

Roman Omorov

Teoria della rugosità topologica dei sistemi

EAI
edizioni accademiche italiane

Roman Omorov

Teoria della rugosità topologica dei sistemi

FOR AUTHOR USE ONLY

Roman Omorov

Teoria della rugosità topologica dei sistemi

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

Edizioni Accademiche Italiane

Imprint

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher:

Edizioni Accademiche Italiane

is a trademark of

International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius

Printed at: see last page

ISBN: 978-620-0-83019-7

Copyright © Roman Omorov

Copyright © 2020 International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

FOR AUTHOR USE ONLY

Roman Omorov

Teoria della rugosità topologica dei sistemi:

Applicazioni ai sistemi sinergici e al caos

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

Contenuti

INTRODUZIONE.....	5
CAPITOLO 1. FONDAMENTI MATEMATICI DELLA SINERGICA E TEORIA DELLA RUGOSITÀ TOPOLOGICA DEI SISTEMI.....	11
CAPITOLO 2. TEORIA DEI SISTEMI DINAMICI	97
CAPITOLO 3. SISTEMI SINERGICI.....	107
CAPITOLO 4. TEORIA DELLA RUGOSITÀ E DELLE BIFORCAZIONI DI SISTEMI.....	131 132
CAPITOLO 5. CAOS NEI SISTEMI DINAMICI	159
CAPITOLO 6. DISPOSIZIONI DI BASE DELLA TEORIA E DEL METODO TOPOLOGICO DELLA RUGOSITÀ TOPOLOGICA DEI SISTEMI DINAMICI	180
CAPITOLO 7. APPLICAZIONI DELLA TEORIA E DEL METODO DELLA RUGOSITÀ TOPOLOGICA ALLE RICERCHE SULLA RUGOSITÀ,	195
BIFORCAZIONI E CAOS DI SISTEMI SINERGICI	196
CONCLUSIONE.....	217
RIFERIMENTI	220

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

INTRODUZIONE

Molte parti di processi e sistemi naturali e tecnogeni hanno regolarità identiche o simili di sviluppo e realizzazione dei fenomeni e degli eventi. L'auto-organizzazione del loro corso e i cambiamenti nel tempo e nello spazio stanno unendo tutti questi processi e i sistemi di varia natura. Tali processi e sistemi sono oggetto di ricerche di una scienza piuttosto nuova - una sinergia che si occupa dei processi auto-organizzati, dei fenomeni e dei sistemi di varia natura fisica.

Questa scienza ha acquisito un ampio sviluppo negli ultimi decenni e ora interferisce in molti campi della scienza, a partire dalle scienze naturali - fisica, chimica, biologia, geologia - fino ad arrivare ai campi inesatti delle scienze, come l'economia, la sociologia, la psicologia, la filosofia e anche nel campo delle attrezzature e delle tecnologie.

Molti scienziati si sono prefissati non solo la ricerca di processi e sistemi sinergici, ma anche la loro gestione per il raggiungimento del loro auspicabile sviluppo e della loro dinamica. La ricerca e il controllo del comportamento caotico (caos) nei sistemi di varia natura fisica sono particolarmente rilevanti nella scienza moderna.

L'apparato matematico della sinergia come direzione della scienza si basa prima di tutto sulla teoria dei sistemi dinamici e sulla topologia, quindi il fondatore delle idee e dei metodi principali di questa nuova scienza deve essere considerato il grande scienziato francese Henri Poincaré che ha dato un contributo essenziale alla teoria dei sistemi dinamici e che ha in sostanza basato la sezione di matematica - topologia.

Inoltre l'enorme contributo allo sviluppo della teoria dei sistemi dinamici è stato dato da molti scienziati del XX secolo, tra cui gli scienziati sovietici

L.I. Mandelstam, A.A. Andronov, L.S. Pontryagin, V.I. Arnold e altri. Nello sviluppo della teoria della stabilità dei depositi dei sistemi dinamici di A.M. Lyapunov, S. Smale, R. Thom, V.I. Zubov e molti altri scienziati sono inestimabili.

Nell'affermazione moderna il termine di nuova scienza è sinergica viene inserito dall'eccezionale fisico tedesco Hermann Haken alla fine degli anni Settanta del ventesimo secolo. Il termine "sinergica" deriva dal greco "sinergen" è assistenza, cooperazione.

Auto-organizzazione in sistemi sinergici significa transizione spontanea dallo stato disordinato o addirittura dal caos a quello ordinato a causa dell'azione cooperativa congiunta (sincrona) di molti sottosistemi o elementi di sistemi.

Il senso generale delle idee sinergiche e della metodologia della sinergia consiste in quanto segue:

I processi di distruzione e creazione, il degrado e l'evoluzione della natura e della società hanno carattere oggettivo;

processi di creazione (aumento della complessità e dell'ordine) hanno un algoritmo uniforme, indipendentemente dalla natura dei sistemi.

L'approccio sinergico o paradigma della sinergia presuppone che il caos e il disordine agiscano sia come distruttore che come creatore. Lo stato caotico comprende l'incertezza - probabilità e incidente. Come un germe di auto-organizzazione serve la "probabilità" - l'ordine nasce attraverso le oscillazioni, la stabilità attraverso l'instabilità.

Le condizioni necessarie per l'auto-organizzazione dei sistemi e dei processi sono:

il sistema - deve essere aperto non lineare e non in equilibrio;

l'ordine nel sistema nasce dalle oscillazioni;

esistenza di un feedback positivo;

raggiungimento da parte del sistema dei parametri critici di un ordine che promuove e migliora il comportamento cooperativo di elementi di sistema o sottosistemi.

L'approccio sinergico ai sistemi e ai fenomeni di varia natura introduce nella metodologia scientifica idee assolutamente nuove e non caratteristiche del classico approccio tradizionale della scienza. Queste innovazioni della sinergica possono essere caratterizzate dalle seguenti disposizioni:

In generale, i sistemi elaborati non possono impostare un compito di sviluppo assolutamente operativo, ed è possibile impostare un compito solo in una certa misura dello sviluppo autogestito previsto;

per i sistemi difficili esistono diversi modi alternativi di sviluppo determinati dalla scelta di una via dietro un punto (insieme) di ramificazione (biforcazione);

la sinergia apre i nuovi principi della sovrapposizione, dell'assemblaggio difficile delle parti, della creazione di strutture complesse da semplici quando l'insieme non è più uguale alla somma delle parti e dell'altro qualitativo;

non la forza d'influenza, ma la corretta struttura topologica o architettura d'impatto sul sistema sta definendo nel controllo dei sistemi;

la sinergia rivela la comprensione del perché il caos può fungere da inizio creatore, il meccanismo costruttivo dell'evoluzione come dal caos può svilupparsi il nuovo ordine;

la sinergia rivela le regolarità e le condizioni del corso dei processi veloci e valanghe e dei processi di sviluppo non lineare auto-organizzato.

In una ricerca e controllo dei sistemi sinergici sono essenziali questioni di rugosità e biforcazioni.

Nell'enunciato classico le questioni della rugosità e delle biforcazioni dei sistemi dinamici sono state poste all'alba della formazione della topologia come nuova direzione scientifica della matematica dal grande matematico francese e dal fisico H. Poincaré, in particolare, il termine biforcazione è stato da lui introdotto per la prima volta e significa letteralmente "biforcazione" o altrimenti da soluzioni di controllo dei sistemi dinamici si diramano nuove decisioni. La ruvidità dei sistemi dinamici allo stesso tempo è definito come proprietà dei sistemi di mantenere un quadro qualitativo di scissione dello spazio di fase in traiettorie a piccola perturbazione della topologia, dalla considerazione dei parenti dalla forma delle equazioni dei sistemi.

Nella terminologia moderna la parola "biforcazione" è usata come il nome di qualsiasi cambiamento spasmodico che avviene al cambio regolare dei parametri in qualsiasi sistema. Quindi, biforcazione significa la transizione tra spazi di sistemi ruvidi che avviene attraverso aree non ruvide (spazi).

Molti risultati fondamentali nella teoria della rugosità e delle biforcazioni sono ricevuti da A.A. Andronov e dalla sua scuola. Nell'opera di A.A. Andronov e L.S. Pontryagin (1937) il concetto di rugosità è per la prima volta dato e vengono formulati per la prima volta criteri qualitativi di rugosità che in seguito vengono definiti come concetto di rugosità secondo Andronov-Pontryagin.

Nelle opere dell'autore riportate nell'elenco dei riferimenti al presente libro si ricevono i risultati che sviluppano un concetto di rugosità secondo Andronov - Pontryagin, i problemi di rugosità e biforcazioni dei sistemi dinamici che permettono di indagare e risolvere quantitativamente, in particolare, efficacemente applicati ai sistemi sinergici.

Le basi matematiche della teoria sviluppata si basano su un apparato matematico di sinergie, la teoria della rugosità e delle biforcazioni dei sistemi dinamici.

L'apparato matematico della sinergica copre molti campi della matematica moderna in quanto gli oggetti di questa scienza sono oggetti di diversi campi della scienza. Innanzitutto, i modelli matematici dei sistemi sinergici sono rappresentati dalle equazioni non lineari di diversi tipi. Ma ad una ricerca delle equazioni non lineari vengono utilizzati vari metodi di decisione è anche la linearizzazione con dati di compiti alle equazioni lineari, e l'uso di metodi a matrice.

Le equazioni lineari e non lineari sono classificate su differenziale ordinario e differenziale, su determinato e stocastico, con coefficienti costanti e variabili (stazionari e non stazionari), concentrati e in derivati privati.

Le questioni della teoria della stabilità, della teoria delle matrici e della teoria dei frattali sono importanti anche per la ricerca di sistemi sinergici.

La teoria considerata della rugosità topologica è lo sviluppo della teoria della rugosità e delle biforcazioni dei sistemi dinamici per la ricerca di sistemi sinergici al fine di prevedere le biforcazioni (incidenti) e il caos e anche di controllarli.

CAPITOLO 1. FONDAMENTI MATEMATICI DI SINERGICA E TEORIA DELLA RUGOSITÀ TOPOLOGICA DEI SISTEMI

1.1. Equazioni differenziali ordinarie

Considereremo le equazioni differenziali in forma normale:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), i = \overline{1, n} \quad (1.1.1)$$

dove $\dot{x}_i = dx_i/dt$, $i = \overline{1, n}$ è il primo derivato delle variabili $x_i = x_i(t)$

a seconda di una variabile indipendente t .

Se scrivere (1.1.1) in forma di matrice vettoriale, allora designare

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, F(x, t) = [f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n, t)]^T,$$

T - il segno della trasposizione,

avremo

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (1.1.2)$$

La soluzione del sistema (1.1.2) o (1.1.1) su un intervallo $\Delta = t_2 - t_1$ è chiamata insieme di n delle funzioni $x_i = \xi_i(t)$, definite su un intervallo Δ tale che la loro sostituzione nel sistema (1.1.2) trasforma ogni equazione di questo sistema in identità su tutti gli intervalli Δ .

Se un vettore - funzione $F(x, t)$ non dipende ovviamente dal tempo, cioè il sistema delle equazioni differenziali (1.1.2) ha un aspetto

$$\dot{x} = F(x), \quad (1.1.3)$$

che questo sistema di equazioni si chiama autonomo (stazionario).

Un compito importante nella teoria delle equazioni differenziali è il cosiddetto compito di Cauchy che è formulato come segue.

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

Per trovare la soluzione di $x_i = \xi_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ del sistema delle equazioni differenziali (1.1.1) definito su un certo intervallo Δ, t_0 contenente un punto, e che soddisfa le condizioni

$$\xi_i(t_0) = x_{i0}, i = \overline{1, n}, \quad (1.1.4)$$

e t_0 , il x_{i0} in anticipo i numeri impostati.

Valori $t_0, x_{i0} (i = \overline{1, n})$ sono chiamati valori iniziali per la decisione $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ e condizioni (1.1.4) sono condizioni di ingresso.

Se per entrare in considerazione $(n + 1)$ si misura lo spazio euclideo con coordinate di x_1, x_2, \dots, x_n, t poi set di n funzioni $x_i = \xi_i(t)$ presenterà alla linea in questo spazio, e i valori iniziali $x_{i0}, x_{10}, \dots, x_{n0}, t_0$ presentare un punto fino a $(n+1)$ spazio misurato (in Fig. 1.1, $n = 1$)

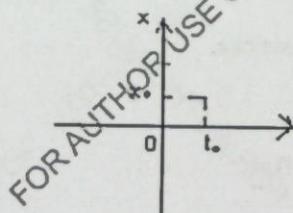


Fig. 1.1.

Il più importante dei teoremi alla soluzione di un compito di Cauchy sono i teoremi dell'esistenza e dell'unicità delle decisioni dalle condizioni e dai parametri di ingresso.

Formuliamo questi teoremi senza riduzione delle prove.

Teorema 1.1.1. Per il sistema delle equazioni differenziali (1.1.2), se le funzioni $f_i(x_1, \dots, x_n, t)$ sono continue su t e soddisfano le condizioni di Lipschitz su x_1, \dots, x_n in qualche zona G , cioè

$$|f_i(x_1, x_2, \dots, x_{j1}, \dots, x_n, t) - f_i(x_1, \dots, x_{j2}, \dots, x_n, t)| \leq L|x_{j1} - x_{j2}|, \quad (1.1.5)$$

dove $i = \overline{1, n}; j = \overline{n, 1}, L = \text{const}$ Lipschitz, quindi esiste e oltre all'unica soluzione di $x_i = \xi_i(t), i = \overline{1, n}$ sistemi (1.1.2), che soddisfano le condizioni di ingresso

$$x_i(t_0) = x_{i0}, i = \overline{1, n}, \quad (1.1.6)$$

definito su un pezzo Δ, t_0 contenente un punto.

Teorema 1.1.2. Per il sistema delle equazioni differenziali (1.1.2), se le funzioni $f_i(x_1, \dots, x_n, t)$ sono continue su t e in qualche area G , e $x = \xi(x_0, t_0, t)$ la soluzione di questo sistema che soddisfa le condizioni di ingresso (1.1.6) e definita su un pezzo soddisfa la condizione di Lipschitz su $|t-t_0| \leq \Delta$, per qualsiasi $\epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon, \Delta) > 0$, quell'altra soluzione di $x = \bar{\xi}(\bar{x}_0, t_0, t)$, soddisfare le condizioni d'ingresso

$$\bar{\xi}(\bar{x}_0, t_0, t) = \bar{x}_0,$$

dove $\|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta$, sarà definito sullo stesso pezzo Δ e soddisfa alla disuguaglianza

$$\|\xi(x_0, t_0, t) - \bar{\xi}(\bar{x}_0, t_0, t)\| < \epsilon, \quad (1.1.7)$$

dove $\|\cdot\|$ - qualsiasi norma vettoriale.

Vero il teorema simile per i parametri del sistema (1.1.2).

Teorema 1.1.3. Per il sistema delle equazioni differenziali in funzione dei parametri

$$\mu = [\mu_1, \dots, \mu_m]^T: \dot{x} = F(x, \mu, t), \quad (1.1.8)$$

se $\xi(\mu_0, t)$ è la soluzione del sistema (1.1.8) al valore dei parametri $\mu = \mu_0$, soddisfacente

alle condizioni d'ingresso: $\xi(\mu_0, t_0) = x_0$ per ogni $\varepsilon > 0$, è $\delta(\varepsilon, \Delta) > 0$, che se la disuguaglianza $\| \mu - \mu_0 \| < \delta$, è giusto che la decisione $\xi(\mu_0, t)$ sia definita su un intervallo esiste $|t - t_0| < \Delta$, soddisfa anche alla disuguaglianza

$$\| \xi(\mu, t) - \xi(\mu_0, t) \| < \varepsilon. \quad (1.1.9)$$

Teoremi di dipendenza continua delle soluzioni delle equazioni differenziali dalle condizioni di ingresso e dai parametri sono molto importanti per i modelli pratici dei vari sistemi. I modelli di sistemi in pratica decidono su vari errori, quindi i teoremi sopra citati a piccoli errori permettono di operare con processi di sistema reale in modo autentico. Inoltre, la continua dipendenza delle decisioni permette di ricevere continue dipendenze funzionali della dinamica dei sistemi da cambiamenti delle condizioni di ingresso e dei parametri.

1.1.2. Equazioni differenziali lineari ordinarie

I sistemi lineari delle equazioni differenziali in forma normale sono presentati nella forma

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k + f_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.2.1)$$

o in vektor - una forma a matrice

$$\dot{x} = A(t)x + f(x), \quad (1.2.2)$$

dove $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, $f(t) = [f_1(t), \dots, f_n(t)]^T$ sono secondo un vettore di funzioni

$x_{i, n}(t)$; $A(t)$ è una matrice di coefficienti di sistema:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}. \quad (1.2.3)$$

Il sistema (1.2.1.) o (1.2.2.2) si chiama uniforme se $f_i(t) \equiv 0, i = \overline{1, n}$:

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (1.2.4)$$

La decisione comune dell'equazione (1.2.4) può essere presentata nella forma

$$x(t) = x(0)e^{A(t)t}, \quad (1.2.5)$$

dove $x(0) = x_0$ è il vettore dei valori iniziali x a $t_0 = 0$.

Per le equazioni con coefficienti costanti $\dot{x} = Ax$, la decisione avrà un aspetto

$$x(t) = x(0)e^{At}.$$

Nel caso in cui la matrice A venga portata in diagonale

$$A = M\Lambda M^{-1},$$

dove M è una matrice di riduzione a una vista diagonale con colonne proprie vettori di una matrice A , e $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$ è a matrice diagonale, λ_i sono valori propri di una matrice A , allora la soluzione dell'equazione differenziale avrà un aspetto

$$x(t) = x(0)Me^{\Lambda t}M^{-1}.$$

1.2. Equazioni differenziali lineari

Le funzioni che sono definite solo in alcuni punti di t_1, t_2, \dots , cioè nei momenti discreti di una variabile t (di regola, il tempo) sono chiamate tralicciate. Considereremo le funzioni tralicciate determinate solo in punti equidistanti di $t = nT$, dove n è un qualsiasi numero intero, in T è la costante chiamata dal periodo di discretizzazione. Queste funzioni sono designate da $f(nT)$ (Fig. 1.2).

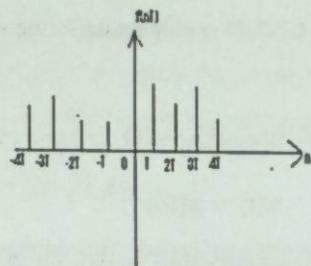


Fig. 1.2.

Per brevità la T cade ulteriormente. Espressione

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n), \quad (1.2.1)$$

è chiamata la differenza finale del primo ordine della funzione $f(n)$ tralicciata, per brevità solo la prima differenza. La prima differenza della funzione tralicciata $\Delta f(n)$ è detta differenza del secondo ordine della funzione tralicciata $f(n)$, ecc. Si possono considerare le differenze di qualsiasi ordine di $i = 2, 3, \dots$, (n) designato $\Delta^2 f(n)$, ecc. Per la differenza di qualsiasi ordine di k la formula è equa

$$f(n) = \sum_{v=0}^k (-1)^v \binom{k}{v} f(n+k+v), \quad (1.2.2)$$

dove $\binom{k}{v} = C_k^v = \frac{k!}{v!(k-v)!}$.

Le differenze finali delle funzioni tralicciate sono funzioni, un analogico discreto dei derivati in un caso continuo.

All'affermazione del problema di ritorno del ritrovamento della funzione $F(n)$ tralicciata per la quale la funzione $\Delta F(n)$ è la prima differenza che abbiamo:

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k). \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.2.3)$$

chiamo la funzione $F(n)$ un antiderivativo per la funzione tralicciata $F(nT)$ e la sommatoria in questo caso è un'integrazione analogica per funzioni continue.

Passiamo ora direttamente alla considerazione delle equazioni differenziali.

Il rapporto che collega la funzione tralicciata $x(n)$ e le sue differenze con un certo ordine k :

$$\phi(n, x(n), \Delta x(n), \dots, \Delta^k x(n)) = 0, \quad (1.2.4)$$

è chiamata l'equazione differenziale. Usando l'espressione (1.3.2) (1.3.4) è possibile trasformare in un look

$$\phi_1(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0. \quad (1.2.5)$$

Se il rapporto (1.2.5) contiene in forma esplicita le funzioni $x(n)$ e $x(n+k)$, allora l'equazione differenziale (1.2.4) viene chiamata equazione di ordine k . Se nel corso della riduzione dell'equazione (1.2.4) ad uno sguardo (1.2.5) le funzioni $x(n)$ possono essere distrutte reciprocamente, allo stesso tempo l'equazione differenziale di uno sguardo risulta essere l'equazione differenziale.

$$\phi_2(n, x(n), x(n+2), \dots, x(n+k)) = 0. \quad (1.2.6)$$

Sostituendo $m=n+1$, riceveremo

$$\phi_2(m-1, x(m), \dots, x(m+k-1)) = 0. \quad (1.2.7)$$

L'equazione (1.2.7) è l'equazione differenziale di $k-1$.

La funzione tralicciata $x(n)$ che trasforma l'equazione (1.2.4) o (1.2.5) in identità è chiamata la soluzione dell'equazione differenziale.

Considereremo l'equazione differenziale di un ordine di k risolta per quanto riguarda la funzione $x(n+k)$:

$$x(n+k) = F(h, x(n), \dots, x(n+k-1)). \quad (1.2.8)$$

L'equazione differenziale lineare di un ordine k è chiamata l'equazione

$$a_0(n)\Delta^r x(n) + a_1(n)\Delta^{r-1}x(n) + \dots + a_{r-1}(n)\Delta x(n) + a_r(n)x(n) = f(n),$$

$$r \geq k, \quad (1.2.9)$$

dove $f(n), a_0(n), a_1(n), \dots, a_r(n)$ sono le funzioni tralacciate impostate.

L'equazione (1.2.9) è detta non uniforme se $f(n) \neq 0$ e uniforme se $f(n) = 0$. L'equazione (1.2.9) non stazionaria se $a_i(n)$ dipende da n e stazionaria se i coefficienti a_i sono costanti. In tal caso, l'equazione differenziale lineare uniforme con coefficienti costanti data in una forma (1.2.5) assume una forma

$$\delta_0 x(n+k) + \delta_1 x(n+k-1) + \dots + \delta_{k-1} x(n+1) + \delta_k x(n) = 0, \quad (1.2.10)$$

$$\text{dove } \delta_i = \sum_{v=0}^i (-1)^{i-v} \binom{k-v}{i-v} a_v, \quad \delta_k = 0, \quad \delta_0 \neq 0. \quad (1.2.11)$$

Il teorema è giusto.

Teorema 1.2.1. Se $n \geq n_0$ esiste il sistema fondamentale delle decisioni $\xi_1(n), \dots, \xi_k(n)$ dell'equazione differenziale uniforme

$$x(n+k) + \delta_1(n)x(n+k-1) + \dots + \delta_k(n)x(n) = 0, \quad (1.2.12)$$

che la decisione comune di questa equazione è espressa da un'anima

$$\xi(n) = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i(n), \quad (n \geq n_0)$$

dove $c_i (i = \overline{1, k})$ sono delle costanti.

In caso di coefficienti costanti abbiamo

$$\xi(n) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^n, \quad (1.2.13)$$

dove $\lambda_i (i = \overline{1, k})$ sono radici (numeri caratteristici) dell'equazione caratteristica del sistema (1.2.12).

$$\lambda^k + \delta_1 \lambda^{k-1} + \dots + \delta_k = 0. \quad (1.2.14)$$

Per il sistema delle equazioni differenziali con costanti di coefficienti

$$x(n+1) = Ax(n), \quad (1.2.15)$$

dove la matrice A dei coefficienti, $A = [a_{ij}] (i, j = \overline{1, k})$ la decisione avrà un aspetto

$$x_i(n) = c_{ij} \lambda_j^n, \quad i = \overline{1, k} \quad (1.2.16)$$

dove λ_j sono le radici dell'equazione caratteristica.

1.3. Equazioni differenziali non lineari

L'equazione di uno sguardo (1.1.1), (1.1.2) è chiamata equazioni differenziali non lineari se le funzioni nella parte destra includono dipendenze non lineari da qualsiasi variabile x_i o t .

La soluzione di tali equazioni in una visione generale è un compito molto difficile di tipi speciali. Pertanto, in pratica, utilizzare metodi qualitativi e metodi approssimativi di soluzioni di tali equazioni. Prenderemo in considerazione alcuni dei metodi di soluzione delle equazioni differenziali non lineari.

A. Metodo delle approssimazioni consecutive.

Con questo metodo è possibile ricevere la soluzione di un compito di Cauchy per qualsiasi equazione differenziale (lineare o non lineare) o per il sistema delle equazioni differenziali che soddisfa una condizione del teorema di esistenza e dell'unicità delle decisioni.

Considereremo l'equazione differenziale del primo ordine

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1.3.1)$$

Se решение $x = \xi(t)$, soddisfa una condizione d'ingresso

$$\xi(t_0) = x_0, \quad (1.3.2)$$

che abbiamo l'equivalente equazione integrata.

$$\xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\xi(\tau), \tau) d\tau. \quad (1.3.3)$$

Alla soluzione dell'equazione (1.3.1) con il metodo delle approssimazioni consecutive come approccio zero $\xi_0(t)$ viene scelta una qualsiasi funzione (per esempio, $\xi_0(t) = x_0$) e viene sostituito al posto di $\xi(t)$ nella parte destra (1.3.3). Il primo approccio alla soluzione dell'equazione (1.3.1) in uno sguardo si trova

$$\xi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\xi_0(\tau), \tau) d\tau. \quad (1.3.4)$$

Inoltre nel membro di destra dell'equazione (1.4.3) al posto della funzione $\xi(t)$ viene sostituita la funzione $\xi_1(t)$, determinata da una formula (1.4.4). Come risultato dell'integrazione il secondo approccio della decisione $\xi_2(t)$, ecc. n-e risulta che l'approccio sarà definito per espressione

$$\xi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\xi_{n-1}(\tau), \tau) d\tau. \quad (1.3.5)$$

È dimostrato che n approccio $\xi_n(t)$ a $n \rightarrow \infty$ aspirerà a $\xi(t)$ - alla soluzione dell'equazione (1.3.1).

Allo stesso modo è possibile trovare la soluzione di $x = \xi(t)$ del sistema delle equazioni differenziali

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.3.6)$$

soddisfare le condizioni d'ingresso

$$\xi_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.3.7)$$

Nonostante la semplicità di un metodo, esso presenta una serie di carenze che ne hanno limitato l'applicazione pratica.

B. Dal calcolo degli integrali è libero il *metodo delle linee spezzate di Eulero* che appartiene anche a metodi semplici di soluzioni approssimative delle equazioni differenziali.

Troveremo la soluzione dell'equazione della prima circa (1.3.1), che soddisfa le condizioni di ingresso (1.3.2), considerando che l'equazione (1.3.1) soddisfa le condizioni di vita e l'unicità. La cosiddetta ε è la soluzione approssimativa dell'equazione (1.3.1) si trova come segue.

Sul piano t, x (Fig. 1.3) è in costruzione δ -rete tale che per impostare piccolo $\varepsilon > 0$ a $|t - \bar{t}| < \delta$ e $|x - \bar{x}| < \delta$ correggere la disuguaglianza $|f(x, t) - f(\bar{x}, \bar{t})| < \varepsilon$.

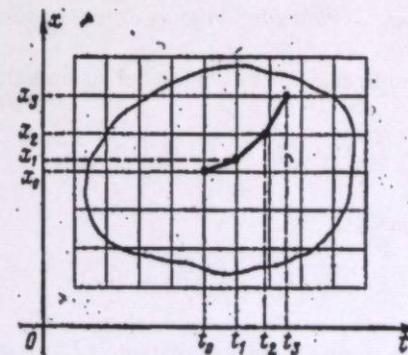


Fig. 1.3.

Con un metodo di linearizzazione armonica è possibile scoprire l'esistenza di soluzioni periodiche delle equazioni differenziali non lineari ed anche determinare i parametri di queste decisioni e studiarne la stabilità.

Prenderemo in considerazione un metodo di linearizzazione armonica sull'esempio del sistema autonomo di primo ordine di sguardo

$$x_2 = f(x_1, \dot{x}_1), \quad (1.3.14)$$

dove $x_1(t) = a \sin \omega t$ è funzione armoniosa con un'ampiezza a e frequenza ω .

Inoltre l'equazione (1.3.14) può essere scritta

$$x_2 = f(a \sin \omega t, a \omega \cos \omega t). \quad (1.3.15)$$

Funzione di scomposizione $x_2(t)$ in una fila di Fourier:

$$x_2 = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (1.3.16)$$

attraverso la sequenza delle trasformazioni riceveremo l'equazione armoniosamente linearizzata dell'equazione non lineare (1.3.14) nello sguardo seguente:

$$x_2 = q(a, \omega) x_1 + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} \dot{x}_1, \quad (1.3.17)$$

dove $q(a, \omega)$ e $q'(a, \omega)$ sono coefficienti di linearizzazione armonica hanno un aspetto:

$$q(a, \omega) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \omega t, a \omega \cos \omega t) \sin \omega t d(\omega t), \quad (1.3.18)$$

$$q'(a, \omega) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \omega t, a \omega \cos \omega t) \cos \omega t d(\omega t). \quad (1.3.19)$$

1.4. Equazioni differenziali stocastiche non lineari

Come è stato mostrato nel capitolo precedente considerando qualsiasi sistema, processo reale, le variabili corrispondenti possono essere suddivise su microscopico e macroscopico, e a seconda degli obiettivi di considerare quei processi che riflettono adeguatamente il livello richiesto della soluzione. Ovviamente, a seconda del livello di considerazione, le scale temporanee saranno diverse. Così, ad esempio, i processi microscopici si svolgono in scale temporali molto più piccole rispetto ai processi macroscopici e alle fluttuazioni i processi riflettenti in parti separate del sistema, nei processi microscopici avvengono in modo significativo in scale temporali brevi, che nei processi macroscopici.

Le equazioni differenziali stocastiche descrivono processi macroscopici con fluttuazioni in un determinato enunciato matematico.

Prima di tutto, prenderemo in considerazione i concetti di base della teoria dei processi casuali.

1.4.1. 1.4.1. Processi casuali e loro principali caratteristiche statistiche

La funzione stocastica è chiamata funzione, il cui valore ad ogni valore di una variabile indipendente è una variabile casuale. Le funzioni stocastiche per le quali una variabile indipendente è il tempo sono chiamate processi casuali o processi stocastici.

Qualsiasi funzione $x_i(t)$ che è uguale al processo casuale $x(t)$ come risultato dell'esperienza, è chiamata realizzazione del processo casuale. È in anticipo impossibile prevedere a priori quale sarà il processo stocastico di realizzazione.

Per qualsiasi punto temporale fisso, ad esempio, $t=t_1$, realizzazione di un processo casuale di $x_i(t)$, $i=1, \dots, n$ rappresenta la quantità concreta, il valore della funzione stocastica $x(t)$ è la variabile casuale chiamata dalla sezione del processo casuale nel punto temporale di t_1 (Fig. 1.4),

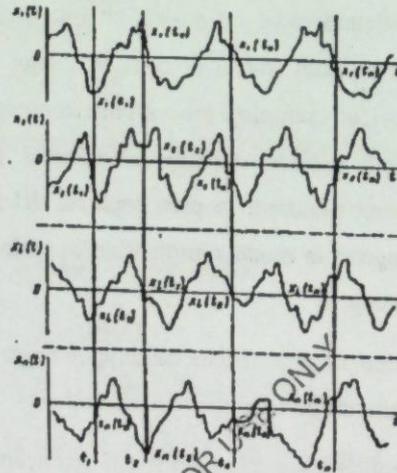


Fig. 1.4.

I metodi statistici non studiano ciascuna delle realizzazioni di $x_i(t)$ formando moltitudine $x(t)$, e proprietà di tutti i set in generale per mezzo di media delle proprietà, entrando lui realizzazione.

Le proprietà statistiche di una variabile casuale x determinano la sua funzione di distribuzione (la legge integrata di distribuzione) di $F(x)$ o la densità di probabilità (la legge differenziale di distribuzione) di $w(x)$.

Le variabili casuali possono avere varie leggi di distribuzione: uniforme, normale (Gauss), esponenziale (Poisson), ecc.

Alla legge normale della distribuzione o distribuzione gaussiana la variabile casuale x completamente è definita dalla media matematica (valore medio) m_x e dalla deviazione quadratica media σ_x .

Espressione analitica della funzione di distribuzione in questo caso

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^x e^{-(x-m_x)^2/2\sigma_x^2} dx, \quad (1.4.1)$$

rispettivamente la densità di probabilità è definita da una formula

$$w(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (1.4.2)$$

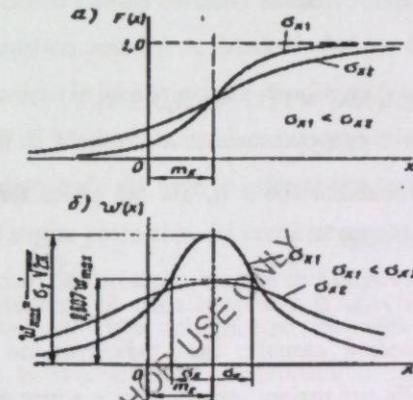


Fig. 1.5.

I grafici di funzione della distribuzione di $F(x)$ e della densità di probabilità di $w(x)$ per vari valori σ_x sono mostrati nella Fig. 1.5.

Per il processo casuale esiste anche un concetto di funzione di distribuzione di $F(x, t)$ e di densità di probabilità di $w(x, t)$ che dipendono dal punto di tempo fisso di t e da alcune x scelte, cioè sono funzioni di due variabili x e t .

Se $x(t_1)$ la sezione del processo casuale nel punto temporale di t quella funzione unidimensionale di distribuzione (il primo ordine) del processo casuale $x(t)$ è chiamata probabilità che il valore attuale del processo casuale $x(t_1)$ nel punto temporale di t_1 non superi un certo livello prefissato (numero) x_1 , cioè

$$F_1(x_1, t_1) = P(x(t_1) \leq x_1), \quad (1.4.3)$$

Se la funzione $F_1(x_1, t_1)$ ha un derivato privato su x_1 , cioè

$$w_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1}, \quad (1.4.4)$$

Che la funzione $w_1(x_1, t_1)$ è chiamata la densità unidimensionale di probabilità (il primo ordine) del processo casuale.

Quantità

$$w_1(x_1, t_1) dx_1 = P(x_1 < x(t_1) \leq x_1 + dx_1), \quad (1.4.5)$$

rappresenta la probabilità che $x(t)$ sia nel punto temporale di $t=t_1$ in un intervallo e x_1 a $x_1 + dx_1$.

Le funzioni $F_1(x, t)$ e $w_1(x, t)$ sono le caratteristiche statistiche più semplici del processo casuale. Essi caratterizzano il processo casuale separatamente nelle sue sezioni separate senza aprire un'interconnessione tra le sezioni del processo casuale, cioè tra i valori reciproci del processo casuale in vari punti temporali.

Probabilità che $x(t)$ non sarà più x_1 a $t=t_1$ non più x_2 a $t=t_2$, cioè

$$F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = P(x(t_1) \leq x_1; x(t_2) \leq x_2), \quad (1.4.6)$$

è chiamata funzione bidimensionale di distribuzione (il secondo ordine), e

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (1.4.7)$$

è chiamata la densità bidimensionale della probabilità (il secondo ordine).

Quantità

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = P(x_1 < x(t_1) \leq x_1 + dx_1; x_2 < x(t_2) \leq x_2 + dx_2),$$

$$(1.4.8)$$

è pari alla probabilità che $x(t)$ a $t=t_1$ sia nell'intervallo da x_1 a $x_1 + dx_1$, e a $t=t_2$ nell'intervallo da x_2 a $x_2 + dx_2$.

Anche n è misurato funzioni di distribuzione e densità di probabilità che sono applicate molto raramente sono inserite in modo simile.

Tra un insieme di processi casuali hanno particolari caratteristiche notevoli la speciale classe dei processi casuali chiamati Markov, casuali ai processi per nome il grande matematico russo A.A. Markov che per la prima volta ha studiato e che hanno messo le idee principali di utilizzo di tali processi.

Per i processi casuali di Markov, la conoscenza del valore del processo al momento della $t(k)$ comprende già tutte le informazioni sul corso futuro del processo che possono essere prese solo dal comportamento del processo fino a questo punto. Nel caso del processo casuale di Markov per la definizione delle caratteristiche probabilistiche del processo nel punto temporale di t_m è sufficiente conoscere le caratteristiche probabilistiche per qualsiasi punto temporale precedente t_k . La conoscenza delle caratteristiche probabilistiche del processo per altri valori di tempo precedenti, per esempio t_n , non aggiunge informazioni necessarie per trovare $x(t_m)$.

Per Markov processo equo

$$(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \frac{w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) w_2(x_2, t_2; x_3, t_3) \dots w_2(x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n)}{w_1(x_1, t_1) w_1(x_2, t_2) \dots w_1(x_{n-1}, t_{n-1})}, \quad (1.4.9)$$

Ciò è tutta la densità di probabilità del processo di Markov è definita dalla densità bidimensionale di probabilità. Così, i processi casuali di Markov sono completamente caratterizzati dalla densità bidimensionale della probabilità.

In pratica, ad eccezione della distribuzione delle funzioni e della densità di probabilità, l'uso è piuttosto più semplice, anche se meno caratteristiche totali dei processi casuali simili numeriche le caratteristiche dei processi casuali simili alle caratteristiche numeriche delle variabili casuali. Trattare tali

caratteristiche: media della popolazione, dispersione, quadrato medio del processo casuale, funzione di correlazione, densità a spirale e altre.

Media matematica (valore medio) di $m_x(t)$ di processo casuale $x(t)$ quantità di chiamata

$$m_x(t) = M\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x, t) dx, \quad (1.4.10)$$

dove $w_1(x, t)$ densità di probabilità di processo casuale $x(t)$ del primo ordine.

La media matematica del processo casuale $x(t)$ rappresenta una funzione non casuale (regolare) del tempo $m_x(t)$ su cui sono raggruppati e riguardo alla quale fluttua tutta la realizzazione di questo processo casuale (Fig. 1.6).

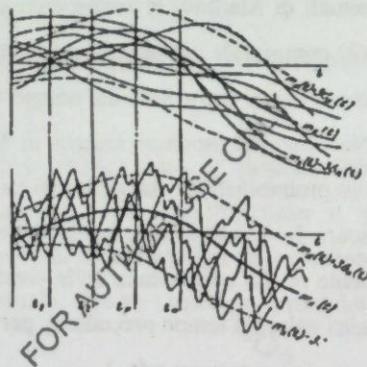


Fig. 1.6.

Quindi, la media della popolazione è il valore medio del processo casuale su un insieme (alle medie su insieme, alle medie statistiche) in quanto rappresenta il valore probabilistico e medio di un insieme infinito di realizzazione del processo casuale.

Il quadrato medio del processo casuale è chiamato quantità

$$\bar{x}^2(t) = M\{[x(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_1(x, t) dx. \quad (1.4.11)$$

Il processo casuale centrale $x(t)$ è una deviazione del processo casuale $x(t)$ dalla sua media matematica $m_x(t)$:

$$\dot{x}(t) = x(t) - m_x(t). \quad (1.4.12)$$

La dispersione del processo casuale, è pari alla media della popolazione di un quadrato del processo casuale allineato:

$$D_x(t) = M\{[\dot{x}(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 w_1(x, t) dx. \quad (1.4.13)$$

La quantità $\bar{x}^2(t)$, $D_x(t)$ e $m_x(t)$ è collegato da un rapporto

$$\bar{x}^2(t) = D_x(t) + m_x^2. \quad (1.4.14)$$

Nella pratica spesso si utilizzano le seguenti caratteristiche statistiche del processo casuale

$$\bar{x}(t) = \sqrt{\bar{x}^2(t)} = \sqrt{D_x(t) + m_x^2(t)}, \quad (1.4.15)$$

Deviazione quadratica media del processo casuale

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \quad (1.4.16)$$

La media matematica e la dispersione sono caratteristiche importanti del processo casuale, ma non danno un'idea sufficiente di quale carattere avrà la realizzazione separata del processo casuale.

Per la caratteristica della struttura interna del processo casuale, cioè per la contabilizzazione delle comunicazioni tra i valori del processo casuale in vari punti temporali o, altrimenti, per la contabilizzazione del grado di variabilità del processo casuale, viene inserito il concetto di correlazione (auto correlato) funzione del processo casuale.

Funzione di correlazione del processo casuale $x(t)$ funzione di chiamata non casuale di due argomenti $R_x(t_1; t_2)$ che per ogni coppia a caso dei valori scelti degli argomenti di t_1 e t_2 è uguale alla media della popolazione del lavoro di due variabili casuali e delle corrispondenti sezioni del processo casuale:

$$R_x(t_1, t_2) = M[\bar{x}(t_1) \bar{x}(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - mx(t_1)) \cdot (x_2 - mx(t_2)) \omega_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2, \quad (1.4.17)$$

dove $\omega_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ è la densità di probabilità del secondo ordine; $x - mx(t)$ - il processo casuale allineato; $Mx(t)$ è la media matematica del processo casuale.

I processi casuali condividono su: stazionari e non stazionari a seconda dei cambiamenti delle caratteristiche statistiche.

Stazionario in senso stretto chiamare processo casuale $x(t)$ se le sue funzioni n -dimensionali di probabilità in qualsiasi n non dipendono dallo spostamento di tutti i punti di t_1, t_2, \dots, t_n lungo l'asse del tempo su quantità identica τ , cioè

$$F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = F_n(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau); \\ \omega_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \omega_n(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau). \quad (1.4.18)$$

Così, qui due processi $x(t)$ e $x(t+\tau)$ hanno proprietà statistiche identiche per qualsiasi τ , cioè le caratteristiche statistiche del processo casuale sono invariabili nel tempo.

Stazionario in senso lato chiamano processo casuale $x(t)$ che la media della popolazione è costante:

$$M[x(t)] = mx = \text{const}, \quad (1.4.19)$$

e la funzione di correlazione dipende solo da una variabile è la differenza degli argomenti $\tau = t_1 - t_2$:

$$R_x(\tau) = R_x(t_1, t_1 + \tau) = M[x(t_1), x(t_1 + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - mx(t_1)) \cdot (x_2 - mx(t_1 + \tau)) \omega_2(x_1, t_1; x_2, t_1 + \tau) dx_1 dx_2$$

$$\omega_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (1.4.20)$$

Per i normali processi casuali coincide un concetto di stazionarietà di senso largo e stretto. Ad eccezione del valore medio su un insieme $x(t) = mx(t)$ esiste un valore medio nel tempo di t che viene definito sulla base dell'osservazione della realizzazione separata del processo casuale $x(t)$ per un tempo sufficientemente lungo di T .

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad (1.4.21)$$

se questo limite esiste.

Generalmente valore medio su un set \bar{x} e valore medio nel tempo \bar{x} sono varie. Ma queste quantità sono identiche ai cosiddetti processi casuali ergodici:

$$\bar{x} = \bar{x}. \quad (1.4.22)$$

Per i processi di espressione ergodica per molte caratteristiche statistiche diventa notevolmente più semplice:

$$R_x(\tau) = (1) \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \bar{x})(x(t + \tau) - \bar{x}) dt, \quad (1.4.23)$$

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \bar{x})^2 dt = (1) \cdot (1.4.24)$$

$$D_x = R_x(0) = \text{const}, \quad (1) \cdot (1.4.25)$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \text{const}. \quad (1.4.26)$$

Per le caratteristiche di interrelazione di due processi casuali di $x(t)$ e $g(t)$ vengono inserite le funzioni di correlazione reciproca R_{xg} :

$$R_{xg}(t_1, t_2) = M [x(t_1), g(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{x_1 - m_x(t_1)\} \{g - m_g(t_2)\} \omega_2(x_1, t_1; g, t_2) dx_1 dg. \quad (1.4.27)$$

Per i processi ergodici casuali:

$$R_{xg}(\tau) = \left(1.4 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{x(t) - \bar{x}\} \{g(t + \tau) - \bar{g}\} dt, .28 \right)$$

dove $x(t)$ e $g(t)$ sono la realizzazione di processi casuali stazionari $x(t)$ e $g(t)$.

Un'altra caratteristica dei processi casuali è la densità spettrale $s_x(\omega)$, definita dalla seguente formula:

$$s_x(\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, 1 \quad .4.29 \right)$$

$$o \quad s_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \sin \omega\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (1.4.30)$$

rispettivamente

$$R_x \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega, (\tau) = \quad (1 \quad .4.31)$$

$$D_x = R_x(0) = \quad \left(1 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega, . \quad 4.32 \right)$$

La densità spettrale reciproca di $s_{xg}(\omega)$ di due processi casuali $x(t)$ e $g(t)$ è determinata da una formula:

$$S_{xg}^{j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xg}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.4.33)$$

rispettivamente

$$R_{xg}(\tau) = \quad \left(1. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xg}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, 4.34 \right)$$

In conclusione di questa sottosezione forniremo alcuni dati di distribuzione di Poisson che si incontra spesso con la considerazione di sistemi sinergici.

La sequenza degli eventi che si verificano nei punti temporali casuali, distribuiti in modo continuo su un asse numerico, è detta flusso di eventi. I flussi degli eventi che rispondono alle seguenti condizioni sono chiamati Poisson:

- 1) se (t_1, t_2) e (t_3, t_4) sono intervalli di tempo non bloccati, la probabilità che si verifichi un qualsiasi numero di eventi durante uno di essi non dipende dal numero di eventi che si verificano durante un altro;
- 2) la probabilità di emergere di un evento durante un intervallo di tempo infinitesimale $(t, t + \Delta t)$ è la quantità infinitesimale di un ordine Δt ;
- 3) la probabilità che si verifichi più di un evento durante l'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$ è infinitesimale l'ordine massimo rispetto al Δt .

La legge di distribuzione di Poisson determinata da una formula è caratteristica di un flusso di eventi di Poisson di X

$$P_m = \frac{\mu^m}{m!} \cdot e^{-\mu}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4.35)$$

dove $\mu = M[X]$ è la media matematica del numero di eventi nell'intervallo $\Delta t = t - t_0$.

La quantità $(v(t) = d\mu/dt \quad 1.4.36)$ è detta la densità o intensità media di un flusso di eventi. Ora in questa sezione passeremo le equazioni differenziali stocastiche alla considerazione di alcuni importanti sistemi sinergici nei modelli.

1.4.2. Equazioni differenziali stocastiche

Equazione stocastica di uno sguardo

$$dx_i(t) = B_i(x(t))dt + \sum_m g_{im}(x(t))d\nu_m(t), \quad (1.4.36)$$

a $d\nu_m = 0, \quad (1.4.37)$

$$\overline{\vartheta_m(t)d\vartheta_l(t)} = \delta_{lm}dt, \quad (1.4.38)$$

dove $x=x(t)$ è un vettore delle condizioni del sistema (un vettore di coordinate) con gli elementi $x_i(t)$; B_i è un elemento di un vettore delle forze coercitive; g_{im} è funzione della dipendenza dell'ampiezza delle forze fluttuanti $d\vartheta_m$ su un vettore di stati $x(t)$; δ_{lm} è il simbolo di Kronecker, si chiama equazione di Ito.

Nel look semplificato l'equazione di Ito prende una forma

$$\dot{\bar{x}}_i(t) = \bar{B}_i(x(t)). \quad (1.4.39)$$

L'equazione di Ito (1.4.36) è collegata alla nota equazione stocastica di Fokker - Planck:

$$\partial F(x)/\partial t = - \left(\sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} [B_r(x)F(x)] + \frac{Q}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} [\sum_m g_{\alpha m} g_{\beta m} F(x)], 40 \right)$$

dove $F(x)$ è funzione della distribuzione delle probabilità, Q è misura della quantità di fluttuazioni.

Anche l'equazione di Stratanovich, che risulta dalla considerazione dei processi a metà di un intervallo, è collegata all'equazione di Ito $[t_0, t]$:

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^t B_i(x)dt = \int_{t_0}^t \bar{B}_i(x)d\nu_m(t). \quad (1.4.41)$$

In sostanza l'equazione di Stratanovich risulta dall'equazione di Ito quando viene sostituita: $\bar{B}_i = B_i$.

$$\bar{B}_i = B_i - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} g_{jm} \quad (1.4.42)$$

Un caso particolare dell'equazione di Ito è l'equazione di Lanzheven:

$$Dx_l(t) = B_l(x(t))dt. \quad (1.4.43)$$

1.5. Teoria delle matrici

1.5.1. Vettori

All'inizio prenderemo in considerazione un concetto sui vettori e sulle operazioni su di essi. Un vettore di dimensione di n è chiamato insieme n degli elementi $x_i, i = \overline{1, n}$ presentato in forma di colonna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.5.1)$$

Se il numero x_i è un elemento vettore, abbiamo un vettore numerico x se x_i è una variabile, abbiamo un vettore di variabili se $x_i = f$ sono funzioni, x è una funzione vettoriale, ecc.

Se per entrare in operazione di trasposizione in sostituzione di una colonna con linea e per designare il segno di trasposizione è T (a volte), allora un vettore (1.5.1.) è possibile scrivere in un look minuscolo

$$x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]^1 = x^1. \quad (1.5.2)$$

Su vettori si effettuano le seguenti operazioni binarie - addizione (sottrazione), moltiplicazione.

La somma di due vettori x e y con x_i e $y_i, i = \overline{1, n}$, registra $x + y$ ed è definito da un vettore

$$x+y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad (1.5.3)$$

La differenza si differenzia solo per la sostituzione del segno (+) su (-).

La moltiplicazione per c scalare, cioè su un vettore con un solo elemento, è un'operazione comunicativa.

$$cx = xc = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix} \quad (1.5.4)$$

Il prodotto scalare di un vettore su un vettore è un prodotto scalare, ed è effettuato su una formula

$$(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.5.5)$$

Il prodotto scalare dei vettori ha le seguenti proprietà:

- commutatività: $(x,y) = (y,x)$; (1.5.6 a)

- distributività:

$$(x+y, z+\omega) = (x,z) + (x,\omega) + (y,z) + (y,\omega); \quad (1.5.6 b)$$

- associatività: $(cx,y) = c(x,y)$, $(x,(y,z)) = (x,y)$. (1.5.6 c)

Il prodotto scalare (x,x) è un quadrato di "lunghezza" di un vettore materiale

$$(x,x) = \left(1, \sum_{i=1}^n x_i^2 = |x|^2 \right) \quad (1.5.7)$$

Il lavoro vettoriale dei vettori x , a è designato $[x, a]$ o $x \times y$ è anche uguale a z vettore ad esso che la lunghezza di un vettore di z è uguale

$$|z| = |x \times y| = |x| \cdot |y| \cdot \sin \varphi \quad (1.5.8)$$

dove φ è un angolo tra i vettori x e y , lo stesso vettore di tempo z , x , y forma il cosiddetto tre di destra (Fig. 1.7), il vettore di z è perpendicolare al piano dei vettori x , y .

