НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ ЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Диссертационный совет Д. 05.11.030

На правах рукописи

УДК 519.633, 517.962.2, 519.876.2

КАЛДЫБАЕВА ГУЛЬЖАМАЛ АБДАЗОВНА

РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2013

Работа выполнена в Ошском Государственном Университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент **Сатыбаев А. Дж.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Дженалиев М.Т.**

доктор физико-математических наук, профессор **Асанов А.**

Ведущая организация: Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына

Защита состоится *31 мая 2013 г.* в *13^{00}* часов на заседании диссертационного совета Д 05.11.030 при Институте автоматики и информационных технологий НАН КР по адресу: 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Национальной Академии наук Кыргызской Республики 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265.

.

Автореферат разослан «_____» _________ *2013 г.*

Ученый секретарь
диссертационного совета, к.т.н., с.н.с. Брякин И.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Термоупругость в последние годы получила бурное развитие в связи с важными проблемами, которые возникают при разработке новых конструкций паровых и газовых турбин, высокоскоростных самолетов, ядерных реакторов, реактивных и ракетных двигателей и др. В результате подвода тепла от газового потока в тепловом двигателе, аэродинамического нагрева в высокоскоростном самолете, выделения тепла в атомном реакторе и.т.д., элементы этих конструкций работают в условиях неравномерного нестационарного нагрева, в результате которого изменяются физико-механические свойства материалов, а также возникают градиенты температуры, что в свою очередь приводит к неравномерному тепловому расширению отдельных частей конструкций.

Тепловые напряжения сами по себе и совместно с механическими напряжениями от внешних сил могут привести к появлению трещин и разрушению конструкций из материалов с высокой степенью хрупкости. Некоторые материалы при быстром появлении тепловых напряжений, вызванных действием резкого градиента нестационарного температурного поля, не выдерживают теплового удара и теряют свою прочность, становятся хрупкими. Вторичное действие термических напряжений приводит к термоусталости элементов конструкций. В результате действия тепловых напряжений может произойти существенная пластическая деформация, которая ведет к полному или прогрессирующему разрушению конструкции, термовыпучиванию тонкостенной конструкции.

Изменение температуры тела, вообще, происходит не только за счет подвода тепла от внешних источников, но также за счет самого процесса деформации. При деформациях тела от тепловых и механических воздействий, протекающих с конечной скоростью, имеют значения термомеханические эффекты следующего рода: образование и движение тепловых потоков внутри тела, возникновение связанных упругих и тепловых волн, термоупругое рассеяние энергии и т.д.

Термоупругость — новая область механики, развившаяся в 60- годы прошлого столетия. Она изучает взаимодействие поля деформаций и поля температуры и, таким образом, связывает на основе термодинамики необратимых процессов две отдельные ранее считавшиеся независимыми дисциплины — теорию упругости и теорию теплопроводности.

Как известно, обратные задачи относятся к некорректным и возникли сравнительно недавно.

Монография Тихонова А.Н. и его учеников [1] посвящена методам построения устойчивых приближенных решений широкого класса некорректно поставленных и обратных задач.

[1]. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.

В исследовательских работах Лаврентьева М.М. и его учеников [2] рассмотрен широкий класс некорректных и обратных задач математической физики, анализа и теории операторов.

В научных работах Романова В.Г.[3] рассматриваются задачи определения коэффициентов линейных гиперболических уравнений и изучаются вопросы корректности обратных задач.

В монографиях и работах Кабанихина С.И. [4] изложены методы исследования и решения обратных, некорректных задач линейной алгебры, интегральных и операторных уравнений, интегральной геометрии, спектральных обратных задач, рассмотрены линейные некорректные задачи и коэффициентные обратные задачи гиперболических, параболических и эллиптических уравнений, а также дан обширный справочный материал; приведены конечно-разностные методы исследования обратных задач для гиперболических уравнений и систем, рассмотрены обратные задачи сейсмики, акустики, ядерной геофизики, построены проекционно-разностные алгоритмы решений; в[5,6] излагаются исследования прямых и обратных задач для системы уравнений Максвелла с гладкими коэффициентами по горизонтальным переменным.

Обратные задачи в различных постановках рассмотрены и в Кыргызстане, например в работах Иманалиева М.И.[7], Боташева А.И., Асанова А.А., Садабаева А.С., Аблабекова Б.А., Атаманова Э.Р., Мамаюсуповых О.Ш., М.Ш. и др.

В настоящее время термопругость вполне сформировалась как научная дисциплина. Четко определены ее исходные предположения, выведены основные соотношения и дифференциальные уравнения. Разработан ряд методов решения дифференциальных уравнений термоупругости.

В монографии Яхно В.Г. [8] представлены результаты исследования корректности обратных динамических задач линейной теории упругости.

В исследовательской работе Апбасова С.О., Яхно В.Г. [9] приведено исследование задачи определения таких характеристик термоупругой вертикально-неоднородной среды, как плотность, параметры Ламэ, коэффициент теплового расширения (коэффициент – функция температуры). Здесь основными результатами являются теорема об однозначной разрешимости и оценках устойчивости решения поставленной задачи.

---

[2] . Лаврентьев М.М. Савельев Л.Я. Теории операторов и некорректные задачи. Новосибирск, 1999. –С.702.

[3] . Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. –М.: Наука, 1984. – 264 с.

[4] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. научное издательство. 2009, 458 с.

[5] Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. – Новосибирск: Наука, 1991.

[6] Романов В.Г., Кабанихин С.И., Пухначева Т.П. Обратные задачи электродинамики. – Новосибирск: ВЦ, 1984. – 201 с.

[7] Иманалиев М.И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения. – Фрунзе: Илим, 1977. – 347 с.

