51
А-13

АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ОБЪЕДИНЕННЫЙ СОВЕТ ПРИ ОТДЕЛЕНИИ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

На правах рукописи

Р. А. АББАСОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

БАКУ — 1967

V

АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
ОБЪЕДИНЕННЫЙ СОВЕТ ПРИ ОТДЕЛЕНИИ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

На правах рукописи

Р. А. АББАСОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических
наук, доцент ДЖАФАРОВ А. С.

БАКУ — 1967

51
А13

Работа выполнена в Институте математики и механики АН Азерб. ССР.

Решением Объединенного Совета по присуждению ученых степеней при отделении физико-технических и математических наук АН Азерб. ССР официальными оппонентами назначены:

1. Доктор физико-математических наук,
О. В. БЕСОВ

2. Кандидат физико-математических наук,
А. С. МАХМУДОВ

Защита диссертации состоится в сентябре 1967 г. на заседании Объединенного Совета при Отделении физико-технических и математических наук (г. Баку, Коммунистическая, 10).

Автореферат разослан 26 августа 1967 г.

293926

Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

Теория почти-периодических функций, созданная Бором, в последние годы привлекает все большее число математиков как у нас в стране, так и за рубежом.

В связи с этим, изучение различных вопросов теории приближения почти-периодических функций представляет определенный научный интерес.

В своих исследованиях Г. Бор, Вейль, Валле-Пуссен, Б. М. Левитан и другие рассматривали только непрерывные функции. Существенный шаг в распространении теории почти-периодических функций на разрывные (суммируемые) функции сделал В. В. Степанов. Дальнейшее обобщение теории почти-периодических функций было указано Вейлем, Безиковичем и другими.

Отметим, что в последнее время Е. А. Бредихиной выполнен ряд работ, посвященных нахождению порядка наилучших приближений почти-периодических функций и методам суммирования рядов Фурье этих функций.

В данной диссертационной работе рассматривается пространство $S^{\bar{p}}$ — почти-периодических функций многих переменных, определенное на базе следующей „смешанной" нормы

$$\|f(\bar{x})\|_{S^{\bar{p}}} = \sup_{-\infty < l_1, \ldots, l_n < \infty} \frac{1}{l_1^{1/p_1} \ldots l_n^{1/p_n}} \left\{ \int_{l_n}^{l_n+1} \left\{ \int_{l_{n-1}}^{l_{n-1}+1} \cdots \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdots \left\{ \int_{l_1}^{l_1+1} |f(\bar{x})|^{p_1} dx_1 \right\}^{p_2/p_1} \cdots dx_{n-1} \right\}^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right\}^{1/p_n},$$

совпадающее в одномерном случае с пространством В. В. Степанова.

Следует отметить, что результаты, полученные в диссертации в одномерном случае и при $p = \infty$, т. е. если рассмотреть равномерно почти-периодические функции обобщают и уточняют соответствующие результаты Е. А. Бредихиной.

Основное содержание диссертации опубликовано в [11], [12], [13].

Диссертация состоит из введения и шести параграфов.

Во введении дается краткий обзор литературы, связанной с темой диссертации и приводятся некоторые основные результаты.

В первом параграфе изучаются некоторые свойства $S^{\overline{p}}$—почти-периодических функций, необходимые для дальнейшего исследования.

Второй параграф посвящен некоторым вспомогательным предложениям и определению наилучших приближений $S^{\overline{p}}$— почти-периодических функций, их частного модуля гладкости и некоторым их свойствам.

В дальнейшем через $Q(\overline{\Lambda}_m)$ обозначается класс $S^{\overline{p}}$ — почти-периодических функций $f(\overline{x})$, показатели Фурье которых $\overline{\Lambda}_m=(\Lambda^{(1)}_{m_1},\ldots,\Lambda^{(n)}_{m_n})$ не имеют предельных точек на конечном растоянии по каждой из переменных.

