На правах рукописи

В. И. АВЕРБУХ

ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

(автореферат диссертации,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук)

Научный руководитель — доктор физико-математических наук
профессор Г. Е. Шилов

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1967

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Основной целью диссертации является изложение дифференциального исчисления в линейных топологических пространствах.

Начало теории дифференцирования в бесконечномерных пространствах было положено в 1887 году Вито Вольтеррой [1], который ввел понятие вариационной производной, или, как ее часто называют, производной Вольтерры. Свойства вариационных производных активно изучались самим Вольтеррой и его последователями, и уже в начале нашего века Адамар сформулировал программу создания нелинейного анализа в «абстрактных» бесконечномерных пространствах.

С исследований Фреше начинается быстрое развитие теории дифференцирования в нормированных пространствах, которое в основном завершается к сороковым годам. Достаточно полное изложение дифференциального исчисления в нормированных пространствах дано в книге Дьедонне [2], главы 8 и 10.

Однако рамки теории нормированных пространств для многих вопросов анализа слишком узки. Так, например, вариационные производные естественнее всего рассматривать как производные отображений линейных топологических пространств. Поэтому в настоящее время вновь стала актуальной задача, поставленная Адамаром, — уже как задача построения дифференциального исчисления в линейных топологических пространствах. Решение этой последней задачи вовсе не достигается тривиальным переносом доказательств, имеющихся в случае нормированных пространств. Принципиально новых подходов требует уже само определение производной отображения одного линейного топологического пространства в другое.

Первое определение производной таких отображений было предложено Майклом и Пэксоном [3] в 1936 году. В последующие годы различные определения предлагали Хайерс [4], Себаштьян э Сильва [5], Маринеску [6], Вайнберг и Энгельсон [7], главным образом для локально выпуклых пространств.

Маринеску, определение которого лишь незначительно отличается от определения Хайерса, исследовал связь между дифференцируемостью и непрерывностью и доказал, что для введенной им производной справедливо правило дифференцирования сложной функции.

Вайнберг и Энгельсон с помощью введенного ими понятия производной функционала, определенного на линейном топологическом пространстве, обобщают на случай линейных топологических пространств одну теорему Люстерника, которая позволяет строить вариационную теорию нелинейных операторных уравнений в этих пространствах.

Наиболее удачным, на наш взгляд, явилось одно из определений, данных Себаштьяном э Сильва. На самом деле Себаштьян э Сильва вводит целый «спектр» производных, «крайними точками» которого являются (в случае нормированных пространств) производные Гато и Фреше (см. П. Леви [8]). Тип производной определяется при этом выбором некоторой системы ограниченных множеств в рассматриваемом пространстве.

Определение, принятое в диссертации, весьма близко к определению Себаштьяна э Сильва. Основные отличия следующие. Во-первых, рассматриваются производные по подпространствам. С одной стороны, это дает чисто технические преимущества (например, при определении частных производных), с другой стороны, во многих случаях производная по всему пространству не существует, в то время как существует производная по подпространству, представляющему собой всюду плотное подмножество данного пространства. Во-вторых, в качестве систем подмножеств, которые фигурируют в определении производной, допускаются любые системы, а не обязательно системы ограниченных множеств. В-третьих, при определении высших производных не предполагается, что дифференцирование производится каждый раз по одной и той же системе подмножеств.

На основе принятого определения в диссертации дается изложение основных фактов дифференциального и отчасти интегрального исчислений в линейных топологических пространствах.

Рассмотрим содержание диссертации по главам.

Диссертация состоит из трех глав и приложения.

В первом параграфе первой главы вводится основное определение производной по подпространству. Пусть X — линейное пространство[1]; Y, H — линейные топологические пространства[2]; $H \subset\subset X$[3]; σ — некоторая система подмножеств пространства H; β — некоторая система ограниченных подмножеств пространства H; $L(H, Y)$ — линейное пространство всех линейных непрерывных отображений пространства H в Y; $L_\beta\ (H, Y)$ — линейное топологическое пространство, получающееся наделением пространства $L(H, Y)$ топологией равномерной сходимости на множествах из системы β [9].

[1] Всюду в диссертации рассматриваются линейные пространства над полем R вещественных чисел.

