АКАДЕМИЯ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР
ОТДЕЛЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Б. АБЛАКИРОВ

О ГОМОТЕТИЯХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Фрунзе 1966

АКАДЕМИЯ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР
ОТДЕЛЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Кымбаттуу Молдокеримге автордон
29/III-66г.

Б. АБАКИРОВ

О ГОМОТЕТИЯХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель—доктор
физико-математических наук,
профессор ЕГОРОВ И. П.

Фрунзе, 1966

Диссертационная работа выполнена в Пензенском педагогическом институте на кафедре высшей математики.

Объединенный Ученый Совет естественных и технических наук АН Киргизской ССР направляет Вам для ознакомления автореферат диссертации Б. АБАКИРОВА.

Защита диссертации состоится « » . . . . 1966 г.

Отзывы просим направлять по адресу: гор. Фрунзе, ул. Пушкина, 78.

Дата рассылки автореферата « » . . . . 1966 г.

Ученый секретарь Совета А. Афанасьев.

Точечное преобразование риманова пространства V_n называется гомотетическим, если оно переводит линейный элемент в себя с точностью до постоянного множителя λ, не зависящего от точки, т. е. если $d\bar{s}^2=\lambda ds^2$. Если $\lambda=1$, то гомотетическое преобразование является движением. Совокупность всех гомотетических преобразований составляет группу H_r. Для того, чтобы группа, компонентами операторов которой является $b^i(x)$, была группой гомотетий в римановом пространстве V_n с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $b^i(x)$ удовлетворяли обобщенным уравнениям Киллинга

$$b^k\partial_k g_{ij}+g_{kj}\partial_i b^k+g_{ik}\partial_j b^k=2Cg_{ij}, \qquad (*)$$

$$\partial_k=\partial/\partial x^k, \quad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ldots,n.$$

В этих уравнениях C — гомотетическая постоянная, соответствующая оператору $X=b^i(x)P_i$. При $C=0$ оператор порождает движения, при $C\neq 0$ — растяжения.

Теория непрерывных точечных преобразований в обобщённых пространствах, начало которой положил С. Ли, в настоящее время интенсивно развивается. Изучаются движения, гомотетии, конформные преобразования в римановых, финслеровых пространствах, пространствах путей и т. д. В настоящей работе решается вопрос о существовании четырёхмерных римановых пространств V_4, допускающих группы гомотетий, не сводящихся к группам движений. Метрические тензоры и базисные операторы соответствующих групп гомотетий искомых пространств V_4 получаются как решения системы дифференциальных уравнений в частных производных (*). По теореме Хирамацу—Кнебельмана всякая полная группа гомотетий H_r распадается на полную группу движений G_{r-1}, являющейся инвариантной подгруппой H_r, и группу растяжений H_1. В соответствии с этим при рассмотрении уравнений (*) предполагается, что $r-1$ базисных операторов принадлежат группе движений G_{r-1} и один — группе растяжений H_1. Поэтому в уравнениях (*) правая часть неравной нулю будет лишь для одного из базисных операторов, а именно для оператора растяжений. Упрощение уравнений (*) достигается, далее, использованием геометрического характера действия группы (транзитивна она или нетранзитивна, действует на вырожденных поверхностях или невырожденных и т. д.). Еще до решения уравнений (*) вид базисных операторов определяется частично из структуры $[X_p X_q] = C^t_{pq} X_t$, $[X_p X_r] = C^t_{pr} X_t$ ($p, q, t = 1, \ldots, r-1$, X_p—операторы движений, X_r—оператор растяжений), выражающей инвариантность подгруппы движений G_{r-1}.

Работа состоит из введения и четырех глав.

Введение посвящено постановке задачи и общему описанию метода.

В главе I кратко излагаются основные факты теории, используемые в работе, приводится классификация структур групп $G_r (r \leqslant 4)$, определяются $r-1$ — мерные нормальные делители G_r, реализующие потом подгруппы движений G_{r-1} группы гомотетий H_r.

Во II главе определяются V_4 с группами гомотетий H_r малых порядков $r \leqslant 3$. Доказываются, используемые потом, следующие факты:

1. Ранг матрицы базисных операторов $\|b^i_\alpha(x)\|$ всякой нетранзитивной абелевой группы гомотетий H_r равен r.

2. Не существует риманова V_n, допускающего нетразитивную группу гомотетий H_r, если ее подгруппа движений G_{r-1} является абелевой, ранг матрицы $\|b^i_\alpha(x)\|$ базисных операторов H_r равен $r-1$ и $\det \| C_p^q - 2C\delta_p^q \| \neq 0$. ($C_p^q = C_{pr}^q$).

3. Не существует с положительно определенной метрикой V_n, допускающего нетразитивную группу гомотетий H_r, если ее подгруппа движений G_{r-1} является абелевой и ранг матрицы $\|b^i_\alpha(x)\|$ равен $r-1$.

4. Не существует римановых V_4 с нетранзитивными группами гомотетий H_3, действующей на двумерных невырожденных поверхностях.