Основными результатами третьего параграфа являются следующие:*

Теорема 3. 2. Для любой $S^{\overline{p}}$ — почти-периодической функции $f(\overline{x})\in Q(\Lambda_m)$, имеющей частные производные $\frac{\partial^{r_j} f}{\partial x_j^{r_j}}\in S^{\overline{p}}$ порядка $r_j\geqslant 0$ $(j=1,2,\ldots,n)$, справедлива оценка

$$E_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(f)_{S^{\overline{p}}}\leqslant C_{\overline{\kappa+r}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\mu_j^{r_j}}\,\omega_{\kappa_j\,x_j}\left(\frac{\partial^{r_j} f}{\partial x_j^{r_j}};\frac{1}{\mu_j}\right)_{S^{\overline{p}}},$$

где $C_{\overline{\kappa+r}}$ — абсолютная постоянная, независящая от $\overline{\mu}$ и f, а

$$E_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(f)_{S^{\overline{p}}}=\Big\|f(\overline{x})-\sum_{|\Lambda^{(1)}_{m_1}|<\mu_1}\cdots\sum_{|\Lambda^{(n)}_{m_n}|<\mu_n}C_{m_1,\ldots,m_n}\times$$

$$\times\, e^{i\left(x_1\Lambda^{(1)}_{m_1}+\ldots+x_n\Lambda^{(n)}_{m_n}\right)}\Big\|_{S^{\overline{p}}}$$

полное наилучшее приближение и

$$\omega_{\kappa_j\,x_j}\left(f;\frac{1}{\mu_j}\right)_{S^{\overline{p}}}=\sup_{|h_j|<\frac{1}{\mu_j}}\Big\|\sum_{\nu_j=0}^{\kappa_j}(-1)^{\kappa_j-\nu_j}\times$$

$$\times\binom{\kappa_j}{\nu_j}f(x_1,\ldots,x_j+\nu_j h_j,\ldots,x_n)\Big\|_{S^{\overline{p}}}$$

частный модуль гладкости.

* Мы сохраняем здесь нумерацию теорем, полученных в диссертации.

Теорема 3.2, доказанная впервые Джексоном для случая 2π—периодических функций одной переменной, была в дальнейшем обобщена в работе С. Б. Стечкина [7]. Для почти-периодических функций случаи $n=k_1=1$, $p_1=p_2=\ldots=p_n=\infty$ и $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$ были рассмотрены Е. А. Бредихиной [2], [4].

Следующее утверждение устанавливает связь между полным и частными наилучшими приближениями $S^{\overline{p}}$ — почти-периодических функций.

Теорема 3.3. Для любой $S^{\overline{p}}$ — почти-периодической функции $f(\overline{x})\in Q(\overline{\Lambda}_m)$ имеет место неравенство

$$E_{b_1,\ldots,b_n}(f)_{S^{\overline{p}}}\leqslant\min\left\{E_{a_{\nu_1},\ldots,a_{\nu_r},\infty}(f)_{S^{\overline{p}}}+E_{b_{\nu_{r+1}},\ldots,b_{\nu_n},\infty}(f)_{S^{\overline{p}}}\right\}\times$$

$$\times\left(1+\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\frac{b_{\nu_1}+a_{\nu_1}}{b_{\nu_1}-a_{\nu_1}}\right)\cdots\left(1+\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\frac{b_{\nu_r}+a_{\nu_r}}{b_{\nu_r}-a_{\nu_r}}\right)$$

$$\left(\nu_p=1,2,\ldots,n,\ p=1,2,\ldots,r;\ r\leqslant\left[\frac{n}{2}\right];\ 0<a_\nu<b_\nu\right).$$

Для случая 2π — периодических функций многих переменных эта теорема доказана М. Ф. Тиманом [8].

Теорема 3. 4. Для любой $S^{\overline{p}}$ — почти-периодической функции $f(\overline{x})\in Q(\overline{\Lambda}_m)$ имеет место неравенство

$$\|f(\overline{x})-\sigma(\overline{x};f)\|_{S^{\overline{p}}}\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{l_\nu+1}\sum_{\kappa_\nu=0}^{l_\nu}E_{\Lambda^{(\nu)}_{r_\nu-\kappa_\nu}\,x_\nu}(f)_{S^{\overline{p}}}\Bigg(1+\frac{4}{\pi}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\ln\frac{\Lambda^{(\nu)}_{r_\nu}+\Lambda^{(\nu)}_{r_\nu-l_\nu}+\alpha_\nu}{\Lambda^{(\nu)}_{r_\nu}-\Lambda^{(\nu)}_{r_\nu-l_\nu}+\alpha_\nu}\Bigg)^{n},$$

