ВИЛЬНЮССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им.В.КАПСУКАСА

В.Г.АБДРАХМАНОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ

01.002 – Функциональный анализ и теория функций

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Вильнюс – 1971

ВИЛЬНЮССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им.В.КАПСУКАСА

В.Г.АБДРАХМАНОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ

01.002 - Функциональный анализ и теория функций

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Вильнюс - 1971

$\frac{51}{A19}$ UR

Работа выполнена на кафедре высшей математики Московского института химического машиностроения.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор Г.Л.Лунц

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А.Г.Нафталевич
кандидат физико-математических наук, доцент А.Л.Мишкелявичюс

Ведущее высшее учебное заведение - Кафедра математического анализа Ереванского государственного университета

Автореферат разослан " 15 " сентября 1971 г.

Защита состоится " " в ноябре 1971 г. на заседании объединенного Совета Физического и Математико-механического факультетов Вильнюсского государственного университета им. В.Капсукаса, Вильнюс, ул.Партизану 24, ауд. 103.

С диссертацией можно познакомиться в библиотеке ВГУ (ул.Университето 3)

Ваши отзывы и замечания в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим направлять по адресу: 232006, Вильнюс, ул.Партизану 24, Ученому секретарю Физического фак.

Ученый секретарь ВГУ

Диссертация посвящена изучению интегралов типа Лапласа - Стилтьеса

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t) \qquad (1)$$

и

$$f(z)=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-zt}\,d dA(t), \qquad (2)$$

обобщающих ряд Дирихле

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \qquad (3)$$

с комплексными показателями λ_n, и интегралов

$$f(z)=\int_0^\infty exp\left\{\int_0^\tau ln\left[1-\frac{z}{\lambda(t)}\right]d\alpha(t)\right\}dA(\tau) \qquad (4)$$

и

$$f(z)=\int_0^\infty exp\left\{\int_0^\tau ln\left[1-\frac{z}{\lambda(t)}\right]d\alpha(t)-\int_0^\tau ln\left[1-\frac{z}{\mu(t)}\right]d\beta(t)\right\}dA(\tau), \qquad (5)$$

обобщающих интерполяционные ряды Ньютона

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right) \qquad (6)$$

и Р. Лагранжа [18]

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\left(1-\frac{z}{\mu_k}\right)^{-1} \qquad (7)$$

с комплексными узлами интерполяции λ_n и μ_n.

Теория рядов Дирихле с положительными показателями изложена в монографии В. Бернштейна [I4], где, в частности, приводятся формулы для абсцисс абсолютной и условной сходимости ряда Дирихле. Эти формулы несколько неудобны тем, что при их применении нужно заранее знать, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$ или $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Известны также различные формулы, свободные от указанного неудобства. В частности, такие формулы и аналогичные формулы для интеграла Лапласа - Стилтьеса

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-zt}\,d\alpha(t) \qquad (8)$$

содержатся в результатах Р. Шамбриаля [I5], [I6], который получил также формулы для абсциссы равномерной сходимости интеграла (8).

Ряды Дирихле с комплексными показателями λ_n изучены в работах Вяйсала [20], Э. Хилла [I7], Г. Л. Лунца [5], [6], [7], А. Ф. Леонтьева (см. например, [4]). В работе [5] Г. Л. Лунц нашел область абсолютной сходимости интеграла (2), а также показал, что в случае $\ln n = o(|\lambda_n|)$ область условной сходимости ряда Дирихле совпадает с областью его абсолютной сходимости. А. Мишкелявичус [8], [9], [I0] изучал ряд Дирихле, у которого

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)| = \alpha < \frac{\pi}{2}. \qquad (9)$$

Для такого ряда он нашел уравнение границы области условной сходимости в форме $x = c(y)$ и доказал выпуклость этой области.

Ш. Стрелиц и А. Мишкелявичус [I3] рассматривали обобщение ряда Дирихле с комплексными показателями с помощью интеграла (I), для которого получили несколько теорем типа Абеля.

Теория интерполяционных рядов Ньютона изложена в книге А. О. Гельфонда "Исчисление конечных разностей". Ряд Ньютона (6) с положительными узлами интерполяции λ_n исследовали М. Гандлер, Э. Голосова и А. Нафталевич [2]. Случай комплексных узлов рассматривали А. Мартен [I9] (при условии $\lim\limits_{n\to\infty}\arg\lambda_n = 0$) и Н. С. Насековская [II], [I2]. В частности, ею в работе [II] найдена полуплоскость абсолютной сходимости ряда (6), у которого последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k} = \zeta e^{i\psi},$$

где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_k|}$. Далее, в работе [I2] оценен рост функции $f(z)$, представимой рядом (6) с узлами λ_n, удовлетворяющими условиям:

а) $\forall n: \ |\arg\lambda_n| \le \eta < \frac{\pi}{2}$,

б) последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет угловую плотность (см. [3]), т.е. существует такая неубывающая функция $F(\varphi)$, что для любых φ_1 и φ_2 $(\varphi_1 < \varphi_2)$, не принадлежащих, возможно, некоторому исключительному счетному множеству,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_{n_k}|} = F(\varphi_2) - F(\varphi_1),$$

где $\{n_k\}$ – последовательность индексов, для которых $\arg\lambda_{n_k} \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Для роста функции $f(z)$ на луче $\arg z = \theta$, $|\theta| < \frac{\pi}{2} - \eta$, получена оценка

