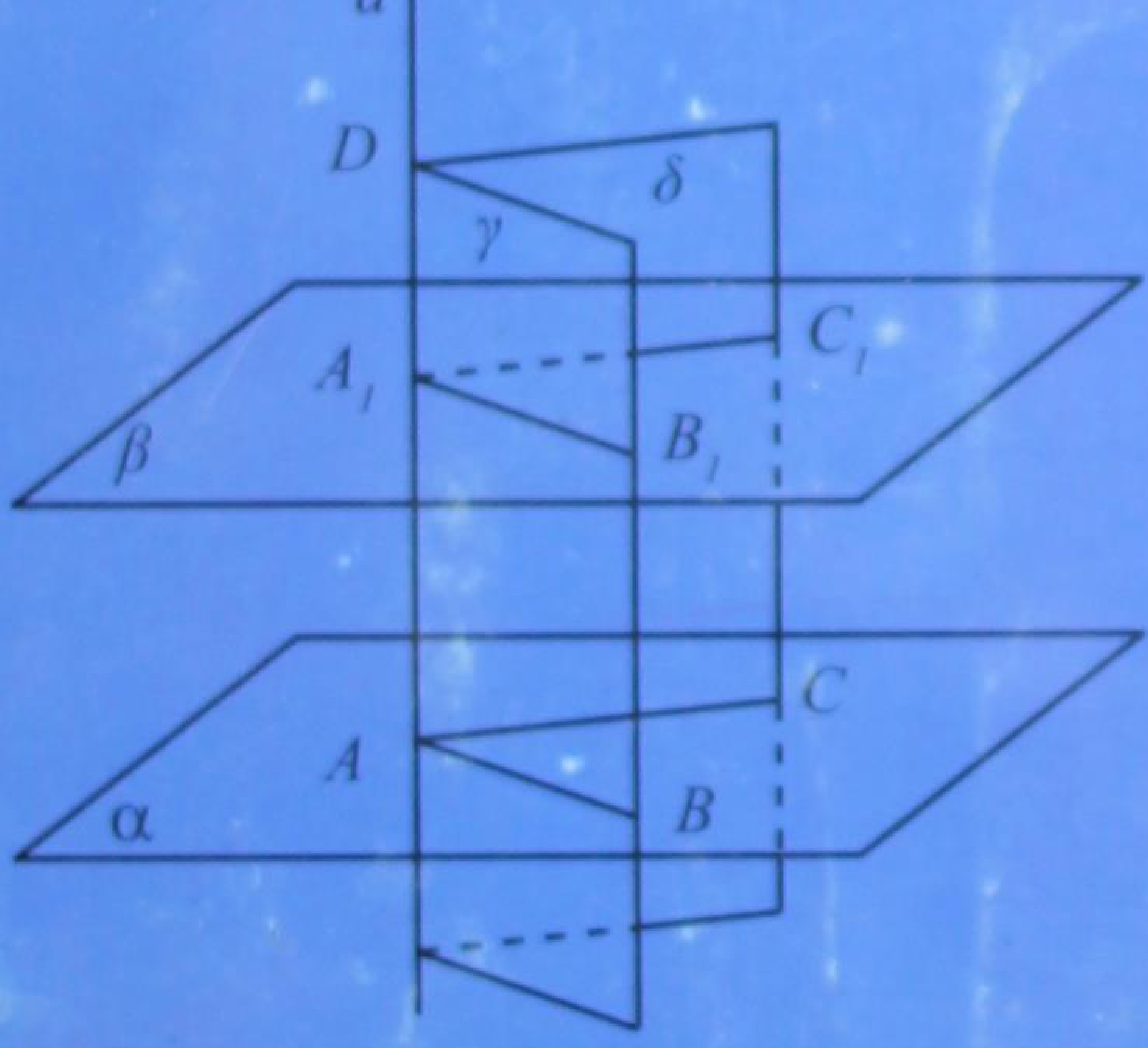
И.Б. БЕКБОЕВ,
А.А. БӨРҮБАЕВ, А.А. АЙЫЛЧИЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

10 – 11



И.Б. БЕКБОЕВ, А.А. БӨРҮБАЕВ, А.А. АЙЫЛЧИЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

Орто мектептин 10–11-класстары үчүн
окуу китеби

*Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана
илим министрлиги бекиткен*

Экинчи басылышы

Бишкек
2009

УДК 373.167.1
ББК 22.151 я721
Б 42

Бул окуу китеби Кыргыз Республикасынын билим, илим жана маданият министрлиги менен Кыргыз билим берүү институтунун ортосунда окуу китептерин чыгаруу боюнча түзүлгөн № LP TPS1 келишимдин негизинде даярдалган.

Башкы менеджери – *И. Б. Бекбоев*

Менеджери – *Т. Р. Орускулов*

Бекбоев И. Б., ж. б.

Б 42 **Геометрия:** Орто мектептин 10-11-кл. үчүн окуу китеби / И. Б. Бекбоев, А. А. Бөрүбаев, А. А. Айылчиев - 2-бас.- Б.: «Aditi», 2010. - 192.: ил.

ISBN 978–9967–25–805–1

Б 4306020502–10
ISBN 978–9967–25–805–1

УДК 373.167.1
ББК 22.151 я721

КИРИШҮҮ

УРМАТТУУ ОКУУЧУЛАР!

Бизди курчап турган нерселердин химиялык, физикалык, биологиялык ж.б. түрдүүчө касиеттери бар, ал касиеттер ошол ар түрлүү илимдерде окулуп-үйрөнүлөт. Мисалы, болоттон жасалган шарды алалы. Бул шарда канча темир, канча углерод жана башка элементтер бар экендиги химияда окулат. Физикада болсо, ушул эле телонун башка касиеттери (мисалы, шар таяныч аянтка кандай күч менен басым жасайт, ал кандай температурада эрийт ж.б.) каралат.

Геометрияда предметтердин формасы жана өлчөмдөрү гана үйрөнүлөт да, алардын башка касиеттери көңүлгө алынбайт. Мисалы, ширеңкенин кутусу, кирпич, класстык бөлмө бирдей формада. Геометрияда бул предметтер тик бурчтуу **параллелепипед** деген жалпы түшүнүккө бириктирилген жана алардын ар бири ошол түшүнүктүн бардык касиеттерине ээ, бирок алар өлчөмдөрү менен гана айырмаланышат. Формасы жана өлчөмдөрү боюнча гана айырмаланган предметтерди **геометриялык фигуралар** деп аташат.

Геометриянын методдору жана корутундулары азыр адамзаттын ишмердүүлүгүнүн көп тармактарына, математиканын башка облустарына, башка көп илимдерге, конструкциялык ишке, өндүрүшкө, архитектурага, живописке сиңирилип кетти.

Геометриядагы ар бир жаңы түшүнүк ага чейин белгилүү болгон мурдагы түшүнүктөрдүн жардамы менен аныктала тургандыгы силерге белгилүү.

Буга чейин силер геометриянын планиметрия бөлүмүн – тегиздиктеги геометриялык фигуралардын касиеттерин окуп-үйрөнүп, мейкиндиктеги фигуралардын касиеттери боюнча кыскача маалымат алгансыңар.

Эми геометриянын стереометриялык бөлүмүндө мейкиндиктик фигуралардын касиеттерин системалуу түрдө окуп-үйрөнүүгө киришебиз, атап айтканда: мейкиндиктеги түз сызыктар менен тегиздиктердин өз ара жайланыш абалдары, мейкиндиктеги тик бурчтуу координаталык системанын жана векторлордун колдонулушу, көп грандыктар менен айлануу телолорунун беттеринин аянттары жана көлөмдөрү толук окулат.

Китеп беш главадан жана тиркемелерден турат. Ар бир главанын аягында кайталоого карата суроолор жана маселелер, алардын ичинде белгилүү сандагы стереометриялык татаалыраак маселелер да берилген. Китеп тиркемелер жана жооптор менен жабдылган.

Тиркемелерде орто мектепти бүтүрүүчүлөр үчүн алардын математикалык сабаттуулугуна өтө зарыл болгон төмөнкүдөй милдеттүү маалыматтар берилди:

- планиметрия курсу боюнча кыскача маалыматтар;
- мектептик геометриянын логикалык түзүлүшү;
- Евклиддин геометриясынын негизделиши;
- Лобачевскийдин геометриясынын элементтери;
- Евклиддин жана Лобачевскийдин геометрияларынын байланышы.

Кыскасы, китепте ар бир окурмандын геометриялык билиминин сапаттуулугун камсыз кылууга керектүү теориялык түшүнүктөр жана практикалык суроо-тапшырмалар толук камтылган. Эми негизги кеп анын мазмунун талаптагыдай окуп өздөштүрүүдө турат. Ал үчүн адегенде теориялык материалды кылдаттык менен окуп чыгып, аны өздөштүрүү, андан кийин ага тиешелүү маселелерди чыгаруу зарыл. Теманы өздөштүрүүдө да, маселелерди чыгарууда да тиешелүү сүрөттү чийип, аны колдоно билүү талап кылынат.

Эң маанилүү түшүнүктөр, касиеттер, эрежелер жана теоремалардын формулировкалары атайын кара тамгалар менен жазылган. Аларды жатка билүү керек. Китепте кандай главалар, параграфтар баяндалгандыгын билүү үчүн китептин акырында жазылган мазмунуна кайрылууга туура келет.

Ошентип, китепте маанилүү көп суроолор, темалар баяндалган. Аларды терең өздөштүрүү үчүн көбүрөөк эмгектенүүгө туура келет.

Силерге ийгилик каалайбыз!

I глава МЕЙКИНДИКТЕГИ ТҮЗ СЫЗЫКТАР ЖАНА ТЕГИЗДИКТЕР

§ 1. СТЕРЕОМЕТРИЯНЫН НЕГИЗГИ ТҮШҮНҮКТӨРҮ ЖАНА АКСИОМАЛАРЫ

Силер геометриянын планиметрия бөлүмүндө тегиздикте жаткан геометриялык фигуралардын касиеттерин окуп-үйрөндүңөр. Ал бөлүмдө фигуранын бардык чекиттери бир тегиздикте жатат деп эсептелген. Эми чекиттери бир тегиздикте жатпаган фигуралардын (мейкиндиктеги фигуралардын) касиеттерин окуп-үйрөнүүгө өтөбүз. Геометриянын бул бөлүмү *стереометрия* деп аталат. Демек, стереометрияда мейкиндиктеги фигуралардын касиеттери каралат.

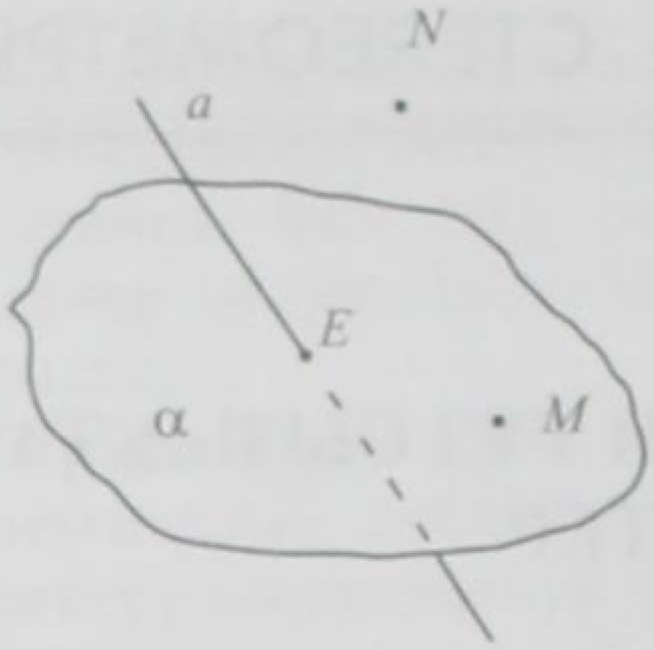
Мейкиндиктеги фигуралардын айрымдары менен силер буга чейин эле таанышсыңар, мисалы, куб, тик бурчтуу параллелепипед, шар ж.б. Мында кубдун ар бир граны эле өзүнчө тегиздикти аныктайт. Демек, мейкиндикте ар кандай тегиздиктер каралышы мүмкүн.

Планиметрияда каралган негизги түшүнүктөр: чекит, түз сызык, тегиздик стереометрияда да ошол бойдон кабыл алынат. Ошондой эле планиметриянын аксиомалары да ошол бойдон сакталат. Бирок стереометрияда ар кандай тегиздиктер жана аларда жатпаган чекиттер да каралат. Демек, планиметриянын аксиомалар системасын кеңейтүү зарыл болот. Ошондуктан стереометриянын төмөндөгүдөй аксиомаларын кабыл алууга туура келет. Стереометриянын аксиомаларынын группасын «С» аркылуу белгилейли.

C_1 *Каалагандай тегиздикке карата ал тегиздикте жатуучу жана анда жатпаган чекиттер болот.*

C_2 *Бир түз сызыкта жатпаган үч чекит аркылуу бир гана тегиздик жүргүзүүгө болот.*

C_3 *Эгер түз сызыктын эки чекити тегиздикте жатса, анда ал түз сызык бүт бойдон ошол тегиздикте жатат.*



1-сүрөт

C_4 Эгерде эки тегиздик бир жалпы чекитке ээ болсо, анда ал тегиздиктер ошол чекит аркылуу өтүүчү түз сызык боюнча кесилишет.

Бул аксиомаларга карата тегиздик дайыма табылат. α тегиздигине карата ал тегиздикте жатуучу M чекити (1-сүрөт) жана анда жатпаган N чекити табылат (C_1 аксиомасы). α тегиздигинде чексиз көп чекиттер боло тургандыгы сүрөт планиметриядан белгилүү. Ошондой эле, ал тегиздикте жатпаган N чекитин да каалагандай кылып тандап алууга болот. Демек, α тегиздигинен тышкары жаткан чекиттер да чексиз көп. Ошондуктан мейкиндикте чекиттер чексиз көп деген жыйынтыкты айта алабыз.

Эгерде түз сызык менен тегиздик жалпы чекитке ээ болсо, анда алар кесилишет: $a \cap \alpha = E$ (a-түз сызык). Анда C_3 аксиомасы «тегиздикте жатпаган түз сызык жана тегиздик бир чекитте кесилишет же кесилишпейт» деген корутундуну айтууга мүмкүнчүлүк берет.

Аксиомалардан келип чыгуучу корутундуларды айтууга болот, алар теоремалар түрүндө баяндалат.

1-теорема. **Түз сызык жана анда жатпаган чекит аркылуу бир гана тегиздик жүргүзүүгө болот.**

Д а л и л д ө ө . a түз сызыгы жана анда жатпаган A чекити берилсин. a түз сызыгынан каалагандай B жана C чекиттерин алабыз. A, B, C чекиттери бир түз сызыкта жатпайт. C_2 аксиомага ылайык ал чекиттер аркылуу α тегиздигин жүргүзүүгө болот.

B жана C чекиттери α тегиздигинде жаткандыктан, C_3 аксиомага ылайык a түз сызыгы бүт бойдон α тегиздигинде жатат.

α тегиздиги бирөө гана болот. Эгерде A чекити жана a түз сызыгы аркылуу дагы бир β тегиздигин жүргүзүүгө болот десек, анда ал β тегиздиги да A, B, C чекиттери аркылуу өткөн болот (анткени C_3 аксиомасына ылайык a түз сызыгынын бардык чекиттери β тегиздигинде болууга тийиш). Бул корутунду C_2 аксиомасына карама-каршы келет. Демек, α изделүүчү жалгыз гана тегиздик. Теорема далилденди.

2-теорема. **Кесилишүүчү эки түз сызык аркылуу бир гана тегиздик жүргүзүүгө болот.**

Д а л и л д ө ө . О чекитинде кесилишкен a, b түз сызыктары берилсин: O дон айырмаланган $A \in a$ жана $B \in b$ чекиттерин алабыз. A, O, B чекиттери бир түз сызыкта жатпайт. Ошондуктан C_2 аксиомасына ылайык алар аркылуу бир гана α тегиздиги жүргүзүлөт. $OA \in a$, $OB \in b$ болгондуктан, C_3 аксиомасына ылайык $a \in \alpha$, $b \in \alpha$ болот.

α тегиздигинин бир маанилүү аныктала тургандыгы C_2 аксиомасынан келип чыгат. Эгерде a, b түз сызыктары аркылуу өтүүчү дагы бир β тегиздиги бар деп эсептесек, анда ал да O, A, B үч чекит аркылуу өткөн болот. Бул C_2 аксиомасына каршы келет.

Демек, кесилишүүчү эки түз сызык аркылуу өтүүчү тегиздик бирөө гана болот. Теорема далилденди.

Планиметрияда тегиздикте жаткан түз сызык тегиздикти эки жарым тегиздикке бөлгөн сыяктуу эле, мейкиндиктен алынган тегиздик ал мейкиндикти жарым эки мейкиндикке бөлөт.

Мейкиндик α тегиздиги менен жарым эки мейкиндикке бөлүнгөн дейли. Эгерде A жана B чекиттери бул жарым мейкиндиктердин биринде жатса, анда AB кесиндиси α тегиздиги менен кесилишпейт. Эгерде A жана B чекиттери ар түрдүү жарым мейкиндиктерде жатса, анда AB кесиндиси α тегиздиги менен кесилишет.

Бул түшүнүктү тегиздиктеги «түз сызык», «тегиздик» жана «жарым тегиздик» деген терминдерди тиешелүү түрдө мейкиндиктеги «тегиздик», «мейкиндик» жана «жарым мейкиндик» деген терминдер менен алмаштыруу аркылуу оңой эле алууга болот. Ошондуктан тегиздикке тиешелүү түшүнүктөр кандай аныкталса, теоремалар кандай далилденсе, анда мейкиндикте да (тиешелүү терминдерди алмаштыруу аркылуу) алар ошондой эле жол менен аныкталат жана далилденет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Төмөндөгү жазууларды түшүндүрүп айтып бергиле. Аларды сүрөттө чийип көрсөткүлө. Төмөнкү учурлардын ар биринде мейкиндиктеги чекиттер, түз сызыктар жана тегиздиктер кандай жайланышкандыгын түшүндүрүп көрсөткүлө:

а) $A \in a$, $B \notin a$, $C \in \alpha$, $D \notin \alpha$;

б) $b \in \alpha$, $b \notin \alpha$;

в) $a \cap b = M$, $a \cap \alpha = N$, $\alpha \cap \beta = G$.

2. Төмөндөгү сүйлөмдөрдү символдор аркылуу белгилеп жазгыла. Мейкиндикте:

1) M чекити α тегиздигинде жатат, бирок β тегиздигинде жатпайт;

2) l түз сызыгы жана анда жатпаган N чекити β тегиздигине тиешелүү;

3. a жана b түз сызыктары α тегиздигинде жаткан A чекити аркылуу өтөт, a түз сызыгы α тегиздигинде жатат, ал эми b түз сызыгы ал тегиздикте жатпайт. Ар бир учурду чиймеде сүрөттөп көрсөткүлө.
   1) бир чекит аркылуу;
   2) ар кандай эки чекит аркылуу;
   3) ар кандай үч чекит аркылуу;
   4) ар бир үч чекити бир түз сызыкта жатпаган төрт чекит аркылуу канча ар кандай тегиздиктерди жүргүзүүгө болот? Түшүндүрүп бергиле.

4. $a \cap b = M$, $a \subset \alpha$ экендиги берилген.
   а) $M \in a$ б) $b \subset \alpha$ деп айтууга болобу?

5. Бир тегиздикте жатпаган төрт чекит берилген. Алардын ар кандай үч чекити бир түз сызыкта жатпай тургандыгын далилдегиле.

6. a түз сызыгы β тегиздигинин B чекити аркылуу өтөт. Мындан a түз сызыгы β тегиздигин кесип өтөт деп айтууга болобу?

7. Бир түз сызыкта жаткан: 1) үч чекит; 2) төрт чекит аркылуу тегиздик жүргүзүүгө болобу? Канчаны?

8. a түз сызыгында жатпаган B чекити аркылуу өтүп, a түз сызыгын кесип өтүүчү бардык түз сызыктардын чогуусу бир тегиздикте жатаарын далилдегиле.

9. Бир тегиздикте жатпаган A, B, C, D төрт чекит берилген. AC жана BD түз сызыктарынын кесилишпей тургандыгын далилдегиле.

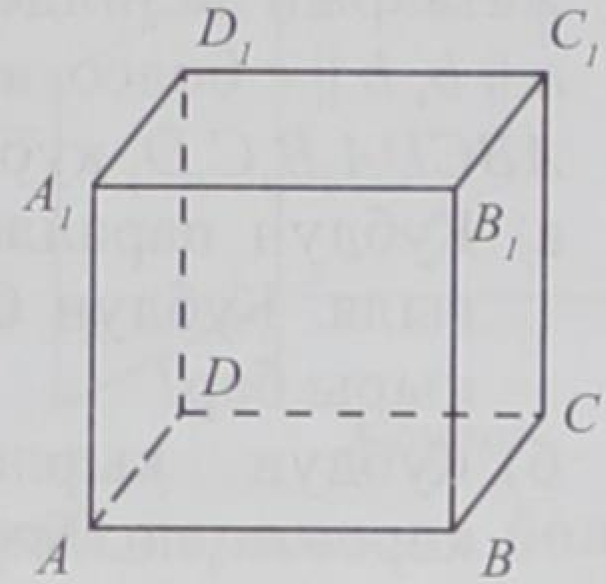
10. Кесилишүүчү эки түз сызык берилген. Берилген эки түз сызык жана аларды кесип өтүүчү түз сызык бир тегиздикте жатаарын далилдегиле.

11. Эгерде үч тегиздик жалпы чекитке ээ болсо:
   1) бул тегиздиктер жалпы түз сызыкка ээ болот деп айтууга болобу?
   2) ал тегиздиктер эки-экиден кесилишкенде канча ар түрдүү түз сызыктар пайда болушу мүмкүн?

12. Тегиздик жана анда жатпаган түз сызык бирден ашык жалпы чекитке ээ боло албай тургандыгын далилдегиле.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬ ЖАНА КАЙЧЫЛАШ ТҮЗ СЫЗЫКТАР

Мейкиндикте эки түз сызык берилсин. Алар бир тегиздикте жатышы же жатпай калышы да мүмкүн. Мисалы, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубунун (2-сүрөт) кырлары аркылуу өткөн түз сызыктарды карайлы. Алар мейкиндиктеги түз сызыктарды элестетет. Эгерде эки түз сызык бир тегиздикте жатса, анда алар бир чекитте кесилишет же кесилишпейт (ал бизге белгилүү). Чындыгында эле, берилген кубдун бир гранында жаткан AB, BC түз сызыктары B чекитинде кесилишет, ал эми AB, DC түз сызыктары кесилишпейт. Бирок, бир тегиздикте жатпаган жана кесилишпеген түз сызыктар да болот. (Мисалы, AB, A_1D_1 түз сызыктары).



2-сүрөт

Бир тегиздикте жатпаган жана кесилишпеген эки түз сызык *кайчылаш* түз сызыктар деп аталат. Андай түз сызыктар менен силер жогоруда тааныштыңар. Демек, кайчылаш түз сызыктар кесилишпейт, эгерде кесилишсе, анда алар аркылуу бир тегиздик жүргүзүүгө мүмкүн болот эле. Ошондуктан жогорудагы AB жана A_1D_1 же BC жана A_1B_1 түз сызыктары кайчылаш түз сызыктар болушат.

Бир тегиздикте жаткан жана кесилишпеген эки түз сызык параллель деп аталат. Жогорудагы AB жана DC түз сызыктары *параллель* ($AB \parallel DC$) болушат. Мейкиндиктеги түз сызыктардын параллелдиги тегиздиктегидей эле белгиленет.

Демек, параллель эки түз сызык аркылуу дайыма тегиздик жүргүзүүгө болот, бирок бирди гана.

a жана b түз сызыктары параллель болсо, анда аныктама боюнча алар кандайдыр α тегиздигинде жатышат. Ал тегиздик бирөө гана болот. Чындыгында эле, эгерде a түз сызыгынан каалагандай A чекитин алсак, анда A чекити жана b түз сызыгы аркылуу бир гана β тегиздигин жүргүзүүгө болот (1-теорема). Ал тегиздикте A чекити аркылуу b га параллель болгон бир гана a түз сызыгы өтөт. Демек, α жана β тегиздиктери дал келишет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

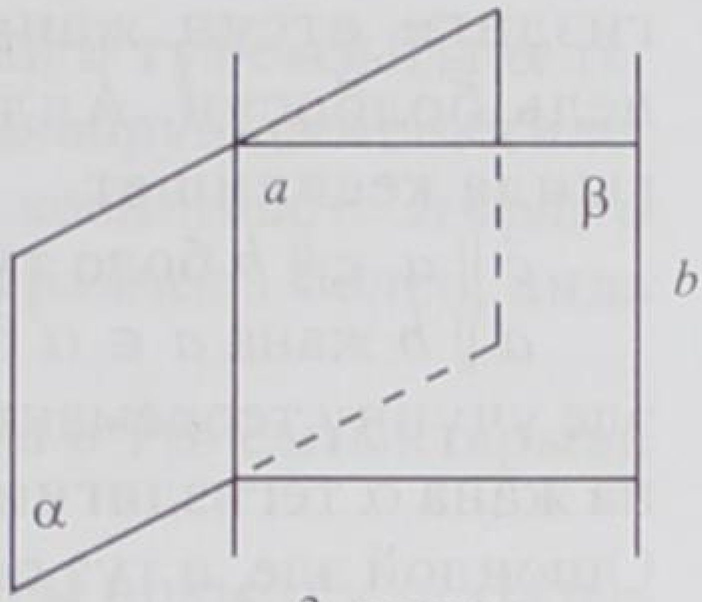
1. Берилген A чекити аркылуу берилген a түз сызыгына параллель болгон түз сызыкты кантип жүргүзүүгө болот?

2. Бири-бирине дал келбеген параллель эки түз сызык берилген. Аларды кесип өтүүчү бардык түз сызыктар бир тегиздикте жатаарын далилдегиле.
3. $a \parallel b$, $b \parallel c$ болсо, анда $a \parallel c$ болорун далилдегиле.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубу берилген.
   а) Кубдун параллель кырларын көрсөткүлө, белгилеп жазгыла. Кубдун бир кырына параллель болгон дагы канча кыры бар?
   б) Кубдун кырларындагы кайчылаш түз сызыктарды көрсөткүлө. Бир кырына кайчылаш канча кыры бар? Белгилеп көрсөткүлө
5. Кесилишүүчү эки тегиздик үчүнчү тегиздик менен кесилген. Бул тегиздиктердин кесилишкен сызыктары:
   а) параллель; б) параллель эмес; в) кесилишпөөчү жана параллель эмес түз сызыктар болушу мүмкүнбү?
6. α тегиздигинин B жана C чекиттеринен ал тегиздикте жатпагандай $BD = 18$ дм жана $CE = 14$ дм параллель кесиндилери жүргүзүлгөн. DE түз сызыгы a тегиздигин F чекитинде кесип өтөт. Эгерде $BC = 8$ дм болсо BF кесиндисинин узундугун тапкыла. Эки учурду карагыла.
7. a жана b түз сызыктары кесилишет. a түз сызыгына параллель болуп, b түз сызыгын кесип өтүүчү түз сызыктардын чогуусу бир тегиздикте жатаарын далилдегиле.
8. b жана d кайчылаш түз сызыктар. Эгерде a, c түз сызыктарына карата $a \parallel b$ жана $c \parallel d$ болсо, анда a жана c түз сызыктары кандай жайланышат?
9. Берилген чекит аркылуу өтүүчү берилген түз сызыкка кайчылаш болгон түз сызыкты түзгүлө.
10. Эгерде AB жана CD түз сызыктары кайчылаш болсо, анда AC жана BD түз сызыктары да кайчылаш болот. Далилдегиле.
11. AB жана CD түз сызыктары кесилишет. AC жана CD түз сызыктары кайчылаш болбой тургандыгын далилдегиле.

§ 3. ТҮЗ СЫЗЫК МЕНЕН ТЕГИЗДИКТИН ПАРАЛЛЕЛДҮҮЛҮГҮ

Тегиздикте жатпаган түз сызык, берилген тегиздикти же бир чекитте кесип өтө тургандыгы, же аны кеспей тургандыгы силерге планиметрия курсунан белгилүү.

Эгерде түз сызык менен тегиздик жалпы чекитке ээ болбосо, анда алар *параллель деп аталат.* a түз сызыгынын α тегиздигине параллелдүүлүгү $a \parallel \alpha$ түрүндө белгиленет.



3-сүрөт

Түз сызык менен тегиздиктин параллелдүүлүк шарты төмөндөгү теорема аркылуу мүнөздөлөт.

3-теорема. **Эгерде түз сызык тегиздикте жаткан кандайдыр бир түз сызыкка параллель болсо, анда берилген түз сызык ал тегиздикке да параллель болот.**

Д а л и л д ө ө . α тегиздигинде жаткан a түз сызыгы жана ал тегиздикте жатпаган b түз сызыгы берилсин, $b \parallel a$ болсун (3-сүрөт). $b \parallel \alpha$ болоорун далилдейбиз.

$a \parallel b$ түз сызыктары аркылуу бир гана β тегиздигин жүргүзүүгө болот (§ 2) $a \in \alpha$ болгондуктан, $\alpha \cap \beta = a$. Эгерде b түз сызыгы α тегиздиги менен M чекитинде кесилишет десек, анда M чекити α тегиздигинде да, жана β тегиздигинде да жатат эле, б.а. алардын кесилишиндеги a түз сызыгында жатат эле. Бул учурда a жана b жалпы M чекитине ээ болуп калмак. Бул теореманын шартына карама-каршы келет. Ошондуктан $b \parallel \alpha$ болот. Теорема далилденди.

4-теорема (3-теоремага тескери теорема). **Эгерде түз сызык менен тегиздик параллель болсо, анда берилген түз сызык аркылуу өтүүчү жана берилген тегиздикке параллель болбогон ар кандай тегиздик берилгеи тегиздикти ал түз сызыкка параллель болгон түз сызык боюнча кесип өтөт.**

Д а л и л д ө ө . α тегиздиги жана анда жатпаган b түз сызыгы берилип, $b \parallel a$ болсун. 3-сүрөттөн пайдаланабыз. b түз сызыгы аркылуу өтүүчү жана α га параллель болбогон каалагандай β тегиздигин жүргүзөбүз. Ал α тегиздигин a түз сызыгы боюнча кесип өтсүн. $a \parallel b$ болоорун далилдейбиз.

Тескерисинче, a жана b түз сызыктары M чекитинде кесилишет деп эсептейли. Анда M чекити a түз сызыгына, б.а. α тегиздигине да, b түз сызыгына да тиешелүү болуп калат: $b \cap \alpha = M$. Бул алынган шартка карама-каршы. Ошондуктан $a \parallel b$ болот. Теорема далилденди.

5-теорема. **Параллель эки түз сызыктын ар бири аркылуу өтүүчү эки тегиздик түз сызык боюнча кесилишет, ал түз сызык берилген түз сызыктарга параллель болот.**

Д а л и л д ө ө . $a \parallel b$ түз сызыктары берилсин (4-сүрөт). a түз сызыгы аркылуу α тегиздиги, b түз сызыгы аркылуу b тегиздиги өтсүн жана α, β тегиздиктери бири-бирине параллель болбосун. Анда ал тегиздиктер кандайдыр c түз сызыгында кесилишет.

$c \parallel a$, $c \parallel b$ боло тургандыгын далилдейбиз.

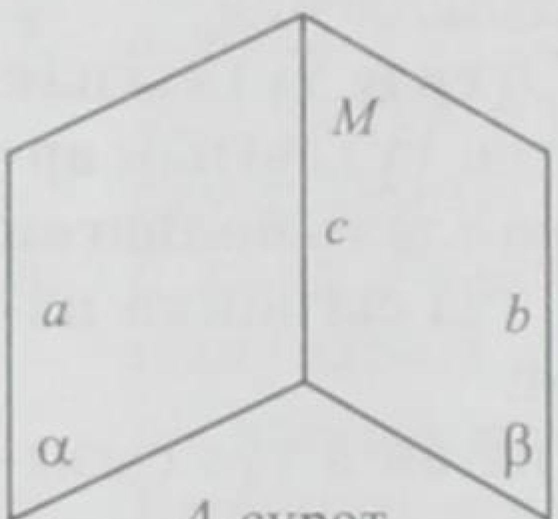
$a \parallel b$ жана $a \in \alpha$ болгондуктан, $b \parallel a$ болот (2-теорема). Ошол эле үчүнчү теореманын негизинде $a \parallel \beta$ болот. Анда b түз сызыгына жана α тегиздигине карата 4-теореманы колдонсок, $c \parallel b$ болот. Ошондой эле, a түз сызыгына жана β тегиздигине карата $c \parallel a$ болот. Теорема далилденди.

Эми жогорудагы теоремаларды колдонуп, параллель түз сызыктардын транзитивдик[1] касиетке ээ болоорун көрсөтүүгө болот (тегиздиктеги параллель түз сызыктар үчүн ал касиеттин далилдениши силерге планиметрия курсунан белгилүү).

6-теорема. **Эгерде эки түз сызыктын ар бири үчүнчү түз сызыкка параллель болсо, анда алар өз ара параллель болушат.**

Д а л и л д ө ө : a, b, c түз сызыктары берилип, $b \parallel a$ жана $c \parallel a$ болсун (4-сүрөт). Анда $b \parallel c$ боло тургандыгын далилдейбиз.

c түз сызыгынан каалагандай M чекитин белгилейбиз. M чекити жана a түз сызыгы аркылуу α тегиздигин, M чекити жана b түз сызыгы аркылуу β тегиздигин жүргүзөбүз (1-теорема). $a \parallel b$ болгондуктан, α жана β тегиздиктери c түз сызыгы боюнча кесилишет жана $c \parallel a$ болот (5-теорема). Бирок, α тегиздигинде M чекити аркылуу өтүп, a га параллель болгон бир гана c түз сызыгы жатат (параллелдүүлүктүн аксиомасы). Ал түз сызык α жана β тегиздиктеринин кесилишинде жатат. Ошондуктан b га параллель болгон бир гана c түз сызыгы болот. Теорема далилденди.