где C — абсолютная постоянная, $0\leqslant l_\nu<r_\nu$, $\alpha_\nu>0$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$,

$$\sigma(\overline{x};f)=\sum_{|\Lambda^{(1)}_{m_1}|<\Lambda^{(1)}_{r_1-l_1}}\cdots\sum_{|\Lambda^{(n)}_{m_n}|<\Lambda^{(n)}_{r_n-l_n}}A_{m_1,\ldots,m_n}e^{i\left(x_1\Lambda^{(1)}_{m_1}+\ldots+x_n\Lambda^{(n)}_{m_n}\right)}+$$

$$+\sum_{\Lambda^{(1)}_{r_1-l_1}<|\Lambda^{(1)}_{m_1}|<\Lambda^{(1)}_{r_1}+\alpha_1}\cdots\sum_{\Lambda^{(n)}_{r_n-l_n}<|\Lambda^{(n)}_{m_n}|<\Lambda^{(n)}_{r_n}+\alpha_n}A_{m_1,\ldots,m_n}\times$$

$$\times\frac{\left(\Lambda^{(1)}_{r_1}+\alpha_1-|\Lambda^{(1)}_{m_1}|\right)\cdots\left(\Lambda^{(n)}_{r_n}+\alpha_n-|\Lambda^{(n)}_{m_n}|\right)}{\left(\Lambda^{(1)}_{r_1}-\Lambda^{(1)}_{r_1-l_1}+\alpha_1\right)\cdots\left(\Lambda^{(n)}_{r_n}-\Lambda^{(n)}_{r_n-l_n}+\alpha_n\right)}e^{i\left(x_1\Lambda^{(1)}_{m_1}+\ldots+x_n\Lambda^{(n)}_{m_n}\right)}$$

Для 2π — периодических функций аналогичный результат был получен О. Д. Габисония [6].

В четвертом параграфе изучаются структурные свойства S^{p} — почти-периодических функций, наилучшие приближения которых имеют заданную мажоранту. Доказанные в этом параграфе теоремы являются в некотором смысле обратными относительно теоремы 3.2 с учетом свойств почти-периодических функций и их показателей Фурье.

Типичным результатом является

Теорема 4. 7. Пусть $\varphi(\delta)\in\Phi$, удовлетворяет условиям $(S)_{\alpha}$, $(S_k)_{\alpha}$ и $r\geqslant 0$ — целое число. Если последовательность $\{\Lambda_e\}$ обладает $L(b, m)$ плотной подпоследовательностью*) и

$$E_{\Lambda e}(f)_{S^p}\leqslant\frac{1}{\Lambda_e^r}\varphi\left(\frac{1}{\Lambda_e}\right),$$

тогда для любого $\delta>0$

$$\omega_k(f^{(r)};\delta)_{S^p}\leqslant C(1+\|f^{(r)}\|_{S^p})\,\varphi(\delta)\,\psi_2(\delta^{-1}),$$

где функция $\psi_2(\delta^{-1})$ при $m=1$ становится ограниченной, а при $m\geqslant 2$ возрастает с определенной скоростью так, что при $\delta\to 0$ функция $\varphi(\delta)\,\psi_2(\delta^{-1})\to 0$.

В пятом параграфе устанавливаются теоремы об эквивалентности O и порядковых соотношений ($\sim$ соотношений) для наилучших приближений и частного модуля гладкости S^{p} — почти-периодических функций, когда последовательность показателей Фурье обладает $L(b;1)$ плотной подпоследовательностью.

Основными результатами этого параграфа являются следующие:

Теорема 5.2. Пусть $\varphi_j(\delta_j)\in\Phi$ $(j=1, 2,\ldots, n)$ и удовлетворяют условию S_{k_j}. Если последовательность $\{\Lambda^{(j)}_{l_j}\}$ обладает $L(b_j;1)$ плотной подпоследовательностью, то соотношения

$$E_{\Lambda^{(1)}_{l_1},\ldots,\Lambda^{(n)}_{l_n}}(f)_{S^p}=O\left[\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{1}{\Lambda^{(j)}_{l_j}}\right)\right]$$

и соотношения

$$\omega_{k_j x_j}(f;\delta_j)_{S^p}=O\left[\varphi_j(\delta_j)\right]$$

при всех $j=1, 2, \ldots, n$ эквивалентны.