[8] Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. - Новосибирск: Наука. СО. отд-ние.1990. – 296 с.

[9] Апбасов С.О., Яхно В.Г. Определение характеристик изотропной вертикально - неоднородной несвязной термоупругой среды //Вопросы корректности задач математической физики и анализа. - Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1986. - С. 26-37.

Научная статья Апбасова С.О., Яхно В.Г.[10] посвящена исследованию задачи определения такой важной характеристики термоупругой среды, как коэффициент теплового расширения, являющийся функцией изменения температуры. Здесь полезной информацией для решения поставленной задачи считается известная для конечного промежутка времени в фиксированной точке границы среды третья компонента вектора смещения, а источником, вызвавшим смещения, служит воздействие теплового удара на границу среду.

В препринте Козлова В.А. и др.[11] рассматривается обратная задача несвязанной термоупругости, заключающаяся в восстановлении термонапряженного состояния в объеме тела по заданном на части границы смещениям и температуре.

В работе Ватульяна А.О.[12] рассмотрены различные классы обратных задач механики деформируемого твердого, в которых по некоторой дополнительной экспериментальной информации о решении определяются коэффициенты дифференциальных уравнений, начальные условия, граничные условия, геометрия внутренних дефектов.

В работе Самарского А.А., Вабищевича П.Н.[13] исследованы проблемы теплопередачи современными численными методами. Описаны основные подходы к аналитическому исследованию математических моделей теплопередачи традиционными средствами прикладной математики. Рассматриваются численные методы приближенного решения стационарных и нестационарных многомерных задач теплопроводности. Большое внимание уделяется задачам с фазовыми превращениями, задачам термоупругости и теплообмена излучением; процессам тепло - и массопереноса. Обсуждаются проблемы управления и оптимизации тепловых процессов. Рассмотрены вопросы численного решения обратных задач теплообмена. Приведены примеры решения различных двумерных задач теплопередачи с программами для ЭВМ.

Общие основания теории упругости и термоупругости изложены в литературе Мусхелишвили Н.И.[14], а именно учение о напряженном состоянии тел, учение о деформации, связь между деформацией и напряжением в упругом и термоупругом теле.

В монографии Коваленко А.Д.[15] рассмотрены постановки и методы решения квазистатических, динамических и связанных задач термоупругости, исследованы динамические эффекты при резко нестационарных тепловых воздействиях, термодинамические эффекты, обусловленные взаимодействием полей деформации и температуры.

---

[10] Апбасов С.О., Яхно В.Г. Обратная задача динамической несвязной термоупругости //Некоторые вопросы дифференциальных уравнений и дискретной математики. -Новосибирск: НГУ, 1986. -С.63-70.

[11] Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В. Обратная задача термоупругости. Ленинград. ЛИМАШ. Препринт №5. 1989. – 15 с.

[12] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого тела. - М.: ФИЗМАТЛИТ. 2007.-224 с.

[13] Самарский А.А. , Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Едиториал УРСС, 2003.-784 с.

[14] Мусхелишивили Н.И. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. –М.: Наука, 1976.

[15] Коваленко А.Д. Термоупругость. – Киев: Изд – во АН УССР,1975. – 216с.

Монография Новацкого В.[16] – первая монография по теории связанной термоупругости, в которой он обобщил два независимых дисциплин – теорию упругости и теорию теплопроводности, дал вывод основных уравнений термоупругости, изложил методы их решения, а также сформулированы основные энергетические и вариационные теоремы, привел анализ распространения гармонических и апериодических волн.

Задача о тепловом ударе впервые была рассмотрена Даниловской В.И. [17] в рамках так называемой теории температурных напряжений. Это наиболее простая постановка задачи, позволяющая получить аналитическое решение.

Диссертационная работа посвящена исследованиям прямых и обратных одномерных динамических задач термоупругости с начальным мгновенным источником в виде $\delta(t)$ – дельта функции Дирака и двумерным прямым задачам термоупругости с плоской границей.

Актуальность темы исследований. При решении прикладных задач в последнее время все чаще возникают проблемы отыскания переменных коэффициентов дифференциальных уравнений. Это связано с тем, что дифференциальные уравнения, как правило, описывают физико-технические процессы, а коэффициенты уравнений связаны с физико-техническими характеристиками среды, в которой протекают эти процессы. И часто возникает вопрос о том, как определить эти коэффициенты по некоторой дополнительной информации о решении прямой задачи.

В задачах термоупругости обычно рассматривается задача следующего вида: задается дифференциальное уравнение термоупругости с дополнительными условиями, которым должно удовлетворять решение дифференциального уравнения. Как правило, эти дополнительные условия выделяют из всей совокупности решений дифференциального уравнения одно единственное решение. Такие задачи на нахождение решений дифференциальных уравнений с данными Коши или другими данными называют прямыми задачами. Как правило, в прямые задачи входят переменные функции, связанные с физическими характеристиками среды. Например, коэффициенты Ламэ и плотность в задачах теории упругости, диэлектрическая и магнитная проницаемость и проводимость - электродинамики, скорость распространения волн и плотности среды - акустики, а в задачах термоупругости – плотность среды, коэффициенты Ламэ, тепловое расширение, температуропроводность, теплоотдача, теплопроводность.

Представим теперь, что некоторые из этих характеристик неизвестны (именно их отыскание представляет большой интерес), а вместо них дана некоторая дополнительная информация о решении прямой задачи.

[16] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости -.М.: «Мир»1970 г.-216 с.

[17] Даниловская В.И. Об одной динамической задаче термоупругости. Прикл. мат. имех. 1952. Т.16, № 3. С.342-344.

Определение этих физических характеристик по дополнительной информации о решении прямой задачи называется обратной задачей.