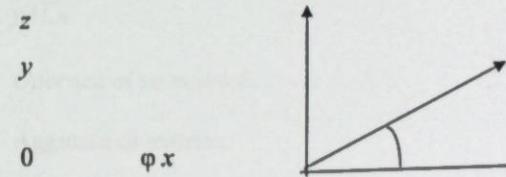


Fig. 1.7.

Il lavoro vettoriale dei vettori ha le seguenti proprietà:

commutatività con il segno di ritorno:

$$x \times y = -(y \times x); \quad (1.5.9 a)$$

$$\text{associatività: } (cx) \times y = c(x \times y); \quad (1.5.9 b)$$

$$\text{b) distributività: } x \times (y+z) = x \times y + x \times z. \quad (1.5.9 c)$$

Due vettori di materiale (con elementi di materiale) sono chiamati ortogonali se il rapporto $(x,y) = 0$ viene eseguito.

Il concetto importante per i vettori è la norma dei vettori che caratterizza la dimensione (lunghezza) di un vettore. In n spazio dimensionale valido il concetto di norma di un vettore, è che ad ogni vettore di $x \in R$ viene messo in conformità qualche numero reale non negativo di $\|x\|$, così è inserito che per ogni vettore x, y da R^n ed ogni scalare sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$1. \|1\| = 1,$$

$$2. \|cx\| = |c| \|x\|, \quad (1.5.11)$$

$$3. \|x\| > 0, \text{ se } x \neq 0.$$

Ci sono tre tipi di norme vettoriali che rispondono alle condizioni (1.5.11):

- norma "cubica"

$$\|x\| = \max |x_i|, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1.5.12)$$

- Norma "eremita" o "sferica".

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (1.5.13)$$

- norma "ottaedrica"

$$\|x\|_3 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (1.5.14)$$

1.5.2. Matrici

Passeremo alla considerazione delle matrici.

Tabella degli elementi a_{ij} , $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$ in forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (1.5.15)$$

è chiamata matrice di dimensione di $n \times m$. Se $n=m$, allora abbiamo una matrice quadrata.

Generalmente A può essere un elemento di una matrice come numeri reali e complessi, e variabili o funzioni, rispettivamente una matrice A sarà chiamata matrice numerica materiale (complessa), una matrice di variabili o funzioni.

Nel caso di una matrice quadrata di n si parla di ordine di matrice.

A volte alla designazione di una matrice utilizzare la designazione ridotta

$$A = [a_{ij}], \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.5.16)$$

Due matrici sono uguali tra loro, solo nel caso in cui, quando tutti gli elementi corrispondenti sono uguali, cioè le matrici A e B sono uguali se $A=B$, $a_{ij} = b_{ij}$, (\forall per tutti): $i, j = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$.

Operazioni su matrici:

Aggiunta di matrici:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]; \quad (1.5.17)$$

Il lavoro di una matrice su uno scalare:

$$cA = Ac = [ca_{ij}]; \quad (1.5.18)$$

moltiplicazione delle matrici:

$$A \cdot B = [a_{ij}] [b_{kl}] = [c_{ij}] = C. \quad (1.5.19)$$

È ovvio che il numero di colonne m di una matrice A deve coincidere con il numero di linee di una matrice B . Nel caso in cui quantità di n di linee di una matrice A , coincidano con il numero di colonne di una matrice B , allora avremo una matrice quadrata di C . Generalmente una matrice C rettangolare, dimensioni di $n \times m$.

La moltiplicazione di una matrice A per un vettore x viene effettuata su una formula

$$C = Ax = [a_{ij}] [x_i] = [c_i], \quad (1.5.20)$$

dove la C è vettoriale con gli elementi $c_i = \sum_j a_{ij} x_j$, $i = \overline{1, n}$.

Proprietà delle operazioni su matrici:

non commutabilità (in generale):

$$AB \neq BA; \quad (1.5.21a)$$

associatività:

$$(AB)C = A(BC); \quad (1.5.21b)$$

distributività:

$$A(B + C) = AB + AC. \quad (1.5.21c)$$

La trasposizione delle matrici è un'operazione di sostituzione delle linee con colonne o al contrario, cioè

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}]. \quad (1.5.22)$$

Prenderemo in considerazione alcuni tipi speciali di matrici.

1. Le matrici simmetriche sono matrici che soddisfano i rapporti

$$A = A^T \text{ o } (A^T), \quad (1.5.23a)$$

cioè per tali matrici

$$a_{ij} = a_{ji}. \quad (1.5.23b)$$

Le matrici simmetriche appartengono alle matrici materiali con elementi materiali.

Se una matrice $A = [a_{ij}]$ con elementi numerici complessi, allora le matrici simmetriche chiamano le matrici Hermite.

2. Si chiamano matrici eremitiche le matrici che soddisfano ad un rapporto

$$A = \bar{A}^T, \quad (1.5.24)$$

dove \bar{A} è un complesso - interfacciato ad A una matrice, cioè se gli elementi $A, a_{ij} = \alpha_j \pm j\beta_j$,

\bar{A} Queste matrici sono chiamate per nome il grande matematico francese Charles Hermite. $\bar{a}_{ij} = \alpha_j \mp j\beta_j$

A volte invece di $A = A^T$ scrivete semplicemente A^* .

Le matrici ortogonali di T sono tali matrici per le quali

$$TT^T = I, \quad (1.5.25)$$

dove I è una matrice singola a cui è su unità diagonale e gli altri elementi sono uguali a zero.

3. Le matrici unitarie sono un analogo ortogonale in caso di complessi

matrici, cioè per loro

$$T^*T = I. \quad (1.5.26)$$

La matrice diagonale è tale matrice che ha sulla diagonale qualsiasi numero (almeno uno è diverso da zero) e gli altri elementi sono uguali a zero. Sono designati diagonale, Λ o $diag\{a_i\}$,

$$i \Lambda = diag\{a_i\}, = \bar{1}, n, \quad (1.5.27)$$

dove gli a_{ii} sono elementi diagonali.

5. Quazydiagonal da in una matrice complessa diagonale è una matrice la rappresentazione materiale più vicina alla diagonale di una matrice complessa, cioè

$$\Lambda_q = diag_q\{\alpha_i, \beta_i\}. \quad (1.5.28)$$

su blocchi diagonali 2x2 con elementi $\begin{bmatrix} a_j & \beta_j \\ -\beta_j & a_j \end{bmatrix}$,

$$\| \| A \| \|_1 = \max \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right); \quad (1.5.35a)$$

,5,35a)

a norme "ottaedriche" dei vettori:

$$\| \| A \| \|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|; \quad (1.5.35b)$$

a norme "eremitiche" (o sferiche) dei vettori:

$$\| \| A \| \|_2 = \sqrt{\rho}, \quad (1.5.35c)$$

,5,35 c)

dove ρ - il numero massimo caratteristico di una matrice di AA^* (o ATA), è chiamato *norma spettrale*;

all'introduzione assiomatica della norma matrice coordinata con la norma vettoriale $\| \cdot \|$ abbiamo due ulteriori apparenze di norme

$$\| \| A \| \|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}, \quad \text{Norma euclidea (1.5.35d)}$$

d)

$$\| \| A \| \|_n = n \max_{ij} |a_{ij}|; \quad (1.5.35e)$$

a diversi tipi di norme vettori $\| Ax \|$ e $\| x \|$ nella (1.5.32) abbiamo un'altra norma di matrici

$$\| \| A \| \|_n = \max_{1 \leq k, s \leq n} |a_{ks}|. \quad (1.5.35f)$$

Norme $\| A \|_n$, $\| A \|_E$ e $\| A \|_2$, che soddisfa i seguenti rapporti sono spesso utilizzati

$$\frac{1}{n} \| A \|_n \leq \| A \|_2 \leq \| A \|_n, \quad (1.5.36a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \| A \|_E \leq \| A \|_2 \leq \| A \|_E. \quad (1.5.36b)$$

b)

Oltre alla trasposizione delle matrici su matrici vengono effettuate operazioni di indirizzo delle matrici quando si trova la matrice A^{-1} il ritorno ad una matrice A , in modo tale che

$$AA^{-1} = E = I = \text{diag}\{1\}, \quad (1.5.37)$$

Cioè la moltiplicazione della matrice di ritorno per una matrice A dà una singola matrice.

La matrice di ritorno esiste se la determinante di una matrice A non è uguale a zero, cioè la matrice A non è degenerata $|A| \neq 0$.

Se $\det A = 0$, in questo caso la matrice A è degenerata, e la matrice di ritorno di A^{-1} non esiste.

In questi casi e anche quando la matrice A non quadrata, dimensioni rettangolari di $n \times m$ è inserita in considerazione una cosiddetta matrice pseudo-ritorno la A^+ designata, che esiste sempre.

Proprietà della matrice di pseudo-ritorno:

- 1) la matrice di A^+ ha dimensione di $n \times m$ se A dimensioni di $n \times m$;
- 2) lo spazio delle colonne di una matrice di A^+ coincide con lo spazio delle linee di una matrice A e viceversa;
- 3) lo pseudo-ritorno ad A^+ è una matrice A : $(A^+)^+ = A$;
- 4) in generale, $AA^+ \neq I$, ma $AA^+ = P$, dove P è matrice il disegno di realizzazione sullo spazio delle colonne di una matrice A si soddisfacente $A\bar{X} = P\bar{b}$; \bar{X} è una soluzione ottimale dell'equazione non congiunta di $Ax = b$.

Prenderemo in considerazione le caratteristiche delle matrici.

Le caratteristiche principali delle matrici sono:

il *determinante* designato o $\det A$ o $|A|$;

traccia, $\text{tr}(A)$ o $\text{sp}(A)$

norma, "A";

rango di una matrice, $\text{Rank}(A)$

autovalore $\lambda(A)$; e *autovettori* di matrici;

raggio spettrale ρ ;

numeri singolari $\sigma(A)$;

condizionalità numero $C\{A\}$.

Prenderemo in considerazione queste caratteristiche delle matrici:

Sopra le matrici è possibile effettuare trasformazioni lineari di similitudine, in modo che, se c'è qualche matrice non degenerata di M dello stesso ordine, come A , allora la matrice trasformata

$$B = M^{-1}AM, \quad (1.5.38)$$

ha gli stessi valori, come matrice A .

1.2. Determinante della matrice.

Il determinante di una matrice numerica è il numero reale che caratterizza alcune proprietà di una matrice.

Per esempio, non banalità di determinante della matrice designata o $|A|$, o $\det(A)$, garantisce che la matrice di ritorno di A^{-1} esista.

La determinante di una matrice A è uguale al volume del parallelepipedo in n -spazio misurato, vincolo sui vettori che coincidono con le linee di una matrice A

(Fig. 1.8).

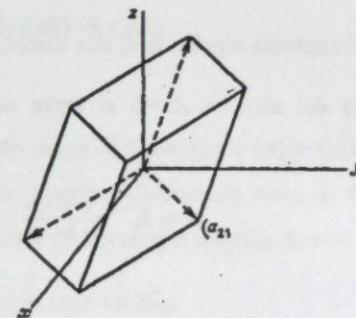


Fig. 1.8.

Il modo più generale di calcolare i determinanti attraverso la decomposizione su aggiunte algebriche, qualsiasi linea o qualsiasi colonna, per esempio, attraverso l'aggiunta algebrica i -line avrà un aspetto:

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}, \quad (1.5.39)$$

dove l'aggiunta algebrica A_{ij} è la sottomatrice M determinante ij , il segno preso

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}. \quad (1.5.40)$$

La sottomatrice di M_{ij} è formata dalla cancellazione di i di una linea e j di una colonna di una matrice A .

È lo schema di calcolo del determinante di una matrice n di un ordine, permette di ridurre passo dopo passo un ordine di matrici ad un ordine elementare 2, per calcolare tanto quanto il determinante di ordine elevato.

I determinanti sono utilizzati in molti problemi di algebra lineare, in particolare per il calcolo della matrice di ritorno e la soluzione del sistema delle equazioni algebriche.

Calcolo di A^{-1} attraverso $\det A$ viene effettuata su una formula

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}, \quad (1.5.41)$$

dove $\text{adj } A$ è l'aggiunta algebrica di una matrice A , calcolata sulla (1.5.40).

La soluzione del sistema $Ax=b$ si trova attraverso $\det A$ sulla seguente espressione

$$x = A^{-1} b = \frac{(\text{adj } A)b}{\det A}, \quad (1.5.42)$$

o per la regola di Kramer: j un elemento di un vettore $x = A^{-1}b$ è pari a $x_j = \frac{\det \beta_j}{\det A}$, dove

$$\beta_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.5.43)$$

in una matrice A sostituire j una colonna con b vettore, ricevere una matrice β_j .

2. 3. Prenderemo in considerazione un concetto sulla *traccia* di una matrice.

La somma degli elementi diagonali di una matrice A è chiamata *traccia* di una matrice A si $\text{Sp } A$ o $\text{tr } A$.

$$\text{Sp } A = \sum_i a_{ii}, i = \overline{1, n}. \quad (1.5.44)$$

La *traccia* di una matrice A è collegata con i valori propri di una matrice A un rapporto

$$\text{Sp } A = \sum_i \lambda_i, i = \overline{1, n}. \quad (1.5.45)$$

Proprietà di una *traccia* di una matrice:

distributività:

$$\text{Sp}(A+B) = \text{Sp } A + \text{Sp } B, \quad (1.5.46a)$$

$$\text{commutatività:} \quad \text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA). \quad (1.5.46b)$$

3. *Rango* a matrice.

Il *rango* di una matrice A è detto *rango* di dimensione (A) o $r(A)$ uguale al più grande ordine di minori di una matrice, diverso da zero, A . I minori sono determinanti di tutte le sottomatrix di M_{ij} di una matrice A , cioè

$$\text{rango}(A) = r(A) = \max_{ij} \det M_{ij}. \quad (1.5.47)$$

Una proprietà importante di un *rango* di matrici è la seguente proprietà:

se la matrice T non degenera, allora il *rango* della matrice TA è uguale al *rango* di una matrice A , cioè

$$r(TA) = r(A), \det T \neq 0. \quad (1.5.48)$$

Il *rango* di una forma quadrata $(x, Ax) = x^T A x$ coincide con un *rango* di matrice A , cioè

$$r = (x, Ax) = x^T A x, \quad (1.5.49)$$

quindi il *rango* delle forme quadrate (x, Ax) rimane al non degenerato $x = Ty$ trasformazioni.

4. Il concetto di *norme* delle matrici è da noi considerato in precedenza.

5. 5. *Autovalori* e *autovettori* delle matrici.

Gli *autovalori* e gli *autovettori* delle matrici sono una delle caratteristiche più importanti delle matrici utilizzate in molti problemi applicati della scienza.

Il numero λ è chiamato *autovalore* di una matrice A con il corrispondente zero *autovettore* x se soddisfa l'equazione

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (1.5.50)$$

che è l'equazione caratteristica di una matrice A .

La matrice di un ordine di n ha n autovalori λ_i , $i = 1, \dots, n$ soddisfacente all'equazione caratteristica (1.5.50).

Le matrici x dell'autovelox A soddisfano l'equazione algebrica

$$Ax = \lambda x. \quad (1.5.51)$$

Proprietà degli autovalori di una matrice A .

$$1. \sum_i \lambda_i = \sum_i a_{ii} = \text{Sp}A, \quad (1.5.52a)$$

$$2. \prod_i \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det A. \quad (1.5.52b)$$

3. Se una matrice A è triangolare, allora gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in precisione coincidono con gli elementi diagonali $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ di una matrice A .

4. Gli autovalori di una matrice $A^2 = AA$ sono uguali a $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ e ogni autovettore di una matrice A è un autovettore di una matrice A^2 :

$$A^2 x = A \lambda x = \lambda A x = \lambda^2 x.$$

5. 5. Dipendenza lineare e indipendenza dei vettori autogeni di una matrice A .

Se la matrice A non ha autovalori multipli che n degli autovettori sono linearmente indipendenti, cioè

$$\sum c_i x_i = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0 \Leftrightarrow c_1 = \dots = c_n = 0,$$

dove c_i , $i = \overline{1, n}$ qualsiasi costante.

Se per i vettori $\{x_i, i = \overline{1, n}\}$ l'espressione (1.5.53) viene effettuata in caso di $c_i \neq 0$, i vettori di x_i linearmente sono dipendenti.

Nel caso in cui la matrice A la dimensione $n \times n$ ha n di autovettori linearmente indipendenti, allora quando si trasforma la somiglianza con una matrice di M fatta di autovettori di una matrice A come colonne, la matrice

trasformata di $M^{-1}Ax$ è una matrice diagonale Λ a cui sulla diagonale ci sono autovalori di una matrice A

$$M^{-1}Ax = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

(1.5.54)

Poiché non tutte le matrici hanno n sono autovettori linearmente indipendenti, non tutte le matrici di una diagonalità.

In caso di mancanza di n autovalori linearmente indipendenti di una matrice A , cioè non tutti gli autovalori sono diversi, la forma più vicina alla quale è possibile trasformarsi come una matrice A è la forma giordana di una matrice J (vedi (1.5.33)).

6. 6. Raggio spettrale delle matrici.

Il raggio spettrale di una matrice A è chiamato dimensione ρ , pari al modulo massimo di autovalori di una matrice A .

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|. \quad (1.5.55)$$

Raggio spettrale ρ è usato come dimensione della norma delle matrici $\|A\|_2$, quando è calcolato ρ matrici di ATA o $AnAn^*$.

Il raggio spettrale è spesso utilizzato per la valutazione della convergenza di varie procedure iterative, ad esempio, alla valutazione della convergenza la procedura di soluzione coerentemente approssimata del sistema delle equazioni algebriche

$$Ax = b, \quad (1.5.56)$$

con metodo di scissione di una matrice A , quando condizione di convergenza della decisione $x^{k+1} = x^k$:

$$4) c(kA) = k^2 c(A). \quad (1.5.64 d)$$

Utilizzando varie norme di matrici è possibile inserire diversi tipi di numeri di condizionalità delle matrici:

1) a norme "cubiche" delle matrici:

$$C1(A) = \| \| A \| \|_1 \| A^{-1} \|_1, \quad (1) \quad (1.5.65a)$$

2) a norme "ottaedriche" delle matrici:

$$C3(A) = \| \| A \| \|_3 \| A^{-1} \|_3, \quad (1) \quad (1.5.65b)$$

3) a norme "eremitiche" (a norme "sferiche"):

$$1. C2(A) = \| \| A \| \|_2 \| A^{-1} \| \|_2, \quad (1) \quad (1.5.65c)$$

$$2. C_{CE}(A) = \| \| A_{jE} \| \|_{A^{-1}E}, \quad (1) \quad (1.5.65d)$$

$$3. C_n(A) = \| \| A_{jn} \| \| A^{-1} \| \|_n, \quad (1) \quad (1.5.65e)$$

$$4. C4(A) = \| \| A_{j4} \| \| A^{-1} \| \|_4. \quad (1.5.65f)$$

Secondo le norme delle matrici, tra i tipi di numeri di condizionalità elencati, spesso si utilizzano numeri di $C_n(A)$, $C_{CE}(A)$, $C_2(A)$ e a volte anche il numero

$$C5(A) = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|}. \quad (1.5.65g)$$

Per le matrici simmetriche di $C5(A)$ e $C2(A)$ coincidono.

I numeri di condizionalità di diverso tipo, soddisfano i seguenti rapporti:

$$\frac{1}{n} C_n(A) \leq C_{CE}(A) \leq C_n(A) \leq n C_{CE}(A), \quad (1.5.66a)$$

$$C_2(A) \leq C_{CE}(A) \leq n C_2(A), \quad (1.5.66b)$$

$$C_5(A) \leq C_2(A). \quad (1.5.66c)$$

Così, il più piccolo dei numeri di condizionalità qui riportati è, ma da coordinato con le norme un vettore e matrici il più piccolo è il numero $C2(A)$ che è chiamato numero spettrale di condizionalità delle matrici e ha ricevuto la maggiore applicazione pratica. Inoltre, se non è previsto, offriamo tale numero di condizionalità delle matrici e per comodità abbassiamo l'indice 2, cioè $C(A)$.

Quindi, il numero di condizionalità

$$C2(A) = C(A) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^*A)}{\lambda_{\min}(A^*A)}}. \quad (1.5.67)$$

I numeri di condizionalità $C(A)$ caratterizzano la vicinanza delle matrici all'esplicitività, cioè fino a quando $\det A$ è vicina allo zero.

L'ampia applicazione dei numeri di condizionalità è legata anche a quella circostanza che gli errori di calcolo e le soluzioni delle equazioni, a inesatti valori preimpostati di matrici di coefficienti o costanti libere, dipende dai numeri di condizionalità delle matrici.

Quindi per un problema di $Ax=b$, ad errori in elementi di matrici A o un vettore di b di un errore di decisione sono collegati con errori iniziali i seguenti rapporti:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq C(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \quad (1.5.68a)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq C(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}. \quad (1.5.68b)$$

1.5.3. Equazioni a matrice

Prenderemo in considerazione alcune equazioni di matrice che sono spesso utilizzate in compiti con l'uso di metodi di un formalismo di matrice.

A. Equazione a matrice di Lyapunov.

Alla soluzione delle questioni di stabilità con un cosiddetto secondo o metodo diretto di Lyapunov, molto spesso il compito si riduce alla definizione di matrice simmetrica positiva certa P soddisfacente alla seguente equazione di matrice, chiamata dall'equazione come Lyapunov:

$$A^T P + P A = -Q,$$

dove Q è anche alcuni, l'insieme simmetrico simmetrico matrice positivamente certa, in quel caso specifico, credere $Q=I$ e l'equazione è considerata

$$A^T P + P A = -I. \quad (1.5.69)$$

Il sistema per il quale si definisce la stabilità ha un aspetto

$$\dot{x} = A x, \quad x(0) = x_0, \quad (1.5.70)$$

dove $x \in R^n$ - un vettore di stati.

In questo caso, se c'è una matrice P soddisfacente (1.5.70), allora il sistema (1.5.71) è asintoticamente stabile.

B. Equazione a matrice di Rikkati.

Questa equazione è uniforme delle equazioni di base in un problema di equazione ottimale del criterio di qualità del quadrato.

Se per considerare le tendenze attuali nella teoria del controllo, nell'enunciazione generale dei compiti vari brevi cambiamenti e dei sistemi di varia natura, sono necessari approcci moderni alla teoria del controllo basati sui principi sinergici dell'auto-organizzazione dei sistemi.

Queste tendenze portano all'origine della nuova teoria del controllo è la teoria sinergica del controllo quale componente è la teoria sinergica del controllo ottimale.

Ci sono due tipi di equazioni di matrice Rikkati:

1) Matrice differenziale equazioni di Rikkati:

$$\dot{P} = -P A - A^T P + P B R^{-1} B^T P - Q, \quad (1.5.71)$$

dove R è richiesta la matrice simmetrica $n \times n$; A, B sono le matrici impostate; R è positiva e certa matrice; Q è non negativa e certa matrice; tutte le matrici nella (1.5.71) sono fisse o dipendenti dal tempo;

2) equazione di matrice algebrica di Rikkati:

$$A^T \bar{P} + \bar{P} A - \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} = -Q, \quad (1.5.72)$$

dove \bar{P} è richiesta una matrice costantemente positiva e certa della dimensione $n \times n$; altre matrici uguali, come per l'equazione della matrice differenziale, ma costanti.

L'equazione (1.5.72) e (1.5.73) è in genere piuttosto difficile, consentendo decisioni analitiche solo nei casi più semplici.

Il modo principale della soluzione delle equazioni di matrice come Rikkati questo uso di metodi numerici della soluzione delle equazioni di matrice con l'uso di computer moderni.

C. Equazione a matrice di Silvestro.

Questa equazione di matrice è l'equazione principale alla soluzione dei compiti di controllo modale quando viene fornito il range impostato del sistema chiuso.

La considerazione di questa equazione è anche causata da esigenze della teoria sinergica del controllo di cui si è detto sopra.

Quindi l'equazione di matrice di Sylvester ha un aspetto

$$M G - A M = -B H, \quad (1.5.74)$$

dove M è richiesta $n \times n$ una matrice con coefficienti costanti; A, B sono le matrici costanti di dimensioni impostate secondo $n \times n$ e $n \times r$; H è $r \times n$ una matrice costante; G è una matrice diagonale (quasidiagonale) di un ordine di n ; coppie di matrici (A, B) formano la coppia controllata; coppia (G, H) è osservata coppia, cioè

$$U = [B : AB : \dots : A^{n-1}B], r(U) = r(A), \quad (1.5.75a)$$

$$N = [H : H\Gamma : \dots : H\Gamma^{n-1}]^T, r(N) = r(\Gamma). \quad (1.5.75b)$$

D. *Equazione a matrice di somiglianza.*

Queste equazioni di matrice necessarie per la ricerca di una matrice di autoveloce.

È noto che la trasformazione della somiglianza con la matrice M da colonne sotto forma di propri vettori di qualsiasi matrice A porta ad una matrice diagonale $G = \text{diag} \{ \lambda_i, i = \overline{1, n} \}$ o in caso di autovalori complessi interfacciati

λ_i a forma quasidiagonale con blocchi $\begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}$ cioè

$$G = M^{-1} A M, \quad M G = A M. \quad (2.5.76)$$

L'equazione (2.5.76) è la matrice delle equazioni di somiglianza. Questa equazione è un caso particolare dell'equazione di matrice nel compito di Frobenius di cercare tutte le matrici della X permutabile con questa matrice A . I metodi della decisione sia analitici, sia numerici per l'ultimo compito sono ben noti dalla letteratura.

1.6. 1.6. Teoria della stabilità

La stabilità è una delle proprietà più importanti di qualsiasi sistema reale ed esprime la capacità dei sistemi di ritornare allo stato originale dopo la rimozione delle perturbazioni chiuse.

1.6.1. 1.6.1. Stabilità dei sistemi lineari

La considerazione delle questioni di stabilità dei sistemi viene effettuata sulla base dei loro modelli matematici.

A. *Stabilità dei sistemi descritti dal differenziale lineare ordinario equazioni.*

Considereremo il differenziale lineare le equazioni di aspetto

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (1.6.1)$$

dove $\dot{x} = x(t) \in R^n$ è vettore di stati; $A(t)$ è $n \times n$ una matrice di coefficienti; $f(t)$ è un vettore - funziona in funzione del tempo t ; $\dot{x} = dx/dt$ è prima derivata.

Se $f(t) \equiv 0$, allora il sistema (1.6.1) è un sistema autonomo, altrimenti non autonomo. Se $A(t)$ è non dipende dal tempo, allora il sistema è fermo.

Considereremo il sistema autonomo stazionario, cioè lasceremo che il sistema abbia un aspetto

$$\dot{x} = Ax. \quad (1.6.2)$$

È noto che il sistema (1.6.2) è stabilità se tutti gli autovalori di una matrice A non hanno parti materiali positive, e divisori elementari corrispondenti a valori con una parte zero-materiale semplice.

Quindi, se sono noti gli autovalori che sono alla radice dell'equazione caratteristica

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (1.6.3)$$

che la definizione di stabilità del sistema (1.6.1) non rappresenta la complessità, cioè la stabilità del sistema (1.6.2) richiede anche che

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.6.4)$$

Allo stesso tempo, il sistema sarà stabile anche alle radici multiple che giacciono su un asse immaginario, ma è sufficiente che abbiano dei semplici divisori elementari, cioè la gabbia corrispondente in una prima forma giordana di matrice A consisteva di un elemento.

Il sistema (1.6.1) è asintoticamente stabile se viene eseguito

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.6.5)$$

Anche il sistema non autonomo (1.6.1) è stabile alla stabilità del sistema autonomo (1.6.2).

Nel caso di sistemi non stazionari con coefficienti periodici, cioè $A(t)$ è una matrice con elementi periodici, sistema

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (1.6.6)$$

ha la soluzione di un look

$$x(t) = B(t)e^{Ct}, \quad (1.6.7)$$

dove $B(t)$ è una matrice con elementi dello stesso periodo, come $A(t)$; C è una matrice costante.

Così, in questo caso la stabilità del sistema è definita dagli autovalori di una matrice di C .

Senza il calcolo degli autovalori si applicano vari criteri di stabilità che si dividono in algebrica e frequenza (grafica) e anche metodi speciali con l'uso del computer per la definizione della stabilità dei sistemi lineari.

B. Stabilità dei sistemi descritti differenziale lineare alle equazioni. (stabilità dei sistemi discreti).

Le equazioni differenziali lineari descrivono i cosiddetti sistemi discreti, e anche i sistemi costruiti su mappe discrete.

In una visione generale il registro delle equazioni differenziali:

$$x(n+1) = F(n, x(n)), \quad (1.6.8)$$

dove $x(n+1)$ è un vettore con l'attributo $x_i(n+1)$, $i = 1 \dots k$; e $F(n, x(n))$ è un vettore del $F_1(n, x_1(n), x_2(n) \dots, x_k(n))$.

Se inserire la norma euclidea (eremita) di un vettore $x(n)$:

$$\|x(n)\|_E =$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2(n)}. \quad (1.6.9)$$

che la stabilità in tutta Lyapunov di qualsiasi decisione $\xi(n)$ le equazioni (1.6.8), alle condizioni di ingresso $\xi(n_0)$ è formulata come segue.

La decisione $\xi(n)$ le equazioni (1.6.8) si chiama stabilità se per qualsiasi $\epsilon > 0$, c'è $\delta > 0$, a seconda di ϵ e su n_0 che qualsiasi decisione $\varphi(n)$ per la quale a $n = n_0$ vera disuguaglianza

$$\|\varphi(n_0) - \xi(n_0)\| < \delta, \quad (1.6.10)$$

che soddisfa a tutti i valori di un argomento discreto $n \geq n_0$ a una condizione

$$\|\varphi(n_0) - \xi(n)\| < \epsilon, \quad (1.6.11)$$

La decisione $\xi(n)$ l'equazione differenziale (1.6.8) è chiamata stabilità asintoticamente se è stabilità, e inoltre, c'è tale numero $H > 0$, che da una condizione $\|\varphi(n_0) - \xi(n_0)\| < H$, segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi(n) - \xi(n)\| = 0. \quad (1.6.12)$$

Considereremo i sistemi lineari descritti dalle equazioni differenziali

$$x_i = \sum_j^k a_{ij}(n)x_j(n) + f_i(n), i = \overline{1, k}, \quad (1.6.13)$$

o in un look a matrice e vettoriale

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n), \quad (1.6.14)$$

dove $A(n)$ è una matrice con gli elementi $a_{ij}(n)$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, k}$ $f(n)$ è un vettore con gli elementi $f_i(n)$, $i = \overline{1, k}$.

Il sistema (1.6.14) non autonomo non stazionario equazioni differenziali è stabilità se il sistema è stabilità corrispondente autonomo (uniforme):

$$x(n+1) = A(n)x(n). \quad (1.6.15)$$

Questo sistema non stazionario è stabilità quando tutte le sue decisioni sono limitate e asintoticamente è stabilità quando tutte le sue decisioni tendono a zero a $n \rightarrow \infty$.

Prenderemo in considerazione un sistema autonomo con coefficienti costanti, cioè un sistema lineare discreto stazionario:

$$x(n+1) = Ax(n), \quad (1.6.16)$$

dove $A = [a_{ij}]$, ($j, i = \overline{1, k}$) è una matrice di coefficienti costanti.

La stabilità del sistema (1.6.16) è definita da due condizioni:

1. tutti gli autovalori λ_i una matrice A sul modulo non superano l'unità,

$$|\lambda_i| \leq 1; \quad (1.6.17)$$

2. agli autovalori i cui moduli sono uguali all'unità vi corrispondono semplici divisori elementari di una matrice A (una forma Jordan con una gabbia dell'autovalore corrispondente).

Il sistema (1.6.16) è stabilità asintoticamente se tutti gli autovalori di una matrice A , λ_i , $i = \overline{1, k}$ sul modulo c'è meno unità, cioè

$$|\lambda_i| < 1, i = \overline{1, k}. \quad (1.6.18)$$

In questo caso esistono anche vari criteri (algebrici, frequenza, calcolo (al computer)) che permettono di definire la stabilità dei sistemi discreti senza calcolare gli autovalori di una matrice A o senza risolvere la corrispondente equazione caratteristica.

Prenderemo in considerazione solo i criteri algebrici Schur-Kohn e l'opzione discreta del criterio Gurvits.

Il criterio Schur - Kohn consiste in quanto segue.

Lasciate che il polinomio caratteristico per (1.6.16) abbia un aspetto

$$\det(A - \lambda I) = D(\lambda) = \delta_0 \lambda^n + \delta_1 \lambda^{n-1} + \dots + \delta_{k-1} \lambda + \delta_k. \quad (1.6.19)$$

Considereremo un caso materiale quando tutti i coefficienti di un polinomio di $D(\lambda)$ sono materiali.

Poi si calcolano i fattori determinanti Schur-Kohn:

$$\Delta M = \begin{vmatrix} B_{0m} & B_{km} \\ B_{km}^T & B_{0m}^T \end{vmatrix}, \quad (1.6.20)$$

dove B_{0m} , B_{km} sono matrici:

$$B_{0m} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \dots & 0 \dots 0 \\ b_1 & b_0 \dots & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m-1} & b_{m-2} \dots & b_{m-3} \dots b_0 \end{bmatrix};$$

$$B_{km} = \begin{bmatrix} b_k & b_{k-1} \dots & b_{k-2} \dots b_{k-m+1} \\ 0 & b_k \dots & b_{k-1} \dots b_{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots b_k \end{bmatrix},$$

$$\text{Cioè } \Delta m = |B \ B^T - B_{km}^T B_{km}|, \quad (1.6.21)$$

dove $m = \overline{1, k}$.

I determinanti di Δ_m hanno linee di $2m$ e colonne di $2m$ quindi l'input di lavoro dei loro calcoli aumenta all'aumentare del grado di k .

Il calcolo dei determinanti di Gurvits richiederà un numero molto più piccolo di operazioni di calcolo (i determinanti di Gurvits hanno m linee e m colonne).

L'opzione discreta del criterio Gurvits consiste in quanto segue.

Si usa la mappatura conforme del semipiano sinistro delle radici dell'equazione caratteristica in un unico cerchio (Fig. 1.9).

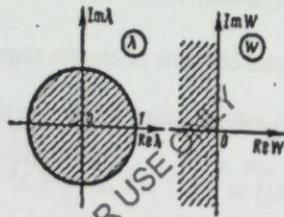


Fig. 1.9.

Tale mappatura viene effettuata mediante trasformazione frazionaria e lineare:

$$x = \frac{1+w}{1-w} \quad (1.6.21)$$

Sostituendo in (1.6.20) riceviamo un po' di polinomio.

$$Dl(w) = a_0 w^k + a_1 w^{k-1} + \dots + a_{k-1} w + a_k, \quad (1.6.22)$$

dove $a_j = a_j(a)$, $i=0, k$, $j=0, k$.

Così, il polinomio zero di $D(x)$ che giace in un unico cerchio sul piano x viene visualizzato in polinomio zero di $Dl(w)$ che giace nel semipiano sinistro della variabile w .

Inoltre per stabilire la stabilità del sistema (1.6.16) il criterio di Gurvits riguardante il sistema con un polinomio caratteristico di $Dl(w)$ è equo, cioè si

forma la matrice di Gurvits ma si calcola il coefficiente di $w^{i-1}/k!$ e le determinanti come in un caso continuo.

1.6.2. 1.6.2. Stabilità dei sistemi non lineari

Per la definizione della stabilità dei sistemi non lineari esistono anche vari metodi, sia algebrici, sia di frequenza o di calcolo.

A. Secondo metodo (diretto) di Lyapunov.

L'applicazione più grande dei metodi di una ricerca di stabilità è stata ricevuta dal secondo o diretto metodo di Lyapunov. Questo metodo permette di definire la stabilità dei sistemi non lineari, senza risolvere le equazioni.

Considereremo l'equazione

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.6.23)$$

dove $x \in R^n$; $F(x)$ è la funzione vettoriale liscia non lineare che ha derivati privati continui su tutti gli argomenti in qualche area G : $|x| \leq c = \text{const}$.

La stabilità della decisione banale (1.6.23) $x(t) \equiv 0$, è definita dalle seguenti condizioni:

il sistema è stabilità se:

- 1) c'è una certa funzione $V(x)$;
- 2) un derivato della funzione $V(x)$ per effetto dell'equazione (1.6.23)

$W(x) = dv/dt$ è segno negativo, cioè

$$V(x) > 0, \quad W(x) \leq 0.$$

Per la stabilità asintotica di una condizione banale del sistema:

$$V(x) > 0, \quad W(x) < 0. \quad (1.6.24)$$

L'instabilità di una condizione banale di $x \equiv 0$ del sistema (1.6.23) può essere stabilita alle seguenti condizioni:

- 1) esiste una qualsiasi funzione continua $V(x)$ che soddisfa una condizione di $V(0) = 0$;
- 2) la derivata della funzione $V(x)$ dovuta al sistema (1.6.23) $W(x)$ è segno definito (positivo o negativo);
- 3) in qualsiasi prossimità dell'inizio delle coordinate ($x=0$) ci sono punti in cui il segno della funzione $V(x)$ coincide con il segno $W(x) = \partial V / \partial t$.

B. Definizione della stabilità dei sistemi al primo approccio.

La stabilità della decisione banale (1.6.23) può essere determinata dalle equazioni del primo approccio quando la parte destra (1.6.23) è linearizzata nel quartiere di $x = 0$. Poi riceviamo il sistema

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x), \quad (1.6.25)$$

dove $A = [a_{ij}]$ è una matrice di una parte lineare, si chiama matrice Jacobi o Jakobian, $a_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$, $i, j = \overline{1, n}$; $\varphi(x)$ è un vettore di funzioni $\varphi_i(x)$ che supportano i membri di decomposizione in una riga Taylor di funzione $F(x)$ sciocchezze sono superiori al primo ordine, soddisfacendo una condizione

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} = 0. \quad (1.6.26)$$

Il sistema delle equazioni con coefficienti costanti

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.6.27)$$

è chiamato il sistema del primo approccio per il sistema delle equazioni (1.6.25) che è equivalente anche per il sistema (1.6.23).

Le dichiarazioni sono giuste:

1) la soluzione banale del sistema (1.6.25) è asintoticamente la stabilità attraverso Lyapunov se tutti gli autovalori di una matrice A (jakobian) di sistema (1.6.25) hanno parti di materiale negativo, cioè $\text{Re} \lambda_i < 0$ ($i = \overline{1, n}$);

2) se tra gli autovalori di una matrice A c'è almeno una radice con una parte di materiale positivo, allora la soluzione banale del sistema (1.6.25) è l'instabilità.

Nel caso in cui tra gli autovalori ci siano matrici A ci siano zero o autovalori puramente immaginari, allora è impossibile giudicare la stabilità o l'instabilità della soluzione banale del sistema (1.6.25) sulle equazioni del primo approccio. In questi casi chiamati stabilità critica o instabilità della decisione banale dipende da una parte non lineare $\varphi(x)$, e a seconda di $\varphi(x)$ il sistema (1.6.25) può essere stabilità o instabilità.

B. Uso dell'equazione di matrice di Lyapunov per una ricerca sulla stabilità dei sistemi.

Molto spesso per la soluzione di problemi di ricerca di stabilità di sistemi così lineari, non lineari come lo strumento conveniente viene utilizzata l'equazione di matrice di Lyapunov. Allo stesso tempo il compito può portare all'equazione di matrice algebrica di Lyapunov, e l'equazione di matrice differenziale di Lyapunov.

La stabilità della soluzione banale del sistema (1.6.25) o del corrispondente sistema lineare (2.6.27) richiede anche abbastanza che l'equazione di matrice di Lyapunov

$$AV + VA^T = -W, \quad (1.6.28)$$

ha avuto una decisione positiva certa V , in qualsiasi matrice positiva certa di W .

Per fornire il grado di stabilità garantito $\alpha > 0$, cioè che $\text{Re}\lambda_i(A) \leq -\alpha$ per tutti $i = \overline{1, n}$ è necessario anche che per qualsiasi set di matrice simmetrica positiva certa di W ci sia una matrice positiva certa di V , soddisfacente per l'equazione come Lyapunov

$$(1.6.29) \quad -2\alpha V + AV + VA = -W.$$

Le soluzioni delle equazioni (1.6.28) e (1.6.29) sono chiamate matrici di funzioni di Lyapunov.

Prenderemo in considerazione un caso in cui il sistema non è stazionario, cioè

$$(1.6.30) \quad \dot{x} = A(t)x,$$

dove $A(t)$ è una matrice i cui elementi dipendono dal tempo di $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Per questo caso è anche possibile utilizzare le equazioni di Lyapunov.

La definizione positiva e la definizione negativa delle matrici per un caso non stazionario è formulata come segue..

La funzione continua materiale $v(x, t) = x^T V(t)x$ viene chiamata positivamente certa se c'è una costante $\alpha > 0$, tale che in ogni caso t disuguaglianza viene effettuata

$$(1.6.31) \quad v(x, t) \geq \alpha \|x\| > 0,$$

ma la funzione $v(x, t)$ è chiamata negativamente certa se è $\alpha > 0$, è che

$$(1.6.32) \quad |v(x, t)| \leq -\alpha \|x\| < 0,$$

per niente t .

Il concetto di funzione quadrata di Lyapunov per il sistema (1.6.30) viene inserito se vengono eseguite le seguenti condizioni:

1) c'è sicuramente $v(x, t) > 0$, è che

$$(1.6.33) \quad v(x, t) \leq \alpha \|x\|^2;$$

2) un derivato sul tempo della funzione $v(x, t)$, $\dot{v}(x, t)$ per effetto dell'equazione (1.6.30)

è funzione negativamente certa, cioè esiste $\alpha > 0$, è che

$$(1.6.34) \quad \dot{v}(x, t) \leq -\alpha \|x\|^2 < 0.$$

Allo stesso tempo, l'esistenza di una funzione quadrata di Lyapunov equivale a una stabilità esponenziale del sistema, vale a dire che le dichiarazioni sono corrette:

1) se per il sistema (1.6.30) c'è una funzione quadrata di Lyapunov di $v(x, t)$, è sistema uniformemente asintoticamente stabile;

2) affinché il sistema (1.6.30) fosse asintoticamente stabile, bastava una soluzione dell'equazione della matrice differenziale di Lyapunov

$$(1.6.35) \quad \dot{V}(t) + A^T(t)V(t) + V(t)A(t) = W(t),$$

sotto forma di matrice positiva certa di $V(t)$, in qualsiasi matrice negativa certa di $W(t)$.

G. Metodo delle funzioni vettoriali di Lyapunov.

L'ulteriore sviluppo del secondo metodo di Lyapunov nella teoria della stabilità è stata l'introduzione alla teoria e alla pratica di una ricerca sulla stabilità dei sistemi di un cosiddetto metodo delle funzioni vettoriali di Lyapunov (metodo *VFL*).

Necessità di un uso efficace di questo metodo era il problema di una ricerca di stabilità dei difficili sistemi di ordine elevato costituiti da un insieme di sottosistemi interconnessi tra loro. Questi sistemi, di norma, hanno strutture gerarchiche.

In una ricerca di tali sistemi, viene utilizzato l'approccio basato sull'uso della decomposizione dei sottosistemi separati isolati, l'aggregazione e una ricerca del sistema aggregato in generale.

Allo stesso tempo la decomposizione - consiste nella partizione di un sistema difficile di ordine elevato su un certo numero di sottosistemi, dimensione più piccola con l'attribuzione di influenza delle interrelazioni tra di loro. Il modello matematico di ogni sottosistema è presentato sotto forma di sistemi delle equazioni, in ognuno dei quali sono allocate le parti relative a questo sottosistema e alle interrelazioni.

Lasciate che il sistema difficile sia preso in considerazione:

$$\dot{x} = F(x, t), \quad (1.6.36)$$

dove $x \in R^n$ è un vettore di una condizione di sistema; $F(x, t)$ è una funzione vettoriale.

Lasciamo ora che il sistema (1.6.36) possa essere presentato sotto forma di insieme di sottosistemi, tali da essere descritti dai sistemi delle equazioni, tenendo conto delle loro interrelazioni:

$$\dot{x}^{(i)} = F_i(x^{(i)}, t) + \sum_{j \neq i} f_{ij}(x^{(i)}, x^{(j)}, t), \quad (1.6.37)$$

dove $i, j = \overline{1, \tau}$; $x^{(i)} \in R^{n_i}$ è un vettore di una condizione di i quel sottosistema; $F_i(\cdot)$ è un vettore di funzione della funzione di dimensione di n_i , le proprietà dinamiche proprie caratterizzanti di i quel sottosistema, $x^{(i)}$ a seconda degli

stati variabili solo questo sottosistema; $f_{ij}(\cdot)$ è una funzione vettoriale di interrelazione di un sottosistema di i con altri sottosistemi di $j \neq i$.

Così, il sistema difficile (1.6.36) è rappresentato come associazione τ di sottosistemi. La decomposizione viene effettuata in modo che le coordinate (variabili) dei sottosistemi non siano incrociate, cioè $n_1 + n_2 + \dots + n_\tau = n$.

Ci sono due approcci alla decomposizione:

- 1) la struttura del sistema di decomposizione difficile, per quanto possibile riflette la struttura reale (approccio ingegneristico);
- 2) in caso di forti comunicazioni di parti separate di sistema difficile utilizzare un approccio formalistico quando la scomposizione è effettuata da raggruppamenti di variabili nelle equazioni del sistema (1.6.36) e la riduzione a vista (1.6.37) con piccoli $f_{ij}(\cdot)$.

Ovviamente, la decomposizione di questo sarà più efficace, rispetto alle comunicazioni di $f_{ij}(\cdot)$ sono più deboli.

Per sistemi lineari difficili

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (1.6.38)$$

la decomposizione sui sottosistemi può essere presentata nella forma

$$\dot{x}^{(i)} = A_i(t)x^{(i)} + \sum_{j \neq i} A_{ij}(t)x^{(j)}. \quad (1.6.39)$$

In questo caso le interrelazioni dei sottosistemi saranno deboli se le norme delle matrici di $A_{ij}(t)$ sono piccole rispetto alle norme delle matrici di $A_i(t)$. Pertanto la decomposizione viene effettuata è iterativa, studiando elementi e blocchi di matrici di $A_i(t)$ e $A_{ij}(t)$ (e matrici simili o jacobian in sistemi non lineari), trasformando coerentemente le equazioni in uno sguardo quando f_{ij} o A_{ij} sarà piccolo o uguale a zero.

A volte nei sistemi (1.6.36) allocare piccoli parametri ai derivati ed effettuare la decomposizione su sottosistemi con scale temporali fortemente differenti (parti a polispeed) utilizzano ulteriormente un cosiddetto metodo delle perturbazioni singolari.

Nella fase successiva dopo la decomposizione, all'inizio trascurando le interrelazioni ($f_{ij}(\cdot) \equiv 0$, $A_{ij}(t) \equiv 0$) riceveremo i sottosistemi isolati

$$\dot{x}^{(i)} = F_i(x^i, t). \quad (1.6.40)$$

L'analisi della stabilità di ogni sottosistema isolato (1.6.40) può essere effettuata con il secondo metodo di Lyapunov con l'uso dei risultati classici sopra descritti.

Per una fase di analisi della stabilità dei sottosistemi isolati, segue la fase di aggregazione e le associazioni di sottosistemi in sistemi difficili tenendo conto delle interrelazioni. Il modo tradizionale e la considerazione congiunta della famiglia di sottosistemi porta la considerazione di tutti i sottosistemi con tutte le interrelazioni al ripristino della multidimensionalità e delle difficoltà che sono state bypassate nell'analisi di dekompozition dei compiti.

Negli ultimi decenni si sono sviluppati intensamente metodi di aggregazione approssimativi e stimati. I sottosistemi iniziali sono stati sostituiti con sistemi più semplici, e il modello aggregato di un qualche approccio al sistema reale difficile si è rivelato. Se allo stesso tempo si garantisce che un certo numero di proprietà (per esempio, la stabilità) avvenisse nel sistema iniziale quando queste proprietà sono disponibili nel sistema semplificato, o la divergenza tra di esse è nei limiti stabiliti ammissibili, allora l'aggregazione è chiamata stima. Nella teoria della stabilità dei sistemi difficili è richiesto che dalla stabilità del sistema semplificato si richieda la stabilità (in un certo senso) del sistema iniziale (reale) e che i processi nel sistema semplificato seguano in maggioranza un certo senso processi nel sistema

iniziale (reale) difficile. I sistemi semplificati che soddisfano tali requisiti sono chiamati *sistemi (o modelli) di confronto*.

Uno dei metodi più sviluppati per la creazione di sistemi scalari di confronto si basa sull'uso di funzioni di Lyapunov e un metodo di confronto quando il sistema iniziale (2.6.36) è majorizzato da qualche sistema

$$\dot{y} = f(y, t), \quad (1.6.41)$$

tale che positivamente certa funzione $v(x, t)$ che il derivato dovuto al sistema (1.6.36) soddisfa alla disuguaglianza differenziale $\dot{v}(x, t) \leq f(v(x, t), t)$, in alcune zone

$$(x, t) \in G, \quad (1.6.42)$$

dove $f(\cdot)$ è materiale, funzione continua, tale che attraverso ogni punto (t_0, y_0) , passa l'unica soluzione $y(t, t_0, y_0)$ delle equazioni (confronto) (1.6.42).

In questo caso è dimostrato che tutte le proprietà di stabilità (1.6.36) sono definite dalla corrispondente stabilità del sistema (1.6.42).

Questo metodo viene applicato ai sottosistemi isolati, poi l'insieme delle funzioni di Lyapunov per i sottosistemi viene utilizzato per la valutazione della stabilità di tutti i sistemi difficili tenendo conto delle interrelazioni. Una delle idee principali che hanno portato all'introduzione di un concetto di funzione vettoriale di Lyapunov come insieme di funzioni "sottosistema" di Lyapunov consiste in esso. È stato per la prima volta offerto il famoso matematico Richard Bellman nel lavoro del 1962. Quasi nello stesso tempo un'idea simile è stata pubblicata nel lavoro di V.M. Matrosov in cui si offre di unire un metodo di funzioni di Lyapunov e la disuguaglianza come Chaplygin, per ricevere la funzione vettoriale di Lyapunov e il sistema vettoriale di confronto.