4-сүрөт

Тегиздиктегидей эле, мейкиндикте да параллель түз сызыктарда жаткан туура келүүчү кесиндилер да, шоолалар да параллель болушат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. a түз сызыгы α жана β тегиздиктеринин кесилишиндеги түз сызыкка параллель. Бул учурда а) a менен α, б) a менен β өз ара кандай жайланышкан?

---

[1] Латын сөзү, биринен экинчисине өтүүчү дегенди түшүндүрөт.

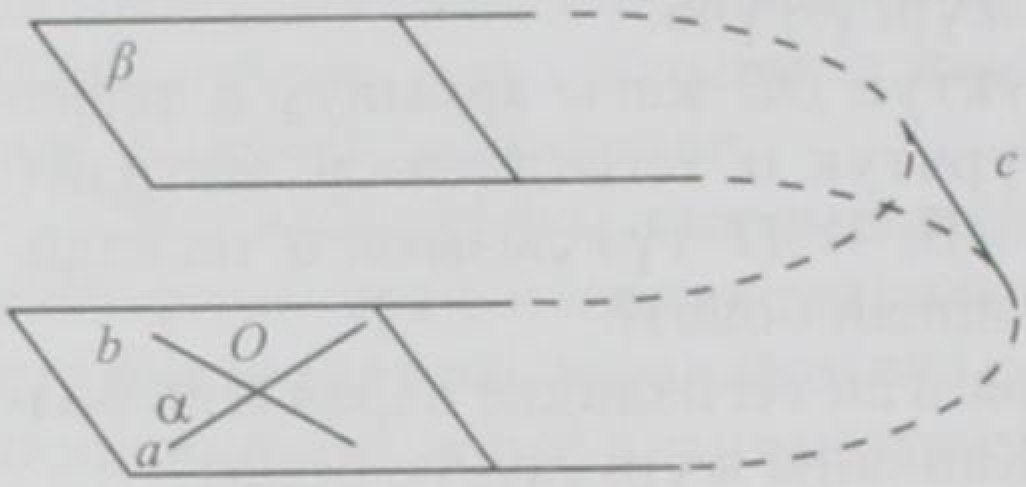
2. a жана b түз сызыктары параллель, ал эми a түз сызыгы α тегиздигине параллель. Бул учурда $\beta \parallel \alpha$ болоорун далилдегиле.
3. α жана β тегиздиктери b түз сызыгында кесилишет. Эгерде a түз сызыгы α жана β тегиздиктерине параллель болсо, анда $a \parallel b$ болоорун далилдегиле.
4. Берилген чекит аркылуу берилген a жана b түз сызыктарына параллель болгон тегиздик жүргүзгүлө.
5. $ABCDEF$ туура алты бурчтуктун DE жагы аркылуу α тегиздиги жүргүзүлгөн. Алты бурчтук α тегиздигинде жатпайт. Бул учурда: 1) CF; 2) CB; 3) AB; 4) AF түз сызыгы α тегиздигине карата кандай жайланышкан болот?
6. Берилген чекит аркылуу берилген тегиздикке параллель болгон түз сызык жүргүзгүлө. Канчаны жүргүзүүгө болот?
7. a жана b түз сызыктары параллель. b түз сызыгы аркылуу a түз сызыгына параллель тегиздик жүргүзгүлө.
8. ABC үч бурчтугу берилген. AB жагына параллель болгон тегиздик AC жана BC жактарын тиешелүү түрдө A_1 жана B_1 чекиттеринде кесип өтөт. Эгерде $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$ болсо, A_1B_1 кесиндисинин узундугун тапкыла.
9. Берилген чекит аркылуу өтүп, берилген тегиздикке параллель болгон түз сызыктардын чогуусу бир тегиздикте жатаарын далилдегиле.
10. Берилген чекит аркылуу берилген түз сызыкка параллель болгон канча тегиздик жүргүзүүгө болот?
11. CDE жана CDF үч бурчтуктары ар түрдүү тегиздиктерде жатат. CE жана DE жактарынын тең ортолору тиешелүү түрдө C_1 жана D_1 чекиттери болушат. Бул учурда C_1D_1 кесиндиси CDF тегиздигине параллель болорун далилдегиле.
12. $ABCD$ жана A_1B_1CD параллелограммдары ар түрдүү тегиздиктерде жатат. $A_1A = B_1B$ болоорун далилдегиле.
13. a жана b параллель түз сызыктарынын бири α тегиздигин кесип өтөт. Анда экинчи түз сызык да α тегиздигин кесип өтөөрүн далилдегиле.

§ 4. ПАРАЛЛЕЛЬ ТЕГИЗДИКТЕР

Эгерде эки тегиздик кесилишпесе, анда алар параллель деп аталат. α жана β тегиздиктери параллель болсо, аларды кыскача $\alpha \parallel \beta$ түрүндө жазабыз. Тегиздиктердин параллелдик белгисине токтолобуз.

7-теорема. **Эгерде бир тегиздикте жаткан кесилишүүчү эки түз сызыктын ар бири экинчи тегиздикке параллель болсо, анда ал тегиздиктер параллель болушат.**

Д а л и л д ө ө. α тегиздигинде жатып, O чекитинде кесилишүүчү a жана b түз сызыктары берилсин. Алардын ар бири кандайдыр бир β тегиздигине параллель болсун. Анда $\alpha \parallel \beta$ болоорун далилдейбиз.



5-сүрөт

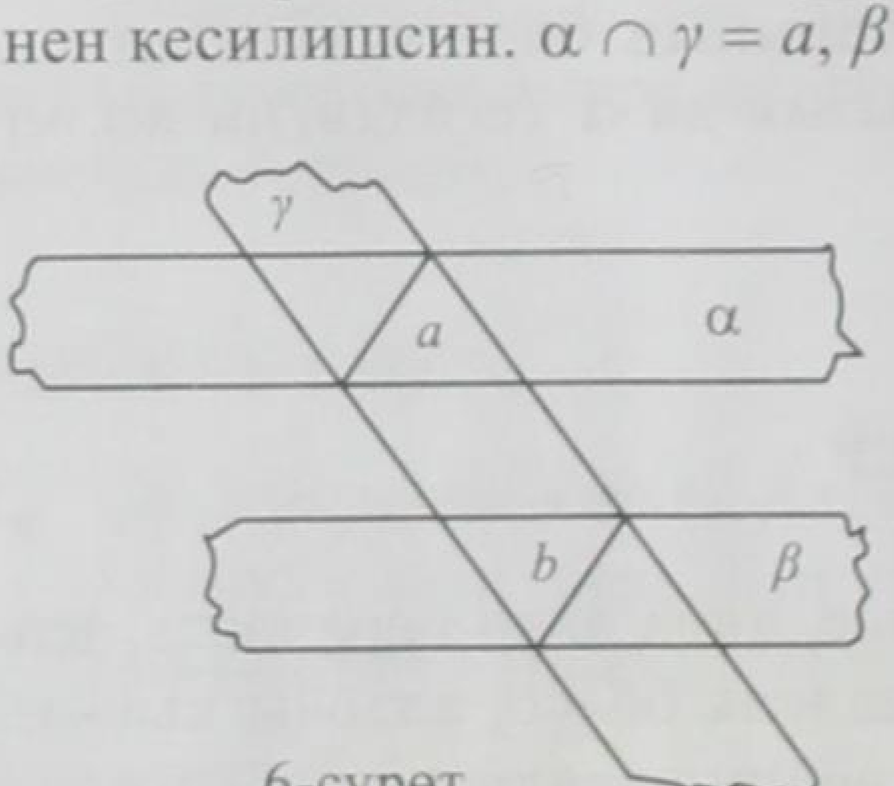
Тескерисинче, α жана β тегиздиктери c түз сызыгы боюнча кесилишет деп эсептейли (5-сүрөт). Шарт боюнча $a \parallel \beta$ жана $b \parallel \beta$. Анда жогорудагы теореманын негизинде ар бир учур үчүн тиешелүү түрдө $a \parallel c$ жана $b \parallel c$ болот. Ал эми 6-теореманы колдонсок, анда $a \parallel b$ болуп калат. Бул берилген шартка карама-каршы келет. Ал карама-каршылык $\alpha \cap \beta = c$ дегенден келип чыкты. Ошондуктан α менен β кесилишпейт, $\alpha \parallel \beta$ болот. Теорема далилденди.

Н а т ы й ж а . **Эгерде бир тегиздикте жаткан кесилишүүчү эки түз сызык экинчи тегиздикте жаткан тиешелүү эки түз сызыкка параллель болсо, анда ал тегиздиктер параллель болушат.**

Бул натыйжанын тууралыгы түздөн-түз 7-теоремадан келип чыгат.

8-теорема. **Эгер параллель эки тегиздик үчүнчү тегиздик менен кесилишсе, анда алардын кесилишиндеги түз сызыктар параллель болушат.**

Д а л и л д ө ө . Бири-бирине параллель болгон α жана β тегиздиктери берилсин (6-сүрөт). Алар кандайдыр γ тегиздиги менен кесилишсин. $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$. $a \parallel b$ боло тургандыгын далилдейбиз. Эгерде a жана b түз сызыктары параллель эмес, алар кандайдыр M чекитинде кесилишет деп эсептесек, анда $M \in a$, демек, $M \in b$ жана $M \in \alpha$ жана $M \in \beta$ болуп калат. Натыйжада α, β тегиздиктери жалпы M чекитке ээ болуп калышат. Бул алынган шартка карама-каршы. Демек, $\alpha \parallel \beta$. Теорема далилденди.



6-сүрөт

9-теорема. **Тегиздиктен тышкары жаткан чекит аркылуу ал тегиздикке параллель болгон бир гана тегиздик жүргүзүүгө болот.**

Д а л и л д ө ө. α тегиздиги жана андан тышкары жаткан A чекити берилсин. A чекити аркылуу α тегиздигине параллель болгон β тегиздигин жүргүзүү үчүн α тегиздигинде жатып, бири-бири менен кесилишүүчү a_1 жана a_2 түз сызыктарын алабыз. Андан кийин A чекити аркылуу $b_1 \parallel a_1$, $b_2 \parallel a_2$ түз сызыктарын жүргүзөбүз. b_1 жана b_2 түз сызыктары бир гана β тегиздигин аныктайт (2-теорема). Ал эми 7-теореманын натыйжасынын негизинде $\beta \parallel \alpha$ болот. β тегиздигинин бирөө гана боло тургандыгы түшүнүктүү. Теорема далилденди.

Н а т ы й ж а . **Эгерде берилген эки тегиздиктин ар бири үчүнчү тегиздикке параллель болсо, анда берилген эки тегиздик өз ара параллель болот.**

Бул 9-теореманын жардамы менен оңой далилденет. α, β, γ тегиздиктери берилип $\alpha \parallel \gamma$, $\beta \parallel \gamma$ болсо, анда $\alpha \parallel \beta$ болот. Эгерде $\alpha \cap \beta = b$ (түз сызык) деп эсептесек, анда b түз сызыгынан алынган A чекити аркылуу γ га параллель болгон эки тегиздик жүргүзүлгөн болот, ал 9-теоремага карама-каршы келет. Ошондуктан $\alpha \parallel \beta$ болот.

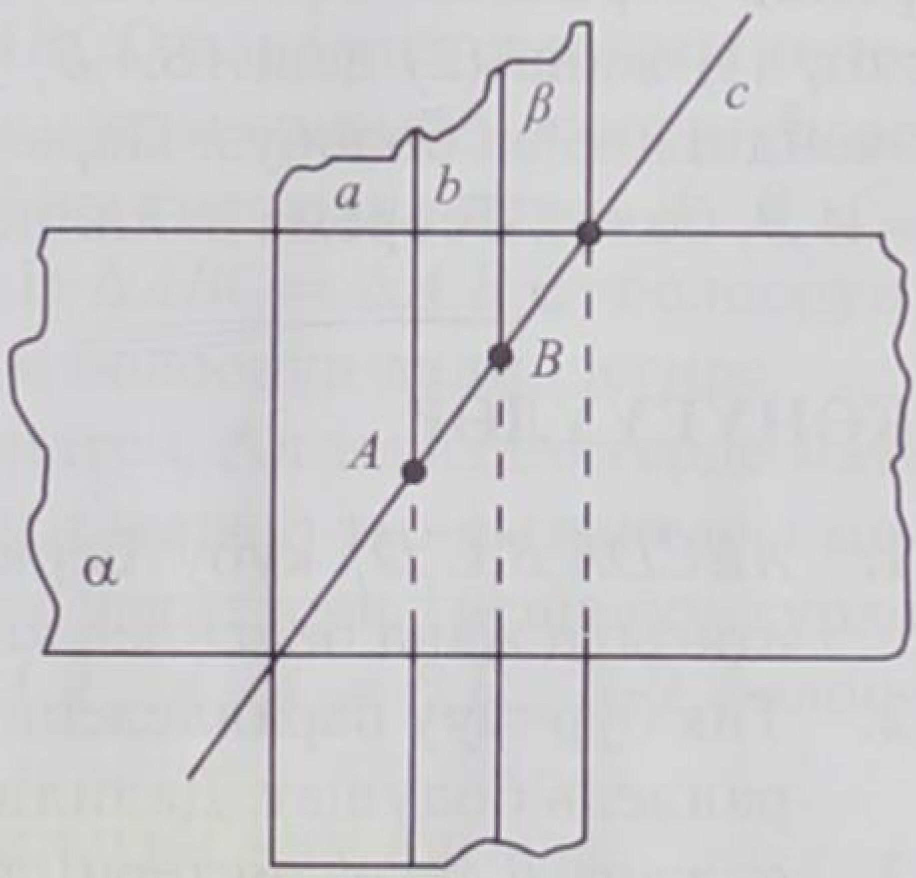
10-теорема. **Эгерде түз сызык параллель тегиздиктердин бирин кесип өтсө, анда ал экинчисин да кесет.**

Бул теореманы 8-теоремага жана параллелдүүлүктүн аксиомасына негиздеп далилдөөгө болот.

11-теорема. **Эгерде тегиздик параллель эки түз сызыктын бирин кесип өтсө, анда ал экинчисин да кесип өтөт.**

Д а л и л д ө ө. $a \parallel b$ түз сызыктары берилсин (7-сүрөт), α тегиздиги a түз сызыгын A чекитинде кесип өтсүн. Ал тегиздик b түз сызыгын да кесип өтөөрүн далилдейбиз.

$a \parallel b$ болгондуктан, алар аркылуу бир гана β тегиздигин жүргүзүүгө болот. Анда α жана β тегиздиктери A чекити аркылуу өтүүчү c түз сызыгы боюнча кесилишет. a, b, c түз сызыктары β тегиздигинде жатат.

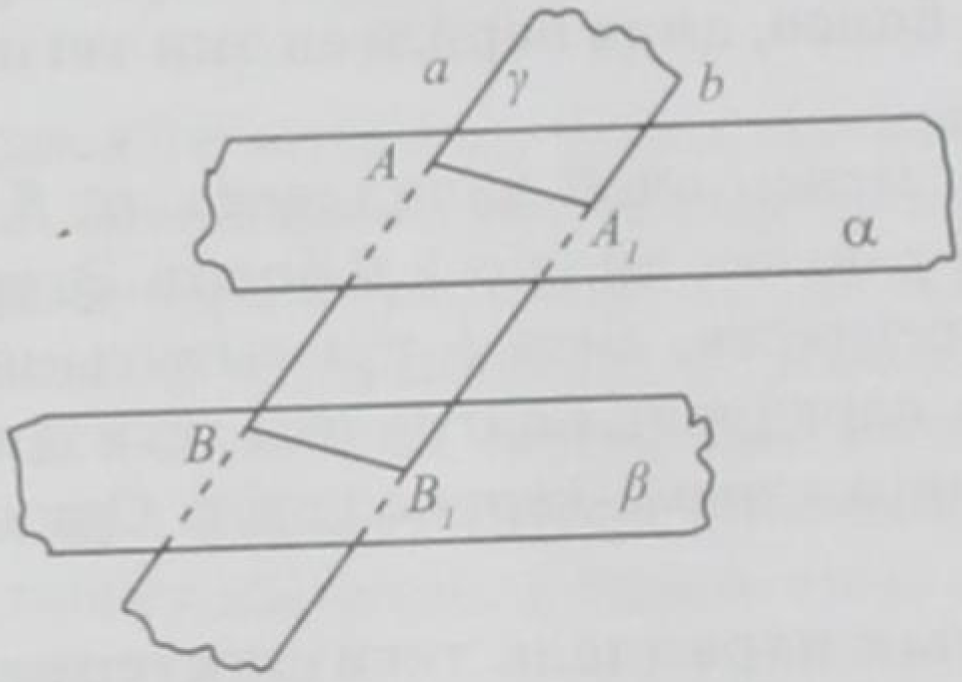


7-сүрөт

Тескерисинче, α тегиздиги b түз сызыгын кесип өтпөйт деп эсептейли. Анда a жана c түз сызыктары b түз сызыгына параллель болуп калат. 10-теоремадагыдай эле талкуулоолор жүргүзсөк, анда биз параллелдүүлүк аксиомасына карама-каршы натыйжага ээ болобуз. Бул карама-каршылык α менен b түз сызыгы кесилишпейт дегенден келип чыкты. Демек, алар B чекитинде кесилишет. Теорема далилденди.

12-теорема. **Параллель тегиздиктердин арасында жаткан параллель түз сызыктардын кесиндилери барабар болушат.**

Далилдөө. $\alpha \parallel \beta$ тегиздиктери жана аларга параллель болбогон, бирок өз ара параллель болушкан a жана b түз сызыктары берилсин (8-сүрөт). Тегиздикке параллель болбогон түз сызык ал тегиздикти бир чекитте кесип өтө тургандыгы белгилүү (§ 1). Анда 10-11-теоремалардын негизинде a, b түз сызыктары α, β тегиздиктерин тиешелүү түрдө A, B, A_1, B_1 чекиттеринде кесип өтөт. $AB = A_1B_1$ боло тургандыгын далилдейбиз.



8-сүрөт

$\alpha \parallel b$ болгондуктан, алар аркылуу бир гана γ тегиздигин жүргүзүүгө болот (§2). Ал тегиздик α жана β тегиздиктерин тиешелүү түрдө AA_1, BB_1 түз сызыктары боюнча кесип өтөт. Мында $AA_1 \parallel BB_1$ (1) болот (8-теорема). Параллель түз сызыктарда жаткандыктан $AB \parallel A_1B_1$ (2) болот. (1) жана (2) ден ABA_1B_1 төрт бурчтугунун параллелограмм экендигине ээ болобуз. Параллелограммдын касиети боюнча $AB = A_1B_1$ болот. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

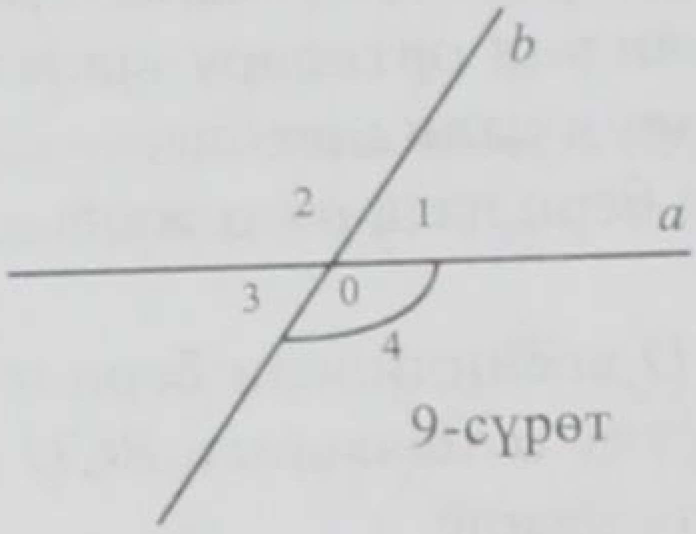
1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубу берилген. Анын параллель грандарын атагыла жана белгилеп көрсөткүлө.
2. Тик бурчтуу параллелепипеддин карама-каршы грандары параллель болушат. Далилдегиле.
3. α жана β тегиздиктери параллель. β тегиздигинде жаткан ар бир түз сызык α тегиздигине параллель болоорун далилдегиле.

4. Эгерде: а) түз сызык; б) тегиздик параллель эки тегиздиктин бирин кесип өтсө, анда ал экинчисин да кесип өтөөрүн далилдегиле.
5. Берилген α тегиздигине: а) анда жатпаган чекит; б) ага параллель түз сызык аркылуу параллель тегиздик жүргүзгүлө.
6. $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ – тегиздиктери жана c, c_1 түз сызыктары берилип, $\alpha \parallel \alpha_1$, $\beta \parallel \beta_1$, $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha_1 \cap \beta_1 = c_1$ болсо, анда $c \parallel c_1$ болоорун далилдегиле.
7. Кубдун бир чокудан чыгуучу кырларынын учтары аркылуу өтүүчү тегиздик ал кырларынын тең ортолору аркылуу өтүүчү тегиздикке параллель болоорун далилдегиле.
8. α, β тегиздиктери жана a түз сызыгы берилген, $a \parallel \alpha$ жана $a \parallel \beta$ болсо, $a \parallel \beta$ болот. Далилдегиле.
9. Бир тегиздикте жатпаган AB, AC, AD кесиндилери берилген. Алардын тең ортолору аркылуу өтүүчү α тегиздиги BCD тегиздигине параллель болоорун далилдегиле.
10. α жана β параллель тегиздиктери CDE бурчунун DC жана DE жактарын тиешелүү түрдө M, M_1, N, N_1 чекиттеринде кесип өтөт. Эгерде $DM = 6$ дм, $DM_1 = 9$ дм, $M_1N_1 = 27$ дм болсо, MN кесиндисинин узундугун тапкыла.
11. Берилген тегиздикке параллель болуп, берилген чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктардын чогуусу берилген тегиздикке параллель болгон бир тегиздикте жатат. Далилдегиле.
12. α жана β тегиздиктери параллель. α да жатуучу A жана B чекиттеринен жүргүзүлгөн параллель түз сызыктар β ны A_1, B_1 чекиттеринде кесип өтөт. Эгерде $AB = a$ болсо, A_1B_1 кесиндисинин узундугун тапкыла.
13. $\alpha \parallel \beta$ тегиздиктери берилген. $ABCD$ параллелограммы α тегиздигинде жатат. A, B, C, D чокулары аркылуу жүргүзүлгөн өз ара параллель түз сызыктар β ны тиешелүү түрдө A_1, B_1, C_1, D_1 – чекиттеринде кесип өтөт. 1) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ болоорун; 2) A_1, B_1, C_1, D_1 – параллелограмм болоорун далилдегиле.
14. $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ болгон үч тегиздик берилген. Ал тегиздиктерде жатпаган A чекити аркылуу өтүүчү a жана b түз сызыктары менен тегиздиктердин кесилишкен чекиттери тиешелүү түрдө A_1, A_2, A_3 жана B_1, B_2, B_3 болсун $A_1A_2 : A_2, A_3 = B_1B_2 : B_2B_3$ болоорун далилдегиле.

Көрсөтмө. $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ экендигин эске алгыла.

§ 5. ЭКИ ТҮЗ СЫЗЫКТЫН АРАСЫНДАГЫ БУРЧ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРДУУ ТҮЗ СЫЗЫКТАР

Эгерде эки түз сызык бир тегиздикте жатса, анда алардын арасындагы бурч кандай аныктала тургандыгы силерге планиметрия курсунан белгилүү. Кесилишүүчү a жана b эки түз сызыгы төрт бурчту түзөт. Алардын эки түгөйү вертикалдык бурчтар ($\angle 1$, $\angle 3$ жана $\angle 2$ $\angle 4$, түгөйлөр) (9-сүрөт) же эки түгөйү ($\angle 1$, $\angle 2$ жана $\angle 3$, $\angle 4$ түгөйлөрү) жандаш бурчтар болушат. Бул түгөй жандаш бурчтардын бири тар бурч, экинчиси кең бурч болот (тик бурч болгон учурга кийин токтолобуз).



9-сүрөт

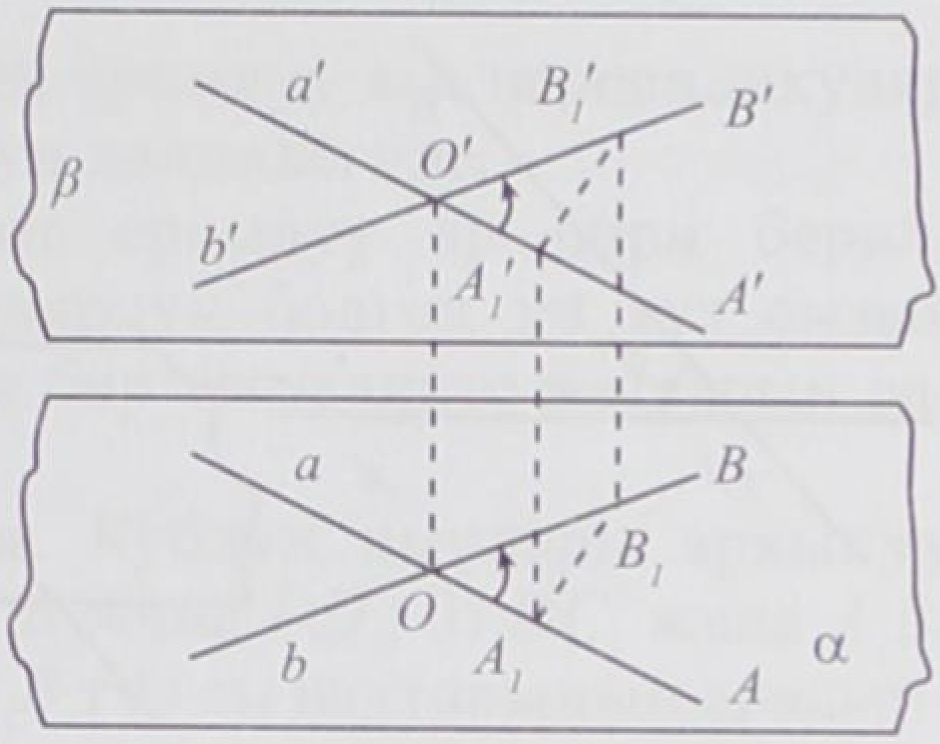
Эгерде эки түз сызыктын кесилишинен түзүлгөн төрт бурчтун бири белгилүү болсо, калгандарын оңой эле таап алууга болот. Ошондуктан кесилишүүчү эки түз сызыктын арасындагы бурч катары ал төрт бурчтун каалаган бурчун алуу жетиштүү. Бул түшүнүктөр мейкиндиктеги эки түз сызыктын арасындагы бурчту аныктоодо маанилүү роль ойнойт. Оңтойлуу болсун үчүн эки түз сызыктын арасындагы бурч үчүн тар бурчунун чоңдугун алабыз. a, b түз сызыктары берилсе, алардын арасындагы бурчту $\angle\,(a, b)$ аркылуу белгилешет. Анда ал $0 \leq \angle(a, b) \leq 90°$ болгондой кылып алынышы керек.

Мейкиндиктеги эки түз сызыктын арасындагы кайсы бурчту тандап алганыбызга карата, ал бурчту аныктоочу шоолалардын ролу кыйла чоң, алардын багыттары берилген түз сызыктардын багыттарын, ошондой эле бурчтун багытын аныктоого мүмкүнчүлүк берет. Ошондуктан тандалып алынган бурчтун жактары боюнча алынган шоолаларга карата тиешелүү түз сызыктардын багыттары аныкталат жана алар тиешелүү түз сызыктар деп эсептелет.

Эки түз сызыктын арасындагы бурчту мүнөздөөдө колдонулуучу теоремага токтолобуз. Ал кайчылаш эки түз сызыктын арасындагы бурчту аныктоого жардам берет.

13-теорема. **Жактары параллель жана бирдей багытталган эки бурч барабар болот.**

Д а л и л д ө ө . a жана b түз сызыктары O чекитинде, a' жана b' түз сызыктары O' чекитинде кесилишсин (10-сүрөт). Ошону менен бирге $a \parallel a'$, $b \parallel b'$ болсун. Анда 2-теоремага ылайык a, b жана a',b' түз сызыктары аркылуу α жана β тегиздиктерин жүргүзө алабыз. Бул учурда 7-теореманы натыйжасына ылайык $\alpha \parallel \beta$ болот. Эми a, b түз сызыктарынан OA, OB жана $O'A'$, $O'B'$ шоолаларын тиешелүү түрдө бирдей багытталгандай кылып тандап алабыз. Анда AOB жана $A'O'B'$ бурчтары бирдей багытталган тиешелүү бурчтар болушат. Алардын барабар экендигин далилдейбиз.

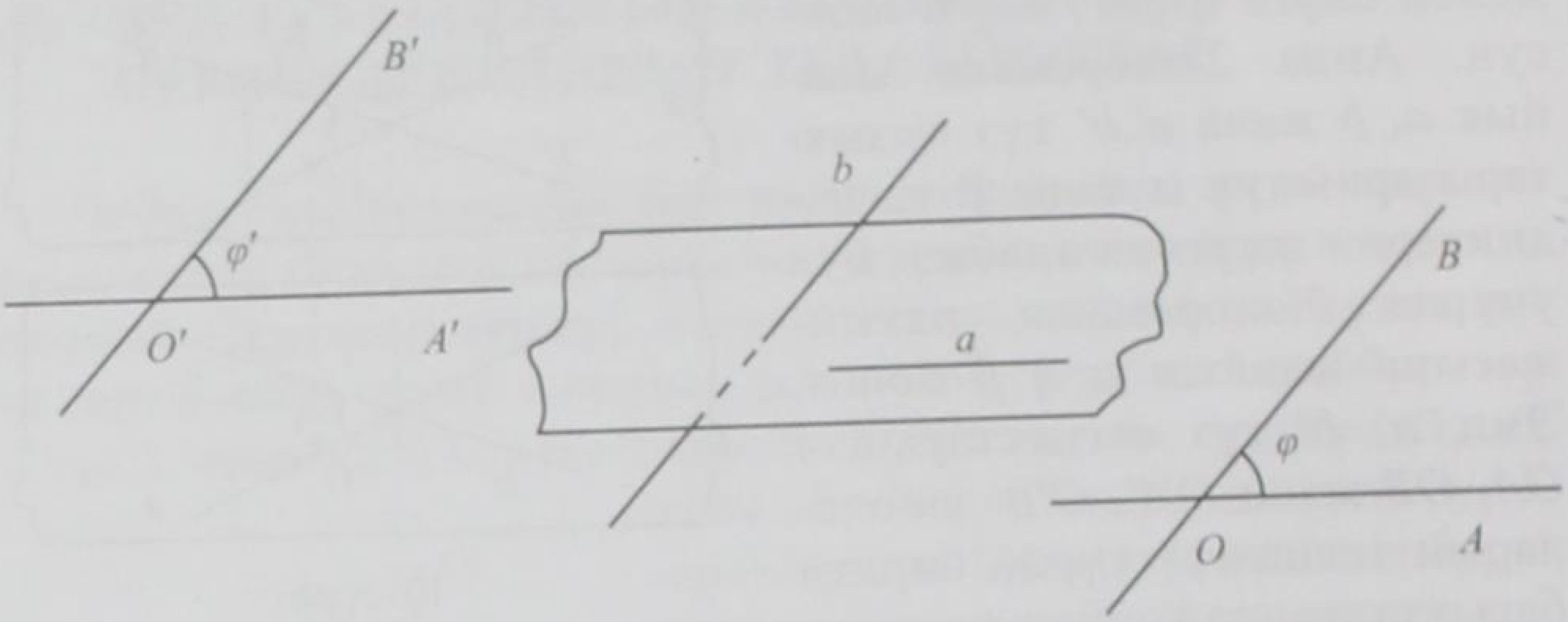


10-сүрөт

$OA(OB)$ жана $(O'A')$ $(O'B')$ шоолаларына тиешелүү түрдө $OA_1 = O'A_1$ $(OB_1 = O'B_1')$ кесиндилерин өлчөп коёбуз. Анда $OA_1A_1'\ O'$ жана $OB_1B_1'O'$ параллелограммдарына ээ болобуз. Алардын карама-каршы жактары A_1A_1' жана B_1B_1' параллель жана барабар болот. Натыйжада $A_1B_1B_1'A_1'$ төрт бурчтугу да параллелограмм болот. Андан $A_1B_1 = A_1'B_1'$ экендиги келип чыгат. Ошентип, $\Delta OA_1B_1 = \Delta O'A_1'B_1'$ (үч жагы боюнча). Мындан $\angle A_1OB_1 = \angle A_1'O'B_1'$ же $\angle AOB = \angle A'O'B'$ экендиги келип чыгат. Теорема далилденди.

Эми кайчылаш эки түз сызыктын арасындагы бурчту аныктайбыз. Кайчылаш түз сызыктар параллель эмес, кесилишпейт жана алар бир тегиздикте жатышпайт. Ошондуктан алар тегиздиктеги эки түз сызыктай болуп, чокусу бир чекитте жаткан бурчту түзө алышпайт. Бирок, алардын арасындагы бурчтун өлчөмүн, чоңдугун мүнөздөп көрсөтүүгө болот.

a,b кайчылаш түз сызыктары берилсин (11-сүрөт). Тегиздиктен каалагандай O чекитин алып, ал аркылуу $OA \parallel a$, $OB \parallel b$ түз сызыктарын жүргүзөбүз. Анда OA жана OB түз сызыктары бул тегиздиктеги AOB бурчун түзүшөт. Бул бурчтун чоңдугу O чекитин тандап алуудан көз каранды эмес. Эгерде O чекитинен башка O' чекитин алып, жогорудагыдай эле, $O'A' \parallel a$, $O'B' \parallel b$ түз сызыктарын жүргүзсөк, анда деле $A'O'B'$ бурчуна ээ болобуз. Мында параллель түз сызыктардын транзитивдик касиетин эске алсак, анда $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$ болот. 13-теореманын негизинде $\angle AOB = \angle A'O'B'$ болот. Ошондуктан AOB бурчунун чоңдугун кайчылаш a жана b түз сызык-



11-сүрөт

тарынын арасындагы бурчтун өлчөмү катарында кабыл алууга болот.