Обратная задача связанной термоупругости в статическом, квазистатическом и динамическом случаях заключается в восстановлении термонапряженных состояний в объеме тела по заданным на граничной части смещениям и температуре. Обратная задача термоупругости имеет практическое приложение при исследовании конструкций в эксплуатационных режимах, когда, как правило, измерения возможны лишь на части поверхности. В динамических обратных задачах термоупругости в качестве дополнительной информации задается след решения соответствующей прямой задачи на некоторой, как правило, времени подобной поверхности.

В связи с появлением быстродействующих компьютеров одним из актуальных вопросов является разработка численных эффективных методов решения одномерных обратных задач термоупругости.

Задача численного определения коэффициентов уравнений термоупругости, зависящих от пространственных переменных по некоторым следам решений прямой задачи, является одной из актуальных задач приложения.

В качестве **основного объекта исследования** выбраны постановки динамических прямых и обратных задач термоупругости.

Предметом данной диссертации является изложение следующих вопросов: построение и исследование вычислительных методов прямых и обратных динамических задач термоупругости, а именно конечно-разностный метод и создание комплекса программ с целью определения характеристик термоупругой среды.

Цель диссертационной работы заключается в численном решении одномерной прямой и обратной динамической задачи термоупругости, исследовании вопросов единственности и устойчивости приближенного решения прямых задач, получении алгоритмов и их реализаций с помощью компьютера.

Методы и средства исследования. При решении прямых и обратных задач термоупругости использовались методы математического анализа, математического моделирования, вычислительной математики, теории обратных задач, средства объектно - ориентированного программирования.

Обоснованность и достоверность. Теоретические результаты исследований оформлены в виде теорем, численные результаты проиллюстрированы с помощью вычислительного эксперимента путем сравнения приближенных результатов с известными точными решениями прямых и обратных задач.

Вычислительные эксперименты проводились по различным тестовым примерам, при этом оценены относительные погрешности вычислений, погрешности регуляризации при приближенно заданной дополнительной информации обратных задач.

Проверка устойчивости алгоритма проводилась в трех направлениях:

- уменьшением шагов дискретизации;

- сравнением полученных результатов в соответствующих точках;
- последовательным изменением ошибок дополнительной информации обратных задач.

Малая величина относительной погрешности и хорошее совпадение приближенного и точного решений обратных задач является подтверждением достоверности и точности результатов диссертаций.

Достоверность и точность разработанных методик и алгоритмов проверены на тестовых примерах, а адекватность результатов – путем сравнения результатов расчета с точными данными.

Научная новизна исследований заключена в численном решении задач термоупругости, как прямой, так и обратной, а именно:

- предложен новый подход к решению двумерных прямых задач термоупругости, применяемых в механике деформируемого тела; доказаны теоремы единственности, теоремы сходимости и оценка устойчивости конечно-разностного решения прямой задачи термоупругости;

- автором предложен новый подход (конечно-разностный метод) для решения одномерных обратных динамических задач термоупругости с мгновенным источником;

- для ряда одномерных обратных динамических задач термоупругости получены оценки условной устойчивости конечно-разностного решения и показана сходимость приближенного решения к точному;

- разработаны численные алгоритмы решения и реализованы на компьютере поставленные задачи термоупругости.

Практическая значимость результатов заключается в:

1) применении для решения практических задач термоупругости;
2) внедрении численных алгоритмов, блок-схем и реализаций на компьютере одномерных и обратных задач термоупругости в НИР Института природных ресурсов ЮО НАН КР для численного моделирования режимов сжигания и для конструирования тепловых печей по сжиганию угольных брикетов;
3) использовании результатов диссертационной работы в учебном процессе кафедры Информатики Ошского государственного университета. Имеются акты внедрения.

Апробация работы. Результаты исследований диссертационной работы докладывались на различных научных семинарах, республиканских и международных конференциях: на IV Международной научной конференции "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике" (г. Бишкек, 2011 г.), на объединенном научном семинаре кафедр «Прикладная математика и информатика», «Управление и информатика в технических системах», «Компьютерные и информационные системы» и «Математика и информатика» Ошкого технологического университета, на научной сессии Кыргызско-Узбекского университета (г. Ош, 1999-2012 г.г.); на международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Новосибирск, 2012 г.), научном семинаре ИПР НАН КР. Результаты численных расчетов и реализаций обсуждены на семинаре лаборатории

«Математическое моделирование сейсмических исследований» Института вычислительной математики и математической геофизики г. Новосибирск.

Публикации. Результаты исследований по теме диссертации опубликованы в 13 работах, в том числе в 11 статьях, 2 тезисах, в рецензируемых изданиях ВАК КР.

Научные положения, выносимые на защиту:

- теоремы единственности и сходимости решения двумерной прямой динамической задачи термоупругости с мгновенным источником и с плоской границей;
- теоремы сходимости решения одномерной прямой динамической задачи термоупругости с мгновенным источником, построенной численным конечно-разностным методом;
- теоремы сходимости решения одномерной обратной динамической задачи термоупругости, построенной конечно-разностным методом;
- численные алгоритмы и реализации решения прямых и обратных динамических задач термоупругости;
- результаты расчетов, полученные в виде графиков.

Личный вклад. Все полученные результаты диссертации являются новыми и установлены автором. Автором впервые доказана возможность использования конечно-разностного метода для решения одномерных обратных динамических задач термоупругости.

В совместных работах основные идеи предложены А.Дж. Сатыбаевым, а разработка, проведение методики и численная реализация выполнены автором.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 143 страницах, включает в себя рисунки, полученные при численных расчетах на тестовых примерах, блок-схемы и комплексы программ. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников, содержащего 62 наименований и приложений.