Inoltre il termine funzione vettoriale di Lyapunov (*VFL*) è stato ampiamente incluso in letteratura secondo la teoria della stabilità dei sistemi difficili, e il metodo *VFL* è diventato il principale metodo di aggregazione stimato nei sistemi difficili.

Sulla base della decomposizione, si riceve l'analisi dei sottosistemi e l'aggregazione stimata per mezzo di *VFL* metodo molto efficace ad una ricerca di stabilità di sistemi dinamici difficili di ordine elevato della diversa natura fisica.

D. La teoria della stabilità basata sulla produzione di entropia.

Gli elementi della teoria della stabilità enunciati nelle sezioni precedenti di questo capitolo appartengono alle basi generali della teoria della stabilità, senza riguardare i sistemi concreti. Ma i campi concreti della scienza hanno alcune specificità che devono essere considerate da considerazioni di questioni di stabilità. I metodi di ricerca della stabilità nei campi concreti della scienza hanno portato la storia e considerato le specificità degli oggetti di queste scienze.

Quindi in termodinamica ci sono teorie specifiche sulla stabilità che rivedremo brevemente in questa sezione.

La teoria classica della stabilità dei sistemi termodinamici è la teoria della stabilità di Gibbs-Dyugem che è definita dalle condizioni:

$$d_F = -Td_i S \leq 0, (T, V, N_R = \text{const}); \quad (1.6.43a)$$

$$d_G = -Td_i S \leq 0, (T, p, N_R = \text{const}); \quad (1.6.43b)$$

$$d_H = -Td_i S \leq 0, (S, p, N_R = \text{const}); \quad (1.6.43c)$$

dove *F, G, H* sono rispettivamente potenziali di energia libera di Helmholtz, energia libera di Gibbs e un'entalpia; *T, V, N_R, p, S* sono rispettivamente temperatura, volume, numero di falene, pressione ed entropia. Allo stesso

tempo l'entalpia di *H* è la funzione di uno stato determinato da variabili di una condizione di sistema

$$H = U + pV, \quad (1.6.44)$$

dove *U* è una variabile di energia del sistema.

In stato di equilibrio il sistema termodinamico deve rimanere stabile per quanto riguarda eventuali fluttuazioni e perturbazioni dell'ambiente esterno.

La teoria classica di Gibbs-Dyugem considera la stabilità di una condizione di equilibrio del sistema termodinamico. In questa teoria si sostiene che lo stato di equilibrio è stabile contro qualsiasi perturbazione se porta alla riduzione dell'entropia del sistema. Lo stato di equilibrio è stabile contro le fluttuazioni se anche l'entropia allo stesso tempo diminuisce, cioè la fluttuazione si estingue.

Considereremo per il sistema isolato tipi di stabilità del sistema termodinamico, da una posizione della teoria classica di Gibbs - Dyugem.

Stabilità termica.

Si considera la fluttuazione della temperatura di *T* in alcuni sistemi isolati.

Le condizioni di stabilità termica dello stato di equilibrio hanno un aspetto

$$\frac{1}{2} \delta^2 S = -\frac{C_V (\delta T)^2}{2T^2} < 0, \quad (1.6.45)$$

dove $\delta^2 S$ è il secondo componente in decomposizione dell'entropia nella serie di potenza di Taylor

$$S = S_0 + \delta S + \frac{1}{2} \delta^2 S + \dots; \quad (1.6.46)$$

c_V è la capacità termica molare nel volume considerato costante dell'ambiente; δT è la piccola variazione di temperatura in volume di (Fig. 1.10).

A partire dalla (2.6.45) è richiesto un $c_V > 0$ che viene effettuato in quanto la capacità termica a volume costante è positiva.

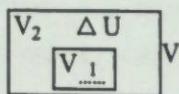


Fig. 1.10.

ΔU è la perturbazione dell'energia da una parte $V1$ ad un'altra $V2$, causando cambiamenti di temperatura ad una dimensione δT .

Stabilità meccanica.

Considereremo la resistenza del sistema termodinamico alle fluttuazioni di volume di un sottosistema al rimanente numero invariabile di falene di N . Il sistema diviso in due parti (fig. 1.10) è considerato, ma qui si suppone che nelle parti $V1$ e $V2$ si verifichino piccole variazioni di volume δv_1 e δv_2 .

L'intero volume del sistema non cambia quindi $\delta v_1 = \delta v_2 = \delta v$.

In questo caso, le condizioni di stabilità assumono una forma

$$\delta^2 S = -\frac{1}{RT} \cdot \frac{(\delta v)^2}{V} < 0, \quad (1.6.47)$$

dove V è qualsiasi volume è $V_1, V = V_1$; R_T è la compressibilità isotermica del coefficiente $R_T = -(1/V) dV/dp$. T è considerata costante $T=const$.

Il rapporto (1,6,47) è equo a $R_T > 0$ che viene effettuato.

In caso di $R_T < 0$, il sistema si trova in uno stato instabile di non equilibrio.

Resistenza alle fluttuazioni del numero di mufe.

Le fluttuazioni del numero di moli di vari componenti del sistema sono causate da reazioni chimiche e dai fenomeni di diffusione.

Stabilità chimica.

Le fluttuazioni nello stesso tempo sono definite come fluttuazioni del grado di completezza della reazione ξ per quanto riguarda i loro valori di equilibrio. Allo stesso tempo si suppone anche $T=const$.

In questo caso, la condizione di stabilità assume una forma

$$\frac{1}{2} \delta^2 S = \frac{1}{2T} \left(\frac{dA}{d\xi} \right) \cdot (\delta \xi)^2 < 0, \quad (1.6.48)$$

dove A , la cosiddetta affinità:

$$A/T = (dS/d\xi)_{U,V}, \quad (1.6.49)$$

$(dA/d\xi)$ è un valore in stato di equilibrio.

Nel corso di diverse reazioni di una condizione (1.6.48) diventa complicato:

$$\frac{1}{2} \delta^2 S = \sum_{ij} \frac{1}{2T} \left(\frac{dA_i}{d\xi_j} \right)_0 S_{\xi_i}^E S_{\xi_j}^E < 0, \quad (1.6.50)$$

Resistenza alle fluttuazioni, causate dalla diffusione.

Le fluttuazioni sono possibili anche a causa dello scambio di sostanze tra le parti del sistema.

Condizioni di stabilità di uno stato di equilibrio si presenta nella seguente forma

$$\delta^2 S = -\sum_{ij} \left(\frac{d}{dN_j} \frac{M_{ij}}{T} \right) S_{N_i} S_{N_j} < 0, \quad (1.6.51)$$

dove $M_{ij} = -T \cdot (dS/dN_j)$ è il potenziale chimico in volume di V_1, S_{N_i}, S_{N_j} sono variazioni di numero di moli in volumi di V_1 e V_2 .

Così, la condizione generale di resistenza di uno stato di equilibrio alle fluttuazioni termiche, alle fluttuazioni di volume e anche alle fluttuazioni del numero di moli causati dalle reazioni chimiche e dalla diffusione è espressa dal seguente rapporto:

$$\delta^2 S = -\frac{C_V(\Delta T)^2}{T^2} - \frac{1}{TR_T} \cdot \frac{(\delta V)^2}{V} - \sum_{i,j} \left(\frac{2}{2N_j} \cdot \frac{M_j}{T} \right) SN_i SN_j < 0,$$

(1.6.52)

dove il C_V del sistema è la capacità termica con qualsiasi capacità di V e potenziale chimico di M_j .

La teoria considerata della stabilità di Gibbs-Dyugem è equa solo a certe condizioni, per esempio $T=const$. Da questa lacuna è libero l'approccio generale alla stabilità dei sistemi termodinamici basati sulla produzione di entropia che può essere utilizzato anche per l'analisi della stabilità dei sistemi senza equilibrio.

Stabilità dei sistemi termodinamici sulla base della produzione di entropia.

Quindi, il compito di definire la stabilità sulla base della ricezione di espressione per la produzione di entropia, causata da fluttuazioni, è fissato. Ovviamente, il sistema sarà stabile contro le fluttuazioni se la corrispondente produzione di entropia è negativa, cioè.

$$\Delta_i S < 0. \quad (1.6.53)$$

L'espressione generale della produzione di entropia assume una forma

$$\frac{d_i S}{dt} = \sum_k F_R \frac{dx_R}{dt} = \sum_k F_R J_R, \quad (1.6.54)$$

dove F_R è la forza termodinamica; $\frac{dx_R}{dt} = J_R$, - un flusso termodinamico.

Le forze termodinamiche sorgono a causa della non uniformità di temperatura, pressione o potenziale chimico. Se per designare attraverso I e attraverso F secondo uno stato di equilibrio e uno stato a causa di fluttuazione, allora abbiamo

$$\Delta_i S = \int_I^F d_i S = \int_I^F \sum_k F_k dx_k. \quad (1.6.55)$$

All'inizio considereremo la stabilità di uno stato di equilibrio.

Allora, l'avremo:

1) per la stabilità chimica:

$$\Delta_i S = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi} \right)_0 \frac{(\delta \xi)^2}{2T} < 0, \quad (1.6.56)$$

o in un caso \mathcal{R} - reazioni chimiche

$$\Delta_i S = \sum_{i,j}^k \frac{1}{2T} \left(\frac{\partial \Lambda_i}{\partial \xi_j} \right)_0 \delta \xi_i \delta \xi_j < 0; \quad (1.6.57)$$

2) per la stabilità termica:

$$\Delta_i S = -\frac{C_V}{T_0} \cdot \frac{(\delta T)^2}{2} < 0; \quad (1.6.58)$$

3) in generale:

$$\int_I^F \sum_k F_k dx_k = -\frac{C_V(ST)^2}{T^2} - \frac{1}{TR_T} \frac{(\delta V)^2}{2V} - \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \Lambda_i}{\partial N_j T} \right) \frac{\partial N_i SN_j}{2} < 0, \quad (1.6.59)$$

o nelle denominazioni $\delta^2 S$ che abbiamo:

$$\delta^2 S = \frac{1}{2} \frac{d^2 S}{dt} = \sum_k \delta F_k \delta J_k > 0. \quad (1.6.60)$$

Queste equazioni seguono come caso speciale dalla teoria generale della stabilità di Lyapunov.

Considereremo ora la stabilità degli stati stazionari *senza equilibrio*.

Gli stati stazionari in modalità lineare sono stati con valori estremi di produzione di entropia.

Si esegue il quasi equilibrio in modalità lineare in rapporti di sistema costanti:

$$\rho = d_i S / dt > 0, \quad (1.6.61)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{2}{T^2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial \Lambda_i}{\partial \xi_j} \right) \vartheta_i \vartheta_j < 0, \quad (1.6.62)$$

dove ϑ_i, ϑ_j sono variabili:

$$\vartheta_k = \sum_i L_{ki}(A_i/T), \quad (1.6.63)$$

L_{ki} è il coefficiente delle cosiddette equazioni fenomenologiche che collegano le velocità di reazione ϑ_k e A_i/T .

$$\dot{\vartheta}_1 = L_{11} \frac{A_1}{T} + L_{12} \frac{A_2}{T}, \quad (1.6.64a)$$

$$\dot{\vartheta}_2 = L_{21} \frac{A_1}{T} + L_{22} \frac{A_2}{T}. \quad (1.6.64b)$$

Le condizioni (1.6.61) e (1.6.62) garantiscono la stabilità dello stato di non equilibrio in modalità lineare vicino all'equilibrio e rendono le condizioni di stabilità in tutto il Lyapunov.

Stabilità dei sistemi lontani dall'equilibrio

I sistemi soggetti ad un flusso di energia e di sostanza possono passare negli stati lontani dall'equilibrio termodinamico, in "modalità non lineare".

Nel modo non lineare i flussi termodinamici di id_{non} sono funzioni lineari delle forze termodinamiche di Fd . Nei sistemi non lineari (non lineari) come risultato di fluttuazioni o altre piccole perturbazioni c'è una transizione da uno stato di instabilità ad uno di possibili nuovi stati. Questi nuovi stati possono essere altamente organizzati.

Per gli stati stazionari non di equilibrio il modo più generale di una ricerca di stabilità è l'uso del secondo metodo di Lyapunov che è considerato da noi nelle sezioni precedenti di questo capitolo.

Allo stesso tempo le equazioni del sistema possono essere scritte in un look consueto, o in derivati privati se x_i dipende non solo dal tempo, ma anche dalle coordinate spaziali, o da altre variabili correlate. E in questo caso anche le condizioni di stabilità del sistema termodinamico sono definite dalle condizioni:

$$L(x) > 0, \dot{L}(x) < 0, \quad (1.6.65)$$

dove $L(x)$ è la funzione di Lyapunov. Ma nel caso in cui le variabili $x_i(t)$ siano funzioni di coordinate (per esempio, nei sistemi di nonequilibrio è la concentrazione delle componenti nk), $L(x)$ è chiamata *funzionalità di Lyapunov*.

La condizione di stabilità di nessuno stato stazionario di equilibrio con l'uso di funzionalità di Lyapunov di $L = -\delta^2 S$ ha un aspetto

$$\frac{d \delta^2 S}{dt} = \sum_k \delta F_k \delta J_k > 0. \quad (1.6.66)$$

Questa condizione è una condizione di stabilità sufficiente, ma necessaria, cioè se (1.6.65) non viene realizzata, che il sistema può essere instabile, allo stesso tempo

$$\sum_k \delta F_k \delta J_k < 0,$$

c'è una condizione necessaria, ma non sufficiente di instabilità del sistema.

Per i sistemi termodinamici può essere utilizzato anche il metodo di approccio lineare con il metodo di Lyapunov.

1.7. Frattali

A. Frattali.

I frattali sono un concetto nuovo, introdotto nella scienza da Benoit Mandelbrot alla fine degli anni Sessanta del XX secolo. I frattali sono le complesse strutture geometriche che hanno "autosimilarità" e sono descritte da una dimensione non integrale.

B. Mandelbrot ha definito *un frattale* un insieme per il quale la dimensione del suo Hausdorff è più topologica:

$$d_H > d_T. \quad (1.7.1)$$

Definiremo la dimensione topologica e topologica di Hausdorff.

La *dimensione topologica* d_T è la dimensione di oggetti geometrici nel senso usuale quando, ad un insieme di calcolo (uno o più punti) attribuiscono la dimensione zero, alle rette alle rette e alle curve è la dimensione uno $d_T = 1$, alle superfici hanno dimensione a $d_T = 2$, i volumi hanno dimensione di $d_T = 3$, ecc. Intuitivamente non sempre si dispone a mangiare, per esempio, curve singole in qualche superficie, e ci sono curve che sono quasi a coprire una superficie e queste curve in una metrica abituale hanno dimensioni identiche di $d_T = 1$ (Fig. 1.11)

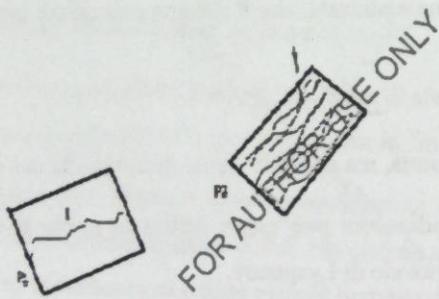


Fig. 1.11.

Per la valutazione del grado di complessità degli oggetti geometrici o per la caratteristica del grado di complessità delle traiettorie delle particelle nello spazio delle fasi ϕ . Hausdorff ha inserito una nuova misura o la dimensione Hausdorff di d_H (a volte chiamata dimensione Bezikovich - Hausdorff) come segue.

Alcuni set quali punti sono spediti in spazi di qualche dimensione di d_T è considerato. Questo insieme diventa coperto da n cubi misurati, densamente imballati. Cubes si impegna così tanto quanti set tutti considerati (Fig. 1.12) sono necessari per una loro copertura.

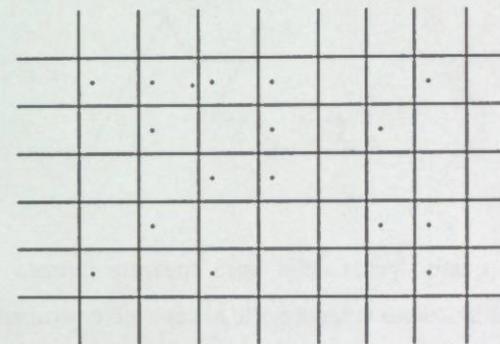


Fig. 1.12.

Designeremo la parte di un cubo attraverso r e il numero di cubi a cui un punto di un set attraverso $N(r)$ ottiene almeno un punto.

Allora la dimensione di Hausdorff dell'insieme considerato è uguale

$$d_H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)}$$

$$(1.7.2)$$

È facile calcolare d che per un pezzo di curva diretta o liscia $d_H = d_T = 1$ e per una parte del $d_H = d_T = 2$ piano, ecc., cioè per le occorrenze abituali e quotidiane di un Hausdorff e le dimensioni topologiche coincidono.

Prenderemo in considerazione altri casi quando $d_H \neq d_T, d_H > d_T$.

Un esempio classico è la cosiddetta curva di Koch.

La curva risulta come segue. Il pezzo di lunghezza singola intraprende è diviso in tre ed è gettato fuori da quel $1/3$ una parte nel mezzo. Insieme un pezzo medio due parti (lunghezza su $1/3$ ogni) un triangolo equilatero sono in costruzione.

Così, ci saranno quattro collegamenti di $1/3$ di lunghezza ciascuno, così, che la lunghezza totale di una linea spezzata sarà di $4/3$.

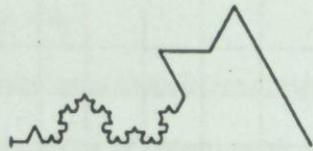


Fig. 1.13.

Con ognuno dei quattro pezzi della linea spezzata formata arriviamo allo stesso modo, cioè lanciamo la terza parte al centro e costruiamo su una linea spezzata da due maglie. Continuiamo questa operazione sempre più spesso, ecc. Dopo molte iterazioni la linea spezzata diventerà molto tortuosa (Fig. 1.13). In un limite a un numero di passi infinitamente maggiore riceviamo una curva differenziabile continua da nessuna parte.

Su un numero n la lunghezza di un passo di un pezzo di una linea spezzata è uguale

$$r_n = (1/3)^n \quad (1.7.3)$$

Questi pezzi giocano anche un ruolo di "cubi" che coprono la curva di Koch formata. Anche il numero di tali "cubi" è appena contato:

$$N(r_n) = 4^n, \quad (1.7.4)$$

da qui, la dimensione di Hausdorff di una curva di Koch:

$$d_H = \ln 4 / \ln 3 \approx 1.26. \quad (1.7.5)$$

Quindi $d_H > d_T$.

Il secondo esempio classico, è un esempio di un set Cantor. Questo set è chiamato in onore del grande matematico tedesco George Cantor che lo aprì nel 1883. Questo set gioca un ruolo importante nella moderna dinamica non lineare.

Il set Cantor è in costruzione come segue (Fig. 1.14):

5-h

1/3

1/9 1/9

Fig. 1.14.

Media salta fuori da un singolo pezzo 1/3 parte. Inoltre trattiamo passo dopo passo ciascuno dei due pezzi formati, ecc. Cosa, rimane da un pezzo dopo un numero infinito di passi e fa un set di Cantor. La lunghezza dei pezzi che vengono buttati fuori $5h$ è uguale

$$l = 1/3 + 2/9 + 4/27 + \dots = 1. \quad (1.7.6)$$

Quindi, la "lunghezza" totale del set Cantor rimasto è pari a zero e quindi, per lui $d_T = 0$. Tuttavia la dimensione di Hausdorff di un set Cantor sarà uguale

$$d_H = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63092 \dots, \quad \text{t.c. } d_H > d_T. \quad (1.7.7)$$

Per un classico esempio di movimento browniano sul piano $d_H = 2 > d_T = 1$.

Così, Mandelbrot ha determinato da un frattale un insieme che ha una dimensione Hausdorff più topologica (1.7.1), $d_H > d_T$.

Così tutti gli esempi classici rivisti sono esempi di frattali. Esempi con il movimento browniano anche la condizione (1.7.1) è soddisfatta anche se la dimensione d_H è intera. Quindi la definizione di un frattale come insiemi di dimensione frazionaria in senso stretto non è sempre corretta, cioè è possibile inserire la specificazione nella (1.7.1) in uno sguardo, frattali è tali insiemi che soddisfano ad un rapporto:

$$d_T > d_H \leq d_T + 1, \quad (1.7.8)$$

dove d_T è la dimensione topologica di un insieme geometrico.

I frattali si dividono su regolare (come la curva di Koch, un set di Cantor e. ecc.) e stocastico (come una traiettoria di movimento browniano).

Il merito principale nello sviluppo della geometria frattale appartiene a Benoit Mandelbrot. Così, ha inserito un concetto sui frattali e la geometria frattale nella scienza a B. Mandelbrot. Ringraziando prima di tutto i suoi lavori in molti campi della scienza un concetto di frattali hanno ricevuto ampia attenzione e applicazione nella descrizione di vari fenomeni e strutture che mostrano proprietà caotiche.

B. Dimensioni frattali.

Esistono vari tipi di dimensioni frattali. Il dato tipo di dimensione secondo Hausdorff è più alto d_H è di solito chiamato dimensione del condensatore.

Altri esempi di insiemi per i quali è possibile calcolare la dimensione del condensatore di d_H , salvo quanto sopra riportato gli insiemi che nascono alla mappa a "ferro di cavallo" e la trasformazione di "panettiere".

La mappa a ferro di cavallo e la trasformazione del fornaio ci sono state considerate nel rapporto dell'anno scorso, e rappresentano gli esempi più semplici di processi dinamici iterativi sul piano che portano alla perdita di informazioni e proprietà frattali.

Il calcolo della dimensione frattale del condensatore è fatto per la mappa a ferro di cavallo come viene calcolato negli esempi precedenti di una curva di Koch e altri.

Secondo la (1.7.2) riceviamo

$$d_H = \frac{\ln 2}{\ln |r|} + 1, \quad (1.7.9)$$

dove r è il parametro di compressione, $0 < r < 1/2$.

Per la trasformazione della dimensione del condensatore "baker

$$d_H = \frac{\ln 2}{\ln |\lambda|} + 1, \quad (1.7.10)$$

dove λ è il parametro di trasformazione, $|\lambda| > 2$.

Anche se la determinazione della dimensione frattale del condensatore è semplice

interpretazione come la misura è una misura geometrica di un cubo o di una sfera di copertura di un oggetto geometrico abituale, ma ha alcune lacune: in primo luogo, legata alla geometricità, cioè non considera la frequenza con cui la traiettoria visita un elemento di copertura (a strutture caotiche), in secondo luogo, il calcolo degli ipercubi che formano le coperture di set di cubi nello spazio delle fasi richiede spese di calcolo molto elevate. Ma in realtà, la determinazione della dimensione frattale con l'aiuto, per esempio di metodi numerici, non è mai fatta su un insieme infinito (numero molto grande di iterazioni), e il numero dei punti coperti è limitato a qualche dimensione N_0 . Quindi per il numero finale di punti c'è sempre il numero minimo di r_{min} dietro il quale alla riduzione la quantità $N(r_n)$ cessa di variare, raggiungendo un certo valore N_0 .

Pertanto, ad eccezione della dimensione del condensatore di d_H ci sono anche tipi alternativi di dimensioni frattali che danno risultati numerici piuttosto vicini l'uno all'altro e alla dimensione del condensatore.

La *dimensione di puntamento* viene inserita come segue.

Si considera la traiettoria nello spazio delle fasi in un lungo intervallo di tempo (Fig. 1.15).

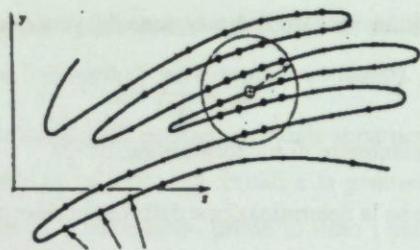


Fig. 1.15.

La selezione dei punti è fatta per ricevere un numero piuttosto grande di punti rappresentativi su una traiettoria, più avanti intorno ad un punto su una traiettoria viene descritta la sfera di raggio di r (o un cubo con bordo r) e viene contato il numero di punti selettivi di $N(r)$ che hanno ottenuto in un cubo (o sfere). La probabilità che il punto selettivo appaia nella sfera, è determinata da una formula:

$$\rho(r) = \frac{N(r)}{N_0} \quad (1.7.11)$$

dove N_0 è il numero totale di punti selettivi d .

La dimensione di puntamento designata da d_p si trova nei seguenti rapporti:

$$d_p = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \rho(r, x_i)}{\ln r} \quad (1.7.12)$$

dove $x_i = x(t_i)$ è il valore di un vettore x coordinate di fase nel punto temporale di t_i (o i in un caso discreto); $\rho(r, x_i)$ è la probabilità, il fatto che la traiettoria nell'intervallo di tempo $\Delta t_i \rightarrow 0$ sarà è nella sfera di raggio di $r \rightarrow 0$.

Per alcuni attrattori questa definizione non dipende dal punto x_i . Ma per molti attrattori di d_p dipende da x_i . Pertanto, utilizzare la dimensione media della puntatura.

Per ricevere la dimensione media di punti, scegliere in modo casuale un insieme di punti di $M < N_0$ e in ogni suo punto calcolare $d_p(x_i)$, ulteriormente

calcolato

$d_p =$

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M d_p(x_i) \quad (1.7.13)$$

A volte probabilità medie $P(r, x_i)$. A questo scopo il sottoinsieme casuale esce dai punti M situati intorno a un attrattore ($M \ll N_0$). Poi supponendo,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \rho(r, x_i) = ar^{d_p},$$

avere

$$d_p = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(1/M) \rho(r)}{\ln r} \quad (1.7.14)$$

di solito, $N_0 \approx 10^3 \div 10^4$, $M \approx 10^2 \div 10^3$.

Diverso modo di calcolo della dimensione frattale di punto di calcolo della dimensione frattale media su sfere faggiate (o cubi di dimensione) spazio di fase contenente la stessa quantità (per esempio alcuni punti M). Scegliendo vari x_i di riferimento (i centri o cubi), calcola $r_i(N)$ prendere ai punti:

$$\bar{r}(N) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i(N) \quad (1.7.15)$$

Dimensioni di correlazione definite come segue. Bene quando si determina la traiettoria di base continua campionata, cioè sostituita con un insieme da N punti $\{x_i\}$ spazio. Distanza tra le coppie $S_{ij} = |x_i - x_j|$, utilizzando sia la distanza di misura euclidea abituale, sia il vettore di norma di altra forma $||| \cdot |||$.

Funzione di correlazione definita

$$R(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} (M(i, j); S_{ij} < r) \quad (1.7.16)$$

dove $M(i, j)$ è il numero di punti di coppia (x_i, x_j) , per il quale $S_{ij} = |x_i - x_j| \leq r$.

Per molti attrattori

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R(r) = ar^d,$$

dovuto determinato dalla formula:

$$D_r = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln R(r)}{\ln r}. \quad (1.7.17)$$

Ma $R(r)$ può essere più efficace a sfera (o cubo) descritto intorno ad ogni punto x_i , cioè calcolato

$$R(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M(r - \|x_i - x_j\|), \quad (1.7.18)$$

dove $M(\cdot) = 1$ a $(\cdot) > 0$, $M(\cdot) = 0$, a $(\cdot) < 0$.

La dimensione frattale dell'informazione procede in modo simile alla dimensione frattale del condensatore (hausdorff), ma tenendo conto della frequenza con cui la traiettoria arriva ad un elemento di copertura è la sfera (o un cubo). Anche qui l'insieme dei punti che la dimensione frattale deve essere definita diventa coperto da N sfere o cubi con un raggio o un bordo di r . A sua volta l'insieme dei punti è considerato come un campionamento uniforme di una traiettoria continua.

Per il calcolo delle informazioni dimensione frattale c'è un numero di punti di N_i in cui di N celle di una copertura e si stima la probabilità di P_i di trovare i punti in una cella:

$$P_i = \frac{N_i}{N_0}, \sum_{i=1}^N P_i = 1,$$

(1.7.19)

dove N_0 è il numero totale di punti in un insieme.

È noto che l'entropia dell'informazione è sull'espressione:

$$I_r = - \sum_{i=1}^N P_i \ln P_i. \quad (1.7.20)$$

al piccolo r : $I_r \approx d_i \ln(1/r)$,

quindi la dimensione frattale dell'informazione è determinata da una formula:

$$d_i = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{I(r)}{\ln(1/r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum P_i \ln P_i}{\ln \epsilon}. \quad (1.7.21)$$

Generalmente il rapporto tra informazioni e dimensioni del condensatore è soddisfatto della disuguaglianza:

$$dI \leq dH. \quad (1.7.22)$$

C'è un altro tipo di dimensione frattale che viene inserita sulla base degli indicatori di Lyapunov ed è designata da d_L quindi è possibile chiamare la *dimensione frattale di Lyapunov*.

È noto che gli indicatori di Lyapunov caratterizzano la velocità della loro corsa l'uno dall'altro, e per le traiettorie fuori da un attrattore è la velocità del loro approccio ad un attrattore.

Se λ_{L_i} sono gli indicatori di Lyapunov, allora quando si razionalizza

$$\lambda_{L1} > \lambda_{L2} > \dots > \lambda_{Ln}, \quad (1.7.23)$$

e λ_{Lk} è un indicatore tale che

$$\sum_{i=1}^k \lambda_{L_i} \geq 0,$$

che la dimensione frattale di Lyapunov è inserita in una formula:

$$d_{Lk} = k \oplus \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_{L_i}}{\lambda_{Lk}}. \quad (1.7.24)$$

I seguenti stati tra le varie dimensioni frattali sono equi:

$$(1.7.25a) \quad d_r \leq d_i \leq d_H,$$

$$d_{\lambda L} \leq d_H. \quad (1.7.25b)$$

In molti casi per attrattori standard (noti) strani tutti i valori di diversi tipi di dimensioni frattali sono molto vicini.

Ad esempio, in caso di trasformazione del panettiere, si stabilisce che

$$d_i = d_{\lambda L} \leq d_H = 1 + \frac{\ln 2}{\ln |\lambda|}. \quad (1.7.26)$$

Nella conclusione di questa sezione noteremo che tutte le dimensioni frattali degli attrattori standard strani (caotici) numeri non integrali, oltretutto numeri irrazionali.

B. Frattali e caos.

Il caos o i movimenti caotici (strani attrattori) in sostanza hanno una struttura frattale come traiettorie nella struttura caotica di uno stocastico.

La geometria frattale nella dinamica non lineare è applicata in due scopi:

1. per la determinazione della stranezza degli attrattori (casualità);
2. per la misura della dimensione frattale.

Nei calcoli numerici e negli esperimenti fisici si definiscono la dimensione frattale e gli indicatori di Lyapunov, campionando un oggetto e segnalando la sequenza di punti equidistanti (nel tempo) ed elaborando i dati ottenuti al computer.

Sono noti tre metodi principali:

- 1) campionamenti temporanei di variabili nello spazio di fase;
- 2) calcolo della dimensione frattale delle mappe di Poincare;
- 3) creazione di uno spazio pseudofase su misure di una variabile.

Le variabili sono misurate nel primo e nel terzo metodo attraverso periodi identici $\{x(t_0 + Tn)\}$ dove n è un numero intero, un intervallo di tempo di T è scelto in modo che egli abbia fatto una certa quota del periodo della forza forzata. Nel caso del secondo metodo e se la mappa di Poincare viene eseguita in tempo, allora T è il periodo delle traiettorie. Se la mappa di Poincare viene eseguita su qualsiasi altra variabile nello spazio di fase, allora i dati corrispondono a vari punti temporali, a seconda della mappa di Poincare scelta.

Nella maggior parte dei casi, al calcolo della dimensione frattale, vengono utilizzati da alcune migliaia a decine di migliaia di punti. Gli algoritmi diretti per il calcolo della dimensione frattale su N_0 ai punti contengono N_0^2 delle operazioni e della richiesta di calcoli dei supercomputer. Quando si utilizzano programmi speciali, abbassare solo le operazioni a $N \ln N N_0$.

I valori delle dimensioni frontali dei diversi tipi di strani attrattori standard sono riportati nella seguente tabella.

Tabella 1.1

NoNo	Nome del sistema	Tipo di dimensione	Dimensione
1.	Il sistema di Lorentz	Condensatore d_H	2.06 ± 0.01
		Correlazione d_R	2.05 ± 0.01
		Lyapunov $d_{\lambda L}$	2.07
2.	Il sistema di Ryosler	Lyapunov $d_{\lambda L}$	2.01
3.	Mappa di Henon (a = 1,4; b = 0,3)	Condensatore d_H	1.26
		Correlazione d_R	1.21 ± 0.01

		Lyapunov $d_{\lambda L}$	1.26
4.	Mappa logistica	Condensatore d_H	0.538
		Correlazione d_R	0.500 ± 0.005
5.	Circuito (sistema) di Chua	Lyapunov $d_{\lambda L}$	2.82

FOR AUTHOR USE ONLY

CAPITOLO 2. TEORIA DEI SISTEMI DINAMICI

Le basi della moderna teoria dei sistemi dinamici sono state sviluppate dal grande matematico francese Henri Poincare. La teoria dei sistemi dinamici studia i tipi di comportamento dinamico dei sistemi descritti dalle difficili equazioni non lineari. La teoria dei sistemi dinamici è una disciplina matematica fondamentale, strettamente connessa con molti campi della matematica. Concetti, metodi e presentazioni della teoria dei sistemi dinamici stimolano fortemente le ricerche in molti altri rami della scienza, inoltre porta all'emergere di nuove direzioni delle scienze, così per esempio la dinamica applicata, la dinamica non lineare o la teoria del Caos. La teoria dei sistemi dinamici comprende una serie di discipline principali, in particolare la dinamica differenziale finito-dimensionale. Quest'ultima è strettamente connessa con discipline come la teoria ergodica, la dinamica simbolica e la dinamica topologica. La teoria moderna dei sistemi dinamici è piuttosto estesa in questa sezione prenderemo in considerazione alcune disposizioni della teoria.

FOR AUTHOR USE ONLY

Concetti di base. La teoria dei sistemi dinamici, prima di tutto, comprende i seguenti elementi:

- 1) spazio di fase di X quali elementi "punti", rappresentano le possibili condizioni del sistema;
- 2) "tempo" che può essere sia continuo che discreto. Il tempo può cambiare solo in una direzione, nel futuro (processi irreversibili), o in due direzioni sia nel passato che nel futuro (processi reversibili);
- 3) legge di evoluzione del sistema.

Nella formulazione generale questa tale modifica (descrizione) che permette di definire una condizione di sistema in ogni punto temporale di t ; conoscendo

uno stato in tutti i momenti precedenti. Così, la legge più generale dell'evoluzione del sistema può dipendere dal tempo di t e ha memoria infinita.

Quindi, se il sistema era in qualche stato x , durante t passerà in un nuovo stato che è definito inequivocabilmente dai valori x e t , cioè il nuovo stato è funzione di due variabili $F(x, t)$. Fissando t , si riceve la trasformazione $\varphi_t: x \rightarrow F(x, t)$ spazio di fase in. Allo stesso tempo le trasformazioni φ_t formano un semigruppato, cioè

$$\varphi(t_1+t_2) = \varphi(t_1) \circ \varphi(t_2). \quad (2.1.1)$$

Per il sistema reversibile, le trasformazioni φ_t sono definite sia per i valori positivi che per quelli negativi t , e ogni trasformazione φ_t è reversibile. Così, il sistema dinamico reversibile con tempo discreto è rappresentato dal gruppo ciclico $\{ F = (\varphi^1)^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$, trasformazioni biunivoche dello spazio di fase a se stesso, e il sistema dinamico reversibile con tempo continuo determina il gruppo unparametrico $\{ \varphi^t \mid t \in \mathbb{R} \}$ trasformazioni biunivoche x a se stesso.

Nella teoria dei sistemi dinamici al centro dell'attenzione c'è un problema di studio del comportamento asintotico, cioè del comportamento del sistema all'aspirazione del tempo dell'infinito.

Storicamente l'interesse per i sistemi dinamici fluidi a tempo continuo è stato attratto dall'apertura di quel fatto da Newton che il movimento degli oggetti meccanici può essere descritto dalle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Ma anche molti oggetti di altre scienze è descritto dalle equazioni differenziali ordinarie di vari ordini. Quindi storicamente i sistemi dinamici, sono stati identificati con i sistemi descritti dalle equazioni ordinarie all'inizio.

Lo spazio di quasi fase del sistema dinamico ha una certa struttura di una costante nel tempo.

Ora ci sono varie teorie che studiano i sistemi dinamici che mantengono le strutture.

Queste sono le seguenti teorie:

1) La *teoria ergodica* in cui lo spazio di fase X è lo spazio con una misura, cioè lo spazio di Lebesgue con la misura finale o la cosiddetta misura finale di M .

La teoria ergodica affonda le sue radici in un'ipotesi ergodica di Boltzmann che per i sistemi della meccanica statistica postula l'uguaglianza di alcune medie temporanee e spaziali. Lo sviluppo sistematico della teoria ergodica come sezione della matematica è stato iniziato nei 30 anni del XX secolo da J. von Neuman. È continuato da J.D. Birkhoff, E. Hopf, ecc. Lo sviluppo moderno è stato più legato alle opere dell'eccezionale matematico sovietico A. Kolmogorov e dei suoi allievi Ya. Sinay, V. Rokhlin e altri;

2) *dinamiche topologiche* in cui lo spazio di fase è lo spazio topologico metrizzato compatto o localmente compatto. La dinamica topologica considera gruppi, omeomorfismi e semigruppato di trasformazioni continue di tali spazi. A volte questi oggetti sono chiamati sistemi dinamici topologici.

Le basi della dinamica topologica sono state poste da Henri Poincaré, alla soluzione qualitativa delle equazioni differenziali che non possono essere risolte analiticamente. Il grande contributo alla teoria della dinamica topologica è stato dato da M. Morse e J.D. Birkhoff..;

3) la teoria dei sistemi dinamici lisci, o *dinamica differenziale* quando lo spazio di fase ha struttura di varietà liscia, per esempio, è area o la superficie chiusa nello spazio euclideo.

Questa teoria studia il diffeomorfismo e i flussi (gruppi mono-parametrici lisci di diffeomorfismi) su tali varietà e l'iterazione di mappature differenziali irreversibili.

In un caso finito-dimensionale la varietà liscia possiede una topologia naturale localmente compatta, la teoria dei sistemi dinamici lisci utilizza naturalmente concetti e risultati di dinamica topologica. Un'altra ragione di dipendenza della dinamica differenziale dalla topologia consiste nel fatto che quando si studia il comportamento asintotico dei sistemi dinamici lisci spesso ci sono fenomeni grezzi molto difficili. Per esempio, alcuni importanti insiemi invarianti di sistemi lisci, per esempio, gli attrattori non possono avere alcuna struttura liscia e, quindi, tali insiemi devono essere studiati da un altro punto di vista ruvido.

Dinamica simbolica, l'area che studia una speciale classe di sistemi dinamici topologici che nascono come sottoinsiemi chiusi invarianti di trasformazione di spostamento nello spazio delle sequenze.

Anche la *dinamica differenziale* è strettamente connessa con la teoria ergodica, poiché le misure invarianti rappresentano il potente strumento per l'analisi delle proprietà asintotiche dei sistemi dinamici lisci.

Le fondamenta della dinamica differenziale sono state gettate anche da H. Poincaré. Egli ha enfatizzato l'approccio di alta qualità in contrapposizione ai tradizionali tentativi di ricevere soluzioni ovvie delle equazioni differenziali della meccanica e ha anche creato la teoria locale delle riflessioni e dei campi vettoriali nel quartiere delle orbite immobili e periodiche. Inoltre, nelle prime fasi di sviluppo della dinamica differenziale, il grande contributo alla teoria è stato dato da A.M. Lyapunov e G. Hadamard che sono entrati in vari concetti di stabilità e hanno sviluppato gli asset analitici fissi delle ricerche sulla

stabilità. Inoltre il contributo è stato dato nello sviluppo della teoria della dinamica differenziale da J.D. Birkhoff, poi A. Denjoy, E. Hopf e altri.

Altro strumento di approccio moderno all'analisi dei sistemi dinamici lisci è stato il concetto di stabilità strutturale o rugosità che all'inizio è entrato e che è stato sviluppato da A.A. Andronov e L.S. Pontryagin per l'analisi dei flussi sulle superfici e, ulteriormente è stato sviluppato nelle opere di M. Peixoto con condizioni meno severe.

Il grande contributo alla teoria è stato dato da S. Smale che ha dimostrato che strani attrattori come il "ferro di cavallo" hanno una stabilità strutturale. Altri S. Smale, D. Anosov, Ya. Sinai, Dj. Bowen hanno sviluppato le basi della teoria dei sistemi dinamici iperbolici. Il grande contributo alla teoria dell'ergodismo liscio è stato dato da Ya. Sinai e D. Ruelle e altri;

3) *La dinamica di Hamilton, o dinamica sinflettica*, è la sintesi naturale dell'analisi delle equazioni differenziali della meccanica classica. Lo spazio di fase rappresenta allo stesso tempo la varietà quadridimensionale liscia con la forma differenziale chiusa non degenerata Ω . Gruppi un-parametrici del diffeomorfismo mantenendo una forma Ω corrispondono alle equazioni differenziali della meccanica classica nella forma di Hamilton.

La dinamica di Hamilton è diventata oggetto dell'analisi della teoria dei sistemi dinamici a causa dei problemi che sorgono nella meccanica celeste. E qui il grande contributo è stato dato da H. Poincaré, avendo applicato essenzialmente un nuovo approccio di alta qualità all'analisi dei problemi Ω corpi. Ulteriori dinamiche di Hamilton sono state divise in due direzioni:

- 1) ricerche sulla complessità dinamica derivante da una certa iperbolicità;
- 2) l'analisi dei sistemi integrati e le loro indignazioni che ha portato alla teoria di KAM.

Il grande contributo allo sviluppo delle dinamiche di Hamilton è stato dato da A. Kolmogorov che ha dimostrato che molte caratteristiche qualitative dei sistemi integrati rimangono in qualche misura sotto l'influenza delle perturbazioni e si presentano anche in situazioni tipiche.

Ci fermeremo sulle definizioni di alcuni termini speciali della teoria dei sistemi dinamici.

1. 2. *Omeomorfismo*. L'omeomorfismo è inteso come univocità tra due spazi topologici in cui entrambe le mappature di ritorno reciproche determinate da questa conformità sono continue. Queste mappature sono chiamate *homeomorfy*, o mappature topologiche e anche omeomorfismi, e gli spazi appartenenti ad un tipo topologico sono chiamati *homeomorfy*, o *equivalente topologico*.

2. 2. *Omeomorfismi gruppo*. È un gruppo di mappe *homeomorfy* dello spazio topologico di X su se stesso.

3. 3. *Diffeomorfizm*. Si tratta di omeomorfismo differenziabile, omeomorfismo liscio, mappatura biunivoca e continuamente differenziabile.

4. 4. *Isomorfismo*. Questa conformità (relazione) tra gli oggetti o i sistemi di oggetti che esprimono in qualche modo l'identità di una struttura.

L'isomorfismo, o mappatura isomorfa, i sistemi A sulla mappa biuniforme del sistema A^1 φ imposta A sull'insieme di A^1 che ha le seguenti proprietà:

$$\varphi(F_i(a_1, \dots, a_i)) = F_i(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_i)), \quad (2.1.2)$$

$$P_j(a_1, \dots, a_j) \Leftrightarrow P_j(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_j)),$$

per tutti gli elementi a_1, a_2, \dots da A e tutti $i \in I_0, j \in J$.

O in qualsiasi categoria di sistemi algebrici l'isomorfismo è l'omeomorfismo che è la bijezione. L'isomorfismo del sistema algebrico su se stesso è chiamato automorfismo. L'omeomorfismo è un morfismo nella categoria dei sistemi

algebrici. L'omeomorfismo è la mappatura del sistema algebrico A che mantiene in esso le principali operazioni e le principali relazioni. Il *morfismo* di categoria è un termine, per designare gli elementi di qualsiasi categoria che svolgono un ruolo di mappatura di insiemi tra loro, gomoyemorfizm di gruppi, anelli, algebre di mappature continue di spazi topologici, ecc.

5. *La varietà* è l'oggetto geometrico che localmente ha una struttura (positiva, liscia, omologica o altro) di spazio numerico R^n o altro spazio vettoriale. Questa idea fondamentale matematizza i concetti della linea e di una superficie specificando e generalizzando su un numero qualsiasi di misure.

6. *Il flusso*, sistema dinamico, con tempo continuo è il sistema dinamico determinato dall'azione del gruppo additivo di numeri reali R (o semigrupp additivo di numeri reali non negativi) su qualche spazio di fase di X . Altrimenti, ad ogni $t \in R$ qualche trasformazione $\varphi_t : X \rightarrow X$, e

$$\varphi_0(x) = x, \quad \varphi_{a+b}(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)). \quad (2.1.3)$$

7. *Il flusso del campo vettore* a attraverso una superficie σM è espresso all'interno del segno da integrale superficiale

$$\iint_{\sigma M} (a_x d_y d_z + a_y d_x d_z + a_z d_x d_y), \quad (2.1.4)$$

dove n è un singolo vettore di un normale vettore di una superficie σM . Per esempio, per il campo vettore di velocità il flusso del campo vettore è uguale.

8. 8. *Turno*. Come spostamento nella teoria dei sistemi dinamici si intende, affine trasformazione su se stessa gli n piani dello spazio misurato in cui ogni punto è spostato in direzione di un asse B_{ue} sulla distanza proporzionale alla sua ordinata o coordinata positiva.

Nel sistema di coordinate del Decart lo spostamento sul piano è impostato per rapporti:

$$x^1 = x + k^z, y^1 = y, z^1 = z, k \neq 0. \quad (2.1.5)$$

Allo spostamento dei volumi spaziali tridimensionali e l'orientamento rimangono.

Spostare l'operatore è l'operatore T_t in funzione del parametro t e agendo su alcuni set di mappa $\phi: A \rightarrow M$ (dove A è un sottogruppo abeleo, M è un set) su una formula

$$T_t \phi(\cdot) = \phi(\cdot + e).$$

(2.1.6)

9.9. Un'omotetia - la trasformazione dello spazio euclideo di un punto di O piuttosto che di un punto di O mettendo in conformità ad ogni punto il punto M di M^1 che giace su OM diretto su un rapporto

$$OM^1 = k OM,$$

dove k è numero, relativo, diverso da zero, è chiamato coefficiente di omotetia. Il punto O è chiamato il centro di un'omotetia.

10. L'endomorfismo del sistema algebrico è la mappa del sistema algebrico A a se stesso coordinata con la sua struttura cioè se Un sistema algebrico la cui firma è costituita da un insieme ΩF di simboli di operazioni e da un insieme ΩP di simboli di un predicato che endomorfismo $\varphi: A \rightarrow A$ deve soddisfare le due seguenti condizioni:

1) $\varphi(a_1, \dots, a_n) = \varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)$ per qualsiasi n -esima operazione $\omega \in \Omega F$ e di qualsiasi sequenza di elementi a_1, \dots, a_n sistemi A ;

2) $P(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow P(a_1 \varphi, \dots, a_n \varphi)$ per qualsiasi n un predicato locale di $P \in \Omega P$ e A .

I sistemi dinamici per forma di funzioni dal tempo si dividono in sistemi dinamici continui e discreti. Alla descrizione dei sistemi dinamici discreti

(ulteriori DS) le domande di analisi diventano un po' più semplici perché la mappa che genera DS con tempo discreto può essere impostata molto spesso, ovviamente, per mezzo di alcune formule. I sistemi con tempo continuo sono impostati, di solito dimensione infinita e il ripristino della dinamica secondo tale descrizione di DS include il processo che rappresenta un'integrazione analogica.

In un caso continuo, designando $\sigma/\sigma x_i$ campi vettoriali di base che confrontano ad ogni punto di i è un vettore di base standard di R^n , è possibile fornire ogni campo vettore localmente in un look

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Se il punto iniziale di x_0 è impostato con le coordinate di x_1^0, \dots, x_n^0 , poi al compito del movimento di questo punto si definisce come risultato della soluzione di sistema delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (2.1.7)$$

con condizioni di ingresso $x_i(0) = x_i^0, i = \overline{1, n}$.

Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie si sa che se le funzioni f_i sono continue e differenziabili la decisione, (2.1.7) esiste, solo e senza problemi dalle condizioni di ingresso.

CAPITOLO 3. SISTEMI SINERGICI

3.1. 3.1. Auto-organizzazione nei sistemi naturali

3.1.1. 3.1.1.1. Matematica e meccanica

I più semplici esempi astratti di sistemi in cui si osservano segni di auto-organizzazione e casualità sono esempi dell'equazione logistica che descrive la crescita delle popolazioni e anche le mappe di Henon, il tipo "ferro di cavallo" ("ferro di cavallo di Smale") e "panettiere".

L'equazione logistica o l'equazione della crescita della popolazione, ha un aspetto:

$$x_{n+1} = ax_n - bx_n^2,$$

(3.1.1)

dove a e b - parametri.

Il modello non lineare (3.1.1) è presentato nella forma adimensionale

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) = f(x_n) \quad (3.1.2)$$

Al parametro $\lambda > 1$ ci sono due punti di equilibrio:

$$x_0 = 0 \quad \text{и} \quad x_0 = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

allo stesso tempo, all' $1 < \lambda < 3$ inizio delle coordinate $x = 0$, il punto instabile ($f' = \frac{\partial f}{\partial x_n} = \lambda > 1$), e il secondo punto di ($f' = 2 - \lambda$) riposo è stabile.

Inoltre, a valore $\lambda = 3$ l'inclinazione $x_0 = (\lambda - 1)/\lambda$ supera l'unità, ed entrambi i punti di $|f'| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| > 1$ $f' = 2 - \lambda$ equilibrio sono instabili.

A questo punto $\lambda = 3$ è instabile una decisione stazionaria, ma appare il ciclo stabile a due periodi. All'aumentare ulteriormente λ l'orbita

biperiodica diventa instabile e c'è un ciclo con il periodo 4 che a causa della biforcazione raddoppia il periodo a 8 a grandi valori λ .

Questo processo di raddoppio del periodo continua ad avere un valore $\lambda_\infty = 3,56994\dots$. Allo stesso tempo, in prossimità di questo valore, la sequenza dei valori del parametro che λ , raddoppia il periodo si sottopone alla legge esatta di Feigenbaum

$$p = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \rightarrow 4,66920166\dots \quad (3.1.3)$$

Il numero irrazionale di $p=4,66920166\dots$ è chiamato il numero di Feigenbaum dal nome del fisico americano Mitchell Feigenbaum che per la prima volta nel 1976 ha trovato queste proprietà dell'equazione considerata (mappatura).