Ошентип, кайчылаш эки түз сызыктын арасындагы бурч деп, аларга тиешелүү түрдө параллель болушкан жана бир чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктардын арасындагы бурчту айтабыз. Мында түз сызыктардын арасындагы тиешелүү бурчту тандап алуу жогорудагы түшүнүктөрдүн негизинде жүргүзүлөт.

11-сүрөттө көрүнүп тургандай, кайчылаш эки түз сызыктын арасындагы бурч тегиздикте аныкталуучу эки түз сызыктын арасында жаткан фигура (бурч) катары байкалып, көрүнүп турбайт. Мында бурчтун өлчөмү, чоңдугу гана каралат.

Эки түз сызыктын арасындагы бурчту аныктоонун негизинде, мейкиндикте эки түз сызыктын перпендикулярдуулугун аныктоого болот.

Эгерде эки түз сызыктын арасындагы бурч 90°ка барабар болсо, анда алар *перпендикулярдуу деп аталат.*

Эгерде эки түз сызык кесилишсе, анда алардын перпендикулярдуу же перпендикулярдуу эмес экендигин арасындагы бурчтарына карата көрсөтүү оңой. Ал эми кайчылаш түз сызыктардын перпендикулярдуулугун көрсөтүү үчүн алардын арасындагы бурчту аныктоого туура келет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

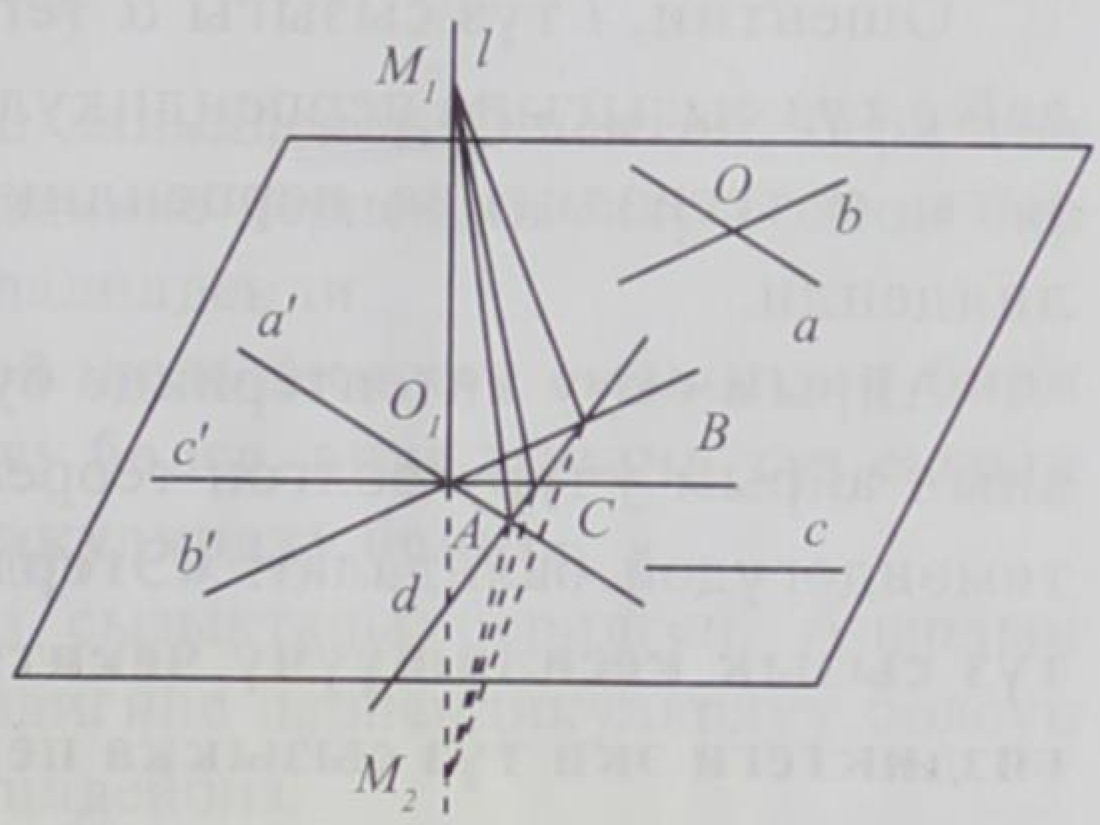
1. Тең жактуу үч бурчтуктун эки жагы боюнча аныкталган түз сызыктардын арасындагы бурчту тапкыла.
2. Параллель эки түз сызыктын арасындагы бурч эмнеге барабар?

3. Түз сызыктын каалаган чекити аркылуу ага перпендикуляр түз сызык жүргүзүүгө болоорун далилдегиле.
4. Түз сызыктан алынган чекит аркылуу ар бири берилген түз сызыкка перпендикулярдуу болгон үч түз сызык жүргүзүлгөн. Ал үч түз сызык бир тегиздикте жатаарын далилдегиле.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубу берилген. Кубдун кырлары аркылуу өткөн: 1) D_1A_1 жана C_1C_1; 2) C_1B жана DD_1; 3) DC_1 жана A_1B; 4) AC жана DC_1; 5) DA_1 жана B_1B түз сызыктарынын арасындагы бурчту тапкыла.
6. Кубдун диагоналы менен анын кандайдыр бир гранынын диагоналдарынын арасындагы бурчту тапкыла.
7. AB, AC жана AD түз сызыктары эки-экиден өз ара перпендикулярдуу. Түз сызыктар боюнча алынган кесиндилер: 1) $AB = b$, $AD = d$, $BC = a$; 2) $BD = c$, $BC = a$, $AD = d$; экендиги белгилүү. Ар бир учурдагы CD кесиндисин тапкыла.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тик бурчтуу параллелепипеди берилген. Эгерде: 1) $\angle B_1CB = 50°$, 2) $BC = a$, $BC_1 = 2a$ болсо, анда AD_1 жана B_1C кайчылаш түз сызыктарынын арасындагы бурчту тапкыла.
9. a, b, a_1, b_1 төрт түз сызыгы берилген: $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. Эгерде $a \perp b$ болсо, анда $a_1 \perp b_1$ болоорун далилдегиле.

§ 6. ТҮЗ СЫЗЫК МЕНЕН ТЕГИЗДИКТИН ПЕРПЕНДИКУЛЯРДУУЛУГУ

Эгерде түз сызык тегиздикте жаткан түз сызыктардын бардыгына перпендикуляр болсо, анда берилген түз сызык тегиздикке перпендикуляр деп аталат. Түз сызык менен тегиздиктин перпендикулярдуулук белгисин көрсөтөбүз.

14-теорема. **Эгерде түз сызык тегиздикте жаткан кесилишүүчү эки түз сызыкка перпендикулярдуу болсо, анда ал тегиздиктин өзүнө да перпендикулярдуу болот.**



12-сүрөт

Далилдөө: α тегиздигинде жаткан a, b түз сызыктары O чекитинде кесилишсин (12-сүрөт). $l \perp a$,

$l \perp b$ болсун, c түз сызыгы α тегиздигинде жаткан каалагандай түз сызык болсун. Анда $l \perp c$ боло тургандыгын далилдейбиз. Түз сызык менен тегиздик параллель болушпаса, анда алар бир чекитте кесилишээри белгилүү (§1). l түз сызыгы α тегиздигин O' чекитинде кесип өтсүн дейли. O' чекити аркылуу $a' \parallel a$, $b' \parallel b$, $c' \parallel c$ түз сызыктарын жүргүзөбүз. Анда l түз сызыгы a,b,c түз сызыктары менен кандай бурчтарды түзсө, a', b', c' түз сызыктары менен да ошондой эле бурчтарды түзөт. Демек, $l \perp a'$, $l \perp b'$ болот. Эми $l \perp c'$ болорун далилдесек, анда теорема далилденген болот. α тегиздигинде a', b', c' түз сызыктарын кесип өтүүчү a' түз сызыгын жүргүзөбүз. Алар тиешелүү түрдө A, B, C чекиттеринде кесилишсин. l түз сызыгынан, α тегиздигине карата ар түрдүү жарым мейкиндиктерде $O'M_1 = O'M_2$ болгондой кылып M_1, M_2 чекиттерин алабыз. Аларды A, B, C чекиттери менен туташтырабыз.

Тиешелүү катеттеринин барабардыгы боюнча: $\Delta O'AM_1 = \Delta O'AM_2$, $\Delta O'BM_1 = \Delta O'BM_2$, мындан тиешелүү түрдө $M_1A = M_2A$, $M_1B = M_2B$ болот.

$\Delta M_1AB = \Delta M_2AB$ (үч жагы боюнча, AB_1 жалпы жак). Бул барабардыктан $\angle BAM_1 = \angle BAM_2$ экендигине ээ болобуз. Натыйжада $\Delta M_1AC = \Delta M_2AC$ (эки жагы жана алардын арасында жаткан бурчу боюнча). Анда $M_1C = M_2C$ болот. Мындан $\angle O'CM_1 = \angle O'CM_2$ экендиги келип чыгат, анткени - алардын тиешелүү үч жагы барабар. Мындан $\angle CO'M_1 = \angle CO'M_2$ экендигине ээ болобуз. Алар жандаш бурчтар, демек, алардын ар бири 90°ка барабар, башкача айтканда $M_1M_2 \perp O'C$ же $l \perp C'$, $l \perp C$ (анткени $C' \parallel C$).

Ошентип, l түз сызыгы α тегиздигинде жаткан каалагандай c түз сызыгына перпендикулярдуу. Ошондуктан l түз сызыгы α тегиздигине перпендикулярдуу болот. Теорема далилденди.

Айрым окуу китептеринде бул жалпы теореманын ордуна анын айрым учуру болгон теореманы колдонуп жүрүшөт. Ал төмөндөгүдөй баяндалат: **«Эгерде тегиздикти кесип өтүүчү түз сызык кесилишүүчү чекити аркылуу өтүүчү ушул тегиздиктеги эки түз сызыкка перпендикулярдуу болсо, анда ал түз сызык тегкздикке перпендикулярдуу болот».**

Бул теореманы өз алдынча далилдегиле.

Н а т ы й ж а . **Түз сызыктын каалаган чекити аркылуу ага перпендикуляр болгон бир гана тегиздик өтөт.**

l түз сызыгы берилсин. Анын каалаган A чекитин алабыз. A чекити аркылуу өтүүчү жана $a \perp l$, $b \perp l$ болгон a жана b түз сызыктарын жүргүзүүгө болот. a жана b түз сызыктары бир гана α тегиздигин аныктайт. 14-теореманын негизинде $l \perp \alpha$ болот.

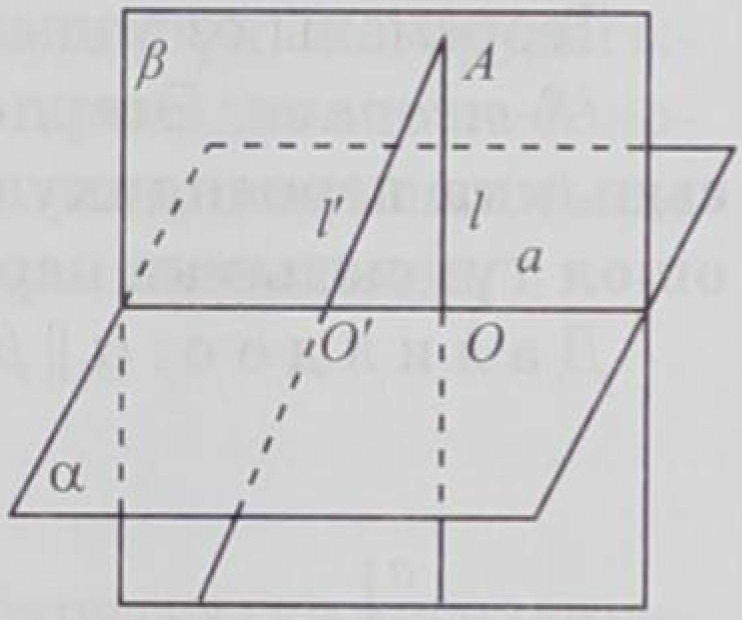
15-теорема. **Берилген чекит аркылуу берилген тегиздикке перпендикулярдуу болгон бир гана түз сызык өтөт.**

Д а л и л д ө ө . Берилген тегиздикке перпендикулярдуу болгон түз сызыктын боло тургандыгы алардын аныктамасынан жана 14-теоремадан келип чыгат. Биз берилген чекит аркылуу тегиздикке перпендикулярдуу болгон бир гана түз сызык өтө тургандыгын көрсөтөбүз.

A чекити, α тегиздиги берилсин. Эки учур каралат:

а) A чекити α тегиздигинде жатат; б) A чекити α тегиздигинде жатпайт.

б) учурун далилдейбиз. Тескерисинче, A чекити аркылуу α га перпендикуляр болгон l жана $l \perp l'$ эки түз сызык өтөт деп эсептейли (13-сүрөт). Алар аркылуу β тегиздигин жүргүзсөк, ал α тегиздиги менен a түз сызыгында кесилишет. Анда $AO \perp a$, $AO' \perp a$ болот. Демек, бир эле β тегиздигинде берилген A чекитинен a түз сызыгына эки перпендикуляр түшүрүлгөн болот. Бул планиметриядагы белгилүү теоремага карама-каршы келет. Демек, l жана l' түз сызыктары дал келишет.

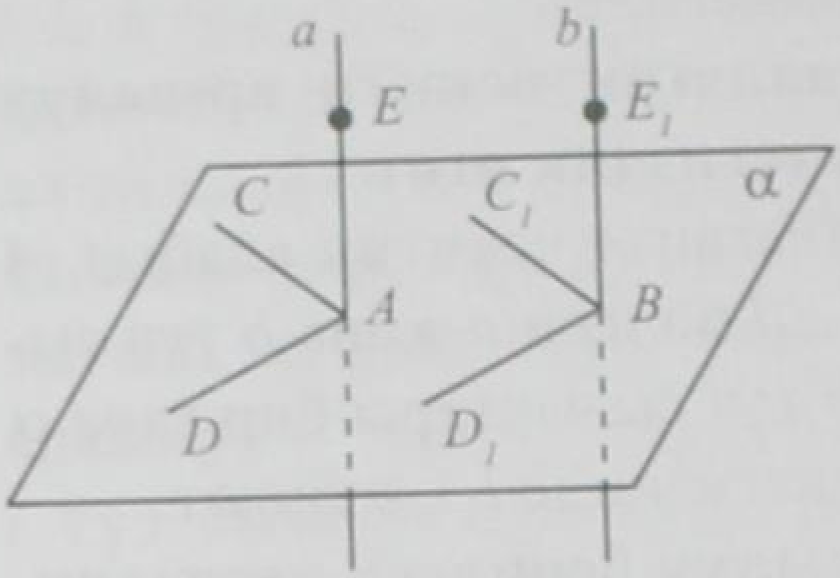


13-сүрөт

а) учуру да ушуга окшош далилденет. Ошентип, берилген чекит аркылуу берилген тегиздикке перпендикуляр болгон бир гана түз сызык өтөт. Теорема далилденди.

16 - теорема. **Эгерде параллель эки түз сызыктын бири тегиздикке перпендикулярдуу болсо, анда экинчи түз сызык да ошол тегиздикке перпендикулярдуу болот.**

Д а л и л д ө ө . $a \parallel b$ түз сызыктары берилген. Алардын бирөө – a түз сызыгы α тегиздигине перпендикулярдуу болсун (14-сүрөт). $b \perp a$ болоорун далилдейбиз.



14-сүрөт

$a \perp \alpha$ болгондуктан, алар A чекитинде кесилишет. Анда $a \parallel b$ түз сызыгы да α тегиздигин B чекитинде кесип өтөт.

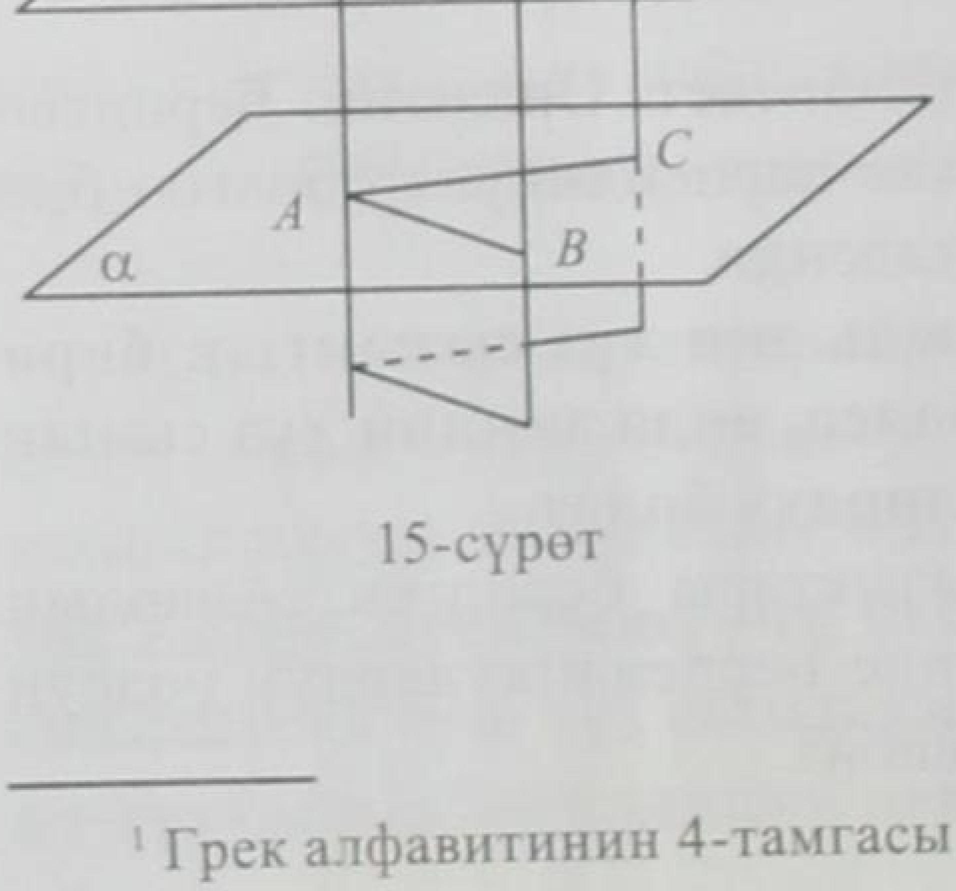
α тегиздигинде жатуучу AC жана AD түз сызыктарын жүргүзөбүз. Анда $AC \perp a$, $AD \perp a$ болот (14-теорема). B чекити аркылуу $BC_1 \parallel AC$, $BD_1 \parallel AD$ түз сызыктарын жүргүзөбүз. 13-теореманы колдонсок, $\angle CAE = C_1BE_1$, $\angle DAE = \angle D_1BE_1$ болуп калат. Бирок, CAE жана DAE — булар тик бурчтар, анда тиешелүү түрдө C_1BE_1 жана D_1BE_1 бурчтары да тик бурчтар болушат: $b \perp BC$, $b \perp BD$ анда, 14-теореманын негизинде $b \perp \alpha$ болот. Теорема далилденди.

17-теорема (16-теоремага тескери теорема). **Эгерде эки түз сызык бир тегиздикке перпендикулярдуу болсо, анда алар өз ара параллель болушат.**

Теореманы өз алдыңарча далилдөөнү сунуш кылабыз.

18-теорема. **Эгерде параллель эки тегиздиктин бири түз сызыкка перпендикулярдуу болсо, анда экинчи тегиздик да ошол түз сызыкка перпендикулярдуу болот.**

Далилдөө: $\alpha \parallel \beta$ тегиздиктери берилип, α тегиздиги a түз сызыгына перпендикулярдуу болсун (15-сүрөт). Анда $\beta \parallel a$ болоорун далилдейбиз.



15-сүрөт

a түз сызыгы α тегиздигин A чекитинде кесип өтөт. 10-теореманын негизинде a түз сызыгы β тегиздигин да кесип өтөт, ал аны A_1 чекитинде кесип өтсүн, a түз сызыгы аркылуу λ жана δ (дельта[1]) тегиздиктерин жүргүзөбүз. Алар α жана β тегиздиктерин тиешелүү түрдө $AB \parallel A_1B_1$ жана $AC \parallel A_1C_1$ түз сызыктары боюнча кесип өтөт (8-теорема).

[1] Грек алфавитинин 4-тамгасы

$a \perp a$ болгондуктан, $a \perp AB$, $a \perp AC$ болот (14-теорема), б.а. $\angle BAD = 90°$, $\angle CAD = 90°$. 13-теореманын негизинде:

$\angle BAD = B_1A_1D = 90°$, $\angle CAD = \angle C_1A_1D = 90°$ же $a \perp A_1B_1$, $a \perp A_1C_1$, болот. Анда ошол эле 14-теореманын негизинде $a \perp \beta$ болот. Теорема далилденди.

19-теорема (18-теоремага тескери теорема). **Эгерде эки тегиздик кандайдыр бир түз сызыкка перпендикулярдуу болушса, анда ал тегиздиктер өз ара параллель болушат.**

Далилдөө: α, β тегиздиктери жана a түз сызыгы берилсин (15-сүрөт). $\alpha \perp a$ жана $\beta \perp a$ болсун. $\alpha \parallel \beta$ болорун далилдейбиз.

a түз сызыгы аркылуу γ тегиздигин жүргүзөбүз. Ал α, β тегиздиктерин тиешелүү түрдө AB жана A_1B_1 түз сызыктары боюнча кесип өтсүн. Анда α жана β тегиздиктери a түз сызыгына перпендикулярдуу болгондуктан, $\angle BAD = \angle B_1A_1D = 90°$ болот. Мындан $AB \parallel A_1B_1$ экендигине ээ болобуз, б.а. 13-теоремага ылайык $A_1B_1 \parallel \alpha$ болот.

a түз сызыгы аркылуу δ тегиздигин жүргүзүп, жогорудагыдай эле талкуулоолордун негизинде $A_1C_1 \parallel \alpha$ экендигине ээ болобуз. A_1B_1 жана A_1C_1 түз сызыктары β тегиздигинде жатышат. Анда 7-теореманын негизинде $\alpha \parallel \beta$ болот. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. ABC үч бурчтугунун BC жагы, ал үч бурчтуктун тегиздигине дал келбеген α тегиздигинде да жатат. Бул учурда:

1) AB түз сызыгы; 2) BC жагынын ортосундагы D чекити аркылуу өтүүчү AD түз сызыгы a тегиздигине перпендикуляр боло алабы?

2. 1) AB, 2) BC, 3) B_1A_1 түз сызыгы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубунун кайсы гранына перпендикулярдуу?

3. Эгерде a түз сызыгы α тегиздигинде жаткан; 1) үч бурчтуктун эки жагына; 2) тегеректин эки диаметрине; 3) туура алты бурчтуктун эки диагоналына перпендикулярдуу болсо, анда $a \perp \alpha$ болоорун далилдегиле.

4. a, b, c түз сызыктары α тегиздигинде жатат. m түз сызыгы a, b түз сызыктарына перпендикулярдуу, бирок c га перпендикулярдуу эмес. a жана b түз сызыктары өз ара кандай жайланышат?

5. Берилген a,b,c — түз сызыктарынын ичинен $a \perp c$, $a \perp b$ жана b,c түз сызыктары α тегиздигинде жатат. $a \perp \alpha$ деп эсептөөгө болобу?

6. Берилген чекит аркылуу: 1) берилген түз сызыкка перпендикулярдуу тегиздикти; 2) берилген тегиздикке перпендикулярдуу түз сызыкты жүргүзгүлө.

7. AB кесиндисинин учтарынан бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин геометриялык орду AB кесиндисинин тең ортосу аркылуу өтүүчү жана ага перпендикулярдуу тегиздик болоорун далилдегиле.

8. Өз ара параллель a жана b түз сызыктарынын бирөө α тегиздигине перпендикулярдуу ($a \perp \alpha$) болсо, анда алардын экинчиси да ошол α тегиздигине перпендикулярдуу ($b \perp \alpha$) болоорун далилдегиле.

9. 1) Трапециянын; 2) туура алты бурчтуктун эки жагы бир тегиздикке перпендикулярдуу болушу мүмкүнбү? Үч бурчтуктун эки жагычы?

10. Өз ара параллель α жана β тегиздиктеринин бирөө a түз сызыгына перпендикулярдуу ($a \perp \alpha$) болсо, анда экинчи тегиздик да α түз сызыгына перпендикулярдуу ($b \perp \alpha$) болорун далилдегиле.

11. α жана β тегиздиктери m түз сызыгында кесилишет. Эгерде a түз сызыгы α тегиздигине перпендикулярдуу болсо, анда ($a \perp \beta$) болушу мүмкүнбү?

12. a жана b – кайчылаш түз сызыктар. Алардын ар бирине перпендикулярдуу болуп, аларды кесип өтүүчү түз сызык жүргүзгүлө.

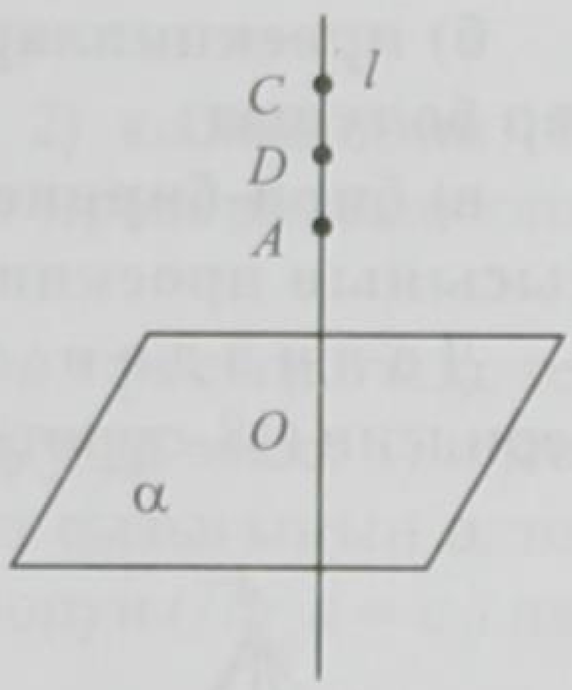
13. Кайчылаш эки түз сызыктын бирөө α тегиздигинде жатат, ал эми экинчиси ага перпендикулярдуу болсо, анда берилген түз сызыктардын жалпы перпендикуляры кандай жайланышат?

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубунда: 1) AA_1 жана BD түз сызыктарына жалпы перпендикулярды түзгүлө; 2) Эгерде кубдун кыры α болсо, AA_1 жана BD түз сызыктарынын арасындагы аралыкты тапкыла.

§ 7. ТЕГИЗДИККЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ЖАНА ЖАНТЫК ЧЕКИТТЕН ТЕГИЗДИККЕ ЧЕЙИНКИ АРАЛЫК

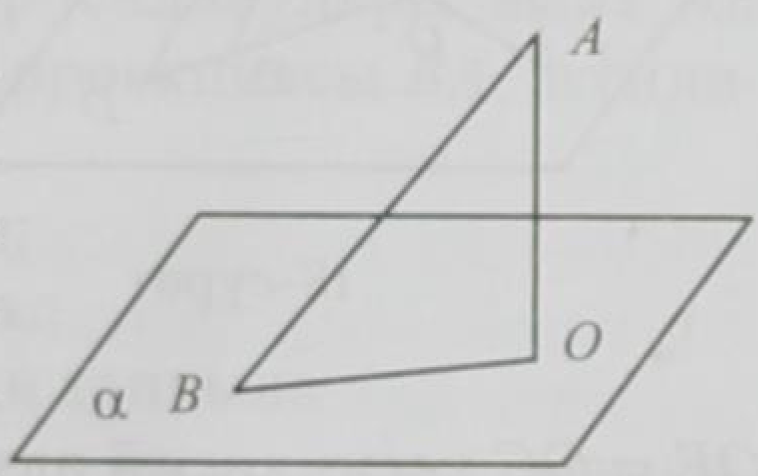
Биз планиметрияда чекиттен түз сызыкка түшүрүлгөн перпендикулярды жана жантыкты караганбыз. Эми чекиттен тегиздикке түшүрүлгөн перпендикуляр жана жантык жөнүндөгү түшүнүктөргө токтолобуз. Ал түз сызык менен тегиздиктин перпендикулярдуулугу жөнүндөгү түшүнүккө байланыштуу.

Эгерде түз сызык тегиздикке перпендикулярдуу болсо, анда ал түз сызыктагы каалагандай *кесинди да тегиздикке перпендикуляр деп эсептелет*. Мисалы, l түз сызыгы α тегиздигине перпендикулярдуу болсо, ал түз сызыкта жаткан каалагандай CD кесиндиси α тегиздигине перпендикуляр деп эсептелет (16-сүрөт). Андай кесиндилердин ичинен бир учу ошол түз сызыкта, ал эми экинчи учу берилген тегиздикте жаткан кесинди маанилүү ролду ойнойт. $l \perp \alpha$ болсун.



16-сүрөт

l түз сызыгы менен α тегиздиги O чекитинде кесилишсин. l түз сызыгынан каалагандай A чекитин алсак, AO кесиндиси α тегиздигине перпендикуляр болот. Бул AO кесиндиси A чекитинен a тегиздигине түшүрүлгөн *перпендикуляр* же жөн эле ***перпендикуляр*** деп аталат (17-сүрөт). O чекити перпендикулярдын *негизи* деп эсептелет. Айрым учурда, O чекити A чекитинин a тегиздигине түшүрүлгөн ***ортогоналдык***[1] *проекциясы деп аталат*. Демек, чекиттин тегиздикке түшүрүлгөн ортогоналдык проекциясын табуу үчүн ал чекит аркылуу тегиздикке перпендикулярдуу болгон түз сызык жүргүзүп, анын тегиздик менен кесилишкен чекитин табуу керек. Мындай жол менен ар кандай фигураны тегиздикке проекциялап, анын проекциясын (сүрөтүн) табууга болот.



17-сүрөт

Берилген чекит аркылуу тегиздикке перпендикулярдуу болгон бир гана түз сызык өтөт (15-теорема). Ошондуктан тегиздиктен тышкары жаткан A чекитинен a тегиздигине бир гана AO пер-

[1] Грек сөзү, тик дегенди түшүндүрөт

пендикулярын түшүрүүгө болот. Эгерде бул тегиздиктин O чекитинен башка, каалагандай B чекитин A чекити менен туташтырсак, анда AB кесиндисин алабыз, ал берилген тегиздикке перпендикуляр болбойт. AB кесиндисин B чекитинен α тегиздигине жүргүзүлгөн жантык же жөн эле жантык деп атайбыз. B чекити жантыктын негизи, OB кесиндиси жантыктын проекциясы деп аталат. Аны кыскача $Пр_{\alpha}AB = OB$ түрүндө жазабыз.

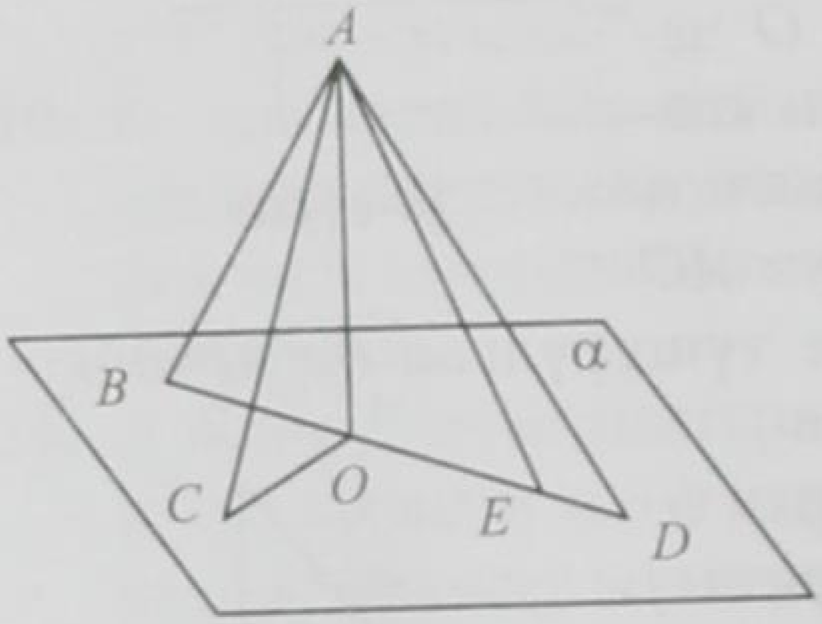
20-теорема. **Эгерде тегиздиктен тышкары жаткан чекиттен тегиздикке перпендикуляр жана жантык жүргүзүлсө, анда:**

а) перпендикуляр жантыктан кыска (кичине) болот;

б) проекциялары барабар болгон жантыктар өз ара барабар болушат;

в) бири-бирине барабар болбогон эки жантыктын кайсынысынын проекциясы чоң болсо, ошол жантык узун болот.

Далилдөө: α тегиздиги, андан тышкары жаткан A чекити берилсин (18-сүрөт). AO – перпендикуляр, AB, AC, AD жантыктар, алардын проекциялары тиешелүү түрдө OB, OC, OD болсун.



18-сүрөт

а) ΔAOB – тик бурчтуу үч бурчтук. Анда $OA < AB$ болот. Демек, бул учурда теорема туура.

б) $OB = OC$ болсун. Анда $\Delta AOB = \Delta AOC$ болот. Анткени алардын тиешелүү катеттери барабар. Ошондуктан $AB = AC$ болот. Демек, теореманын б) учуру да туура.