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{1}{r}\ln|f(re^{i\theta})| \le$$

$$\le \int_{-\eta}^{\eta} \{\cos(\varphi-\theta)\ln[2\cos(\varphi-\theta)] + (\varphi-\theta)\sin(\varphi-\theta)\}\, dF(\varphi). \qquad (10)$$

Г. В. Бадалян в работе [1] наряду с факториальными рядами рассматривал ряд (7) Р. Лагранжа, в котором

$$\lambda_n = \gamma_n u,\ \mu_n = \gamma_n v,\quad 0<\gamma_1<\dots<\gamma_n<\dots,\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \infty,$$

$$\exists p\ge 1:\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^{p}} = \infty,\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^{p+1}} < \infty,$$

где u и v – заданные комплексные числа. Найдены полуплоскости абсолютной и условной сходимости такого ряда и изучено поведение ряда на границе полуплоскости сходимости.

Диссертация состоит из двух глав.

В главе I рассматриваются интеграл (1), в котором $\alpha(t)$ – комплексная функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке интервала $[0,\infty)$, кривая $z=\lambda(t)$ кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке интервала $[0,\infty)$,

и интеграл (2), в котором $A(t) = A(re^{i\varphi})$ – комплексная функция ограниченной вариации в любой конечной части плоскости (r,φ).

В § 1 главы I отыскиваются области абсолютной сходимости интегралов (1) и (2). С этой целью вводятся последовательность $\{\nu_n\}$, удовлетворяющая условиям: $\exists h_1>0$, $\exists h_2>0$, $\forall n$: $\nu_{n+1}-\nu_n \in [h_1,h_2]$ и названная N-последовательностью, и функция $h(\varphi)$, $h(\varphi) = \lim_{\alpha\to 0} H(\varphi,\alpha)$. Для интеграла (1)

$$H(\varphi,\alpha) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{\nu_n}\ln\int_{E(\varphi,\alpha,t_n,t_{n+1})}|d\alpha(t)|, \qquad (11)$$

где $\{\nu_n\}$ – произвольная N-последовательность ($\nu_0 = \Lambda(0)$, $\Lambda(t) = |\lambda(t)|$), последовательность $\{t_n\}$ такова, что $\forall n$: $\Lambda(t_n)=\nu_n$, $t_0=0$, $E(\varphi,\alpha,t_n,t_{n+1}) = \{t: t\in[t_n,t_{n+1}],\ \arg\lambda(t)\in[\varphi-\alpha,\varphi+\alpha]\}$ (здесь и дальше предполагается, что функция $\lambda(t)$ (дальше и $\mu(t)$) такова, что интегралы по множествам вида $E(\varphi,\alpha,a,b)$, где $0\le a<\infty$, $0<b<\infty$, $a\le b$, о которых будет идти речь, существуют). Для интеграла (2)

$$H(\varphi,\alpha) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{\nu_n}\int_{\nu_n}^{\nu_{n+1}}\int_{\varphi-\alpha}^{\varphi+\alpha}|ddA(t)|, \qquad (12)$$

где $\{\nu_n\}$ – произвольная N-последовательность ($\nu_0=0$). С помощью метода, использованного Г. Л. Лунцем в работе [6], доказывается

Теорема 1.1. Интегралы (1) и (2) сходятся абсолютно в области

$$G = \{ z: \ x\cos y - y\sin y - h(y) > 0 \quad \forall y \in [0, 2\pi) \} \qquad (13)$$

и не сходится абсолютно вне этой области.

В частности, если в интеграле (I) $\alpha(0)=0$, $\alpha(t)=\sum\limits_{k=0}^{[t]} a_k$ при $t>0$, $\lambda(n)=\lambda_n$, то он превращается в ряд Дирихле (3). Тот же ряд получается из интеграла (2), если $A(re^{i\varphi})=\sum a_k$, где суммирование распространено на те индексы k, для которых $|\lambda_k|<r$, $\arg\lambda_k<\varphi$. В случае ряда формулы (II) и (I2) заменяются следующей:

$$H(\varphi,\alpha)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{\vartheta_n}\ln\sum_{|\lambda_{n_k}|\in[\vartheta_n,\vartheta_{n+1})}|a_{n_k}|,$$

где $\{n_k\}$ – последовательность индексов, для которых $\arg\lambda_{n_k}\in[\varphi-\alpha,\varphi+\alpha]$.

В § 2 находится граница области условной сходимости интеграла (I), в котором функция $\lambda(t)$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ |\arg\lambda'(t)|=\alpha<\frac{\pi}{2} \qquad (14)$$

(которое аналогично условию (9) для ряда). Именно, доказывается

Теорема 2.2. При любом фиксированном y интеграл (I) сходится во всех точках $z=x+iy$, где $x>c(y)$, и расходится во всех точках $z=x+iy$, где $x<c(y)$.