Автор выражает искреннюю благодарность за советы и обсуждения на этапах формирования диссертации научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору А.Дж. Сатыбаеву (постановка задач, идея разработки метода, помощь в вычислительных реализациях и постоянное внимание к работе), а также членам-корреспондентам РАН, д.ф.-м.н., профессорам В.Г. Романову и И.С. Кабанихину за обсуждения результатов и ценные предложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Для изложения полученных результатов исследований введем класс для функций $\rho_0(x)$, $\rho_1(x,y)$:

$$\Lambda_0 = \{\rho_0(x) \in C^6(R_+) : \rho_0'(+0) = 0,\ 0 < M_1 \le \rho_0(x) \le M_2,\ \| \rho_0 \|_{C^2(R_+)} \le M_3\ \} \tag{1}$$

$$\Lambda_1 = \{\rho_1(x, y) \in C^6((0, d) \times (-D, D)) : \rho_1(z, y) \ne 0,\ при\ (x, y) \in (0, d) \times (-D, D),$$
$$\alpha = \| \rho_1(x, y) \|_{C^2((0,d)\times(-D,D))}\ \} \tag{2}$$

$$\Lambda_2 = \{h(y) \in C^5(-D_1, D_1) : \quad h(y) \ne 0,\ при\ \ y \in (-D_1, D_1)\ \} \tag{3}$$

$$\Omega(T, D) = \{(x, y, t) : x \in (-T, T),\ y \in (-D, D),\ |x| < t < T\ \}$$

$$CL(T, D) = \left\{\rho_1(x, y) : \rho_1(x, y) = \sum_{j=-L}^{L} \rho_{1j}(x) Y_j(y),\ Y_j(y) = \exp(ij\pi y / D),\ \rho_{1j}(x) \in C(0, T/2)\right\},$$

где M_1, M_2, M_3, D_1, d, T - положительные постоянные, $D = D_1 + M_1 \cdot T$.

В диссертационной работе рассмотрены различные постановки динамических задач термоупругости, в частности – проблема теплового удара, являющейся одной из центральных проблем термодинамики.

Во введении содержится общая характеристика работы, обосновывается актуальность темы диссертации, изложены основные цели и постановка задачи исследования, определена научная новизна приведенных исследований.

В первой главе рассмотрены математические модели прямой и обратной динамической задачи термоупругости, т.е. выведены основные математические уравнения термоупругости и их начальные и граничные условия. Здесь же описаны связанные и несвязанные задачи термоупругости, математические модели термоупругой среды. В данной главе изложены математические модели прямых и обратных задач термоупругости и она носит вспомогательный характер**.**

Динамическая задача термоупругости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\ , \qquad i = 1,2,3; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \theta\ , \tag{5}$$

где $\theta(x, t)$ - приращение температуры,

$u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ - вектор смещений, σ_{ij} - напряжения:

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\left[\lambda div u - (3\lambda + 2\mu)\int_0^{\theta(x,t)} \alpha(y)\, dy\right], \tag{6}$$

а параметры входящие здесь имеют следующий физический смысл: κ - коэффициент температуропроводности, ρ - плотности среды, λ, μ - параметры Ламэ, α - коэффициент теплового расширения, δ_{ij} - символ

Кронекера. Относительно этих параметров предполагается, что выполнено следующие условия:

$$\Delta_0 = \{\rho = \rho(x_3) > 0, \mu = \mu(x_3) > 0, \lambda = \lambda(x_3) > 0, 2\mu(x_3) + \lambda(x_3) > 0\}, \tag{7}$$

(4), (5) со следующими начальными и граничными условиями

$$u_i\big|_{t<0} = 0, \qquad \partial u_i/\partial t\big|_{t=+0} = 0, \tag{8}$$

$$\theta(x,t)\big|_{t=+0} = 0, \tag{9}$$

$$\sigma_{3i}\big|_{x_3=+0} = f(x_1, x_2, t), \tag{10}$$

$$(\partial\theta/\partial x_3 - \gamma\theta)\big|_{x_3=+0} = \varphi(x_1, x_2, t). \tag{11}$$

Прямая динамическая задача термоупругости заключается в определении функции $u(x,t)$ и приращения $\theta(x,t)$, из (4)-(11) при известных $\mu(x_3), \lambda(x_3), \rho(x_3), \alpha(y), f_i(x_1,x_2,t), \varphi(x_1,x_2,t), k$.

Пусть $f_i(x_1, x_2, t) = 0$, а $\varphi(x_1, x_2, t) = -\gamma(T_1 - T_0)$ (12)

Решение (5),(9),(11),(12) имеет вид:

$$\theta(z,t) = (T_1 - T_0)\left[erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right) - \exp(\gamma z + \gamma^2 kt) * erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}} + \gamma\sqrt{kt}\right)\right], \tag{13}$$

где $erfc(z) = 1 - erf(z), \quad erf(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right) * \int_0^z \exp(-\xi^2)\,d\xi, \quad z = x_3$, (14)

Тогда получим задачу:

$$\rho(z)\frac{\partial^2 u_3}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(\lambda(z) + 2\mu(z))\frac{\partial u_3}{\partial z} - (3\lambda(z) + 2\mu(z))R(z)\theta(z,t)\right] \tag{15}$$

$$u_3\big|_{t=+0} = 0, \qquad \frac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=+0} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial z}\Big|_{z=+0} = \frac{(3\lambda(0) + 2\mu(0))}{(\lambda(0) + 2\mu(0))}R(0)\theta(0,t) \tag{17}$$

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u_3(z,t), \quad z = x_3, \quad R(z) = \int_o^s \alpha(y)\,dy,$$

Функция $\theta(z,t)$ - известная, определенная равенством (13).