Ai valori eccedenti λ_∞ nei sistemi descritti dalle equazioni di tipo (3.1.2) possono verificarsi iterazioni caotiche (oscillazioni). Ma ad un intervallo $\lambda_\infty < \lambda < 4$ ci sono anche alcuni intervalli $\Delta\lambda$ per i quali esistono orbite periodiche (oscillazioni regolari).

Valore della mappatura (3.1.2) non solo che si tratta di un esempio del sistema più semplice che mostra la formazione del caos, ma anche che su questo esempio si trovano proprietà universali dell'equazione dei periodi delle classi di modelli differenziali unidimensionali dei processi dinamici.

Le equazioni del periodo e la relazione Feigenbaum (3.1.3), sono caratteristiche di molte mappature $x_{n+1} = f(x_n)$ di alto ordine (sopra la prima) e si trovano in molti esperimenti scientifici.

L'esempio seguente è la mappa di Henon descritta dal sistema differenziale bidimensionale delle equazioni offerte dall'astronomo francese Henon

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = bx_n, \quad (3.1.4)$$

dove i parametri di mappatura a e b .

Alla mappatura $|b| < 1$ (3.1.4) riduce le aree nel piano xOy . Inoltre, estende le mappature e comprime le aree sul piano di fase.

Come risultato di queste operazioni di allungamento, compressione, piegatura e piegatura di aree di spazio di fase le aree che ricordano un ferro di cavallo risultano. Pertanto, la mappa di Henon appartiene alle mappe a "ferro di cavallo", talvolta chiamate anche ferro di cavallo di Smale. Le iterazioni consecutive di tali mappe a "ferro di cavallo" portano alla formazione di movimenti difficili e al caos.

L'attrattore (la varietà attrattiva) a cui aspira un punto di mappatura, presenta il lavoro di varietà unidimensionale su un insieme di Cantor, cioè ha struttura frattale.

Le ricerche condotte ai valori $b \approx 0,3$; a - var. rivelano i seguenti punti di biforcazione:

$$a_0 = -(1-b)^2/4 = -0.1225;$$

$$a_1 = \frac{3}{4}(1-b)^2 \approx 0.3675;$$

$$a_2 \approx 1.06;$$

$$a_3 \approx 0.55.$$

A o $a < a_0$, $a > a_3$, punti vanno sempre all'infinito, a questi e l'attrattore non esiste.

In $a_0 < a < a_1$ un attrattore è un punto invariante stabile. Quando $a > a_1$ l'attrattore è periodico un insieme da q di punti, simile ad un ciclo limite. Con la crescita del valore q cresce e si sforza di raggiungere l'infinito ad $a_2 \approx 1.06$. $a_2 < a < a_3$, un attrattore difficile, ma la questione della

"stranezza" (casualità) di questo attrattore solleva alcuni dubbi recentemente e rimane aperta.

Molti ricercatori ritengono che la mappa a "ferro di cavallo" giochi un ruolo fondamentale nella maggior parte dei modelli dei sistemi dinamici caotici basati sulle equazioni differenziali e differenziali. Ad esempio il sistema che descrive i movimenti del peso del punto su una molla con attrito e a condizioni di colpo assolutamente elastico sul limitatore ha caotico al "ferro di cavallo dell'altoparlante Smale".

La trasformazione del "panettiere" rappresenta anche un esempio di dinamica caotica.

La trasformazione di "panettiere" è una trasformazione del piano su se stesso che tende la piattaforma rettangolare in una direzione, la spreme in un'altra direzione, la taglia a metà e ne mette una metà sopra l'altra. Questa trasformazione è simile alla trasformazione "a ferro di cavallo". Ripetute iterazioni di questa trasformazione trasformano una serie iniziale di punti in struttura frattale. La trasformazione è chiamata in analogia con le operazioni effettuate dal panettiere che impasta un pezzo della prova: srotolamento, estensione, taglio e riordinamento.

Trasformazioni di "panettiere" è impostato dal sistema di due equazioni differenziali:

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n, & \text{per } y_n < 1/2, \\ 2(y_n - 1/2), & \text{per } y_n > 1/2, \end{cases} \quad x_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n x_n, & \text{per } y_n < 1/2, \\ 1/2 + \lambda_n x_n, & \text{per } y_n > 1/2; \end{cases}$$

(3.1.5)

dove sono i λ_n, λ_s parametri di trasformazione.

Come dimostrano molte ricerche di questa trasformazione e anche qui ci sono movimenti aciclici caotici che ricordano sulla complessità

casuale, ma come le equazioni determinate, sono chiamate il caos determinato.

Il seguente esempio di dinamica caotica si osserva nei problemi della cosiddetta modellazione di tipo "biliardo" dei sistemi di meccanica statistica.

Il biliardo sul piano è il sistema che descrive i movimenti sull'inerzia dei corpi materiali (sfere) in un'area limitata secondo la legge "l'ombra è uguale all'angolo di riflessione". Dal punto di vista matematico il "biliardo" rappresenta il biliardo ordinario, ma con qualsiasi forma di tavolo e senza tasche da biliardo. Dalle ricerche pubblicate in molti riferimenti si dimostra che il sistema anche da due sfere, a seconda di una forma di bordo, può possedere proprietà di dinamica caotica. Così, l'instabilità o l'imprevedibilità delle traiettorie del sistema di sfere elastiche. Sulla base di ricerche di sistemi di "biliardo" il risultato sulla "convergenza al movimento browniano di comportamento del sistema puramente determinato" è stato ricevuto che la nascita del caos in determinati sistemi dinamici era una conferma rigorosa.

La generalizzazione dei sistemi di "biliardo" è un biliardo che non ha confini immobili e che cambia secondo una certa legge. Ad esempio, il compito di dinamica di una sfera può servire nel biliardo dove il confine cambia come modello di problemi di meccanica statistica del nulla. Molti compiti dei sistemi di "biliardo" sono stabiliti e risolti dalla scuola dei matematici sovietici Ya.G. Sinay.

L'esempio più semplice di sistemi meccanici con dinamiche difficili sono i pendoli. I sistemi pendolari mostrano in modo significativo i fenomeni "non lineari" (multistabilità, biforcazioni, caos).

Il movimento del pendolo semplice con attrito può diventare caotico all'eccitazione cambiando armoniosamente la forza di sufficiente ampiezza.

L'equazione adimensionale del movimento del pendolo in coordinate di un angolo di rotazione è presentata nella seguente forma:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \sin x = b \cdot \cos x \cdot \cos \alpha x \quad (3.1.6)$$

Oscillazioni caotiche si incontrano nel quartiere di frequenza propria a piccole oscillazioni.

I movimenti caotici si osservano in determinate condizioni e nella dinamica di un giroscopio a tre sedimi con smorzamento non lineare all'influenza armonica esterna causata dalla vibrazione verticale della base, il caos si osserva anche nei sistemi meccanici di nuclei e travi, piastre, sistemi d'urto e catene degli oscillatori che sono costantemente collegati da comunicazioni elastiche.

3.1.2. 3.1.2. Fisica.

Molti sistemi dell'idrodinamica mostrano esempi di movimenti caotici. Ci sono cinque tipi di compiti con liquidi in cui si osservano i movimenti caotici:

systemi con le correnti chiuse: convezione Rayleigh - Benard, la corrente Taylor - Couette un cilindro di confine;

correnti aperte: una corrente in un tubo, interfacce, flussi;

particelle liquide: la gru che procede;

onde sulla superficie del liquido: onde superficiali gravitazionali;

i liquidi che reagiscono: il serbatoio misto del reattore chimico.

La ragione principale dell'instancabile interesse per le dinamiche caotiche nei liquidi è la possibilità di rivelare i meccanismi di formazione delle turbolenze. La conoscenza delle leggi e dei

meccanismi di turbolenza permetterà di sviluppare ulteriori metodi di controllo di questo molto importante nei fenomeni applicati.

Convezione termica di Rayleigh - Benard. Il gradiente di temperatura nel liquido che si trova nel campo di inclinazione crea una forza di galleggiamento che provoca l'instabilità del vortice e porta al caotico e ai vortici. La formazione delle cosiddette celle di Benard nel volume rettangolare chiuso a riscaldamento uniforme della piastra inferiore è la più studiata. Sperimentale una ricerca di convezione termica di Rayleigh - Benard nel volume chiuso è stato dimostrato che i forieri del movimento caotico sono le sequenze di raddoppio del periodo. Questi esperimenti sono stati fatti con vari liquidi in cui si trovano come transizione al caos attraverso oscillazioni quasiperiodiche, e il caos alternato.

Sistema di Taylor - Couette. Classico sistema idromeccanico dove si trova il caos preturbolento, la corrente tra due cilindri rotanti è. In tale sistema prima dell'instaurarsi del rumore caotico si osservano oscillazioni quasiperiodiche. Alcune ricerche hanno dimostrato la possibilità di controllare l'insorgenza o la soppressione del caos attraverso il cambiamento della velocità di rotazione del cilindro interno.

Storicamente il primo esempio di sistemi determinati dove c'era, ha trovato i movimenti caotici c'era un esempio di sistema di Lorenz. Così nel 1963 il meteorologo E. Lorenz per la prima volta ha

L'apertura teorica sperimentalmente confermata di H. Poincare (1892) che in alcuni sistemi meccanici descritti dalle equazioni determinate possono esserci oscillazioni caotiche che sorgono nel sistema di Lorenz nei successivi sono stati chiamati "strani attrattori" di Lorenz.

Le equazioni che descrivono il sistema di Lorenz hanno un aspetto:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \quad (3.1.7) \\ \dot{z} &= xy - \beta z, \end{aligned}$$

dove $x, y, z, R\epsilon$ sono condizioni variabili del sistema, x è proporzionale all'ampiezza della velocità del movimento, e le variabili y, z riflettono la distribuzione della temperatura in un anello convettivo, σ, ρ sono i parametri positivi connessi con i numeri di Prandtl e Rayleigh, sono $\beta > 0$ il parametro che caratterizza la geometria del sistema.

In molte ricerche del sistema di Lorenz (3.1.7) si ritiene che $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$, e il parametro ρ è variabile.

All'indirizzo $\rho < 1.0$ nel sistema di Lorenz c'è l'unico punto speciale (SP) all'inizio delle coordinate $SP1(0,0,0,0)$ come "nodo stabile". Inoltre a $\rho = 1,0$ c'è una biforcazione alla formazione di due nuovi punti speciali di tipo $SP2$ e $SP3$ come "nodo stabile":

$$SP_2(a, a, p-1); \text{ dove } SP_3(-a, -a, p-1), a = \left[\frac{8}{3}(p-1) \right]^{1/2}.$$

Con $\rho = 1,345$ nel sistema di Lorenz c'è una biforcazione del cambiamento dei tipi di punti speciali $SP2, SP3$, cioè questi punti speciali si trasformano in punti speciali come "stable a saddle focus". Inoltre a $\rho = 24,74$ c'è una biforcazione Hopf (Poincare - Andronov - Hopf) quando le coppie di autovalori in $SP2, SP3$ diventano puramente immaginarie e a $\rho > 24,74$ questi punti speciali diventano come "instabile una sella - messa a fuoco". Allo stesso tempo nel sistema di Lorenz c'è "uno strano attrattore" di Lorenz quando in un'area limitata di spazio tridimensionale, intorno a "unstable a saddle - focus" $SP2, SP3$ ci sono oscillazioni caotiche che coprono un punto di sella $SP1$.

Uno degli esempi di sistemi in cui ci sono movimenti caotici sotto forma di turbolenza in liquido è il sistema del terzo ordine descritto dal sistema di Lengford:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2a-1)x - y + xz, \\ \dot{y} &= x + (2a-1)y + yz, \\ \dot{z} &= -az - (x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Nel sistema (3.1.8) a $a = \frac{1}{2}$, c'è biforcazione Hopf alla formazione di oscillazione stabile con parametri e $a_0 = \frac{1}{2} T_0 = 2\pi$.

Plasma. È noto che il plasma è costituito da gas o liquido che gli atomi sono parzialmente o completamente privati del guscio dell'elettrone, cioè sono ionizzati. Nel plasma si osserva un insieme di varie non stabilità. La ricerca dell'instabilità del plasma e il controllo di uno stato e i movimenti del plasma sono molto importanti per una soluzione del problema della sintesi termonucleare operata.

Uno dei modelli al plasma con comportamento caotico per una ricerca sulla controllabilità del plasma e la soppressione del caos è rappresentato dall'equazione tridimensionale di uno sguardo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax - b_1(x+z)y^2, \\ \dot{y} &= -a_0y + b_2(x^2 - z^2)y, \\ \dot{z} &= -a_0z + b_1(x+z)y^2 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

dove x, y, z sono di ampiezza dell'onda riflessa, le onde un rating e un'onda diretta, sono a, a_0, b_1, b_2, b_3 parametri.

La differenziazione viene effettuata su coordinate spaziali lungo la direzione di distribuzione delle onde. $a_0 = 1$ Nel sistema (3.1.9) si osserva il comportamento caotico.

Negli ultimi decenni molti ricercatori, che si occupano di questioni di geologia, geofisica, geoecologia trovano molti fenomeni in questi settori caratteristici di sistemi sinergici, vale a dire gli effetti dell'auto-organizzazione sono spontanei educazione spaziale e spaziale - strutture temporanee attraverso varie biforcazioni e incidenti in questi sistemi. Così, una litosfera e le sue parti separate sono sistemi aperti dinamici non lineari che si scambiano tra loro e con l'ambiente sostanza ed energia.

L'ambiente tettonico è vario, non continuo, e contiene il vuoto (un tempo, crepe, ecc.) riempito di fluidi (liquidi e gas). Ci sono manifestazioni di laminazione e un rigonfiamento di scale diverse. Le pieghe di formazione sono caratterizzate da un ritmo spaziale di ordine diverso. Si notano forme ondulate di superfici di rottura.

È noto che la Terra come corpo spaziale si sviluppa nel tempo. La ricezione costante di energia in lei dall'esterno, è la fonte principale che il decadimento radioattivo, la luce del sole e i processi di marea sono la ragione dello sviluppo temporaneo della Terra.

L'afflusso di energia dall'esterno crea le condizioni per il trasferimento di massa termica della sostanza terrestre, causando il movimento della sostanza delle superfici e nel sottosuolo di un pianeta. La laminazione e un blocco di scale diverse con struttura gerarchica delle dimensioni dei blocchi è mostrato. La legge di ripetibilità dei terremoti di Guttenberg e Richter agisce come perturbazione della distribuzione gerarchica dei blocchi di una litosfera per le dimensioni.

Così, l'ambiente geofisico rappresenta il sistema dinamico aperto auto-organizzato e i processi geofisici, anche sismici, sono processi non lineari.

Il processo di auto-organizzazione è legato all'emergere nell'ambiente attivo, ad esempio, di uno strato sismoattivo, le strutture dissipative localizzate che si caratterizzano per la non stazionarietà, l'impulsività, la complessità e il degrado.

Nei processi sismici si osservano le strutture tipiche dell'auto-organizzazione: le onde a spirale o i triangoli focalizzati; i vortici o i poligoni focalizzati; i "percorsi" sismici che avvengono in modo unidirezionale ("catene") e in avanti e a ritorno ("pendoli"), la sismicità ad anello ("zone calme" e "vuoti" sismici) e gli sciami sismici.

I movimenti caotici sono possibili anche in molti elementi della fisica di un corpo solido, questo negli oscillatori di Gunn, sistemi con diodi a tunnel e cupola dipolare.

3.1.3. Chimica

Le oscillazioni caotiche delle reazioni chimiche sono state studiate per la prima volta nel 60° e 70° secolo. Il modello più conosciuto dove ha trovato i movimenti caotici che il modello brusselyator era. Questo modello descrive la distribuzione nello spazio e il cambiamento dei reagenti di una classe piuttosto ristretta di reazioni chimiche nel tempo. Il modello di un brusselyator è per molti aspetti studiato dalla scuola di termodinamica di Bruxelles del premio Nobel I. Prigogin.

Il modello di un brusselyator è stato offerto da I. Prigogin e R. Lefebvre nel 1968. Per una ricerca di strutture dissipative senza equilibrio dei sistemi

chimici. Questo modello mostra chiaramente come il sistema di nonequilibrio possa diventare instabile e passare a movimenti oscillanti.

In un aspetto adimensionale l'equazione di un brusselyator ha un aspetto

$$\dot{x} = a - (b+1)x + x^2y, \quad \dot{y} = bx - x^2y \quad (3.1.10)$$

dove a e b sono parametri.

A $b = a^2 + 1$ nel sistema (3.1.10) c'è biforcazione Hopf alla formazione di oscillazioni periodiche a $b > a^2 + 1$.

Il seguente esempio di sistemi chimici con comportamento sinergico è il sistema di Rössler, descritto dalle equazioni

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = bx + cz + xz \quad (3.1.11)$$

dove a, b, c parametri positivi. In questo sistema due punti speciali di $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, e $x_0 = c - ab, y_0 = b - c/a, z_0 = c/a - b = -y_0$.

Qui sono possibili due opzioni di movimenti caotici: a spirale e a vite.

Sistema Belousov-Zhabotinsky. Il modello offerto da Belousov (1959) e Zhabotinsky (1964) descrive la reazione chimica di ossidazione catalitica dell'acidità melanovica $CH_2(COOH)_2$. La reazione avviene in soluzione acquosa ed è facilmente realizzabile in un pallone a semplice miscelazione di alcuni reagenti in certa concentrazione. Il comportamento oscillatorio nel sistema può essere rivelato al variare della concentrazione di CE_4^+ causando il cambiamento di colorazione della soluzione da incolore a giallo e colori più brillanti.

L'opzione di reazione di Belousov-Zhabotinsky sul modello di Fild-Kyoresh-Noyes è descritta dalle equazioni

$$\dot{x} = k_1ay + k_2ay - k_3xy - 2k_4x^2, \quad \dot{y} = -k_1ay - k_3xy + 1/2 k_5bz \quad (3.1.12)$$

$$\dot{z} = 2k_2ascia - k_5bz,$$

dove $k_1 = 1.28; k_2 = 8.0; k_3 = 8.0 \cdot 10^5; k_4 = 2.0 \cdot 10^3; k_5 = 1.0a = 0.06; b = 0.02; 0.5 < f < 2.4$.

In Belousov-Zhabotinsky reazione varie oscillazioni, tra cui caotico si trovano varie oscillazioni.

Nel sistema (3.1.12) a seconda di due o tre punti speciali, uno dei quali è l'inizio delle coordinate (0,0,0). Le oscillazioni caotiche avvengono a $0.9208 < f < 1.0808$, la biforcazione a $f = 0.9208$ e $f = 1.0808$.

In aspetto applicato c'è interesse nel controllo delle oscillazioni nel sistema Belousov-Zhabotinsky, come per la soppressione delle oscillazioni caotiche, e l'eccitazione del modo oscillatorio o caotico.

3.1.4. Biologia

Da tutti gli oggetti naturali gli esseri viventi, senza dubbio, e funzionalmente e morfologicamente sono i più organizzati. Gli esseri viventi sono strutture storiche in grado di tenere in memoria e una forma, cioè informazioni sull'evoluzione storica di questi esseri. Funzionano lontano dall'equilibrio. L'organismo riceve continuamente energia e sostanza e anche informazioni come unità di memoria dal mondo circostante.

A livello cellulare degli esseri viventi, si osserva anche il non equilibrio, per esempio sul mantenimento degli ioni di sodio e potassio in una gabbia e nell'ambiente non cellulare.

Le ricerche stabiliscono una connessione tra le forme fisiche e chimiche dell'organizzazione delle strutture e l'ordine biologico. Uno degli esempi di tali ricerche è lo sviluppo di un'ameba come il Dictyostelium discoideum. Si rivela che in sostanza lo sviluppo di questo organismo vivente si riduce a un fenomeno di transizione simile alla reazione di Belousov-Zhabotinsky, e si nota la transizione dalla vita, monocellulare a uno stadio di sviluppo

multicellulare. Il ciclo di vita di questi organismi è descritto in molti riferimenti sulla sinergica.

Lo sviluppo evolutivo è anche possibile considerare come educazione tutte le nuove e nuove strutture macroscopiche, come risultato della sopravvivenza dei tipi più adattati di biomolecole e organismi in generale. Credere che la biomolecola avtokatalitica a scapito di una catalisi ciclica in ipercicli razza. Le ricerche mostrano che tale selezione in combinazione con le mutazioni può portare allo sviluppo evolutivo.

3.1.5. Ecologia

Il non equilibrio, il caos e la formazione di comunità di popolazioni di una vita vegetale e animale sono ecologia caratteristica. Ad esempio, la formazione di zone endemiche di vegetazione. Portano a cambiamenti macroscopici anche l'inquinamento ambientale che può portare alla scomparsa dell'intera specie di un animale e della flora.

Il modello più semplice di un ecosistema è il modello "predatore-preda" offerto da A. Lotka e V. Volterra negli anni Venti del secolo scorso è descritto anche dalle equazioni del secondo ordine:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy, \quad \dot{y} = k\beta xy - my, \quad (3.1.13)$$

dove $x=x(t)$, $y=y(t)$ sono il numero di popolazioni secondo le prede e i predatori, α e β sono le prede multiziane e trofiche costanti, k è l'efficienza di lavorazione della biomassa della preda nella biomassa di un predatore, m è il coefficiente di mortalità naturale di un predatore.

Modello più difficile di sistema ecologico che descrive il sistema con lo sviluppo di popolazioni di un insetto della farina di *Tribolium* è rappresentato il cosiddetto modello LPA:

$$L_{n+1} = bA_n \exp(-a_1 L_n - a_2 A_n),$$

$$P_{n+1} = L_n(1 - C_1),$$

(3.1.14)

$$A_{n+1} = P_n \exp(-a_3 A_n) + A_n(1 - C_2),$$

dove L e P sono secondo il numero delle larve allevate e non allevate, A è il numero di individui, pronti per la riproduzione, $a_1, a_2, a_3, b, c_1, c_2$ sono i parametri.

Le ricerche osservano che nel sistema (3.1.14) si osservano: gli stati stabiliti, le oscillazioni periodiche, quasiperiodiche e caotiche a vari valori di parametri. Si studiano anche le possibilità di controllo dei movimenti di questo sistema per il mantenimento di una certa quantità di insetti.

In conclusione di questa sezione è possibile notare che l'auto-organizzazione è caratteristica di moltissimi fenomeni e sistemi naturali e lo studio della natura delle regolarità di questi fenomeni e sistemi permette di prevedere e di operare in una certa misura questi sistemi al fine di parare gli effetti indesiderati e rafforzare le conseguenze positive dell'auto-organizzazione.

3.2. 3.2. Auto-organizzazione nei sistemi tecnici

3.2.1. 3.2.1. Sistemi meccanici

In molti sistemi tecnici ci sono diverse oscillazioni, in particolare periodiche e caotiche che devono essere previste e nei casi necessari vengono fatte funzionare.

Queste oscillazioni si presentano come sotto i termini di funzionamento di meccanismi e sistemi, e un'immagine indesiderata, a causa di varie oscillazioni, impedimenti, squilibrio dei meccanismi e delle parti rotanti, vibrazioni nei progetti, ecc.

Esempio classico di sistemi auto-oscillati e non solo elettrici, ma anche di un'ampia classe di sistemi, in particolare di sistemi meccanici ad attrito, è il sistema descritto dall'equazione Van der Pol

$$\ddot{x} - \mu \dot{x}(1 - \beta x^2) + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.2.1)$$

dove $x \in R$ è la coordinata del movimento, μ, β, ω_0 sono parametri.

Al sistema (3.2.1) a piccoli μ ci sono autooscillazioni quasiperiodiche, e a grandi μ le autooscillazioni hanno carattere di rilassamento (esplosivo).

L'equazione Van der Pol è l'esempio più studiato di sistemi oscillatori.

Il seguente esempio di sistemi meccanici in cui sono possibili movimenti più difficili è l'esempio del rotatore meccanico con momento d'inerzia di J e attenuazione μ .

L'equazione del rotatore ha un aspetto

$$J\dot{\omega} + \mu\omega = \mu\omega_0 + F(\varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (3.2.2)$$

dove φ è un angolo di rotazione, $\delta(t - n\tau)$ è la funzione delta, tale che a $n\tau - \varepsilon < t < n\tau + \varepsilon, \varepsilon \ll 1$:

$$J(\omega^+ - \omega^-) = F(\varphi(n\tau)), \quad F \equiv F_0 \sin\varphi. \quad (3.2.3)$$

Nel sistema (3.2.2) come mostrano le ricerche a certi valori di parametri c'è uno strano attrattore.

Flutter sono le oscillazioni aeroelastiche. Il flutter sono le oscillazioni causate da una corrente di liquido su una piastra elastica. Nei sistemi descritti dal fenomeno del flutter in un'apparecchiatura avia e spaziale si osservano i movimenti aciclici e caotici.

Il sistema di "flutter" è descritto dalle equazioni

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + [1 - a + x^2 + 4y^2]x - Ay = 0, \quad \ddot{y} + \mu\dot{y} + 4[4 - a + x^2 + 4y^2]y - Ax = 0, \quad (3.2.4)$$

dove a è la quantità di tensione nel piano della piastra, A è la quantità proporzionale alla pressione dinamica di un flusso prima di una piastra, μ - parametro.

Il sistema di controllo meccanico descritto dalle equazioni

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + F(x) = -z, \quad \dot{z} + az = b_1[x - x_f(t)] + b_2\dot{x}, \quad (3.2.5)$$

dove z è una variabile di feedback, b_1, b_2 sono coefficienti di feedback per situazione e sulla velocità, $x_f(t)$ è un'influenza non lineare nel sistema.

Nel sistema considerato sono possibili sia oscillazioni periodiche su un ciclo limite, sia oscillazioni caotiche, in particolare a $F(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - c)$.

3.2.2. 3.2.2.1. Sistemi elettrici ed elettronici

Nell'ultimo decennio in letteratura sono apparse molte pubblicazioni riguardanti questioni di auto-organizzazione e l'emergere di vari movimenti difficili nei sistemi elettrici ed elettronici. Si trovano sia i movimenti periodici, quasiperiodici, sia i movimenti caotici nei sistemi del tipo considerato.

E' noto che nelle apparecchiature elettriche le conclusioni relative alla possibilità di emergere di movimenti caotici difficili, l'analisi delle biforcazioni e la determinazione dei parametri delle oscillazioni sono piuttosto semplicemente fattibili. Pertanto, molti esempi "classici" noti di oscillazioni e movimenti caotici (nei sistemi di Chua, Lorenz, Rössler, ecc.) sono quasi incarnati nei sistemi elettrotecnici.

Esempio classico di sistemi elettrici in cui si osservano oscillazioni caotiche, il circuito di Chua è descritto dal sistema delle tre equazioni:

$$\dot{x} = p(y - f(x)), \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = -qy, \quad (3.2.6)$$

dove p e q sono parametri, $f(x)$ è la funzione non lineare determinata da un rapporto

$$f(x) = M_1x + 0.5(M_1 - M_0)(|x + 1| - |x - 1|),$$

dove M_1, M_0 sono parametri.

A determinati valori dei parametri, nel sistema (3.2.6) sono possibili oscillazioni caotiche, per esempio a $p = 9; q = 14.3; M_1 = -6/7; M_0 = 5/7$.

Allo stesso tempo,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{6}{7}x + \frac{11}{7}, & x < -1, \\ -\frac{17}{7}x, & -1 \leq x \leq 1, \\ -\frac{6}{7}x - \frac{11}{7}, & x > 1. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Ci sono tre punti speciali:

$SP1 (0,0,0,0)$; $SP2,3 (\pm 11/6, 0, \pm 11/6)$.

Il circuito di Chua, ovvero le modalità caotiche di questo schema sono utilizzate in vari dispositivi, ad esempio come generatore del caotico direttore di controllo di un segnale nel dispositivo di modulazione caotica di larghezza d'impulso per l'eliminazione delle strisce di luce e buio alternate viste sulle lampade fluorescenti.

Il convertitore elettromeccanico che è sistema, due pezzi è la parte elettrica non lineare descritta dall'equazione di Duffing e una parte meccanica, che è sistema oscillatorio lineare è anche caratterizzata dalla possibilità di oscillazioni caotiche.

Il sistema del convertitore elettromeccanico è descritto dalle equazioni:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C_0} + \alpha q^3 + LH\dot{z} = \text{un} \cos \omega t, \quad m\ddot{z} + \rho\dot{z} + kz - lH\dot{q} = 0, \quad (3.2.8)$$

dove L e R sono rispettivamente induttanza e resistenza attiva in una parte elettrica; a , ω sono ampiezza e frequenza della tensione armonica esterna; l è l'estensione del sito di interazione della tensione del campo magnetico di H con due nuclei mobili su cui il corpo con una massa di m si fissa; k è coefficiente di elasticità di una molla; ρ è coefficiente di attrito viscoso; q è una carica sui rivestimenti del condensatore, tensione da cui i rivestimenti non dipendono linearmente dalla quantità di questa carica $U_c = q/C_0 + \alpha q^3 C_0$ è la parte lineare della caratteristica del condensatore; α è il parametro che definisce la non linearità della caratteristica del condensatore; \dot{q} è corrente in una parte elettrica; z è la coordinata del movimento in una parte meccanica del sistema.

Molti dispositivi di elettronica e strutture informatiche sono costruiti su elementi semiconduttori (dispositivi) di vario grado di integrazione, poiché i

componenti discreti sono diodi e transistor, fino ai moderni chip integrati, *IMS* e *GBSI*.

Pertanto, la ricerca di vari fenomeni di auto-organizzazione degli elementi semiconduttori è molto importante per lo sviluppo dei moderni dispositivi elettronici di varia complessità, dai telefoni cellulari e dispositivi scientifici o medici ai supercomputer e alle reti di computer.

Le ragioni principali per la mancanza di stabilità e di equilibrio nei semiconduttori sono i processi di generazione e la ricombinazione di portatori di una carica o i cosiddetti *processi GD* che portano in alcuni dispositivi a semiconduttore. Per esempio nei diodi a tunnel, nei diodi di Gunn, nei diodi volt-ampere (*ADC*), nei dispositivi multistrato come tiristori, diodi *p-n-p-n*, diodi *p-i-n*, ecc. a caratteristiche di volt-ampere significativamente non lineari come *NDC* (conducibilità negativa e differenziale) di due tipi di tipo *N* e di tipo *S*.

Il caos nei semiconduttori può sorgere in vari modi: o a causa della reattività in un circuito esterno, o a causa della propria instabilità di un elemento con *NDC*.

3.2.3. Laser

Il processo di auto-organizzazione è caratteristico anche per i laser che emettono radiazioni luminose coerenti in condizioni di non equilibrio. È noto che i laser rappresentano un tipo speciale di lampade che consistono di un nucleo di cristallo (laser a stato solido) o del tubo di vetro riempito di gas (laser a gas).

Se per eccitare o "pompare" dagli atomi esterni di cui il corpo funzionante del laser è costituito, allora emettono onde luminose. Alla bassa potenza di "potenza nominale" queste onde non sono correlate, come nella radiazione, dalla normale lampada di illuminazione. Alla grande potenza della "potenza nominale" pari ad alcune critiche, gli atomi emettono onde luminose

puramente sinusoidali, cioè gli atomi separati lavorano in modo strettamente correlato o comunque auto-organizzati. Con un eccesso di potenza di un valore nominale del secondo valore critico, il laser inizia ad emettere periodicamente impulsi intensivi e brevi. In varie condizioni l'emissione di luce può diventare caotica o turbolenta, cioè caotica.

Nel sistema dei due laser diventa fattibile il sistema ottico bistabile applicabile nei dispositivi ottici memorabili e logici dei computer ottici. La bistabilità, e anche il caos, sorge e quando il laser è collegato con il cosiddetto assorbitore sated, cioè materiale il cui coefficiente di trasmissione diventa molto grande ad alta intensità di luce. Nell'uso moderno dei sistemi laser i problemi di controllo delle radiazioni laser allo scopo di sopprimere il comportamento caotico (pluriennale) dei laser mediante feedback vengono risolti con ritardo e anche il controllo aperto (programma).

3.2.4. Alcuni esempi dei fenomeni di auto-organizzazione sono noti nei sistemi informatici: nel sistema di calcolo parallelo dei computer; nel riconoscimento delle immagini per mezzo del computer; in qualsiasi creazione di sistemi affidabili, anche sulla base di computer da elementi inaffidabili (più precisamente da elementi non sufficientemente affidabili).

3.2.5. La crescente applicazione è accolta da alcune caratteristiche positive dei movimenti caotici e delle oscillazioni dei moderni sistemi di comunicazione.

Questi vantaggi del caos dinamico sono causati dalle seguenti caratteristiche:

si tratta di un'ampia striscia, i segnali caotici hanno un ampio raggio d'azione continuo;

questa è la complessità della struttura dei segnali caotici che permette di creare segnali assolutamente diversi a piccoli cambiamenti delle condizioni di

ingresso. Tale proprietà dei segnali caotici è possibile utilizzarla in crittografia;

si tratta di ortogonalità (non correlazione) dei segnali dei generatori caotici causati dall'irregolarità dei segnali caotici. Questa proprietà è applicabile nei sistemi di comunicazione multiutente quando la stessa gamma di frequenze viene utilizzata da più utenti contemporaneamente.

Il caos dinamico riceve applicazione in tali direzioni dei sistemi di comunicazione come: sincronizzazione del ricevitore e del trasmettitore, mascheramento e recupero dei messaggi filtraggio del rumore, sviluppo di algoritmi di codifica, decodifica, ecc.

È noto il sistema in cui viene utilizzato il modello di Lorenz per la trasmissione dei messaggi. In questo sistema il trasmettitore è descritto dalle equazioni:

$$\dot{x} = G(y - x), \quad \dot{y} = \rho x - y - 20xz, \quad \dot{z} = 5xy - b_1 z, \quad (3.2.9)$$

dove x, y, z sono le coordinate del sistema corrispondenti alla tensione alle uscite degli amplificatori, contemporaneamente nel sistema $G = 16, \rho = 45.6, b_1 = 4.0$.

Le equazioni del sistema di ricezione del messaggio sono descritte anche dalle equazioni di Lorenz di uno sguardo (3.2.9) dove rispettivamente gli stati variabili

x_s, y_s, z_s , parametri uguali, come in (3.2.9).

Il sistema del ricevitore è l'osservatore asintotico del trasmettitore (3.2.9):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{vmatrix} x - x_s \\ y - y_s \\ z - z_s \end{vmatrix} \rightarrow 0.$$

Con il trasferimento di un segnale binario del messaggio, il coefficiente di b_1 del trasmettitore cambia, accettando $b_1 = 4,4$ valore che corrisponde a "1" mentre il valore di riferimento di $b_1 = 4,0$ significa "0". Al cambio di b_1 da 4,0 a 4,4 il livello del segnale di disallineamento sulla coordinata $x, e_x = x -$

x_s , come per il ricevitore $b_2 = 4.0$ il sistema del ricevitore aumenta notevolmente. È definito dalla media di $e_x^2(t)$ quale segnale "1" o "0" è stato trasferito.

Altri sistemi con dinamiche caotiche, in particolare il sistema di Chua azionato, sono applicati anche alla trasmissione di messaggi con l'uso di generatori caotici. Le possibilità di utilizzo di sistemi con caos per i sistemi di comunicazione sono molto ampie e prospettiche.

3.2.6. Recentemente si ritiene che si offrano prospettive allettanti nell'uso di dinamiche caotiche per i sistemi di **archiviazione e codifica delle informazioni**. Questi sistemi di elaborazione delle informazioni dovrebbero essere costruiti sulla base dei cosiddetti "processi caotici". Un certo numero di sviluppi in questa direzione sono brevettati negli USA e nella Federazione Russa.

3.2.7. L'ampia applicazione del caos e le idee di auto-organizzazione ricevono nell'**industria chimica** quando reazioni come Belousov-Zhabotinsky o Rössler, e anche possibilità di dinamiche caotiche. Così il caos riceve applicazione nei processi di caotico hashing di liquidi e sostanze sciolte. L'hashing di alta qualità è un processo importante nelle camere di combustione, negli scambiatori di calore, nei reattori miscelatori ad azione continua e in altre produzioni.

3.2.8. Molto prospettico applicazioni delle idee di auto-organizzazione e dinamiche caotiche sono mostrati molti ricercatori e sviluppatori delle **attrezzature spaziali**, in particolare per il controllo.

Ad esempio, il problema della previsione del movimento caotico e del controllo da parte sua in un giroscopio è risolto. È noto che un girostato questo corpo solido con tre gradi di libertà di rotazione in cui ci sono uno o più volani.

Come in generale, generalmente il girostato è descritto dalle equazioni non lineari e nelle applicazioni pratiche è aperto all'ambiente esterno ed è oggetto di una forte indignazione casuale, nel sistema di un girostato sono possibili i movimenti caotici, il cui controllo è molto importante nell'equipaggiamento missilistico e spaziale.

Così, si studia il movimento del satellite sotto l'influenza simultanea dei campi gravitazionali e magnetici della Terra. Si considera il satellite che ha un proprio campo magnetico costante. L'equazione del movimento di tale satellite prende una forma:

$$k\ddot{x} + k\dot{x} + 3\omega_c^2(B - A) \sin x \cos x + \mu_m \rho I r^{-3} (2 \sin x \cos x \omega_c t + \sin x \cos x \omega_c t) = M_c(t),$$

(3.2.10)

dove $x=x(t)$ un angolo di liberazione del satellite nel piano dell'orbita; ω_c è la velocità angolare del movimento del satellite su un'orbita; k è il coefficiente di smorzamento del satellite; A, B sono i momenti d'inerzia principali del satellite ($B > A$); μ_m è una costante magnetica; r e ρ sono il raggio e l'inclinazione di un'orbita; I è la quantità del momento magnetico del satellite; $M_c(t)$ è il valore del momento operativo.

Nel sistema (3.2.10) in alcune aree dei parametri il movimento angolare del satellite a $M_c \equiv 0$ ha un carattere caotico.

In questo caso, naturalmente, è necessaria la soppressione delle oscillazioni caotiche indesiderate. Tale problema viene risolto con l'aiuto di un feedback con un'uscita e con un derivato.

Alcune aree ed esempi di applicazioni di auto-organizzazione e di caos nei sistemi tecnici sono mostrati in questa sezione, ma il numero di tali applicazioni cresce rapidamente alla fine e molte opportunità potenziali di tali applicazioni non sono esaurite.

FOR AUTHOR USE ONLY

CAPITOLO 4. TEORIA DELLA RUGOSITÀ E DELLE BIFORCAZIONI DI

FOR AUTHOR USE ONLY

SISTEMI

4.1. Proprietà della rugosità dei sistemi dinamici

La proprietà della rugosità è una delle proprietà fondamentali dei sistemi dinamici. Nella letteratura straniera moderna sui sistemi dinamici la proprietà della rugosità è chiamata proprietà di stabilità strutturale. In questo lavoro ci atterremo al termine "rugosità".

Già la definizione più generale del concetto di "rugosità dei sistemi dinamici" (ulteriori DS) è il DS liscio che ha proprietà: per qualsiasi $\varepsilon > 0$ ci sarà tale $S > 0$ che a qualsiasi perturbazione di DS remoto da lei in C^1 una metrica non più che su S , c'è "omeomorfismo" dello spazio di fase (o varietà) che sposta punti di nessun sistema di perturbazione nelle traiettorie corrispondenti del sistema di perturbazione.

La definizione data sopra è la definizione di un concetto di rugosità del DS "in stretto", cioè di rugosità in un certo spazio topologico. In concetto più ampio la rugosità assume proprietà di conservazione di alcune proprietà del sistema a certe piccole perturbazioni.

Il concetto di ruvidità è stato introdotto per la prima volta dagli eccezionali scienziati sovietici A.A. Andronov e L.S. Pontryagin.

Il concetto di rugosità con il requisito di "omeomorfismo" della perturbazione e nessun sistema di perturbazione a ε per DS grezzo porta il nome di rugosità secondo Andronov - Pontryagin, a differenza di un concetto di rugosità inserito dal matematico brasiliano M. Peixoto quando "omeomorfismo" non è richiesto a ε piccolo.

Di solito la rugosità è considerata in alcune varietà chiuse o in zone compatte con bordo liscio.

Come dalla considerazione della rugosità dei sistemi si suppone che la perturbazione del DS piccolo in senso stretto C^1 , è importante un concetto di

rugosità locale. Ruvidità locale di qualche insieme invariante compatto, F di DS liscio questa proprietà per mantenere tutte le proprietà topologiche in alcune vicinanze di F a qualsiasi perturbazioni piuttosto piccole del sistema.

Se F è la posizione di equilibrio del "flusso" (o un punto immobile di "cascata", cioè DS con tempo discreto), allora la rugosità locale significa mantenere le proprietà topologiche del sistema alla linearizzazione nel punto F .

Condizioni necessarie e sufficienti di rugosità locale per le disposizioni di equilibrio o punti immobili (punti speciali) teorema di risposta Grobman - Hartman, noto della teoria del DS. Condizioni simili sono formulate anche per traiettorie periodiche e "insiemi iperbolici" che sono considerati più avanti in questo capitolo.

4.1.2. Ruvidità dei sistemi dinamici nella teoria moderna

Nell'affermazione generale la rugosità o la stabilità strutturale dei sistemi dinamici (DS) nella teoria moderna è formulata dalle seguenti definizioni.

Definizione 4.1.1. Per questo numero $z \geq 0$ due mappature C^z mappature $f: M \rightarrow M$ e $g: N \rightarrow N$ sono chiamate "interfacciate topologiche" se esiste un tale omeomorfismo $\varphi: M \rightarrow N$ che $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$.

Definizione 4.1.2. La riflessione $g: N \rightarrow N$ è chiamata mappatura "fattore" (o "un fattore topologico") $f: M \rightarrow M$ se esiste una tale mappatura continua surgettiva $\varphi: M \rightarrow N$ che $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. $R \varphi$ è chiamato "semi-interfaccia".

Definizione 4.1.3. C^z è la mappatura f si chiama " C^m " è approssimativo ($1 \leq m \leq z$) se esiste una tale vicinanza \mathcal{U} mappature f in C^m , topologia che ogni $g \in$ mappatura U è topologica accompagnata da f .

Definizione 4.1.4. C^z La mappatura è chiamata " C^m " è fortemente ruvida se è strutturalmente stabile e inoltre per qualsiasi mappatura $g \in U$ può essere di scegliere l'omeomorfismo di interfacciamento $\varphi = \varphi_g$ che, cosa nel modo in

cui $\varphi_g \varphi_g^{-1}$ si incontrano in modo uniforme a una mappatura identica all'approssimarsi di $g < f$ in C^m topologia.

Definizione 4.1.5. C^r è il diffeomorfismo è chiamato "stabile topologico" (o "ruvido" se è un fattore di qualsiasi omeomorfismo piuttosto vicino a lui in topologia uniforme C_0).

Per quanto riguarda i flussi si applicano le seguenti definizioni.

Definizione 4.1.6. C^r è un flusso φ_t è chiamato " C^m ruvido" ($1 \leq m \leq r$) o rispettivamente " C^m è fortemente ruvido" se qualsiasi flusso piuttosto vicino a φ_t in topologia C_m, C_0 è

traiettoria equivalente a lui C o rispettivamente se, inoltre, l'omeomorfismo discusso può essere scelto piuttosto vicino all'identità per piccole perturbazioni.

Definizione 4.1.7. Stream $\psi^t: N \rightarrow N$ è chiamato "un fattore orbitale" melassa $\varphi: M \rightarrow M$ se esiste il continuo surgettivo $f: M \rightarrow N$ riflessione che trasferisce le orbite φ_t alle orbite ψ_t . C^r è un flusso φ_t è chiamato "stabile topologico" ("grezzo") se è il fattore orbitale di un qualsiasi flusso continuo piuttosto vicino a lui in topologia uniforme.

In tutte le definizioni formulate sopra la compattezza degli spazi di fase corrispondenti è insignificante. Inoltre, queste definizioni sono giuste anche per i casi in cui per alcuni punti il sistema dinamico è definito solo su un intervallo di tempo finale, come, ad esempio, nelle vicinanze di un punto di riflessione lineare iperbolico immobile. Tale indirizzo porta a concetti di ruvidità locale come è dato sopra.

Per un Torus bidimensionale l'affermazione è giusta.

Dichiarazione 4.1.1. Qualsiasi iperbolico automorfismo lineare lineare automorfismo bidimensionale torus C^1 è fortemente ruvido. Una dichiarazione simile anche per qualsiasi m -misurato ($m \geq 2$) il toro è giusto.

Un concetto importante per la determinazione delle proprietà di rugosità del DS è il concetto di "punto iperbolico".

Definizione 4.1.8. Il punto di p è chiamato "un punto periodico iperbolico" di f diffeomorfismo se $(Df^n)_p: T_p M \rightarrow T_p M$ è una mappatura lineare iperbolica.

La sua orbita è chiamata "un'orbita periodica iperbolica".

Definizione 4.1.9. La mappatura lineare R_n è detta "iperbolica" se i valori assoluti di tutti i suoi autovalori sono diversi dall'unità.

Per DS con tempo continuo. Si suppone che il campo vettore liscio sia definito in \mathcal{U} e che l'orbita del punto $p \in \mathcal{U}$ sia in \mathcal{U} .

Definizione 4.1.10. Su $\xi(p)=0$ è il punto di p è chiamato "un punto iperbolico immobile" (locale) flusso φ_t , generato dal campo vettore ξ , se $(D\varphi_t)_p: T_p M \rightarrow T_p M$ è la mappa lineare iperbolica per ogni $t \neq 0$.

All'indirizzo $\xi(p) \neq 0$ punto di p è chiamato "un punto periodico iperbolico" del periodo t per un flusso φ_t se $\varphi_t(p) = p$ e l'operatore lineare $(D\varphi_t)_p: T_p M \rightarrow T_p M$ ha l'unità come autovalore semplice e allo stesso tempo non ha altri autovalori sul modulo pari all'unità.

Per l'analisi del teorema di rugosità locale Hartman - Grobman sull'associatività topologica della mappatura della parte lineare in prossimità di punti iperbolici immobili è molto importante.

Dichiarazione 4.1.2. (teorema Hartman - Grobman). Lasciate che i set di $U \subset R^n$ sia continuo e non differenziato, anche $O \in U$ è un punto iperbolico immobile di f . Poi ci sono tali vicinanze di U_1, U_2, V_1, V_2 punto O e tale omeomorfismo $\varphi: U_1 \cup U_2 \rightarrow V_1 \cup V_2$ che $f = \varphi^{-1} Df \varphi$ su U_1 , cioè la seguente tabella è commutativa:

$$\begin{array}{ccc} f: U_1 & \rightarrow & U_2 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Df|_{U_1} & \rightarrow & V_2 \end{array}$$

La rugosità locale è definita dalla seguente dichiarazione e dall'indagine da parte sua.

Dichiarazione 4.1.3. Due mappature di compressione lineari reversibili sono topologicamente accompagnate da un identico orientamento.

Conseguenza 4.1.1. Che la riflessione $f: U \rightarrow R^n$, $g: V \rightarrow R^n$, abbia punti iperbolici immobili di $p \in U$ e $q \in V$ rispettivamente,

$$\dim E^+(Df_p) = \dim E^+(Dg_q), \dim E^-(Df_p) = \dim E^-(Dg_q), \quad (4.1.1)$$

$$\text{peccato } n \det Df_p | E^-(Df_p) = \text{peccato } n \det Dg_q | E^-(Dg_q). \quad (4.1.2)$$

E poi ci sono le vicinanze di $U_1 \subset U_2$ e $V_1 \subset V_2$ e l'omeomorfismo

$\varphi: U_1 \rightarrow V_1$, cosa $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

In (4.1.1.), (4.1.2.) gli spazi di $E^+(\cdot)$ ed $E^-(\cdot)$ sono definiti come le somme dirette zero - spazi E_λ dei corrispondenti autovalori $\lambda(\cdot)$, cioè spazi di vettori $\lambda \in R^n$, soddisfacente ad un rapporto

$$((\cdot) - \lambda I)^k = 0, \quad (4.1.3)$$

dove k è un po' intero e anche zero spazi E_λ , $\bar{\lambda}$ in caso di in un complesso di autovalori interfacciato $\bar{\lambda}, \lambda$:

$$E^-(\cdot) = \bigoplus E_\lambda \oplus E_{\lambda\bar{\lambda}}, \quad (4.1.4)$$

$$E^+(\cdot) = \bigoplus E_\lambda \oplus \bigoplus E_{\lambda\bar{\lambda}}. \quad (4.1.5)$$

Così, qualsiasi C^1 è un diffeomorfismo localmente ruvido vicino a qualsiasi punto immobile (un punto speciale) solo nel caso in cui, quando un punto immobile iperbolico.

Per quanto riguarda la ruvidità delle trasformazioni a "ferro di cavallo", le trasformazioni sono abbastanza successive.

Dichiarazione 4.1.4. Lasciate che $\Lambda = \Pi \text{fn}(\Delta)$ è ncz il diffeomorfismo massimo C^1 è invariante relativamente $f: N \rightarrow M$ sottoinsieme ferro di cavallo. Poi per qualsiasi mappatura f' , piuttosto vicino a f nella topologia C^1 , c'è tale invariante set Λ e tale omeomorfismo

$\varphi: \Lambda \rightarrow \Lambda$, $\text{cioè } \varphi \circ f | \Lambda = \varphi$.

A proposito di rugosità degli insiemi iperbolici abbastanza.

Dichiarazione 4.1.5. (Forte ruvidità delle proprietà iperboliche). Let $\Lambda \subset M$ è un insieme iperbolico di un diffeomorfismo di $f: N \rightarrow M$.

Quindi per qualsiasi prossimità aperta $V \subset N$ imposta Λ e qualsiasi $\delta > 0$ c'è $\epsilon > 0$ che se

$f': N \rightarrow M$ e $dcl(f \circ f') < \epsilon$, sarà un insieme iperbolico $\Lambda' = f^{-1}(\Lambda) \subset V$ diffeomorfismo f' e tale omeomorfismo $\varphi: \Lambda' \rightarrow \Lambda$, $dco(I, \varphi - I) < \delta$, cosa $\varphi \circ f' | \Lambda' = f | \Lambda \circ \varphi$. Tale omeomorfismo φ si unisce se δ è abbastanza piccolo.

Conseguenza 4.1.2. Diffeomorfismo Anosov siamo rudi. Interfaccia solo se è piuttosto vicino a una mappatura identica.