Для величины $c(y)$ даются три формулы (при их доказательстве используются результаты Р. Шамбриала и А. Мишкелявичуса):

$$c(y)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{\vartheta_n}\ln\Big\{\sup_{t\in I_n}\Big|\int_{t_n}^{t}\exp[-iy\lambda(u)]\,d\alpha(u)\Big|\Big\}=$$

$$=\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{1}{\sigma(t)}\ln\Big|\int_0^t\exp[\varphi(u)-\varphi(t)-iy\lambda(u)]\,d\alpha(u)\Big|= \qquad (15)$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{\vartheta_n}\ln\Big\{\sup_{t\in I_n}\Big|\int_{t_n}^{t}\exp[\varphi(u)-\varphi(t)-iy\lambda(u)]\,d\alpha(u)\Big|\Big\}.$$

В этих формулах $\sigma(t)=\operatorname{Re}\lambda(t)$, $\{\vartheta_n\}$ – произвольная N-последовательность ($\vartheta_0=\sigma(0)$), $\sigma(t_n)=\vartheta_n$, $t_0=0$, $I_n=[t_n,t_{n+1}]$, $\varphi(t)$ – произвольная действительная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty,\ \lim_{t\to\infty}\frac{\varphi'(t)}{\sigma'(t)}=\infty,\ \text{но}\ \exists k>0:\ \lim_{t\to\infty}\frac{\varphi'(t)}{\sigma^k(t)\sigma'(t)}=0. \qquad (16)$$

Далее доказывается теорема типа Абеля –

Теорема 2.2. Из сходимости интеграла (I) в точке z_0 следует сходимость его в области $V(z_0)=\{z: |\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha\}$.

С помощью этой теоремы показывается, что интеграл (I) равномерно сходится на любом замкнутом ограниченном множестве из области сходимости, и устанавливается выпуклость области сходимости.

В том случае, когда интеграл (I) сводится к ряду Дирихле (3), удовлетворяющему условию (9), для границы $x=c(y)$ области сходимости ряда получаются формулы, отличные от формул А. Микеляничуса [10]. Эти формулы удобны тем, что не зависят от знака $r(y)$.

В § 3 изучается равномерная сходимость интеграла (1), в котором функция $\lambda(t)$ удовлетворяет условию (14). Для любого ψ, $\frac{\pi}{2}-\alpha \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, отыскивается кривая с уравнением $x = x_\psi(y)$, каждая точка ζ которой обладает следующим свойством: в угле $|\arg(z-\zeta-\delta)| \le \psi$ интеграл (1) равномерно сходится при любом $\delta>0$ и не сходится равномерно ни при каком $\delta<0$ (в частности, в случае $\lambda(t)=t$, т.е. $\alpha=0$ и $\psi=\frac{\pi}{2}$, величина $x_\psi(y)$ постоянна относительно y и представляет собой абсциссу равномерной сходимости интеграла Лапласа – Стилтьеса (8). Это совпадает с результатом Р. Шамбриаля [16]). Нахождение кривой $x=x_\psi(y)$ основывается на следующей теореме:

Теорема 3.1. Для любого y, $-\infty<y<\infty$, и любого ψ, $0\le\psi\le\frac{\pi}{2}$, интеграл (1) равномерно сходится в угле

$$V[x_\psi(y)+\delta+iy,\psi] = \{z=re^{i\varphi}: |\arg[z-(x_\psi(y)+\delta+iy)]|\le\psi\}$$

при любом $\delta>0$ и не сходится равномерно в этом угле ни при каком $\delta<0$.

Величина $x_\psi(y)$ дается формулами: $x_\psi(y) =$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\nu_n}\ln\Big\{\sup_{t\in I_n}\Big[\sup_{r>0,|\varphi|\le\psi}\Big|\int_{t_n}^{t}\exp(-(re^{i\varphi}+iy)\lambda(u))d\alpha(u)\Big|\Big]\Big\}=$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\nu_n}\ln\Big\{\sup_{t\in I_n}\Big[\sup_{r>0,|\varphi|\le\psi}\Big|\int_{t_n}^{t}\exp(\gamma(u)-\gamma(t)-(re^{i\varphi}+iy)\lambda(u))d\alpha(u)\Big|\Big]\Big\},$$

где $\{\nu_n\}$ – произвольная N-последовательность ($\nu_0=\sigma(0)$), $\sigma(t_n)=\nu_n$, $t_0=0$, $I_n=[t_n,t_{n+1}]$, $\gamma(t)$ – произвольная действительная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (16). Если вместо условия (14) выполнено более сильное условие

$$\forall t>0:\ |\arg\lambda'(t)|\le\alpha<\frac{\pi}{2},$$

то для $\psi\in[0,\frac{\pi}{2}-\alpha]$ величина $x_\psi(y)$ равна

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{\sigma(t)}\ln\Big\{\sup_{r>0,|\varphi|\le\psi}\Big|\int_0^t\exp[\gamma(u)-\gamma(t)-(re^{i\varphi}+iy)\lambda(u)]d\alpha(u)\Big|\Big\}.$$

Формально условие $0\le\psi\le\frac{\pi}{2}$ в теореме 3.1 несущественно, однако оказывается, что для $\psi\in(\frac{\pi}{2},\pi]$ величина $x_\psi(y)$ бесконечна при любом y, если только интеграл (1) не сходится равномерно во всей плоскости. Кроме того, случай $0\le\psi<\frac{\pi}{2}-\alpha$ тривиален. Поэтому интерес представляет случай $\frac{\pi}{2}-\alpha\le\psi\le\frac{\pi}{2}$.

Для ряда Дирихле (3), удовлетворяющего условию (9), получаются аналогичные формулы для нахождения кривой $x=x_\psi(y)$.

