МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
САРАТОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

На правах рукописи

АБДЫЛДАЕВ М.

Исследование некоторых вопросов трёхмерных пространственных струйных течений несжимаемой жидкости

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Саратов 1962

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
САРАТОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

На правах рукописи

АБДЫЛДАЕВ М.

Исследование некоторых вопросов трехмерных пространственных струйных течений несжимаемой жидкости

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель доктор физико-математических и техниче-ских наук, профессор Ф. И. Франкль

Саратов 1962

Работа выполнена в Киргизском государственном университете. Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения, интересующихся темой диссертации Абдылдаева, принять участие в заседании Ученого Совета или прислать свои отзывы. О дне и времени защиты за 10 дней до защиты будет опубликовано в областной газете «Коммунист».

Дата отправки реферата . . . . . 1962 г.

Задачи, решенные в данной работе, представляют серьезные попытки произвести теоретический расчет осесимметричного струйного течения. Решение этих задач может найти применение в проблеме развития регулирования расхода воды, подаваемой в гидротурбину; гидромеханизации горных работ; изучения теории пельтоновых колес гидротурбин и т. д.

Работа состоит из четырех глав. В первой главе помещен литературный обзор, где изложены некоторые методы решения как плоские, так и пространственные задачи течения струй.

Во второй главе рассматриваются следующие задачи:

1. Истечение жидкости из бесконечно длинного осесимметричного сосуда (воронки). В силу осевой симметрии рассмотрим течение в верхней меридиональной полуплоскости, в которой мы поместим систему декартовых координат x и r. Ось x совпадает в осью симметрии течения.

Течение жидкости ограничивается с одной сторона образующей стенки сосуда и образующей свободной поверхности струи, а с другой — осью симметрии течения. Угол наклона образующей стенки сосуда с отрицательной стороной оси x составляет Θ_0 (для данного примера $\Theta_0 = \pi/4$).

Требуется найти форму свободной поверхности струи, коэффициент сжатия у выхода и поле скоростей.

Задача решается методом сеток [1], т. е. путем замены дифференциального уравнения функции тока уравнением в конечных разностях.

Уравнение функции тока в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0, \qquad (1)$$

Краевые условия задачи:

а) поскольку в нулевом приближении мы считаем струи цилиндрической, вследствие чего на свободной поверхности струи имеем:

$$V_x = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} = 1, \qquad (2)$$

б) на линии тока проходящей по стенке сосуда и свободной поверхности струи $\Psi = Q$, где Q – постоянная величина и должна быть найдена как неизвестный параметр, определяющий расход жидкости, а на линии тока проходящий по оси симметрии течения

$$\psi = 0.$$

Уравнение (1) в конечных разностях принимает вид:

$$\left(\psi^{(m)}_{i+1,k} - 2\psi^{(m)}_{ik} + \psi^{(m)}_{i-1,k}\right) + k\left[\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\left(\psi^{(m)}_{i,k+1} - \psi^{(m)}_{ik}\right) - \frac{1}{k-\frac{1}{2}}\left(\psi^{(m)}_{ik} - \psi^{(m)}_{i,k-1}\right)\right] = 0. \qquad (3)$$

Причем $\psi^{(m)}_{ik} = \psi^{(m)}\left(ih, kh\right)$ – определяет функцию тока в узлах квадратной сетки h (h мы брали равным единице), а i и k меняются $M_1 \leqslant i \leqslant M_2$; $0 \leqslant k \leqslant N(i)$ (в нашем примере было $M_1 = -11$; $M_2 = 5$; и $N = 3$ при $i \geqslant 0$; $N = 3 - i$ при $i < 0$)

Краевые условия при этом будут:

а) $$V_x = \frac{1}{h\left(N+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\psi^{(m)}_{i,N+1} - \psi^{(m)}_{i,N}}{h} = 1 \qquad (3)$$

на свободной поверхности струи,

б) $\psi^{(m)}_{ik} = Q^{(m)}$; и $\psi^{(m)}_{i,0} = 0$ соответственно на границах.

Нулевое приближение функции тока в узлах квадратной сетки прямоугольника OВГЕ вычисляется по формуле:

$$\psi^{(0)}_{ik} = \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2, \qquad (5)$$

где r – переменный радиус $(0 \leqslant r \leqslant r_0)$. Ввиду пропорциональности функции тока квадрату расстояния от нулевой функции тока, в нулевом приближении для расхода можно принять:

$$Q^{(0)} = \frac{1}{2}r_0^2, \qquad (6)$$

где r_0 – радиус у выхода сосуда (в нашем примере r_0 = [illegible])

В области ADBO находится следующим образом. Предполагая, что на линии AD находятся равномерно распределенные источники, а в точке C лежащие на оси симметрии и составляющие с стенкой сосуда угол Θ_0, находится сток, имеем:

$$\psi^{(0)}_{ik} = \frac{r_0^2}{2}\cdot\frac{1-\cos\Theta}{1-\cos\Theta_0}, \qquad (7)$$

где Θ – переменный угол $(0 \leqslant \Theta \leqslant \Theta_0)$.