в) $OD > OC$ болсун. $AD > AC$ болорун далилдейбиз. OD кесиндисине $OE = OC$ кесиндисин өлчөп койсок, E чекити O жана D чекиттеринин арасында жатат. A менен E ни туташтырабыз. б) учурунун негизинде $AC = AE$ болот. $\angle AEO$ — тар бурч, анда $\angle AED$ — кең бурч болот. Ошондуктан ΔAED да $AD > AE$ же $AD > AC$ болоору түшүнүктүү. Бул учур үчүн да теорема туура болот. Теорема толук далилденди.

Чекиттен тегиздикке түшүрүлгөн перпендикулярдын узундугун чекиттен тегиздикке чейинки аралык дейбиз. A чекитинен α тегиздигине чейинки аралык OA болот (18-сүрөт).

Эскертүү. A жана A' чекиттери α тегиздигинин ар түрдүү жагында жатып, $AO = OA'$ болсо, анда A, A' чекиттери α тегиздигине карата симметриялуу деп аталат (сүрөтүн өзүңөр тарткыла). Мында α тегиздиги симметрия тегиздиги болот.

21-теорема (20-теоремага тескери теорема).

Эгерде тегиздиктен тышкары жаткан чекиттен перпендикуляр жана жантык жүргүзүлсө, анда:

а) барабар жантыктардын проекциялары барабар болот;

б) чоң жантыктын проекциясы чоң болот.

20-теореманын далилденишине окшоштуруп, бул теореманы өз алдыңарча далилдегиле.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. α тегиздигинде жатпаган: 1) чекиттин; 2) кесиндинин; 3) түз сызыктын α тегиздигине түшүрүлгөн проекциясын тапкыла. Чиймеде көрсөткүлө.
2. a түз сызыгы жана α тегиздиги берилген, a түз сызыгы α тегиздигине параллель да, перпендикулярдуу да эмес: 1) a менен α бир чекитте кесилишээрин; 2) a түз сызыгынын α тегиздигиндеги проекциясы түз сызык болоорун ($Пр_{\alpha} a = a_1$) далилдегиле.
3. Тегиздиктен тышкары жаткан чекиттен тегиздикке перпендикуляр жана жантык жүргүзгүлө. Жантыктын тегиздиктеги проекциясын чиймеде көрсөткүлө.
4. A чекитинен a тегиздигине AA_1 перпендикуляры жана AB жантыгы жүргүзүлгөн. Жантыктын проекциясы BA_1 экендиги белгилүү. Анда:
   1) $AB = 5$ *см*, $AA_1 = 4$ *см* болсо BA_1 ди;
   2) $AA_1 = 8$ *дм*, $BA_1 = 6$ *дм* болсо, AB ны;
   3) $AB = 16$ *см*, $BA_1 = 4$ *см* болсо AA_1 ди тапкыла
5. a түз сызыгы α тегиздигине параллель болсо, a түз сызыгынын ар бир чекити α тегиздигинен бирдей аралыкта болорун далилдегиле.
6. α тегиздигинен 0,8 *дм* аралыкта жаткан A чекитинен узундуктары 1 *дм* болгон жантыктар жүргүзүлгөн. Жантыктардын негиздеринин геометриялык орду кандай фигура болот?
7. Берилген чекиттен тегиздикке 18 *дм* жана 24 *дм* узундуктагы эки жантык жүргүзүлгөн. Алардын проекцияларынын айырмасы 14 *дм*. Жантыктардын проекцияларын тапкыла.
8. Чекиттен тегиздикке жүргүзүлгөн жантыктардын узундуктарынын: 1) суммасы 56 см; 2) катышы 15:41. Эгерде алар-

дын проекцияларынын узундуктары 12 см жана 40 см болсо, анда жантыктардын узундуктарын эсептегиле.

9. *ABC* үч бурчтугу берилген. Ага сырттан сызылган айлананын *O* борбору аркылуу *ABC* тегиздигине *l* перпендикуляры жүргүзүлгөн. *l*дин ар бир чекити *A*, *B*, *C* чокуларынан бирдей алыстыкта болорун далилдегиле.

§ 8. ПАРАЛЛЕЛЬ ЭКИ ТЕГИЗДИКТИН ЖАНА КАЙЧЫЛАШ ТҮЗ СЫЗЫКТАРДЫН АРАСЫНДАГЫ АРАЛЫКТАР

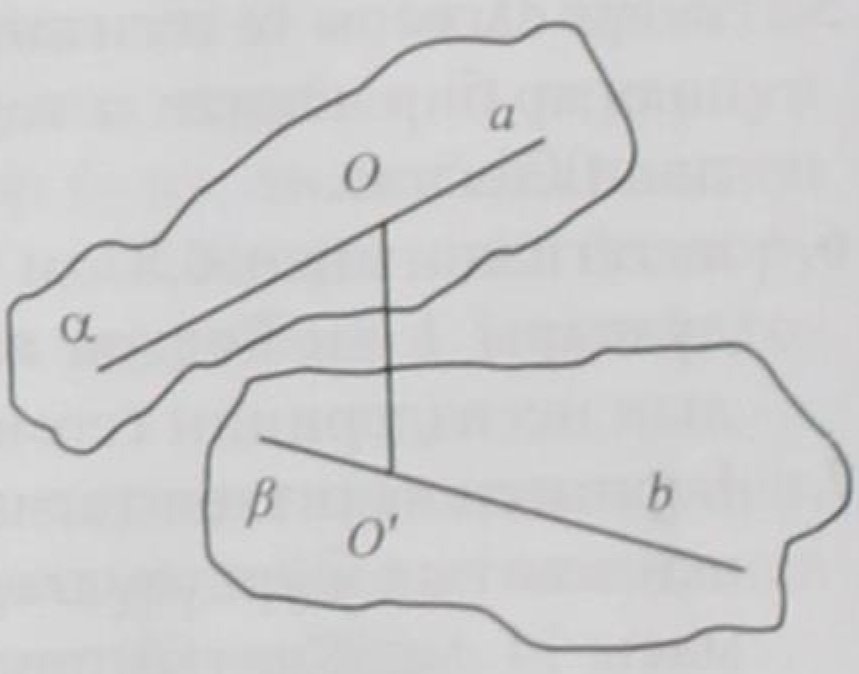
1. Параллель эки тегиздиктин арасындагы аралык

6-7-параграфтарда далилденген теоремалар параллель эки тегиздиктин арасындагы аралыкты аныктоого жардам берет. *Параллель эки тегиздиктин* арасындагы аралык деп, алардын биринин каалаган чекитинен экинчисине түшүрүлгөн перпендикулярдын узундугун айтабыз.

Чындыгында, параллель эки тегиздикке жалпы перпендикуляр болгон түз сызыктар дайыма табылат (18-теорема), ал түз сызыктар параллель болушат жана параллель тегиздиктердин арасында жаткан алардын кесиндилери барабар болот. Ошондуктан параллель эки тегиздиктин биринин каалаган чекитинен экинчисине түшүрүлгөн перпендикулярдын узундугун алардын арасындагы аралык катары алууга болот.

2. Кайчылаш эки түз сызыктын арасындагы аралык.

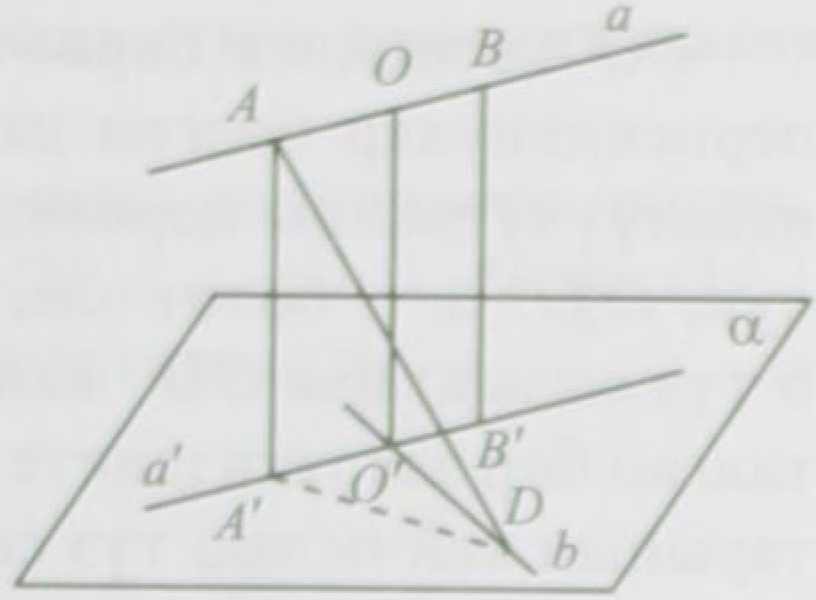
Кайчылаш эки түз сызыктын арасындагы аралык катары алардын арасындагы эң кичине аралыкты алышат. Ал аралык эки түз сызыктын ар бирине перпендикуляр болуп, учтары ал түз сызыктарда жаткан кесиндинин узундугуна барабар, *a* жана *b* кайчылаш түз сызыктарда $OO' \perp a$; $OO' \perp b$ (OO'-жалпы перпендикуляр) болсо, анда OO' (19-сүрөт) кесиндисинин узундугу берилген түз сызыктардын арасындагы аралык катары кабыл алынат.



19-сүрөт

Кайчылаш түз сызыктардын жалпы перпендикулярын табууга боло тургандыгын жана ал перпендикуляр берилген түз сызыктардын арасындагы эң кыска аралык болоорун көрсөтөбүз.

a жана b кайчылаш түз сызыктары берилсин (20-сүрөт). b түз сызыгы аркылуу $\alpha \parallel a$ болгондой α тегиздигин жүргүзөбүз (ал жогоруда белгилүү). a түз сызыгынан каалагандай A жана B чекиттерин алып, a тегиздигине AA' жана BB' перпендикулярын түшүрөбүз. A' жана B' чекиттери a' түз сызыгын аныктайт. a' түз сызыгы α тегиздигинде жатат да, a түз сызыгынын ортогоналдык проекциясы болот.



20-сүрөт

Чынында эле, $AA' \parallel BB'$ болгондуктан, ал түз сызыктар аркылуу бир гана β тегиздигин жүргүзүүгө болот. α жана β тегиздиктери a' түз сызыгы боюнча кесилишет. a түз сызыгынын ар бир чекитинин ортогоналдык проекциясы a' түз сызыгында жатат. Демек, түз сызыктын тегиздиктеги проекциясы түз сызык болот. Мындан ары «ортогоналдык проекция» деген терминдин ордуна, кыскача «проекция» деген терминди колдонобуз.

Бирок, $a \parallel \alpha$ болгондуктан $AA' = BB'$ болот, б.а. a жана a' түз сызыктарынын арасындагы аралыктар бирдей (туруктуу). Ошондуктан $a \parallel a'$ болот.

Ошентип, түз сызык тегиздикке параллель болсо, анда түз сызыктан тегиздикке чейинки аралык деп, түз сызыктын каалаган чекитинен тегиздикке түшүрүлгөн перпендикулярдын узундугун атайбыз.

a' жана b түз сызыктары O' чекитинде кесилишет. Эгерде кесилишпесе, анда алар параллель болуп, a жана b кайчылаш болбойт эле. O' чекити аркылуу α тегиздигине перпендикуляр түз сызык жүргүзсөк, ал a түз сызыгын O чекитинде кесип өтөт. Анткени $OO' \perp \alpha$ жана $b \in \alpha$ болгондуктан $00' \perp b$ болот.

Ошондой эле $OO' \perp a$ жана $a \parallel \alpha'$ экендигин эске алсак, $OO' \perp a$ болот. Демек, OO' кесиндиси a жана b түз сызыктарына жалпы перпендикуляр болот.

Эми OO' кесиндисинин узундугу a жана b түз сызыктарынын арасындагы эң кыска аралык болоорун көрсөтөбүз. Ал үчүн каалагандай AD кесиндиси ($A \in a$, $D \in b$) жантык болоорун көрсөтүү жетиштүү болот. $AA'D$ тик бурчтуу үч бурчтук. AD — гипотенуза, анда $AA' < AD$ же $OO' < AD$ ($AA' = OO'$).

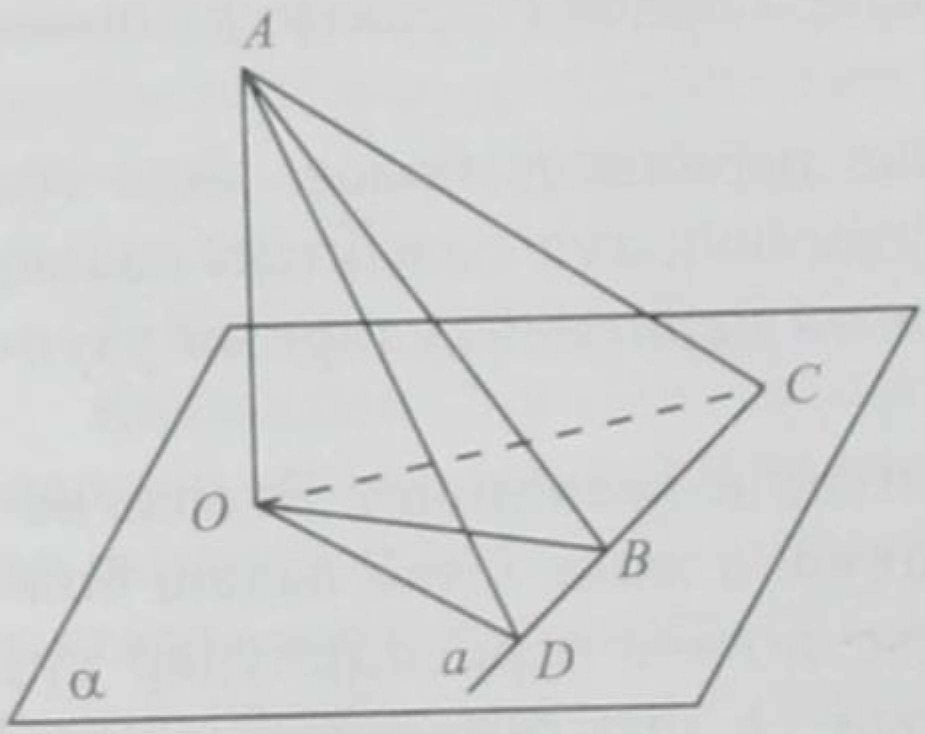
OO' кесиндиси бирөө гана болот. Эгерде a жана b га жалпы перпендикуляр болгон дагы бир O_1O_1' кесинди бар десек, OO' изделүүчү жалпы перпендикуляр болот, анда $O_1 \in \alpha$, $O_1 \in b$ болуп, $O_1O_1' \perp \alpha$ болот эле, б.а. $OO' \parallel O_1O_1'$ болмок. Анда a жана b түз сызыктары OO' жана O_1O_1' түз сызыктары аркылуу аныкталган бир эле тегиздикте жатып калмак. Бул a жана b түз сызыктарынын кайчылаш түз сызыктар экендигине карама-каршы келет.

Демек, жогоруда талап кылынган сүйлөм толук далилденди.

22-теорема (Үч перпендикуляр жөнүндөгү теорема).

Жантыктын тегиздиктеги негизи аркылуу өтүүчү түз сызык жантыктын проекциясына перпендикулярдуу болсо, анда ал жантыктын өзүнө да перпендикулярдуу болот.

Д а л и л д ө ө : α тегиздиги, AO перпендикуляры, AB жантыгы, анын α тегиздигиндеги OB проекциясы берилсин (21-сүрөт). α тегиздигинде жаткан a түз сызыгы OB проекциясына перпендикулярдуу болсун. Ачык болсун үчүн a түз сызыгы B чекити аркылуу өтөт деп эсептейли. Эгерде a түз сызыгы B чекити аркылуу өтпөсө, анда аны B чекити аркылуу өтүүчү жана ага параллель болгон a' түз сызыгы менен алмаштырууга болот.



21-сүрөт

$AB \perp a$ боло тургандыгын далилдейбиз. a түз сызыгынын B чекитинен баштап $BC = BD$ кесиндилерин өлчөп коёбуз. D жана C чекиттерин тиешелүү түрдө A жана O чекиттери менен туташтырабыз. $\Delta OBC = \Delta OBD$ (тик бурчтуу үч бурчтуктар, катеттери барабар), анда $OC = OD$ болот. Бул кесиндилер $AC = AD$ жантыктарынын проекциялары.

20-теореманын негизинде $AC = AD$ болот. Натыйжада ACD-тең капталдуу үч бурчтук, AB – анын медианасы болуп калат. Анда ал үч бурчтуктун бийиктиги да болот: $AB \perp CD$ же $AB \perp a$. Теорема далилденди.

23-теорема (22-теоремага тескери теорема). **Эгерде тегиздикте жаткан түз сызык жантыкка перпендикулярдуу болсо,**

анда ал түз сызык жантыктын тегиздиктеги проекциясына да перпендикулярдуу болот.

Бул теореманы далилдөө 22-теореманы далилдөөгө окшош. Ошентип, үч перпендикуляр ($OA \perp \alpha$, $OB \perp a \Rightarrow a \perp AB$ же $OA \perp \alpha$, $AB \perp a \Rightarrow a \perp OB$) жөнүндөгү түшүнүк такталды.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Параллель эки тегиздиктин арасындагы аралык h ка барабар, a кесиндисинин учтары ал тегиздиктерде жатат. a кесиндисинин ар бир тегиздиктеги проекцияларын тапкыла.

2. Тегиздиктин бир жагында жаткан кесиндинин учтары ал тегиздиктен 3 *дм* жана 5 *дм* аралыкта. Берилген кесиндини: 1) тең экиге бөлүүчү; 2) $\frac{3}{7}$ катышында бөлүүчү чекит тегиздиктен кандай аралыкта болот?

3. 50 *дм* узундуктагы кесинди тегиздикти кесип өтүп, анын учтары тегиздиктен 30 *дм* жана 10 *дм* аралыктарда жатат. Кесиндинин тегиздиктеги проекциясын тапкыла.

4. Тегиздиктин бир жагында жаткан AB кесиндинин учтарынан перпендикулярлар түшүрүлгөн. Алардын узундуктары 7 *см* жана 10 *см*, негиздеринин арасындагы аралык 4 *см*. ABнын узундугун тапкыла.

5. Квадраттын чокусунан анын тегиздигине перпендикуляр тургузулган. Перпендикулярдын учунан квадраттын калган чокуларына чейинки аралыктар m жана n ($m < n$). Перпендикулярдын узундугун, квадраттын жагын тапкыла.

6. Тик бурчтуктун чокусунан анын тегиздигине перпендикуляр тургузулган. Перпендикулярдын экинчи учунан тик бурчтуктун калган чокуларына чейинки аралыктар m, n, p ($m < p$, $n < p$). Перпендикулярдын узундугун, тик бурчтуктун жактарын тапкыла.

7. Квадраттын диагоналдарынын кесилишкен чекитинен анын тегиздигине перпендикуляр түз сызык жүргүзүлгөн. Анын ар бир чекити квадраттын чокуларынан бирдей аралыкта болоорун далилдегиле.

8. Тең жактуу үч бурчтуктун жагы 6 *дм*. Анын ар бир чокусунан 4 *дм* аралыкта жаткан чекиттен үч бурчтуктун тегиздигине чейинки аралыкты тапкыла.

9. Үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын борбору аркылуу анын тегиздигине перпендикуляр түз сызык жүргүзүлгөн. Ал түз сызыктын ар бир чекити үч бурчтуктун жактарынан бирдей алыстыкта болоорун далилдегиле. *Көрсөтмө.* Үч перпендикуляр жөнүндөгү теореманы пайдалангыла.

10. Үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын радиусу 0,4 *дм.* Анын борборунан үч бурчтуктун тегиздигине тургузулган перпендикулярдын узундугу 0,3 *дм* ге барабар. Перпендикулярдын экинчи учунан үч бурчтуктун жактарына чейинки аралыкты тапкыла.

11. Берилген чекиттен үч бурчтуктун тегиздигине чейинки аралык 2,5 *дм*, ал эми үч бурчтуктун ар бир жагына чейинки аралык 6,5 *дм.* Ал үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын радиусун тапкыла.

12. Катеттери a жана b га барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун тик бурчунун чокусунан анын тегиздигине m перпендикуляры жүргүзүлгөн. Ал перпендикулярдын үч бурчтуктун тегиздигинде жатпаган учунан гипотенузага чейинки аралыкты тапкыла.

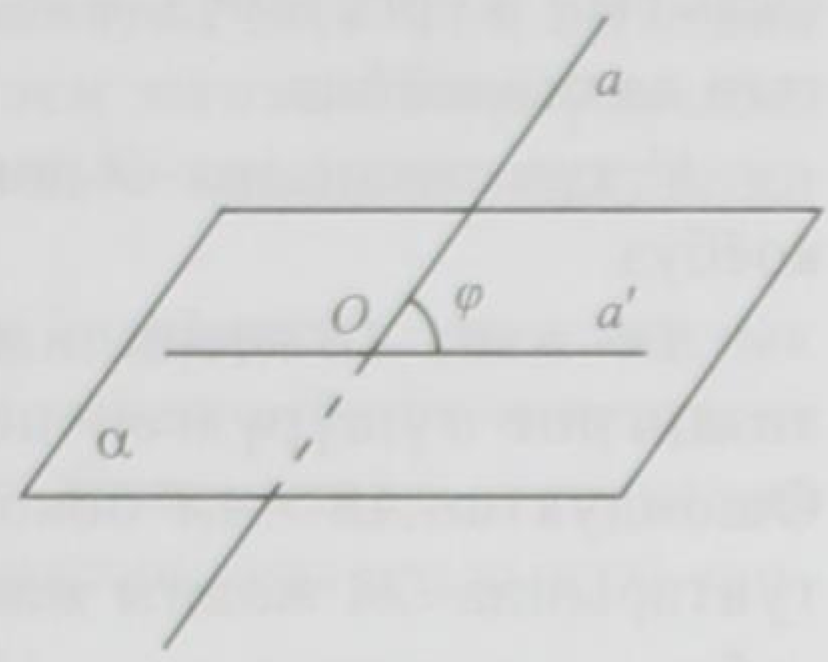
13. Үч бурчтуктун жактары 2 *дм*, 6,5 *дм* жана 7,5 *дм.* Үч бурчтуктун чоң бурчунун чокусунан анын тегиздигине тургузулган перпендикуляр 6 *дм.* Перпендикулярдын учтарынан үч бурчтуктун чоң жагына чейинки аралыктарды тапкыла.

14. α тегиздигинде жаткан параллель эки түз сызыктын арасындагы аралык m. M чекити α тегиздигинен h аралыкта болуп, эки түз сызыктан бирдей алыстыкта жатат. M ден түз сызыктарга чейинки аралыкты тапкыла.

§ 9. ТҮЗ СЫЗЫК МЕНЕН ТЕГИЗДИКТИН АРАСЫНДАГЫ БУРЧ

Эгерде түз сызык тегиздикке параллель болсо же тегиздикте жатса, анда түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурчту нөлгө барабар деп эсептейбиз. Анткени алар бири-бири менен эч кандай бурчту түзө алышпайт. Эгерде түз сызык тегиздикке перпендикулярдуу болсо, анда алардын арасындагы бурч 90°ка барабар болот. Анткени берилген түз сызык тегиздикте жаткан каалаган түз сызыкка перпендикуляр болот. Демек, берилген түз сызыктын тегиздик менен түзгөн бурчун тегиздикте жаткан түз сызыктар аркылуу мүнөздөп көрсөтүүгө болот.

a түз сызыгы жана α тегиздиги берилсин (22-сүрөт). Түз сызык тегиздикке параллель да, перпендикуляр да болбосун. Алар O чекитинде кесилишет деп эсептейли. Бул учурда *«түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурч үчүн кайсы бурчту алууга болот?»* деген суроо туулат. Аны дароо аныктай



22-сүрөт

коюу мүмкүн эмес, анткени – берилген түз сызык тегиздикте жаткан түз сызыктар менен ар кандай бурчтарды түзөт. Ошондуктан тегиздикте жаткан түз сызыктар менен берилген түз сызыктын арасындагы бурчтарды салыштырууга туура келет, себеби, ар кандай эки түз сызыктын арасындагы бурчту аныктоону биз билебиз. Ал $0° \le \varphi \le 90°$ болот(мында φ-эки түз сызыктын арасындагы тар бурч).

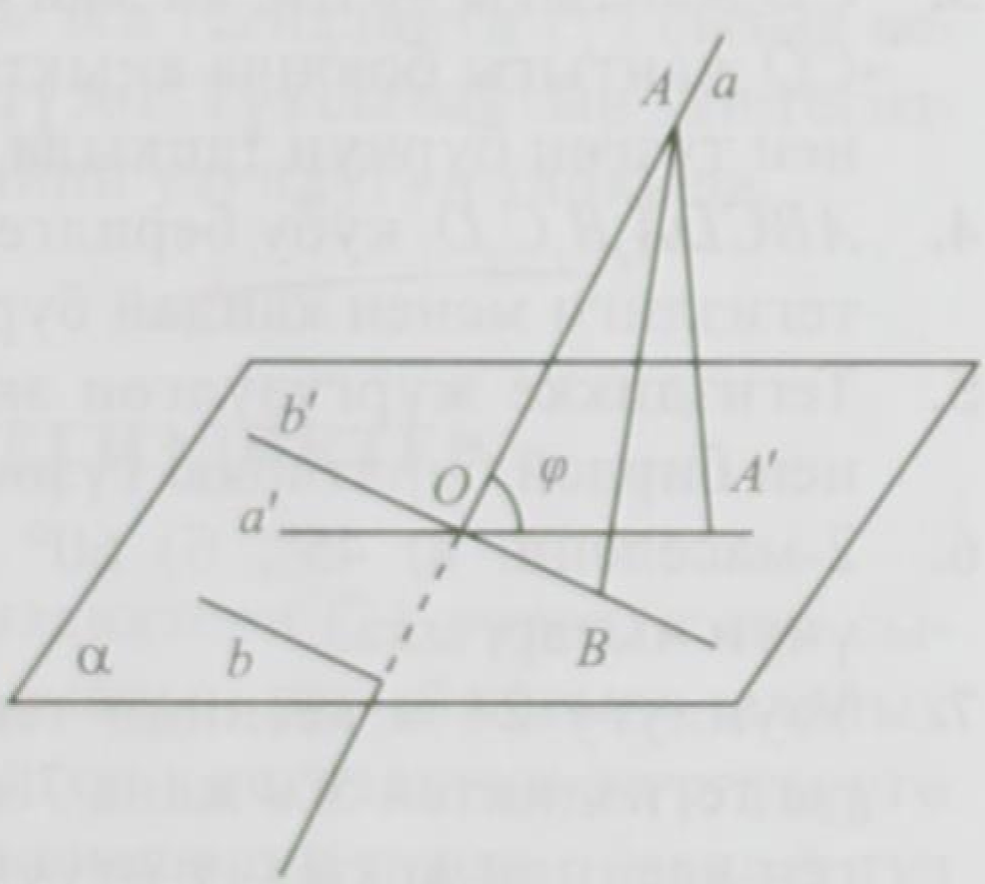
Түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурч деп, ал түз сызык менен анын тегиздиктеги проекциясынын арасындагы бурчту атайбыз.

Түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурчту φ аркылуу белгилейли, анда: $\varphi = \angle(a, \alpha)$ болот. $Пр_\alpha a = a'$ болсо, аныктаманын негизинде түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурчту $\varphi = \angle(a, a')$ түрүндө да жаза алабыз.

24-теорема. **Түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурч, ал түз сызыктын тегиздиктеги түз сызыктар менен түзгөн бурчтарынын эң кичине бурчу болот.**

Д а л и л д ө ө. α тегиздиги жана *a* түз сызыгы берилсин (23-сүрөт) $a \cap \alpha = 0$ жана $Пр_\alpha a = a'$ болсун. $\varphi = \angle(a, \alpha)$ же $\varphi = \angle(a, a')$ деп белгилейли.

α түз сызыгынан каалагандай *A* чекитин алабыз. $Пр_\alpha A = A'$ болуп, $A' \in a'$. α тегиздигинен каалагандай *b* түз сызыгын алабыз. *O* чекити аркылуу $b \parallel b'$ түз



23-сүрөт

сызыгын жүргүзөбүз. $\varphi < \angle(a, b)$ же $\varphi < \angle(a, b')$ боло тургандыгын далилдейбиз.

b' түз сызыгына O дон баштап $OA' = OB$ кесиндисин өлчөп коёбуз.

AA' жана AB кесиндилери тиешелүү түрдө A чекитинен α тегиздигине түшүрүлгөн перпендикуляр жана жантык болушат. Ошондуктан $AB > AA'$ болот (20-теорема). OAB жана OAA' үч бурчтуктарында OA жалпы жак жана $OB = OA'$ (өлчөнүп коюлган барабар кесиндилер) жана $AB > AA'$, Демек, чоң жактын каршысында чоң бурч жатат.

$\angle AOB > \angle AOA$м же $\angle(a, b') > \angle(a, a')$, башкача айтканда $\varphi < \angle(a, b)$. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. l түз сызыгы α тегиздиги менен 45° бурч түзүп, аны A чекитинде кесип өтөт. A чекити аркылуу, α тегиздиги менен 45° бурч түзө тургандай дагы түз сызыктарды жүргүзүүгө болобу? Канчаны?
2. α тегиздиги менен 30° бурч түзгөндөй кылып CD жантыгы аркылуу түз сызык жүргүзүлгөн. CC_1 – перпендикуляр, DC_1 – CD нын α тегиздигиндеги проекциясы. Эгерде: 1) $CD = 24$ *см* болсо, анын DC_1 проекциясын жана CC_1 перпендикулярын; 2) $CC_1 = 8$ *см* болсо, CD жантыгынын DC_1 проекциясын; 3) $DC_1 = 15$ *см* болсо, CD жантыгын, CC_1 перпендикулярын тапкыла.
3. CD жантыгы 40 *дм*, ал эми CC_1 перпендикуляры 20 *дм* болсо, CO жантыгы боюнча аныкталган түз сызыктын тегиздик менен түзгөн бурчун тапкыла.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубу берилген. а) DB_1 б) DA_1 түз сызыгы $ABCD$ тегиздиги менен кандай бурч түзөт?
5. Тегиздикке жүргүзүлгөн эки параллель жантыктар аны менен бирдей бурчтарды түзөөрүн далилдегиле.
6. 2-маселени: а) 45°; б) 60° бурчка барабар болгон учурлар үчүн чыгаргыла.
7. Узундугу 24 *м* кесинди тегиздикти кесип өтөт, анын учтары тегиздиктен 5 *м* жана 7 *м* аралыкта жайланышкан. Берилген кесинди аркылуу өтүүчү түз сызыктын тегиздик менен түзгөн бурчун аныктагыла.

8. Тегиздиктен h аралыкта жаткан чекиттен берилген тегиздик менен $45°$ бурч түзгөндөй кылып эки жантык жүргүзүлгөн. Алардын арасындагы бурч $60°$. Жантыктардын негиздеринин арасындагы аралыкты тапкыла.

9. Тегиздиктен h аралыкта жаткан чекиттен эки жантык жүргүзүлгөн. Жантыктар тегиздик менен φ бурчун түзүшөт жана алар өз ара перпендикулярдуу. Жантыктардын тегиздик менен кесилишкен чекиттеринин арасындагы аралыкты тапкыла.

10. Туура үч бурчтуктун жагы 12 *см*. Үч бурчтуктун тегиздигинен тышкары жаткан D чекитин анын чокулары менен туташтырганда пайда болгон жантыктар тегиздик менен $45°$ бурч түзөт. D чекитинен үч бурчтуктун: 1) чокуларына; 2) жактарына чейинки аралыкты тапкыла.

11. Эгерде кайчылаш эки түз сызыктын бири тегиздикке перпендикуляр, ал эми экинчиси тегиздик менен φ бурчун түзсө, түз сызыктардын арасындагы бурчту тапкыла.

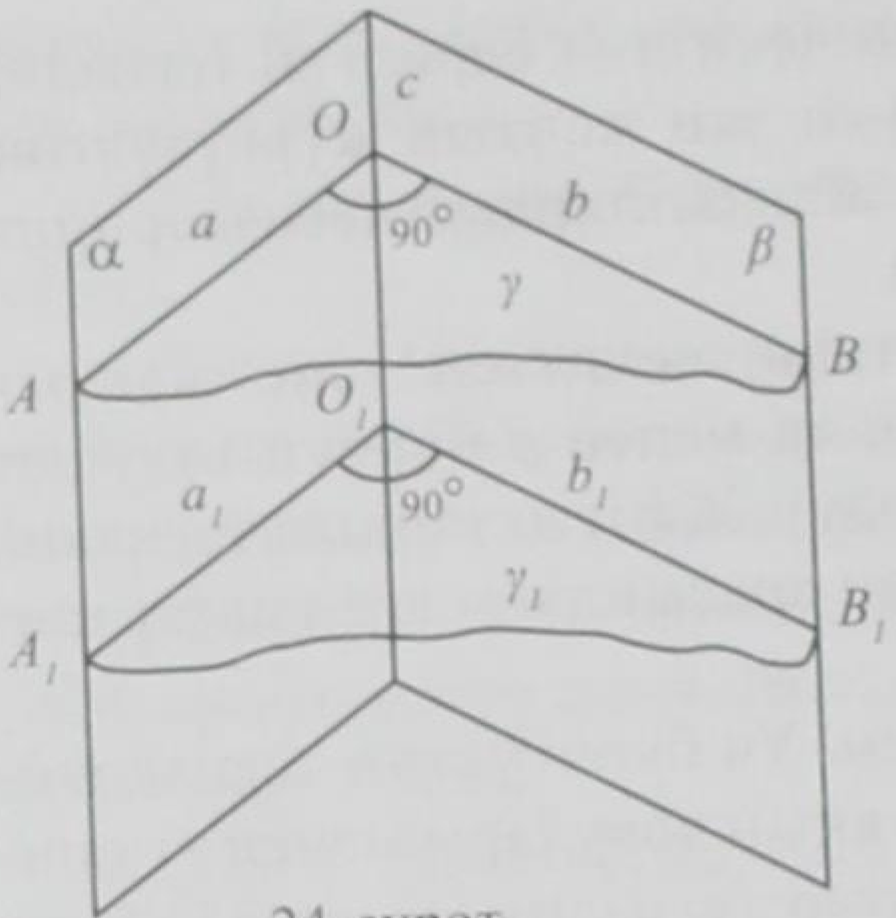
12. Эгерде тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтуктун бир катети α тегиздигинде жатып, экинчи катети ал тегиздик менен $45°$ бурч түзсө, анда гипотенуза менен тегиздиктин арасындагы бурч $30°$ка барабар болоорун далилдегиле.
Көрсөтмө. ΔABC*да* $\angle C = 90°$, $AC = CB$. BC аркылуу α тегиздигин жүргүзгүлө. $AO \perp \alpha$ түзүп, жактардын катышын эсептегиле.