В § 4 дается одно достаточное условие того, чтобы область условной сходимости интеграла (2) совпадала с областью его абсолютной сходимости. С этой целью рассматриваются последовательность $\{\lambda_n\}$, монотонная последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$ и положительная монотонная функция $F(x)$ со следующими свойствами: $|\lambda_1|<|\lambda_2|<\ldots<|\lambda_n|<\ldots$, $\lambda_n\to\infty$,

$\alpha_n=o(\frac{1}{|\lambda_n|})$, $\lim_{n\to\infty}F(\alpha_n)=0$ и $|\lambda_n|+F(\alpha_n)<|\lambda_{n+1}|-F(\alpha_{n+1})$

при всех достаточно больших n. Предполагается, что существуют последовательности $\{\lambda_n\}$, $\{\alpha_n\}$ и $\{F(\alpha_n)\}$ такие, что функция $A(t)=A(re^{i\varphi})$ удовлетворяет условиям:

1) модуль приращения величины

$$arg\,[A(r_2e^{i\varphi_2})-A(r_2e^{i\varphi_1})-A(r_1e^{i\varphi_2})+A(r_1e^{i\varphi_1})$$

при переходе от любой пары точек $r_1e^{i\varphi_1}$, $r_2e^{i\varphi_2}$ $(r_1<r_2,\ \varphi_1<\varphi_2)$ из области P_n: $[r_n-F(\alpha_n),\ r_n+F(\alpha_n);\ \theta_n-\alpha_n,\ \theta_n+\alpha_n]$ $(\lambda_n=r_ne^{i\theta_n})$ к другой паре точек в этой же области при достаточно больших n не превышает 2θ, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$;

2) последовательность

$$\left\{\int\limits_{r_n-F(\alpha_n)}^{r_n+F(\alpha_n)}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{-zt}\,ddA(t)-\int\limits_{r_n-F(\alpha_n)}^{r_n+F(\alpha_n)}\int\limits_{\theta_n-\alpha_n}^{\theta_n+\alpha_n} e^{-zt}\,ddA(t)\right\}$$

по модулю растет медленнее, чем $exp(\alpha r_n)$ при любом $\alpha>0$.

Если $G_1=\{z:\ x\cos\varphi-y\sin\varphi-k(\varphi)>0\ \ \forall\varphi\in[0,2\pi)\}$, где

$$k(\varphi)=\lim_{\alpha\to 0}K(\varphi,\alpha),\quad K(\varphi,\alpha)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{r_{n_k}}\ln\int\limits_{r_{n_k}-F(\alpha_{n_k})}^{r_{n_k}+F(\alpha_{n_k})}\int\limits_{\theta_{n_k}-\alpha_{n_k}}^{\theta_{n_k}+\alpha_{n_k}}|ddA(t)|,$$

$\{n_k\}$ – последовательность индексов, для которых $arg\lambda_{n_k}\in[\varphi-\alpha,\varphi+\alpha]$, и G – область абсолютной сходимости интеграла (2), то справедлива

Теорема 4.1. Если при каком-либо выборе последовательностей $\{\lambda_n\}$, $\{\alpha_n\}$ и $\{F(\alpha_n)\}$, удовлетворяющих условиям

1) и 2), $G_1=G$ (что, в частности, имеет место, если $k(\varphi)=h(\varphi)$ $\forall\varphi\in[0,2\pi)$), то область сходимости интеграла (2) совпадает с областью его абсолютной сходимости.

Когда интеграл (2) сводится к ряду Дирихле (3), условия 1) и 2) всегда выполнены (при этом $\{\lambda_n\}$ есть последовательность показателей ряда, а последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{F(\alpha_n)\}$ любые). В этом случае функция $K(\varphi,\alpha)$ имеет вид

$$K(\varphi,\alpha)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\ln|a_{n_k}|,$$

где $\{n_k\}$ – последовательность индексов, для которых $arg\lambda_{n_k}\in[\varphi-\alpha,\varphi+\alpha]$. Как известно [5], для ряда Дирихле совпадение области G_1, определенной с помощью функции $k(\varphi)$, с областью абсолютной сходимости G, определенной с помощью функции $h(\varphi)$, имеет место, если $\ln n=o(|\lambda_n|)$, при этом область $G_1=G$ есть область условной сходимости.

В § 5 рассматривается двойной ряд Дирихле

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(j)}exp(-\lambda_n^{(j)}z), \tag{17}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n^{(j)}=\lambda_j$, $|\lambda_1|<|\lambda_2|<\ldots<|\lambda_j|<\ldots$, $\lambda_j\to\infty$,

и, кроме того, выполнены условия:

1) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n^{(j)}|$ сходятся при всех $j=1,2,\ldots$;

2) существует монотонная последовательность положитель-

ных чисел $\{\alpha_j\}$, $\alpha_j = o\left(\frac{1}{|\lambda_j|}\right)$, и положительная монотонная функция $F(x)$, $\lim\limits_{j\to\infty} F(\alpha_j) = 0$, $|\lambda_j| + F(\alpha_j) < |\lambda_{j+1}| - F(\alpha_{j+1})$ при всех достаточно больших j, такие, что все $\lambda_n^{(j)}$ содержатся в областях P_j: $[r_j - F(\alpha_j), r_j + F(\alpha_j);\ \theta_j - \alpha_j, \theta_j + \alpha_j]$, где $\lambda_j = r_j e^{i\theta_j}$;

3) существуют такие числа φ_j и γ_j, $\gamma_j \le \theta < \frac{\pi}{2}$, что

$$\forall n:\ \varphi_j - \gamma_j < \arg a_n^{(j)} < \varphi_j + \gamma_j$$

при достаточно больших j.