По этой формуле найдем значение тока на линии AD.

Графически интерполируя находим значения функции тока в десяти точках линии AD соответствующее значениям функции тока в десяти точках линии OB. Соединяя эти точки в области ADBO получим прямые линии, где значения функции тока постоянны. Далее построив графики между X_i (их всего одиннадцать) и X_0 (линия OB, где значения функции тока известны) находим значения функции тока в узлах квадратной сетки области.

Применяя теперь метод наискорейшего спуска [2], находим значения функции тока в узлах сетки в последующих приближениях.

Процесс нахождения значения функции тока в узлах сетки продолжается до тех пор, пока последующее приближение практически не отличается от предыдущего. Найдены нулевое, первое и второе приближения и приведены соответствующие таблицы.

Для каждого приближения получим разные решения свободной поверхности. Для полученного решения задаем краевое условие

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} = \cos\alpha\,(x, 0) \qquad (8)$$

на свободной поверхности и снова заменяя дифференциальное уравнение и соответствующие краевые условия уравнением в конечных разностях находим другое решение и т. д.

Коэффициент сжатия у выхода составляет $k = 1{,}25$.

Этот результат подтверждается экспериментальной работой, выполненной мною в гидродинамической лаборатории Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова и помещенной в четвертой главе данной работы.

Поле скоростей, в частности распределения скоростей вдоль стенки сосуда и ось симметрии находится по формуле (4) применительно в различных условиях.

II. Истечение жидкости из бесконечно-длинного осесимметричного сосуда с препятствием на оси.

Течение жидкости на меридиальной полуплоскости ограничивается с одной стороны образующей стенки сосуда BDC и образующей свободной поверхности струи DE с другой осью симметрии течения AONK и ломанной OMN, где OMN, представляет собой образующую двойного конуса, который служит препятствием для истечения жидкости. При этом имелось ввиду схематизировать регулятор расхода воды, подаваемой в гидротурбину. Углы наклона CD, MN и OM к оси симметрии соответственно равны

$$\Theta_1=\Theta_2=-\frac{\pi}{4}; \qquad \Theta_3=\frac{\pi}{4}.$$

Требуется найти форму свободной поверхности струи, коэффициент сжатия у выхода и поле скоростей.

Задача решается как и в первой задаче методом сеток. Дифференциальное уравнение функции тока в цилиндрических координатах и краевые условия те же, с той лишь разницей, что вторые условия выполнены соответственно на ломаной BCDE и на ломаной AOMNK.

Значения функции тока в нулевом приближении в узлах квадратно сетки (h=1 прямоугольников ABO_1O и DEKD, вычисляются по формуле (5)* (первая задача) и

$$\overset{(0)}{\psi}_{hk}=\frac{r_0^2}{2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2, \tag{8}$$

где r — переменный радиус $(0\leq r\leq r_1)$, r_1 — радиус сосуда до препятствия (в нашем примере $r_1=8h=8$).

$\frac{r_0^2}{2}$ —есть как и в первой задаче расход жидкости ($r_0=4h=$ $=4$). В области OO, CDD, NMO вычисляется по формуле:

$$\overset{(0)}{\psi}_{hk}=\frac{r_0^2}{2}\left[A^*(r-r_m)+B^*(r-r_m)^2\right], \tag{10}$$

где r_m — минимальный радиус, т. е. $r_{min}=r(x)$; A^* и B^* — постоянные и они определяются из требования:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=0 \text{ при } r=0 \text{ и } \psi=Q \text{ при } r=r_{max}, \tag{11}$$

где r_{max} — максимальный радиус, т. е. радиус до стенки сосуда. Формула (10) представляет собою интерполяционную формулу, причем формулы (11) выбраны так, чтобы обеспечить наилучшие интерполяции.

Пользуясь методом наискорейшего спуска находим остальные приближения. И для этой задачи тоже найдены нулевое, первое и второе приближения и приведены в соответствующих таблицах.

Нахождение формы свободной поверхности как в первой задаче. Коэффициент сжатия у выхода составляет K=5%.

Распределение скоростей вдоль стенки BCD и ось симметрии AOMNK вычисляются по формуле (4) применительно в различных условиях.

Приведены графики этих распределений скоростей как для первой так и для второй задачи.