[2] Все рассматриваемые топологические пространства предполагаются отделимыми.

[3] Символ $H \subset\subset X$ означает, что множество H является линейным подпространством пространства X.

Всюду ниже мы будем писать $f \cdot x$ вместо $f(x)$, если f — линейное отображение пространства X в Y.

Определение 1.1. Отображение $f: X \to Y$ будем называть σ-дифференцируемым в точке $x \in X$ по подпространству H (короче, (H, σ)-дифференцируемым в точке x), если существует такой элемент $f'(x)$ пространства $L(H, Y)$, что, каково бы ни было множество $S \in \sigma$,

$$\frac{f(x+\tau h) - f(x)}{\tau} \xrightarrow[\tau \in R]{\tau \to 0,\ \tau \neq 0} f'(x) \cdot h$$

равномерно по h, принадлежащим S. Отображение $f'(x)$ пространства H в Y будем называть σ-производной отображения f в точке x по подпространству H (короче, (H, σ)-производной в точке x). Отображение $f': x \to f'(x)$ пространства X в $L_\beta\ (H, Y)$ будем называть (σ, β)-производной отображения f по подпространству H (короче, (H, σ, β)-производной).

Если $\sigma = \beta$, мы вместо «(β, β)-производная» пишем «β-производная». В тех случаях, когда $H = X$, мы пишем просто «σ-производная» вместо «(X, σ)-производная» и «(σ, β)-производная» вместо «(X, σ, β)-производная».

Будем обозначать через $\beta_к$ систему всех конечных подмножеств пространства H, через β_0 систему всех ограниченных подмножеств H. Мы будем называть (H, σ)-производную слабой (сильной) H-производной, если $\sigma = \beta_к$ $(\sigma = \beta_0)$.

Заметим, что для нормированных пространств сильная производная совпадает с производной Фреше.

Далее, вводятся понятия H-непрерывности и (H, σ)-непрерывности.

Определение 1.2. Отображение $f: X \to Y$ будем называть H-непрерывным в точке $x \in X$, если отображение $h \to f(x+h)$ пространства H в Y непрерывно в нуле.

Определение 1.3. Отображение $f: X \to Y$ будем называть (H, σ)-непрерывным в точке $x \in X$, если, каково бы ни было множество $S \in \sigma$, $f(x+\tau h) \to f(x)$ при $\tau \to 0$, $\tau \in R$, равномерно по $h \in S$.

(Если $H = X$, мы будем писать просто «σ-непрерывное» вместо «(X, σ)-непрерывное».)

Исследуется связь между дифференцируемостью и непрерывностью. В частности, доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. Если H — метризуемое линейное топологическое пространство и отображение $f: X \to Y$ сильно H-дифференцируемо в точке x, то оно H-непрерывно в этой точке.

В § 2 излагаются правила дифференцирования. В § 3 доказывается следующая теорема, являющаяся обобщением фундаментальной теоремы Лагранжа о конечных приращениях.

Теорема 1.6. Пусть f — отображение линейного пространства X в локально выпуклое пространство Y. Если отображение f

слабо H-дифференцируемо в каждой точке сегмента S, соединяющего точки x_0 и x_0+h, $x_0 \in X$, $h \in H$, за исключением счетного множества точек N, то[4]

$$f(x_0+h)-f(x_0) \in \overline{\Gamma}\{f'(x)\cdot h,\ x \in S\setminus N\}.$$

Кроме того, в этом параграфе вводятся частные производные и изучается связь между полной и частными производными.

Во второй главе рассматриваются производные высших порядков. Они определяются по индукции.

Определение 2.1. $(H_1, \sigma_1, \beta_1; \ldots; H_n, \sigma_n, \beta_n)$-производной $f^{(n)}$ отображения $f: X \to Y$ будем называть (H_n, σ_n, β_n)-производную от $(H_1, \sigma_1, \beta_1; \ldots; H_{n-1}, \sigma_{n-1}, \beta_{n-1})$-производной $f^{(n-1)}$. Отображение f будем называть $(H_1, \sigma_1, \beta_1; \ldots; H_{n-1}, \sigma_{n-1}, \beta_{n-1}; H_n, \sigma_n)$—дифференцируемым в точке x, если (при некотором β_n) производная $f^{(n)}$ определена в точке x; значение $f^{(n)}(x)$ этой производной в точке x будем называть $(H_1, \sigma_1, \beta_1; \ldots; H_{n-1}, \sigma_{n-1}, \beta_{n-1}; H_n, \sigma_n)$-производной в точке x.