Для такого ряда функции $H(\varphi,\alpha)$ и $K(\varphi,\alpha)$ имеют соответственно вид:

$$H(\varphi,\alpha) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, \frac{1}{\nu_m} \ln \sum_{|\lambda_{j_k}| \in [\nu_m, \nu_{m+1})} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(j_k)}|,$$

$$K(\varphi,\alpha) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \frac{1}{|\lambda_{j_k}|} \ln \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(j_k)}|,$$

где $\{\nu_m\}$ - произвольная N-последовательность, (j_k) - последовательность индексов, для которых $\arg \lambda_{j_k} \in [\varphi-\alpha, \varphi+\alpha]$.

Из теоремы 4.1 следует, что, если совпадают области G_1 и G, определенные соответственно с помощью функций $k(\varphi)$ и $h(\varphi)$, то область сходимости ряда (17) совпадает с областью его абсолютной сходимости. В частности, совпадение областей G_1 и G имеет место, если

$$\ln j = o(|\lambda_j|). \tag{18}$$

Для ряда (17), удовлетворяющего условиям 1) - 3) и (18), далее доказываются две теоремы о сверхсходимости.

Теорема 5.1. Если функция $f(z)$, определенная рядом (17), аналитична в точке z_0 на границе Γ области сходимости G ряда, существует круг, лежащий в G и касающийся Γ в точке z_0, и имеется такая последовательность индексов (j_ν), что $|\lambda_{j_{\nu+1}}| > (1+\theta)|\lambda_{j_\nu}|$, где $\theta > 0$ не зависит от ν, то последовательность

$$\left\{ \sum_{k=1}^{j_\nu} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} \exp(-\lambda_n^{(k)} z) \right\} \tag{19}$$

сходится в некоторой окрестности точки z_0.

Теорема 5.2. Если выполнены условия теоремы 5.1 и $|\lambda_{j_{\nu+1}}| > (1+\theta)|\lambda_{j_\nu}|$, где $\lim\limits_{\nu\to\infty}\theta_\nu = \infty$, то последовательность (19) сходится в любой конечной части области голоморфности функции $f(z)$.

В главе II рассматриваются интегралы (4) и (5), в которых $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ - непрерывные функции, $\Lambda(t) = |\lambda(t)|$ и $M(t) = |\mu(t)|$ - положительные кусочно-дифференцируемые монотонные функции, $\lim\limits_{t\to\infty}\Lambda(t) = \lim\limits_{t\to\infty} M(t) = \infty$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ - неубывающие функции, $A(t)$ - комплексная функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке интервала $[0, \infty)$, причем функция $A(t)$ не имеет общих точек разрыва с функциями $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Функция, определенная интегралом (4), аналитична в плоскости с разрезом по кривой $z=\lambda(t)$. Результаты, полученные в главе II, справедливы независимо от выбора ветви функции. Аналогично, функция, определенная интегралом (5), рассматривается в плоскости с разрезами по кривым $z=\lambda(t)$ и $z=\mu(t)$.

В § I главы II отыскивается полуплоскость абсолютной сходимости интеграла (4) в предположении, что $\alpha(t)$ – произвольная действительная функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке интервала $[0,\infty)$. Функция $\alpha(t)$ представляется как $\alpha(t)=g(t)-h(t)$, где $g(t)$ и $h(t)$ – неубывающие функции, и предполагается выполнение условий: $\lim\limits_{\tau\to\infty} I_g(\tau)=\infty$, существует предел

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{I_g(\tau)}\int_0^\tau \frac{dg(t)}{\lambda(t)}=\zeta' e^{i\psi'}\neq 0,$$

где $I_g(\tau)=\int_0^\tau\frac{dg(t)}{\lambda(t)}$, и существует непрерывная монотонная функция $S(\tau)$ такая, что $\lim\limits_{\tau\to\infty}[S(\tau)-I_g(\tau)]=0$. Рассматриваются два случая:

(A) $\lim\limits_{\tau\to\infty} I_h(\tau)=C<\infty$, где $I_h(\tau)=\int_0^\tau \frac{dh(t)}{\lambda(t)}$,

при этом, очевидно, существует предел

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{I_h(\tau)}\int_0^\tau\frac{dh(t)}{\lambda(t)}=\zeta'' e^{i\psi''}; \tag{20}$$

(B) $\lim\limits_{\tau\to\infty} I_h(\tau)=\infty$, но $\forall\tau>0: \left|\int_0^\tau \frac{d\alpha(t)}{\lambda(t)}\right|\leqslant C_1<\infty$ ($C_1=const$) и существует предел (20), причем $\zeta' e^{i\psi'}\neq\zeta'' e^{i\psi''}$.

Показывается, что

в случае (A) интеграл (4) сходится абсолютно в полуплоскости

$$\zeta'(x\cos\psi'-y\sin\psi')-h>0\qquad (z\neq\lambda(t)),$$

где

$$h=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{\nu_n}\ln\int_{t_n}^{t_{n+1}}|dA(t)|, \tag{21}$$

$\{\nu_n\}$ – произвольная N-последовательность ($\nu_0=S(0)$), $S(t_n)=\nu_n$, $t_0=0$, и не сходится абсолютно вне этой полуплоскости ($z\neq\lambda(t)$);

в случае (B) интеграл (4) сходится абсолютно в полуплоскости

$$\zeta'(x\cos\psi'-y\sin\psi')-\zeta''(x\cos\psi''-y\sin\psi'')-h>0\qquad (z\neq\lambda(t)),$$

где h определяется формулой (21), и не сходится абсолютно вне этой полуплоскости ($z\neq\lambda(t)$).