III. Симметричное набегание круглой струи во внутренней поверхности параболоида вращения.

Задача представляет интерес с точки зрения гидромеханизации горных работ.

Течение на меридиональной полуплоскости ограничивается с одной стороны осью симметрии течения и образующими параболоида, с другой — свободной поверхностью струи (ось симметрии струи совпадает с осью параболоида вращение и с осью x).

Требуется найти форму свободной поверхности струи и поле давлений. Задача решается методом сеток. Будем искать координаты функции тока x и r в зависимости от функции тока и потенциала скоростей.

Дифференциальное уравнение в этом случае имеет вид и краевые условия задачи:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(r\cdot\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)=0. \tag{12}$$

1. На свободной поверхности $\Psi=Q$ скорость потока равна единице, т. е.

$$\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2=1 \tag{13}$$

2. При $\varphi=0$, $\psi=0$ имеем $r=0$, а при $\varphi>0$, $\psi=0$ имеем

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi}=r\cdot\frac{\partial r}{\partial\psi}\cdot f(x), \tag{14}$$

где $f'(x) = \dfrac{\partial r}{\partial x}$ -дифференциальное уравнение образующей параболоида вращения.

Уравнение параболы: $ar^2 = x$, (15)
где a — параметр параболы ($a = -10^{-1}$).

Уравнение (12) в конечных разностях будет:

$$\left\{ \frac{r^{(m)}_{i+1,k} - r^{(m)}_{ik}}{r^{(m)}_{i+1,k}} - \frac{r^{(m)}_{ik} - r^{(m)}_{i-1,k}}{r^{(m)}_{ik}} + 4\left[r^{(m)}_{i,k+1}\left(r^{(m)}_{i,k+1} - r^{(m)}_{ik}\right) - r^{(m)}_{ik}\left(r^{(m)}_{ik} - r^{(m)}_{i,k-1}\right)\right] \right\} = 0. \tag{16}$$

Красвые условия будут:

$$\left(r^{(m)}_{i+1,k} - r^{(m)}_{ik}\right)^2 + 4r^{(m)}_{ik}\left(r^{(m)}_{ik} - r^{(m)}_{i,k-1}\right)^2 = 1 \tag{17}$$

(в нашем случае $-9 \leqslant i \leqslant 9$; $0 \leqslant k \leqslant 4$).

При $\varphi < 0$, $\psi = 0$ имеем $r = 0$, а при $\varphi > 0$, $\psi = 0$ применительно к параболе (15) имеет вид:

$$a(r_{i+1,0} - r_{i0}) = r_{i1} - r_{i0}. \tag{18}$$

Область течения разделена не на квадратную сетку, а на прямоугольную сетку: по φ с шагом h_1 ($h_1 = 1$), а по ψ с шагом h_2 ($h_2 = 0{,}5$).

Значения радиуса в нулевом приближении в прямоугольнике AA_1B_1B вычисляется по формуле

$$r^{(0)}_{ik} = \sqrt{2\psi^{(0)}_{ik}} \tag{19}$$

В области CC_1D_1D значение радиуса вычисляется, исходя из предположения, что в перпендикулярных сечениях BB_1 и CC_1 средние скорости потока равны, следовательно, и площади равны, откуда легко находится уравнение линии C_1D_1 (участка свободной поверхности):

$$r_1 = \sqrt{r^2 - r_0^2 - \frac{2ar}{\sqrt{1 + 4a^2r^2}}}, \tag{20}$$

где r — радиус параболы, r_1 — радиус свободной поверхности, r_0 — радиус струи вверх по течению ($r_0 = 2$). Проводя линии

тока на глаз при помощи лекала и используя график, найдем значения r в узлах сетки.

Далее, в области $BB_1O_1C_1COB$ значения радиуса были подобраны соединением вышенайденных линий тока на глаз при помощи лекала.

Используя метод наискорейшего спуска найдено первое приближение.

После нахождения всех значения радиуса легко найдем все значения x, следовательно, можем построить форму свободной поверхности.

Найдены распределения скоростей вдоль оси симметрии течения и вдоль параболы, а также приведены таблицы и графики.

В третьей главе рассматриваются две задачи на применение уравнения Франкля [3], выведенного им при изучении струйного потенциального течения жидкости, распространяющегося по поверхности твердого тела тонким слоем: $\varphi = \varphi_0(x_1, x_2)$

$$p - p_0 = \rho h\left[\frac{K_1}{H_1^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{K_2}{H_2^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}\right)^2\right], \tag{21}$$

где p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность жидкости, K_1 и K_2 — главные кривизны обтекаемой поверхности, H_1 и H_2 — коэффициенты Ляме; x_1 и x_2 — криволинейные координаты совпадающие с линиями кривизны поверхности; h — толщина слоя и она находится на основании уравнения неразрывности.