Per i flussi anche veramente successivi.

Dichiarazione 4.1.6. Lasciamo che $\Lambda \subset M$ - un insieme iperbolico di un flusso liscio φ_t su M . Poi per ogni vicinanza aperta V imposta Λ e tutti $\delta > 0$ esiste anche $\epsilon > 0$ che se ψ_t è un altro flusso liscio e $dcl(\varphi_t - \psi_t) < \epsilon$ allora esiste l'insieme invariante Λ' per ψ e l'omeomorfismo $\varphi: \Lambda \rightarrow \Lambda'$, dove $dco(I, \varphi) + dco(I, \varphi - I) < \delta$, che è liscio lungo le orbite φ_t e imposta l'equivalenza orbitale dei flussi φ_t, ψ_t . Oltre al campo vettore φ^1 , è vicino a ψ e se φ_1, φ_2 sono due di questi omeomorfismi, allora $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ è la sostituzione del tempo di un flusso φ_t (quasi identico).

Conseguenza 4.1.3. I flussi di Anosov sono fortemente ruvidi C^1 .

Definizione 4.1.11. C^1 è un diffeomorfismo di $f: M \rightarrow M$ di varietà compatta di M è chiamato "diffeomorfismo di Anosov" se M è un insieme iperbolico per f .

Definizione 4.1.12. C^1 è flusso $\varphi_t: M \rightarrow M$ su varietà compatta di M è chiamato "flusso di Anosov" se M è un insieme iperbolico di un flusso φ_t .

Let M è varietà liscia, $N \subset M$ un sottoinsieme aperto, $f: N \rightarrow M$ C^1 è diffeomorfismo sull'immagine, $\Lambda \subset N$ è un po' compatto, f è invariante set.

Allora l'insieme Λ è chiamato "un insieme iperbolico" di mappatura f se nelle vicinanze aperte N imposta tali numeri λ, μ , $\lambda < 1 < \mu$, che per qualsiasi punto $x \in \Lambda$ la sequenza dei differenziali $(Df)_x^n: T_x^n M \rightarrow T_x^{n+1} M$, $n \in \mathbb{Z}$ permette (λ, μ) la decomposizione.

Definizione 4.1.14. Lasciate che $\lambda < \mu$. Sequenza delle mappature lineari reversibili $L_m: R^n \rightarrow R^n$, $m \in Z$, $R^n \rightarrow R^n \rightarrow R^n$, $m \in Z$, permette "(λ, μ) decomposizione" se esiste una tale decomposizione di $R^n = E_m^+ \oplus E_m^-$ che $L_m E_m^+ = E_{m+1}^+$ e

$$\|L_m|E_m^-\| \leq \lambda, \|L_m^{-1}|E_{m+1}^+\| \leq \mu^{-1}. \quad (4.1.6.)$$

Così, in questa sezione vengono considerate le note disposizioni teoriche della moderna teoria della rugosità dei sistemi dinamici che in sostanza definiscono solo condizioni qualitative di rugosità del DS, senza considerare alcuna caratteristica quantitativa di rugosità.

Tali caratteristiche quantitative di rugosità sono molto importanti soprattutto a applicato è più intero quando è necessario confrontare i sistemi sulla rugosità topologica o qualsiasi proprietà dei sistemi.

Tale approccio quantitativo alla considerazione della proprietà della rugosità è offerto sulla base delle ricerche della sezione seguente.

Dalla teoria è noto che i DS grezzi di piccole dimensioni fanno ovunque set nello spazio di tutti i DS (il cosiddetto "Sistema Morse - Smale") forniti con topologia C^1 sono densi. A diverse dimensioni degli spazi del DS anche se non ci sono analoghi assoluti dei "sistemi di Morse - Smale", ma alcuni sono dati qualitativi necessari e sufficienti al di sopra di una condizione di rugosità del DS che approva anche la densità degli insiemi di DS grezzi in una certa misura. Quanto detto sopra richiede una definizione del problema della comparazione dei sistemi grezzi sul grado di rugosità, cioè l'introduzione di misure quantitative della rugosità del DS.

4.1.2. Metodo di misura della rugosità topologica della DS

A. Misura della rugosità topologica di DS per diffeomorfizm iperbolico.

Molti risultati fondamentali nella teoria della rugosità del DS sono stati ricevuti da A.A. Andronov e dalla sua scuola. Nel noto lavoro di A.A. Andronov e L.S. Pontryagin, pubblicato nel 1937 anno in relazioni

dell'Accademia delle Scienze dell'URSS, è stato introdotto per la prima volta il concetto di rugosità che viene chiamato concetto di rugosità secondo il successivo Andronov - Pontryagin. Ma questo concetto definisce un quadro qualitativo della rugosità, cioè definisce solo ϵ -prossimità dell'omeomorfismo che sta effettuando l'equivalenza della perturbazione e nessun sistema di perturbazione a identico.

Ci fermeremo su un concetto di ruvidità secondo Andronov-Pontryagin.

L'ordine n DS è considerato

$$\dot{x} = F(x), \quad (4.1.7)$$

dove $x = x(t) \in R^n$ è un vettore di coordinate di fase, una F è n -dimensionale funzione vettoriale differenziabile non lineare.

Il sistema è chiamato rough secondo Andronov-Pontryagin (ulteriore sistema rough) in qualche area G se sistema iniziale (4.1.7), e il sistema di perturbazione definito in una sottoarea dell'area $G \tilde{G}$

$$\dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}) + f(\tilde{x}), \quad (4.1.8)$$

dove $f(x)$ è una funzione vettoriale differenziabile, piccola sulla norma, sono ϵ -identici, cioè ci sono D aperti, \tilde{D} aree come quella di D , $\tilde{D} \subset \tilde{G} \subset G$ e per loro soddisfano una condizione: cosa - era $\epsilon > 0$, è possibile trovare $\delta > 0$ che se (4.1.8.) δ è vicino al sistema (4.1.7.) nell'area, allora le \tilde{G} aree di divisione traiettorie dei sistemi (4.1.8) e (4.1.7.) ϵ sono identiche ("ha strutture topologiche identiche e "sono distorte" o "spostate" una rispetto all'altra meno, che su " ϵ "). Questo fatto si registra in uno sguardo

$$(\tilde{D}, (4.1.8.)) \equiv (D, (4.1.7.)). \quad (4.1.9.)$$

Se l'ultima condizione non è soddisfatta, allora il sistema non sarà approssimativo secondo Andronov - Pontryagin.

Notiamo che la determinazione di δ -prossimità e ϵ -identità significativo rispettivamente: per tutti i $f_i(x)$ analitici, $i = \overline{1, n}$ si svolgono $\|f_i\| < \delta$, $\|\partial f_i\|$

$(x)/\delta_j < \delta$, $j=1, n$ ci sono funzioni biunivoche e continue $\bar{x}_{i=\varphi_i}(x)$, i sistemi che traducono ogni traiettoria (4.1.8.) e tali che

$$\| \| xi - \bar{x}_i \| \| < \varepsilon,$$

dove $\| \| - \| \|$ sono norme vettoriali di qualsiasi aspetto.

Così, in questa determinazione della rugosità si suppone che le perturbazioni siano moltiplicative (parametriche) e riguardino la parte giusta (4.1.7.), ma è ovviamente possibile ampliare un concetto assumendo che le perturbazioni della parte giusta siano possibili anche additive (esterne, di allarme). In tal caso, sistema (4.1.7.) che presentiamo nella forma

$$\dot{x} = F(x, q, g), \quad (4.1.10)$$

dove $q \in R^p$ è un vettore dei vari parametri, $g \in R^l$ è un vettore di ingressi additivi esterni (perturbazioni) del sistema. Quindi il sistema iniziale prende una forma

$$\dot{x} = F(x, q_0, g_0), \quad (4.1.11)$$

dove $q_0 \in R^p$, $g_0 \in R^l$ sono tassi nominali (senza perturbazioni) di vettori di q , g .

Inoltre, in questo capitolo la rugosità del sistema (4.1.7.) è intesa nel senso sopra indicato, cioè la rugosità secondo Andronov-Pontryagin.

4.2. Alcuni concetti e definizioni della teoria dei sistemi dinamici

Qui in questa sezione prenderemo in considerazione alcuni concetti e definizioni della teoria dei sistemi dinamici necessari per l'enunciazione e la comprensione della teoria della rugosità enunciata in questo capitolo.

All'inizio senza perdere la comunità (per motivi descrittivi) considereremo i sistemi *DS* del secondo ordine, cioè con geometria sul piano o uno sguardo

$$\dot{x} = F_1(x, y), \dot{y} = F_2(x, y), \quad (4.2.1)$$

dove $x, y \in R$ sono coordinate di fase, F_1, F_2 sono funzioni continue.

Poi, il piano x, y è chiamato *piano di fase*, e ogni punto su di lei rappresenta una condizione di sistema. La traiettoria di ogni punto ("rappresentare" punti) nel corso del cambiamento di una condizione di sistema nel tempo porta il nome di una *traiettoria di fase*.

Se la soluzione del sistema (4.2.1.) corrispondente a questa traiettoria di T , viene definita per tutti i valori t , $-\infty < t < +\infty$, questa traiettoria viene chiamata la traiettoria intera.

Insiemi di punti T a $t \geq a$ ($0 \leq a$) *semi-traiettoria* positiva (negativa) assegnata da T e designata attraverso $T+$, ($T-$).

Curva integrata sul piano di fase che soluzione equazione differenziale ricevuta dalla divisione secondo (4.2.1) primo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)}, \quad F_1(x, y) \neq 0.$$

$$0. \quad (4.2.2)$$

Allo stesso tempo, in quel caso specifico, le curve integrate e le traiettorie di fase possono coincidere, e generalmente non coincidono.

Per ogni punto (x, y) dei sistemi (4.2.1.) è possibile confrontare un vettore con $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$. In questo caso *DS* definisce il *campo vettore* sul piano delle fasi. Viene chiamato *punti speciali* del campo vettore o sistema (4.2.1) punti in cui $\dot{x} = \dot{y} = 0$, cioè la parte destra (4.2.2.) è uguale a zero e la direzione di un vettore vagamente

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0. \quad (4.2.3)$$

Sul piano delle fasi si distinguono 6 tipi di punti speciali: "nodo", "nodo dicritico", "nodo degenerato", "sella", "fuoco" e "centro". Questi tipi di punti speciali sono determinati da autovalori λ_1, λ_2 e autovelox x_1, x_2 matrici di una parte lineare in questi punti

$$A \triangleq \begin{vmatrix} \partial F_1 / \partial x & \partial F_1 / \partial y \\ \partial F_2 / \partial x & \partial F_2 / \partial y \end{vmatrix}_{x_0, y_0}. \quad (4.2.4)$$

Le corrispondenti serie di traiettorie di fase che sono chiamate ritratti di fase sono mostrate nella Fig. 4.1.

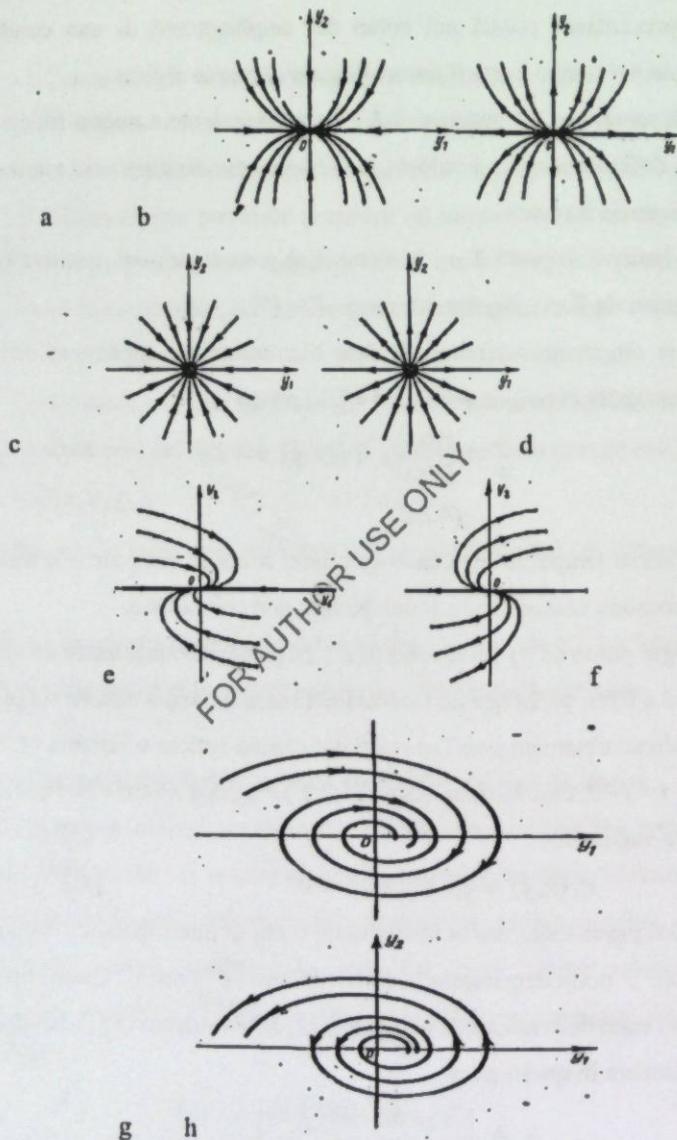


Fig. 4.1.

Allo stesso tempo per i punti speciali (SP), tranne il tipo "centro" e "sella" a seconda del segno della parte valida λ_1, λ_2 distinguono SP stabile e instabile (si considera la stabilità attraverso Lyapunov).

Il punto speciale (x_0, y_0) si chiama isolato se esiste la vicinanza di un punto (x_0, y_0) in cui, tranne questo punto, non si trova più alcun punto speciale. Nel caso in cui tutti i punti di una curva sono punti speciali (condizioni di equilibrio) cioè per tutti i punti viene effettuata (4.2.4), allora tale curva è chiamata la *linea speciale* del sistema.

Uno dei modi di creazione dei ritratti di fase è il metodo *isoclinico*. Gli *isoclinali* sono chiamati le curve determinate da rapporti:

$$F_1(x, y) + c_1 F_2(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) + c_2 F_1 = 0, \quad (4.2.5)$$

dove c_1, c_2 sono costanti in cui tutte le direzioni delle tangenti alle traiettorie sono identiche. A $c_1 = 0$ riceviamo ad una isoclinale di inclinazioni verticali, e a $c_2 = 0$ inclinazioni orizzontali.

Nel caso del DS lineare il tipo di punto speciale definisce il movimento del sistema in caso di deviazioni da un punto speciale. Per i sistemi non lineari il tipo di un punto speciale definisce il comportamento delle traiettorie di fase solo in alcune piccole vicinanze SP.

In una ricerca di sistemi non lineari un ruolo importante è svolto da traiettorie speciali. Trattatele: ad eccezione dei punti speciali, queste sono le traiettorie chiuse isolate che vengono chiamate *cicli limite* e le linee speciali sono *separatrici*.

I cicli limite possono essere sia stabili che instabili. I cicli limite stabili hanno ricevuto il nome di *auto-oscillazioni*. Quando si parla di stabilità dei cicli limite, in vecchio senso si parla solo di *stabilità orbitale*.

Il ciclo limite è detto orbitale stabile se come per una semi-traiettoria positiva di T^+ , e la semi-traiettoria negativa di T^- a qualsiasi set $\epsilon > 0$ può specificare $\delta > 0$, esso che a qualsiasi traiettoria di T' passando a $t=t_0$ attraverso qualsiasi punto di M' la vicinanza di M appartenente a δ' la semi-traiettoria T'^+

(secondo T'). Qualsiasi traiettoria che non sia stabile orbitale è *orbitale - instabile o speciale*. Notiamo che la stabilità orbitale è diversa da quella di Lyapunov.

Le separatrici dividono il piano di fase in aree con traiettorie di fase di vario tipo. Nelle vicinanze di un punto speciale come "sella" di una separatrice sono asintoti e sono chiamati anche *baffi di sella*. I punti speciali dividono l'area in sottozone, che sono punti di traiettorie non speciali. Tali aree sono chiamate *cellule elementari* (o solo *cellule*) sistema dinamico sul piano delle fasi.

Concetti importanti di una ricerca qualitativa dei sistemi dinamici sono i concetti di omeomorfismo e di identità.

Definizione 4.2.1. La *mappatura topologica* o *omeomorfismo* del piano (area) in sé è chiamata mappatura biunivoca e bilateralmente continua del piano (area), e le immagini geometriche che possono essere ricevute l'amico dall'amico dalla mappatura topologica è *omeomorfy*.

In tutte le possibili mappature topologiche alcune linee di divisione del piano di fase in traiettorie possono cambiare, ed altre possono rimanere invariabili o *topologiche invariati*: per esempio, la traiettoria chiusa rimane chiusa, c'è un numero e tipi di punti speciali, ci sono tipi di cellule invariabili, ecc. Per la caratteristica comparativa delle strutture topologiche della *DS* esiste un concetto di identità.

Definizione 4.2.2. Due strutture topologiche, o comunque quadri qualitativi di suddivisione del piano di fase nelle traiettorie (o aree su una traiettoria) impostate da due sistemi di sguardo (4.1.12.) sono chiamati *identici* se esiste omeomorfismo al quale le traiettorie di un sistema sono mappate nelle stesse traiettorie di un altro sistema. Allo stesso tempo l'insieme dei dati sulla natura dello stato di equilibrio (circa il tipo di punti speciali) un posizionamento relativo dei cicli limite e l'andamento dei separatori è chiamato *schema di rottura su una traiettoria*.

Nel caso di sistemi di ordine elevato ($n \geq 3$) nello spazio di fase, il carattere (tipo) di punti speciali, linee speciali e cicli limite diventa complicato e non è sempre così semplice parlare di tipi concreti di punti, come sul piano di fase, almeno perché allo stesso tempo gli autovalori di una matrice lineare è frequente su due, e un insieme e quale di essi caratterizza definitivamente il tipo di un punto speciale.

A $n \geq 3$ nei sistemi dinamici ci sono fenomeni impossibili per i sistemi bidimensionali. Appartengono a tali fenomeni l'emergere di *oscillazioni caotiche* e di *strani attrattori* (le varietà attrattive) che appaiono in spazi di fase con comportamento instabile delle traiettorie. Questi fenomeni possono insorgere al variare dei parametri dei sistemi delle equazioni differenziali *non lineari*, in particolare, la loro comparsa è legata all'emergere di turbolenze.

Il termine "strano attrattore" è stato inserito da D. Ruelle e F. Takens nel 1970, ma prima dei lavori legati alle ricerche sui modelli E. Lorenz era un po' usato nella letteratura scientifica. Allo stesso tempo il termine "attrattore" indica qualsiasi varietà attrattiva (un insieme continuo), per esempio, stato di equilibrio (punti speciali o *SP*), cicli limite, e il termine "strano attrattore" indica i movimenti quasiperiodici ad essi e ha messo radici solo dopo l'emergere di interesse per il lavoro del meteorologo americano E. Lorenz del 1963 dove era considerato un modello di dinamica dell'atmosfera in cui a certi parametri in alcune aree limitate dello spazio di fase ci sono oscillazioni caotiche chiamate ora da "uno strano attrattore di Lorenz" (a volte semplicemente "attrattore di Lorenz").

La teoria dei sistemi dinamici è più sviluppata, in particolare, la teoria della rugosità del *DS*, solo per $n = 2$ casi sul piano delle fasi, per gli ordini elevati ($n \geq 3$) ricerche attive, prima di tutto da parte dei matematici, soprattutto nei nuovi promettenti aspetti scientifici e applicati le direzioni connesse con lo studio di strani attrattori, biforcazioni e incidenti sono ora condotte.

Allo stesso tempo, sulla revisione della letteratura che viene effettuata dall'autore nel campo della teoria dei sistemi dinamici è possibile affermare che non esistono oggi metodi efficaci per una ricerca quantitativa delle proprietà del DS , in particolare la proprietà della rugosità. Ma c'è una ricerca e uno sviluppo di tali metodi. Uno dei tentativi di completare tale lacuna nella teoria della rugosità del DS è anche fatto sulla base della teoria offerta dall'autore in questo lavoro che è chiamata "la teoria della condizionalità della rugosità topologica" o in breve "la teoria della rugosità topologica" che si basa sul corrispondente metodo della "rugosità topologica".

4.3. Biforcazione dei sistemi dinamici

Anche il concetto di biforcazione di questi sistemi è strettamente connesso con un concetto di rugosità dei sistemi dinamici. Come già in precedenza è stato notato, il termine biforcazione significa "biforcazione" e appartiene a qualsiasi cambiamento spasmodico che avviene al cambiamento principale dei parametri di qualsiasi sistema, sia esso dinamico, ecologico, economico, sinergico, ecc.

L'inizio dei lavori sulla teoria delle biforcazioni dovrebbe essere portato ai lavori di H. Poincaré dove ha indagato le dipendenze delle condizioni di equilibrio sul parametro. Il contributo significativo alla teoria delle biforcazioni è stato dato anche dallo scienziato americano E. Hopf.

L'enorme contributo alla teoria delle biforcazioni è stato dato da A. A. Andronov e dalla sua scuola. In sostanza hanno considerato tutte le questioni delle biforcazioni sul piano delle fasi: biforcazioni di disposizioni di equilibrio (punti speciali), biforcazioni di cicli limite, ecc.

Molta attenzione è rivolta alle questioni delle biforcazioni nelle opere di V.I. Arnold, D.V. Anosov e dei loro colleghi. In questi lavori sono già condotte ricerche di biforcazioni e caratteristiche per grandi ordini di sistemi ($n \geq 3$), sulla base dei moderni metodi topologici.

4.3.1. Concetti di base e definizioni della teoria della biforcazione dei sistemi dinamici

Alla definizione ampliata e rigorosa di un concetto di biforcazione avviene quanto segue.

Definizione 4.3.1. I valori del parametro $q=q_0$ (sia scalare, sia vettoriali) da cui dipende qualche proprietà qualitativa $S=S(q)$ è detto ordinario se esiste finale piccolo

$\varepsilon > 0$, è che per tutti q soddisfacendo alla disuguaglianza

$$\|q - q_0\| < \varepsilon, \quad (4.3.1.)$$

la condizione di somiglianza è soddisfatta

$$S(q) \equiv S(q_0). \quad (4.3.2.)$$

Se non ci sono vicinanze $q = q_0$ per le quali si effettua (4.3.2.), tale valore del parametro q viene chiamato *biforcazione*, e il fenomeno corrispondente a questo valore del parametro q viene chiamato *biforcazione*.

Nel caso di sistemi dinamici nello spazio delle fasi come proprietà considerata, si accetta la struttura topologica della suddivisione dello spazio delle fasi in curve integrate. In molte fonti della letteratura straniera, invece del termine biforcazione, il termine "biforcazione" incontra spesso il termine "catastrofe", in particolare nelle opere sulla teoria delle caratteristiche delle riflessioni.

Il valore della teoria delle biforcazioni per una ricerca sui sistemi dinamici è immutabile, tanto che è ovvio citare, per esempio, le parole di H. Poincaré a questo proposito, "che le biforcazioni come torce, accendono un passaggio dai sistemi dinamici studiati a quelli inesplorati".

Sul piano delle fasi possono essere biforcazioni: emersione o scomparsa e punti speciali (condizioni di equilibrio), cicli limite, fusione o divisione di separatrix, ecc. Allo stesso tempo la biforcazione di emergenza o scomparsa

dei cicli limite porta il nome speciale di biforcazione di Poincare - Andronov - Hopf sui nomi delle biforcazioni scientifiche che hanno dato il maggior contributo alla teoria e indagando questo tipo di biforcazione storicamente la prima ed è la più completa. Ma nella letteratura moderna il nome di questa biforcazione come biforcazioni di Hopf a cui aderiremo in questo lavoro è diventato più forte.

Nei sistemi dinamici multidimensionali sono possibili anche biforcazioni più difficili, in particolare biforcazioni di emergenza o scomparsa di vari insiemi invarianti, ad esempio, dei cosiddetti *strange attractors*.

Le varietà attrattive nello spazio delle fasi in cui i movimenti delle traiettorie di fase hanno carattere caotico sono chiamate *attrattori strani*, cioè le coordinate di indagine dei punti delle traiettorie non sono determinate dalle coordinate precedenti dei punti (imprevedibilità del comportamento delle traiettorie). Negli ultimi decenni attribuiscono allo studio di tali fenomeni legati al caos e alla turbolenza un significato enorme, sia dal punto di vista informativo che dal punto di vista applicativo. Esso è innanzitutto legato al ruolo di prospettiva generale del mondo della conoscenza dei fenomeni del caos e di un ordine.

Per lo studio delle biforcazioni vari metodi di ricerca generalmente qualitativa dei sistemi, ad esempio, metodi della teoria delle caratteristiche delle mappature continue o nel caso più semplice la teoria delle dipendenze dello stato di equilibrio da parametro. Metodi di ricerca quantitativa analogica è usata raramente e di norma per i sistemi di basso ordine.

Distinguere le *biforcazioni locali e non locali*.

Biforcazioni locali sono tali biforcazioni di ritratti di fase che avvengono in prossimità di punti speciali e cicli limite, e non locali rispettivamente lontano dall'ultimo.

Forniremo alcuni termini e definizioni della teoria delle biforcazioni.

Definizione 4.3.2. Un punto speciale iperbolico è chiamato il punto speciale in cui uno qualsiasi degli autovalori di una parte lineare del sistema non giace su un asse immaginario secondo *non iperbolico il punto speciale* in cui un qualsiasi autovalore giace su un asse immaginario è chiamato.

In insiemi di campi vettoriali mono-parametrici non iperbolici si incontrano punti speciali di due tipi: un autovalore di un punto speciale è uguale a zero o due è immaginario pulito diverso da zero autovalori, e gli altri non giacciono su un asse immaginario.

Definizione 4.3.3. Il diagramma di biforcazione è chiamato il diagramma in cui viene mostrato l'inserimento delle soluzioni di biforcazione delle equazioni dei sistemi dinamici in funzione dei parametri con l'indicazione della loro stabilità e instabilità.

Definizione 4.3.4. L'equazione di biforcazione è detta l'equazione che determina le "ampiezze" delle diramazioni delle soluzioni delle equazioni dei sistemi dinamici in prossimità di un punto di biforcazione.

Per una spiegazione del senso delle definizioni 4.3.3 e 4.3.4 faremo un esempio ampiamente noto.

Che il sistema sia descritto dall'equazione

$$\dot{x} = F(x, q), \quad (4.3.3)$$

dove q è il parametro, $x \in R^n$ è un vettore di stati.

Inoltre lasciamo per i quella coordinata di una condizione di sistema (4.3.3) abbiamo l'equazione

$$\dot{x}_i = F_i(x, q). \quad (4.3.4)$$

Poi nelle vicinanze di qualche valore di biforcazione del parametro $q=q_c$ avremo delle decisioni

$$x_i(t, q) = x_{oi}(q_c) + a_i \varphi_i(t), \quad (4.3.5)$$

dove $x_{oi}(q_c)$ è uno stato costante (equilibrio) a $q=q_c$, a_i è "ampiezza", la rilevazione delle decisioni $x_i(t, q)$, $\varphi_i(t)$ sono funzioni di diramazioni (4.3.3)

in prossimità di un punto di biforcazione $q=q_c$. Allo stesso tempo a_i determinate "ampiezze" dalle equazioni di biforcazione

$$\dot{a}_i = G(a_i, \rho). \quad (4.3.6)$$

Per un esempio dell'equazione

$$\dot{a} = -a^3 + qa, \quad (4.3.7)$$

avremo due decisioni fisse

$$a=0 \text{ e } a = \pm\sqrt{q}, \quad (4.3.8)$$

e il diagramma di biforcazione è presentato nella Fig. 4.2.

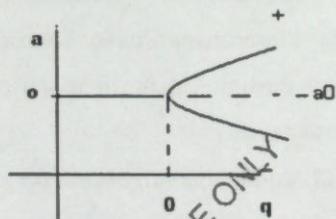


Fig. 4.2.

4.4. Concetto di "tipicità" dei sistemi

Rapporto tra "rugosità", "tipicità" e "iperbolicità".

La "tipicità" è uno dei concetti fondamentali della matematica moderna. La "tipicità" è definita come la proprietà dei sistemi appartiene ad un insieme stabile e continuo di sistemi. Talvolta si parla di "tipicità" come di proprietà di sistemi di "disposizione generale", cioè di proprietà di sistemi caratteristici per alcuni oggetti matematici.

Ad esempio, i sistemi grezzi sul piano formano sistemi "tipici" e sono il denso insieme aperto ovunque nello spazio di tutti i sistemi del tipo considerato, la topologia C^1 fornita. Andronov A.A. scuola si dimostra coincidenza di concetti di rugosità e "tipicità" per i sistemi di un basso ordine

$n \leq 2$ completamente coincidere. Per i sistemi di ordine superiore $n \geq 3$ questi concetti non sempre coincidono e hanno le differenze. Dal punto di vista della "tipicità" la *biforcazione* è definita come "riorganizzazione" dell'oggetto tipico a seconda del parametro (parametri) a valori critici di questo parametro.

Utilizzando un concetto di "tipicità" è possibile parlare anche di biforcazioni "tipiche" dei sistemi. Attivamente ha utilizzato l'idea di "tipicità" nelle opere e lo scienziato francese R. Thom per una conclusione dei risultati sulla teoria della catastrofe, descrivendo allo stesso tempo in sostanza insiemi di biforcazioni "tipiche" per la descrizione delle cosiddette catastrofi elementari. Le ultime in effetti biforcazioni di famiglie "tipiche" dei sistemi in funzione di un gran numero di parametri.

Procedendo dalla "tipicità" sul piano ci sono solo cinque biforcazioni "tipiche". Tre di esse sono biforcazioni locali: la nascita della posizione degenerata dell'equilibrio (un punto speciale) che si sta spezzando su due iperbolici ("sella" e "nodo"); la nascita di un ciclo limite da fuoco degenerato; la nascita del ciclo limite degenerato che si sta spezzando su due iperbolici ("fuoco", "sella"). Due altre due biforcazioni di carattere globale questa nascita di un ciclo limite da ciclo separatrix loop a sella o da ciclo separatrix loop a sella - nodo e trattano situazioni degenerate.

In un caso multidimensionale, la traiettoria dei sistemi diventa più difficile. In questo caso il comportamento "difficile" delle traiettorie non è un fenomeno raro, e il comportamento "semplice" caratterizza solo in questo modo i sistemi chiamati di Morse - Smale.

Definizione 4.4.1. Il sistema (un flusso, la cascata) di Morse - Smale è chiamato il sistema dinamico liscio (un flusso o la cascata) impostato sulla varietà chiusa di M se tutte le sue traiettorie aspirano (in entrambe le parti nel tempo) ad alcune traiettorie periodiche (comprese le disposizioni di equilibrio in caso di una melassa di flusso e punti immobili in caso di cascata), e traiettorie periodiche numero finale e tutti iperbolici, e le loro varietà

invarianti costante e instabile sono nella disposizione generale, i.e. sono attraversati solo è trasversale. Allo stesso tempo un diffeomorfismo μ a cui procedura di iterazione la cascata Morse - Smale risulta è chiamato il diffeomorfismo Morse - Smale.

Sistemi del genere sono stati introdotti da S. Smale nel 1960. Ha ricevuto disuguaglianze che collegano numero di traiettorie periodiche di vario tipo con omologia di varietà di fase. Le disuguaglianze note di P. Morse per numero di punti critici di funzione liscia f possono essere considerate come il caso speciale che si sta rivelando quando il sistema dinamico è un flusso di $\dot{x} = f$.

I sistemi di Morse - Smale rappresentano in sostanza una generalizzazione naturale su un caso multidimensionale di condizioni che sono state specificate da A. Andronov e L. Pontryagin come condizioni di rugosità dei corsi d'acqua i piani. Ma come primo risultato sostanziale S. Smale ha ricordato ai risultati di P. Morse i sistemi di Morse e non era legato alla rugosità, il nome dei sistemi di Morse e Smale ha messo radici.

Allo stesso tempo S. Smale, fin dall'inizio significava comunicazione con la teoria dei sistemi grezzi e presupponeva che i sistemi di Morse - Smale fossero grezzi. È stato poi dimostrato da S. Smale e J. Palis.

Nei sistemi di Morse - Smale l'importanza sa di "traiettorie non erranti".

Definizione 4.4.2. Il punto ∂ è chiamato "non vagare" se per qualsiasi sua vicinanza ad A e qualsiasi $T > 0$ c'è $t > T$ che $\varphi_t A \cap A \neq \emptyset$. Poi tutti i punti φ_t^{∂} è "non vagare"; la traiettoria corrispondente $\{\varphi_t^{\partial}\}$ si chiama "traiettoria non errante".

I punti non vaganti formano il sottoinsieme chiuso invariante Ω spazi di fase.

Nel sistema Morse - Smale solo le traiettorie periodiche non sono vaganti (comprese le disposizioni di equilibrio). Pertanto il sistema di Morse - Smale è ancora definito come sistema in cui l'insieme dei punti non erranti è

costituito da traiettorie periodiche iperboliche numero finale traiettorie periodiche che le varietà invarianti sono attraversati solo è trasversale.

In caso di piccole dimensioni dello spazio di fase i sistemi approssimativi sono nella precisione del sistema di Morse - Smale. Ma in coppie multidimensionali ci sono sistemi ruvidi, carattere più difficile. Tale caso è stato trovato da Smale, sull'esempio del cosiddetto "ferro di cavallo di Smale", dove si osserva il sistema grezzo con un numero infinito di traiettorie periodiche. Tali sistemi grezzi "difficili" si differenziano dai sistemi del Morse - Smale in generale per il fatto che quel ruolo che in essi è giocato dalle traiettorie periodiche nei sistemi grezzi "difficili", è giocato dai cosiddetti insiemi iperboliche.

Per la cascata liscia $\{f_n\}$ con la varietà a fase chiusa di G si procede come segue.

Definizione 4.4.3. Compatto invariante (costituito da tutte le traiettorie) l'insieme di $M \in G$ è detto iperbolico se per ogni punto di $x \in M$ lo spazio tangente di $T_x G$ decade nella somma diretta

$$T_x G = E_x^s \oplus E_x^u, \quad (4.1)$$

in modo tale che a $\xi \in E_x^s, \eta \in E_x^u, n \geq 0$:

$$a) |(f^n)' \xi| \leq a |\xi| e^{-cn}, \quad |(f^{-n})' \xi| \geq b |\xi| e^{cn};$$

$$b) |(f^n)' \eta| \geq b |\eta| e^{cn}, \quad |(f^{-n})' \eta| \leq a |\eta| e^{-cn},$$

dove a, b, c sono le costanti positive, che non dipendono da x, η, ξ, n . Subspace E_x^s è chiamato stabile (contratto), e E_x^u è instabile (si estende);

Questi sottospazi sono definiti dalle proprietà a), b) è univoco, le loro dimensioni sono localmente costanti e dipendono da x è continuo.

Per un flusso regolare $\dot{x} = F(x)$ su G .

Definizione 4.4.4. L'insieme compatto invariante di $M \subset G$ è chiamato iperbolico se tutti appartenenti alla sua posizione di equilibrio (quando sono disponibili) sono iperboliche (il loro numero finale), un insieme

$$B = M \setminus \{x = f(x) = 0\},$$

è chiuso e per ogni punto di $x \in B$ lo spazio tangente di $T_x G$ decade nella somma diretta

$$T_x G = E_x^s \oplus E_x^u \oplus Rf(x), \quad (4.4.2)$$

in modo tale che a $\xi \in E_x^s, \eta \in E_x^u, t \geq 0$:

$$a) |\varphi_t' \xi| \leq a|\xi|e^{-ct}, |\varphi_{-t}' \xi| \leq b|\xi|e^{-ct};$$

$$b) |\varphi_t' \eta| \leq b|\eta|e^{ct}, |\varphi_{-t}' \eta| \leq a|\eta|e^{-ct},$$

dove a, b, c sono le costanti positive, che non dipendono da x, η, ξ, t .

Generalmente, un insieme finale di traiettorie periodiche (a cui appartengono anche le disposizioni iperboliche di equilibrio nel caso di un flusso) formano un insieme iperbolico. Il caso privato, quando tutta la varietà di fase è un insieme iperbolico.

Sistemi con l'ultimo caso sono stati introdotti e studiati dal famoso matematico D.V. Anosov che sono chiamati da lui sistemi a U , ma in letteratura portano anche altri nomi di sistemi (*flussi, cascate, diffeomorfizm*) di Anosov. In generale la definizione di un insieme iperbolico è stata data da S. Smale. E' dimostrato che, i sistemi di Anosov ruvido.

Nella teoria iperbolica sono note le condizioni di rugosità dei sistemi dinamici determinate dall'ipotesi di Smale. Secondo questa ipotesi la rugosità dei sistemi dinamici richiede anche abbastanza che l'insieme dei punti non erranti fosse iperbolico e che le traiettorie periodiche fossero dense in lui, e che le varietà stabili e instabili di traiettorie non erranti fossero attraversate ovunque fosse trasversale. Smale ha dimostrato che quando si eseguono queste condizioni una struttura di un insieme di punti non erranti, e quindi e tutto il quadro qualitativo è possibile indagare piuttosto in dettaglio.

La sufficienza delle condizioni di rugosità è dimostrata da R. Robinson. Per quanto riguarda le condizioni di rugosità sono dimostrate non per il caso generale, e in casi particolari di sistemi di piccole dimensioni.

La questione della necessità di un caso multidimensionale rimane aperta, per il fatto che, come ha dimostrato Smale, è legata a una questione di proprietà "tipiche" dei sistemi dinamici che non sono completamente divulgate. Smale ha così dimostrato che in un caso multidimensionale i sistemi grezzi non sono densi nello spazio di tutti i sistemi.

Finora non si è riusciti a trovare ancora tali condizioni per sistemi multidimensionali che, come la rugosità in caso di piccole dimensioni, sarebbero stati soddisfatti per il sistema "tipico" e ne avrebbero definito le possibili proprietà (un esempio l'attrattore di Lorenz).

Quindi, una questione di proprietà qualitative della rugosità, prima di tutto è legata a una questione di "tipicità" anche se è stata menzionata in un caso multidimensionale in quanto poco prima si differenzia da un caso di sistemi di piccole dimensioni, cioè tali sistemi formano l'insieme denso che non è aperto ovunque, e formano l'insieme che contiene ovunque gli insiemi locali densi.

Nella teoria dei sistemi grezzi sono noti i seguenti due risultati principali sulle proprietà "tipiche" dei sistemi dinamici.

1. Teorema di Kupka - Smale: Nello spazio di tutte le dinamiche fluide i sistemi

(flussi o cascate) di una classe $C^z, z \geq 1$, su alcune varietà di fase "sono sistemi tipici" che hanno tutte le traiettorie periodiche (comprese le disposizioni di equilibrio (punti speciali)) sono iperboliche, e invarianti varietà costanti e instabili di queste traiettorie sono attraversate ovunque è trasversale. Sistemi con tali proprietà sono chiamati i sistemi (*flussi, cascate, diffeomorfizm*) di Kupka-Smale, cioè i sistemi di Kupka-Smale "sono tipici". Da questo teorema deriva che il sistema grezzo deve essere il sistema di Kupka-Smale.

2. Lemma circa il corto circuito (Lemm di Ch. Pyyu): se un non è punto errante di sistema dinamico liscio, allora tanto quanto vicino nel senso di CI a questo sistema esiste sistema per il quale un è periodico.

La conseguenza di questo lemma: nello spazio di tutto, i sistemi dinamici dei sistemi di classe C1 che hanno punti periodici (comprese le disposizioni di equilibrio (punti speciali)) "sono tipici" ovunque sono densi in un insieme di punti non vaganti. Nel caso di C2 questo lemma non è dimostrato e giusto solo per C1.

Se affronta le radici fisiche di un concetto di ruvidità dei sistemi, allora, come è noto dal lavoro di Andronov e Pontryagin, tali sistemi sono sistemi associati con un comportamento "semplice" delle traiettorie.

In relazione a quanto detto sopra molti ricercatori pongono una domanda e che ha dato la formulazione matematica generalizzante della domanda sulla rugosità quando sono considerati "difficile" comportamento delle traiettorie. Su questa domanda credo che nuovo e interessante è un po'. Quindi, è molto difficile controllare sufficienti condizioni di rugosità in casi concreti. In particolare l'iperbolicità di tutta l'insieme dei punti non erranti difficile è stabilito. Ancora più difficile è stabilire la trasversalità di varietà invarianti stabili e instabili. Ma naturalmente, la rugosità locale di insiemi iperbolici è abbastanza facile da trovare e tali esempi sono sufficienti nella letteratura moderna secondo la teoria della rugosità e le sue applicazioni.

Allo stesso tempo, lo sviluppo di nuove sezioni della teoria della rugosità ha portato alla nascita della moderna teoria "iperbolica" e ha anche contribuito allo sviluppo della *teoria delle biforcazioni*. E queste due teorie sono un aspetto applicato della scienza molto importante.

I sistemi con un comportamento semplice delle traiettorie meritano però attenzione perché è essenziale che, sistemi con tale carattere di comportamento questi siano i sistemi di Morse - Smale sono rozzi. Ma allo stesso tempo, anche il fatto che nello spazio dei sistemi dinamici ci sono aree interamente riempite da sistemi con un comportamento difficile delle traiettorie è essenziale (per esempio, sistema con gli attrattori di Lorentz). Il fatto che uno dei sistemi con comportamento difficile di traiettorie ruvide, e

altri non sono ruvidi e che come quelli, e altri riempiono alcune aree, non in modo così significativo.

È noto che nello spazio dei sistemi dinamici ci sono aree interamente riempite da sistemi in cui alcuni dettagli di un quadro qualitativo del comportamento delle traiettorie cambiano tanto quanto piccole perturbazioni in altre parole sono riempite da sistemi non grezzi. Ma negli esempi conosciuti di tali estremi è sensibile al cambiamento di sistema che alcuni dettagli "sottili" di un quadro qualitativo possiedono. Nei sistemi fisici reali questi dettagli "sono spazzati via" da dietro il rumore esterno ed interno, quindi in realtà forse non è così importante che rimangano o meno a piccole perturbazioni.

Detto, risulta l'idea di modificare un concetto di sistema grezzo in modo che a sistema grezzo a piccole perturbazioni non tutte le proprietà qualitative, ma solo ciò che - che il principale, allora forse tali sistemi, sarà forse tali sistemi, sarà "tipico" è rimasto. Ma tale risultato riguardante la "tipicità" e la "ruvidità" non viene accolto.

In alcuni esempi di sistemi non grezzi si osserva un'iperbolicità, più debole, che negli insiemi iperbolici, ma non è disponibile la formulazione generale che coprirebbe tutti questi casi di iperbolicità.

5.1. 5.1. Emersione di fluttuazioni caotiche (caos)

I sistemi che non soddisfano le condizioni di rugosità di cui al paragrafo 4.1. sono definiti non grezzi. Da numerose ricerche è stabilito che gli insiemi di sistemi non grezzi, così come i sistemi grezzi formano insiemi continui negli spazi dei sistemi dinamici. È anche noto che gli insiemi di sistemi grezzi e non grezzi sono divisi l'uno dall'altro da punti e i campi di biforcazione, cioè attraverso le biforcazioni di sistema passano non solo da un'area (insieme) di sistemi grezzi ad un'altra ma anche da sistemi grezzi a sistemi non grezzi e viceversa.

Un brillante esempio di sistemi non grezzi sono i sistemi con un punto di equilibrio come "centro". Per quanto riguarda la teoria dei sistemi dinamici non grezzi, si tratta di sistemi con punti speciali non iperbolici.

Uno dei fenomeni nei sistemi sinergici che causano un'enorme attenzione da parte dei ricercatori in vari settori, le scienze sono i cosiddetti strange attractors che rappresentano le varietà attrattive nello spazio delle fasi con comportamento caotico (caos) di traiettorie in queste varietà. La ricerca degli strange attractors attira l'interesse e quindi molti scienziati vedono nello studio di questo fenomeno un indizio dei misteri della natura della turbolenza e del caos nei sistemi di varia natura fisica sono fisici, chimici, biologici e anche nei sistemi economici e sociali. È rilevante anche il compito di controllare il caos nei sistemi sinergici.

Dal punto di vista della teoria del sistema di rugosità con il movimento caotico (caos) sistema non ruvido, cioè, gli attrattori strani definiti come insiemi di sistemi non ruvidi.

FOR AUTHOR USE ONLY

Il primo esempio classico di sistemi caotici con strani attrattori è stato il sistema con il modello di Lorenz inaugurato nel 1963 dal meteorologo americano Edward Lorenz (Massachusetts Institute of Technology).

E. Lorenz studiando le correnti atmosferiche per la previsione del tempo aveva ricevuto il modello della convezione termica nell'atmosfera sotto forma di sistema del terzo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

dove x è la variabile proporzionale all'ampiezza della velocità del movimento, e le variabili y, z riflettono la distribuzione della temperatura in un anello convettivo, il parametro σ rappresenta il numero di Prandtl, ρ è il numero di Rayleigh, e $\beta = 8/3$ è un moltiplicatore geometrico.

Il più delle volte si crede $\sigma = 10$, e il parametro operativo è la quantità ρ .

Si stabilisce che lo strano attrattore di Lorenz con il caotico movimento nello spazio delle fasi, sorge al valore $\rho = 24,74$, dietro un punto di biforcazione di Poincaré - Andronov - Hopf (Hopf) nel sistema (5.1.1). Allo stesso tempo nello spazio di fase del sistema ci sono due punti di sella-focus instabili e un punto di sella intorno al quale ci sono movimenti caotici in molti sistemi sinergici, in particolare, tali movimenti sorgono nei laser a gas.

Il caos nasce in molti sistemi sinergici di varia natura fisica, ma ci sono alcuni scenari standard di transizione ai movimenti caotici.

I seguenti scenari di transizione al caos sono caratteristici:

- A. Transizione al caos attraverso la cascata infinita di biforcazioni del raddoppio del periodo (lo scenario universale di M. Feigenbaum);
- B. Transizione attraverso l'alternanza;
- C. Transizione attraverso le biforcazioni di Hopf.

R. Lo scenario universale di transizione attraverso la sequenza infinita di raddoppio del periodo è stato aperto dallo scienziato americano nel campo della fisica matematica e teorica Mitchell Feigenbaum nel 1976.

Al momento dell'apertura di Feigenbaum si sapeva che nei display discreti di tipo

$$x_{n+1} = \lambda f(x_n), \quad (5.1.2)$$

al cambio del parametro $\lambda > 0$ il ciclo esistente con il periodo T perde stabilità, e stabile è un ciclo con il periodo $2T$, poi $4T$, ecc. (Fig. 5.1). L'intervallo di variazione del parametro λ entro il quale il ciclo di periodo $2n$ è stabile si restringe rapidamente. Ad esempio, in funzione della parte destra (5.1.2) in uno sguardo

$$f(x_n) = \lambda x_n(1 - x_n), \quad (5.1.3)$$

a $1 < \lambda < 3$ l'equazione logica (5.1.3) ha due punti speciali: $x = 0$; e $x = (\lambda - 1)/\lambda$, allo stesso tempo l'inizio delle coordinate è il punto instabile, e il secondo punto è stabile.

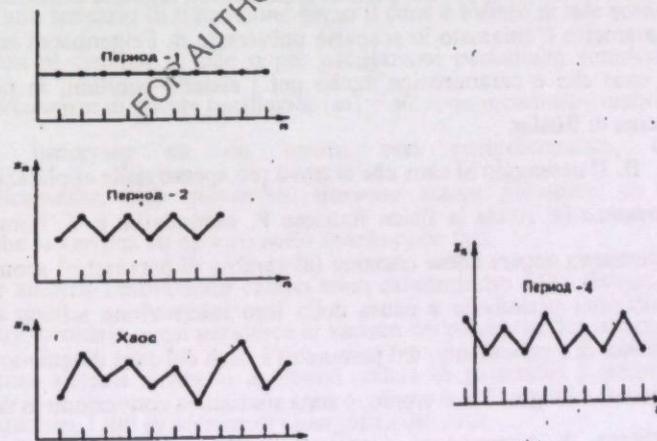


Fig. 5.1.

Con $\lambda = 3$ inclinazione a $x = (\lambda-1)/\lambda$, supera l'unità ($f' = 2-\lambda$) ed entrambi i punti di equilibrio diventano instabili. A $3 < \lambda < 4$ questa semplice equazione differenziale descrive un insieme di movimenti multiperiodici e caotici.

Il processo di transizione continua fino a quando λ non raggiunge il valore $\lambda_\infty = 3,56994 \dots$. Vicino a questo valore λ al quale si verifica il raddoppio del periodo si sottopone alla legge esatta

$$\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \rightarrow 4,66920 \dots \quad (5.1.4)$$

Questa relazione limite è chiamata numero di Feigenbaum.

Ai valori λ , λ_∞ , ci possono essere iterazioni caotiche, cioè il comportamento del modello sui grandi tempi non si mantiene all'interno di un quadro di semplici movimenti periodici, cioè c'è il caos.

Dalle ricerche viene mostrato, come altre visualizzazioni di uno sguardo (5.1.2) dove $f(x)$ è quadrato o funzione più difficile, si comportano in modo simile, soddisfacendo la stessa legge (5.1.4).

Fenomeni di raddoppio del periodo o di cambio regolare biforcazione. Il parametro è chiamato lo scenario universale di Feigenbaum sull'emergere del caos che è caratteristico anche per i sistemi continui, in particolare il sistema di Rössler.

B. Il passaggio al caos che si trova più spesso nelle applicazioni *alternanza* (si rivela la fisica francese P. Manneville e Y. Pomeau, 1980). L'alternanza appare come costante (al cambio di parametro) scomparsa delle oscillazioni periodiche a causa della loro interruzione schizzi caotici. Nel processo di cambiamento del parametro i flash del caos diventano sempre più frequenti e lunghi. Per esempio, è stata studiata la convezione in una cella con gradiente di temperatura (convezione Rayleigh - Benard) o sistema idrodinamico.

Allo stesso tempo la durata media di una fase caotica o turbolenta del movimento τ cambia decisamente con il cambiamento di alcuni parametri del sistema, per esempio, la dipendenza ha un aspetto

$$\tau \approx \frac{1}{(\lambda - \lambda_c)^2} \quad (5.1.7)$$

dove λ_c è il valore al quale il movimento periodico diventa caotico.

La transizione al caos attraverso l'alternanza nel sistema idrodinamico è legata alla fusione e alla conseguente scomparsa di traiettorie periodiche stabili e instabili.