В частности, если $\alpha(t)$ – неубывающая функция и выполнены условия: $\lim\limits_{\tau\to\infty} I_\alpha(\tau)=\infty$, существует предел

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{I_\alpha(\tau)}\int_0^\tau\frac{d\alpha(t)}{\lambda(t)}=\zeta_1 e^{i\psi_1}\neq 0,$$

где $I_\alpha(\tau)=\int_0^\tau\frac{d\alpha(t)}{\lambda(t)}$, и существует такая непрерывная монотонная функция $S_\alpha(\tau)$, что $\lim\limits_{\tau\to\infty}[S_\alpha(\tau)-I_\alpha(\tau)]=0$, то интеграл (4) имеет полуплоскость абсолютной сходимости

$$\zeta_1(x\cos\psi_1 - y\sin\psi_1) - h > 0 \quad (z \neq \lambda(t)). \tag{22}$$

Если в интеграле (4) $\alpha(t)=[t]$, $\lambda(n)=\lambda_n$, $A(t)=0$ для $t\in[0,\frac{3}{2})$, $A(t)=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ для $t\in[n+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2})$ $(n=1,2,\ldots)$, то он превращается в ряд Ньютона (6). Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}=\zeta_1 e^{i\psi_1},$$

где $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_k|}$, то, в соответствии с доказанным для интеграла (4), ряд (6) имеет полуплоскость абсолютной сходимости (22), где

$$h=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\nu_n}\ln\sum_{S_k\in[\nu_n,\nu_{n+1})}|a_k|,$$

$\{\nu_n\}$ - произвольная N -последовательность. Этот результат совпадает с результатом Н. С. Насековской [II], но величина h определена здесь новой формулой.

В § 2 находится область абсолютной сходимости интеграла (5) в предположении, что $\lim\limits_{\tau\to\infty} I_\alpha(\tau)=\lim\limits_{\tau\to\infty} I_\beta(\tau)=\infty$, существуют пределы

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{I_\alpha(\tau)}\int_0^\tau\frac{d\alpha(t)}{\lambda(t)}=\zeta_1 e^{i\psi_1},\quad \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{I_\beta(\tau)}\int_0^\tau\frac{d\beta(t)}{\mu(t)}=\zeta_2 e^{i\psi_2}\quad(\psi_1\neq\psi_2)$$

где $I_\alpha(\tau)=\int\limits_0^\tau\frac{d\alpha(t)}{\Lambda(t)}$, $I_\beta(\tau)=\int\limits_0^\tau\frac{d\beta(t)}{M(t)}$, и существуют непрерывные монотонные функции $S_\alpha(\tau)$ и $S_\beta(\tau)$ такие, что $\lim\limits_{\tau\to\infty}[S_\alpha(\tau)-I_\alpha(\tau)]=\lim\limits_{\tau\to\infty}[S_\beta(\tau)-I_\beta(\tau)]=0$. Вводится функция

$h(\varphi)=\lim\limits_{\alpha\to 0} H(\varphi,\alpha)$, где

$$H(\varphi,\alpha)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\nu_n}\ln\int\limits_{E(\varphi,\alpha,t_n,t_{n+1})}|dA(t)|,$$

$\{\nu_n\}$ - произвольная N -последовательность $(\nu_0=S(0))$, $S(\tau)=|S_\alpha(\tau)+iS_\beta(\tau)|$, $S(t_n)=\nu_n$, $t_0=0$, $E(\varphi,\alpha,t_n,t_{n+1})=\{t:\ t\in[t_n,t_{n+1}],\ \arg[S_\alpha(\tau)+iS_\beta(\tau)]\in[\varphi-\alpha,\varphi+\alpha]\}$. Доказывается, что

интеграл (5) сходится абсолютно в области

$$G=\{z:\ \zeta_1(x\cos\psi_1-y\sin\psi_1)\cos\varphi-\zeta_2(x\cos\psi_2-y\sin\psi_2)\sin\varphi - h(\varphi)>0\ .\ \forall\varphi\in[0,\tfrac{\pi}{2}]\} \tag{23}$$

$(z\neq\lambda(t),\ z\neq\mu(t))$, и не сходится абсолютно вне этой области $(z\neq\lambda(t),\ z\neq\mu(t))$.

Частным случаем интеграла (5) является ряд Р. Лагранжа (7). Этот ряд получается, если, например, $\alpha(t)=\beta(t)=[t]$, $\lambda(n)=\lambda_n$, $\mu(n)=\mu_n$, $A(t)=0$ для $t\in[0,\frac{3}{2})$, $A(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ для $t\in[n+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2})$ $(n=1,2,\ldots)$. Если выполнены условия: $\lim\limits_{n\to\infty}S_1(n)=\lim\limits_{n\to\infty}S_2(n)=\infty$ и существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}=\zeta_1 e^{i\varphi_1},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_2(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}=\zeta_2 e^{i\varphi_2}\quad(\varphi_1\neq\varphi_2),$$

где $S_1(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_k|}$, $S_2(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|\mu_k|}$, то, в соответствии с доказанным, ряд (7) сходится абсолютно в области G $(z\neq\mu_n)$, определенной формулой (23), и не сходится абсолютно вне этой области $(z\neq\lambda_n)$. Функция $H(\varphi,\alpha)$ для ряда определяется по формуле

$$H(\varphi,\alpha)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\vartheta_n}\ln\sum_{|S_{n_k}|\in[\vartheta_n,\vartheta_{n+1})}|a_{n_k}|,$$

где $S_n=S_1(n)+iS_2(n)$, $\{\vartheta_n\}$ – произвольная N-последовательность, $\{n_k\}$ – последовательность индексов, для которых $\arg S_{n_k}\in[\varphi-\alpha,\varphi+\alpha]$.