---

* Последовательность $\{\Lambda_e\}$ обладает $L(b;m)$ плотной подпоследовательностью ($b>1$, m — натуральное число), если

1) $\Lambda_1<b$,

2) для каждого натурального $\nu\geqslant 2$ существует элемент $l_\nu\in\{\Lambda_e\}$ — такой, что $b^{(\nu-1)^m}<l_\nu<b^{\nu^m}$.

Теорема 5.5. Пусть $\varphi_j(\delta_j)\in\Phi$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ и удовлетворяют условию S_{k_j}. Если последовательность $\{\Lambda^{(j)}_{l_j}\}$ обладает $L(b_j;1)$ плотной подпоследовательностью, то соотношения

$$E_{\Lambda^{(1)}_{l_1},\ldots,\Lambda^{(n)}_{l_n}}(f)_{S^p}\sim\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{1}{\Lambda^{(j)}_{l_j}}\right)$$

и соотношения

$$\omega_{k_j x_j}(f;\delta_j)_{S^p}\sim\varphi_j(\delta_j)$$

при всех $j=1,2,\ldots,n$ эквиваленты.

Некоторые подобные результаты для 2π — периодических функций были доказаны в работах Н. К. Бари и С. Б. Стечкина [1] и С. Б. Стечкина [7]).

Шестой параграф посвящен отысканию классов и порядков насыщения для методов суммирования рядов Фурье почти-периодических функций, показатели Фурье которых имеют единственную предельную точку в бесконечности.

Проблема насыщения, поставленная впервые Фаваром [5], была в дальнейшем развита в работах многих советских и зарубежных ученых (см., например, А. Х. Турецкий [9], Ф. И. Харшиладзе [10]).

Пусть задан метод суммирования η, который каждой S^{p} — почти — периодической функции $f(x)$ с рядом Фурье

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{i\Lambda_n x},$$

показатели Фурье которой имеют единственную предельную точку в бесконечности, т. е.

$$\Lambda_0=0,\ \Lambda_{-n}=-\Lambda_n,\ \Lambda_n<\Lambda_{n+1}\ \text{при}\ n\geqslant 0,\ \lim_{n\to\infty}\Lambda_n=\infty;$$

и

$$A_n=A_n(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)e^{-i\Lambda_n x}\,dx,$$

приводит в соответствие ряд

$$f_\mu^{(k)}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\binom{k}{\nu}\varphi_\mu(\nu\Lambda_n)A_n e^{i\Lambda_n x},$$

который предполагаем сходящим по норме пространства S^{p} и является разложением оператора

$$f_\mu^{(k)}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\binom{k}{\nu}f(x+\nu u)\psi_\mu(u)\,du,$$

где

$$\Psi_\mu(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\mu(t) e^{-iut} dt,$$

а непрерывная четная функция $\varphi_\mu(t)$ обладает свойствами

$$\varphi_\mu(0) = 1, \ \Psi_\mu(u) \in L(-\infty, \infty).$$

Положим

$$\Delta_\mu^{[k]}(f;\ x) = f(x) - f_\mu^{[k]}(x).$$

Пусть $\omega(\mu) \geqslant 0$ невозрастающая функция и

$$\lim_{\mu\to\infty} \omega(\mu) = 0.$$

Пусть существует такой класс М S^p — почти—периодических функций $f(x)$ таких, что

1°. Из $\| \Delta_\mu^{[k]}(f;x) \|_{S^p} = o\,[\omega(\mu)]$ при $\mu\to\infty$ следует, что функция $f(x)$ совпадает с почти—периодическим многочленом почти всюду.

2°. Из $\| \Delta_\mu^{[k]}(f;x) \|_{S^p} = O[\omega(\mu)]$ при $\mu\to\infty$ следует, что $f(x) \in M$.

3°. Для каждой функции $f(x) \in M$

$$\| \Delta_\mu^{[k]}(f;x) \|_{S^p} = O[\omega(\mu)] \ \text{при} \ \mu\to\infty.$$

Тогда будем говорить, что оператор $f_\mu^{[k]}(x)$ насыщен в пространстве S^p-почти-периодических функций порядком $O[\omega(\mu)]$ и М называется классом насыщения.

Установлены следующие утверждения

Теорема 6.1. Пусть

$$\Psi_\mu(u) \in L(-\infty, \infty)$$

и

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{1 - \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} \binom{\nu}{k} \varphi_\mu(\nu\Lambda_n)}{\omega(\mu)} = \gamma(\Lambda_n)$$

для каждого n, где $\gamma(\Lambda_n)$ некоторая функция от Λ_n, причем $\gamma(\Lambda_n) \neq 0$ при $|n| \geqslant n_0$, n_0—целое неотрицательное число.