La transizione al caos attraverso l'alternanza è possibile anche nel sistema di Lorenz a un numero piuttosto elevato di Rayleigh ($\rho = 166,2$; $\sigma = 10$; $\beta = 8/3$).

C. La transizione al caos attraverso la *biforcazione Hopfa* (Poincare-Andronov-Hopfa) è stata considerata sull'esempio del sistema (attrattore) di Lorenz (5.1.1). Questo scenario di transizione al caos è anche standard (caratteristica) di molti sistemi sinergici.

Di norma, uno scenario di transizione verso il caos è foriero di tale scenario è la presenza al sistema di due o più oscillazioni periodiche simultanee. Quando le frequenze di queste oscillazioni ω_1 e ω_2 sono incommensurabili, il movimento osservato su un essere non periodicamente, cioè kvaziperiodicamente. Tali movimenti possono essere presentati su una superficie che si verifica su un toro nello spazio delle fasi.

In tale sistema i movimenti caotici sono caratterizzati dalla distruzione della struttura toroidale quasi periodica al variare dei parametri del sistema.

In alcuni sistemi sinergici a diversi valori di parametri è possibile osservare tutti e tre i tipi di scenari di emergenza del caos.

Anche le transizioni di ritorno da movimenti caotici a periodici quando le oscillazioni caotiche, essendo sorte a certi valori di parametri, attraverso un certo periodo degenerano nel movimento periodico o quasiperiodico, sono

note ai ricercatori del caos. Questo caos di transizione è una conseguenza della biforcazione o dell'improvvisa scomparsa dell'oscillazione caotica stabilita.

Il caos è possibile non solo nei sistemi dissipativi, ma anche in quelli conservatori. Inoltre, come è noto trovare soluzioni alle equazioni della meccanica celeste ha portato, alla fine del XIX secolo Poincare, all'assunto che le soluzioni di molti problemi di dinamica sono sensibili alle condizioni di ingresso e i movimenti dei corpi sulle orbite sono imprevedibili. Allo stesso tempo, esempi fisici di sistemi conservatori sono collegati a problemi di calcolo delle orbite nella meccanica celeste e del comportamento delle particelle nei campi elettromagnetici.

Anche se di norma, in condizioni reali terrestri nei sistemi dinamici ci sono perdite di energia, in alcuni di essi, ad esempio, nei progetti strutturati o nei risonatori a microonde, l'attenuazione non è sufficiente, e negli intervalli di tempo finali possono essere considerati conservatori o sistemi Hamilton.

Nei sistemi conservatori si trovano gli stessi tipi di moti oscillanti limitati, come nei sistemi dissipativi, cioè sono possibili i movimenti periodici, subarmonici, quasiperiodici e caotici. La differenza principale tra le oscillazioni nei sistemi dissipativi e conservatori è che le oscillazioni caotiche nei sistemi dissipativi (con perdita di energia) trovano una struttura frattale a differenza dei sistemi conservatori dove non esiste una tale struttura.

I sistemi conservatori sono caratterizzati dalla densità uniforme delle probabilità in aree limitate di spazio di fase e hanno altri riflessi di Poincare, rispetto ai sistemi dissipativi. Ma la misura di una divergenza di oscillazioni ravvicinate come gli indicatori di Lyapunov è applicabile anche ad essi.

5.2. 5.2. Sistemi con oscillazioni caotiche

I modelli di numerosi esempi di sistemi in cui si riscontrano oscillazioni caotiche o caos sono stati presentati nel cap. 3 prendendo in considerazione i sistemi sinergici. Si tratta di sistemi come il sistema Lorenz, Lengford,

Rössler, Belousov-Zhabotinsky, il circuito di Chua, gli oscillatori Van der Pol e Duffing e altri. Da esempi di mappatura discreta, sono caratteristici l'equazione logistica che descrive la crescita delle popolazioni e anche la mappatura Henon del tipo a ferro di cavallo ("Ferro di cavallo di Smale") e la trasformazione del "panettiere".

Esempi classici di sistemi con dinamiche caotiche sono il sistema o l'attrattore di Lorenz e l'equazione logistica. Questi due esempi sono caratterizzati da molte caratteristiche della dinamica caotica, come le biforcazioni subarmoniche, le traiettorie di risalita, il raddoppio del periodo, la mappa di Poincare e le dimensioni frattali.

In questo paragrafo prenderemo in considerazione alcuni sistemi ampiamente conosciuti con dinamiche caotiche.

Il sistema di Lorenz.

Il sistema o attrattore di Lorenz è storicamente il primo modello di sistemi con dinamiche caotiche in cui in sostanza nel sistema determinato sorgono imprevedibili oscillazioni casuali, in una zona limitata dello spazio di fase chiamata "attrattore" di Lorenz.

Il sistema di Lorenz è stato ricevuto come risultato della modellazione delle dinamiche dell'atmosfera.

Si considera lo strato liquido che si trova sotto l'influenza della gravità e che viene riscaldato dal basso. Al di là di questo strato c'è una certa differenza di temperatura. Al raggiungimento di una differenza di temperatura di dimensioni piuttosto grandi, sorgono vortici di liquido in circolazione, in cui l'aria calda (liquido) sale, e il freddo scende. La corrente convettiva bidimensionale è descritta attraverso l'equazione classica di Navier-Stokes.

Alle piccole differenze di temperatura ΔT il liquido non è mobile, ma ad un certo valore critico ΔT nasce una corrente convettiva, cioè circolante. Questo movimento è chiamato *convezione Rayleigh - Benard*.

Lorenz che indaga l'equazione di Navier-Stokes scomponendo su Fourier armoniche lungo le direzioni spaziali ha lasciato tre armoniche.

Di conseguenza, in una forma adimensionale Lorenz (5.1.1) si ricevono equazioni che con un insieme di parametri $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ e variato ρ hanno un aspetto

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - 8/3z. \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Nel sistema (5.2.1) a $\rho < r1 = 1,0$ esiste l'unico punto speciale di SP1 (0,0,0) tipo "nodo stabile". Inoltre a $\rho = r1 = 1,0$ nel sistema (5.2.1) esistono i punti SP2 ($[8/3(\rho - 1)]^{1/2}$, $[8/3(\rho - 1)]^{1/2}$, $\rho - 1$) e SP3 ($-[8/3(\rho - 1)]^{1/2}$, $-[8/3(\rho - 1)]^{1/2}$, $\rho - 1$) come "focolai instabili" appaiono altri due relativamente simmetrici. Nello stesso tempo, $\rho > r1$ si trasforma in un punto speciale come "saddle-knot".

Al valore $\rho = r1 = 1.345$ nel sistema (5.2.1) si verifica la biforcazione del cambiamento come i punti speciali di SP2 e SP3, cioè l'ultimo giro in punti speciali come "focolai stabili". A $\rho = r2 = 13.926$ nel sistema considerato c'è un caos metastabile quando gli attrattori di SP2 e SP3 da globali si trasformano in attrattori locali con alcune aree di attrazione.

Inoltre, a $\rho = r3 \approx 24,74$, nel sistema si verifica biforcazione Poincaré - Andronov - Hopf (Hopf) quando gli autovalori $\lambda_{2,3}$ in punti speciali di SP2,3 diventano puramente immaginari. Il valore del parametro $\rho = r3$ attira l'attenzione dei ricercatori con il fatto che a $\rho > r3$ nel sistema (5.2.1) nasce l'interessante fenomeno chiamato "uno strano attrattore" di Lorenz. Qui, in un'area limitata dello spazio R3 intorno al punto di sella-foco instabile di SP2,3 ci sono oscillazioni caotiche che coprono un punto di sella di SP1. Nel sistema ci sono anche altri punti e tipi di biforcazioni che in questo lavoro non sono considerati.

È accertato che in uno strano attrattore di Lorenz il movimento è globalmente limitato nell'area ellissoidale dello spazio delle fasi.

Mappa logistica (equazione).

È noto che l'equazione logistica ha ricevuto il nome in relazione ad un compito relativo al sostentamento della popolazione animale (la *logistica* è l'approvvigionamento, il sostentamento) ed è il modello semplificato delle dinamiche delle popolazioni.

Lasciamo che x_n rappresenti il numero di individui nel territorio isolato in un anno con il numero n , diviso per il numero massimo di individui che questo territorio è in grado di sostenere. Il numero della popolazione l'anno prossimo è x_{n+1} , dipende da quanti individui erano quest'anno, cioè da x_n . Questa dipendenza è rappresentata dalla mappatura logistica di uno sguardo (5.1.3):

$$f(x_n) = \lambda x_n (1 - x_n), \quad 0 \leq x_n \leq 1. \quad (5.2.2)$$

Ovviamente, la dimensione $1 - x_n$, è proporzionale alla quantità di cibo disponibile. O altrimenti, in fase di avvicinamento del numero di popolazioni di x_n al valore critico 1, la quantità di cibo, essendo costantemente ridotta, si avvicina a zero. Il senso fisico del parametro λ rappresenta la fertilità della popolazione. Più il valore λ è elevato, più rapidamente la popolazione si riprenderà dopo eventuali catastrofi. Ma grandi valori del parametro λ portano di regola a popolazioni caotiche. Le principali conclusioni connesse con il movimento caotico nei sistemi descritti dall'equazione logistica sono date nel precedente paragrafo 5.1., dove si nota che il caos nel sistema dell'equazione logistica nasce attraverso la sequenza del raddoppio del periodo, caratterizzato dal numero di Feigenbaum (5.1.4).

Circuito elettrico non lineare.

L'esempio del caos nel circuito elettrico è stato mostrato dallo scienziato giapponese Ueda in un circuito con un elemento induttivo non lineare. Questo circuito è descritto dalla seguente equazione

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = r \cos t, \quad (5.2.3)$$

che in sostanza è un caso particolare dell'equazione di Duffing. Per mezzo della modellazione su strutture informatiche analogiche e digitali di Ueda ha ricevuto dinamiche caotiche di sistema (5.2.3) i cui contorni della mappa di Poincare sono mostrati in

Fig. 5.2.

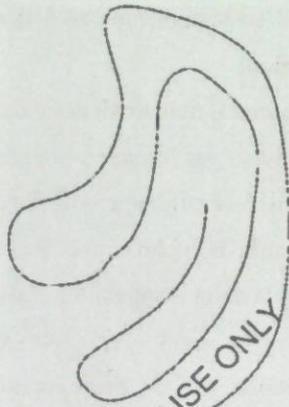


Fig. 5.2.

Il caos nei sistemi di controllo.

Nei sistemi di controllo sono possibili anche movimenti e oscillazioni caotiche.

Considereremo il sistema del terzo ordine descritto dalle seguenti equazioni

$$m\ddot{x} + \delta\dot{x} + f(x) = -y, \dot{y} + \alpha y = k_1[x - xg(t)] + k_2\dot{x}, \quad (5.2.4)$$

dove y è la dimensione della forza creata da un anello di retroazione, e k_1 e k_2 rispettivamente i coefficienti di retroazione per situazione e velocità $xg(t)$ è un segnale di base esterno.

Per il sistema (5.2.4) sono possibili due tipi di compiti di ricerca. Nel primo caso, credere che il sistema sia autonomo, cioè un segnale di base di

zero $xg(t) = 0$. In questo caso, viene indagato lo spazio dei coefficienti di k_1 e k_2 per la ricerca di aree di equilibrio, oscillazioni periodiche o caotiche. Nel secondo caso, un segnale di $xg(t)$ periodico, cioè il peso si muove periodicamente sulla traiettoria impostata. Poi, valori di frequenza e coefficiente di rinforzo a cui il sistema si comporta sulla traiettoria periodicamente chiusa o caotica.

Le oscillazioni caotiche del sistema (5.2.4) che si verificano come nel primo caso per i sistemi autonomi e nel secondo caso con $xg(t)$ periodico sono state studiate da molti scienziati. Per esempio, a $f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - r)$ questo sistema meccanico azionato ha tre disposizioni di equilibrio (punti speciali), e nel sistema sorgono sia periodiche su un ciclo limite, sia oscillazioni caotiche. Anche le oscillazioni caotiche nel sistema (5.2.4) con funzione di feedback sono state studiate.

5.3. 5.3. Criteri delle oscillazioni caotiche

Vi è una serie di approcci per determinare i criteri di emersione delle oscillazioni caotiche o del caos nei sistemi dinamici. I criteri sono condivisi su due tipi: su quelli predittivi o teorici, che permettono di prevedere l'emergere del caos, e su quelli diagnostici o sperimentali, che permettono di stabilire l'esistenza o l'assenza del caos.

Il criterio predittivo per la previsione delle oscillazioni caotiche di emergenza (movimenti) è chiamato tale criterio che definisce l'insieme dei parametri di funzionamento (o valore del parametro separato), che porta al caos. Ai criteri predittivi appartengono innanzitutto il criterio del raddoppio del periodo, il criterio dell'alternanza e del caos di transizione e anche il criterio dell'esistenza di traiettorie gomokliniche e il criterio di Chirikov sulla sovrapposizione delle risonanze per il caos conservativo.

Criterio diagnostico di emersione di oscillazioni caotiche (movimenti) la prova che dai risultati delle misurazioni viene chiamata o permette di

definire l'elaborazione dei dati se era o è sistema concreto in una condizione di dinamica caotica. Per diagnosticare secondo criteri i criteri stabiliti per mezzo di appartenenza fisica e

esperimenti numerici (a macchina) in cui spesso si utilizzano caratteristiche diagnostiche come gli indicatori di Lyapunov e la dimensione frattale.

Criteri diagnostici sperimentali di caos

Da numerosi esperimenti è stato stabilito che in molti sistemi non lineari si verificano oscillazioni caotiche nei valori dei parametri ad ampio spettro.

Nel capitolo III di questo capitolo sono stati presi in considerazione alcuni esempi di emergenza del caos, per cui qui prenderemo in considerazione solo due esempi di caos studiati sperimentalmente, ovvero un circuito elettrico ad induttanza non lineare e una particella potenzialmente con due fori o una trave di curvatura longitudinale che sono caratterizzati dall'equazione di Duffing.

1) Le oscillazioni forzate dell'induttanza non lineare in un circuito elettrico.

L'equazione è stata data nel paragrafo precedente (5.2.3)

indagata da Y. Ueda che viene presentata nella forma adimensionale

$$\ddot{x} + k\dot{x} - x^3 = r \cos t, \quad (5.3.1)$$

dove x è la corrente in induttanza, k è la resistenza di un circuito, r è la tensione irresistibile.

La dinamica del sistema (5.3.1) è definita da due parametri k , r e condizioni di ingresso ($x(0)$, $\dot{x}(0)$). Al variare di questi due parametri è stato ricevuto l'insieme dei vari movimenti periodici, subarmonici e caotici che sono dati in molte opere, in particolare a F. Moon.

2) Le oscillazioni forzate di una particella potenzialmente con due fori.

I movimenti obbligati di una particella tra due disposizioni di equilibrio sono potenziali minimi con due fori, sono descritti l'equazione come Duffing

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - 1/2x(1 - x^2) = r \cos \omega t, \quad (5.3.2)$$

dove δ è il coefficiente di attenuazione adimensionale, r è la forza coercitiva, ω - la frequenza coercitiva, quantità non dimensionale per mezzo della

frequenza delle proprie piccole oscillazioni del sistema in uno dei potenziali fori.

L'equazione (5.3.2) può descrivere il movimento di una particella nel plasma, il difetto di un corpo solido o, all'altoparlante di una curva longitudinale di un fascio.

Poiché la caratteristica diagnostica serve contemporaneamente all'indicatore di Lyapunov. Allo stesso tempo, sul piano (r, ω) al coefficiente di attenuazione impostato δ ci sono aree di oscillazioni caotiche di una configurazione difficile. A $r \gg 1r$, il modo dinamico nel sistema (5.3.2) sarà vicino al modo che è stato studiato da Ueda in caso di (5.3.1).

Criteri predittivi (teorici) del caos

La ricerca di criteri teorici per la definizione di quali condizioni o parametri impostati, il sistema dinamico considerato entrerà in modalità caotica, viene condotta solo per un caso concreto separatamente.

La sequenza di biforcazioni del raddoppio del periodo può essere un esempio, considerato in particolare, Feigenbaum per la mappa quadrata.

Sebbene questi risultati siano stati generalizzati per una vasta classe di mappe unidimensionali attraverso la teoria dei renormgrups, criteri di raddoppio il periodo in cui non sempre viene effettuata per le mappe di ordine superiore. Non di meno, lo scenario del raddoppio del periodo è uno dei possibili modi di transizione verso il caos. Nei sistemi fisici più difficili, la comprensione del modello del tipo di Feigenbaum può essere utile per definire quando e perché ci sono movimenti caotici.

Le principali teorie del caos che si traducono in criteri utili alla previsione o alla diagnosi del comportamento caotico nei sistemi reali, sono le seguenti:

raddoppio del periodo;

traiettorie gomokliniche e mappa a ferro di cavallo;

l'alternanza e il caos di transizione;

criteri di sovrapposizione delle risonanze per il caos conservatore;

teorie private per compiti con un potenziale che hanno diversi buchi.

In questa sede sono stati presi in considerazione alcuni dei criteri sopra elencati

alla testa, quindi ci fermeremo ulteriormente sui criteri connessi con traiettorie gomokliniche e mappa a ferro di cavallo e anche con criteri di sovrapposizione di risonanze per il caos conservatore.

Traiettorie gomokliniche e mappa a ferro di cavallo.

Uno dei metodi teorici che ha portato alla creazione di criteri privati dei movimenti caotici, si basa sulla ricerca di mappe di tipo ferro di cavallo e traiettorie gomokliniche in sistemi dinamici di modelli matematici. Tale procedura matematica nota come metodo di Melnikov, ha portato ai criteri del caos come il numero di Reynolds che collega i parametri del sistema.

Il criterio di una traiettoria gomoklinica è matematico per metodo di ricezione di un rapporto predittivo tra gruppi di variabili adimensionali del sistema fisico. Questo criterio dà condizione necessaria, ma insufficiente di emergere del caos. Allo stesso tempo, il criterio della traiettoria gomoklinica può anche generare condizioni necessarie e sufficienti di prevedibilità del comportamento del sistema dinamico. Ad esso, in sostanza questo metodo permette di definire se il modello possiede proprietà della mappa a ferro di cavallo o della trasformazione del fornaio.

Nel caso della mappa a ferro di cavallo l'attenzione si concentra sull'insieme delle condizioni di ingresso per le traiettorie che riempiono alcune sfere nello spazio di fase. Se il sistema si comporta come mappa di tipo ferro di cavallo, questo volume iniziale nello spazio di fase in azione

Gli altoparlanti dell'impianto assumono la nuova forma: la sfera iniziale si amplia e si sviluppa (Fig. 5.3). Dopo molte iterazioni queste pieghe e allungamenti generano una struttura frazionata, e si perdono le informazioni esatte sulle condizioni di ingresso. Per le conformità di stabilimento tra condizioni iniziali e successive del sistema

è richiesta una precisione sempre maggiore. Con una precisione finale di definizione del problema

la previsione diventa impossibile.

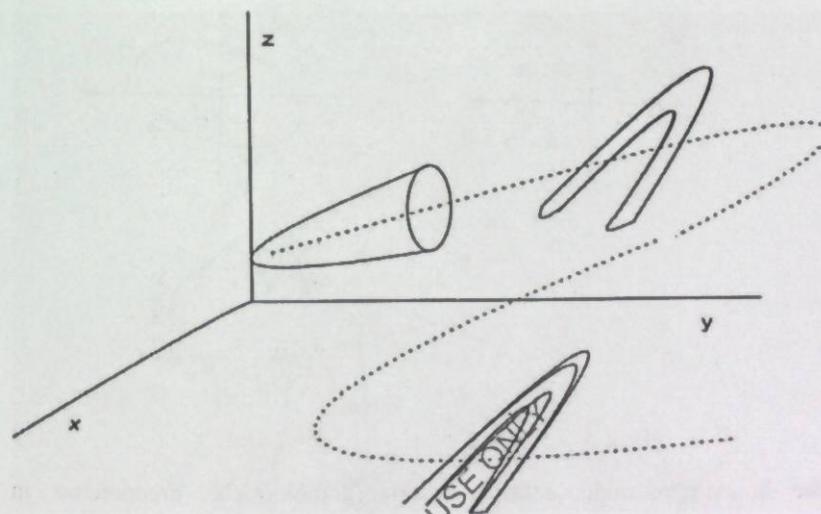


Fig. 5.3.

Traiettorie gomokliniche. Comportamento di dinamiche non lineari e caos spesso è possibile risolvere, su selezione discreta del movimento che si chiama *mappa di Poincare*. Nella mappa di Poincare di un punto, formare la sequenza di punti nello spazio n - misurato, stabilendo in lunghezza alcune curve continue chiamate da *varietà*.

Le traiettorie gomokliniche sono la sequenza dei punti chiamati da una traiettoria.

Ad esempio, se si tratta di una traiettoria periodica con il periodo 3, allora la sequenza di punti visita in serie tre stati su piani di fase (Fig. 5.4, a). E la traiettoria quasiperiodica corrisponde alle sequenze dei punti che si muovono su qualche curva chiusa (Fig. 5.6, b).

Nella dinamica della mappa i punti speciali si incontrano, quando si passa attraverso le cui traiettorie in una direzione si muovono da essi, e su un'altra verso di essi. Un esempio è una sella. Tale punto speciale ha due curve

sono varietà lungo le quali le traiettorie si avvicinano a lei, e due curve sono varietà lungo le quali la sequenza dei punti di Poincare viene rimossa da una sella (Fig. 5.6, c).

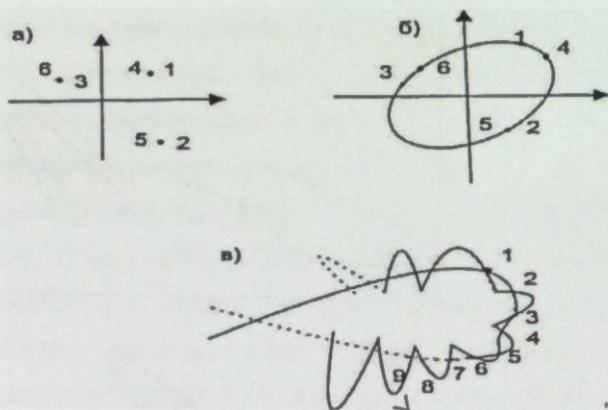


Fig. 5.4.

Per la comprensione delle traiettorie gomokliniche prenderemo in considerazione la dinamica

il pendolo che oscilla con attenuazione sotto l'influenza della forza coercitiva.

La mappa di Poincare, sincronizzata con una forza di frequenza costrittiva, ha un punto speciale di sella in prossimità $\theta = \pm n\pi$ (n è dispari), come mostrato in Fig. 5.5 per un caso di pendolo che oscilla sotto l'azione della forza costrittiva.

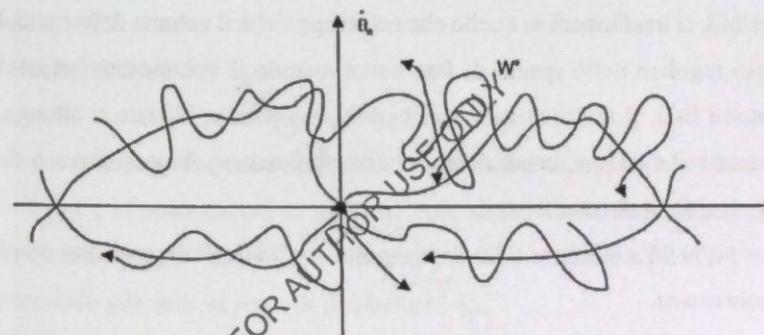
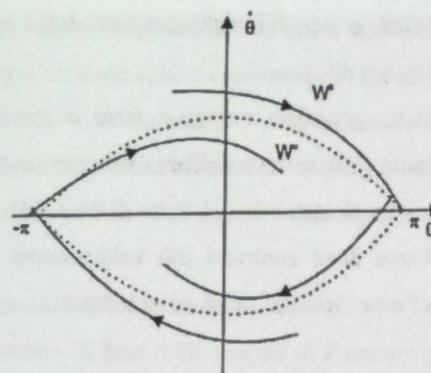


Fig. 5.5.

Con un'ampiezza piuttosto piccola della forza coercitiva le varietà stabili e instabili di una sella non si preoccupano l'una dell'altra. Ma all'aumentare della forza coercitiva queste due varietà si incrociano, e si verifica un numero infinito di volte. Allo stesso tempo i punti di intersezione varietà stabili e instabili sono chiamati *punti gomoklinici*. Il punto Poincare vicino ad uno di questi punti è la mappa nelle vicinanze di tutti altri punti di intersezione. L'insieme di tali punti di Poincare è chiamato *traiettoria gomoklinica* (Fig. 5.6, c).

L'incrocio di varietà stabili e instabili sulla mappa di Poincare genera nel quartiere di ogni gomoklinical la mappa a ferro di cavallo a punta con

conseguente imprevedibilità o sensibile dipendenza dalle condizioni di ingresso che è segno distintivo di caos.

Le traiettorie gomokliniche generano mappe a ferro di cavallo, così, ad esempio, nel caso del sistema dissipativo dell'area vengono mappate in aree più piccole, e vicino alla varietà instabile del tratto di area. Ma poiché l'area totale deve diminuire, l'area deve contrarsi più velocemente di quanto si estende. Di conseguenza l'area vicino ai punti gomoklinici si sviluppa.

Così, il sistema dinamico è considerato come trasformazione dello spazio di fase, cioè il volume dei punti che rappresentano le varie condizioni di ingresso possibili, si trasformerà in quello che nel tempo - che il volume deformato. Un flusso regolare nello spazio di fase nasce quando il volume trasformato ha contorni lisci. Il flusso caotico nasce quando il volume iniziale si allunga, si contrae e si sviluppa, come durante la trasformazione del panettiere o della mappa a ferro di cavallo.

Il criterio di Chirikov della sovrapposizione delle risonanze per il caos conservatore.

Le ricerche sui movimenti caotici nei sistemi conservatori sono state avviate molto prima che nei sistemi dissipativi. Ma i sistemi conservatori sono meno diffusi e si limitano a settori come la meccanica celeste, la fisica del plasma e la fisica degli acceleratori.

Come esempio in questo caso il caos che si crea è considerato al movimento della palla che salta, è elastico riflesso dai piani orizzontali. Ma le equazioni differenziali per questo caso, descrivono anche il comportamento degli oscillatori non lineari collegati e il comportamento degli elettroni in campo elettromagnetico. Le equazioni del colpo di peso gravitazionale circa l'oscillazione di una superficie ha un aspetto

$$x_{n+1} = x_n + k \sin \varphi_n, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + x_{n+1}, \quad (5.3.3)$$

dove x_n 'e la velocit' a prima del colpo, e φ_n 'e il punto temporale in cui avviene il colpo, valutato sulla frequenza delle oscillazioni di una tabella, ossia $\varphi \equiv \omega t \pmod{2\pi}$, k 'e la quantit' a proporzionale all'ampiezza della tabella oscillante. Come il sistema conservativo (senza perdita di energia), le aree sono considerate condizioni di ingresso nello spazio di fase (x, φ) mantengono l'area

a ripetute iterazioni di mappature (5.3.3).

Le traiettorie di fase delle mappe di Poincare (5.3.3) sul piano (x, φ) a due valori $k = 0,6$ e $k = 1,2$ sono mostrate nel lavoro F. Luna.

Quindi a $k = 0,6$, i punti $x = 0,2 \pi$ corrispondono alle traiettorie con il periodo 1, cioè

$$x_1 = x_1 + k \sin \varphi_1,$$

$$\varphi_1 = \varphi_1 + x_1.$$

La soluzione di questo sistema di equazioni ha un aspetto $\varphi_1 = 0, \pi$; $x_1 = 0$ (φ_1 e x_1 sono assunti su $\text{mod } 2\pi$). Allo stesso tempo la decisione close $\varphi = \pi$ è stabile a $|2 - k| < 2$, ma close $\varphi = 0,2\pi$ è instabile a $|2 + k| < 2$ e corrisponde alla sella ai punti di mappatura.

Chiudere $x = \pi$ la traiettoria con il periodo 2 fissato dalla decisione viene ricevuta

sistemi delle equazioni

$$x_2 = x_1 + k \sin \varphi_1, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + x_2,$$

$$x_1 = x_2 + k \sin \varphi_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + x_1.$$

E in questo caso, ci sono sia punti stabili, sia punti instabili il periodo 2, si sostiene anche che i punti stabili esistono alla condizione $k < 2$.

A $k = 1,2$ si ricevono i movimenti del terzo tipo: vicino ai luoghi, dove a valori più piccoli del parametro k c'erano selle e separatori che andavano da una sella in una sella, la nuvola di punti che corrisponde a un caos conservatore. A $k < 1$ è localizzata nel quartiere dei punti sella. Ma a $k \approx 1$ la

traiettorie errante diventa globale e "viene spalmata" su tutto lo spazio delle fasi.

Allo stesso tempo si dimostra che si possono ricevere tutti i tipi di movimenti, semplice la scelta delle condizioni di ingresso (non essendoci attenuazione, non ci sono anche attrattori).

Il criterio del caos globale nel sistema (5.3.3) è stato offerto al fisico sovietico Chirikov che ha notato che all'aumentare del parametro k la distanza tra le separatrix connesse con i movimenti periodici del periodo 1 e del periodo 2, diminuisce. Se non intervento del caos, quelle separatrix sarebbero bloccate (Fig. 5.6), da qui il nome del criterio questo è *criterio di sovrapposizione*.

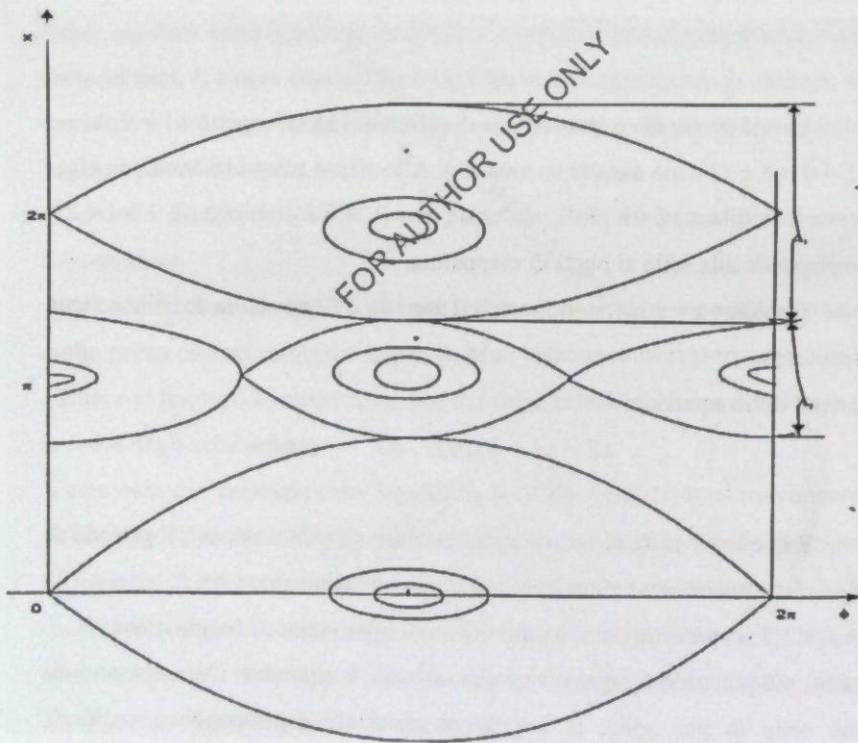


Fig. 5.6.

Decomposizione standard (5.3.3) vicino ad una di queste risonanze periodiche su piccoli k , riceveremo che la quantità dell'area ha limitato la corrispondente separatrice, fa quantità

$$\Delta_1 = 4k/2, \Delta_2 = k. \quad (5.3.4)$$

In ciascuna delle decomposizioni non sono considerate influenza di altre risonanze.

La condizione di sovrapposizione è che $\Delta_1 + \Delta_2 = 2\pi$, o

$$4kc/2 + kc = 2\pi. \quad (5.3.5)$$

Dall'equazione (5.3.5) troviamo $kc = 1,46$ che è la valutazione dall'alto valore critico $k = kc$ per il caos globale in numero pari a $kc \approx 1,0$.

FOR AUTHOR USE ONLY

CAPITOLO 6. DISPOSIZIONI DI BASE DELLA TEORIA E DEL METODO TOPOLOGICO DELLA RUGOSITÀ TOPOLOGICA DEI SISTEMI DINAMICI

6.1. Ruvidità topologica dei sistemi dinamici

Nel paragrafo 4.1.2. del Cap. 4 è stata data la definizione di rugosità dei sistemi dinamici secondo Andronov - Potryagin.

Va notato che un concetto di rugosità da Andronov - Potryagin i criteri corrispondenti di rugosità determinano solo proprietà qualitative di rugosità dei sistemi dinamici. Ma questo concetto permette di inserire una misura quantitativa della rugosità in considerazione.

Davvero, considerando le condizioni di dipendenza continua delle soluzioni dei sistemi (4.1.7.) e (4.1.8)

$$\dot{x} = F(x), \quad \dot{\bar{x}} = F(\bar{x}) + f(\bar{x}),$$

Dalle condizioni di ingresso e dalle giuste parti di questi sistemi, possiamo affermare che per i sistemi di varie strutture topologiche di quantità δ - prossimità (4.1.7.) e (4.1.8.), con conseguente ε - identità (a fisso piccolo $\varepsilon > 0$), sono generalmente vari.

Pertanto è possibile inserire le seguenti definizioni.

6.1. Definizioni 6.1.1. Ruvida nel campo del sistema G (4.1.7.) è detta la *massima ruvida* su un insieme di sistemi N se la quantità δ - prossimità dei sistemi (4.1.7.) e (4.1.8.), portando a ε - identità, sarà (per tutti $\varepsilon > 0$) *massima*.

Definizione 6.1.2. Non grezzo nel campo del sistema G (4.1.7.) è detto *minimo non grezzo* su un insieme di sistemi N se la quantità ε -identità alla quale la condizione di rugosità è ancora soddisfatta è (per tutti $\delta > 0$) *minima*.

Osservazione. Un insieme di N nelle definizioni di tutti i sistemi dinamici formulati sopra questo insieme che sono topologicamente identici tra loro.

Come è noto dalla teoria dei sistemi dinamici, le condizioni di rugosità necessarie e sufficienti sono determinate da *traiettorie speciali* (*punti speciali, separatori, cicli limite, ecc.*). Le traiettorie speciali più importanti, in - molto *punti speciali* (*SP*) sono la definizione della struttura topologica del sistema. La possibilità di determinare la rugosità dei sistemi dinamici sulla rugosità nel quartiere di *SP* è dimostrata dal teorema di Grobman-Hartman che sostiene che nel quartiere di *SP* iperbolico (rugosità) il sistema dinamico è simile alla parte lineare.

Le condizioni di avvicinabilità della massima rugosità sono definite dal teorema riportato di seguito. Ma prima di formulare il teorema, inseriremo le seguenti designazioni:

M è una matrice di riduzione di una matrice di parte lineare A a base diagonale (quasidiagonale) con una matrice Q , cioè

$$MQ = AM, \quad (6.1.1)$$

dove $Q = \text{diag}\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$, o $Q = \text{diag}\{\lambda_{1,2}^k = \delta \pm j\beta, k = \overline{1, l}, i = \overline{2l+1, n}\}$,

e $c\{M\}$ è il numero di condizionalità (di solito numero spettrale) di una matrice M .

Così, si svolge il seguente teorema.

Teorema 6.1.1. Affinché il sistema dinamico nelle vicinanze di un punto speciale iperbolico (x_0) fosse il massimo approssimativo, e nelle vicinanze non iperbolico è minimo non approssimativo, è necessario e per avere abbastanza

$$M^* = \text{argmin } c\{M\}. \quad (6.1.2)$$

La prova.

La prova del teorema 6.1.1 per il caso $n=2$ è fornita nel lavoro [163].

Prenderemo in considerazione un caso di sistema approssimativo.

Necessità. Lasciate che il sistema dinamico impostato dall'equazione

$$\dot{x} = F(x), \quad (6.1.3)$$

dove $x \in R^n$, F è n -a funzione vettoriale misurata, è approssimativa nell'area G . Poi secondo i criteri di rugosità di Andronov - Pontryagin in SP dell'area G :

a) $\det A \neq 0, \quad \text{tr } A \neq 0$;

b) se $\text{tr } A = 0$, allora $\det A < 0$,

dove $\text{tr } A$ e $\det A$ sono rispettivamente traccia e determinante di una matrice A .

Diciamo sistema (6.1.3.) grezzo vicino ad un SP con una matrice di parte lineare A , cioè lasciamo che $\det A \neq 0$.

Poi, per la determinazione della rugosità secondo Andronov - Pontryagin, il sistema di perturbazione definito nella sottozona chiusa limitata \bar{G} di un campo di G

$$\dot{\bar{x}} = F(\bar{x}) + f(\bar{x}), \quad (6.1.4)$$

sarà ε -identico al sistema (6.1.3).

Se ora si considera la continua dipendenza delle decisioni (6.1.3) e (6.1.4.) dalle condizioni di ingresso e dalle parti giuste, per i sistemi di varia topologia di quantità δ -prossimità (6.1.3) e (6.1.4), portando a ε -identità (a fisso piccolo

$\varepsilon > 0$), sono generalmente varie.

Ma allo stesso tempo, la condizione di $\det A \neq 0$ equivale alla mancanza di autovalore zero λ_i ($i = \overline{1, n}$) Matrici A .

Ai cambiamenti delle parti giuste nel sistema (6.1.4), gli autovalori $\bar{\lambda}_i$ cambiamento in relazione a λ_i (6.1.3) soggetti meno, che meno quantità di numero di condizionalità della matrice di M risultante in diagonale (quasidiagonale) base una matrice di parte lineare A in un SP (x_0).

$$|\bar{\lambda}_i - \lambda_j| \leq c\{M\} \|\bar{A} - A\|, \quad (6.1.5)$$

dove $\bar{\lambda}_i, \lambda_j - i, j = \overline{1, n}$ sono autovalori della perturbazione e dei sistemi iniziali in un SP con matrici di una parte lineare secondo \bar{A}, A $\|\cdot\|$ è una qualsiasi norma di matrice. Pertanto, il numero di condizionalità con $\{M\}$ stima la quantità δ -prossimità dei sistemi (6.1.3) e (6.1.4) a cui per ε fisso > 0 , le condizioni di rugosità sono soddisfatte:

ε

$$(\bar{D}, (6.1.4.) \equiv (D, (6.1.3))) \quad (6.1.6)$$

quindi $c\{M\}$ è una misura della rugosità del sistema iniziale (6.1.3).

In questo caso, c'è [163] il massimo approssimativo in un sistema SP (x_0) per il quale $\delta = \delta_{\max}$ e $M' = \text{argmin } c\{M\}$.

Sufficienza.

Che la condizione sia soddisfatta (6.1.2).

Quindi, le modifiche λ_i matrici A saranno minime e di conseguenza (6.1.3) saranno il massimo approssimativo.

Ora prenderemo in considerazione un caso di sistema non approssimativo.

Lasciate che il SP (x_0) del sistema (6.1.3) non sia iperbolico allora, o $\text{tr } A \neq 0, \det A = 0$, o $\text{tr } A = 0, \det A > 0$.

Per analogia di un caso di sistema grezzo (o un punto iperbolico) è facile trarre la conclusione che i sistemi non grezzi (6.1.3) possono differire con quantità con i valori minimi $\varepsilon_{\min} > 0$ per i quali si effettua (6.1.2), cioè e per i sistemi non grezzi è possibile inserire una misura di non rugosità alla quale può servire quantità $c\{M\}$.

Pertanto, per il sistema minimo non grezzo di valore $\varepsilon_{\min} > 0$ a cui si esegue (6.1.6), ci sarà minimo di tutti i sistemi N non grezzi impostati, δ -prossimità alla (6.1.3).

In tal caso, per il sistema minimo non approssimativo la condizione è soddisfatta (6.1.2) e, al contrario, se avviene (6.1.2), il sistema (6.1.3) sarà minimo non approssimativo.

Teorema 6.1.1. è dimostrato.

6.1. Osservazioni sul teorema 6.1.1.

1. La possibilità di considerazione e non iperbolica SP segue dalla continuità della funzione $c\{M\}$. È necessario notare che dall'analisi si sa che la decisione concreta, per non punti iperbolici in senso stretto, non esiste (generalmente n delle decisioni di ramificazione).

2. Come risulta dalle definizioni 6.1.1 e 6.1.2, ed esistono anche i teoremi 6.1.1

sia i sistemi minimi grezzi, sia la maggior parte di quelli non grezzi per i quali con $\{M\} \rightarrow \infty$. Altrimenti, insiemi di sistemi grezzi e non grezzi formano insiemi continui in relazione ad un indicatore di rugosità $c\{M\}$. Allo stesso tempo sistemi per i quali $c\{M\} \rightarrow \infty$ ci saranno sistemi con una forma quasideagonale giordana di matrici di una parte lineare.

3. Definizione 6.1.1 e 6.1.2 e anche una condizione del teorema di 6.1.1 invariabilmente riguardo alla dimensione dello spazio di fase considerato. La misura inserita dalla rugosità $c\{M\}$ dei sistemi dinamici permette di risolvere i problemi di controllo della rugosità dei sistemi nelle vicinanze di SP dello spazio di fase.

Davvero, lasciate che il sistema sia impostato

$$\dot{x} = \phi(x, u), \quad (6.1.7)$$

dove $x \in R^n$, $u \in R^r$ sono secondo un vettore di coordinate di fase e di controllo del sistema, $\phi(-)$ è n -misurato non lineare differenziato un vettore - funzione.

Inoltre, lasciate che

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (6.1.8)$$

è il sistema di una parte lineare per (6.1.7) in un $SP(x_0, u_0)$

$$\Phi(x_0, u_0) = 0. \quad (6.1.9)$$

In (6.1.8) matrici A e B :

$$A = [\phi_{ij}^*(x_0, u_0)], \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$B = [\phi_{ij}^*(x_0, u_0)], \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r},$$

dove $\phi_{ij}^*(x_0, u_0)$, $\phi_{ij}^*(x_0, u_0)$ sono rispettivamente derivate private $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial \phi_i}{\partial u_j}$ a un punto (x_0, u_0) .

Per il sistema (6.1.7) il seguente teorema è corretto.

Teorema 6.1.2. Affinché nel sistema dinamico operato (6.1.7) descritto nello spazio delle fasi di $x \in R^n$ della vicinanza di un $SP(x_0, u_0)$ per mezzo di matrici di parte lineare A e B , gestione $u = -Kx$ fornendo vicino al corrispondente SP del sistema chiuso con la matrice sintetizzata $F = A - BK$ la massima rugosità o la minima non rugosità al sistema (6.1.7) esisteva, è sufficiente anche che fossero soddisfatte le condizioni di non degenerata risolvibilità dell'equazione di Sylvester per il sistema chiuso.

La prova.

Necessità. Che ci sia $u = -Kx$ sistema di traduzione (6.1.8) vicino ad un $SP(x_0, u_0)$ con una matrice di parte lineare A , nel sistema massimo grezzo (o minimo non grezzo) con una matrice di parte lineare nello stesso punto di $F = A - BK$.

Poi secondo il teorema 6.1.1 si realizza (6.1.2), quindi, c'è una M non degenerata, tale che $MQ = FM$ da dove riceviamo l'equazione di Silvestro

$$MQ - AM = -BH, \quad (6.1.10)$$

dove $H = KM$.

Pertanto le condizioni di non degenerata risolvibilità dell'equazione di Sylvester sono soddisfatte, cioè:

1. Controllabilità di coppia (A, B) ;
2. Osservabilità della coppia (Q, H) ;
3. Disgregazione delle gamme A e Q ;
4. Non la degenerazione di BH (a più autovalori).

Sufficienza. Che sia soddisfatta la condizione di non degenerata risolvibilità dell'equazione di Silvestro, cioè che ci sia una decisione non degenerata M .

Poi, sintetizzando il controllo

$$u = -Tessile, \quad (6.1.11)$$

dove $K = HM^{-1}$, mediante un qualsiasi algoritmo (metodo) di minimizzazione $c(M)$ è possibile raggiungere il minimo $c(M)$ o $M = \arg \min c(M)$.

Teorema 6.1.2. è dimostrato.

Così, come risultato dell'uso del teorema 6.1.2, il problema del raggiungimento della massima rugosità si riduce ad un problema di programmazione non lineare della minimizzazione $c(M)$, la scelta di una matrice di H o (K) nell'equazione di Sylvester con il successivo razionamento della matrice M trovata (per il raggiungimento dell'unicità).

Di conseguenza, l'algoritmo di raggiungimento della massima rugosità dei sistemi dinamici su set di SP nell'area G sarà il seguente.

1. SP nel campo di G sono definiti. P sarà vuoto tali punti.
2. Sintesi dei controlli di $u_i, i = \overline{1, p}$, tale che in SP è fornito

$$M_i = \arg \min c(M_i), \quad i = \overline{1, p}.$$

3. Nuove coordinate di SP x_{ij} di numeri c_j eccellenti da dato, cioè $j \neq i$ per i quali sono calcolati $c(M_i), i = \overline{1, p}$.
4. Quel controllo $u^* = u_i = -K_i x$ che fornisce un minimo esce $\sum_{i=1}^p c(M_i)$.
5. Il sistema (6.1.7) con una matrice di una parte lineare di $F_1 = A_1 - B_1 K_1$ in un SP di $x(t)$ che corrisponde al controllo u^* e sarà il massimo sistema grezzo nell'area G .

Se nell'area G eccetto SP ci sono anche cicli limite, allora il metodo offerto che chiameremo metodo della "condizionalità della rugosità topologica" o semplicemente metodo della "rugosità topologica" permette di estenderlo e alle aree nelle vicinanze dei cicli limite. Lo mostreremo.

Lasciate che nel campo degli spazi della fase G ci sia un ciclo limite.

Quindi se la matrice fondamentale delle soluzioni $X(t)$ del sistema è nota

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad (6.1.12)$$

che su di lei si trova una matrice di una *monodromia* $X(T)$ di un ciclo limite con il periodo T .

Se la matrice fondamentale di $X(t)$ non viene trovata analiticamente, allora la matrice di una monodromia è uno dei metodi numerici, per esempio con il cosiddetto *metodo di cottura*.

Con il metodo di cottura, per il sistema (6.1.12) sono impostati da alcune condizioni di ingresso

$$x(0) = \alpha_i, i = \overline{1, n}, \quad (6.1.13)$$

e un certo valore del periodo di T .

Inoltre il sistema (6.1.12) è integrato da $t=0$ punto, a $t=T$ punto.

Di conseguenza i valori x_i in un punto risultano

$$t = T: x_i(T) = \varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, T), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.1.14)$$

La matrice di $X(T)$ con gli elementi $\partial \varphi_i / \partial \alpha_j, i, j = \overline{1, n}$ sarà una matrice di un

monodromo

$$X(T) = [\partial \varphi_i / \partial \alpha_j], \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (6.1.15)$$

La matrice di una monodromia $X(T)$ definisce in modo inequivocabile le proprietà locali della vicinanza di un ciclo limite, in particolare la stabilità orbitale è determinata da

autovalori $\mu_j, j = \overline{1, n}$ chiamato dagli animatori di questa matrice. Se $|\mu_j| < 1$, tranne uno che è sempre uguale a +1, allora il ciclo limite è stabile orbitale. Altrimenti il ciclo limite orbitale è instabile.

Ora, come in un caso di SP è possibile inserire la misura $cT(M)$ per la valutazione della rugosità dei sistemi dinamici nel quartiere dei cicli limite come numero di condizionalità di una matrice di $M(T)$, diagonalizzata (o kvazidiagonalizzata) una matrice di $X(T)$, cioè

$$cT(M): M(T)Q(T) = X(T)M(T)M(T). \quad (6.1.16)$$

dove $Q(T) = \text{diag} \{ \mu_i, i = \overline{1, n} \}$,

o $Q(T) = \text{diag} \{ Q_1, \mu_i, i = \overline{3, n} \}$ con $Q_1 = [\partial, \beta; \partial, -\beta]$.

Per i cicli limite il teorema è giusto.

Teorema 6.1.3. Affinché nell'orbitale vicino - un sistema dinamico di ciclo limite stabile e limite massimo, e nell'orbitale vicino - un minimo di ciclo instabile e non approssimativo, è necessario anche un minimo di ciclo instabile e non approssimativo, è sufficiente che

$$M(T) = \arg \min c\{M(T)\}. \quad (6.1.17)$$

Il teorema 6.1.3. si dimostra simile al teorema 6.1.1.

È facile estendere un metodo di "rugosità topologica" anche ai sistemi dinamici a pezzi e lisci, considerando le rugosità cumulative sulle aree di rugosità del sistema se SP non sono al confine di queste aree. In caso di sistemi non lisci è possibile estendere l'uso del metodo offerto, utilizzando ciò che o il derivato generalizzato dell'analisi grezza per la definizione di una matrice di una parte lineare.

6.2. Applicazione di un metodo di rugosità topologica ad una ricerca di biforcazioni di sistemi dinamici

Formuliamo disposizioni di base per l'applicazione di un metodo di ruvidità topologica ad una ricerca di biforcazioni sotto forma dei seguenti problemi.

Teorema 6.2.1. Per SP non iperbolico con uno zero autovalore valido ai cambiamenti i parametri q in q^* hanno puntato il posto

$$c\{M(q^*)\} = \min_q c\{M(q)\}. \quad (6.2.1)$$

La prova. Applicheremo la teoria delle perturbazioni, nota dall'algebra superiore, per quanto riguarda le disposizioni basate sui teoremi di Gershgorin.

Per la definitività effettueremo la prova per un caso di autovalori semplici.

Lasciate che la matrice di una parte lineare di A_0 in un punto speciale (q^*) abbia autovalori semplici e lasciate $\lambda_1(q^*) = 0$.

Inoltre, lasciate che $A = A_0 + \Delta A = A_0 + \varepsilon A_\varepsilon$ è la matrice di perturbazione vicino

$q = q^*$ spazi di punto dei parametri $q \in R^p$, $A = A_0 - \varepsilon A_0$ e $\bar{A} = A_0 + \varepsilon A_0$ le matrici di perturbazione di un vicino di un punto (q^*) rispettivamente a sinistra e a destra di $\lambda_1(q^*) = 0$ sul piano complesso degli autovalori. Qui $\varepsilon > 0$ è una piccola quantità.