Обратная динамическая задача термоупругости заключается в определение функции $\alpha(y)$ из (15)-(17), если относительно решения прямой задачи $u_3(z,t)$ известно, что

$$u_3(0,t) = g(t), \quad t \in [0,T], \tag{18}$$

Функция $\alpha(y)$ - тепловое расширение. Неравномерное тепловое расширение в общем случае не может происходить свободно в сплошном теле; оно вызывает тепловые (термические, температурные) напряжения. Знание величины и характера действия тепловых напряжений необходимо для всестороннего анализа прочности конструкции.

Вторая глава посвящена численному конечно-разностному решению прямой динамической задачи термоупругости с плоской границей. Эта задача рассмотрена конечно-разностным методом, но для применения этого метода вначале поставленная задача с мгновенным источником приведена к задаче с данными на характеристиках по методу выделения сингулярной и регулярной части решения задачи, разработанного В. Г. Романовым. Доказаны теоремы существования и единственности прямой динамической задачи термоупругости. В пунктах 2.2 и 2.3. получены результаты:

Двумерная прямая задача заключается в определении функции $U(x,y,t)$ из

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial t^2} = \mu(x,y)\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} + \left(\mu(x,y)+\lambda(x,y)\right)\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial y^2} - \left(3\mu(x,y)+2\lambda(x,y)\right) P_1\left(\Psi(x,y,t)\right), \qquad (19)$$

$$x\in R_+,\quad y\in R,\ t\in R_+,$$

где $\rho(x,y)$, $\mu(x,y)$, $\lambda(x,y)$ - плотность среды и коэффициенты Ламэ двумерной среды, $U(x,y,t)$ - тепловое возмущение двумерной среды, $P_1\left(\Psi(x,y,t)\right) = \int_0^{\Psi(x,y,t)} \alpha(\xi)d\xi$, $\Psi(x,y,t)$ - приращения температуры, $\alpha(\xi)$ - тепловое расширение, $U(x,y,t)\in W_2^1$ при известных функциях $\rho(x,y)$, $\mu(x,y)$, $\lambda(x,y)$, $P_1\left(\Psi(x,y,t)\right)$, а также при заданных начальных и граничных условиях следующего вида:

$$U\big|_{t<0} \equiv 0,\ x\in R_+,\quad y\in R, \qquad (20)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{2}h(y)\delta(t),\quad y\in(-D,D) \qquad (21)$$

где $h(y)$ - источник - заданная функция, $\delta(t)$ – дельта функция Дирака.

Пусть относительно заданных функций выполнены условия:

$$\rho(x,y),\quad \mu(x,y),\quad \lambda(x,y)\in\Lambda_1,\ \mu(x,y) = -\lambda(x,y) \qquad (22)$$

$$h(y)\in\Lambda_2. \qquad P_1\left(\Psi(x,y,t)\right)\in\Lambda_3 \qquad (23)$$

Доказана теорема единственности данной задачи (19)-(21)

Далее двумерная прямая задача (19)-(21) по методике В.Г. Романова и по методике выпрямления характеристик приведена к задаче с данными на характеристиках и эта задача заменена разностной задачей

$$
\left.\begin{aligned}
&V_{t\bar t} = V_{\alpha\bar\alpha} + LV_{ij}^{k}, \quad (ih_{1,}\ jh_2,\ \tau k) \in \Omega_{ij}^{k},\\
&V_{\pm i,j}^{|2i|} = S_j^{|2i|}, \quad i = \overline{-N,N};\ \ j = \overline{-L,L};\\
&V_{i,L}^{k} = V_{i,-L}^{k} = 0, \quad\ i = \overline{-N,N}; k = \overline{|2i|,2N};
\end{aligned}\right\} \tag{24}
$$

Доказана теорема сходимости конечно-разностного решения к точному.

Теорема. Пусть выполнены (22)-(23) и решение задачи (19)-(21) существует и имеет непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно в области $\Omega(T,D)$. Тогда существует постоянная $C_1 > 0$ такое, что при $\tau / h_2 < C_1$ решение конечно – разностной задачи (24) сходится к точному решению (19)-(21) со скоростью порядка $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$ в классе $W_2^1(\Omega(T,D))$. Коэффициент C_1 зависит только от нормы коэффициентов уравнения. Здесь h – шаг по *x,t.*

Такие же результаты, т.е. теорема единственности и сходимости, получены и для одномерной динамической задачи термоупругости (пункт 2.1).

В третьей главе изложены одномерные обратные задачи термоупругости.

Рассмотрена одномерная динамическая обратная задача термоупругости

$$
\begin{aligned}
&\rho(z)\frac{\partial^2 \upsilon(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}[\lambda(z) + 2\mu(z)\frac{\partial \upsilon(z,t)}{\partial z} -\\
&-(3\lambda(z) + 2\mu(z))R(\theta(z,t))], \qquad z \in R_+, \qquad t \in R_+,
\end{aligned} \tag{25}
$$

$$
\text{где} \quad R(s) = \int_0^s \alpha(y)dy, \quad \Phi(z,t) = R(\theta(z,t)) = (T_1 - T_0) \times \Big[erfc(z/(2\sqrt{kt})) -
$$

$$
- \exp(\gamma z - \gamma^2 kt) erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}} - \gamma\sqrt{kt}\right)\Big], \ erfc(\gamma) = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^z e^{-\xi^2} d\xi,
$$

$$
\upsilon(z,t)\big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial \upsilon(z,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{26}
$$

$$
\frac{\partial \upsilon(z,t)}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{3\lambda(0) + 2\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} R(\theta(0,t)). \tag{27}
$$

Обратная задача. Определить $\lambda(z)$ - коэффициент Ламэ из (25)-(27) при дополнительной информации относительно решения прямой задачи

$$
\upsilon(z,t)\big|_{z=0} = f(t), \qquad t \in [0,T], \qquad 0 < T - const \tag{28}
$$

и при известных значениях μ(z) – второго коэффициентов Ламэ, $\rho(z)$ - плотности среды, $\alpha(y)$ - теплового расширения.