Тогда для любой функции $f(x) \in S^p$ из соотношения

$$\| \Delta_\mu^{[k]}(f;x) \|_{S^p} = o\,[\omega(\mu)]$$

следует, что $A_n = 0$ при $|n| \geqslant n_0$, т. е. функция $f(x)$ совпадает с почти-периодическим многочленом порядка $< \Lambda_{n_0}$.

Предварительно отметим, что четная непрерывная ограниченная функция $g_R(t)$ обладает свойствами

$$g_R(0) = 1, \quad g_R(t) = 0 \quad \text{при} \ |t| \geqslant R,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_R(u)|\, du \leqslant C_2 < \infty,$$

где

$$G_R(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_R(t)\, e^{-iut} dt,$$

а C_2 не зависит от R.

Теорема 6. 5. Пусть выполняются условия

$$\Psi_\mu(u) \in L(-\infty, \infty),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_R(u)| du \leqslant C_2 < \infty$$

и при фиксированном t $\lim_{R\to\infty} g_R(t) = 1$.

Тогда для того, чтобы для любой функции $f(x) \in S^p$ имело место соотношение

$$\| \Delta_\mu^{[k]}(f;x) \|_{S^p} = O\,[\omega(\mu)],$$

необходимо и достаточно, чтобы сумма

$$\sum_{|\Lambda_n| \leqslant R} \frac{1 - \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} \binom{k}{\nu} \varphi_\mu(\nu\Lambda_n)}{\omega(\mu)} g_R(\Lambda_n) A_n e^{i\Lambda_n x}$$

была ограничена по норме пространства S^p.

В качестве примера рассматривается процесс Бернштейна-Рогозинского суммирования рядов Фурье почти-периодических функций, который является усилением соответствующего результата Е. А. Бредихиной [3].

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность моему научному руководителю доценту А. С. Джафарову за постановку задач и за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н. К. и Стечкин С. Б., Труды Московского матем. общества, т. 5, 1956 г.
2. Бредихина Е. А., ДАН СССР, т. 103, № (1955).
3. Бредихина Е. А., Изв. Вузов, № 5(18), 1960, 33–39.
4. Бредихина Е. А., ДАН СССР, т. 164, № 2 (1966).

5. Favard J., Bull des Sci. mathem., 61 (1937), 243—256.
6. Габисония О. Д., Сообщ. АН Груз. ССР, XL: 3, 1965, 529—535.
7. Счечкин С. Б., Изв. АН СССР сер. матем., т. 15, № 3 (1951).
8. Тиман М. Ф., ДАН СССР, т. 112, № 1 (1957), 25—26.
9. Турецкий А. Х., Изв. АН СССР, сер. матем. т. 25, № 3 (1961).
10. Харшиладзе Ф. И., ДАН СССР, т. 122, № 3 (1958).
11. Аббасов Р. А., Материалы научн. конференции молодых ученых и аспирантов АН Азерб. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, Баку, 1966.
12. Аббасов Р. А., Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, № 5 (1966).
13. Аббасов Р. А. Материалы научно-теорет. конф. молодых ученых, сер. физ.-матем. наук, Баку, 1967.

293926
Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

Сдано в набор 17/VII-1967 г. Подписано к печати 31/VII-1967 г. ФГ 11462.
Заказ 1012. Тираж 200. объем 1/2 п. л. Формат бумаги 60×90 1/16.

Типография им. 26 комиссаров, Баку, ул. Али Байрамова № 3.

2и

Бесплатно

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫ
ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВӘ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛӘРИ БӨЛМӘСИ
НӘЗДИНДӘ БИРЛӘШМИШ ЕЛМИ ШУРА

Әлјазмасы һүгугунда

Р. Ә. АББАСОВ

САНКИ-ПЕРИОДИК ФУНКСИЈАЛАРЫН ЈАХЫНЛАШМАСЫНЫН БӘ'ЗИ МӘСӘЛӘЛӘРИ

Физика-ријазијјат елмләри намизәди алимлик дәрәҹәси алмаг үчүн тәгдим едилмиш диссертасијанын
АВТОРЕФЕРАТЫ

Бакы—1967