13. $EFKL$ квадратынын жагы 1,2 *дм*. Б чекити анын ар бир чокусунан 1,2 *дм* аралыкта. DE түз сызыгынын квадраттын тегиздиги менен түзгөн бурчун тапкыла.

14. Аралыгы 2 *м* болгон параллель эки тегиздикти түз сызык кесип өтүп, алар менен $60°$ бурч түзөт. Түз сызыктын эки тегиздиктин арасындагы кесиндисинин узундугун тапкыла.

§ 10. ПЕРПЕНДИКУЛЯРДУУ ТЕГИЗДИКТЕР

Параллель эмес α жана β тегиздиктери (24-сүрөт) c түз сызыгы боюнча кесилишсин. 14-теореманын натыйжасына ылайык c түз сызыгына перпендикуляр болгон γ тегиздигин жүргүзүүгө болот. Ал α жана β тегиздиктерин тиешелүү түрдө a жана b түз сызыктары боюнча кесип өтөт деп эсептейли.



24-сүрөт

Эгерде $a \perp b$ болсо, анда α жана β тегиздиктери перпендикулярдуу деп айтышат. Эки тегиздикти алардын кесилишиндеги түз сызыкка перпендикулярдуу болгон тегиздик менен кесcкенде пайда болгон түз сызыктар бири-бирине перпендикулярдуу болушса, анда берилген эки тегиздик өз ара перпендикулярдуу деп аталат. Ал $\alpha \perp \beta$ түрүндө белгиленет.

Эки тегиздиктин перпендикулярдуулугу кесүүчү γ тегиздигин тандап алуудан көз каранды эмес. c түз сызыгына перпендикулярдуу болгон дагы бир γ_1 тегиздигин жүргүзөлү. Ал тегиздик α жана β тегиздиктерин тиешелүү түрдө a_1 жана b_1 түз сызыктары боюнча кесип өтөт. Анда $\gamma \perp c$, $\gamma_1 \perp c$ болгондуктан, $\gamma \parallel \gamma_1$, боло тургандыгы белгилүү (19-теорема). Эгерде 8-теореманы колдонсок, $\alpha \parallel \alpha_1$, $b \parallel b_1$, болоорун байкайбыз. Демек, $a_1 \perp b_1$ болсо, анда $a \perp b$. болот. Бул α жана β тегиздиктеринин перпендикулярдуу экендигин аныктайт.

25-теорема. **Тегиздикке перпендикуляр болгон түз сызык аркылуу өтүүчү тегиздик берилген тегиздикке перпендикулярдуу болот.**

Д а л и л д ө ө . a түз сызыгы α тегиздигине перпендикулярдуу болсун (25-сүрөт) жана алар O чекитинде кесилишсин, a түз сызыгы аркылуу β тегиздигин жүргүзөбүз. $\beta \perp \alpha$ болоорун далилдейбиз.

25-сүрөт

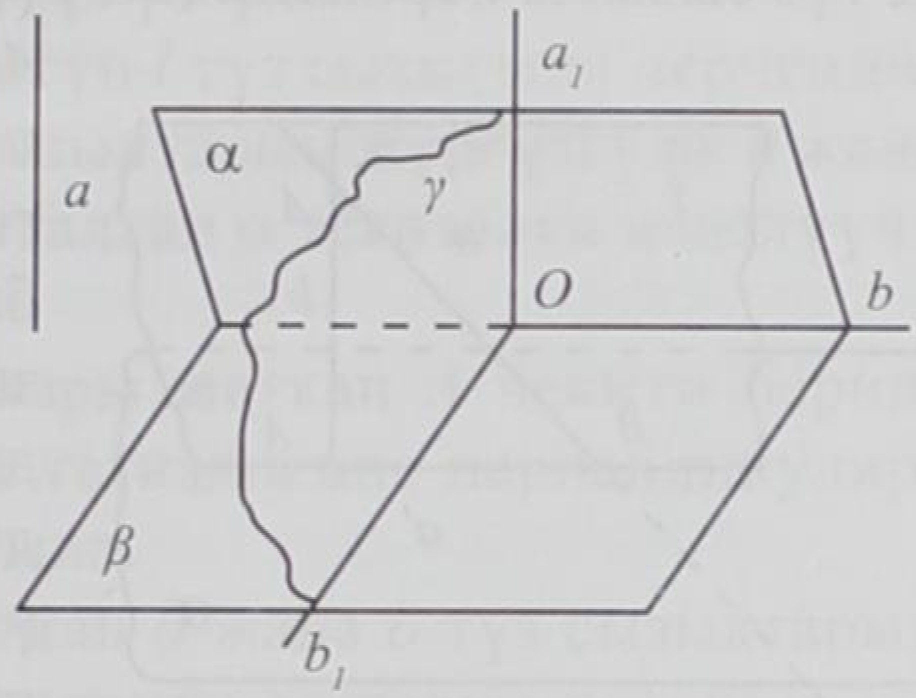
a жана β тегиздиктери O жалпы чекитине ээ болгондуктан, алар O чекити аркылуу өтүүчү b түз сызыгы боюнча кесилишет. O чекити аркылуу өтүп, α тегиздигинде жатуучу жана b түз сызыгына перпендикуляр болгон c түз сызыгын жүргүзөбүз.

Шарт боюнча $a \perp \alpha$, анда ал c жана b түз сызыктарына перпендикулярдуу болот, a жана c түз сызыктары аркылуу γ тегиздигин жүргүзөбүз. $b \perp a$ жана түзүү боюнча $b \perp c$ болгондуктан, $b \perp \gamma$ болот (b түз сызыгы α менен β нын кесилиши).

γ тегиздигинде жаткан a жана c түз сызыктары перпендикулярдуу болушкандыктан тегиздиктердин перпендикулярдуу болушунун аныктамасынын негизинде $\beta \perp \alpha$ болот. Теорема далилденди.

26-теорема. **Эгерде түз сызык жана тегиздик экинчи тегиздикке перпендикулярдуу болсо, анда түз сызык биринчи тегиздикте жатат же ага параллель болот.**

Д а л и л д ө ө . a түз сызыгы, α жана β тегиздиктери берилип, $a \perp \beta$, $\alpha \perp \beta$ болсун (26-сүрөт). $a \parallel \alpha$ же a түз сызыгы α да жатаарын ($a \in \alpha$) далилдейбиз. α жана β тегиздиктери b түз сызыгы боюнча кесилишсин: $\alpha \cap \beta = b$. Бул b түз сызыгына перпендикуляр болгон γ тегиздигин жүргүзөбүз. Ал α жана β тегиздиктерин тиешелүү түрдө a_1,b_1 түз сызыктары боюнча кесип өтөт. Шарт боюнча $\alpha \perp \beta$ анда $a_1 \perp b_1$ болот. Бирок, $a_1 \perp b_1$ жана $a_1 \perp b$ болгондуктан, жогоруда белгилүү теореманын негизинде $a_1 \perp \beta$ болот. Теореманын шарты боюнча $a \perp \beta$. Мындан $a_1 \parallel a$ экендиги келип чыгат (17-теорема). Эгерде a түз сызыгы α тегиздигинде жатса, анда теорема далилденген болот. Эгерде a түз сызыгы α тегиздигинде жатпаса, анда $a \parallel a_1$ болгондуктан, $a \parallel \alpha$ болуп калат. Теорема далилденди.

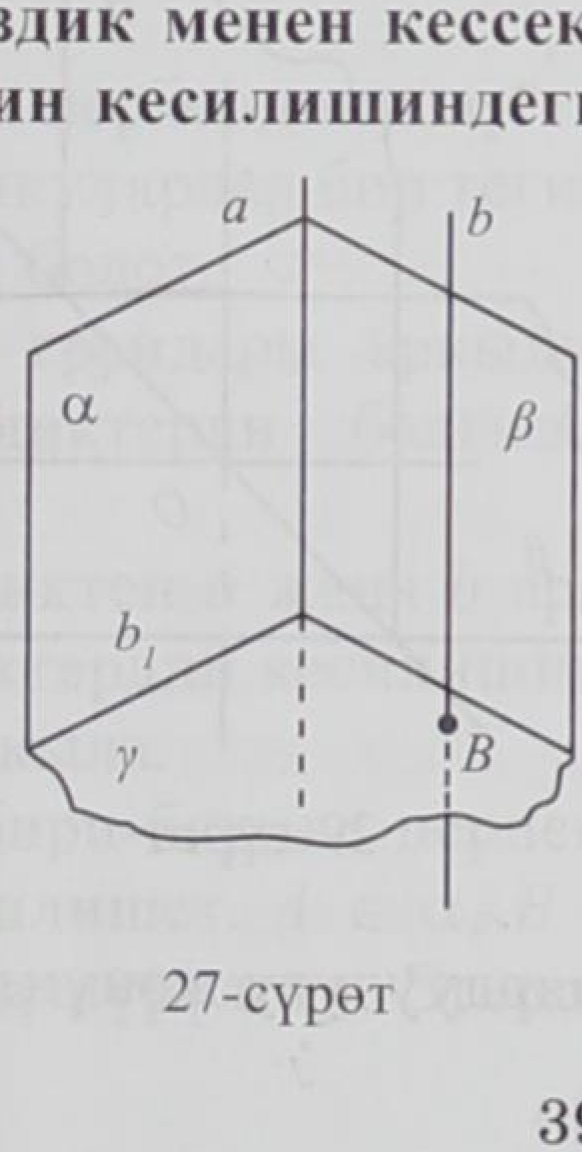


26-сүрөт

27-теорема. **Эгерде кесилишүүчү эки тегиздикти алардын ар бирине перпендикулярдуу болгон тегиздик менен кессек, анда ал тегиздик берилген эки тегиздиктин кесилишиндеги түз сызыкка перпендикулярдуу болот.**

Д а л и л д ө ө . α жана β тегиздиктери берилип, алар a түз сызыгында кесилишсин (27-сүрөт). Бул эки тегиздиктин ар бирине перпендикулярдуу болгон γ тегиздигин жүргүзөбүз. $\gamma \perp a$ болоорун далилдөө талап кылынат.

γ тегиздигинде жаткан каалагандай B чекити аркылуу ага перпендикуляр болгон b түз сызыгын жүргүзөбүз. ($b \perp \gamma$), $\alpha \perp \gamma$ жана $b \perp \gamma$ болгондуктан, 26-теореманын негизин-

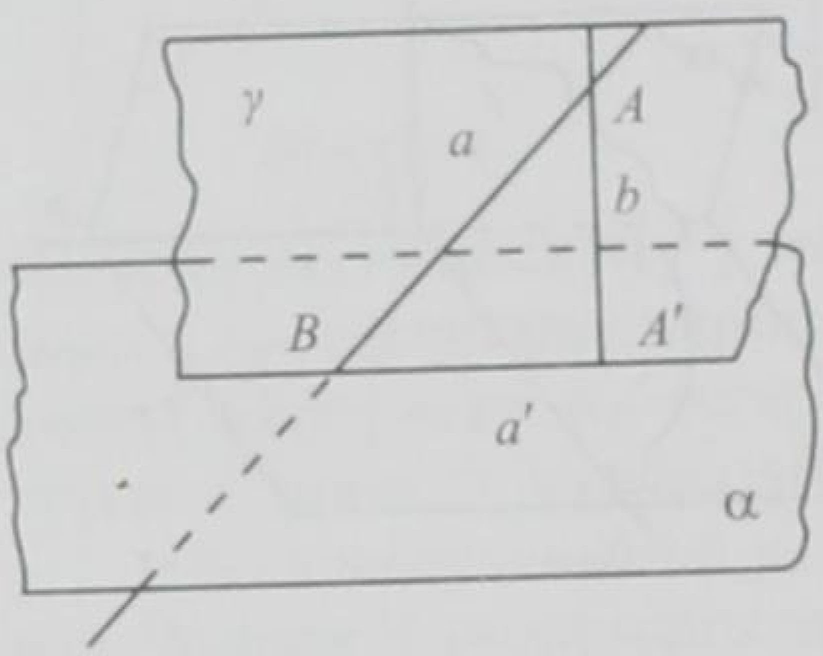


27-сүрөт

де $b \parallel \alpha$ болот. Ошол эле теореманы колдонуп, $b \parallel \beta$ экендигине ээ болобуз. Эми 4-теореманын негизинде $b \parallel a$ болот. Бирок, $b \perp \gamma$ болгондуктан, $a \perp \gamma$ боло тургандыгы түшүнүктүү (26-теорема). Теорема далилденди.

28-теорема. **Тегиздикке перпендикуляр болбогон түз сызык аркылуу ал тегиздикке перпендикулярдуу болгон бир гана тегиздик жүргүзүүгө болот.**

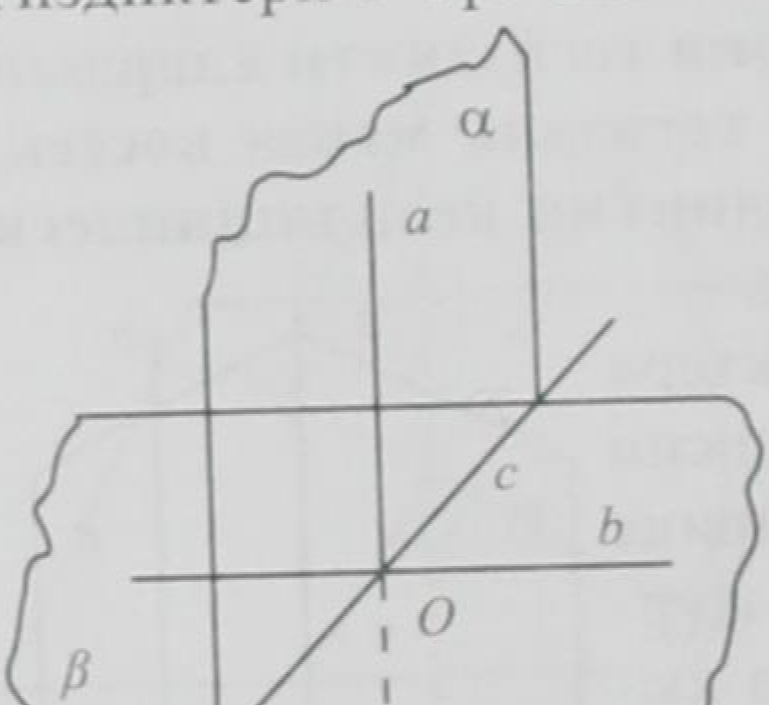
Д а л и л д ө ө . α тегиздиги жана ага перпендикуляр болбогон α түз сызыгы берилсин (28-сүрөт). α түз сызыгынын каалагандай A чекитин алып, ал чекит аркылуу α тегиздигине перпендикуляр болгон b түз сызыгын жүргүзөбүз (ал бирөө гана болот). a жана b түз сызыктары аркылуу бир гана γ тегиздиги өтөт (3-теорема). $b \perp \alpha$ болгондуктан, 25-теореманын негизинде $\gamma \perp \alpha$ болот. Демек, a түз сызыгы аркылуу өтүп, α тегиздигине перпендикуляр болгон бир гана γ тегиздиги болот. Теорема далилденди.



28-сүрөт

29-теорема. **Перпендикулярдуу болушкан эки тегиздиктин биринде жаткан түз сызык ал тегиздиктердин кесилишиндеги түз сызыкка перпендикулярдуу болсо, анда ал түз сызык экинчи тегиздикке да перпендикулярдуу болот.**

Д а л и л д ө ө . Өз ара перпендикулярдуу болушкан α, β тегиздиктери c түз сызыгы боюнча кесилишсин (29-сүрөт). α тегиздигинде жаткан a түз сызыгы c түз сызыгына перпендикуляр болсун. $a \perp \beta$ болоорун далилдейбиз.



29-сүрөт

α түз сызыгы β тегиздигин O чекитинде кесип өтсүн. Анда O чекити c түз сызыгында жатат. β тегиздигинде O чекити аркылуу $c \perp b$ түз сызыгын жүргүзөбүз (ал планиметриядан белгилүү).

Шарт боюнча $a \perp c$. a жана b түз сызыктары γ тегиздигин аныктайт, бирок, $a \perp c$ жана $b \perp c$ болгондуктан $\gamma \perp c$ болот. Эки тегиздиктин перпендикулярдуулугу жөнүндөгү аныктаманын негизинде $a \perp b$ болот, себеби $\alpha \perp \beta$ экендиги белгилүү. Натыйжада $a \perp b$ жана $a \perp c$ экендигине ээ болдук. b жана c түз сызыктары β тегиздигинде жатышат ($b,c \in \beta$). Түз сызыктын тегиздикке перпендикулярдык шартын эске алсак, $a \perp \beta$ болот. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. l түз сызыгы берилген. Анын каалаган M чекити аркылуу ага перпендикуляр α тегиздигин жүргүзгүлө.
   Көрсөтмө. M чекити аркылуу өтүп l түз сызыгына перпендикулярдуу болгон a жана b түз сызыктарын жүргүзгүлө. a жана b түз сызыктары аркылуу аныкталган α тегиздиги изделүүчү тегиздик болот.
2. α тегиздиги жана андан тышкары жаткан A чекити берилген. A чекити аркылуу өтүп, α тегиздигине перпендикулярдуу болгон l түз сызыгын сызгыла.
   Көрсөтмө. α тегиздигинде жаткан a жана b түз сызыктарын алып, алардын кесилишкен D чекити аркылуу $a \perp \beta$, $b \perp \gamma$ тегиздиктерин жүргүзгүлө. $\beta \cap \gamma = m$ - түз сызыгы. $m \perp a$, $m \perp b$ болоору белгилүү, башкача айтканда, $m \perp \alpha$ болот. А чекити аркылуу m ге параллель болгон түз сызык жүргүзсөк, ал изделүүчү l түз сызыгы болот.
3. α тегиздигине перпендикулярдуу болгон l түз сызыгы берилген. l түз сызыгы аркылуу өтүүчү ар кандай β тегиздиги α га перпендикулярдуу болоорун далилдегиле.
4. a түз сызыгы жана α тегиздиги берилген. a түз сызыгы аркылуу өтүүчү жана α тегиздигине перпендикулярдуу болгон тегиздик жүргүзгүлө.
   Көрсөтмө. a нын ар бир чекитинен α га перпендикуляр түшүргүлө (проекциялагыла). Ал перпендикулярлар бир тегиздикте жатат жана ал изделүүчү тегиздик болот.
5. $ABCDA_1B_1C_1D1$ кубу берилген. a нын грандары аркылуу аныкталган перпендикулярдуу тегиздиктерди белгилеп көрсөткүлө.
6. D чекити перпендикулярдуу эки тегиздиктен a жана b аралыкта жайгашкан. D чекитинен тегиздиктердин кесилишиндеги түз сызыкка чейинки аралыкты тапкыла.
7. α жана β тегиздиктери берилип, алар бири-бирине перпендикулярдуу жана m түз сызыгында кесилишет. $A \in \alpha$, $B \in \beta$ чекиттеринен $AC \perp m$ жана $BD \perp m$ түшүрүлгөн. Эгерде:

1) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$; 2) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$ болсо, AB кесиндисин тапкыла.

8. α жана β тегиздиктери берилген. $\alpha \perp \beta$ жана $\alpha \cap \beta = m$ (m – түз сызык) α да $a \parallel m$ жана β да $b \parallel m$ түз сызыктары жүргүзүлгөн. a менен m дин арасындагы аралык 15 *дм*, b менен m дин арасындагы аралык 8 *дм* болсо, a жана b түз сызыктарынын арасындагы аралыкты тапкыла.

9. Параллель эки тегиздиктин бирөөнө перпендикулярдуу болгон тегиздик экинчисине да перпендикулярдуу болоорун далилдегиле.

10. Тең капталдуу тик бурчтуу эки үч бурчтуктун жалпы гипотенузасынын узундугу 6 *см* ге барабар. Үч бурчтуктардын тегиздиктери перпендикулярдуу болушса, анда алардын тик бурчтарынын чокуларынын аралыгын тапкыла.

11. $EFRL$ жана EFK_1L_1 квадраттарынын тегиздиктери бирибирине перпендикулярдуу. $EF = m$. Төмөндөгүлөрдү тапкыла: 1) KK_1 аралыгын; 2) K_1L аралыгын; 3) EK жана EK_1 диагоналдарынын арасындагы бурчту.

12. α, β, γ тегиздиктери эки-экиден перпендикулярдуу. Алардын кесилишиндеги түз сызыктар да эки-экиден перпендикулярдуу болоорун далилдегиле.

I ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Стереометриядагы каралуучу фигуралардын планиметриядагы фигуралардан айырмасы кандай?
2. Стереометриянын аксиомаларын айтып бергиле.
3. Стереометриянын аксиомаларынан түздөн-түз келип чыгуучу кандай натыйжаларды билесиңер?
4. Мейкиндикте эки түз сызыктын өз ара жайланышкан учурларын баяндап бергиле.
5. Кайчылаш түз сызыктарды аныктагыла.
6. Түз сызык менен тегиздиктин параллелдик шарты кандай?
7. Параллель түз сызыктардын (тегиздиктердин) транзитивдик касиетин айтып бергиле.
8. Тегиздиктердин параллелдүүлүк белгиси кандайча айтылат?
9. Параллель тегиздиктердин (түз сызыктардын) түз сызык (тегиздик) менен кесилиши жөнүндө кандай теоремаларды билесиңер?

10. Кайчылаш түз сызыктардын арасындагы бурчту кандай аныкташат?
11. Мейкиндиктеги барабар бурчтарды түшүндүрүп бергиле.
12. Түз сызык менен тегиздиктин перпендикулярдык шартын баяндагыла.
13. Бир тегиздикке (түз сызыкка) перпендикулярдуу болгон эки түз сызык (тегиздик) кандай жайланышат?
14. Тегиздикке жүргүзүлгөн перпендикулярды жана жантыкты аныктап бергиле. Кайсынысы узун? Эмне үчүн?
15. Кайчылаш эки түз сызыктын арасындагы аралык эмнеге барабар?
16. Үч перпендикуляр жөнүндөгү теореманы айтып бергиле.
17. Түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурч кандай аныкталат?
18. Эки тегиздиктин перпендикулярдуулугунун аныктамасын айтып бергиле.
19. Перпендикулярдуу түз сызык жана тегиздик аркылуу мүнөздөлүүчү эки тегиздиктин перпендикулярдуулук шартын айтып бергиле.
20. Түз сызык аркылуу берилген тегиздикке перпендикуляр болгон канча тегиздик жүргүзүүгө болот?
21. Бири-бирине перпендикулярдуу болушкан үч тегиздиктин кесилишиндеги түз сызыктар кандай жайланышат?
22. Чекиттен тегиздикке чейинки аралык кандай аныкталат? Параллель түз сызык менен тегиздиктин арасындагы аралык эмнеге барабар?
23. Параллель эки тегиздиктин арасындагы аралыкты кантип аныкташат?

I ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО МАСЕЛЕЛЕР

1. Бир тегиздикте жатпаган төрт чекит берилген. Алардын каалаган үч чекити бир түз сызыкта жатпай тургандыгын далилдегиле.
2. Түз сызык жана андан тышкары жаткан чекит берилген. Берилген чекит аркылуу өтүп, берилген түз сызыкты кесип өтүүчү бардык түз сызыктар бир тегиздикте жатаарын далилдегиле.
3. *ABCD* параллелограммынын *D* чокусу аркылуу тегиздик жүргүзүлгөн. *A*, *B*, *C* чокулары аркылуу өтүүчү түз сызыктар

ал тегиздикти тиешелүү түрдө A_1, B_1, C_1 чекиттеринде кесип өтөт. $AA_1 = 21$ *см*, $CC_1 = 15$ *см* болсо, BB_1 аралыгын тапкыла.

4. Эгерде бир чекит аркылуу өтүүчү a, b, c түз сызыктарынын α түз сызыгы жана b жана c түз сызыктарынын ар бири менен бирдей бурчту түзсө, анда α түз сызыгынын b жана c түз сызыктары аркылуу аныкталуучу тегиздикке түшүрүлгөн проекциясы ал эки түз сызыктын арасындагы бурчтун биссектрисасы болуп эсептелээрин далилдегиле.

5. Эгерде тегиздик жана түз сызык бир эле түз сызыкка перпендикулярдуу болушса, анда алар параллель болушат. Далилдегиле.

6. Берилген чекит аркылуу берилген эки түз сызыкка параллель болгон тегиздик жүргүзгүлө.

7. Эгерде үч (эки) чекит бир түз сызыкта жатса, алар аркылуу тегиздик жүргүзүүгө болобу? Канча тегиздик жүргүзүүгө мүмкүн?

8. Тегиздикте $AB = 12$ *см* кесиндиси берилген. Анын учтарынан 9 *см* жана 4 *см* узундуктагы эки перпендикуляр тургузулган. Ал перпендикулярлардын учтарынын арасындагы аралыкты тапкыла.

9. Арасындагы аралыгы 2 *м* ге барабар болгон параллель эки тегиздик түз сызык менен кесилген. Түз сызык тегиздиктер менен $60°$ бурч түзсө, анда анын тегиздиктердин арасындагы кесиндинин узундугун тапкыла.

10. Эгерде тегиздик трапецияны орто сызыгы аркылуу кесип өтсө, анда ал тегиздик трапециянын негиздерине параллель болот. Далилдегиле.

11. Параллель эки тегиздик жана чекит берилген. Берилген чекит аркылуу өтүп, берилген эки тегиздикке параллель болгон бир гана тегиздик жүргүзүүгө болот. Далилдегиле.

12. a жана b кайчылаш түз сызыктар. l жана m түз сызыктары ал экөөнү тең кесип өтөт. Кандай шартта l жана m түз сызыктары: а) параллель; б) кесилишүүчү; в) кайчылаш болушат?

13. l жана m түз сызыктары кайчылаш, l жана n түз сызыктары да кайчылаш түз сызыктар. Кандай шартта m жана n түз сызыктары: а) параллель; б) кесилишүүчү; в) кайчылаш болушат?

II глава МЕЙКИНДИКТЕГИ ФИГУРАЛАРДЫ ӨЗГӨРТҮҮ

§ 10ᵃ. МЕЙКИНДИКТЕГИ ТИК БУРЧТУУ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСЫНЫН ЖАНА ВЕКТОРЛОРДУН КОЛДОНУЛУШУ

а) Координаталарды колдонуу. Мейкиндиктеги тик бурчтуу координаталар системасы силерге 9-класстын геометрия курсунан белгилүү. Координаталар башталышы О, координаталар октору x, y, z болгон тик бурчтуу координаталар системасы кыскача Oxyz аркылуу белгиленген. Бул системада x, y, z сандары берилсе, алар аркылуу кандайдыр бир M чекитин аныктаса болот, ал эми M чекити берилсе, анда ага туура келүүчү x, y, z үч санын табууга болот. Ал сандар M чекитинин координаталары деп аталат да, M (x, y, z) аркылуу белгиленген (чиймесин өз алдыңарча сызгыла).

Oxyz системасында $A(x_1; y_1 z_1)$ жана $B(x_2; y_2; z_2)$ чекиттеринин аралыгы же AB кесиндисинин узундугу

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \textbf{(1)}$$

формуласы менен, ал эми AB кесиндисинин ортосунда жаткан C(x0; y0; z0) чекитинин координаталары:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}; z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad \textbf{(2)}$$

формулалары аркылуу аныкталарын эсиңерге салабыз.

Координаталар методу математикада кеңири колдонулат. Мисалы, мейкиндиктеги айрым геометриялык фигуралардын абалын теңдемелер аркылуу туюнтуу менен тиешелүү изилдөөлөрдү жүргүзүүгө мүмкүнчүлүк алабыз, бул метод айрым геометриялык маселелерди чыгарууну жеңилдетет.

1-маселе. Мейкиндикте үч бурчтуктун чокуларын: $A(3; -2; -1)$, $B(3; 1; 5)$, $C(4; 0; 3;)$ берилген. Анын периметрин жана AA_1, BB_1 медианаларынын узундуктарын эсептегиле.

Көрсөтмө. (1) жана (2) формулаларды пайдалангыла.

Жообу: $14 + \sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{62}}{2}$; $\sqrt{57}$; 2.

2-маселе. *Oxyz* системасында борбору $C(a;\ b;\ c)$ чекитинде жаткан, радиусу R ге барабар болгон сферанын теңдемесин түзгүлө.

Чыгарылышы. Сферанын каалагандай чекити $M(x;\ y;\ z)$ болсун. Анда анын радиусу $CM = R$ болот. (1) формуланы колдонсок,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \qquad (3)$$

келип чыгат. Бул теңдеме берилген сферанын теңдемеси болот, анткени сферада жаткан каалагандай М чекити үчүн (3) аткарылат.

3-маселе. Мейкиндиктеги координаталар башталышынан жана $A(2;-3;5)$ чекитинен бирдей алыстыкта жатышкан чекиттердин геометриялык ордунун теңдемесин түзгүлө.

Бул маселени мындан мурунку 2-маселеге окшоштуруп өз алдыңарча чыгаргыла. *Жообу*: $2x - 3y + 5z - 19 = 0$

б) Векторлорду колдонуу. Векторлор тегиздикте кандай аныкталса, мейкиндикте да ошондой эле аныкталат. *Oxyz* координаталар системасында векторду координаталары аркылуу (тегиздиктегиге окшоштуруп) $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ түрүндө жазабыз. Эгерде мейкиндикте $A(x_1;y_1;z_1)$ жана $B(x_2;y_2;z_2)$ чекиттери берилсе, анда $\vec{AB}$ векторунун координаталары $\vec{AB} = (x_2-x_1;y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ болот.

Векторлор физикада да, математикада да, өтө кеңири колдонулат. Физикада күч, ылдамдык, ылдамдануу вектордук чоңдук катары туюнтулары белгилүү. Аларга байланыштуу маселелер вектордук алгебранын теориялары аркылуу чыгарылат. Мисалы, $\vec{F}$ турактуу күчүнүн таасири астында телону $|\vec{S}|$ аралыкка $\vec{S}$ багытына жылдырууда аткарылган жумуш $A = |\vec{F}||\vec{S}| \cdot cos\varphi$ (4) формуласы боюнча эсептелээри белгилүү, мында $\varphi = (\vec{F},\hat{}\ \vec{S})$. (4) формуланын оң жагы эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүн аныктаары түшүнүктүү.

Геометриялык айрым теоремаларды далилдөөдө, маселелерди чыгарууда векторлорду колдонуу оңтойлуу болот.

4-маселе. Жылдыруу багытына 45° бурч менен таасир эткен 16 H күч аркылуу тело 4 $м$ аралыкка жылат. Бул күч аркылуу аткарылган жумушту тапкыла.

Чыгаруу. Таасир этүүчү күчтү $\vec{F}$, телонун жылуу багытын $\vec{S}$ аркылуу белгилейли.

Анда $|\vec{F}| = 16н$, $|\vec{S}| = 4м$, $\varphi = \left(\vec{F}, \wedge \vec{S}\right) = 45°$ боло тургандыктан, аткарылган жумушту эсептөө үчүн (4) формуланы пайдаланып $A = 16H \cdot 4\,м \cdot \cos 45° \approx 49$ дж экендигине ээ болобуз.

5-маселе. Эгерде мейкиндиктеги l түз сызыгы ABC үч бурчтугунун AB жана AC жактарына перпендикулярдуу болсо, анда ал түз сызык BC жагына да перпендикулярдуу болоорун далилдегиле.

Д а л и л д ө ө : l түз сызыгынан $\vec{AD} = \vec{a}$ векторун белгилейли. $\vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$ болору түшүнүктүү. Шарт боюнча $\vec{a} \perp \vec{BA}$, $\vec{a} \perp \vec{AC}$ болот. $\vec{a} \times \vec{BC} = \vec{a}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \vec{a} \times \vec{BA} + \vec{a} \cdot \vec{AC} = 0$ мындан $\vec{a} \perp \vec{BC}$ же $l \perp BC$ болот. Маселе далилденди.

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. $ABCD$ параллелограммынын $A(1; -3; 0)$, $B(-2; -4; 1)$, $C(-3; 1; 1)$, $D(0; 2; 0)$ чокулары белгилүү, анын диагоналдарынын узундуктарын эсептегиле.

Жообу: $\sqrt{33}$; $\sqrt{41}$.

2. Борбору координаталар башталышында жаткан, радиусу R ге барабар болгон сферанын теңдемесин түзгүлө.

Жообу: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

3. $\vec{a} = (1; -2; 2)$ жана $\vec{b} = (-4; 3; 0)$ векторлорунун арасындагы бурчтун косинусун эсептегиле.

Жообу: $\cos\varphi = -\frac{2}{3}$.

4. Векторлорду колдонуп, косинустар теоремасын далилдегиле.

5. Үч өлчөмү a, b, c болгон тик бурчтуу параллелепипеддин диагоналын тапкыла (векторлорду пайдалангыла).

Жообу: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

6. Векторлорду колдонуп, үч бурчтуктун орто сызыгы жөнүндөгү теореманы далилдегиле.