В § 3 оценивается рост функции $f(z)$, представимой интегралом (4) с непустой областью абсолютной сходимости. При этом предполагается, что $\alpha(t)$ – неубывающая функция, $\alpha(0)=0$, $\Lambda(t)$ – кусочно-дифференцируема, $|\arg\Lambda(t)|\leq\eta<\frac{\pi}{2}$, $\lim_{\tau\to\infty}I_\alpha(\tau)=\infty$, существует непрерывная монотонная функция $S_\alpha(\tau)$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty}[S_\alpha(\tau)-I_\alpha(\tau)]=0$. Кроме того, предполагается, что существует такая неубывающая функция $F_1(\varphi)$, что для любых φ_1 и φ_2 $(\varphi_1<\varphi_2)$, не принадлежащих, возможно, некоторому исключительному счетному множеству,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha_{\varphi_1,\varphi_2}(t)}{\Lambda(t)}=F_1(\varphi_2)-F_1(\varphi_1),\tag{24}$$

где $\alpha_{\varphi_1,\varphi_2}(t)=\int\limits_{D_{\varphi_1,\varphi_2}(0,t)}d\alpha(u)$, $D_{\varphi_1,\varphi_2}(0,t)=\{u:\ u\in[0,t],\ \arg\Lambda(u)\in[\varphi_1,\varphi_2)\}$, $\arg z=\varphi_1$ и $\arg z=\varphi_2$ – произвольные лучи $(0\leq\varphi_1<\varphi_2<2\pi)$ (в том случае, когда интеграл (4) сводится к ряду Ньютона (6), последнее условие означает существование угловой плотности последовательности $\{\lambda_n\}$). Для роста $f(z)$ на лучах $\arg z=\theta$, $|\theta|<\frac{\pi}{2}-\eta$, получается оценка вида (10), причем верхний предел берется по всем r, не принадлежащим множеству $R(\theta)=\{r:\ r=\Lambda(t)$ при $\arg\Lambda(t)=\theta\}$.

В § 4 оценивается рост функции $f(z)$, представимой интегралом (5) с непустой областью абсолютной сходимости. При этом предполагается, что $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – неубывающие функции, $\alpha(0)=\beta(0)=0$, $\Lambda(t)$ и $M(t)$ – кусочно-дифференцируемы, $|\arg\Lambda(t)|\leq\eta<\frac{\pi}{2}$, $\gamma<\arg\mu(t)<\delta$, где $\frac{\pi}{2}-\eta\leq\gamma\leq\delta\leq\frac{3\pi}{2}$, $\lim_{\tau\to\infty}I_\alpha(\tau)=\lim_{\tau\to\infty}I_f(\tau)=\infty$, существуют непрерывные монотонные функции $S_\alpha(\tau)$ и $S_\beta(\tau)$ такие, что

$$\lim_{\tau\to\infty}[S_\alpha(\tau)-I_\alpha(\tau)]=\lim_{\tau\to\infty}[S_\beta(\tau)-I_\beta(\tau)]=0.$$

Кроме того, предполагается, что для функций $\lambda(t)$ и $\alpha(t)$ выполнено условие (24), и аналогичное условие выполнено для функций $\mu(t)$ и $\beta(t)$, т.е. для $\mu(t)$ и $\beta(t)$ существует неубывающая функция $F_2(\varphi)$, подобная функции $F_1(\varphi)$. Предполагается еще, что

$$\forall \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}+\eta,\ \frac{\pi}{2}-\eta\right):\ I(\theta)=\int_{\gamma}^{\delta}\cos(\varphi-\theta)\,dF_2(\varphi)<0. \qquad (25)$$

Для тех лучей $\arg z=\theta$, $|\theta|<\frac{\pi}{2}-\eta$, которые, за исключением, возможно, начальных отрезков, принадлежат области абсолютной сходимости интеграла (5), получена некоторая оценка

$$h(\theta)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{1}{r}\ln|f(re^{i\theta})|\leq \Phi(\theta,\eta,\gamma,\delta), \qquad (26)$$

которая ввиду громоздкости здесь не выписывается (верхний предел взят по всем r, не принадлежащим множеству $R(\theta)=\{r:\ r=\lambda(t)$ при $\arg\lambda(t)=\theta\}$).

Полученный в § 4 результат в применении к ряду Р. Лагранжа (7) означает следующее. Если функция $f(z)$ представлена рядом (7) с непустой областью абсолютной сходимости, причем последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ имеют угловую плотность и удовлетворяют условиям: $\forall n:\ |\arg\lambda_n|\leq\eta<\frac{\pi}{2}$, $\gamma<\arg\mu_n<\delta$, где $\frac{\pi}{2}-\eta\leq\gamma\leq\delta\leq\frac{3\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_1(n)=\lim\limits_{n\to\infty}S_2(n)=\infty$, кроме того, выполнено условие (25), то на лучах $\arg z=\theta$, $|\theta|<\frac{\pi}{2}-\eta$, справедлива оценка (26), причем верхний предел берется по всем r.