1. Третья задача II главы решается методом Франкля и сравниваются результаты. Они почти совпадают в тонких местах жидкости.

2. Применяя формулу (21) вычислим распределение давлений по обтекаемой поверхности ковша вида половины трехосного эллипсоида.

Начальное условие: набегающая струя — равномерна, т. е. имеет постоянную скорость по величине и по направлению, перпендикулярную границе ковша.

Введя эллиптические координаты [4] λ и μ на поверхности эллипсоида, мы видим, что точки на поверхности эллипсоида определяются не однозначно и коэффициенты Ляме по мере приближения $\lambda \to a^2$ и $\mu \to b^2$ растут неограниченно.

Поэтому вводим псевдодекартовые коэффициенты ξ и η так, чтобы при этом точки эллипсоида однозначно зависели от ξ и η, а коэффициенты Ляме оставались ограниченными

Уравнение (21) принимает вид:

$$p-p_0=\rho h\left[\frac{K_\xi}{H_\xi^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}\right)^2+\frac{K_\eta}{H^2_\eta}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta}\right)^2\right], \qquad (22)$$

где $H_\xi=\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{\lambda-c^2}}$, $H_\eta=\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{a^2-\mu}}$,

а главные кривизны при вычислении будут:

$$K_\xi=\frac{abc}{\lambda\sqrt{\lambda\mu}}, \quad K_\eta=\frac{abc}{\mu\sqrt{\lambda\mu}},$$

где a, $в$, c, — параметры эллипсоида ($a^2>в^2>c^2$). Далее, составляя характеристическое уравнение для дифференциального уравнения потока:

$$\frac{1}{H_\xi^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{1}{H_\eta^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta}\right)\right)^2=W_0^2, \qquad (23)$$

где W_0 — скорость на свободной поверхности, видим, что линии тока не совпадают с линиями кривизны поверхности за исключением центральной линии $\lambda=a^2$.

В дальнейшем задача решается на центральной линии. Приведя к безразмерному виду из (22) имеем:

$$X=\frac{K_\eta\cdot c}{H_\xi\cdot f}, \qquad (24)$$

где c — постоянная величина ($c=1$, а $f=\frac{d\xi}{d\xi_0}$ — характеризует изменение линии тока около центральной линии. ($d\xi_0$ — расстояние между центральной и бесконечно близкие к нему линиями тока на границе ковша).

Таким образом весь процесс решения задачи сводится к нахождению функции f и для этой функции находим обобщенное уравнение Римана [5].

$$\frac{d^2f}{d\mu^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a^2-\mu}+\frac{1}{b^2-\mu}+\frac{1}{c^2-\mu}+\frac{1}{\mu}\right)\frac{df}{d\mu}+\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{4a^2}\cdot\frac{\mu}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}\cdot f=0. \qquad (25)$$

Для нашей задачи играют роль только особые точки $\mu=a^2$ и $\mu=c^2$. Решение уравнения (25) получается путем разложения функции f в степенные ряды около этих особых точек, причем нужно обратить внимание на начальные условия, а именно

$f=1$; $\frac{\partial f}{\partial\mu}=0$ и на непрерывность f и $\frac{\partial f}{\partial\eta}$ в зависимости от η.

Вычисления нами были выполнены для эллипсоида

$$a=\sqrt{3};\quad b=\sqrt{2};\quad c=1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович и В. Л. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., 1952 г.

2. Л. В. Канторович. О методе наискорейшего спуска. ДАН, СССР, 56, № 3, 1947 г.

3. Ф. И. Франкль. Приближенный расчет струйного потенциального течения жидкости, распространяющегося по поверхности твердого тела тонким слоем. ПММ, том XXIV, в. 2, 1960 г.

4. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Часть I, М.—Л., 1947 г.

5. Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, часть I, М., 1934 г.

6. М. Ю. Абдылдаев. Истечение жидкости из бесконечно длинных симметричных сосудов. Ученые записки Кабардино-Балкарский госуниверситет, в. 3, 1959 г.

7. М. Ю. Абдылдаев. Исследование одного тонкослойного пространственного струйного течения жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., № 6, 1960 г.

8. М. Ю. Абдылдаев. Симметричное набегание струи на тело вращения. Сборник трудов каф. теор. физики. Киргосуниверситет, 1962 г.

Подписано в печать 19.IX.1962 г. Формат бумаги 60×90 1/16. Объем 0,75 п. л.
Д—05895 Заказ 1643/1. Тираж 270 экз.

г. Фрунзе, тип. АН Киргиз. ССР