§ 11. ОКШОШ ӨЗГӨРТҮҮЛӨР. ФИГУРАЛАРДЫН ОКШОШТУГУ

Мейкиндикте борбордук, октук симметриялар, параллель которуу жана окшош өзгөртүү жана анын жөнөкөй түрү болгон гомотетия тегиздикте кандай аныкталса, мейкиндикте да ошондой эле аныкталат. Мында берилген фигуралар мейкиндикте каралат.

Мейкиндикте F фигурасы жана $k > 0$ болгон окшоштук коэффициенти берилсин. F фигурасынын ар бир M чекитин k коэффициенти боюнча өзгөртсөк, мейкиндикте M' чекиттеринин көптүгү F' фигурасын аныктайт. Мында F жана F' фигуралары окшош деп аталат да, $F \sim F'$ деп жазылат. Демек, F фигурасын F' фигурасына окшош өзгөрткөндө F фигурасынын каалагандай A жана B чекиттери F' фигурасынын туура келүүчү A' жана B' чекиттерине өзгөртүлөт да, $A'B' : AB = k$ болот (k – окшоштук коэффициенти). Мейкиндикте окшош фигураларга мисалдар катары эки сфераны, эки кубду ж.б. алууга болот.

Мейкиндикте окшош өзгөртүүнүн касиеттери тегиздиктегиге окшош баяндалат. Ошондуктан окшош өзгөртүүнүн же гомотетиянын касиеттери мейкиндиктеги фигуралар үчүн да өзгөрүүсүз сакталат. Демек, мейкиндикте үч бурчтукка окшош болгон фигура үч бурчтук болот, үч бурчтуктардын окшоштугунун белгилери өзгөрүүсүз кабыл алынат. Ошондой эле, окшош фигуралардын туура келүүчү жалпак беттеринин аянттарынын катышы алардын туура келүүчү сызыктуу элементтеринин катыштарынын квадратына, башкача айтканда окшоштук коэффициенттеринин квадратына барабар болот.

Тегиздиктеги окшош өзгөртүүдөй эле, мейкиндиктеги окшош өзгөртүүдө түз сызык түз сызыкка, тегиздик тегиздикке өзгөртүлөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Мейкиндиктеги окшош фигураларга мисалдар келтиргиле.
2. Мейкиндиктеги O – гомотетия борбору, k – гомотетия коэффициенти жана A чекити берилген: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{2}{3}$, болсо, А га гомотетиялуу A' чекитин түзгүлө.
3. Мейкиндикте O борбору жана гомотетиянын к коэффициенти берилген. AB кесиндисин гомотетиялуу чагылдырганда $A'B' = \mathrm{k} \cdot AB$ жана $A'B' \parallel AB$ кесиндиси пайда болоорун далилдегиле.

   Көрсөтмө. $\Delta AOB \sim \Delta A'OB'$ боло тургандыгынан пайдалангыла.
4. Гомотетияда түз сызык өзүнө параллель түз сызыкка өзгөртүлөт. Далилдегиле.

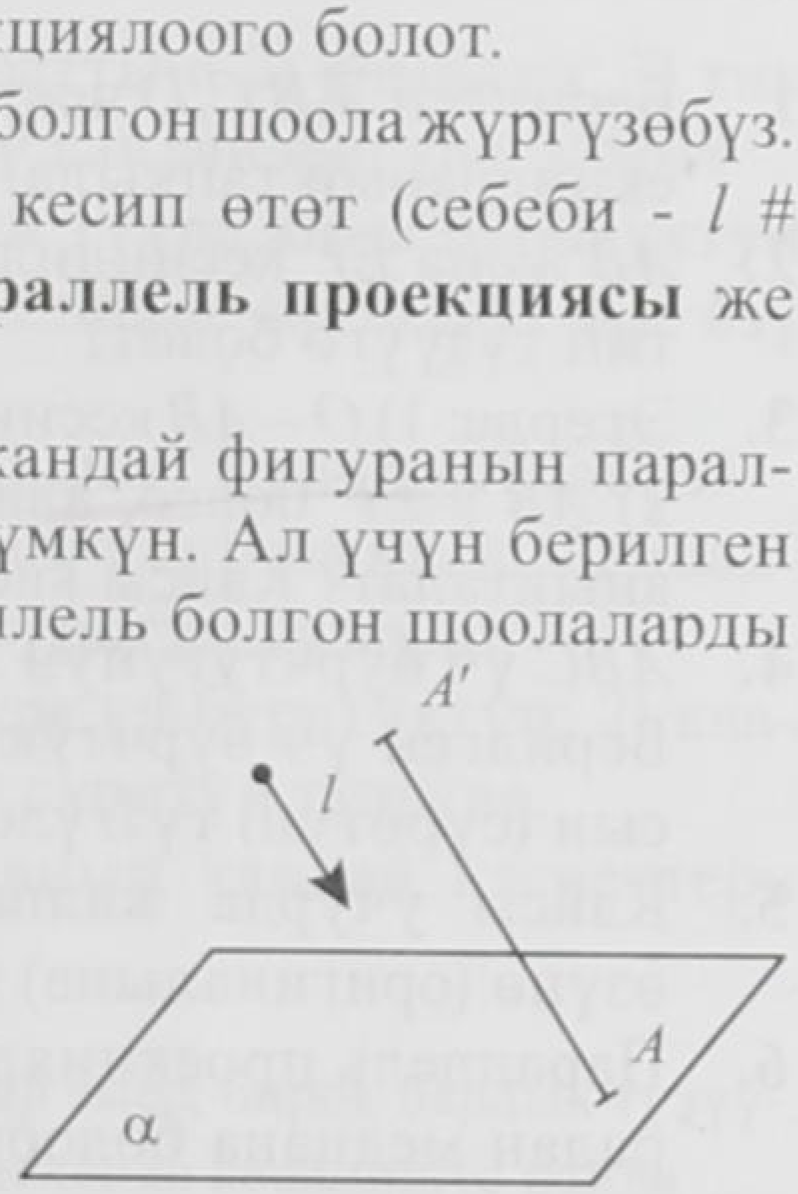
   Бул касиеттин тууралыгы гомотетиянын аныктамасынан жана 3-маселеден келип чыгат.

§ 12. ПАРАЛЛЕЛЬ ПРОЕКЦИЯ

α тегиздиги жана ага параллель болбогон l багыты берилсин (29[а]-сүрөт). Каалагандай фигураны l багыты боюнча α тегиздигине проекциялоодо l ди проекция багыты деп, α ны проекция тегиздиги деп кароого болот. Бул учурда мейкиндиктеги ар кандай A' чекитин α тегиздигине проекциялоого болот.

Ал үчүн A' чекитинен lге параллель болгон шоола жүргүзөбүз. Ал шоола α тегиздигин А чекитинде кесип өтөт (себеби - l # α). Мында A чекити A' чекитинин **параллель проекциясы** же **сүрөтү** деп аталат.

Бул жол менен мейкиндиктеги ар кандай фигуранын параллель проекциясын (сүрөтүн) табууга мүмкүн. Ал үчүн берилген фигуранын ар бир чекитинен l ге параллель болгон шоолаларды жүргүзүп, алардын проекция тегиздиги менен кесилишкен чекиттерин табуу керек. Ал табылган чекиттердин чогуусу (көптүгү) берилген фигуранын сүрөтүн аныктайт.



29[а]-сүрөт

Параллель проекциялоо аркылуу фигуранын тегиздиктеги сүрөтүн табууда берилген фигуранын мүнөздүү чекиттеринин гана проекцияларын табуу менен чектелебиз.

Параллель проекциялоо жолу менен фигуранын сүрөтүн түзүү оңой болуп эсептелет. Ошондуктан параллель проекциялоо стереометрияда мейкиндиктик фигуралардын сүрөтүн түзүү үчүн кеңири кодонулат.

Параллель проекциялоонун төмөндөгүдөй касиеттери бар.

1. Проекция багытына параллель болбогон түз сызыктын параллель проекциясы түз сызык болот.
   Чындыгында эле, берилген түз сызыктын чекиттери аркылуу l ге параллель болгон түз сызыктар бир тегиздикте жатат, ал тегиздиктин α тегиздиги менен кесилиши параллель проекциясы болот.
2. Параллель проекциялоодо түз сызыктагы кесиндилердин катышы өзгөрбөйт.
3. Параллель түз сызыктардын проекциясы параллель түз сызыктар болот.
4. $l \perp \alpha$ болсо, ортогоналдык проекцияга ээ болобуз.
5. Маселелерди чыгарууда проекция багыты жана проекция тегиздиги берилген деп каралат. Проекция багытын проекциялануучу жалпак фигуранын тегиздигине параллель эмес деп алабыз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Берилген A,B,C,D чекиттеринин тегиздиктеги параллель проекцияларын тапкыла.
2. AB жана EF кесиндилеринин параллель проекцияларын кантип түзүүгө болот?
3. Эгерде: 1) $O - AB$ кесиндисинин, $O_1 - EF$ кесиндисинин ортосу; 2) $AB \parallel EF$ болсо, алардын параллель проекциялары кантип аныкталат? Кайсы касиеттер сакталат?
4. ABC үч бурчтугунун BC жагы проекция тегиздигинде жатат. Берилген үч бурчтуктун тегиздиктеги параллель проекциясын (сүрөтүн) түзгүлө.
5. Кайсы учурда жалпак фигуранын параллель проекциясы өзүнө (оригиналына) барабар болуп калат?
6. Параллель проекциялоодо үч бурчтуктун: 1) медианасы кайрадан медиана болоорун; 2) медианалардын кесилишкен че-

кити медианалардын кесилишине параллель проекцияланаарын далилдегиле.

7. Түз сызыктын (проекция багытына параллель болбогон) параллель проекциясы түз сызык болоорун далилдегиле.
8. Мейкиндиктеги фигуранын параллель проекциясын кантип түзөбүз? Кандай негизги касиеттер сакталат?

§ 13. ФИГУРАЛАРДЫН СҮРӨТТӨЛҮШТӨРҮН ТҮЗҮҮ

Фигура тегиздикте болсо да, мейкиндикте болсо да анын сүрөтүн тегиздикке түшүрүүдө параллель проекциялоодон пайдаланабыз. Ошондуктан фигуранын сүрөтүн түзүү параллель проекциялоонун касиеттерине толук баш ийиши керек. Мисалы, параллелограммдын сүрөтү параллелограмм болот, анткени анын карама-каршы жактарынын параллелдиги сакталыш керек. Айлананын параллель проекциясы (эллипс[1]) болот.

Фигуранын сүрөтү туура, ачык, даана болуш керек. Мындай тартылган сүрөт мейкиндиктин фигура жөнүндөгү туура элести берет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Параллель проекциялоодо параллелограмм кандай фигурага өзгөрөт?
2. Параллель проекциялоодо: 1) квадраттын; 2) ромбдун; 3) тик бурчтуктун; 4) трапециянын сүрөтү кандай фигура болот?
3. Параллель проекциялоо жолу менен туура алты бурчтуктун сүрөтүн түзүүдө анын кайсы касиеттери сакталат? Ал өзү кандай фигурага өзгөрөт?
4. Айлананын сүрөтү кандай фигура болот? Кантип түзөбүз?
5. Айланага ичтен сызылган: 1) туура үч бурчтуктун; 2) квадраттын; 3) туура алты бурчтуктун сүрөтүн түзгүлө.
6. Айланага сырттан сызылган: 1) туура үч бурчтуктун; 2) квадраттын; 3) туура алты бурчтуктун сүрөтүн түзгүлө.
7. Кубдун сүрөтүн түзгүлө. Мында анын кандай касиеттери сакталат?

---

[1] Цилиндрлик бетти огуна перпендикуляр эмес, бирок бардык түзүүчүлөрүн кесип өтүүчү тегиздик менен кескенде кесилиште пайда болгон туюк ийри сызык.

8. Сферанын сүрөтүн түзгүлө. Анын мүнөздүү элементтерин сүрөттөп көрсөткүлө.

Эскертүү. Мейкиндиктеги айрым фигуралардын сүрөттөрүн түзүүгө кийинки параграфтарда токтолобуз.

II ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Окшош фигураларды аныктагыла.
2. Гомотетиялуу өзгөртүүдө гомотетия борбору аркылуу өтпөгөн тегиздик кандай фигурага өзгөртүлөт?
3. Параллель проекцияны аныктагыла.
4. Параллель проекциялоонун негизги касиеттерин баяндагыла.
5. Мейкиндиктеги үч бурчтуктун, параллелограммдын параллель проекциялоодогу сүрөттөрү кандай фигуралар болушат?

II ГЛАВАГА КАРАТА МАСЕЛЕЛЕР

1. Гомотетия борбору O жана $k = 2$ коэффициенти берилген. а) ABC бурчуна; б) $SABC$ тетраэдрине гомотетиялуу фигураларды түзгүлө.
2. Гомотетиялуу өзгөртүүдө гомотетия борбору аркылуу өтпөгөн түз сызык (тегиздик) параллель түз сызыкка (тегиздикке) өзгөртүүлөрүн далилдегиле.
3. Туура алты бурчтуктун сүрөтүн түзгүлө.
4. Айлананын берилген диаметрине перпендикулярдуу болгон диаметрдин сүрөтүн түзгүлө.
5. Айланага ичтен сызылган туура үч бурчтуктун (квадраттын) сүрөтүн түзгүлө.
6. Айланага 1) ичтен сызылган тик бурчтуу үч бурчтуктун (тик бурчтуктун); 2) сырттан сызылган квадраттын сүрөтүн сызгыла.

III глава КӨП ГРАНДЫКТАР, АЛАРДЫН БЕТТЕРИНИН АЯНТТАРЫ

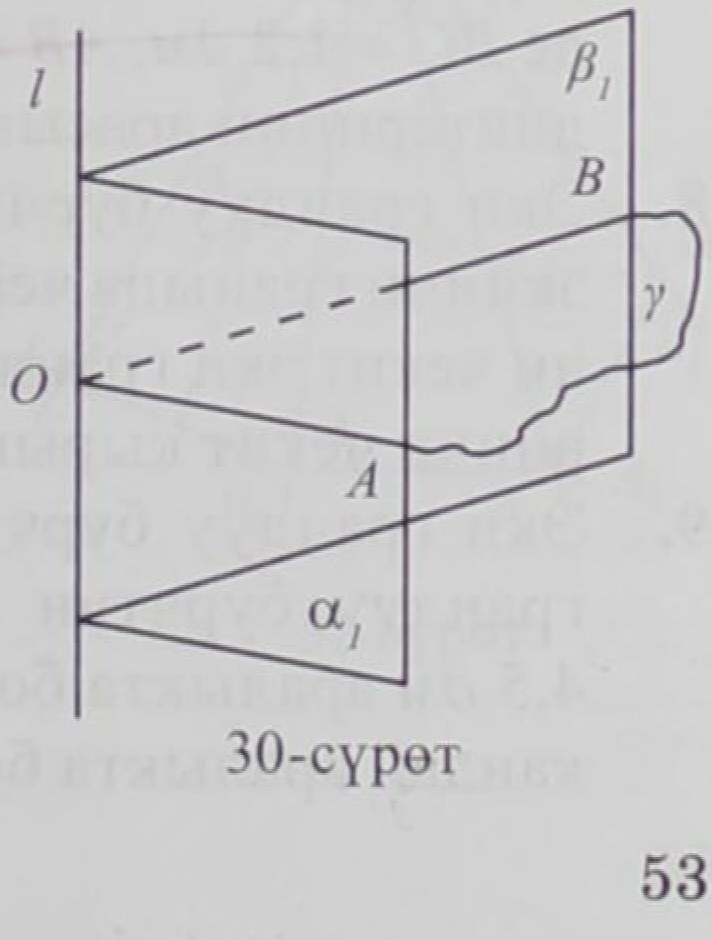
§ 14. ЭКИ ГРАНДУУ БУРЧ

Тегиздикте жаткан түз сызык ал тегиздикти жарым эки тегиздикке бөлө тургандыгы белгилүү. Ал түз сызык жарым тегиздиктердин чегиндеги же жөн эле **чектеги** түз сызык деп аталат. Мисалы, α тегиздигинде жаткан l түз сызыгы α_1 жана α_2 жарым тегиздиктеринин чектеги түз сызыгы болот.

Чектөөчү жалпы түз сызыкка ээ болгон жарым эки тегиздик аркылуу түзүлгөн фигура эки грандуу бурч деп аталат.

Чектеги жалпы l түз сызыгына ээ болгон a_1 жана β_1 жарым тегиздиктери аркылуу түзүлгөн (30-сүрөт) эки грандуу бурчту $\angle A_1 l\beta_1$ аркылуу белгилейбиз. Аны кээде кыскача, жөн эле $\angle l$ түрүндө белгилейбиз. Эки грандуу бурчтун чектеги жалпы түз сызыгы (l) кыры, ал эми жарым тегиздиктери (α_1,β_1) анын грандары деп аталат.

Эгерде эки грандуу бурчту кырына перпендикуляр болгон тегиздик менен кессек, анда кесилиштеги пайда болгон бурч эки грандуу бурчтун сызыктуу бурчу деп аталат. l түз сызыгынын O чекити аркылуу ага перпендикулярдуу болгон γ тегиздигин жүргүзсөк (30-сүрөт), анда ал a_1 жана β_1, жарым тегиздиктерин тиешелүү түрдө OA жана OB шоолаларында кесип өтөт. $OA \perp l$, $OB \perp l$ болоору белгилүү. Алынган AOB бурчу $\angle\alpha_1$, $l\beta_1$ эки грандуу бурчунун сызыктуу бурчу болот.



30-сүрөт

Эки грандуу бурчтун чоңдугун анын сызыктуу бурчунун чоңдугу аркылуу туюнтууга болот. Эгерде $\angle AOB = 50°$ болсо, анда ага туура келүүчү эки грандуу бурч да $\angle a_1 l\beta_1 = 50°$ болот деп жаза алабыз. Бул түшүнүк эки грандуу бурчтарды салыштырууга мүмкүнчүлүк берет.

Эгерде эки грандуу бурчтардын сызыктуу бурчтары барабар болсо, анда ал эки грандуу бурчтар барабар болушат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Эки грандуу бурч сызып, аны белгилегиле. Сызыктуу бурчту түзүп, көрсөткүлө, белгилеп жазгыла.

2. Эки грандуу бурчка мисалдар келтиргиле (класстан, бөлмөдөн ж.б.)

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубу берилген. AB кыры боюнча: 1) Кандай эки грандуу бурч түзүлгөн, аны белгилеп көрсөткүлө. 2) Анын чоңдугу кандай? 3) Эки грандуу бурчтардын сызыктуу бурчтарын жазгыла; 4) Сызыктуу бурчтун чоңдугу канчага барабар?

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубунун AB кыры жана D менен D_1 чокулары аркылуу өткөн $ABCD(\alpha)$ $A_1B_1C_1D_1(\beta)$ жарым тегиздиктеринен түзүлгөн эки грандуу бурчту сүрөттө белгилеп көрсөткүлө. Анын сызыктуу бурчун тапкыла.

5. Чоңдугу 45° болгон эки грандуу бурчтун бир гранында жаткан чекит, анын кырынан h аралыкта жатат. Ал чекиттен экинчи granына чейинки аралыкты тапкыла.

6. Эгерде эки грандуу бурчтун бир гранында жаткан чекиттен кырына чейинки аралык, ал чекиттен экинчи гранынын тегиздигине чейинки аралыктан 3 эсе чоң болсо, анда эки грандуу бурчтун чоңдугун аныктагыла.

7. ABC тең капталдуу үч бурчтугунун BC негизи аркылуу жүргүзүлгөн α тегиздиги A чокусунан 0,4 *дм* аралыкта. Эгерде $BC = 1{,}2$ *дм*, $AB = AC = 1$ *дм* болсо, анда α жана ABC тегиздиктеринин арасындагы бурчту эсептегиле.

8. Эки грандуу бурчтун бир гранынан алынган эки чекиттен экинчи гранына чейинки аралыктар 0,5 *дм* жана 0,8 *дм*. Экинчи чекит эки грандуу бурчтун кырынан 1,8 *дм* аралыкта. Биринчи чекит кырынан кандай аралыкта болот?

9. Эки грандуу бурчтун сызыктуу бурчу 30° ка барабар. Эки грандуу бурчтун бир гранында жатып, экинчи гранынан 4,5 *дм* аралыкта болгон чекит эки грандуу бурчтун кырынан кандай аралыкта болот?

10. Эки грандуу бурчтун сызыктуу бурчу 60°. A жана B чекиттери ар түрдүү грандарда жатат. A чекитинин экинчи гранга түшүрүлгөн A_1 проекциясы эки грандуу бурчтун кырынан a аралыкта, ал эми Bнын биринчи гранга түшүрүлгөн B_1 проекциясы бурчтун кырынан b аралыкта. AB кесиндисинин бурчтун кырына түшүрүлгөн проекциясы 2d болсо, AB нын узундугун тапкыла.

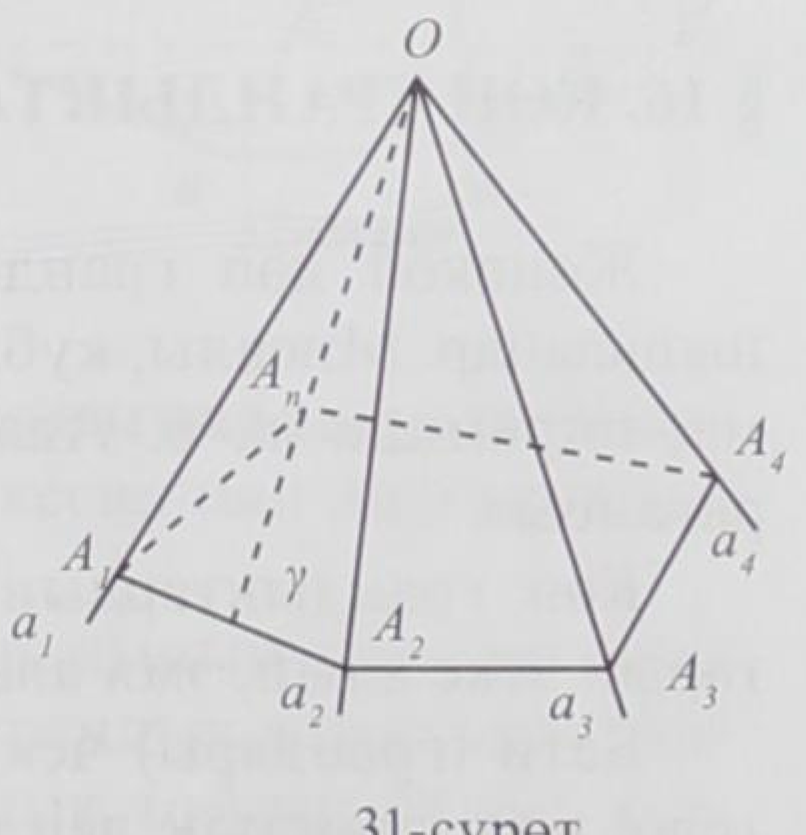
11. $AB = 1{,}5$ *дм* кесиндисинин учтары тик эки грандуу бурчтун ар түрдүү грандарында жатып, анын кырынан $AA_1 = 1$ *дм* жана $BB_1 = 1{,}1$ *дм* аралыкта жайланышкан. AB кесиндисинин эки грандуу бурчтун кырындагы проекциясын (б.а. A_1B_1 кесиндисинин узундугун) тапкыла.

§ 15. КӨП ГРАНДУУ БУРЧТАР ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

О чекитинен чыгуучу $a_1\, a_2\, a_n$ шоолалары берилсин (31-сүрөт). Алардын удаалаш ар бир үч шоолаларынын чогуусу бир тегиздикте жатпасын. Анда берилген шоолалардын ар бир түгөйү $\angle(a_1,\ a_2)$; $\angle(a_2,\ a_3)$; ...; $\angle(a_n,\ a_1)$ жалпак бурчтарын аныктайт. Бул жалпак бурчтардан түзүлгөн фигура көп грандуу бурч деп аталат.

Бул көп грандуу бурчту $Oa_1\, a_2 ...\, a_n$ аркылуу белгилейбиз. O чекити көп грандуу бурчтун **чокусу** (белгилөөдө биринчи орунга жазылат), $a_1\ a_2$, ..., a_n шоолалары **кырлары**, ал эми $\angle(a_1,\ a_2)$; $\angle(a_2,\ a_3)$; ...; $\angle(a_n,\ a_1)$ жалпак бурчтары анын **грандары** деп аталат.

Эгерде көп грандуу бурч анын ар бир граны аркылуу тегиздик жүргүзгөндө дайыма ал тегиздиктин бир жагында жатса, анда ал **томпок көп грандуу бурч** деп аталат (31-сүрөт), аны γ тегиздиги менен кессек, кесилиште $A_1\ A_2$, ..., A_n томпок көп бурчтугу алынат. Ал шарт аткарылбаса ал томпок эмес болот.



31-сүрөт

$Oa_1\ a_2 ...\ a_n$ көп грандуу бурчунун n кыры, n граны, n жалпак бурчу жана n эки грандуу бурчу болот. Мында $n \geq 3$ болгон натуралдык сан. Демек, көп грандуу бурч грандарынын (же кырларынын) санына карата мүнөздөлөт. Анда $Oa_1 a_2 ... a_n$ көп грандуу бурчун n грандуу бурч деп да атоого болот.

Эгерде көп грандуу бурчтун бардык жалпак бурчтары барабар жана бардык эки грандуу бурчтары барабар болсо, анда ал **туура көп грандуу бурч** деп аталат.

Көп грандуу бурчтун ар бир жалпак бурчу анын калган жалпак бурчтарынын суммасынан кичине, ал эми бардык жалпак бурчтарынын суммасы 360° тан кичине болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Жалпак бурчтары: 1) 80°, 130°, 70°, 100°; 2) 10°, 20°, 40°, 80°, 160°; 3) 30°, 20°, 50°, 80°, 160° болгон көп грандуу бурч болобу?

2. Эгерде көп грандуу бурчтун ар бир жалпак бурчу: 1) 45°; 2) 60° болсо, анда анын канча граны болушу мүмкүн?

3. Жалпак бурчтары 70°, 15°, 20°, 25° болгон төрт грандуу бурч эмне үчүн болбойт? Кагаздан модель жасап, кесип алып текшерип көргүлө.

4. Тегиздик көп грандуу бурчтун бардык кырларын барабар кесиндилерде кесип өтөт. Бул кесилишке сырттан айлана сызууга болобу?

5. $SABCD$ төрт грандуу бурчунун бардык жалпак бурчтарынын ар бири 60°, ошондой эле $\angle ASC = 60°$. SB кырындагы эки грандуу бурчту тапкыла.

6. Ар бир жалпак бурчу: 1) 36°; 2) 72° болсо, грандарынын саны эң көп болгон канча көп грандуу бурч болушу мүмкүн?

§ 16. КӨП ГРАНДЫКТАР ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Жөнөкөй көп грандыктар менен силер мурдатан эле таанышсыңар. Мисалы, куб, тик бурчтуу параллелепипед, тик призма, пирамида ж. б. Аларды геометриялык телолор катары караганбыз.

Көп грандыктардын турмушта жана илимде колдонулуштарын эске алып, эми аларга терең токтолууга аракет кылабыз.

Бети (грандары) чектүү сандагы көп бурчтуктардан турган тело[1] **көп грандык** деп аталат. Демек, көп грандык мейкиндик-

---

[1] Грек сөзү, «туюк фигура» деген маанини түшүндүрөт.

те чектелген туюк фигура катары каралат. Алар бардык жагынан көп бурчтуктар менен чектелген (мисалы, кубду эске түшүрүп көргүлө). Ал көп бурчтуктар **грандары** деп аталат.

Грандардын жактары көп грандыктын кырлары, ал эми грандардын чокулары көп грандыктын чокулары деп аталат.

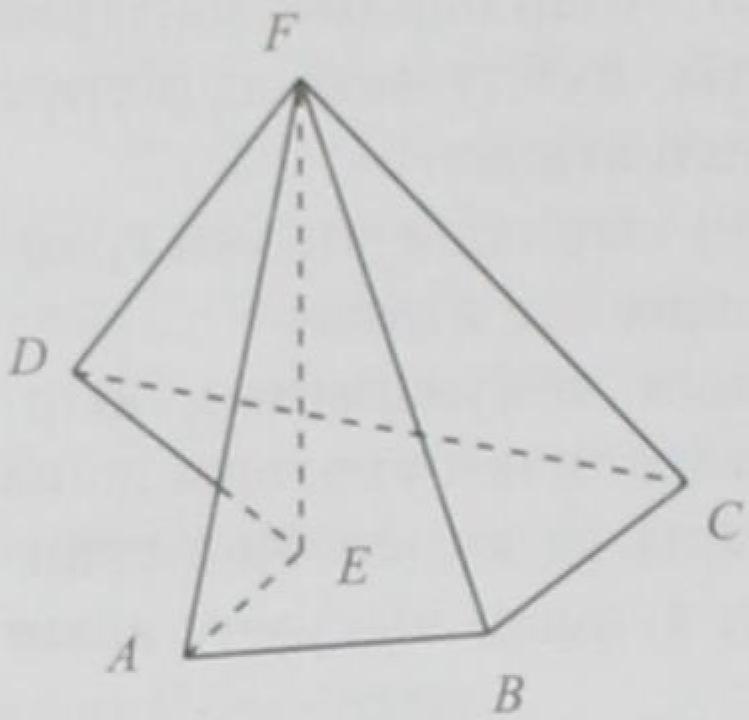
Көп грандыктын элементтерине анын чокуларынан, кырларынан башка дагы анын грандарынын жалпак бурчтары жана анын кырларындагы эки грандуу бурчтары да кирет. Көп грандыктын кырындагы эки грандуу бурч ал кырдан чыгуучу анын грандары аркылуу аныкталат.

Эскертүү. Көп бурчтуктун бурчтары жөнүндө сөз жүргүзгөндө анын ички бурчтары жөнүндө айтаарыбызды жана алардын суммасы 180° тан чоң болушу мүмкүн (б.а. томпок эмес) экендигин билебиз. Көп грандыктын кырларындагы эки грандуу бурчтардын чоңдуктары жөнүндө айтканда, алар көп грандыктын ички бөлүгүнө карата өлчөнөт жана 180° тан чоң болушу мүмкүн деп да айта алабыз. Бул учурда эки грандуу бурчту жарым эки тегиздик катарында эмес, мейкиндиктин бөлүгү катарында түшүнүү оңтойлуу.

Көп грандыкты чокуларындагы тамгалар аркылуу аларды удаалаш жазып белгилейбиз. Мисалы, 32-сүрөттө *ABCDEFKL* көп грандыгы көрсөтүлгөн. Кээде көп грандыкты, оңтойлуу болсун үчүн бир тамга менен да белгилешет. *A*,*B*, чокулары, *AB*,*BC*... кырлары, *ABKL*, *BCK*, ... – грандары болуп эсептелет. Көп грандыктын бир гранында жатпаган эки чокусун туташтыруучу кесинди (мисалы *EK*) анын **диагоналы** деп аталат. Ал эми көп грандыктын бир гранында жатпаган үч чокусу аркылуу өтүүчү тегиздик (мисалы, *ADK*) көп грандыктын **диагоналдык тегиздиги** деп аталат. Анын көп грандык менен кесилиши диагоналдык кесилишти аныктайт.

32-сүрөт

Эгерде көп грандык өзүнүн ар бир гранынын тегиздигинин бир жагында жатса, анда ал **томпок** көп грандык деп аталат. Мисалы, 32-сүрөттө көрсөтүлгөн көп грандык томпок болот, анткени – ал көп грандык өзүнүн ар бир граны аркылуу жүргүзүлгөн тегиздиктин бир жагында жатат. Ал эми 33-сүрөттө көрсөтүлгөн



33-сүрөт

көп грандык томпок эмес болуп эсептелет. Анткени ал, мисалы, DEF граны аркылуу жүргүзүлгөн тегиздиктин ар түрдүү жагында жатат. Биз мындан ары томпок көп грандыктарды гана карайбыз.

Эгер томпок көп грандыкты анын ички чекити аркылуу өтүүчү тегиздик менен кессек, анда кесилиште томпок көп бурчтук пайда болот. Томпок көп грандыктын ар бир чокусунан чыгуучу кырлардын жана грандардын чогуусу көп грандуу бурчту түзөт. Көп грандыктын грандарынын саны төрттөн кем болбой тургандыгы түшүнүктүү.

Каалагандай томпок көп грандык үчүн жалпы бир касиет бар:

$$e + f - k = 2 \quad \textbf{(1)}$$

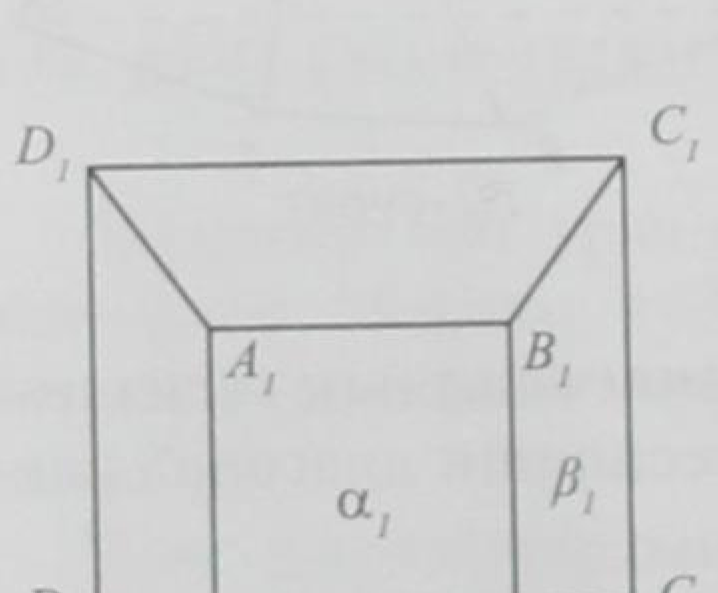
Мында e – анын чокуларынын саны, f – грандарынын саны, k – кырларынын саны. (1) формула Эйлердин теоремасын аныктайт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Турмушта кездешүүчү көп грандыктарга мисалдар келтиргиле.

