|V_z - V_z'| \gg \max|V_z - V_z'|, \quad x \leqslant r, \quad x > r. \quad (16)$$

Для обоснования сделанного предположения были исследованы 126 кривых над телами цилиндрической формы. Теоретические кривые были разбиты на пары. В каждую пару объединялись аномали с равными периодами. Результаты вычислений полностью подтверждают неравенство (16).

Полученные результаты позволяют сделать следующее заключение. Пусть V_z — аномалия силы тяжести над изолированным геологическим телом достаточно правильной формы и Q_n — полином степени n, который среди множества всех полиномов n-й степени наилучшим образом представляет функцию V_z на отрезке $[0, r]$. Тогда этому полиному можно поставить в соответствие только один полином P_m степени m, который среди всех полиномов степени m наилучшим образом представляет функцию V_z на отрезке $[r, d]$. Полученные выводы позволяют проблему аналитического продолжения функции V_z в плоскости XOY решить с помощью полиномов равномерного приближения. Алгоритм построения таких полиномов сравнительно прост, но требует большого объема вычислений, однако это препятствие не является существенным, когда используют быстродействующие вычислительные машины.

В заключение коротко суммируем основные выводы работы:

1. Получены простые выражения для оценки ошибок интерполяции и представительства. Удалось показать, что эти ошибки являются функцией градиента аномалии в отсеке.

2. Получены выражения, которые сравнительно просто позволяют вычислять аномалии для некоторых тел правильной геометрической формы. Составлен альбом теоретических кривых для тел цилиндрической формы.

3. Составлены графики, с помощью которых по известному гравитационному полю можно определить полное значение амплитуды аномалии, а также основные параметры возмущающего тела.

4. Получены простые и более точные формулы для определения остаточных интегралов в случае вычисления вертикальной координаты центра тяжести аномального тела и его избыточной массы.

5. Делается вывод, что задача аналитического продолжения гравитационных аномалий в плоскости наблюдений принципиально может быть решена с помощью полиномов равномерного приближения. Однако задача построения полиномов наилучшего приближения требует больших вычислений. Поэтому полученные выводы не исключают поисков более простого решения проблемы.

Основные вопросы диссертации изложены в следующих работах:

1. Авдулов М. В. Об интерпретации гравитационных и магнитных наблюдений методом теоретических полей. «Прикладная геофизика», вып. 30, 1961.
2. Авдулов М. В. Определение ошибки представительства аномалий силы тяжести методом средних градиентов. «Известия МВО», сер. геодезическая, вып. 4, 1961.
3. Авдулов М. В. Оценка точности гравиметрических карт. «Прикладная геофизика», вып. 36, 1963.
4. Авдулов М. В. Количественная интерпретация гравитационных аномалий над телами правильной формы. «Физика земли» (в печати).

Сдано в набор 6/XI 1965 г. Подписано к печати 20/XI 1965 г.
Л-49690. Зак. 929. Печ. л. 0,5. Тираж 200 экз.
Типография Изд-ва МГУ, Москва, Ленинские горы