Мы будем говорить, что отображение f n раз (H, σ, β)-дифференцируемо в точке x, если в этой точке определена $\underbrace{(H, \sigma, \beta; \ldots; H, \sigma, \beta)}_{n}$-производная.

В § 1 вводится обобщение понятия гипонепрерывности [9] — $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$-гипонепрерывность — и показывается, что $(H_1, \sigma_1, \beta_1; \ldots; H_{n-1}, \sigma_{n-1}, \beta_{n-1}; H_n, \sigma_n)$-производную $f^{(n)}(x)$ в точке x можно рассматривать как элемент пространства $L_{\beta_1 \ldots \beta_{n-1}}(H_1, \ldots, H_n; Y)$ полилинейных $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$-гипонепрерывных отображений произведения $H_1 \times \ldots \times H_n$ в Y:

$$f^{(n)}(x): H_1 \times \cdots \times H_n \to Y.$$

В том же параграфе исследуются связи между производными, вариациями и разностями высших порядков. Приведем одну из теорем[5], описывающих эту связь. Положим $\Delta f(x; h) = f(x+h) - f(x)$; затем по индукции

$$\Delta^n f(x; h_1, \ldots, h_n) = \Delta^{n-1} f(x+h_n; h_1, \ldots, h_{n-1}) - \Delta^{n-1} f(x; h_1, \ldots, h_{n-1}).$$

Теорема 2.1. Пусть пространство Y локально выпукло. Тогда, если отображение $f: X \to Y$ n раз слабо H-дифференцируемо в каждой точке множества

$$P = \{x_0 + \theta_1 h_1 + \cdots + \theta_n h_n,\ 0 \leqslant \theta_i \leqslant 1,\ i = 1, n\},$$

$$\text{где } x_0 \in X,\ h_1, h_n \in H,$$

то

$$\Delta^n f(x; h_1, h_n) \in \overline{\Gamma}\{f^{(n)}(x)(h_1, h_n),\ x \in P\}.$$

[4] Здесь и ниже через $\overline{\Gamma}A$ обозначается замкнутая выпуклая оболочка множества A.

[5] Эта теорема является новой даже для случая нормированных пространств.

В § 2 доказывается (обобщенная) теорема Юнга о перемене порядка дифференцирования.

В § 3 при некоторых условиях на структуру пространства Y выводится следующая формула для производных высших порядков от композиции отображений $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$:

$$(g \circ f)^{(n)}(x)(h_1, \cdots, h_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum g^{(k)}(f(x)) \left(f^{(l_1)}(x)(h_{i_1^1}, \cdots, h_{i_{l_1}^1}), \cdots, f^{(l_k)}(x)(h_{i_1^k}, \cdots, h_{i_{l_k}^k}) \right),$$

где вторая сумма берется по всем разбиениям множества $\{h_1, \cdots, h_n\}$ на k непересекающихся непустых подмножеств

$$\{h_{i_1^1}, \cdots, h_{i_{l_1}^1}\}, \cdots, \{h_{i_1^k}, \cdots, h_{i_{l_k}^k}\},$$

причем

$$l_1 + \cdots + l_k = n;\ l_j > 0,\ i_1^j < \cdots < i_{l_j}^j,\ j = 1, \cdots, k;\ i_1^1 < \cdots < i_1^k.$$

В третьей главе изучается операция, обратная к дифференцированию. Такой операцией является интегрирование по кривым в линейных топологических пространствах, введенное Себаштьян э Сильва [5]. В первом параграфе рассматривается обобщение понятия интеграла Римана—Стильтьеса на функции действительного переменного со значениями в пространствах линейных непрерывных отображений, частным случаем которого является интеграл по кривым в линейных топологических пространствах, и доказывается теорема о предельном переходе под знаком интеграла Римана-Стильтьеса, из которой вытекает существование интеграла Римана-Стильтьеса для важного класса линейчатых отображений. При этом оказывается полезным следующее обобщение понятия липшицевости.