В пункте 3.1 получена теорема сходимости численного конечно-разностного решения к точному решению.

Теорема. Пусть для $f(t) \in C^4[0,T]$ решение обратной задачи существует и удовлетворяет условию (1) и пусть решение прямой задачи $u(x,t) \in C^4(\Omega)$.

Тогда $в_i$ - приближенное решение, построенное конечно-разностным методом, обратной задачи сходится к точному решению $\bar{в}_i$ обратной задачи (25)-(28) в классе C со скоростью порядка $O(h)$, при некотором "малом" T и имеем место оценка

$$\left|в_i - \bar{в}_i\right| \le Ph\|u\|_{C^2(\Omega)},$$

где P – постоянное, зависящее от норм известных коэффициентов, h – шаг сетки, $\|u\|_{C^2(\Omega)}$- норма решения прямой задачи.

Такие же результаты, т.е. теоремы сходимости получены в определении коэффициента Ламе $\mu(z)$ (пункт 3.2), теплового расширения - $\alpha(y)$ (пункт 3.3), теплового расширения - $\alpha(y)$ методом сжатия (пункты 3.4, 3.5).

В четвертой главе изложены численные алгоритмы, блок-схемы и реализации на компьютере одномерных прямых и обратных задач термоупругости.

Многие ученые-исследователи, получая хорошие результаты в теоретическом плане (существование, единственность и устойчивость решения), не доводят до численного решения и реализации. В этом смысле последняя четвертая глава с полученными графиками дополняет этот пробел.

В данной главе работы рассмотрена разностная задача на характеристиках:

$$V_{tt} = V_{xx} + LV_i^k, \quad (ih, \tau k) \in \Omega_i^k; \tag{29}$$

$$V_{\pm i}^{\,i} = P^{|i|}, \qquad i = \overline{-N, N}; \tag{30}$$

$$V_o^k = f^k, \qquad k = 0,...2N; \tag{31}$$

где $LV_i^k = q_i V_i^k - \sqrt{c_i c_o} * F(x_i, t_k)$.

По задаче (29)-(30) решена прямая задач, по формулам (29)-(31) решена обратная задача термоупругости.

В качестве восстановления функции были взяты различные модельные функции: линейная, параболы, ступенчатая, волновая.

Восстановление функции осуществлено с различной относительной погрешностью: от 1 до 21 процентов.

Результаты численных реализаций выведены в виде графиков (Рис. 1, Рис.2).