Получено 17 типов пространств V_4: 1 — с группой гомотетий H_1, 6 — с H_2, 10 — с H_3. В рассматриваемой системе координат метрический тензор полученных пространств соответственно зависит от трех, двух и одной координаты.

В III главе определяются V_4 с группами гомотетий H_4. Устанавливается, что не существует четырехмерных римановых пространств с группами гомотетий H_4, действующими на невырожденных двухмерных поверхностях. Получено 42 типа пространств: 19 — с нетранзитивными группами, 23 — с транзитивными. Метрический тензор пространств с транзитивными группами зависит лишь от постоянных. Если группа гомотетий разрешимая, абелевой G_3 не содержит и действует на 3-мерных поверхностях, то метрический тензор соответствующих пространств зависит от двух координат. Если же разрешимая группа содержит абелеву подгруппу G_3, то метрический тензор зависит, в основном от одной переменной. В случае неразрешимой группы в компоненты метрического тензора входят три координаты.

В IV главе решается вопрос о существовании римановых пространств V_4 с группами гомотетий H_r высоких порядков $r = 5, 6, 7$. Доказано, что не существует четырехмерных пространств V_4 с H_5, действующими на трехмерных вырожденных поверхностях, если только группа движений G_4 абелевой G_3 не содержит. Установлено также, что не существуют и V_4 с H_5 транзитивная подгруппа движений которых содержит неабелеву G_3. Найдено 30 типов V_4, допускающих группы гомотетий H_5:3—с нетранзитивными, 27—с транзитивными. Скалярная кривизна всех V_4 с нетранзитивными H_5 равна нулю и метрический тензор зависит от одной координаты. Когда H_5 транзитивная, то имеем следующее. Метрический тензор зависит от одной координаты, если нетранзитивная подгруппа G_4 содержит абелеву C_3 и от двух, если не содержит. В случае, когда G_4 транзитивна, метрический тензор зависит от одной координаты. Далее, имеется 15 типов V_4 с H_6 : 1 — с нетранзитивной, 14 — с транзитивной. Метрический тензор этих простанств зависит от одной или двух координат. Существует лишь один тип V_4, допускающих нетранзитивную H_7. Компоненты g_{ij}

зависят от одной координаты. Найдены конкретные пространства V_4, допускающие транзитивную H_7.

При определении гомотетически подвижных V_4 с нетранзитивной группой H_r использован факт, что не существует V_n, если подгруппа движений G_{r-1} нетранзитивной группы гомотетий действует на невырожденных гиперповерхностях.

В данной работе до конца рассмотрен вопрос о существовании гомотетически подвижных римановых пространств в случаях:

1) когда группа гомотетий нетранзитивна,
2) когда метрика V_4 определенна.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Абакиров Б. О нормальных делителях групп $G_r(r<4)$. Материалы XI научной конференции проф.-преп. состава Киргосуниверситета (секция матем.), Фрунзе, 1963.

2. Абакиров Б. Группа гомотетических движений $H_r(r<3$ в четырёхмерных римановых пространствах. Исследования по интегро-диф. уравнениям в Киргизии, вып. II, Фрунзе, 1962.

3. Абакиров Б. Четырёхмерные римановы пространства, допускающие четырёхчленные интранзитивные группы гомотетических движений, Матеріалы седьмой науч. конф. кафедры высш. матем. Фрунзенского политех. ин-та, Фрунзе, 1963.

4. Абакиров Б. Четырехмерные римановы пространства, допускающие четырехчленные просто-транзитивные группы гомотетических движений. Материалы седьмой науч. конф. кафедры высш. матем. Фрунзенского политех. и-та, Фрунзе, 1963.

5. Абакиров Б. Четырёхчерные римановы пространства, допускающие разрешимые просто-транзитивные группы гомотетий с трёхмерной абелевой подгруппой. Материалы XIII науч. конф. проф.-преп. состава Киргизгосуниверситета (секции матем.), Фрунзе, 1965.

6. Абакиров Б. Четырёхмерные римановы пространства, допускающие пятичленные группы гомотетических движений (тезисы), Литовский матем. сборник, III, №.2, 1963.

7. Абакиров Б. О четырёхмерных римановых пространствах, допускающих интранзитивные группы гомотетических движений G_5. Учёные записки Пензенского пед. ин-та «Движения в пространствах аффинной связности», Казань, 1965.

8. Абакиров Б. Пространства V_4, допускающие транзитивные группы H_5, подгруппа G_4 движений которых нетранзитивна. (В печати). Ученые записки физико-матем. ф-та Киргосуниверситета (серия матем.) 1966 г.

9. Абакиров Б. Группы гомотетий H_5 с просто-транзитивной подгруппой движений в пространствах V_4 (В печати). Учёные записки Пензенского пед. ин-та, 1966 г.

Подписано в печать 28/III 1966 г. Формат бумаги $60\times90^1/_{16}$.
Объем 0,5 п. л.
Д—02245. Заказ 828. Тираж 200 экз.

г. Фрунзе, тип. АН Киргиз. ССР.