2. 34-сүрөттө $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көп грандыгы көрсөтүлгөн. Анын чокуларын, кырларын, грандарын көрсөткүлө. Белгилеп жазгыла.

3. 34-сүрөттөгү көп грандыкка карата: 1) ал томпок же томпок эмес көп грандыктын сүрөтүбү? Кантип аныкталат? 2) BB_1 кыры аркылуу аныкталуучу эки грандуу бурчун көрсөткүлө. 3) В чокусу аркылуу канча грандуу бурч аныкталат? 4) AC_1 жана CA_1 диагоналдары аркылуу өтүүчү тегиздиктин кесилишин көрсөткүлө.



34-сүрөт

4. Бардык грандары үч бурчтук болгон көп грандыктын сүрөтүн өз алдынарча сызып көргүлө. Белгилеп жазгыла.

5. Ар кандай томпок көп грандыкка карата Л. Эйлер (1707–1783, Петербургдук математик) төмөндөгүдөй теореманы баяндаган.

«Ар кандай томпок көп грандыкта грандары менен чокуларынын сандарынын суммасы кырларынын санынан 2ге көп болот».

Бул теорема жогоруда томпок көп грандыктын касиети катары берилген. 1) 34-сүрөттөгү көп грандык үчүн, 2) куб үчүн, 3) 4-маселедеги көп грандык үчүн (1) формуланы текшерип көргүлө.

6. 5 граны жана 5 чокусу бар көп грандыкты сызгыла. Анын канча кыры болот?

Көрсөтмө. (1) формуладан пайдалангыла.

7. 5 граны жана 6 чокусу бар көп грандыкты сызгыла. Анын канча кыры болот?

8. Кубдун бир чокудан чыгуучу үч кырынын учтары аркылуу өтүүчү тегиздиктин куб менен кесилишинин аянтын тапкыла. Кубдун кыры a га барабар.

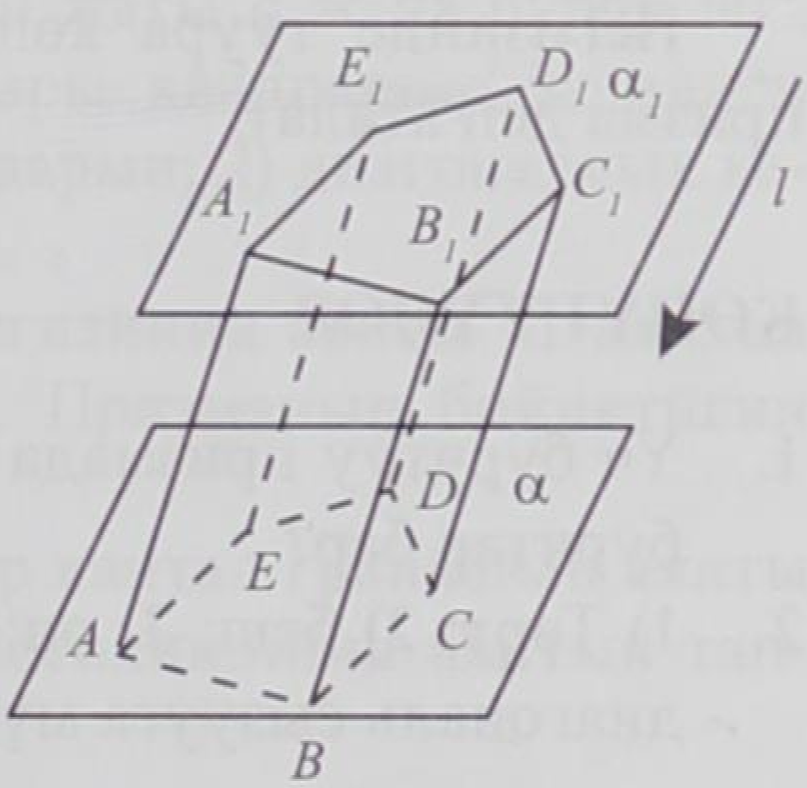
§ 17. ПРИЗМА

Силер тик призма менен таанышсыңар. Эми призманын жалпы түрүн карап көрөлү.

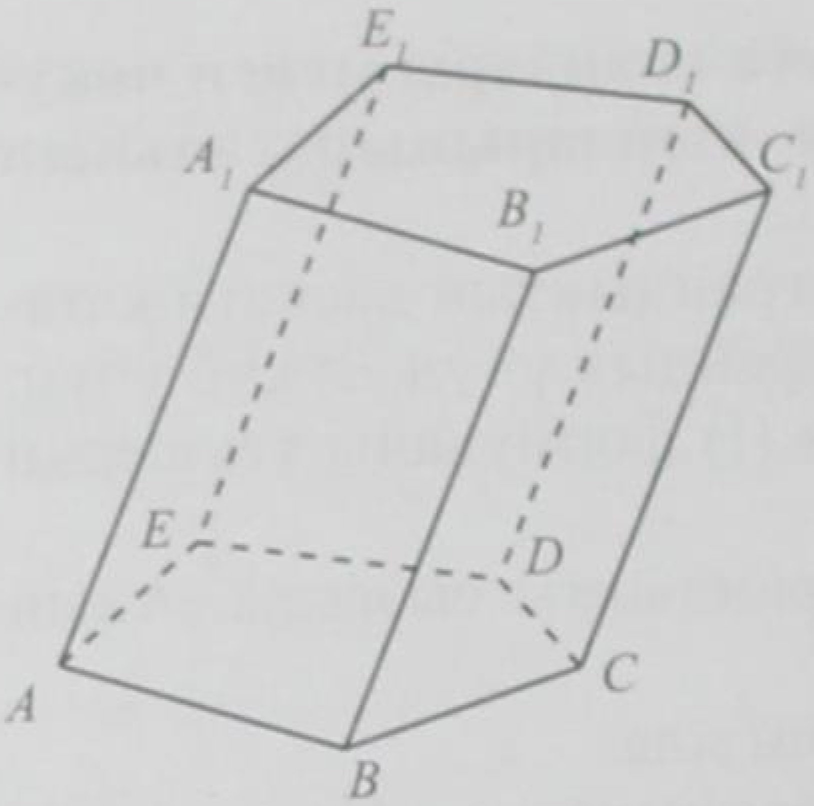
Параллель тегиздиктерде жаткан эки граны барабар көп бурчтуктар, ал эми калган грандары параллелограммдар болгон көп грандык призма деп аталат.

Мындай көп грандыкты табууга мүмкүн экендигин көрсөтөбүз. $\alpha \parallel \alpha_1$ тегиздиктери жана l багыты берилсин (35-сүрөт). α_1 тегиздигинде жаткан $A_1B_1C_1D_1E_1$ көп бурчтугун алып, аны l багыты боюнча α тегиздигине проекциялайбыз (көрүнбөгөн элементтери пунктир сызыгы аркылуу көрсөтүлдү). Натыйжада $ABCDE$ көп бурчтугу пайда болот.

Мында $A_1A \parallel B_1B \parallel ... \parallel E_1E \parallel l$ болоору түшүнүктүү. Көп бурчтуктун удаалаш чокулары аркылуу жүргүзүлгөн параллель түз сызыктардын ар бир эки түгөйү аркылуу тегиздик жүргүзөбүз. Анда ал тегиздиктер жана $ABCDE$ $A_1B_1C_1D_1E_1$ көп бурчтуктары көп грандыкты аныктайт. Ал көп грандык призма болот (аны өзүнчө сызсак, 36-сүрөттөгүдөй көрсөтүлөт). Чындыгында эле, параллель тегиз-



35-сүрөт



36-сүрөт

диктердин арасында жаткан параллель кесиндилер болгондуктан, $AA_1 = ... = EE_1$ болот. Анда ABB_1A_1, ..., $E_1AA_1E_1$ – параллелограммдар болушат. Ошону менен бирге, тиешелүү жактары барабар болгондуктан, $ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1$ болоору түшүнүктүү. Демек, призманын аныктамасына туура келет.

Параллель тегиздиктерде жаткан $ABCDE$ жана $A_1B_1C_1D_1E_1$ көп бурчтуктары призманын негиздери деп аталат. $A,B,...E_1$ – призманын чокулары болот.

Призманын негиздеринен башка грандары (ABB_1A_1, ...) анын каптал грандары деп аталат, ал эми призманын негиздеринде жатпаган кырлары (AA_1, BB_1, ...) анын каптал кырлары болот.

Бир гранында жатпаган эки чокусун туташтыруучу кесинди призманын диагоналы (мисалы, BE_1) деп аталат. BB_1EE_1 – диагоналдык кесилиш болот.

Призманын негиздери аркылуу аныкталган тегиздиктердин (α, α_1) арасындагы аралык призманын бийиктиги деп аталат.

Эгерде призманын негизи n бурчтук болсо, анда ал ***n* бурчтуу призма** деп аталат (36-сүрөттө беш бурчтуу призма көрсөтүлдү). Эгерде призманын каптал кырлары негизине перпендикулярдуу болушса, анда ал **тик призма** деп аталат.

Призманын бул касиети, призманын бардык каптал грандары тик бурчтуктар болуп эсептелет деген менен тең күчтүү. Муну өзүңөр текшерип көргүлө.

Негизинде туура көп бурчтук жаткан **тик призма туура** призма деп аталат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Үч бурчтуу призмада канча эки грандуу, канча көп грандуу бурчтар бар?

2. 1) Төрт; 2) беш; 3) он; 4) n бурчтуу призмада бардыгы канча диагональ сызууга мүмкүн?

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ туура төрт бурчтуу призмасы берилген: 1) Аны AB жана D_1C_1 кырлары аркылуу өтүүчү тегиздик менен кесүүгө болобу?
2) Кесилиште кандай фигура болот?

4. $ABCA_1B_1C_1$ үч бурчтуу призмасында B_2 чекити A_1B_1 кырынын ортосунда жатат. 1) C, B, B_1 чекиттери аркылуу өткөн тегиздик менен призманын кесилишинде кандай фигура пайда болот? 2) $CB = a$ болсо, C_2B_2 кесиндисин тапкыла ($C_2 - A_1C_1$ кесиндисинин ортосу).

5. Туура төрт бурчтуу призманын негизинин жагы 0,6 *дм*, диагоналы 1 *дм*. Ал призманын каптал гранынын диагоналын тапкыла.

6. Туура төрт бурчтуу призманын диагоналы 9 *см*, каптал гранынын диагоналы 7 *см*. Ал призманын негизинин диагоналын жана жагын тапкыла.

7. Туура үч бурчтуу призмада негизинин жагы a, каптал кыры b. 1) Каптал кыры жана негизинин борбору; 2) негизинин жагы жана анын каршысындагы каптал кырынын ортосу аркылуу жүргүзүлгөн кесилиштин аянтын тапкыла.

8. Туура үч бурчтуу призманын ар бир кыры b га барабар. Төмөнкү негизинин жагы жана жогорку негизинин орто сызыгы аркылуу жүргүзүлгөн кесилиштин аянтын тапкыла.

9. Туура төрт бурчтуу призманын диагоналы каптал граны менен 30° бурч түзөт. Ал диагоналдын призманын негизи менен түзгөн бурчун аныктагыла.

10. Туура алты бурчтуу призманын ар бир кыры b га барабар. Призманын диагоналдарын тапкыла.

11. Призманын каптал кыры l болуп, негизинин тегиздиги менен φ бурчун түзөт. Призманын бийиктигин тапкыла.

12. Призманын негизи болгон ромбдун жагы a жана бурчу 60°. Призманын бардык каптал грандары квадраттар экендиги белгилүү. Призманын: 1) диагоналдарын; 2) диагоналдык кесилиштеринин аянттарын тапкыла.

13. Туура төрт бурчтуу призманын негизинин аянты 81 $дм^2$, ал эми призманын диагоналы 15 *дм*. Призманын бийиктигин аныктагыла.

14. Туура төрт бурчтуу призманын бир каптал гранынын аянты Ske барабар. Анын диагоналдык кесилишинин аянтын тапкыла.

§ 18. ПРИЗМАНЫН БЕТИНИН АЯНТЫ

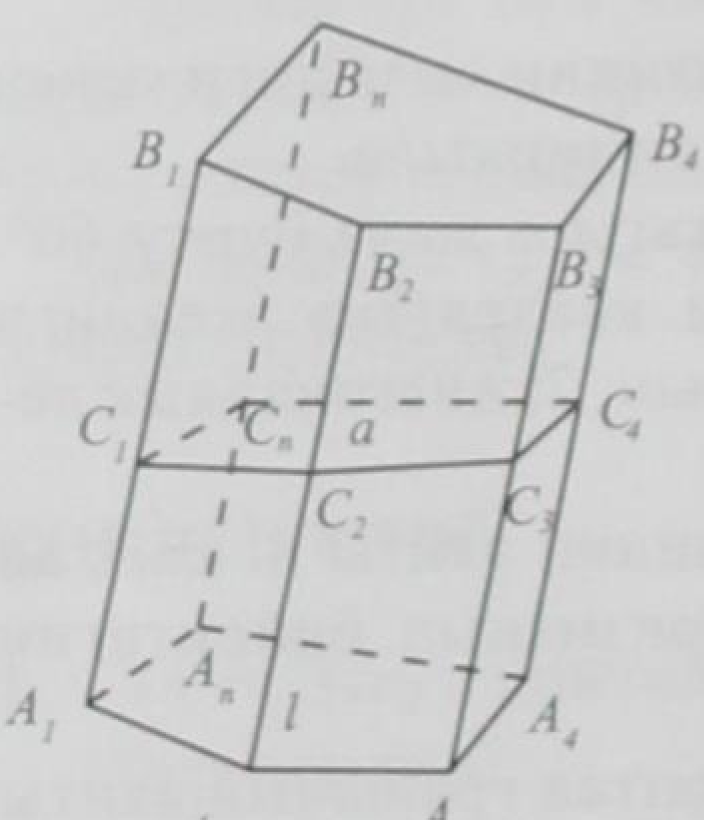
Көп грандыктын бетинин аянтын табуу үчүн анын бетиндеги ар бир көп бурчтуктун аянтын таап, алардын суммасын аныктоо керек. Демек, томпок көп грандыктын бетинин аянты анын бардык грандарынын аянттарынын суммасына барабар.

Албетте, көп грандыктын берилишине жараша анын каптал бетин, негизин жана толук бетин аныктоого болот. Көп грандыктын каптал бетинин аянтын $S_К$, негизинин аянтын $S_Н$ жана толук бетинин аянтын $S_Т$ аркылуу белгилейбиз. Көп грандыктын каптал бетинин аянты менен негизинин (же негиздеринин) аянттарынын суммасы анын толук бетинин аянтын аныктайт. Ошондуктан, $S_Т = S_К + S_Н$ болот.

Призманын толук бетинин аянты анын бардык грандарынын аянттарынын суммасына барабар. Призманын каптал грандары параллелограммдар болушкандыктан анын каптал бетинин аянты ($S_К$) ал параллелограммдардын аянттарынын суммасына барабар. Ал эми призманын негиздери бири-бирине барабар көп бурчтуктардан турат. Анда ал негиздеринин аянттары $2\,S_н$ болот. Демек, призманын толук бетинин аянты ($S_Т$) ал аянттардын суммасына барабар:

$$S_Т = S_К + 2S_Н ... \quad \mathbf{(1)}$$

Призманын негизинин аянтын табуунун ар бир учуруна токтолуп олтурбайбыз. Анткени – көп бурчтуктун аянтын эсептөө бизге белгилүү, ал көп бурчтуктун (призманын) берилишине жараша болот.



37-сүрөт

Ошондуктан призманын каптал бетинин аянтын табууга гана токтолобуз.

30-теорема. **Призманын каптал бетинин аянты анын перпендикулярдык кесилишинин периметрин каптал кырына көбөйткөнгө барабар.**

Д а л и л д ө ө: n бурчтуу жантык призма берилсин (37-сүрөт). Аны M аркылуу белгилейли.

A_1B_1, A_2B_2,...A_nB_n каптал кырлары барабар жана параллель болуша тургандыгы белгилүү, аларды l аркылуу белгилейбиз.

Бул призманын каптал кырларына перпендикулярдуу болгон α тегиздигин жүргүзөбүз. Ал M призмасын $C_1C_2C_3,...C_n$ көп бурчтугу боюнча кесип өтөт, аны перпендикулярдык кесилиш деп атайбыз. Бул көп бурчтуктун периметри $P_a - C_1C_2 + ... + C_nC_1$ болсун.

Кесилиштеги көп бурчтуктун жактары призманын каптал кырларына перпендикулярдуу болоору белгилүү. Ошондуктан $A_1A_2B_1B_2$ параллелограммынын аянты $S_1 = C_1C_2 l$ болот. Ушуга окшош жол менен эсептесек, призманын калган грандарынын янттары: $S_2 = C_2C_3 l, ..., S_n = C_nC_1 l$ болот.

Натыйжада

$$S_K = Sl + ... + S_n = C_1C_2\, l + ... + C_nC_1\, l = (C_1C_2 + ... + C_nC_1) \cdot l = P_a \cdot l$$

же $S_K = P_a l$... (1) болот. Теорема далилденди.

Натыйжа. Тик призманын каптал бетинин аянты негизинин периметрин анын каптал кырына көбөйткөнгө барабар.

Бул натыйжанын тууралыгы түздөн түз 30-теоремадан келип чыгат. Мында перпендикулярдык кесилиштин өзү негизиндеги көп бурчтук болуп калат. Анын периметрин Р деп эсептейли. Бул учурда призманын каптал кыры бийиктик да болот: $l = h$ (h – призманын бийиктиги). Анда (1) формула $S_K - P_a \cdot h$... (2) түрүндө жазылат.

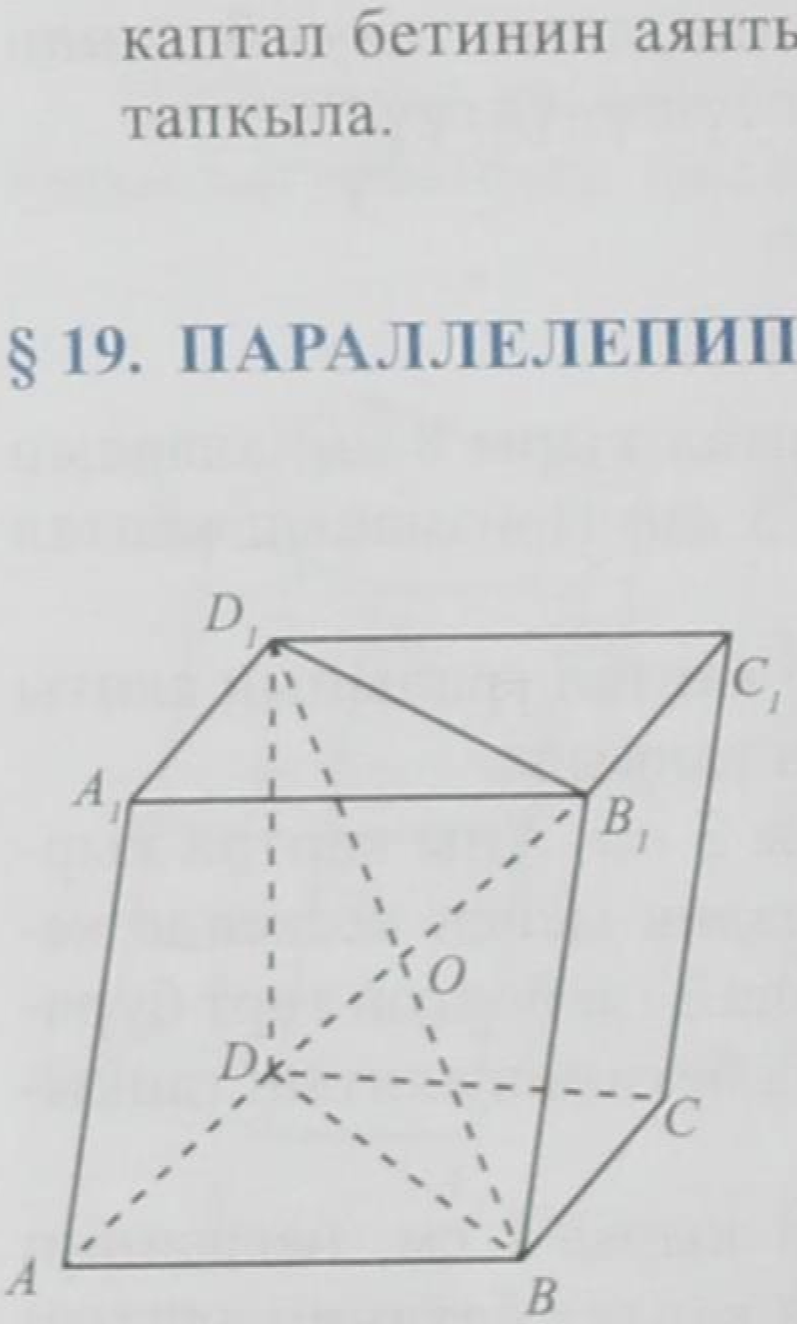
Туура призманын каптал бетинин жана негизинин аянттарын эсептөө кыйла жөнөкөй болгондуктан, анын толук бетинин аянтын табуу да оңой боло тургандыгы түшүнүктүү.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Үч бурчтуу жантык призманын каптал кыры 8 *см*, алардын арасындагы аралыктар 3 *см*, 4 *см*, 5 *см*. Призманын каптал бетинин аянтын эсептегиле.
2. Туура төрт бурчтуу призманын бир каптал гранынын аянты 8 $дм^2$. Анын каптал бетинин аянтын тапкыла.
3. Төрт бурчтуу призмада каптал кыры 3 *см*. Аны каптал кырларына перпендикуляр болгон тегиздик менен кескенде кесилиште жактары 4 *см*, 4 *см*, 4 *см* жана 3 *см* болгон төрт бурчтук пайда болгон. Призманын каптал бетинин аянтын тапкыла.
4. Үч бурчтуу тик призманын каптал кыры 4 см, негизинин жактары 3 *см*, 5 *см* жана 6 *см*. Анын каптал бетинин аянтын эсептегиле.

5. Үч бурчтуу жантык призмада эки каптал грандары өз ара перпендикулярдуу болуп, алардын жалпы кыры 4,8 *дм*. Ал кыры калган эки кырынан 1,2 *дм* жана 3,5 *дм* аралыкта. Призманын каптал бетинин аянтын тапкыла.
6. Туура үч бурчтуу призманын негизинин жагы жана ал жактын каршысында жаткан кырынын ортосу аркылуу өткөн тегиздик негизи менен 45° бурч түзөт. Эгерде призманын негизинин жагы α га барабар болсо, анын каптал бетинин аянтын тапкыла.
7. Туура n бурчтуу призманын бийиктиги h, негизинин жагы a. Призма: 1) төрт; 2) үч; 3) алты бурчтуу болсо, анда анын толук бетинин аянтын эсептегиле.
8. Туура алты бурчтуу призманын каптал бетинин аянты 72 $дм^2$, ал эми каптал гранынын диагоналы 5 *дм*. Призманын негизинин жагын жана бийиктигин тапкыла.
9. Призманын негизи – квадрат, жогорку негизинин чокуларынын бири төмөнкү негизинин бардык чокуларынан бирдей алыстыкта. Призманын негизинин жагы a, каптал кыры b. Анын толук бетинин аянтын тапкыла.
10. Туура төрт бурчтуу призманын бетинин аянты 80 $дм^2$, ал эми каптал бети – 64 $дм^2$. Призманын бийиктигин тапкыла.
11. Үч бурчтуу тик призманын бардык кырлары барабар. Анын каптал бетинин аянты 48 $м^2$. Призманын негизинин аянтын тапкыла.

§ 19. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



38-сүрөт

Негизи параллелограмм болуп эсептелген призма **параллелепипед** деп аталат (38-сүрөт).

Параллелепипеддин алты граны бар, алардын бардыгы параллелограммдар болушат. Ошону менен бирге ал параллелограммдар эки-экиден барабар (карама-каршы грандары) жана параллель (алардын тууралыгы кийинчерээк далилденет). Ошондуктан параллелепипеддин каалагандай гранын анын негизи катары кабыл алууга болот.

Параллелепипеддин параллель грандары карама-каршы грандар деп аталат. Анда параллелепипеддин ар бир чокусуна (кырына) карама-каршы чокуну (кырды) аныктоого болот. Карама-каршы чокуларын туташтыруучу кесинди (мисалы, BD_1, CA_1,...) параллелепипеддин диагоналдары деп аталат.

Параллелепипеддин касиеттери

1. Карама-каршы кырлары параллель жана барабар.

Мисалы, BC жана A_1D_1 карама каршы кырларын алалы. BCC_1B_1 параллелограммында $BC \parallel B_1C_1$ жана $BC = B_1C_1$ ал эми $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммы үчүн $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, $A_1D_1 = B_1C_1$ Анда белгилүү касиеттердин негизинде $BC \parallel A_1D_1$ жана $BC = A_1D_1$ болот.

2. Карама-каршы грандары параллель жана барабар.

Мисалы, BCC_1B_1 жана ADD_1A_1 карама-каршы грандарын карайлы. 1-касиетти колдонсок, алардын тиешелүү жактары параллель жана барабар. Ошондуктан ал грандар параллель жана барабар болушат.

3. Параллелепипеддин диагоналдары бир чекитте кесилишет жана ал чекитте тең экиге бөлүнүшөт.

BB_1D_1D параллелограмм, анткени 1-касиеттин негизинде BB_1 # DD_1 (# – бул параллель жана барабар дегенди түшүндүрөт). Анда бул параллелограммдын BD_1 жана DB_1 диагоналдары O чекитинде кесилишип, тең экиге бөлүнүшөт. Ал эми BD_1 жана DB_1 – параллелепипеддин да диагоналдары болуп эсептелет. Ушундай эле жол менен AC_1 жана CA_1 диагоналдарынын да O чекитинде кесилишээрин жана ал чекиттте тең экиге бөлүнөөрүн далилдөөгө болот.

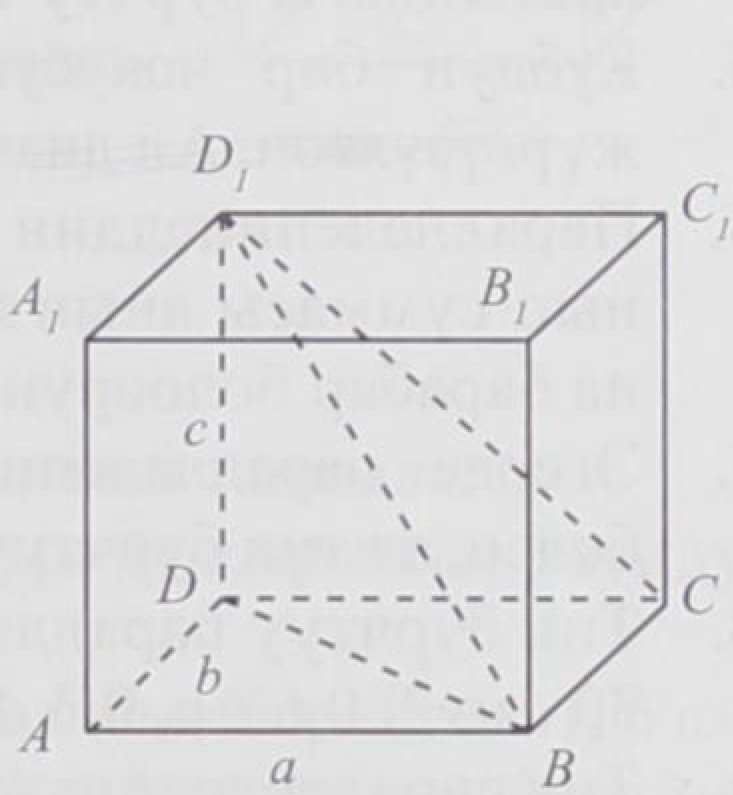
4. Параллелепипеддин диагоналдарынын кесилишкен чекити анын симметрия борбору болот.

Бул касиеттин тууралыгын 3-касиетти пайдаланып көрсөтүүгө болот.

Эгерде параллелепипеддин бардык грандары тик бурчтук болсо, анда ал тик бурчтуу параллелепипед деп аталат (39-сүрөт).

Тик бурчтуу параллелепипед төмөндөгүдөй белгилүү касиеттерге ээ:

1) Анын ар бир чокусунан чыгуучу кырлары өз ара перпендикулярдуу болушат;



39-сүрөт

2) Анын каалагандай эки граны же параллель же бири-бирине перпендикулярдуу;

3) Анын ар бир кыры ал кырдын учтары жаткан карама-каршы грандарга перпендикулярдуу.

Пифагордун тегиздиктеги теоремасына окшоштуруп, төмөндөгү теореманы айтууга болот: **тик бурчтуу параллелепипеддин диагоналынын узундугунун квадраты бир чокудан чыгуучу анын үч кырынын узундуктарынын квадраттарынын суммасына барабар** (39-сүрөт). Бул мейкиндиктеги Пифагордун теоремасы деп аталат. Аны төмөндөгүдөй жол менен оңой далилдөөгө болот.

Тик бурчтуу параллелепипеддин бир чокусунан чыгуучу кырлары анын үч өлчөмдөрү деп аталат. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тик бурчтуу параллелепипед, анын A чокусунан чыгуучу кырлары a,b,c, алар $a \perp b$, $a \perp b$, $a \perp c$, $a \perp e$ болушат.

ABD тик бурчтуу үч бурчтугуна Пифагордун теоремасын колдонсок, $BD^2 = a^2 + b^2$. Ошондой эле, BDD_1 үч бурчтугунда: $BD_1^2 = BD^2 + c^2$, же $BD_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$ мында BD_1 – тик бурчтуу параллелепипеддин диагоналы.

Куб – бул бардык кырлары барабар, б.а. бардык грандары квадраттар болгон тик бурчтуу параллелепипед.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Параллелепипед призманын бир түрү болоорун далилдегиле.
2. Куб параллелепипеддин айрым учуру экендигин далилдегиле.
3. Кубдун кыры α га барабар. Диагоналын тапкыла.
4. Кубдун: 1) диагоналы менен кырынын; 2) эки диагоналынын арасындагы бурчту тапкыла.
5. Кубдун бир чокусунан каптал грандарына эки диагональ жүргүзүлгөн. Ал диагоналдардын арасындагы бурчту тапкыла.
6. Параллелепипеддин бардык диагоналдарынын квадраттарынын суммасы анын кырларынын квадраттарынын суммасына барабар болоорун далилдегиле.
7. Эгерде параллелепипеддин бардык диагоналдары барабар болсо, ал тик бурчтуу параллелепипед болоорун далилдегиле.
8. Тик бурчтуу параллелепипеддин өлчөмдөрү: 1) 20 *см*, 60 *см*, 30 *см*; 2) 0,6 *дм*, 0,3 *дм*, 1,2 *дм*. Анын диагоналын эсептегиле.
9. Тик параллелепипеддин негизинин жактары 2 *дм* жана 3,2 *дм*, алардын арасындагы бурчу 60°. Параллелепипеддин кичи-

не диагоналы негизи менен 60° бурч түзөт. Анын диагоналдарын тапкыла.

10. Тик параллелепипедде негизинин жактары 1,7 *дм* жана 1,8 *дм*, ал эми диагоналдарынын бири 2,5 *дм*. Параллелепипеддин чоң диагоналы негизи менен 45° бурч түзөт. Анын диагоналдык кесилиштеринин аянттарын тапкыла.

§ 20. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДДИН БЕТИНИН АЯНТЫ

Параллелепипед – бул призманын айрым түрү. Анын грандары параллелограммдар болуп эсептелет. Ошондуктан параллелепипеддин толук бетинин аянты грандарындагы параллелограммдардын аянттарынын суммасына барабар.

Параллелепипеддин карама-каршы грандары барабар. Бул шарт эсептөөнү кыйла жеңилдетет, анткени - анын бетинин аянтын табууда карама-каршы грандардын биринин гана аянтын табуу жетиштүү. Ал эми параллелограммдын аянтын табуу бизге планиметриядан белгилүү.

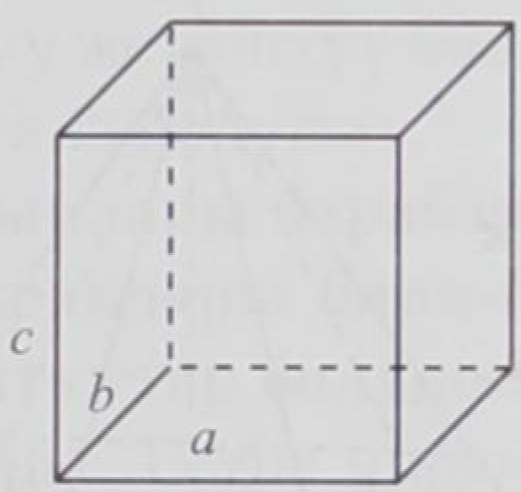
Тик бурчтуу параллелепипед болгондо анын бетинин аянтын табуу кыйла жеңилдейт. Тик бурчтуу параллелепипеддин негизинин жактары a жана b, ал эми каптал кыры (бийиктиги) c болсо, башкача айтканда үч өлчөмү берилсе (40-сүрөт), анда

$$S_К = 2c \cdot (a + b),$$

$$S_Н = 2a \cdot b,$$

ал эми $S_Т = 2(ac + bc + ab)$

формулалары аркылуу аныктала тургандыгы түшүнүктүү.



40-сүрөт

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Кубдун кыры 4 *см*. Анын бетинин аянтын тапкыла.