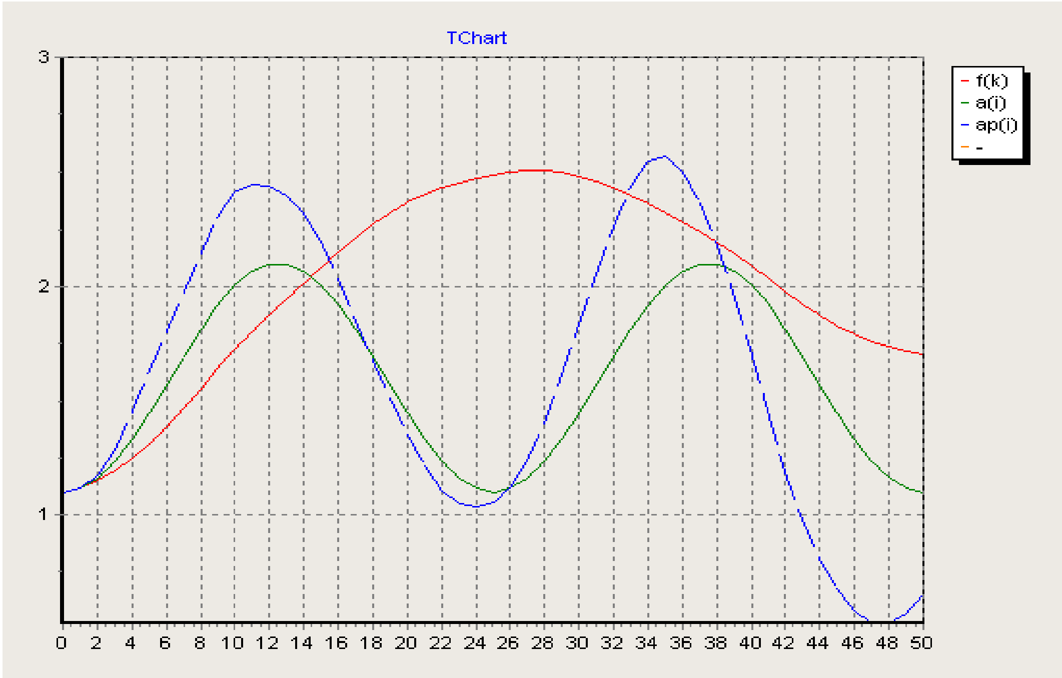

Рис. 1. *График функции, где* $\alpha(x)$ *– волновая*

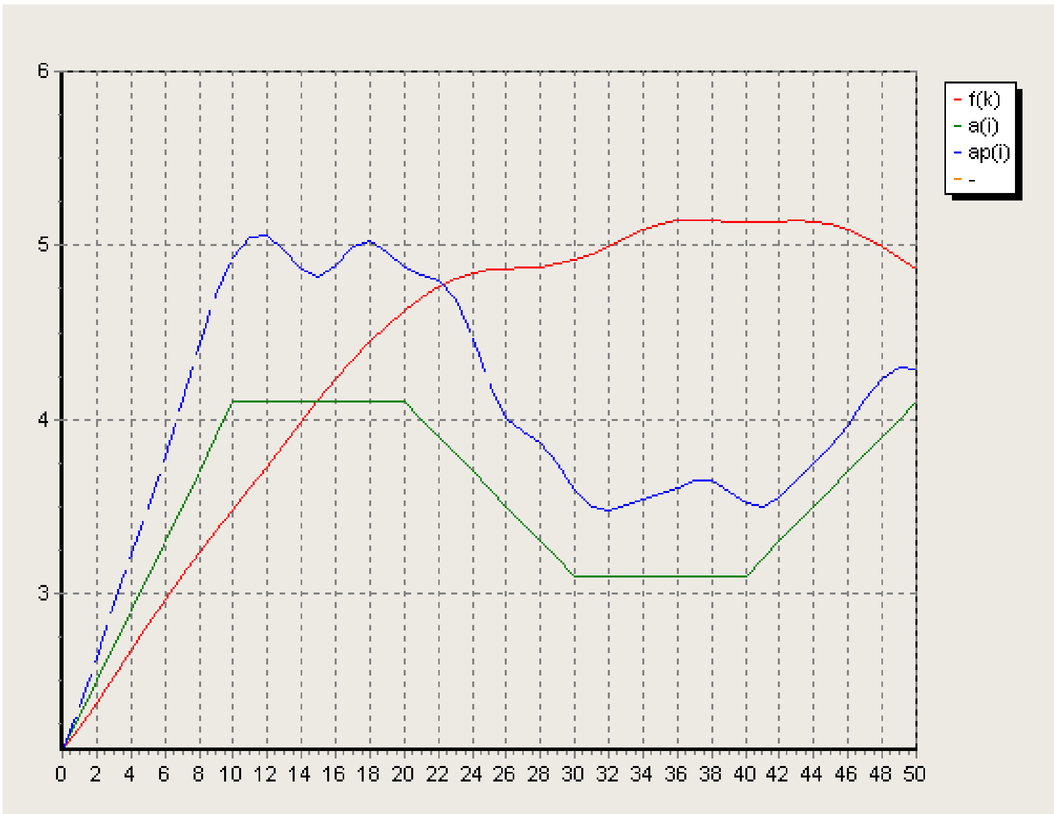

Рис. 2. *График функции, где* $\alpha(x)$ *– ступенчатая*

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертационной работе представлены научно-обоснованные математико-вычислительные решения одномерных прямых и обратных динамических задач термоупругости, внедрения которых в соответствующие отрасли позволяют внести значительный вклад в научно-технический прогресс, теорию и приложение обратных и некорректных задач.

В диссертационной работе впервые:

1. Построено численное конечно-разностное решение одномерной прямой задачи термоупругости с мгновенным источником.
2. Обоснованы принципы построения численного метода решения двумерной прямой задачи термоупругости с мгновенным источником и плоской границей, который стал возможен после применения методов выпрямления характеристик – решения задачи Эйконала и выделения особенностей – разделения сингулярной и регулярной части решения прямых задач.
3. Построен приближенный метод решения на основе сочетания методов выделения особенностей и разностного одномерных обратных задач термоупругости в различных постановках.
4. Построены устойчивые численные алгоритмы решения и численные реализации одномерных обратных задач термоупругости, проанализированы и выяснены возможности применения разработанного автором алгоритма. Показана достоверность конечно-разностного решения одномерных обратных задач с помощью численного эксперимента на тестовых примерах для различных видов искомых коэффициентов задач термоупругости.

Адекватность дискретной модели обратных задач установлена путем сравнения результатов расчета с точными данными модельных примеров.

На основе полученных результатов можно осуществить:

1. Конечно-разностный метод двумерных прямых задач термоупругости можно распространить на многомерные и другие прямые задачи термоупругости.
2. Построенные алгоритмы и реализации прямых и обратных задач термоупругости можно использовать для реальных однородных и неоднородных сред.
3. Построенные алгоритмы и программы обратных задач термоупругости, разработанные автором, могут быть применены в случае других одномерных обратных задач механики деформируемого тела.
4. Алгоритмы и программы прямых задач термоупругости, предложенные автором, можно осуществить для широкого класса других задач термоупругости.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Калдыбаева, Г.А.** Определение коэффициента Ламэ в динамической задаче термоупругости [Текст] / Г.А. Калдыбаева, А.Дж. Сатыбаев // Вестн. Каз. Нац. пед. ун-т. Сер. Физ.-мат. науки.- 2004.- №1 (9).- С. 113 – 118.