Poi, dalla teoria delle perturbazioni, è possibile presentare

$$M_k^{-1} A_k M_k = \text{diag} \{ \lambda_i^k \} + \varepsilon \begin{bmatrix} \beta_{11}^k / S_1^k & \beta_{12}^k / S_1^k & \beta_{1n}^k / S_1^k \\ \beta_{21}^k / S_2^k & \beta_{22}^k / S_2^k & \beta_{2n}^k / S_2^k \\ \beta_{n1}^k / S_n^k & \beta_{n2}^k / S_n^k & \beta_{nn}^k / S_n^k \end{bmatrix}. \quad (6.2.2)$$

dove $k = 1, 2, 3$ indice che riporta da quantità designata rispettivamente alle matrici A , A e \bar{A} ; M_k sono matrici di diagonalizzazione di A_k , $\beta_{ij}^k = (y_i^T)^k A_\varepsilon x_j^k$; $(y_i^T)^k$; x_i^k sono classificati rispettivamente come autogeni destro e sinistro di i e j di autovalori di una matrice A_k ; $S_i^k = (y_i^T)^k x_i^k$, $i = \overline{1, n}$ sono parametri di orientamento degli spazi vettoriali $(y_i^T)^k$ e $(x_i^T)^k$ e x_i^k , $i = \overline{1, n}$ sono coseni x_i^k di angoli tra $(y_i^T)^k$ e x_i^k .

Se credere che $|\beta_{ij}^k| < 1$ sia elementi A_ε che secondo la teoria delle perturbazioni il centro e il raggio per i di un cerchio di Gershgorin saranno uguali

$$|\lambda_i^k + \varepsilon \beta_{ij}^k / S_i^k|, \varepsilon \sum_{j=1}^n |\beta_{ij}^k / S_i^k|,$$

o altrimenti, per λ_i^k di autovalore avremo un raggio di cerchio inferiore a

$$[n(n-1)\varepsilon] / |S_i^k|. \quad (6.2.3)$$

a $\varepsilon > 0$ piuttosto piccolo questo cerchio sarà isolato.

Crederemo che la quantità ε sia identica a tutti i $k=1,2,3$.

Poi, indagine quantità λ_i^k stimato il (6.2.3) sarà definito dalla quantità S_i^k .

Dimostreremo che questa quantità sarà la maggiore (da tre casi $k=1,2,3$) per $k=1$ quando $\lambda_i^k=0$.

Davvero, per $k=1$ avremo $Ax_1^T = 0$, $y_1^T = 0$, $x_1^T = y_1^T$, $|S_1| = |x_1^T| = 1$.

E per $k=2,3$, $x_1^T = y_1^T$ poiché, in generale $x_1^T \neq y_1^T A^T$ ma poi $|x_1^{2,3}| < 1$.

Pertanto, la qualità della valutazione (6.2.3), quindi e la perturbazione dell'autovalore per $k=1$ $\lambda(q^*) = 0$ sarà la più piccola che secondo la teoria di una mazorizzazione degli autovalori e dei vettori significa ciò che $c(Mk)$ per il punto $q=q^*$ sarà la più piccola (l'affermazione ovvia che abbiamo sempre la possibilità di prendere $\Delta\varepsilon$ si suppone qui in modo che la perturbazione $\lambda 1$ sarà la più grande di tutti gli autovalori).

Teorema 6.2.1. è dimostrato.

Nota al Teorema 6.2.1.

Secondo la prova del teorema 6.2.1. ne consegue che se $\lambda(q^*)=j0$, cioè una quantità puramente immaginaria che al passaggio attraverso un asse immaginario di autovalore $\lambda(q^*)$ (e quantità interfacciata $\lambda(q^*) = j0$) $|S_1|$ generalmente non è uguale a $q1$ e di conseguenza, in questo caso (6.2.1) non avviene.

Teorema 6.2.2. Se nel piano di fase un $SP(q^*)$ tale che:

1. Ha dei luoghi che hanno degli autovalori immaginari di una matrice di una parte lineare;
 2. $c\{M(q^*)\} = \min c\{M(q)\}$ è un SP di tipo difficile
- il $q = q^*$ è la biforcazione del parametro, e allo stesso tempo il ciclo limite nel quartiere di questo SP appare o scompare, cioè la biforcazione di Hopf avviene.

La prova. Ad una condizione 1) l' $SP(q^*)$ non è iperbolico e quindi è un punto come "centro", o come "fuoco difficile" e come allo stesso tempo la condizione 2) è soddisfatta circa il minimo non la rugosità.

Vicinanze di un SP , ovviamente può essere solo come "focus difficile", quindi biforcazione di emergenza (scomparsa) di un ciclo limite che si chiama biforcazione Poincare - Andronov - Hopf o come è accettato nella letteratura scientifica Hopf biforcazione Hopf avviene.

L'esempio più semplice di biforcazione di Hopf si osserva per il sistema

$$\dot{x} = -[-q + (x^2+y^2)]x - \omega y, \quad \dot{y} = -[-q + (x^2+y^2)]y + \omega x, \quad (6.2.4)$$

quale parte lineare $[\dot{x}, \dot{y}]^T = A[x, y]^T$,

dove matrice $A = \begin{bmatrix} q & -\omega \\ \omega & q \end{bmatrix}$, e autovalori $\lambda_{1,2} = q \pm j\omega$.

Al passaggio del valore attraverso il valore zero q si osserva la biforcazione di Hopf,

la quantità di autovalori attraverso un asse immaginario, e $c\{M\} = 1$.

Teorema 6.2.3. Affinché nel campo dei sistemi dinamici multidimensionali G multidimensionali al valore del parametro $q = q^*$, $q \in R^p$, biforcazione della struttura topologica è sorto, è necessario anche questo:

- 1) o nell'area considerata G non esiste SP iperbolico, o orbitale - cicli limite instabili per i quali si verifica:

$$c\{M(q^*)\} = \min \sum_{i=1}^p c_i \{M(q^*)\}, \quad (6.2.5)$$

dove p -quantità dei punti generali o cicli limite nell'area G ;

- 2) o nell'area G hanno punti iperbolici o cicli limite di sistemi dinamici per i quali la condizione è soddisfatta:

$$c\{M(q^*)\} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p c_i \{M(q^*)\} \rightarrow \infty. \quad (6.2.6)$$

La prova.

Necessità. Come è noto, la biforcazione significa che al momento della transizione attraverso il punto $q = q^*$ c'è un cambiamento spasmodico di un'immagine della natura dei movimenti dello spazio di fase nell'area G . Pertanto, se il caso 2) si verifica, allora è anche una condizione sufficiente di biforcazione, poiché allo stesso tempo c'è una rottura dell'operatore del campo vettore (un flusso di fase) $\dot{x} = F(x)$. Questo caso corrisponde alla transizione di due autovalori multipli validi in complessi interfacciati e viceversa (una forma giordana di una matrice di parte lineare A non diagonale).

Se questo caso non viene eseguito, allora è necessaria l'esecuzione di un caso 1) e non avremo SP iperbolico o cicli limite orbitali instabili al momento della transizione attraverso $q=q^*$, tali che devono cambiare i flussi di fase di salto in G .

Let in G è disponibile ciò che - o non iperbolico SP . Poi in questo punto, o uno degli autovalori puramente immaginario o è uguale a zero.

In tal caso, come è dimostrato secondo i teoremi 6.2.1 e 6.2.2 al punto $q = q^*$ la condizione è soddisfatta

$$c\{M_i(q^*)\} = \min_q c\{M_i(q)\},$$

e nelle vicinanze di questo SP si verifica ciò che - o biforcazione locale. E nell'area G una condizione 1) è piuttosto ovvia, si verifica o biforcazione locale se in qualche PS questa condizione, o biforcazione globale in tutta l'area G è soddisfatta se la condizione 1) è soddisfatta in tutti i PS di quest'area.

Quando si esegue una condizione 2) teoremi, è ovvio che nel quartiere di $q=q^*$ c'è una biforcazione globale se in G c'è un qualche insieme di SP , o una biforcazione locale se in G solo un SP e accade il cambiamento di carattere di un SP , o "sella" in "nodo" e viceversa, o da stabile in "fuoco" instabile e viceversa.

Il teorema è dimostrato.

Per quanto riguarda le separatrici di "sella" (la terza condizione del criterio di rugosità su Andronov - Pontryagin) il teorema è giusto.

Teorema 6.2.4. L'esistenza di una separatrice da "sella" in "sella", richiede anche abbastanza che in tale coppia di SP la condizione sia stata soddisfatta

$$c\{M1\} = c\{M2\}. \quad (6.2.7)$$

La prova.

Necessità. Lasciate che per cosa - o due SP come "sella" c'è una separatrice da una sella in una sella.

Poi, a $n=2$ (sul piano delle fasi) per il primo SP :

$$\dot{y}/\dot{x} = k = F_2(x, kx)/F_1(x, kx) = f_1(k),$$

oppure $f_1(k) - k = 0$ le equazioni di una separatrice, dove k -slope di una separatrice in un SP : $F_2'(x, kx)/F_1'(x, kx) = f_2(k)$, $f_2(k) - k = 0$.

Secondo il presupposto: $f_1(k) = f_2(k)$, oppure

$$F_2(x, kx)/F_1(x, kx) = F_2'(x, kx)/F_1'(x, kx) = f(k). \quad (6.2.8)$$

Per le funzioni F_1, F_2, F_1', F_2' una visione generale, il rapporto (6.2.8) a qualsiasi x è possibile solo se $F_1 = \partial F_1', F_2 = \partial F_2'$, dove ∂ - una costante disuguaglianza a zero, cioè $A_1 = \partial A_2$, quindi $c\{M_1\} = c\{M_2\}$.

Sufficienza.

Se viene effettuata (6.2.7), allora $A_1 = \partial A_2$, oppure $F_1 = \partial F_1', F_2 = \partial F_2'$, è ovvio da dove riceviamo (6.2.8).

Il teorema è dimostrato.

Osservazione. Teorema 6.2.4. è dimostrato per il caso $n=2$. A $n \geq 3$ è possibile arrivare in modo simile, considerando in modo coerente sezioni di spazio di fase i piani paralleli ai piani del sistema di coordinate.

I teoremi dimostrati in questa sezione permettono di utilizzare gli indicatori di rugosità $c(cT)$ per la definizione delle biforcazioni nei sistemi dinamici definizione di matrici di una parte lineare (o di matrici monodromie) e calcolo di $c(cT)$ in SP o su cicli limite.

**CAPITOLO 7. APPLICAZIONI DELLA TEORIA E DEL METODO
DELLA RUGOSITÀ TOPOLOGICA ALLE RICERCHE SULLA
RUGOSITÀ,**

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

BIFORCAZIONI E CAOS DI SISTEMI SINERGICI

Nel cap. 6 sono indicate le basi della teoria e un metodo della "rugosità topologica" che permette di indagare la rugosità e le biforcazioni dei sistemi dinamici.

Le applicazioni della teoria e del metodo sviluppato della "rugosità topologica" ad una ricerca di rugosità, biforcazioni e caos di sistemi sinergici di varia natura fisica sono presentate in questo capitolo. Allo stesso tempo alcune equazioni e disposizioni di ricerche possono avere ripetizioni di alcuni dei capitoli precedenti del lavoro reale, ma per l'integrità dell'enunciazione dei risultati di questo capitolo l'autore ha permesso queste ripetizioni.

Sistema (strano attrattore) di Lorenz

È noto che per la prima volta l'apertura di H. Poincaré (1892) che in alcuni sistemi meccanici descritti dalle equazioni determinate possono esserci oscillazioni caotiche è stata confermata dal meteorologo E. Lorenz che nel 1963 anno ha offerto e studiato il modello matematico della convezione termica nell'atmosfera. Questo lavoro Lorenz ha aperto uno dei primi esempi del caos determinato nei sistemi dissipativi che in suo onore porta il nome di un attrattore (uno strano attrattore) di Lorenz.

In una forma adimensionale dell'equazione di Lorenz prendere una forma

$$\dot{x} = \sigma(y-x), \quad \dot{y} = x - y - xz, \quad \dot{z} = xy - \beta z, \quad (7.1)$$

dove $x, y, z \in R$ sono condizioni variabili del sistema, x è proporzionale all'ampiezza della velocità del movimento, e le variabili y, z riflettono la distribuzione della temperatura in un anello convettivo, σ, ρ sono i parametri positivi collegati ai numeri di Prandtl e Rayleigh, $\beta > 0$ è il parametro che caratterizza la geometria del sistema.

Ci baseremo su una ricerca dell'equazione e dell'attrattore di Lorenz del valore dei parametri σ e ρ , da lui utilizzati nel lavoro, cioè $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, e ρ varieremo il parametro.

Poi il sistema (7.1) assumerà una forma

$$\dot{x} = 10(y-x), \quad \dot{y} = \rho x - y - xz, \quad \dot{z} = xy - (8/3)z, \quad (7.2)$$

Le ricerche del sistema (7.2) con l'uso di una misura di rugosità c hanno confermato le principali biforcazioni di questo sistema descritte in letteratura e rispondendo alle condizioni dei criteri indicati nel cap. 6.

In realtà (fig. 7.1), a $\rho \rightarrow 0$, $c(\rho) \rightarrow 2.6$, ulteriormente in aumento ρ valore $c(\rho)$ per l'esistente solo $SP1(0,0,0,0)$ tipi di "nodo" stabile (autovalori di una matrice di una parte lineare $\lambda_{1,2} = -5,5 \pm [20,25 + 10\rho]^{1/2}$; $\lambda_3 = -8/3$ diminuirà, avendo raggiunto il valore 2,11 a $\rho = r1 = 1,0$. A $\rho > r1 = 1,0$ nel sistema (7,2) appaiono due punti speciali simmetrici relativamente $SP1$ $SP2$ ($a = [(8/3)(\rho - 1)]^{1/2}$, $\rho - 1$) e $SP3$ ($-a$, $-a$, $\rho - 1$) tipo stabile "focolai", autovalori delle matrici di una parte lineare in cui soddisfano l'equazione caratteristica,

$$\lambda^3 + \frac{41}{3}\lambda^2 + \frac{8}{3}(10+\rho)\lambda + \frac{160}{3}(\rho-1) = 0 \quad (7.3)$$

e un valore medio $\bar{c} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 c_i(\rho)$ sarà pari a 2.11. Il punto speciale di $SP1$ a $\rho > r1$ si trasforma in SP tipo "saddle-knot".

Inoltre, con $\rho \rightarrow r1 = 1,345$ il valore $\bar{c} \rightarrow \infty$ e nel sistema si verifica biforcazione del cambiamento di tipo $SP2$ e $SP3$, vale a dire: l'ultimo turno nelle stalle di tipo SP "si concentra".

Con $\rho = r2 = 13,926$ l'indicatore c raggiunge il minimo locale pari a 1,372, e nel sistema (7.2) c'è un caos metastabile quando gli attrattori $SP2$ e $SP3$ di globale si trasformano in attrattori locali con alcune aree di attrazione (Fig. 7.1). Inoltre, a $\rho = r4 \approx 24,74$, $\bar{c} = 1,389$ si verifica la biforcazione Poincaré-Andronov-Hopf (Hopf) quando gli autovalori $\lambda_{2,3}$ in $SP2,3$ diventano puramente immaginari, pari a $\pm j 9,624$. Il valore del parametro $\rho = r4$ richiama

l'attenzione dei ricercatori con il fatto che a $\rho > r_4$ nel sistema (7.2) nasce l'interessante fenomeno chiamato strano attrattore di Lorenz.

In un'area limitata dello spazio R^3 intorno al "saddle-fokus" instabile $SP_{2,3}$ sorgono le caotiche oscillazioni che coprono un punto di sella di SP_1 .

Altri punti e tipi di biforcazioni specificati in letteratura ($r_3, r_{\infty}, r_a, r_c$ e così via) finora con questa misura non sono stati trovati e richiedono un ulteriore

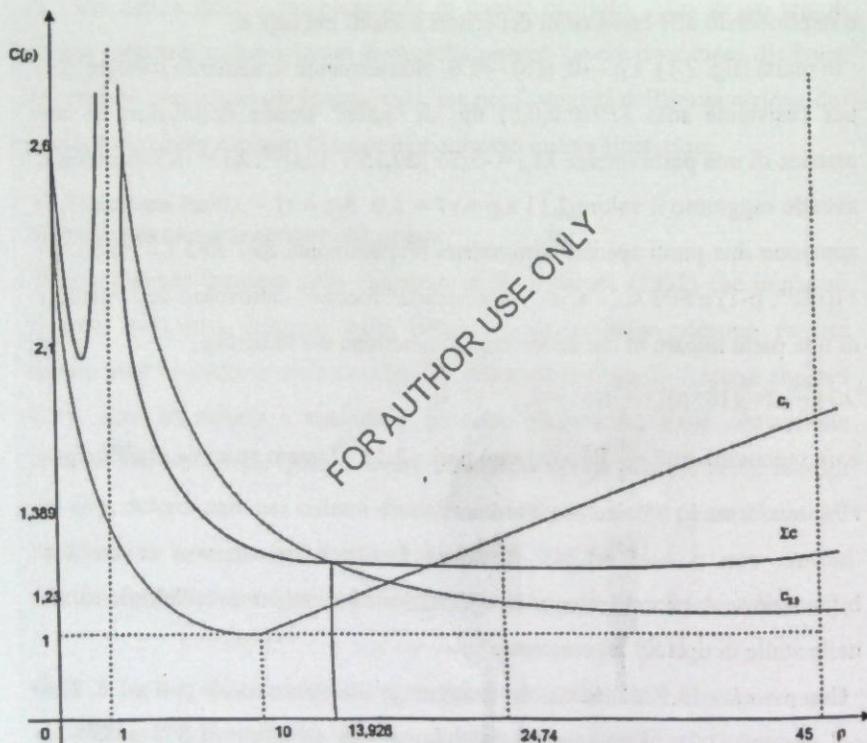


Fig. 7.1. Il programma di dipendenza $c(\rho)$ per il sistema di Lorenz

ricerca, è possibile con l'attrazione di qualsiasi stima non lineare. Ma allo stesso tempo si trova un altro punto che merita interesse e cioè: un punto $\rho = r_m = 45$ dove gli indicatori $c(\rho)$ nei punti $SP_{2,3}$ raggiungono il minimo assoluto

pari a 1,23. In questo punto è necessario aspettarsi la massima "stabilità" di uno strano attrattore di Lorenz, cioè piccole indignazioni nel sistema (7.2) portano ai minimi cambiamenti di area di esistenza di uno strano attrattore.

Il sistema di Rössler.

Il sistema di Rössler rappresenta un modello di dinamica caotica delle reazioni chimiche che procede in qualche modo con l'hashing ed è descritto dalle equazioni:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + 0,2y, \quad \dot{z} = 0,2 + z(x - \mu), \quad (7.4)$$

dove μ è il parametro variegato.

È noto che le biforcazioni in questo sistema avvengono attraverso il raddoppio consecutivo del periodo di un ciclo. Per il calcolo di una matrice di una monodromia di un ciclo si usa il metodo conosciuto sotto il nome di "metodo di cottura".

I dati iniziali sono impostati: $T_{\text{periodo}} = 1,0, x = -1, y = -1, z = 1,2$, un intervallo di valori per μ da 0 a 11.

La dipendenza ricevuta di un indicatore di rugosità di $c(M)$ dal parametro μ è presentata nella Fig. 7.2.

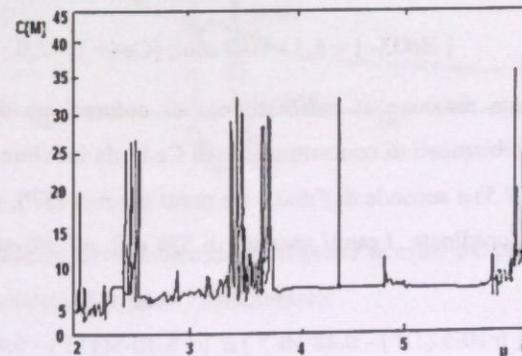


Fig. 7.2. Il programma di dipendenza di $c(M) = f(\mu)$ per il sistema di Rössler

Dal prospetto della Fig. 7.2 è visibile che il risultato ricevuto sulla base di un metodo di rugosità topologica corrisponde completamente ai risultati riportati in letteratura.

Sistema Belousov-Zhabotinsky

Questo sistema è descritto dalle equazioni

$$\dot{x} = k_1ay + k_2ax - k_3xy - 2k_4x^2,$$

$$\dot{y} = -k_1ay - k_3xy + 1/2fk_5bz, \quad (7)$$

$$\dot{z} = 2k_2ax - k_5bz,$$

dove $k_1 = 1,28$; $k_2 = 8,0$; $k_3 = 8,0 \cdot 10^5$; $k_4 = 2,0 \cdot 10^3$; $k_5 = 1,0$; $a = 0,06$; $b = 0,020$; $0,5 < f < 2,4$.

Il sistema Belousov-Zhabotinsky è una reazione chimica dove ci sono oscillazioni di concentrazione di sostanze e rappresenta l'ossidazione catalitica dell'acido malonico $CH_2(COOH)_2$. La reazione avviene in soluzione acquosa al semplice spostamento dei seguenti reagenti:

$$[H^+] = 2,0 \text{ mol}; [CH_2(COOH)_2] = 0,28 \text{ mol};$$

$$[BrO_3^-] = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol}; [Ce^{4+}] = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol}.$$

Si osserva una reazione al cambiamento di colorazione della soluzione causata da cambiamenti di concentrazione di Ce^{4+} da incolore a giallo.

Nel sistema (7.5) a seconda di f due o tre punti speciali (SP), uno dei quali è l'inizio delle coordinate. I punti speciali di $SP_i (x_0, y_0, z_0)$ sono definiti da rapporti:

$$x_0 = [6 \cdot 10^{-5}(1-f) - 0,48 \cdot 10^{-7}] \pm \{ [6 \cdot 10^{-5}(1+f) - 0,48 \cdot 10^{-7}]^2$$

$$- 0,1152 \cdot 10^{-10}(1+f) \}^{1/2},$$

$$y_0 = 0,48 \cdot f \cdot x_0 / (0,078 + 8 \cdot 10^5 x_0), \quad (7)$$

$$z_0 = 0,48 x_0.$$

I risultati delle ricerche del sistema (7.6) con l'uso di un indicatore di rugosità di $c\{M\}$ sono mostrati in Fig. 7.3.

In Belousov-Zhabotinsky reazione varie oscillazioni, tra cui caotico si trovano varie oscillazioni. Le ultime si verificano a $0,9208 < f < 1,0808$, a $f = 0,9208$, $f = 1,0808$. $0,9208$ biforcazioni. Allo stesso tempo, la massima rugosità delle oscillazioni si osserva a $f \approx 2,0$.

$c\{M\}$

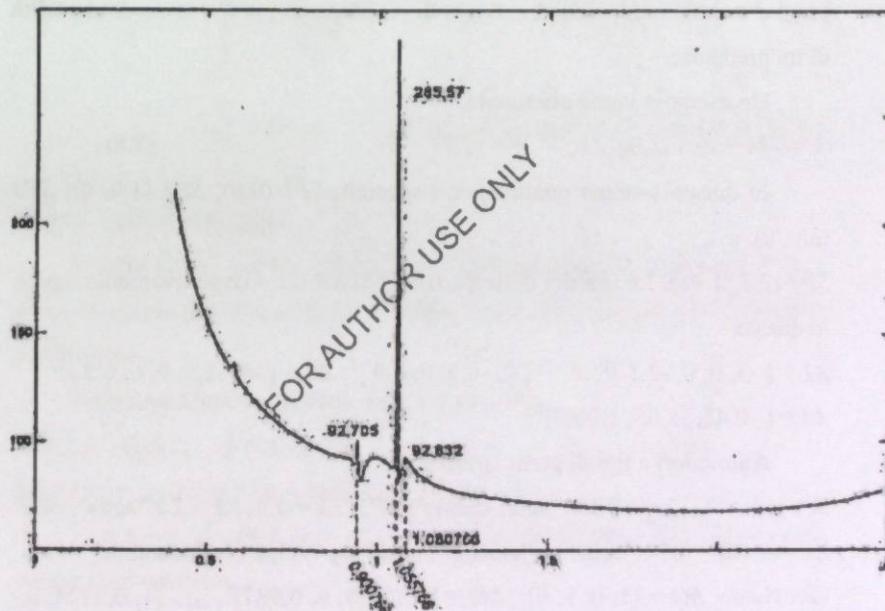


Fig. 7.3. Dipendenza di un indicatore di rugosità di $c\{M\}$ dal parametro f del sistema Belousov - Zhabotinsky

Predator - sistema di preda

Per la prima volta questo sistema è stato considerato dal matematico italiano di V. Volterra. In un caso bidimensionale questo sistema è descritto dalle equazioni

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy, \quad \dot{y} = \kappa \beta xy - my, \quad (7)$$

dove x, y sono il numero di popolazioni secondo le prede e i predatori, α, β sono le prede malthusiane e trofiche costanti che mostrano rispettivamente il tasso di crescita del numero delle prede in assenza di predatori e la velocità di consumo delle prede un predatore, κ è l'efficienza di trattamento della biomassa della preda nella biomassa di un predatore, m è il tasso di mortalità di un predatore.

Un esempio viene esaminato:

$$\dot{x} = -3x + 4x - 0.5xy - x, \quad \dot{y} = -2.1y + xy. \quad (7.8)$$

In questo sistema quattro punti speciali: $SP1 (0,0)$; $SP2 (1.0, 0)$; $SP3 (3.0, 0)$; e

$SP4 (2.1, 1.98)$. Le matrici delle parti lineari SP sono rispettivamente uguali in queste

$$A1 = [-3, 0; 0, -2.1]^T, A2 = [2, -0.5; 0, 0.9]^T, A3 = [-6, -1.5; 0, 0, 0.9]^T, A4 = [-0.42, -1.05; 1.98, 0]^T$$

Autovalori e tipi di punti speciali:

$SP1: \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2.1$ è "nodo stabile"; $SP2: \lambda_1 = -1.1, \lambda_2 = 2$ è "sella"; $SP3: \lambda_1 = -6, \lambda_2 = 0.9$ è "sella"; $SP4: \lambda_{1,2} = -0.21 \pm j 1.43$, è "fuoco stabile".

Troviamo: $M1 = [1, 0; 1, 0]^T, M2 = [1, 0.159; 0, 0.987]^T, M3 = [1, 0.2124; 0, -0.977]^T, M4 = [0.389, 0.737; 0.924, -0.676]^T$.

Valori $c\{Mi\}$, $i=1,2,3,4$: $c\{M1\} = 1.0$; $c\{M2\} = 1.174$; $c\{M3\} = 1.241$; $c\{M4\} = 1.421$.

Su un punteggio totale $\frac{1}{4} \sum C\{Mi\} = 1.21$ è visibile che questo sistema ecologico è piuttosto approssimativo, vicino al sistema più approssimativo quando $1/i \sum C\{Mi\} = 1$.

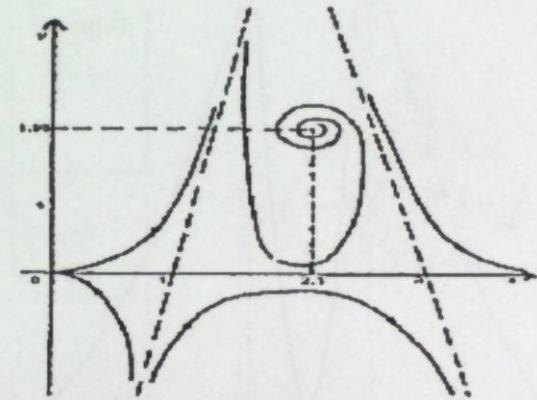


Fig. 7.4. Fig. 7.4. Ritratto di fase del sistema predatore-preda

Sistema (circuit) Chua

È noto che il sistema Chua rappresenta un circuito elettronico con un unico elemento non lineare in grado di generare varie, in particolare, caotiche oscillazioni.

Il sistema Chua è descritto dalle equazioni:

$$\dot{x} = p(y - f(x)), \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = -qy, \quad (7.9)$$

dove $f(x) = M1x + 0.5(M1 - M0)(|x + 1| - |x - 1|)$.

Con $p = 9, q = 14.3, M1 = -6/7, M0 = 5/7$, nel sistema (7,9) si osservano oscillazioni caotiche.

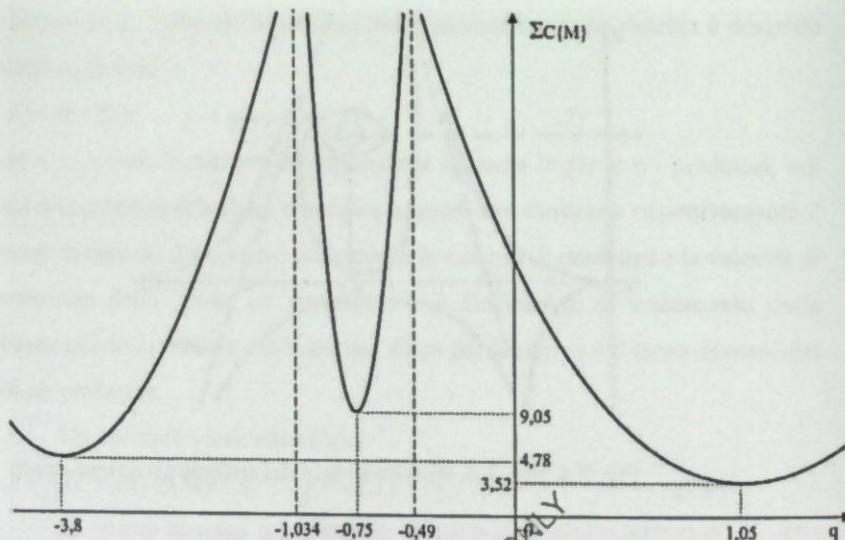


Fig. 7.5. Dipendenza di $C\{M\}$ dal parametro q nel sistema Chua

In questo caso tre punti speciali (SP): $SP1 (0,0,0,0)$; $SP2,3 (\pm 11/6, 0, 11/6)$.

Sono stabilite da ricerche che i movimenti caotici si trovano anche ai valori q : $-1,034 < q < -0,49$, e a $q = -3,8$ e $q = 1,05$ si osserva la massima rugosità dei movimenti nel sistema (7,9) che sono mostrati in Fig. 7.5.

La biforcazione di Hopf

Questa biforcazione è chiamata a volte Poincare-Andronov-Hopf biforcazione su nomi dei primi ricercatori di questo tipo di biforcazione. Questa biforcazione è la biforcazione dell'emergenza (scomparsa) di un ciclo limite nel sistema sinergico.

L'esempio più semplice di biforcazione di Hopf si osserva per il sistema bidimensionale:

$$\dot{x} = -[-q + (x + y)]x - \omega y, \quad \dot{y} = -[-q + (x + y)]y + \omega x, \quad (7.10)$$

quale parte lineare $[\dot{x}, \dot{y}]^T = A [x, y]^T$, dove $A = [q, -\omega; \omega, q]^T$, e autovalori $\lambda_{1,2} = q \pm j \omega$.

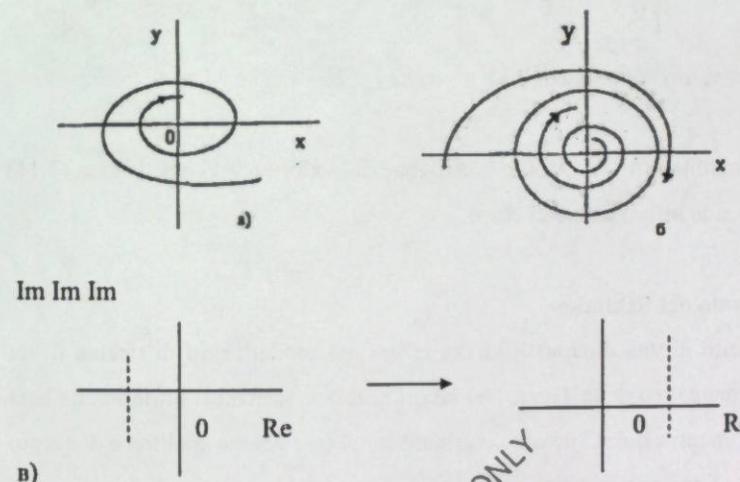


Fig. 7.6. Biforcazione di Hopf nel sistema (7.10)

Al passaggio dal valore q al valore zero $q = 0$ si osserva la biforcazione di Hopf (vedi fig. 7.6). Allo stesso tempo, gli autovalori attraversano un asse immaginario e la quantità $C\{M\} = 1$.

Un esempio più difficile di biforcazione di Hopf si osserva nel sistema tridimensionale chiamato dal sistema di Lengford:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2a - 1)x - y + xz, \\ \dot{y} &= x + (2a - 1)y + yz, \\ \dot{z} &= -az - (x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned} \quad (7.11)$$

In questo sistema di modellazione della turbolenza nel liquido c'è la biforcazione di Hopf a

$$a0 = \frac{1}{2} \text{ e } T0 = 2\pi.$$

Il sistema ha due punti speciali di $SP1 (0,0,0,0)$ e $SP2 (0,0,-a)$.

Matrici di una parte lineare in punti speciali di $SP1$ e $SP2$ rispettivamente

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2a-1 & -1 & 0 \\ 1 & 2a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

e gli autovalori sono uguali a $\lambda_1 = -a$, $\lambda_{2,3} = 2a - 1 \pm i$ e $\lambda_1 = a$,
 $\lambda_{2,3} = a - 1 \pm i$.

Quantità $c\{M\} = 1$, e alla transizione del valore $a = 1/2$ nel sistema (7.11) si verifica la biforcazione di Hopf.

La dinamo del Rikitake

Il modello di una dinamo Rikitake è uno dei modelli noti di ricerca di un dipolo magnetico della Terra. Nei lavori noti dei ricercatori portati nella lista dei riferimenti a questo lavoro sono state condotte ricerche analitiche di questo modello. Sono mostrate le possibilità di osservazione di alcuni dei fenomeni di una vera e propria dinamo magnetoidrodinamica della Terra, come le variazioni di polarità di un dipolo di Terra, l'oscillazione di quantità di un dipolo, la quasi frequenza di variazione di un dipolo.

Il modello di una dinamo Rikitake è descritto dal seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu x + zy, \\ \dot{y} &= -\alpha x - \mu y + xz, \\ \dot{z} &= 1 - xy, \end{aligned} \quad (7.12)$$

dove α, μ sono parametri positivi, $\alpha = \text{const} = \mu(k^2 - k^{-2})$, k - coefficiente.

Il caso in cui $k = 2$, $\alpha = 3,75 \mu$ viene indagato.

In questo caso, il sistema (7.12) nello spazio di fase ha due punti speciali come "fuoco instabile".

$$SP1: (x_0 = 2, y_0 = 0,5, z_0 = 4\mu),$$

$$SP2: (x_0 = -2, y_0 = -0,5, z_0 = 4\mu).$$

Autovalori in punti speciali:

$$\lambda_1 = -2\mu, \lambda_{2,3} = \pm i 2,0615.$$

Il calcolo di $c\{M\}$ a vari valori μ ha scoperto che con $\mu = 1,1$ e $\mu \rightarrow 0$, $c\{M\} = 1$ che conferma le conclusioni sull'emergenza al valore $\mu = 1,1$ movimenti periodici nel sistema (7.12), cioè c'è la biforcazione di Hopf.

Mappa di Henon (Enon) o a ferro di cavallo

Nelle ricerche Henon è mostrato che le proprietà simili al sistema di Lorenz, la semplice mappa discreta del piano determinato dalle equazioni, possiede:

$$x_{n+1} = y_{n+1} - ax_n^2, \quad y_{n+1} = bx_n, \quad (7.13)$$

dove a e b sono parametri della mappa.

Gli esperimenti numerici vengono eseguiti $a = 1,4$; $b = 0,3$ (Fig. 7.7).

A questa mappa si tirano, si comprimono, e si piegano, che dopo un gran numero di iterazioni della mappa portano alla struttura frattale.

A seconda del punto iniziale, le sequenze di punti ricevuti dalle iterazioni della mappa o vanno all'infinito o aspirano a un attrattore.

L'attrattore a cui aspira il punto della mappa presenta il lavoro di varietà unidimensionale su un insieme di Cantor, cioè ha una struttura frattale. Va notato che generalmente la mappa T che trasferisce una certa superficie secante S su se stessa (mappa di ogni punto di $A \rightarrow$ trasferisce $T(A)$ ad un punto su S), è la mappa di Poincare.

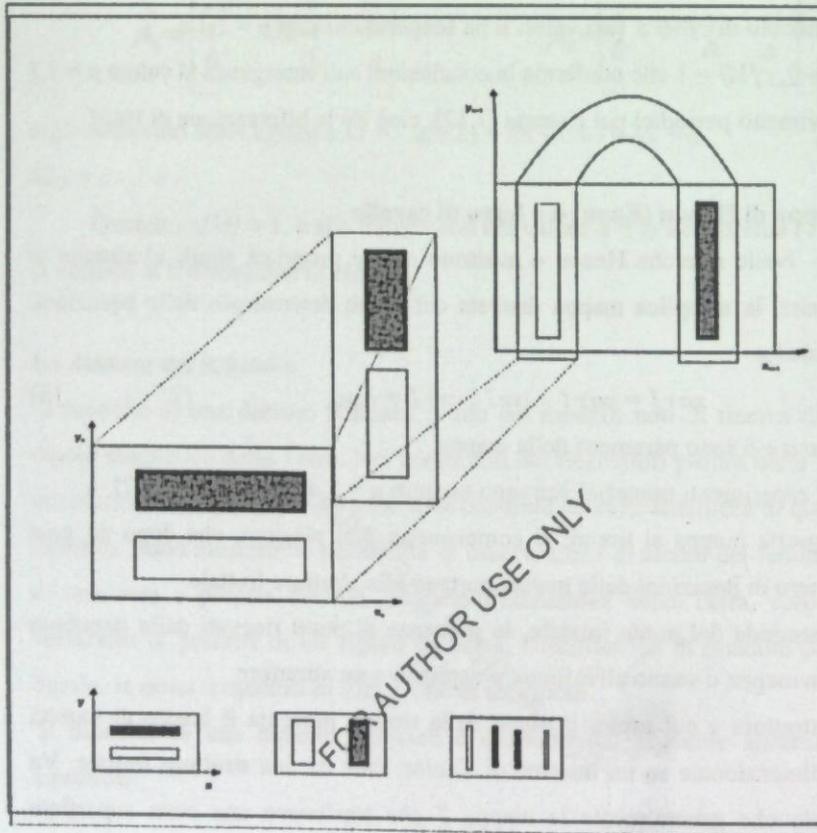


Fig. 7.7. Mappa a ferro di cavallo

Le ricerche della mappa di Henon sono condotte a $b = 0,3$; a è var.

Valori di biforcazione del parametro a :

$$a_0 = - (1 - b) / 2 = - 0,1225;$$

$$a_1 = 3(1 - b) / 2 = 0,3675;$$

$$a_2 \approx 1,06; a_3 \approx 1,55.$$

Al punto $a < a_0$, o $a > a_3$ vanno sempre all'infinito, a questi l'attrattore non esiste.

Ad $a_0 < a < a_1$ l'attrattore è un punto invariante stabile. Quando $a_1 < a < a_2$ l'attrattore è un insieme periodico da p di punti, simile ad un ciclo limite nel sistema di Lorenz. Con la crescita e il valore p cresce e si sforza di raggiungere l'infinito $a_2 \approx 1,06$. Ad $a_2 < a < a_3$ l'attrattore è difficile, ma non "strano" (non caotico).

La ricerca per metodo di rugosità topologica dà i seguenti risultati:

Ad $a < a_0$ non ci sono punti speciali.

Con $a = a_0$ solo un punto speciale (SP):

$$x_0 = 1/(1-b) \approx 1,43, \quad y_0 = b/(1-b) \approx 0,43.$$

Ad $a_0 < a < a_1$ un SP stabile, e un altro SP instabile.

Matrice di stato SP:

$$A_0 = [-2ax_0, \quad 1; \quad b, \quad 0]^T,$$

Coordinate SP:

$$x_0 = 1/2a [-0,7 \pm \sqrt{(0,49 + 4a)}], \quad y_0 = bx_0.$$

$$\text{Autovalori: } \lambda_{1,2} = asse_0 \pm \sqrt{(a^2 x_0^2 + b)}.$$

Il programma di dipendenza di $\sum c\{M\} = \frac{1}{2} [\sum c^{12}\{M\}]^{1/2}$, $i = 1,2$ dal parametro a è fornito da i in fig. 7.8.

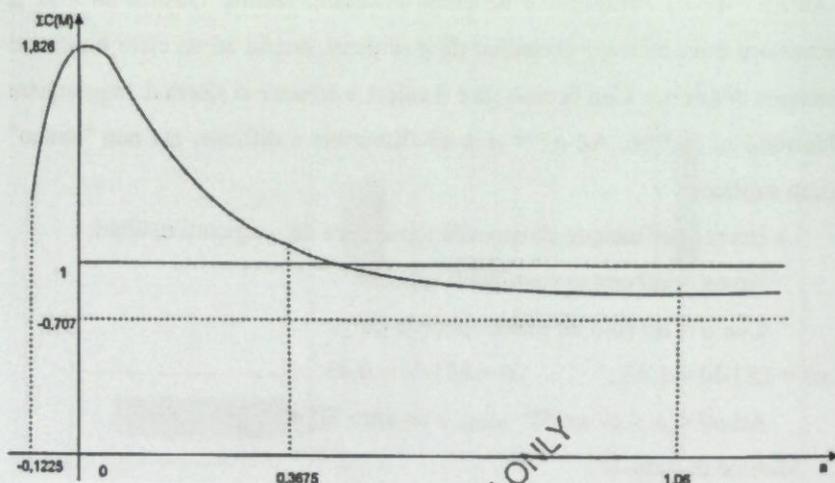


Fig. 7.8. Schema di dipendenza di $\sum c\{M\} = f(a)$ della mappa a ferro di cavallo

Le ricerche mostrano che almeno $c\{M\} = 1$ locale o $\sum c\{M\} = 0,707$ non è realizzabile alla fine a , e sarà coordinato con i risultati noti di Henon, ecc.

Modelli di sistemi economici

Le disposizioni della teoria e la possibilità di un metodo di "rugosità topologica" sono approvate con successo su vari modelli di economia sinergica, come: il modello avanzato di Kaldor; il modello di Keynes; il modello di Solow; il modello di Schumpeter.

Qui prenderemo in considerazione due modelli di sistemi economici: il modello avanzato di Kaldor e il modello di Schumpeter.

Il modello avanzato di Kaldor caratterizza i cicli di business ed è rappresentato dal seguente sistema di equazioni:

$$\dot{x} = \alpha [R(x, z) + I(x, y) - x], \quad \dot{y} = I(x, y) - I_0, \quad (7.14)$$

dove x, y, z sono rispettivamente variabili del reddito nazionale, del capitale e del welfare;

$R(x, z), I(x, y)$ sono in funzione della funzione delle spese sui consumi e dei volumi di investimento; I_0 è "sostituzione" degli investimenti; α è coefficiente di adattamento di un ciclo (velocità di stabilimento).

Funzione delle spese sui consumi:

$$R(x, z) = r(z)x + S(z), \quad (7.15)$$

e funzione di risparmio:

$$T(x, z) = x - R(x, z). \quad (7.16)$$

La funzione degli investimenti di $I(x, y)$ ha un aspetto della funzione logistica mostrata in Fig. 7.9.

Lo stato di equilibrio del sistema (7.14) soddisfa i rapporti:

$$T(x, z) = I(x, y), \quad I(x, y) = I_0. \quad (7.17)$$

Dalla Fig. 7.9 ovviamente che nel sistema (7.14) sono possibili uno, o tre punti di equilibrio (punti speciali (SP)).

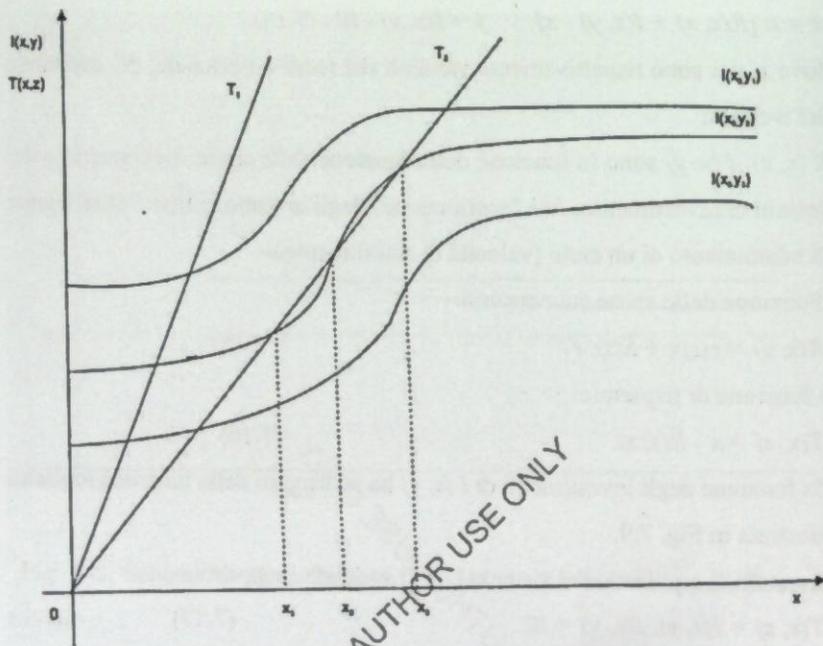


Fig. 7.9. Punti di equilibrio del sistema (7.14)

Credero $R(x, z) = \text{cost}$, $I(x, y) = \beta$ e in vista delle funzioni

$I(x, y)$, $T(x, z)$ la corrispondente fig. 7.9, avremo le seguenti matrici di parte lineare (7.14) nelle vicinanze SP :

$$A_{1,3} = [-1, -1; 0, -1]^T, \quad A_2 = [\beta - 1, -1; \beta, -1]^T. \quad (7.18)$$

Rispettivamente in punti speciali $(x1, x3)$ avremo "nodo stabile", e in un punto speciale $(x2)$:

a $0 < \beta < 2$ è "fuoco stabile";

a $2 < \beta < 4$ è "fuoco instabile";

a $\beta > 4$ è "nodo instabile".

Al valore $\beta = 2$ nel sistema (7.14) c'è una biforcazione della nascita di un ciclo limite (Hopf).

L'equazione caratteristica in un punto speciale $(x2)$:

$$\lambda^2 - \lambda(\beta - 2) + 1 = 0,$$

e l'indicatore di rugosità di $c\{M\}$ sarà pari a $c\{M\} = \min \beta c\{M\} \approx 2,62$.

Possibili stati di equilibrio stabile (punti speciali) hanno la forma di incidente (biforcazioni) come "montaggio".

Modello come Schumpeter. Nel modello considerato identico alla produzione industriale privata e statale, il comportamento dell'investitore (e dell'innovatore) e anche la sua strategia nelle condizioni della concorrenza, della macroeconomia, tollerante alle influenze, e degli investimenti, è indagato dalla "domanda indotta". Su questo modello vengono indagati i movimenti non equilibrati dei sistemi economici delle industrie dei paesi e delle regioni.

I cambiamenti di strategia degli investimenti da carattere espansivo a ratsionalizatsionny e back causano fluttuazioni industriali. Alla ricerca di profitti esclusivi gli innovatori e gli uomini d'affari pionieri agiscono nella direzione opposta al movimento ciclico della strategia di investimento.

Così, il modello come Schumpeter descritto dal sistema delle equazioni è considerato:

$$\dot{x} = sh(y + kx) - xch(y + kx) = P(x, y, k)$$

(7.19)

$$\dot{y} = -\mu[a_0 sh(\delta x) + (y - a_1)ch(\delta x)] = Q(x, y, \gamma),$$

dove x, y sono rispettivamente variabili dell'indice delle configurazioni degli investitori e "alternatore" - il passaggio delle preferenze dell'investitore tra investimenti di tipo espansionistico e ratsionalizatsionale; k è il parametro del coordinatore che riflette l'intensità dell'interazione dei singoli investitori; $sh(\cdot)$, $ch(\cdot)$ sono funzioni di un seno iperbolico e di un coseno; $\mu = M/\delta$ è il parametro relativo, M è il parametro della flessibilità strategica degli

investitori riguardo al cambiamento di strategia da espansionistica a razionalizzatoria e viceversa, δ è il parametro della scala temporanea che definisce il tempo reale di $t = \tau/2\delta$ dove τ è la variabile di tempo nel sistema (7.19); γ è il parametro della velocità di una tendenza a girare di strategia; aI è il parametro di influenza della strategia è positivo a espansionistico e negativo a razionalizzatorio, la scelta; $a\theta$ è l'ampiezza della scelta strategica.

Condizioni delle disposizioni di equilibrio (punti speciali, SP):

$$P(x_0, y_0, k) = 0, \quad Q(x_0, y_0, \gamma) = 0,$$

definire uno, o tre, o cinque punti speciali che corrispondono a parametri di sistema specificamente impostati (7.19).

È stabilito che nel sistema (7.19) sono possibili biforcazioni di Hopf con l'emergere di cicli limite.

In particolare, ai valori dei parametri: $a\theta = 0,5$; $aI = 0$; $\gamma = 4,0$; $\mu = 0,5$, abbiamo l'unico punto speciale all'inizio delle coordinate $x_0 = y_0 = 0$.

La matrice di uno jacobiano ha un aspetto:

$$A_0 = [k - 1, 1; -1, -0,5]^T.$$

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + \lambda(1,5 - k) - 0,5k + 1,5 = 0,$$

e autovalori:

$$\lambda_{1,2} = (k - 1,5) / 2 \pm 1/2 \sqrt{[(k - 1,5)^2 + 2k - 6]}.$$

Se come parametro operativo per accettare il parametro k , allora ai valori $k = 1,5$;

$k = 2,5$; $k = 3$ ci sono biforcazioni nel sistema (7.19). Allo stesso tempo, con $k = 1,5$ si osserva una biforcazione di transizione da "fuoco stabile" a "fuoco instabile". All'indirizzo

$k = 2,5$ c'è una biforcazione di cambiamento della topologia dello spazio (x, y) , $SP(0,0)$ cambia da "fuoco instabile" a "nodo instabile", e a $k \geq 3$ c'è un passaggio a "sella".

I risultati di una ricerca sulla rugosità del sistema (7.19) vicino $(0,0)$ sono mostrati nella Fig. 7.10.

Apparentemente dal disegno, con $k = 0,5$ il sistema sarà il più approssimativo con

$c(M) = 1$, o altrimenti, il sistema economico modellato sarà allo stesso tempo con la migliore stabilità.