Определение 3.3. Пусть X — линейное пространство, σ — некоторая система множеств в X, I — компактный интервал вещественной прямой. Отображение $\varphi: I \to X$ будем называть σ-липшицевым, если существует такое множество $S \in \sigma$, что $\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2) \in (\tau_1 - \tau_2) S$ для любых τ_1, τ_2 из I.

В том же параграфе выводится следующая обобщенная формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x_t) = f(x_0) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{k=n}^{p-1} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_n=k \\ l_1<\ldots<l_n}} \frac{t^k}{k!} c(l_1, \cdots, l_n) f^{(n)}(x_0)(\varphi^{(l_1)}(0), \cdots, \varphi^{(l_n)}(0)) +$$

$$+\int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} \sum_{n=1}^{p} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_n=p \\ l_1<\dots<l_n}} c(l_1, \dots, l_n) \times$$

$$\times f^{(n)}(x_\tau)\left(\varphi^{(l_1)}(\tau), \dots, \varphi^{(l_n)}(\tau)\right) d\tau, \qquad (1)$$

где $f: X \to Y$, $\varphi: R^1 \to X$, $x_\tau \equiv \varphi(\tau)$, а $c(l_1, \dots, l_n)$ — числовые коэффициенты, для которых дается явная формула.

Формула (1) справедлива при некоторых предположениях, из которых важнейшим является существование счетной фундаментальной системы ограниченных множеств в пространстве X.

В § 2 исследуется связь между дифференцированием по подпространствам и интегрированием по кривым. Доказываются следующие теоремы (близкие теоремы были анонсированы Себаштьяном э Сильва в [5]).

Теорема 3.4. Пусть C — σ-липшицева кривая в линейном топологическом пространстве X. Если отображение f пространства X в локально выпуклое пространство Y σ-дифференцируемо в каждой точке образа кривой C и σ-производная f' интегрируема по C, то

$$\int_C f'(x)\,dx = f(x_1) - f(x_0),$$

где x_0 и x_1 — соответственно начало и конец кривой C.

Теорема 3.5. Пусть X, Y — линейные топологические пространства, A — связное открытое множество в X, $\mathfrak{A}$ — некоторый класс кривых в A, содержащий все ломаные в A. Если интеграл отображения $g: X \to L_\beta(X, Y)$ существует по всякой кривой из класса $\mathfrak{A}$ и зависит только от концов кривой, то отображение $f: X \to Y$, определенное (всюду на A) формулой

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi,$$

где x_0 — некоторая фиксированная точка из A, β-дифференцируемо в каждой точке $x_1 \in A$ β-непрерывности отображения g, причем $f'(x_1) = g(x_1)$.

В § 3 рассматривается задача об отыскании примитивной. Основной здесь является следующая теорема.

Теорема 3.7. Пусть X — линейное топологическое пространство, Y — секвенциально полное локально выпуклое пространство, σ — некоторая система подмножеств X, содержащая все ограниченные подмножества X размерности ≤ 2[6]; A — связное открытое

[6] Под размерностью множества в линейном пространстве понимается размерность минимального линейного многообразия, содержащего это множество.

множество в X, такое, что всякая замкнутая ломаная в A является контуром по крайней мере одной многогранной поверхности, целиком лежащей в A; $\mathfrak{A}$ — некоторый класс β-липшицевых кривых в A, содержащий все ломаные в A, и пусть $x_0 \in A$, $y_0 \in Y$. Тогда, если отображение g пространства X в $L_\beta(X, Y)$ непрерывно и σ-дифференцируемо в каждой точке множества A, причем σ-производная $g'(x)$ симметрична[7] при всех $x \in A$, то отображение g имеет β-примитивную на множестве A[8], такую, что $f(x_0) = y_0$. Эта примитивная задается формулой

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi,$$

где интеграл берется по любой кривой из класса $\mathfrak{A}$ с началом в точке x_0 и концом в точке x_1.

Близкая теорема была анонсирована Себаштьяном э Сильва в [5].

Приложение состоит из двух параграфов.