Основные результаты диссертации изложены в статьях [21], [22], [23] и [24].

Литература

1. Бадалян Г.В. Обобщенные факториальные ряды. - "Сообщение инст.мат.и мех. АН Арм.ССР", вып.5,1950, с.13-84. - Рез.на арм.яз. - Библ.: 10 назв.

2. Гандлер М., Голосова Э. и Нафталевич А. О сходимости факториальных рядов. - "Лит.мат.сб.", т.1,1961,№ 1-2,с.41-58. - Рез.на лит.и нем.яз. - Библ.: 3 назв.

3. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций, Москва, Гостехиздат, 1956. - Библ.: 112 назв.

4. Леонтьев А.Ф. Представление функций обобщенными рядами Дирихле. - "Успехи мат.наук", т.24, 1969, вып.2(146), с.97-164. - Библ.: 34 назв.

5. Лунц Г.Л. О некоторых обобщениях рядов Дирихле. - "Матем.сб.", т.10(52), 1942,№ 1-2, с.33-50. - Библ.: 6 назв.

6. Лунц Г.Л. О сверхсходимости некоторых рядов. - "Изв. АН Арм.ССР", серия мат., т.15, 1962,№ 5, с.11-25. - Рез. на арм.яз. - Библ.: 5 назв.

7. Лунц Г.Л. О рядах Дирихле с комплексными показателями. - "Матем.сб.", т.67(109), 1965,№ 1, с.89-134. - Библ.: 7 назв.

8. Мишкелявичюс А. О сходимости рядов Дирихле. - "Лит. мат.сб.", т.3, 1963,№ 2, с.106-113. - Рез.на лит.и франц.яз. - Библ.: 4 назв.

9. Мишкелявичюс А. Об области сходимости ряда Дирихле. - "Лит.мат.сб.", т.5, 1965,№ 1, с.117-126. - Рез.на лит.и франц.яз. - Библ.: 2 назв.

10. Мишкелявичюс А. О границе области сходимости ряда Дирихле. - "Лит.мат.сб.", т.6, 1966,№ 1, с.91-97. - Рез.на

лит.и франц.яз. - Библ.: 5 назв.

11. Насековская Н.С. Абсолютная сходимость интерполяционного ряда. - "Лит.мат.сб.", т.7, 1967, № 2, с.297-304. - Рез. на лит.и франц.яз. - Библ.: 3 назв.

12. Насековская Н.С. Условия представимости аналитических функций интерполяционным рядом. - "Лит.мат.сб.", т.9, 1969, № 2, с.247-268. - Рез.на лит.и франц.яз. - Библ.: 7 назв.

13. Стрелиц Ш., Мишкелявичюс А. О сходимости некоторых интегралов типа Лапласа - Стилтьеса. - "Лит.мат.сб.", т.9, 1969, № 1, с.131-151. - Рез.на лит.и франц.яз. - Библ.: 2 назв.

14. *Bernstein V. Leçons sur les progrés recents de la théorie des series de Dirichlet. Paris, 1933.* - Библ.: 26 назв.

15. *Chambrial R. Sur certaines familles d'algorithmes donnant, sans condition de signe, l'abscisse de convergence simple d'une integrale de Laplace-Stieltjes. - "Comptes rendus de l'Acad. des Scienses", t. 260, 1965, p. 6263-6266.* - Библ.: 2 назв.

16. *Chambrial R. Sur certaines algorithmes donnant sans condition de signe l'abscisse de convergence uniforme d'une integrale de Laplace-Stieltjes. - "Bull. Sc. math.", 2-serie, t. 91, 1967, p. 97-104.* - Библ.: 7 назв.

17. *Hill E. Note on Dirichlet's series with complex exponents. - "Ann. of Math.", t. 25, 1924, p. 261-278.*

18. *Lagrange R. Mémoire sur les séries d'interpolation. - "Acta Math.", vol. 64, 1935, № 1-2, p. 1-80.*

19. *Martin Y. Séries d'interpolation et de facultés. - "Bull. Sc. math.", t. 75, 1951, p. 21-32.*

20. *Väisälä. Verallgemeinerung des Begriffes der Dirichletschen Reihen. - "Acta Universitatis Dorpatensis", 1921, p. 171-203.*

21. Абдрахманов В.Г. О сходимости двойного интеграла Лапласа - Стилтьеса и двойных рядов Дирихле. - "Лит.мат.сб.", т.8, 1968, № 4, с.633-641. - Рез.на лит.и франц.яз. - Библ.: 2 назв.

22. Абдрахманов В.Г. О сходимости интеграла типа Лапласа - Стилтьеса. - "Лит.мат.сб.", т.11, 1971, № 1, с.5-18. - Рез на лит.и франц.яз. - Библ.: 6 назв.

23. Абдрахманов В.Г. Об одном интегральном аналоге интерполяционного ряда. - "Труды МИХМ", Доклады XXX - научно-технической конференции, т.2, 1970, вып.2, с.73-77. - Библ.: 1 назв.

24. Абдрахманов В.Г. Интегральное обобщение некоторых интерполяционных рядов. - "Труды МИХМ" (в печати).

П0 1421 1971г. Зак.683 Тир.200 экз. „Ротапринт" г.Уфа „БашНИПИнефть"