2. **Калдыбаева, Г.А.** Конечно-разностное решение одномерной обратной задачи термоупругости [Текст] / Г.А. Калдыбаева // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2009.- №10.- С. 6 – 10.
3. **Kaldybaeva, G.A.** Numerical definition of density in a dynamic problem of termo-elasticity [Text] / G.A. Kaldybaeva, A.J. Satybaev // Вестн. Каз. Нац. пед. ун-т. Сер. Физ.-мат. науки. - 2012.- №2 (38).- С.114-118.
4. **Калдыбаева, Г.А.** Численное решение одномерной прямой задачи термоупругости с мгновенным источником [Текст] / Г.А. Калдыбаева // Вестн. Каз. Нац. пед. ун-т. Сер. Физ.-мат. науки.- 2012. – №2 (38).- С. 90-95
5. **Калдыбаева, Г.А.** Численное определение коэффициента Ламэ в динамической задаче термоупругости [Текст] / А.Дж. Сатыбаев, Г.А. Калдыбаева // Проблемы управления и информатики: докл. 2 Междунар. конф. – Бишкек, 2007. – С. 67 – 71.
6. **Калдыбаева, Г.А.** Об одной динамической одномерной обратной задаче термоупругости [Текст] / А.Дж. Сатыбаев, Г.А. Калдыбаева // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2010. – №5.- С. 3 – 7.
7. **Калдыбаева, Г.А.** Конечно-разностное решение прямой задачи термоупругости с плоской границей [Текст] / А.Дж. Сатыбаев, Г.А. Калдыбаева // Вестн. КГУСТА.- 2011.- №2 (32), т. 1: Информ. технологии в образовании: междунар. науч. – практ. конф. – С. 112 – 116.
8. **Калдыбаева, Г.А.** Об одном решении двумерной прямой задачи термоупругости [Текст] / А.Дж. Сатыбаев, Г.А. Калдыбаева // Вестн. КГУСТА.- 2011.- №2 (32), т. 1: Информ. технологии в образовании: междунар. науч. – практ. конф. – С. 108 – 112.
9. **Калдыбаева, Г.А.** Об одной динамической одномерной обратной задаче термоупругости [Текст] / А.Дж. Сатыбаев, Г.А. Калдыбаева // Вестн. Кырг. нац. ун-та. Спец. вып., посвящ. 80-летию акад. М.И. Иманалиева. – Бишкек, 2011. – С. 139.
10. **Калдыбаева, Г.А.** Единственность решения прямой задачи термоупругости с плоской границей [Текст] / А.Дж. Сатыбаев, Г.А. Калдыбаева // Проблемы автоматики и управления. – Бишкек, 2011. – №1.- С. 59 – 63.
11. **Калдыбаева, Г.А.** Моделирование прямой и обратной задачи термоупругости [Текст] / А.Дж. Сатыбаев, Г.А. Калдыбаева // Изв. вузов.- Бишкек, 2011.- №3.– С. 7 – 16.
12. **Калдыбаева, Г.А.** Численная реализация одномерной прямой и обратной задачи термоупругости с мгновенным источником [Текст] / А.Дж. Сатыбаев, Г.А. Калдыбаева, Т.М. Асилбеков // Вестн. Каз. Нац. пед. ун-т. Сер. Физ.-мат. науки.- 2012. –№2 (38).- С.139-145.
13. **Калдыбаева, Г.А.** Численная реализация одномерной прямой и обратной задачи термоупругости с мгновенным источником [Текст] / А.Дж. Сатыбаев, Г.А. Калдыбаева // Обратные и некорректные задачи математической физики: междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения акад. М.М.Лаврентьева.- Новосибирск, 2012. – С. 326 .

РЕЗЮМЕ

КАЛДЫБАЕВА ГУЛЖАМАЛ АБДАЗОВНА

РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Ключевые слова: Математические модели, дифференциальные уравнения в частных производных, термоупругость, прямые и обратные задачи, численные конечные разностные решения.

Диссертация посвящена разработке, обоснованию и приложениям численного конечно-разностного метода, заключающегося в определении коэффициентов задач. Метод применен к прямым и обратным задачам термоупругости, возникающим в прикладных задачах.

Доказаны теоремы о сходимости численных решений к точным решениям прямых и обратных задач термоупругости. Достоверность решений иллюстрируется численными реализациями в виде графиков на тестовых примерах. Установлены относительные погрешности численных решений и проверена устойчивость решений и алгоритмов.

РЕЗЮМЕ

КАЛДЫБАЕВА ГУЛЖАМАЛ АБДАЗОВНА

ЖЫЛУУЛУК-СЕРПИЛГИЧТИН ДИНАМИКАЛЫК МАСЕЛЕРИНИН БИР КЛАССЫНА САНДЫК МОДЕЛДЕРДИ ИШТЕП ЧЫГУУ

05.13.18 – Математикалык моделдөө, сандык усулдар жана программалар комплекси

Негизги сөздөр: Математикалык моделдер, жеке туундулуу дифференциалдык тендемелер, жылуулук-серпилгич, оң жана тескери маселелер, сандык ченем айрымалык чечимдер.

Диссертация маселелердин коэффициенттерин аныктоочу сандык ченем айрымалык методун тургузулушуна, далилденишине жана колдонушуна багытталган.

Бул метод, колдонмо маселелерде кеңири пайда болуучу, жылуулук серпилгичтин оң жана тескери маселелерине колдонулган.

Тургузулган сандык чечимдердин так чечимдерине умтулуусунун теоремалары далилденген. Чечимдердин тууралыгы тесттик мисалдарда чыгарылган, сандык аткаруу аркылуу жасалган графиктер менен иллюстрацияланган.

Жакындатылган чечимдердин салыштырмалуу катаачылыктары аныкталган жана алгоритмдердин туруктуулугу текшерилген.

SUMMARY

KALDYBAEVA GULZHAMAL ABDAZOVNA

DEVELOPMENT OF NUMERICAL MODELING

ONE CLASS OF DYNAMIC PROBLEMS OF THERMOELASTICITY

05.13.18 – Mathematical models, computer methods and packet programs

Keywords: mathematical models, partial differential equations, thermoelasticity, directand inverse problems, numerical finite difference solution.

The thesis isdevoted to the development, substantiation and application of a numerical finite difference method to determine the coefficients of problems. The method is applied to the direct and inverse problems of thermoelasticity arising in applied problems.

The theorems on the convergence of numerical solutions to the exact solutions of direct and inverse problems thermoelasticity are proved. The accuracy of solutions is illustrated by numerical implementations in the form of graphs in the test cases. Therelative error of the numerical solutions are set and stability of solutions and algorithms is proved.