§ 1 посвящен применению полученных в основном тексте результатов к функционалам, определенным на пространствах функций (одного или нескольких переменных). С современной точки зрения, в явной форме (для производных первого порядка) впервые высказанной Донскером и Лионсом [10], вариационные производные являются не чем иным, как производными по подпространствам «основных функций», т. е. отображениями исходного пространства функций в пространство «обобщенных функций» (от «тех же аргументов»). В первом пункте § 1 рассматриваются с этой точки зрения производные высших порядков. Во втором пункте даются различные применения к функционалам теоремы о дифференцировании сложной функции, например, показывается, как можно получать из нее теоремы типа теоремы о дифференцировании под знаком интеграла. В последних двух пунктах рассматривается один пример специфически «функциональной» кривой и с его помощью получаются различные (как известные, так и не известные ранее) конкретизации общих теорем.

Пусть X и Y — линейные топологические пространства, A — открытое множество в X, a — отображение произведения $X \times Y$ в X, b — отображение $X \times Y$ в Y. Обобщением обычного квазилинейного уравнения с частными производными

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial y}{\partial x_i} = b,$$

где a_i и b — заданные функции переменных $x_1, \dots, x_n$, y, является уравнение

[7] Т. е. $g'(x) \cdot h_1 \cdot h_2 = g'(x) \cdot h_2 \cdot h_1$ для любых h_1, h_2 из X.

[8] Т. е. существует β-дифференцируемое на A отображение $f: X \to Y$, такое, что $f'(x) = g(x)$ для всех $x \in A$.

$$y' \cdot a = b. \qquad (2)$$

Отображение u пространства X в Y будем называть решением уравнения (2) в области A, если оно сильно дифференцируемо в каждой точке $x \in A$ и

$$u'(x) \cdot a(x, u(x)) = b(x, u(x)), \quad x \in A.$$

В § 2 обычная теория квазилинейных уравнений (интегральные поверхности и характеристики, задача Коши) обобщается на уравнение (2). Отметим, что для уравнения (2) нетривиальна сама постановка задачи Коши и что уравнение (2) не рассматривалось ранее даже для нормированных пространств X и Y, за исключением одной работы Далецкого и Кухарчука [11], в которой исследуется случай, когда X — банахово пространство, Y — вещественная прямая.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [12], [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni. «Atti Accad. Lincei», Rend., ser. 4, vol. 3, 2° sem., 97—105, 141—146, 153—158, 1887.
2. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М., «Мир», 1964.
3. Michal A. D., Paxson E. W. La differentielle dans les espaces abstraits linéaires avec une topologie. C. R. 202, 1741—1743, 1936.
4. Hyers D. H. A generalization of Fréchet's differential. «Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.», 27, 315—316, 1941.
5. Sebastião e Silva J. Le calcul différentiel et integral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes, I, II. «Atti Accad. Lincei», Rend., vol. 20, fasc. 6, 743—750; vol. 21, fasc. 1—2, 40—46, 1956.
6. Marinesku G. Différentielles de Gâteaux et Fréchet dans les espaces localement convexes. «Bull. Math. R. P. R.», n. s., 1, № 1, 77—86, 1957.
7. Вайнберг М. М., Энгельсон Я. Л. Об условном экстремуме функционалов в линейных топологических пространствах. «Матем. сб.», 45 (87), № 4, 417—422, 1958.
8. Lévy P. Les problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Gauthier—Villar, Paris, 1951.
9. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., ИЛ, 1959.
10. Donsker M. D., Lions J. L. Volterra Varitional Equations, Boundary Value Problems and Function Space Integrals. «Acta Math.», 108, 147—228, 1962.
11. Далецкий Ю. Л., Кухарчук Н. М. Уравнения первого порядка с функциональными производными. «Укр. мат. журнал», 17, № 6, 114—117, 1965.
12. Авербух В. И. Квазилинейные уравнения в линейных топологических пространствах. УМН, 22, вып. 3, 1967.
13. Авербух В. И., Смолянов О. Г. Дифференцирование в линейных топологических пространствах. ДАН СССР, 173, № 4, 1967.

Сдано в набор 21.XII.1966 г. Подписано к печати 2.II.1967 г.
Л-41615 Формат 60×90¹/₁₆ Физ. печ. л. 0,5 Тираж 200 экз. Зак. 1301

Типография Изд-ва МГУ (филиал), Москва, проспект Маркса, 20