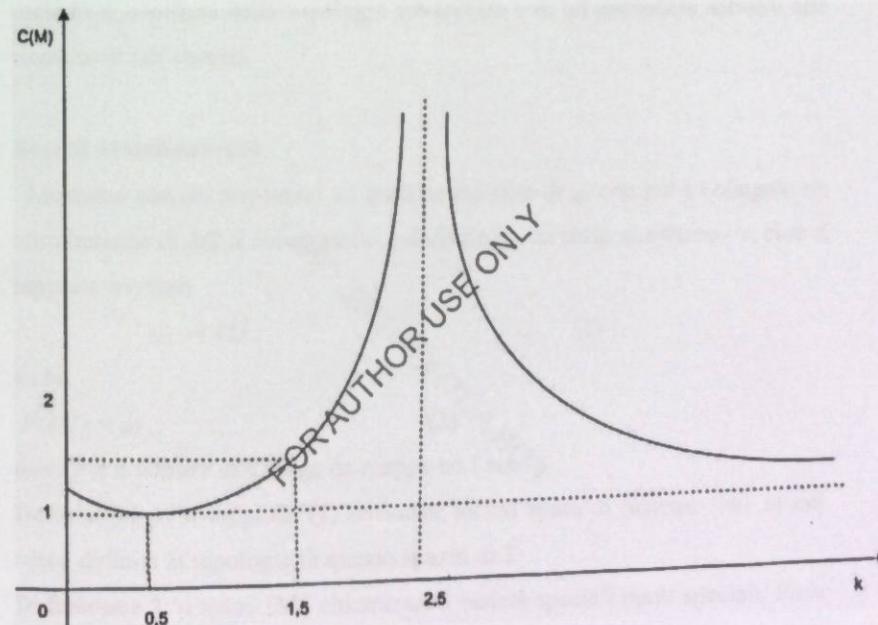


Fig. 7.10. Schema di dipendenza di $C(M) = f(k)$

FOR AUTHOR USE ONLY

CONCLUSIONE

La teoria della rugosità topologica dei sistemi considerati in questa monografia, le cui applicazioni per una ricerca di sistemi sinergici di varia natura fisica sono fornite nel cap. 7, assume un modello matematico formalmente certo dei sistemi studiati. In caso di modelli matematici di sistemi scarsamente formalizzabili e non formalizzabili, si offre l'applicazione di un metodo di analogia della topologia set-teorica e di un approccio astratto alle ricerche di tali sistemi.

Basi di avvicinamento

Lasciamo che sia impostato un qualche insieme di M_1 con cui è collegato un altro insieme di M_2 il cui rapporto è definito da un certo morfismo \rightarrow , cioè il rapporto avviene

$$M_1 \rightarrow M_2, \quad (1)$$

è che

$$F(M_1) = M_2, \quad (2)$$

dove F è il funtore che funge da mappa tra i set.

Definizione 1. Il rapporto (1) definisce alcuni spazi di insiemi $\{M\}$ in cui viene definita la topologia di questo spazio di T .

Definizione 2. μ spazi $\{M\}$ chiameremo varietà speciali punti speciali, linee speciali e varietà multidimensionali in questo spazio dove sono possibili alcune lacune speciali (singolari) nel rapporto (2), nel senso di topologia di T .

Definizione 3. Chiameremo *perturbazione* di un insieme di M un insieme di $F(M)$, è che la $M + F(M)$ forma l'insieme perturbato nello spazio $\{M\}$.

Definizione 4. Si inserisce la metrica δ per le perturbazioni e una metrica ϵ per gli insiemi perturbati.

Definizione 5. Chiameremo topologia dello spazio $\{M\}$ vicino a qualche varietà speciale μ ruvida se a piccole perturbazioni δ insiemi di M , l'insieme

perturbato di $M + F(M)$ è causerà un rimescolamento da un insieme di M non più che su qualche piccolo ϵ .

Per la determinazione di cui sopra possiamo utilizzare tutte le disposizioni di base della teoria della rugosità topologica dei sistemi dinamici di cui al cap. 6 di questo lavoro, cioè considerare le questioni della massima rugosità e della minima non della rugosità, ecc.

L'approccio qui offerto può essere utilizzato per sistemi poco formalizzabili e non formalizzabili come i sistemi informativi, sociali e politici. Allo stesso tempo, ovviamente la difficoltà principale di una ricerca di tali sistemi consisterà nella definizione dei corrispondenti set di M , funtori di F , varietà speciali μ e anche nell'introduzione di metriche δ e ϵ spazi $\{M\}$ che sono problemi di prospettiva.

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

RIFERIMENTI

1. Akunov T.A., Alisherov B., Omorov R.O., Ushakov A.V. Matrichnye uravneniya v zadachakh upravleniya i nablyudeniya nepreryvnyimi ob"ektami. - Bishkek: Ilim, 1991. - 61 s. (in russo)
2. Akunov T.A., Alisherov B., Omorov R.O., Ushakov A.V. Modal'nye otsenki kachestva protsessov v lineinykh mnogomernykh sistemakh. = Bishkek: Ilim, 1991. = 59 s. (in russo)
3. Aleksandrov P.S. Puankare i topologiya // V kn.: A. Puankare. Izbrannyye trudy. V 3-kh.t. Pod red.N.N. Bogolyubova. = M.: Nauka. T.2. = S. 808-816. (in russo)
4. Alieva K.M., Tishin A.I. Filosofiya i sinergetika o slozhnosti. = B.: Ilim, 2003. = 360 s. (in russo)
5. Andreev Yu.N. Upravlenie konechnomernymi lineinymi ob"ektami. = M.: Nauka, 1976. = 424 s. (in russo)
6. Andrianov I.V., Barantsev R.G., Manevich L.I. Asimptoticheskaya matematika i sinergetika: Put' k tselostnoi prostote. Izd. 2-e. = M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2009. = 304 s. (in russo)
7. Andrievskii B. R., Fradkov A. L. Upravlenie kaosom: metody i prilozheniya. I. Metody // Avtomatika i telemekhanika. = 2003. = №5. = S. 3-45. (in russo)
8. Andrievskii B. R., Fradkov A. L. Upravlenie kaosom: metody i prilozheniya. II. Prilozheniya // Avtomatika i telemekhanika. = 2004. = №4. = S. 3-34. (in russo)
9. Andronov A.A., Pontryagin L. S. S. Grubye sistemy // Dokl. AN SSSR, 1937. = T. 14. = №5. = S. 274-250. (in russo)
10. Andronov A. A., Viii A. A., Khaikin S. E. Teoriya kolebanii. = M.: Nauka, 1981. = 568 s. (in russo)

11. Andronov A.A., Leontovich B.A., Gordon I.I., Maler A.G. Kachestvennaya teoriya dinamiceskikh sistem. = M.: Nauka, 1966. = 568 s. (in russo)
12. Andronov A.A., Leontovich B.A., Gordon I.I., Maler A.G. Teoriya bifurkatsii dinamiceskikh sistem na ploskosti. = M.: Nauka, 1967. = 488 s. (in russo)
13. Anosov D.V. Grubye sistemy / Topologiya, obyknovennyye differentsial'nye uravneniya, dinamicheskie sistemy: Sb. obzornykh statei. 2. K 50-letiyu instituta (Trudy MIAN SSSR, T. 169). = M.: Nauka, 1985. = S. 59-93. (in russo)
14. Arnol'd V.I. Obyknovennyye V.I. Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya. = M.: Nauka, 1984. = 272 s. (in russo)
15. Arnol'd V.I. Teoriya katastrof // Sovremennyye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya. = M.: VINITI, 1986. = T.5. = S. 219-277. (Itogi nauki i tekhniki). (in russo)
16. Baev A.P., Omorov R.O., Ushakov A.V. Otsenki perekhodnykh funktsii lineinykh mnogomernykh sistem upravleniya // Izv. vuzov. Elektromekhanika, 1989; №1. = S. 90-96. (in russo)
17. 17. Bak Per. Kak rabotaet priroda: Teoriya samoorganizovannoi kritichnosti. Per. s angl. / Vstup. sl. G.G. Malinetskogo. = M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2015. = 276 s. (in russo)
18. 18. Barantsev R. G. Sinergetika v sovremennom estestvoznani. Izd. 2-e, dop. = M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2009. = 160 s. (in russo)
19. Bautin N.N., Leontovich E.A. Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya, dinamiceskikh sistem na ploskosti. = M.: Nauka, 1990. = 486 s. (in russo)
20. Bezruehko B.P., Koronovskii A.A., Trubetskov D.I., Khranov A.E. Put' v sinergetiku: Ekakurs v deyat' lektsiyakh / Predisl. S. Mirova, G.G.

Malinetskogo. Izd. 2-e. - M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2010. - 304 s. (in russo)

21. Beklemishev D.V. Dopolnitel'nye glavy lineinoi algebry. - M.: Nauka, 1983. - 336 s. (in russo)

22. 22. Braverman M.E., Rozonoer A.I. O grubosti lineinykh dinamicheskikh sistem I //Avtomatika i telemekhanika. - 1991. - №11. - S.17-23, II //Avtomatika i telemekhanika. - 1992. - № 1. - S.41-52. (in russo)

23. 23. Budanov V.G. Metodologiya sinergetiki v postneklassicheskoi nauke i v obrazovanii. Izd. 3-e, dop. - M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2009. -240 s. (in russo)

24. 24. Vainberg M.M., Trenogin V.A. Teoriya vetvleniya reshenii nelineinykh uravnenii. - M.: 1969, Nauka. - 528 s. (in russo)

25. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matritsy i vychisleniya. - M.: Nauka, 1984. - 320 s. (in russo)

26. 26. Vol'terra V. Matematicheskaya teoriya bor'by za sushchestvovanie. - M.: Nauka, 1976. - 286 s. (in russo)

27. Voronov A.A. Vvedenie v dinamiku slozhnykh upravlyaemykh sistema. - M.: Nauka, 1985. - 352 s. (in russo)

28. Galavkin V.V. Sinergeticheskaya fizika, ili Mir naoborot. Izd. stereotip. - M.: Izdatel'stvo LKI, 2016. - 120 s. (in russo)

29. 29. Gantmakher F.R. Teoriya matrits , - M.: Nauka, 1966. - 576 s. (in russo)

30. Gilmor R. Prikladnaya teoriya katastrof: V 2kh knigakh. Per. s angl. -Mir, Kn. 1, 1984. - 350 s., Kn. 2, 1984. - 285 s. (in russo)

31. Gleik Dzh. Khaos: Sozdanie novoi nauki / Per. s angl. M. Nakhmansona, E. Barashkovoii. - SPb.: Amfora, 2001. - 398 s. (in russo)

32. Globalizatsiya: sinergeticheskii podkhod / Pod obshch. red. V.K. Egorova. - M.: RAGIS, 2002. - 472 s. (in russo)

33. Grinchenko V.T., Matsypura V.T., Snarskii A.A. Vvedenie v nelineinuyu dinamiku: Khaos i fraktaly. Izd. 4-e. - M.: LENANDIA, 2015. - 282 s. (in russo)

34. 34. Grobman D.M. O gomeomorfizme sistem differentsial'nykh uravnenii. - Dokl. AN SSSR, 1959, T. 128, - №5. - S. 880-881. (in russo)

35. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. Osnovy nekladkogo analiza i kvazi-differentsial'noe ischislenie. - M.: Nauka, 1990. - 432 s. (in russo)

36. Dolgonosov B.M. Nelineinaya dinamika ekologicheskikh i gidrologicheskikh protsessov / Otv. rosso. M.G. Khublaryan; Predisl. G.G. Malinetskogo. - M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2009. - 440 s. (in russo)

37. Dul'nev G.N. Vvedenie v sinergetiku. - Sankt-Peterburg: "Prospekt", 1998. - 256 s. (in russo)

38. Ermachenko A.I. Metody sinteza sistem upravleniya nizkoi chuvstvitel'nosti. - M.: Radio i svyaz', 1981. - 104 s. (in russo)

39. Zade L., Dezoer Ch. Teoriya lineinykh sistema. - M.: Nauka, 1970. - 703 s. (in russo)

40. Zang V. B. Sinergeticheskaya ekonomika. Vremya i peremeny v nelineinoy ekonomicheskoi teorii // Per. s angl. - M.: Mir, 1999. - 335 s. (in russo)

41. Zaslavskii G.M., Sagdeev R. Z. Vvedenie v nelineinuyu fiziku: Ot mayatnik

a do turbulentnosti i khaosa. - M.: Nauka, 1984. - 368 s. (in russo)

42. Zaslavskii G.M., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Chernikov A.A. Slabyi khaos i kvaziregulyarnye struktury. - M.: Nauka, 1991. - 240 s. (in russo)

43. Ivanov B.N. Mir fizicheskoi gidrodinamiki: Ot problema turbulentnosti do fiziki kosmosa. - M.: Editoriale URSS, 2002. - 240 s. (in russo)

44. Ikramov Kh.D. Chislennoe reshenie matrichnykh reshenie matrichnykh upravlenii / Pod. rosso. D.K. Faddeeva. - M.: Nauka, 1984. - 192 s. (in russo)

45. Ioss Zh., Dzhozef D. Elementarnaya teoriya ustoichivosti i bifurkatsii. - M.: Mir, 1983. - 301 s. (in russo)
46. Kalman R., Falb P., Arbib M. Ocherki po matematicheskoi teorii sistem: Per. s angl. - M.: Mir, 1971. - 400 s. (in russo)
47. Kapitsa S. P., Kurdyumov S. P., Malinetskii G.G. Sinergetika i prognozy budushchego. 2-e izd. - M.: Editoriale URSS, 2001. - 288 s. (in russo)
48. Kapitsa S.P. Paradoksy rosta: Zakony razvitiya chelovechestva. - M.: Al'pina nonfikshn, 2010. - 192 s. (in russo)
49. Kapustin V.S. Vvedenie v teoriyu sotsial'noi samoorganizatsii. - M.: Izd-vo RAGS, 2003. - 137 s. (in russo)
50. Katok A.B., Khasselblat B. Vvedenie v sovremennennuyu teoriyu dinamicheskikh sistem. - M.: Faktorial, 1999. - 768 s. (in russo)
51. Keilis-Borok V.I. Dinamika litosfery i prognoz zemletryaseni // Priroda. - 1989. - №12. -- S. 10-18. (in russo)
52. Klimontovich Yu. L. Turbulentnoe dvizhenie i struktura khaosa: Novyi podkhod k statisticheskoi teorii otkrytykh sistema. - M.: Kom Kniga, 2010. - 328 s. (in russo)
53. Knyazeva E. N. Sluchainost', kotoraya tvorit mir. Novye predstavleniya o samoorganizatsii v prirode i obshchestve // V poiskakh novogo mirovideniya: I. Prigozhin, E. i N. Rerikhi. - M.: Znanie, 1991. -- S. 3-31. (in russo)
54. Knyazeva E. N., Kurdyumov S. P. Sinergetika kak novoe mirovidenie: dialog s I. Prigozhinym // Voprosy filosofii. - 1992. - №12. - S. 9-20. (in russo)
55. Knyazeva E. N., Kurdyumov S. P. Osnovaniya sinergetiki. Chelovek, konstruiruyushchii sebya i svoe budushchee. Izd. 2-e, stereotipnoe. - M.: KomKniga, 2007. - 232 s. (in russo)
56. Knyazeva E. N., Kurdyumov S. P. Sinergetika: Nelineinost' vremeni i landshafty koevolyutsii. - M.: Kom Kniga. - 2007. - 272 s. (in russo)
57. Kolesnikov A. A. Sinergeticheskaya teoriya upravleniya. -Taganrog: TRTU. - M.: Energoatomizdat, 1994. - 344 s. (in russo)

58. Kolesnikov A. A. Sinergeticheskie metody upravleniya slozhnymi sistemami: Teoriya sistemnogo sinteza. Izd. 2-e. - M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2012. - 240 s. (in russo)
59. Kolmanovskii V.B., Spivak A.K. Ob upravlenii po bystrodeistviyu sistemoi khishchnik-zhertva // Prikladnaya matematika i mekhanika. - 1990. - T.54. - Vyp.3. - S. 502-506. (in russo)
60. Kol'tsova E.M., Gordeev L.S. Metody sinergetiki v khimii i khimicheskoi tekhnologii: Uchebnoe posobie dlya vuzov. - M.: Khimiya, 1999. - 256 s. (in russo)
61. Krasovskii A.A. Nekotorye aktual'nye problemy nauki upravleniya // Avtomatika i telemekhanika. - 1996. - №6. - S. 8-16. (in russo)
62. Kuznetsova M. Dezorganizatsiya i organizatsiya kak svoystva sotsial'nykh sistem // Problemy teorii i praktiki upravleniya. - 1994. - №6. - S. 93-96. (in russo)
63. Kuzovkov N.T. Modal'noe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva. -M.: Mashinostroenie, 1976. -184 s. (in russo)
64. Kuntsevich V.M., Lychak M.M. Sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s pomoshch'yu funktsii Lyapunova. - M.: Nauka, 1977. - 400 s. (in russo)
65. Kurdyumov S.P., Malinetskii G. G. Sinergetika - teoriya samoorganizatsii. Idei, metody, perspektivy. - M.: Znanie, 1983. - 265 s. (in russo)
66. Kukhtenko A.I. Problema invariantnosti v avtomatike. - Kiev.: GITL USSR, 1963. - 376 s. (in russo)
67. Letov A.M. Dinamika poleta i upravlenie. - M.: Nauka, 1969. - 359 s. (in russo)
68. Lyapunov A.M. Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya. - M.: Gostekhizdat, 1950. - 472 s. (in russo)
69. Malinetskii G.G., Potapov A.B. Nelineinaya dinamika i khaos: Osnovnyye ponyatiya: Uchebnoe posobie. - M.: Kom Kniga, 2009. - 240 s. (in russo)

70. Malinetskii G.G. Matematicheskie osnovy sinergetiki: Khaos, struktury, vychislitel'nyi eksperiment. -M.: Knizhnyi dom "Librokom", 2009. - 312 s. (in russo)
71. Malinetskii G.G., Prostranstvo sinergetiki: Vzgl'yad s vysoty. - M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2013. - 248 s. (in russo)
72. Malkin I.G. Metody Lyapunova i Puankare v teorii nelineinykh kolebaniy. Izd. 3-e. - M.: Editoriale URSS, 2010. - 248 s. (in russo)
73. Marshall A., Olkin I. Neravenstva: teoriya mazhorizatsii cioè prilozheniya: - M.: Mir, 1983. - 576 s. (in russo)
74. Mel'nikov G.I. Dinamika nelineinykh mekhanicheskikh i elektro-mekhanicheskikh sistem. - L.: Mashinostroenie, 1975. - 200 s. (in russo)
75. Metody issledovaniya nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravlenie /Pod rosso. R.A. Nelpina. - M.: Nauka, 1975. - 448 s. (in russo)
76. Miroshnik I.V. Soglasovannoe upravlenie mnogokanal'nymi sistemami.- L.: Energoatomizdat, Leningr. otd-nie, 1990. - 128 s. (in russo)
77. Mnogorezhimnye i nestatsionarnye sistemy avtomaticheskogo upravleniya / Pod rosso. B.N. Petrova. - M.: Mashinostroenie, 1978. - 240 s. (in russo)
78. Modelirovanie i prognozirovanie global'nogo, regional'nogo i natsional'nogo razvitiya / Otv. red. A.A. Akaev, A.V. Korotaev, G.G. Malinetskii, S.Yu. Malkov. - M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2012. - 488 s. (in russo)
79. Mun F. Khaoticheskaya kolebaniya: vvodnyi kurs dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov: Per. s angl. - M.: Mir, 1990. - 312 s. (in russo)
80. Nazarethan A.P. Tsvivilizatsionnye krizisy v kontekste Universal'noi istorii. (Sinergetika - psikhologiya - prognozirovanie): 2-e izd. - M.: Mir, 2004. - 367 s. (in russo)
81. Neimark Yu.I., Landa P.S. Stokhasticheskie i khaoticheskie kolebaniya. -M.: Nauka, 1987. - 424 s. (in russo)

82. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii. - M.- L.: Gosizdat, 1949. - 550 s. (in russo)
83. Nikolis G., Prigozhin I. Poznanie slozhnogo: Vvedenie / Per. s angl. - M.: Mir, 1990. - 342 s. (in russo)
84. Nikolis G., Prigozhin I. Poznanie slozhnogo. Vvedenie: Per. s angl. Izd. 2-e, stereotipnoe. - M.: Editoriale URSS, 2003. - 344 s. (in russo)
85. Nitetski Z. Vvedenie v differentsial'nuyu dinamiku / Per. s angl. - M.: Mir, 1975. - 304 s. (in russo)
86. Olemskoi A.I., il figlio di Katsnel A.A. Sinergetika kondensirovannoi sredy. - M.: Editoriale URSS, 2003. - 336 s. (in russo)
87. Omorov R.O. Razrabotka i issledovanie fotoelektricheskikh sledyashchikh sistem maloi parametricheskoi chuvstvitel'nosti. Avtoreferat. dis.kand. tekhn. nauk. L.: LITMO, 1985. - 21 s. (in russo)
88. Omorov R.O. Razrabotka i issledovanie fotoelektricheskikh sledyashchikh sistem maloi parametricheskoi chuvstvitel'nosti. Diss. kand. tekhn. nauk. - L.: LITMO. 1985. - 264 s. (in russo)
89. Omorov R.O., Ushakov A.V. Sintez sistem minimal'noi modal'noi modal'noi chuvstvitel'nosti: Sb. nauch. tr. / Leningr. in-t tochn. mekh. i optiki. -- L.: - 1986. - S. 50-60. (in russo)
90. Omorov R.O. Maksimal'naya grubost' dinamicheskikh sistem upravleniya. - V kn.: Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya. Tezisy dokladov Respublikanskoj nauchnoi konferentsii. (Frunze 14-15 sentyabrya 1989). - Frunze, 1989. - S. 119. (in russo)
91. Omorov R.O. Otsenka grubosti upravlyaemykh dinamicheskikh sistema. // Izv. vuzov. Elektromekhanika. -- 1990. - №7. - S. 81-87. (in russo)
92. Omorov R.O., Ushakov A.V. Otsenki robnosti v zadachakh upravleniya i nablyudeniya // Izv.vuzov. Elektromekhanika. - 1991. - №1. - S. 78-85. (in russo)

93. Omorov R. O. Maksimal'naya grubost' dinamicheskikh sistem // Avtomatika i telemekhanika. -1991. - №8. -- S. 36-45. (in russo)
94. Omorov R.O. Issledovanie grubosti i bifurkatsii ekologicheskikh sistem "khishchnik-zhertva" // Tezisy doklad. - Khar'kov: 1991. - S. 79-80. (in russo)
95. Omorov R.O. Sintez grubyykh singulyarno vozmushchennykh nelineinykh sistem upravleniya / Sbornik dokl. - M.: 1991. - S. 139-141. (in russo)
96. Omorov R.O. Metody otsenki grubosti dinamicheskikh sistem i ikh primeneniya dlya issledovaniya bifurkatsii i sinteza grubyykh upravlyaemykh sistem // Tr. konf. po opticheskoi obrabotke informats. - Bishkek: 1991. - S. 65-73. (in russo)
97. Omorov R.O. Otsenivanie grubosti dinamicheskikh sistem i ikh primeneniya dlya sinteza robnostnykh nelineinykh i semeystv lineinykh sistem upravleniya // Kh Nauchn. konf. "Planirovanie i avtomatizatsiya eksperimenta v nauchnykh issledovaniyakh. - M.: 1992. - S. 18-20. (in russo)
98. Omorov R. O. Mera grubosti dinamicheskikh sistem i kriterii vozniknoveniya khaoticheskikh kolebaniy i bifurkatsii v sinergeticheskikh sistemakh // Sintez algoritmov stabilizatsii sistem: Mezhdvedomstv. sb. -Vyp.8. - Taganrog, 1992. -- S. 128-134. (in russo)
99. Omorov R.O. Otsenka grubosti dinamicheskikh sistem na osnove funktsii Lyapunova // V mezhdvedomstven. sborn. Sintez algoritmov stabilizatsii sistem. - Vyp.8. - Taganrog: - 1992. - S. 134-138. (in russo)
100. Omorov R.O., Ushakov A.V. Modal'naya robnost' mnogomernykh stokhasticheskikh sistema upravleniya // V mezhvuz. sborn. Veroyatnostnye metody issledovaniy dinamicheskikh sistem. - L.: SPbITMO, 1992. - S. 136-147. (in russo)
101. Omorov R. O. Kolichestvennye mery grubosti dinamicheskikh sistem ikh prilozheniya k sistemam upravleniya: Diss. dokt. tekhn. nauk. - Sankt-Peterburg: SPb ITMO, 1992. - 188 s. (in russo)

102. Omorov R. O. Kolichestvennye mery grubosti dinamicheskikh sistem ikh prilozheniya k sistemam upravleniya: Avtoref. diss. dokt. dokt. tekhn. nauk. - Sankt-Peterburg: SPb ITMO, 1993. - 38 s. (in russo)
103. Omorov R.O. Otsenka grubosti ekologicheskikh sistem "khishchnik-zhertva" // Nauka i tekhnika. -- 1996. - №1. -- S. 54-61. (in russo)
104. Omorov R. O. Sinergeticheskie sistemy: problematiko grubosti, bifurkatsii i katastrof// Nauka i novye tekhnologii. -- 1997. - №2. -- S. 26-36. (in russo)
105. Omorov R. O. Issledovanie grubosti attraktorov sinergeticheskikh sistem // Nauka i novye tekhnologii. -- 2002. - №2. -- S. 125-130. (in russo)
106. Omorov R.O. Sinergeticheskii podkhod k ekonomicheskim sistemam // Nauka i novye tekhnologii. -- 2003. - № 2. - S. 100-105. (in russo)
107. Omorov R. O. Upravlenie grubost'yu sinergeticheskikh sistem // Problemy avtomatiki i upravleniya. - 2009. - №1. -- S. 23-30. (in russo)
108. Omorov R. O. Metod topologicheskoi grubosti: Teoriya i prilozheniya. I. Teoriya // Izv. NAN KR. -- 2009. - №3. -- S. 144-148. (in russo)
109. Omorov R.O. Metodologiya topologicheskoi grubosti: Teoriya i prilozheniya. II. Prilozheniya // Izv. NAN KR. -- 2010. - №1. -- S. 32-36. (in russo)
110. Omorov R. O. Topologicheskaya teoriya i metod issledovaniya grubosti i bifurkatsii sinergeticheskikh sistem // Problemy avtomatiki i upravleniya. - 2010. - №1. - S. 31-34. (in russo)
111. Omorov R.O. Topologicheskaya grubost' sinergeticheskikh sistem // Mezhdunarodnyi zhurnal "Problemy upravleniya i informatiki". - №2. -2012. - S. 5-12. (in russo)
112. Omorov R.O. Khaos i poryadok v sinergeticheskikh sistemakh: primeneniye metoda topologicheskoi grubosti // Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyami. -- 2012. - vyp. 43. - S. 175-181. (in russo)

113. Omorov R.O., Dzhamanbaeva Z.A. Issledovaniya grubosti, bifurkatsii i khaosa sinergeticheskikh sistem v oblasti khimii // Problemy upravleniya i informatiki. - №1. - 2012. - S. 12-25. (in russo)
114. Palis Zh., di Melu V. Geometricheskaya teoriya dinamicheskikh sistema: Vvedenie / Per. s angl. - M.: Mir, 1986. - 301 s. (in russo)
115. Penrouz R. Novyi UM korolya: O komp'yuterakh, myshlenii i zakonakh fiziki. Per s angl. / Pod obshch. rosso. V.O. Malysenko. Predisl. G.G. Malinetskogo. Izd. 3-e. - M.: Izdatel'stvo LKI, 2008. - 400 s. (in russo)
116. Peters E. Khaos i poryadok na rynkakh kapitala. Novyi analiticheskii vzglyad na tsikly, tseny i izmenchivost' rynka: Per. s angl. - M.: Mir, 2000. - 333 s. (in russo)
117. Petrov V.V., Gordeev A.A. Nelincinye servomekhanizmy. - M.: Mashinostroenie, 1979. - 471 s. (in russo)
118. Pikovskii A., Rozenblyum M., Kurts Yu. Sinkhronizatsiya. Fundamental'noe nelineinoe yavlenie. - M.: Tekhnosfera, 2003. - 496 s. (in russo)
119. Pliss V.A. O grubosti differentsial'nykh uravnenii zadannykh na tore. - Vesti LGU. Ser. Matematika, mekhanika. - 1960. - № 13. - vyp. 3. - S. 15-23. (in russo)
120. Podchukaev V.A. Analiz grubosti svoistva asimptoticheskoi ustoychivosti reguliruemyykh sistem // Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. - 1985. - №6. - S. 131-137. (in russo)
121. Prigozhin I., Stengers I. Vremya, khaos, kvant: K resheniyu voprosa vremeni / Per. s angl. - M.: Editoriale URSS, 2000. - 240 s. (in russo)
122. Prigozhin I., Stengers I. Poryadok iz khaosa. Novyi dialog cheloveka s prirodoy / Per. s angl. Yu.A. Danilova. 3-e izd. - M.: Editoriale URSS, 2001. - 312 s. (in russo)
123. Prigozhin I. Ot sushchestvuyushchego k vznikayushchemu: Vremya i slozhnost' v fizicheskikh naukakh: Per. s angl. / Pod rosso., s predisl. I poslesl.

- Yu.L. Klimontovicha. Izd. 2-e, dop. - M.: Editoriale URSS, 2002. - 288 s. (in russo)
124. Prigozhin I., Kondepudi D. Sovremennaya termodinamika: Ot teplovykh dvigatelei do dissipativnykh struktur / Per. s angl. - M.: Mir, 2002. - 461 s. (in russo)
125. Problema matematicheskoi istorii: Matematicheskoe modelirovanie istoricheskikh protsessov / Otv. rosso. G.G. Malinetskii, A.V. Korotavev. - M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2008. - 208 s. (in russo)
126. Prostranstvo tsiklov: Mir - Rossiya - regione / Pod rosso. V.L. Baburina, P.A. Chistyakova. - M.: Izdatel'stvo LKI, 2007. - 320 s. (in russo)
127. Puankare A. O krivykh opredelyaemykh differentsial'nymi uravneniyami / Per. s frants.; Pod rosso. A. A. A. Andronova. - M.; L.: Gostekhizdat, 1947. - 392 s. (in russo)
128. Puankare A. Izbrannye trudy. V 3-ti t. Per. s franchi. Baccello rosso. N.N. Bogolyubova. T.1., 1971. - 771 s.; T.2., 1972. - 999 s.; T.3., 1974. - 771 s. (in russo)
129. Puankare A. O nauke? Per. s frants. - M.: Nauka. Glavnaya rosso. fiz.-mat. lit., 1983. - 560 s. (in russo)
130. Raspoznavanie. Autodiagnostika. Myshlenie. Sinergetika i nauka o cheloveke / Pod rosso. D.S. Chernavskogo. -- M.: Radiotekhnika, 2004. - 272 s. (in russo)
131. Reizin' L.E. Lokal'naya ekvivalentnost' differentsial'nykh uravnenii. - Riga: Zinatne, 1971. - 235 s. (in russo)
132. Rozenvasser E.N., Yusupov R.M. R.M. Chuvstvitel'nost' sistem upravleniya. - M.: Nauka, 1981. - 464 s. (in russo)
133. Sadovskii M.A., Bolkhovitinov L.G., Pisarenko V. F. Deformirovanie geofizicheskoi sredy i seismicheskii protsess. - M.: Nauka, 1987. - 100 s. (in russo)

134. Svirezhev Yu. M., Logofet D. O. Ustoichivost' biologicheskikh soobshchestv. -M.: Nauka, 1978. - 352 s. (in russo)
135. Svirezhev Yu. M. Nelineinye volny, dissipativnye struktury i katastrofy v ekologii. - M.: Nauka, 1987. - 368 s. (in russo)
136. "Sinai Ya.G. Neustoichivost' i stokhastichnost' i stokhastichnost' dinamicheskikh sistem. -M.: ITEF, 1982. - 25 s. (in russo)
137. Sinergetika: Sb. statei / Per. s angl. sost. A. I. Ryazanov, A. D. Sukhanov; Pod rosso. B. B. Kadomtseva. - M.: Mir, 1984. - 248 s. (in russo)
138. Sinergetika i psikhologiya. Teksty. Vyp.2. Sotsial'nye protsessy / Pod rosso. I.N. Trofimovoi. - M.: "Yanus-K", 1999. - 272 s. (in russo)
139. Sinergetika i problemy teorii upravleniya / Pod rosso. A. A. Kolesnikova. -- M.: Fizmatlit, 2004. - 504 s. (in russo)
140. Sinergetika. Antologiya / Nauchnyi redaktor, sostavitel', avtor perevodov i vstup. stat'i E.N. Knyazeva. - M.: SPb. Tsentr gumanitarnykh initsiativ, 2013. - 408 s. (in russo)
141. Smeil S. Grubye sistemy ne plotny. - Sb. per. Matematika, 1976, t.11, - №4. - S. 107-112. (in russo)
142. Smeil S. Uspekhi matem. nauk. 1970. T.25, №1. - C. 113-185. (in russo)
143. Sovremennyye problema matematiki. Fundamental'nye napravleniya / Pod rosso. V.I. Arnol'da. T.1., 1985, T.5., 1986. (in russo)
144. Solodovnikov V.V. O sinteze mnogomernykh SAR i probleme grubosti // Izv.vuzov. Priborostroenie. -- 1988. - S. 5-15. (in russo)
145. Sprott Dzh. K. Elegantnyi khaos: algebraicheski prostye khaoticheskie potoki. - M. - Izhevsk: Izhevskii institut komp'yuternykh issledovaniy, 2012. - 328 s. (in russo)
146. Strannyye attraktory: Sb. / Per. s angl; Pod rosso. Ya. G. Sinaya, L. P. Shil'nikova. - M: Mir, 1981. - 253 s. (in russo)
147. Teoriya sistem. Matematicheskie metody i modelirovanie. Sb. statei. Per. s angl. - M.: Mir, 1989. - 384 s. (in russo)

148. Teoriya sistem s peremennoi strukturoi / Pod rosso. S.V. Emel'yanova. - M.: Nauka, 1970. - 592 s. (in russo)
149. Tikhonov A.N. Sistemy differentsial'nykh uravnenii, sodержashchie malye malye parametry pri proizvodnykh // Matem. sb., 1952. T.31., №3. - S. 575-586. (in russo)
150. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Metodi resheniya resheniya nekorrektnykh zadach. - M.: Nauka, 1986. - 288 s. (in russo)
151. Tomovich R., Vukobratovich M. Obshchaya teoriya chuvstvitel'nosti. - M.: Sov. radio, 1972. - 240 s. (in russo)
152. Tom R. Uspekhi matematicheskikh nauk. 1972. T.27. - №5. - S. 7-51. (in russo)
153. Topologiya, obyknovennyye differentsial'nye uravneniya, dinamicheskie sistemy: Sb. obzornykh statei. Vyp.2. K 50-letiyu instituta (Trudy MIAN SSSR.T.169). - M.: Nauka, 1985. - 256 s. (in russo)
154. Trubetskov D. I. Vvedenie v sinergetiku: Khaos i struktury. - M.: Editoriale URSS, 2010. - 240 s. (in russo)
155. Uilkinson Dzh. Kh. Algebraicheskaya problema sobstvennykh znachenii. -M.: Nauka, 1970. - 564 s. (in russo)
156. Uonem M. Lineinye mnogomernyye mnogomernyye sistemy upravleniya. - M.: Nauka, 1980. - 476 s. (in russo)
157. Utkin V.I. Skol'zyashchie rezhimy i ikh primeneniya v sistemakh s peremennoi strukturoi. - M.: Nauka, 1974. - 272 s. (in russo)
158. Ushakov A.V. Usloviya nulevoi parametricheskoi chuvstvitel'nosti v zadache slezheniya // Avtomatika i telemekhanika. -- 1981. - №9. - S. 30-37. (in russo)
159. Ushakov A.V., Omorov R.O. Otsenka potentsial'noi parametricheskoi chuvstvitel'nosti zhelaemoi dinamicheskoi modeli v zadache modal'nogo upravleniya // Izv. vuzov. Elektromekhanika. - 1982. - №7. - S. 800-805. (in russo)

160. Ushakov A.V., Omorov R.O. Otsenka parametriceskoi chuvstvitel'nosti lineinykh ob"ektov upravleniya po stepeni ikh upravlyaemosti i nablyudaemosti // Izv. vuzov. Elektromekhanika. -- 1984. - №8. - S. 53-58. (in russo)

161. Ushakov A.V., Omorov R.O. Ispol'zovanie apparata funktsii funktsii modal'noi chuvstvitel'nosti dlya otsenki tochnosti dinamicheskikh sistem. Informatsionnoe soobshchenie o Vsesoyuznom koordinatsionnom soveshchaniy po problemam adaptatsii i XI seminare po adaptivnym sistemam (Frunze, 16-25 aprelya 1982g.) // Avtomatika i telemekhanika. -- 1983. - №9. - S. 171. (in russo)

162. Ushakov A.V., Omorov R.O. Sintez regulyatorov modal'no-robastnykh sistem avtomaticheskogo upravleniya // Struktury slozhnykh sistem i algoritmo upravleniya / Pod rosso. Yu.A. Bortsova, V.B. Yakovleva (Voprosy teorii sistem avtomaticheskogo upravleniya, Vyp.8). - L.: Izd-vo Leningr. un-ta, 1990. - S. 92-103. (in russo)

163. Ushakov A.V., Omorov R.O. Svoistva skalpello obuslovlennosti soprovozhdayushchikh matrits-standartnykh polinomov // V kn.: Sintez diskretnykh regulyatorov pri pomoshchi EVM // Grigor'ev V.V., Drozdov V.N., Lavrent'ev V.V., Ushakov A.V. - L.: Mashinostroenie, Leningr. otd-nie, 1983. - S. 227-234. (in russo)

164. Ushakov A.V., Omorov R.O. Otsenki modal'noi robastnosti i sintez semeistv lineinykh mnogomernykh stokhasticheskikh sistema upravleniya // V kn.: Mezhdunarodnaya konferentsiya po interval'nykh i stokhasticheskim metodam v nauke i tekhnike. Sb. trudov (Moskva, sentyabr' 1992g.). - M.: - 1992. T.1. -- C. 180-183. (in russo)

165. Ushakov A.V., Omorov R.O., Alisherov S. Analiticheskoe reshenie zadachi stokhasticheskogo stokhasticheskogo modal'nogo upravleniya // Izv. AN Kirg. SSR. - 1989. - № 4.-S. 43-52. (in russo)

166. Faddeev D.K., Faddeeva V.N. Chislennyye metody lineinoi algebr. - - M.: Fizmatgiz, 1963. - 734 s. (in russo)

167. Feder E. Fraktaly: Per. s angl. - M.: Mir, 1991. - 254 s. (in russo)

168. Forsait Dzh., Mal'kol'm M. , Mouler K. Mashinnye metody matematicheskikh vychislenii. - M.: Mir, 1980. - 279 s. (in russo)

169. Khaken G. Sinergetika: ierarkhii neustoichivostei v samoorganizuyushchikhsya sistemakh i ustroistvakh / Per. s angl. - M.: Mir, 1985. - 423 s. (in russo)

170. Khaken G. Informatsiya i samoorganizatsiya. Makroskopicheskii podkhod k slozhnym sistemam: Per. s angl. - M.: Kom Kniga, 2005. - 248 s. (in russo)

171. Khaken G. Informatsiya i samoorganizatsiya. Makroskopicheskii podkhod k slozhnym sistemam: Per. s angl. - Predisl. Yu.L. Klimontovicha. Izd. 3-e, ispr. i znach. dop. - M.: URSS: LENANDIA, 2014. - 320 s. (in russo)

172. Khaken G. Sinergetika: Printsipy i osnovy. Perspektivy i prilozheniya. Cap.1: Printsipy i osnovy. Neravnovesnye fazovye perekhody i samoorganizatsiya v fizike, khimii i biologii. Per. s angl. / Pod rosso. i s predisl. Yu.L. Klimontovicha i S.M. Osovtsa. Izd. 2-e, dop. - M.: URSS: LENANDIA, 2015. - 448 s. (in russo)

173. Khaken G. Sinergetika: Printsipy i osnovy. Perspektivy i prilozheniya. Cap.2: Perspektivy i prilozheniya: Ierarkhii neustoichivostei v samoorganizuyushchikhsya sistemakh i ustroistvakh. Per. s angl. / Pod rosso. i s predisl. Yu.L. Klimontovicha i S.M. Osovtsa. Izd. 2-e, dop. - M.: URSS: LENANDIA, 2015. - 432 s. (in russo)

174. Kharitonov V.L. Ob asimptoticheskoi ustoichivosti polozheniya ravnovesiya semeistva sistem lineinykh differentsial'nykh uravnenii // Dif. uravneniya. - 1978. T.14. - №11. - S. 2086-2088. (in russo)

175. Kharitonov V.L. Ob odnom obobshchenii kriteriya ustoichivosti // Izv. AN. Kaz. SSR. Ser. fiz. -mat. - 1978. - №1. - S. 53-57. (in russo)

176. Khartman F. Obyknoennye differentsial'nye uravneniya / Per. s angl. pod. rosso. V.M. Alekseeva. - M.: Mir, 1970. - 720 s. (in russo)
177. Khimmel'blau D. Prikladnoe nelineinoe programmirovaniye / Per. s angl. - M.: Mir, 1975. - 534 s. (in russo)
178. Khitsenko V. Samoorganizatsiya i menedzhment // Problemy teorii i praktiki upravleniya. - 1996. - №3. - S. 120-124. (in russo)
179. Khoking S. Kratkaya istoriya vremeni: Ot bol'shogo vzryva do Chernykh dyr / Per. s angl. N. Smorodinskoi. - SPb.: TID Amfora, 2009. - 231 s. (in russo)
180. Kholodniok M., Klich A., Kubichek M., Marek M. Metody analiza nelineinykh dinamicheskikh modelei. - M.: Mir, 1991. - 368 s. (in russo)
181. Chernavskii D.S. Sinergetika i informatsiya. Dinamicheskaya teoriya informatsii. - M.: Knizhnyi dom "Librokom", 2009. - 304 s. (in russo)
182. Chetaev N.G. Ustoichivost' dvizheniya. - M.: Nauka, 1990. - 176 s. (in russo)
183. Chillinguort D. Strukturnaya 'ustoichivost' matematicheskikh modelei. Znachenie metodov teorii katastrof // V kn.: Matematicheskoe modelirovaniye // Pod rosso. Dzh. Endryusa, R. Mak-Louna. Per. s angl. - M.: Mir, 1979. - S. 249-276. (in russo)
184. Chistilin D.K. Samoorganizatsiya mirovoi ekonomiki: Evraziiskii aspekt. - M.: ZAO "Izdatel'stvo "Ekonomika", 2004. - 237 s. (in russo)
185. Shell' E. Samoorganizatsiya v poluprovodnikakh. Neravnovesnye fazovye perekhody v poluprovodnikakh, obuslovlennyye generatsionno-rekombinatsionnymi protsessami: Per. s angl. - M.: Mir, 1991. - 464 s. (in russo)
186. Shuster G. Determinirovannyy khaos. Vvedeniye / Per. s angl. - M.: Mir, 1988. - 240 s. (in russo)
187. Ebeling V., A. di Engel, R. Faistel' R. Fizika protsessov evolyutsii. Sinergeticheskii podkhod. - M.: URSS, 2001. - 255 s. (in russo)

188. Egemberdiev T.M. Sinergiya cheloveka. - Sergiev Posad, 2006. - 145 s. (in russo)
189. Etkins P. Poryadok i besporyadok v prirode: Per. s angl. / Predisl. Yu.G. Rudogo. - M.: Mir, 1987. - 224 s. (in russo)
190. Yudashkin A. A. Bifurkatsii statsionarnykh reshenii v sinergeticheskoi neironnoi seti i upravleniye raspoznavaniyami obrazov // Avtomatika i telemekhanika. - 1996. - №11. - S. 136-147. (in russo)
191. Cavin R.K., Bhattacharyya S.P. Assegnazione dell'auto-struttura robusta e ben condizionata tramite l'equazione degli argenti. - Procedimenti. 1982. American Control Conferens. P. 1053-1057.
192. Chow S.N., Hale J.K. Metodi della teoria della biforcazione. - Springer. - 1982. - 515 p.
193. Cook A.E., Roberts P.H. Il sistema di dinamo a due dischi Rikitake. - Attuazione della Cambridge Philosophical Society, 68. (1970), P. 547-569.
194. Goh B. S., Keitmann G., Vincent T. H. Controllo ottimale di un sistema Prey - Predator // Math. Biosci. 1974. V.1933. - P. 263-268.
195. Haken H. Sinergetica: Introduzione e argomenti avanzati. - Londra: Springer. 2004. - 356 p.
196. Henon M. Una mappatura a due dimensioni con uno strano attrattore. - Comm. Matematica. Fisica, 1976, 50, p.69.
197. Hopf E. Rami di una soluzione periodica di una soluzione di stato di un sistema differenziale: Wissenschaften, Lipsia. 1942.94. - P. 1-22.
198. Kapitaniak T. Chaos per gli ingegneri: teoria, applicazioni e controllo. - Berlino, Parigi, Springer, 2000. - 142 p.

199. Klema V.C., Laub A.J. La decomposizione del valore singolare: Il suo calcolo e alcune applicazioni // IEEE Trans. Automat. contr., Vol. AC-25. - 1980. - P.164-176.
200. Lorenz E. N. Deterministik Non-Periodic Flow // G. Atmos. sci. - 1963. - V. 20. - P. 130-141.
201. Dinamica non lineare, caos, controllo e loro applicazioni alle scienze ingegneristiche. Vol.2: Vibrazioni con i Measurements e Controllo / Editors: J.M. Balthazar, P.B. Goncalves, J. Clayssen. - Pubblicato da ABCM, SBMAC, SIAM, 1999. -- 250 p.
202. Omorov R.O. Sulla robustezza di misura dei sistemi dinamici e le sue applicazioni per la ricerca delle biforcazioni e delle vibrazioni caotiche nei sistemi sinergici / Seminario congiunto sovietico-cinese "Olografia ed elaborazione ottica delle informazioni" (Scjshoip-91) Procedimento (Bishkek, settembre 1991). - Bishkek: 1991. - P. 251-253.
203. Omorov R.O. Massima rugosità dei sistemi dinamici // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 36-45.
204. Omorov R.O. Massima grossolanità dei sistemi dinamici // Automazione e controllo remoto. 1992. T. 52. № 8 pt 1. P. 1061-1068.
205. Omorov R.O. Robustezza dei sistemi dinamici ad intervallo I. Robustezza nei sistemi dinamici ad intervallo lineare continuo // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. T. 34. № 3. C. 69-74.
206. Omorov R.O. Robustness of Interval Dynamic Systems I. Robustness of Discrete Linear Interval Dynamical Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. T. 34. № 4. C. 1-5.

207. Omorov R.O. Ruvidità topologica dei sistemi sinergici // Journal of Automation and Information Sciences. 2012. T. 44. C. 61-70.
208. Ortega R., Tanq V. Robustezza dei controllori agaptive. - a Indagine / automatica, vol. 25.
209. Picco D., Telaio M. Caos sotto controllo: L'arte e la scienza della complessità. - New York: W.H. Freeman and Company, 1994. -- 408 p.
210. Peixoto M.M. Sulla stabilità strutturale // Ann. Matematica. - 1959. - V.69. - №1. - P.199-222.
211. Perkins W.R., Cruz J.B., Gonzales R.L. Progettazione di sistemi di sensibilità minima // IEEE Trans. su controllo automatico, vol. AC-13. - №2. - 1968. - P. 159-167.
212. Rao N.D., Elmetwally M.M. Analisi della sensibilità multiparametrica dei sistemi dinamici lineari attraverso il secondo metodo di Liapunov // Int. J. Controllo. - 1973, vol., 17. № 5. - P. 1105- 1112.
213. Rossler O.E. Turbolenza chimica: Caos in una piccola reazione - Sistema di diffusione // Z.Naturforsch. -- 1976. V.31. - P. 1168-1172.
214. Ruelle D. Chance e Caos. - Penguin Books, 1993. -- 195 p.
215. Ushakov A.V., Omorov R.O. Stime della robustezza modale e della sintesi di insiemi di sistemi di controllo stocastico multivariabili lineari // Conferenza internazionale sui metodi stocastici e stossastici nella scienza e nell'ingegneria (INTERVAL-92). Atti (Mosca, settembre 1992). -- M: 1992. - V.2. - P. 114.

FOR AUTHOR USE ONLY

More
Books!



yes
I want morebooks!

Buy your books fast and straightforward online - at one of world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.morebooks.shop

Compra i tuoi libri rapidamente e direttamente da internet, in una delle librerie on-line cresciuta più velocemente nel mondo! Produzione che garantisce la tutela dell'ambiente grazie all'uso della tecnologia di "stampa a domanda".

Compra i tuoi libri on-line su
www.morebooks.shop

KS OmniScriptum Publishing

Brivibas gatve 197

LV-1039 Riga, Latvia

Telefax: +371 686 204 55

info@omniscrptum.com

www.omniscrptum.com

OMNIScriptum



FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

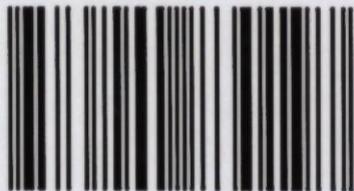
FOR AUTHOR USE ONLY

Teoria della rugosità topologica dei sistemi

Nel lavoro si considerano questioni di unicità e biforcazioni dei sistemi dinamici, in particolare i sistemi sinergici e il caos di varia natura fisica. Vengono presentate le disposizioni teoriche e un metodo di rugosità topologica sviluppato dall'autore nel lavoro. L'uso dei risultati ricevuti dall'autore è mostrato su es. di sistemi sinergici conosciuti, come i sistemi di Lorenz, Rössler, i sistemi di Belousov-Zhabotinsky, il circuito di Chua, la mappa di Henon, "predatore - preda", i modelli dei sistemi economici di Kaldor e Schumpeter, la dinamo di Rikitake e anche la biforcazione di Hopf. Il libro è destinato a una vasta gamma di ricercatori e scienziati interessati alla sinergica e al caos dei sistemi di varia natura fisica, ma anche a studenti delle discipline fisiche e matematiche e di altre scienze naturali e tecniche che si occupano di problemi di sinergica e di sistemi dinamici.



Roman Omorov, dottore in ingegneria, professore, membro corrispondente dell'Accademia Nazionale delle Scienze della Repubblica del Kirghizistan (NAS KR), accademico dell'Accademia Internazionale di Ingegneria, FPI, LIPMO.



978-620-0-83019-7