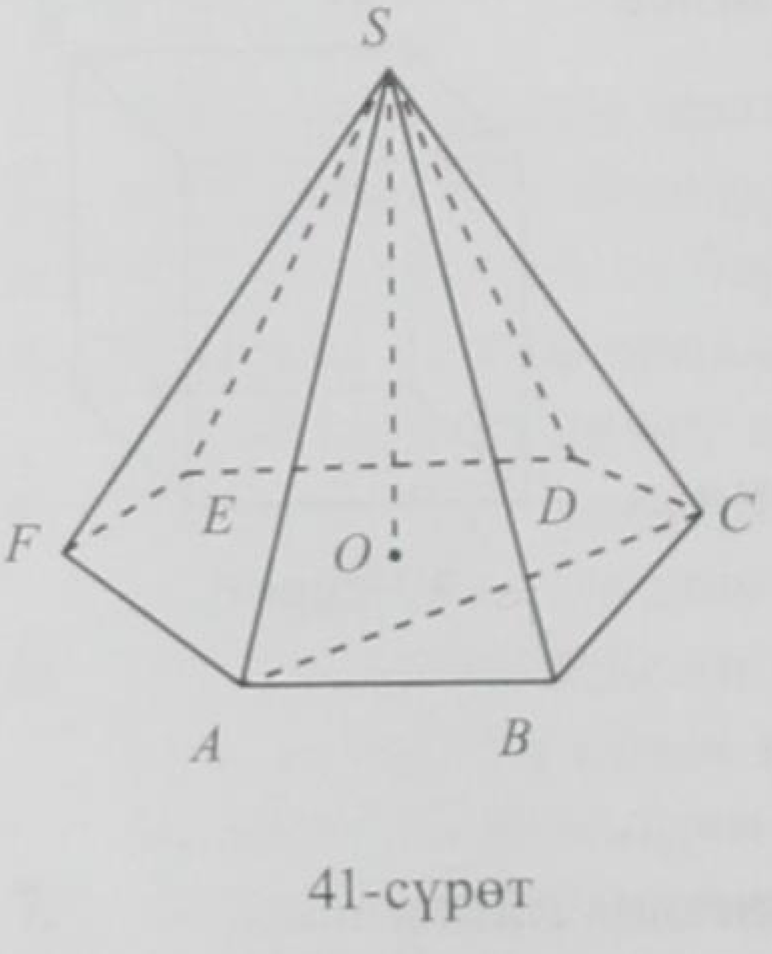
2. Кубдун бетинин аянты 216 $дм^2$. Анын 1) кырынын узундугун; 2) диагоналын тапкыла.

3. Тик бурчтуу параллелепипеддин үч өлчөмү берилген: 1) 6 *см*, 10 *см*, 5 *см*; 2) 4,5 *дм*, 2 *дм*, 8 *дм*; 3) a,b,c. Анын толук бетинин аянтын тапкыла.

4. Тик бурчтуу параллелепипеддин үч гранынын аянттары 21 $дм^2$, 36 $дм^2$ жана 42 $дм^2$. Анын үч өлчөмүн тапкыла.
5. Тик параллелепипеддин негизи - диагоналдары 0,6 *дм* жана 0,8 *дм* болгон ромб. Параллелепипеддин каптал гранынын диагоналы 1,3 *дм*. Анын толук бетинин аянтын эсептегиле.
6. Жактары a жана b болгон тик бурчтук жантык параллелепипеддин негизи. Анын каптал кыры c болуп, негиздин жанаша жаткан жактарынын ар бири менен α бурчун түзөт. Параллелепипеддин каптал бетинин аянтын тапкыла.
7. Тик бурчтуу параллелепипеддин үч өлчөмүнүн катышы 1:2:3 катышына барабар. Анын толук бетинин аянты 198 $м^2$. Үч өлчөмүн тапкыла.
8. Параллелепипеддин ар бир граны – ромб. Ал ромбдун жагы a бурчу φ. Параллелепипеддин каптал бетинин аянтын аныктагыла.

§ 21. ПИРАМИДА

Тегиздикте $ABCDEF$ көп бурчтугу берилсин. Ал тегиздиктен тышкары жаткан S чекитин алып, SA, ..., SF кесиндилерин сызабыз (41-сүрөт). Анда ABS,..., FAS үч бурчтуктары жана $ABCDEF$ көп бурчтугу менен бирге мейкиндикте телону - көп грандыкты түзөт. Бул көп грандык пирамиданы аныктайт.



41-сүрөт

Бир граны көп бурчтуктан, ал эми калган грандары жалпы чокулуу үч бурчтуктардан турган көп грандык пирамида деп аталат.

Ал жалпы чокулуу үч бурчтуктар пирамиданын ***каптал грандары***, алардын жалпы чокусу – ***пирамиданын чокусу***, ал эми калган граны – ***пирамиданын негизи*** деп аталат. Пирамиданын чокусунан чыгуучу кырлары пирамиданын ***каптал кырлары*** деп аталат.

Пирамиданын негизинин диагоналы жана каптал кыры аркылуу жүргүзүлгөн тегиздик ***диагоналдык тегиздик*** деп аталат, ал эми диагоналдык тегиздик менен пирамиданын кесилиши (мисалы, ACS кесилиши) диагоналдык кесилиш болот.

Пирамиданы көп грандуу бурчтун тегиздик менен кесилишинен алынган фигура катарында да кароого болот. Ал үчүн көп грандуу бурчтун бардык кырларын кесип өткөндөй тегиздик жүргүзүү керек.

Пирамиданын чокусунан анын негизинин тегиздигине түшүрүлгөн перпендикуляр ***пирамиданын бийиктиги*** деп аталат.

Эгерде пирамиданын негизиндеги көп бурчтук n бурчтук болсо, анда аны ***n бурчтуу пирамида*** деп атайбыз.

Эң жөнөкөй пирамида (жалпысынан, эң жөнөкөй көп грандык) болуп үч бурчтуу пирамида - тетраэдр (грекче «төрт грандык» дегенди түшүндүрөт) болуп эсептелет, анын мүмкүн болгон эң аз сандагы грандары - бар болгону төрт гана граны бар. Анын каалаган гранын негизи деп эсептөөгө болот (ал башка пирамидалардан ушунусу менен айырмаланат).

Эгерде пирамиданын негизи туура көп бурчтук болуп, анын чокусу ал көп бурчтуктун борборуна проекцияланса, анда ал ***туура пирамида*** деп аталат.

Бул аныктама туура пирамиданы оңой түзүүгө жана ошону менен катар андай пирамидалардын бар экендигин далилдөөгө мүмкүнчүлүк берет. Мындай пирамиданы түзүү үчүн каалагандай туура көп бурчтукту алып, анын борборунан көп бурчтуктун тегиздигине перпендикуляр жүргүзүп, ал перпендикулярдын каалагандай чекитин (анын негизинен башка) көп бурчтуктун чокулары менен кесиндилер аркылуу туташтыруу жетиштүү болот. Туура пирамидалар төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болушат.

1-касиет. **Туура пирамиданын каптал кырлары барабар**.

2-касиет. **Туура пирамиданын каптал грандары бири-бирине барабар болгон тең капталдуу үч бурчтуктар болушат**.

Бул касиеттерди өз алдыңарча далилдегиле. Туура пирамиданын каптал гранындагы тең капталдуу үч бурчтуктун бийиктиги пирамиданын **апофемасы** деп аталат.

1,2-касиеттер туура пирамиданы мүнөздөшөт, ошондуктан алардын жардамы менен туура пирамидага башкача дагы эки аныктама берүүгө болот.

1. Эгерде пирамиданын негизи туура көп бурчтук, ал эми каптал кырлары барабар болсо, анда ал туура пирамида деп аталат.

2. Эгерде пирамиданын каптал грандары тең капталдуу барабар үч бурчтуктар болуп, алардын негиздери пирамиданын негизине тиешелүү болсо, анда ал туура пирамида деп аталат.

Ошентип, туура пирамидада:

1. Каптал кырлары барабар;

2. Каптал грандары барабар;

3. Апофемалары (чокусунан негизинин жагына түшүрүлгөн перпендикулярлары) барабар;

4. Негизиндеги эки грандуу бурчтары барабар;

5. Каптал кырларындагы эки грандуу бурчтары барабар болот.

Бул сүйлөмдөрдүн ар бирин теорема катары далилдөөгө мүмкүн. Аларды өз алдыңарча далилдөөгө сунуш кылабыз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. 1) Үч бурчтуу; 2) төрт бурчтуу пирамиданын канча граны, чокусу жана кыры болот?

2. n бурчтуу пирамиданын канча граны, чокусу жана кыры болот? 81 кырга ээ болгон пирамида болобу?

3. Беш бурчтуу пирамидада: 1) бир каптал кыры аркылуу; 2) бардыгы канча диагоналдык кесилишти жүргүзүүгө болот?

4. Кандай пирамидада каалаган гранын негизи катары алууга болот?

5. 1) Үч бурчтуу; 2) беш бурчтуу; 3) n бурчтуу пирамидада канча үч грандуу бурчтар болот?

6. 1) Төрт бурчтуу; 2) алты бурчтуу; 3) n бурчтуу пирамидада канча эки грандуу бурчтар болот?

7. Туура төрт бурчтуу пирамиданын каптал кыры l болуп, негизинин тегиздигине φ бурчу менен жантайган пирамиданын: 1) бийиктигин; 2) негизинин диагоналын; 3) диагоналдык кесилиштин аянтын; 4) негизинин жагын тапкыла.

8. Туура алты бурчтуу пирамиданын негизинин жагы a, ал эми каптал кыры $2a$. Пирамиданын: 1) ар бир диагоналдык кесилишинин аянтын; 2) каптал кырынын негизинин тегиздиги менен түзгөн бурчун тапкыла.

9. Туура төрт бурчтуу пирамидада канча диагоналдык тегиздик жүргүзүүгө болот.

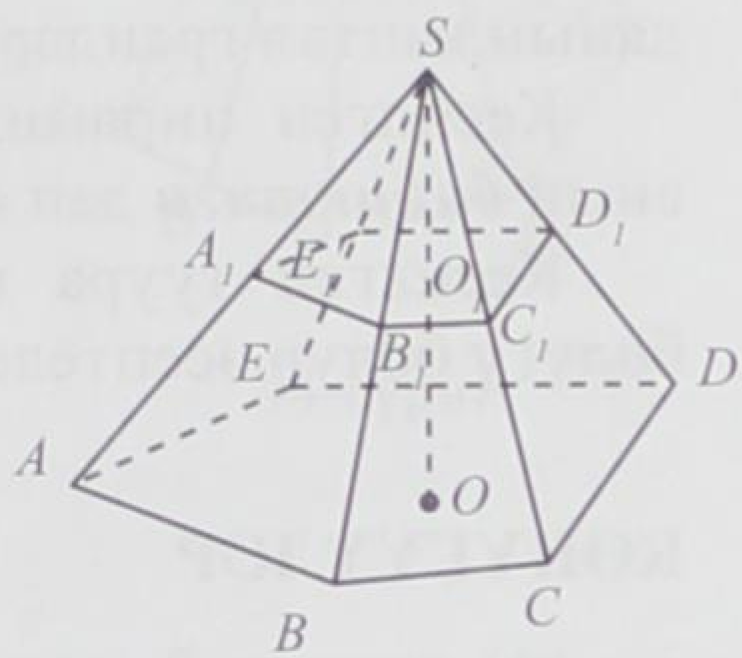
10. Туура үч бурчтуу пирамиданын негизинин жагы b, каптал кыры $2b$. Жанаша жаткан эки каптал кырларынын ортолору аркылуу пирамиданын негизинин тегиздигине перпендикулярдуу кесилиштин аянтын тапкыла.

11. Пирамиданын негизи тең капталдуу үч бурчтук – анын негизи 8 *дм*, бийиктиги 12 *дм*. Пирамиданын ар бир каптал кыры 15 *дм*. Анын бийиктигин тапкыла.

12. Пирамиданын негизи жактары 0,6 *дм* жана 0,8 *дм* болгон тик бурчтук. Пирамиданын ар бир каптал кыры 1,5 *дм*. Анын бийиктигин тапкыла.

§ 22. КЕСИЛГЕН ПИРАМИДА

SABCDE пирамидасы берилген (42-сүрөт). Эгерде бул пирамиданы негизине параллель болгон тегиздик менен кессек, кесилиште $A_1B_1C_1D_1E_1$ көп бурчтугу пайда болот. Мында $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE$ болоору белгилүү, анткени – алардын тиешелүү жактары пропорциялаш. SO_1 жана SO кесиндилери $A_1B_1C_1D_1E_1$ жана *SABCDE* пирамидаларынын тиешелүү бийиктиктери, $SO_1 : SO = k$ – окшоштук коэффициенти болот.



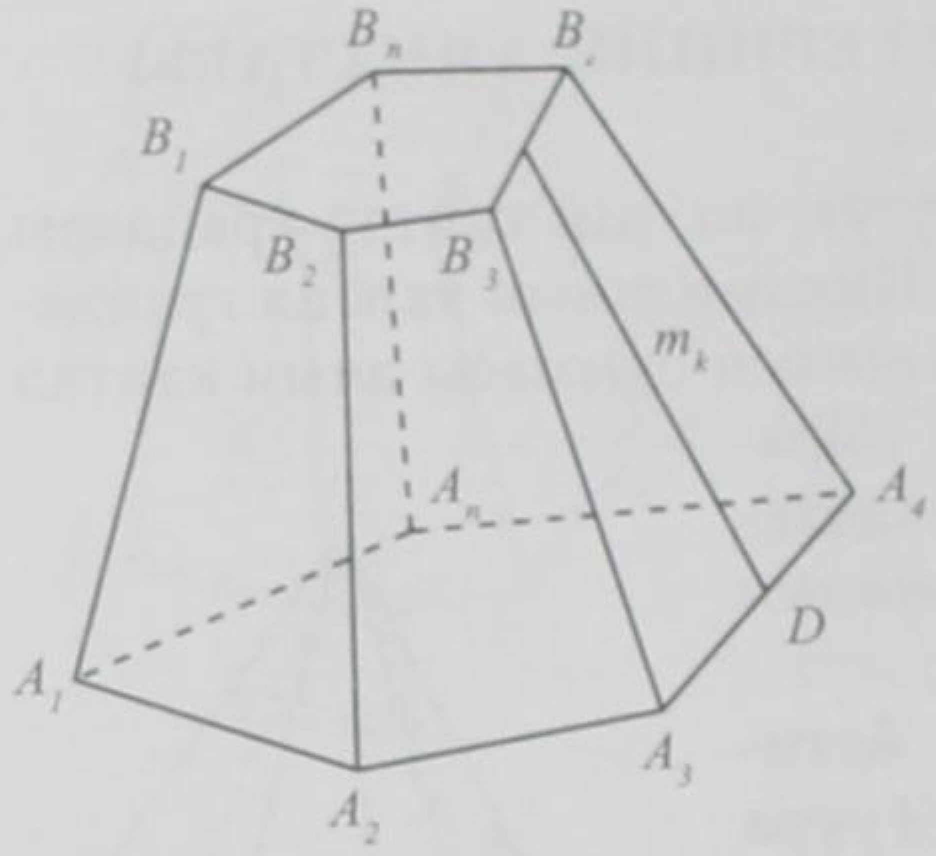
42-сүрөт

Демек, пирамиданын негизине параллель болгон тегиздик берилген пирамиданын бийиктигин жана каптал кырларын пропорциялаш бөлүктөргө бөлөт.

Окшош фигуралардын аянттарынын катышынын негизинде кесилиштеги көп бурчтуктун ($A_1B_1C_1D_1E_1$) аянтынын берилген пирамиданын негизинин (*ABCDE*) аянтына карата алынган катыштары пирамиданын чокусунан кесилишке чейинки жана негизге чейинки аралыктардын катыштарынын квадратына барабар. Бул пирамидадагы үч бурчтуктардын окшоштуктарынан келип чыгат.

Демек, пирамиданын негизине параллель болуп, аны кесип өткөн тегиздик берилген пирамиданы ага окшош пирамида боюнча кесип өтөт, башкача айтканда $A_1B_1C_1D_1E_1$ пирамидасын анын негизине параллель болгон α тегиздиги менен кессек, кесүүнүн натыйжасында пайда болгон $A_1B_1C_1D_1E_1$ пирамидасы берилген пирамидага окшош болот. Ал пирамидаларды бирибирине гомотетиялуу (*S* – гомотетия борбору, *k*-гомотетия коэффициенти боюнча) деп да эсептөөгө мүмкүн.

Эми кесилген пирамиданы аныктайбыз. **Пирамиданын негизи менен ал негизге параллель болгон кесүүчү тегиздиктин арасындагы пирамиданын бөлүгү кесилген пирамида деп аталат.**



45-сүрөт

Кесилген туура пирамиданын каптал грандары барабар жана тең капталдуу трапециялар болушат. Ал трапециянын бийиктиги кесилген туура пирамиданын апофемасы деп аталат, аны m_K аркылуу белгилейбиз (45-сүрөт), $ED = m_K$.

32-теорема. **Кесилген туура пирамиданын каптал бетинин аянты анын негиздеринин периметрлеринин жарым суммасын апофемасына көбөйткөнгө барабар.**

Д а л и л д ө ө : n бурчтуу кесилген туура пирамида берилсин (45-сүрөт) төмөнкү негизинин бир жагын a, жогорку негизинин бир жагын b аркылуу белгилейли. $A_3A_4B_4B_3$ трапециясынын аянты $S_3 = \frac{1}{2}(a + b)m_K$ болот. 31-теоремага окшоштуруп, $S_K = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)m_K$...(1) формуласын алабыз, мында $P_1 = an$ кесилген пирамиданын төмөнкү негизинин, $P_2 = bn$ жогорку негизинин периметрлери, n грандарынын саны, S_K – каптал бетинин аянты. (1) формула теореманын туура экендигин далилдейт.

Кесилген пирамиданын толук бетинин аянты $S_T = S_K + S_1 + S_2$ болот. S_1 – анын төмөнкү негизинин, S_2 – жогорку негизинин аянттары.

Эскертүү. Кесилген каалагандай пирамиданын каптал бетинин аянтын табуу үчүн анын ар бир гранынын аянтын таап, алардын суммасын эсептөө керек.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Туура төрт бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 4 *см*, апофемасы 5 *см* болсо, анын: 1) каптал бетинин; 2) негизинин аянтын тапкыла.
2. Туура төрт бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 6 *дм*, түзүүчүсү 5 *дм* болсо, анын толук бетин тапкыла.
3. Негизинин жагы a , бийиктиги h берилсе, туура: 1) үч бурчтуу; 2) төрт бурчтуу; 3) алты бурчтуу пирамиданын толук бетинин аянтын тапкыла.

4. Туура төрт бурчтуу пирамиданын толук бетинин аянты 84 $м^2$, негизинин аянты 36 $м^2$. Ал пирамиданын: а) негизинин жагын; б) апофемасын; в) каптал кырын эсептегиле.
5. Эгерде туура үч бурчтуу пирамиданын негизинин жагы b, ал эми каптал кыры негизинин тегиздиги менен 45° бурч түзсө, анда анын каптал бетинин аянтын тапкыла.
6. 5-маселени туура төрт бурчтуу пирамида үчүн чыгаргыла.
7. Туура төрт бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 6 *дм*, ал эми негизиндеги эки грандуу бурч 60°. Пирамиданын каптал бетинин аянтын тапкыла.
8. Туура төрт бурчтуу пирамиданын каптал бетинин аянты негизинин аянтынан 3 эсе чоң. Негизинин жагындагы эки грандуу бурчту тапкыла.
9. Пирамиданын негизи ромб – анын жагы 6 *дм* жана бурчу 45°. Негизинин жактарындагы бардык эки грандуу бурчтары 30°. Пирамиданын толук бетинин аянтын тапкыла.
10. Пирамиданын негизи жагы a га барабар болгон квадрат. Пирамиданын h ка барабар болгон бийиктиги квадраттын бир чокусу аркылуу өтөт. Пирамиданын каптал бетинин аянтын тапкыла.
11. Туура үч бурчтуу пирамиданын негизинин жагы a, ал эми бийиктиги $2a$. Пирамиданын толук бетинин аянтын эсептегиле.
12. Кесилген туура пирамиданын каптал бетинин аянты анын негиздеринин периметрлеринин жарым суммасын апофемасына көбөйткөнгө барабар болоорун далилдегиле.
13. Кесилген туура төрт бурчтуу пирамиданын бийиктиги 1,2 *дм*, ал эми негиздеринин жактары 2 *дм* жана 3,8 *дм*. Бул пирамиданын: 1) каптал кырын; 2) диагоналдык кесилишинин аянтын; 3) бетинин аянтын тапкыла.
14. Кесилген туура үч бурчтуу пирамиданын бийиктиги 10 *см*, негиздеринин жактары 60 *см* жана 120 *см*. Каптал бетинин аянтын эсептегиле.
15. Кесилген пирамиданын негиздери жактары 5 *м* жана 3 *м* болгон туура үч бурчтуктар, анын эки каптал граны пирамиданын негизине перпендикулярдуу, ал эми үчүнчү граны болсо аны менен 30° бурч түзөт. Пирамиданын каптал бетинин аянтын аныктагыла.
16. Кесилген туура үч бурчтуу пирамиданын негиздеринин жактары a жана $b (a > b)$. Негизиндеги эки грандуу тар бурч φ. Пирамиданын каптал бетинин аянтын тапкыла.

17. Кесилген пирамиданын негиздеринин жактары 0,5 *дм* жана 0,3 *дм* болгон туура үч бурчтуктар, анын бир каптал кыры негизине перпендикулярдуу болуп, узундугу 0,1 *дм* ге барабар. Пирамиданын каптал бетинин аянтын тапкыла.

18. Бийиктиги h, негиздеринин жактары a жана b болгон кесилген туура: 1) үч бурчтуу; 2) төрт бурчтуу; 3) алты бурчтуу пирамиданын толук бетинин аянтын тапкыла.

§ 24. ТУУРА КӨП ГРАНДЫКТАР

Эгерде, биринчиден, көп грандык томпок, экинчиден, анын бардык грандары – бири-бирине барабар туура көп бурчтуктар, үчүнчүдөн, анын ар бир чокусунда бирдей сандагы грандар, акырында, төртүнчүдөн, анын бардык эки грандуу бурчтары барабар болсо, анда ал **туура көп грандык** деп аталат.

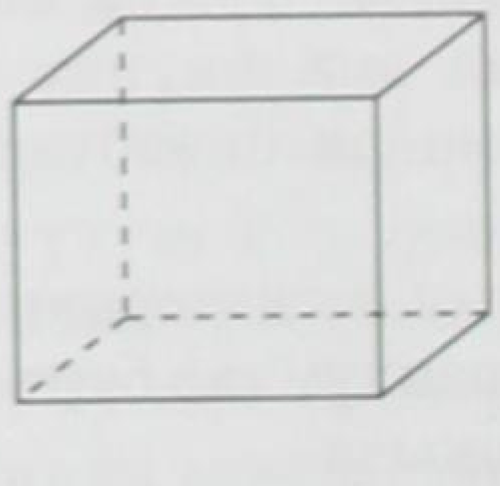
Туура көп грандыктардын түрү бештен ашпайт. Грандары туура үч бурчтуктар болгон туура көп грандыктын ар бир чокусунан канча гран өтөт?

Көп грандуу бурч үчүн $60° \cdot n < 360°$ болот. Бул барабарсыздык $n = 3,4,5$ болгондо гана туура болот. Демек, мындай көп грандык үчөө болот.

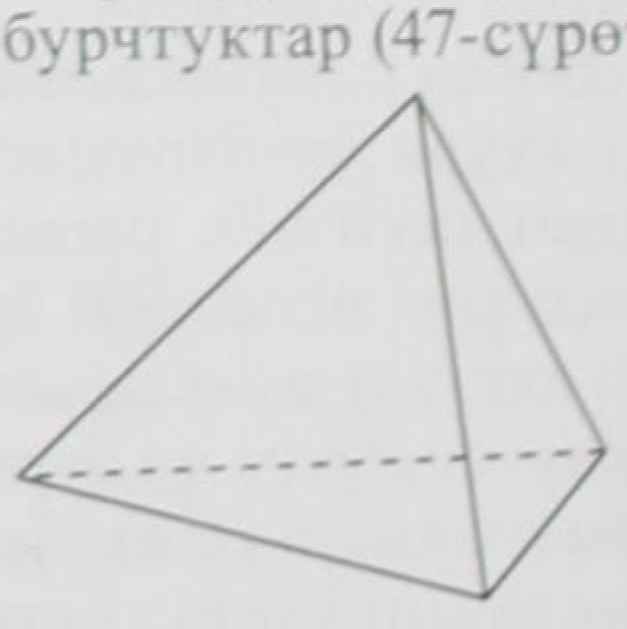
Ушундай талкуулоолордун негизинде, грандары туура төрт бурчтук (квадрат) болгон туура көп грандык бирөө гана болот, себеби $90° \cdot n < 360°$ барабарсыздыгы $n = 3$ болгондо гана туура болот (бир чокудан чыгуучу грандардын саны үчтөн кем эмес болуш керек). Грандары туура беш бурчтук болгондо ар бир жалпак бурчу 108° болот. Бул учурда $108° \cdot n < 360°$ барабарсыз-дыгы $n = 3$ болгондо туура (бир чокудан үч гран чыгат). Мындай көп грандык бирөө гана болот.

Ошентип, туура көп грандыктардын бар болгону беш түрү (тиби) бар. Алардын экөө силерге жакшы белгилүү.

1) Туура тетраэдр, башкача айтканда үч бурчтуу туура пирамида анын бардык грандары туура үч бурчтуктар (47-сүрөт);



46-сүрөт



47-сүрөт

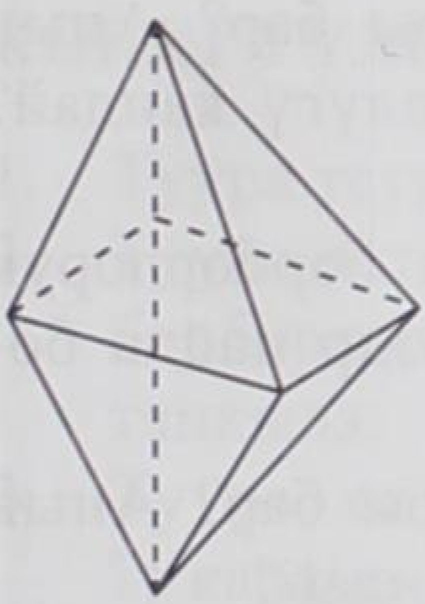
2) Куб, башкача айтканда параллелепипед, анын бардык грандары квадраттар (46-сүрөт). (Туура тетраэдр жана куб туура көп грандыктын аныктамасындагы бардык шарттарды канааттандыра тургандыгын текшерип көргүлө).

Эми калган туура көп грандыктарды атайбыз:

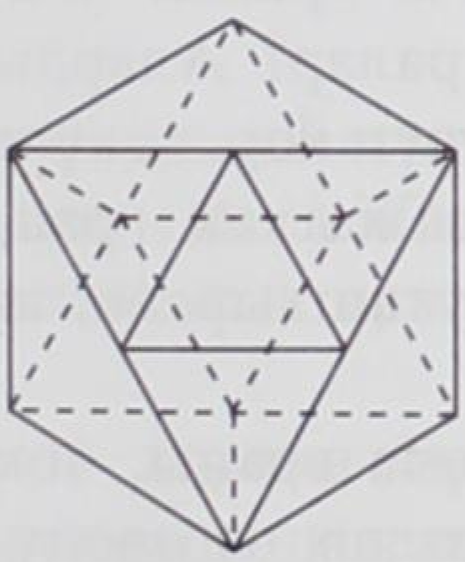
3) сегиз туура үч бурчтуу грандардан турган жана ар бир чокусунда төрттөн грандары болгон көп грандык, ал туура октаэдр же жөн эле **октаэдр**[1] деп аталат (48-сүрөт) («октаэдр» – сегиз грандык).

Анын негиздери квадраттар, ал эми каптал грандары туура үч бурчтуктар болгон бирдей эки пирамиданы негиздери боюнча бириктирип түзүүгө мүмкүн. Октаэдрдин кырларын кубдун жанаша жаткан грандарынын борборлорун туташтырып да алууга мүмкүн (текшерип көргүлө). Эгерде туура октаэдрдин жанаша жаткан грандарынын борборлорун туташтырсак, кубдун кырларын алабыз (текшерип көргүлө).

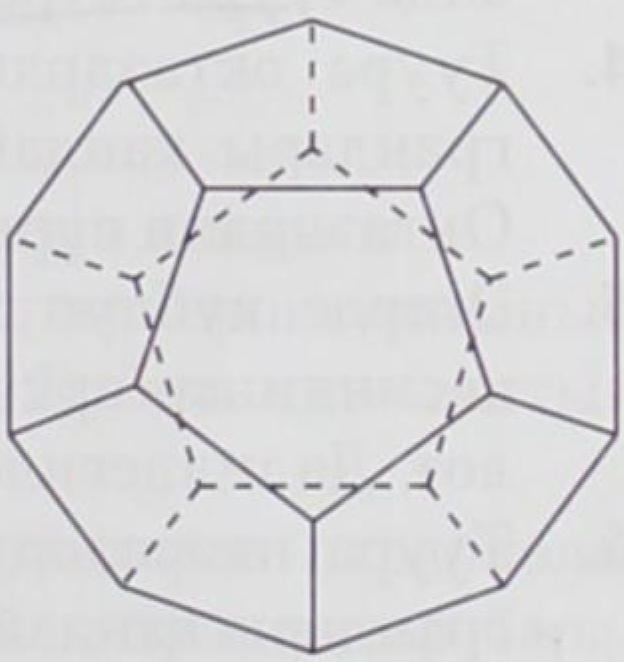
4) Жыйырма туура үч бурчтуу грандардан турган көп грандык: ал **икосаэдр**[2] деп аталат (49-сүрөт) («икосаэдр» – жыйырма грандык).



48-сүрөт



49-сүрөт



50-сүрөт

5) Бир чокуда үч грандан биригип, он эки туура беш бурчтуу грандардан турган көп грандык **додекаэдр**[3] (50-сүрөт) деп аталат. («додекаэдр» деген он эки грандык, тагыраак маанисинде «туура додекаэдр», «туура икосаэдр» деп айтыш керек эле, бирок кыскартуу максатында аларды «туура» деген сөздү катыштырбастан жөн эле атайбыз).

Биз икосаэдрдин жанаша жаткан грандарынын борборлорун кесиндилер аркылуу туташтырсак, анда додекаэдрдин кырларын алабыз жана тескерисинче (текшерип көргүлө).

---

[1] Грек сөзү, сегиз таяныч деген мааниде.

[2] Грек сөзү, жыйырма таяныч деген мааниде.

[3] Грек сөзү, он эки таяныч деген мааниде.

Ар кандай томпок көп грандыктын чокуларынын, кырларынын жана грандарынын сандарынын байланышы Эйлердин теоремасы боюнча $e+f-k=2$ барабардыгы аркылуу туюнтула тургандыгы §16 да айтылган. Ушул барабардыкты 46-50 -сүрөттөрдөгү туура көп грандыктар үчүн текшерип көргүлө.

Туура көп грандыктардын бардык түрлөрү байыркы грек геометрлери тарабынан эле белгилүү болгон.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Кубдун канча граны, чокусу жана кыры бар? Анын грандары кандай фигуралар? Кубдун сүрөтүн сызгыла.

2. Туура тетраэдрдин канча граны, чокусу жана кыры бар? Анын грандары кандай фигуралар? Туура тетраэдрдин сүрөтүн түзгүлө.

3. Эгерде кубдун карама-каршы грандарынын эки кайчылаш диагоналдарынын учтарын кесинди аркылуу туташтырсак, анда туура тетраэдрдин кырлары пайда болот. Далилдегиле.

4. Туура октаэдрдин канча граны, чокусу, кыры бар? Анын грандары кандай фигуралар? Алардын өзгөчөлүгү кандай? Октаэдрдин сүрөтүн түзүп көрсөткүлө.

5. Эгерде кубдун жанаша жаткан грандарынын борборлорун кесиндилер аркылуу туташтырсак, анда октаэдр пайда болот. Далилдегиле.

6. Туура икосаэдрдин канча граны, чокусу, кыры бар? Анын грандары кандай фигуралар, өзгөчөлүктөрү кандай?

7. Туура додекаэдрдин канча граны, чокусу, кыры бар? Анын грандары кандай фигуралар?

8. 1) Кубдун; 2) тетраэдрдин; 3) октаэдрдин; 4) икосаэдрдин; 5) додекаэдрдин ар бир чокусунда канча грандуу бурч болот? Ар биринин жалпак бурчтары кандай?

9. Туура октаэдрдин параллель грандарынын саны канча?

10. $ABCD$ туура тетраэдринде M чекити BD кырынын ортосунда жатат. 1) BD кыры ACM тегиздигине перпендикулярдуу; 2) CAM үч бурчтугунун AA_1 жана CC_1 бийиктиктери тиешелүү түрдө BCD жана ABD грандарына перпендикулярдуу болоорун далилдегиле.

11. Туура тетраэдрдин эки карама-каршы кырларынын арасындагы бурчту тапкыла.

Көрсөтмө. 10-маселенин 2-учурун пайдалангыла.

§ 25. ТУУРА КӨП ГРАНДЫКТАРДЫН БЕТТЕРИНИН АЯНТТАРЫ

Туура көп грандыктын толук бетинин же жөн элө бетинин аянты деп, анын грандарынын аянттарынын суммасын атайбыз.

Туура көп грандыктардын беш түрү бар экендиги белгилүү. Алардын ар биринин грандары өз ара барабар болушат, ал грандар же тең жактуу үч бурчтуктар (тетраэдр, октаэдр жана икосаэдр), же квадраттар (куб), же туура беш бурчтуктар (додекаэдр) болуп эсептелет. Бул шарт берилген көп грандыктын бетинин аянтын табууну жеңилдетет. Анткени биринчиден, туура көп бурчтуктун аянтын эсептөө оңой, экинчиден, кандайдыр туура көп грандыктын бетинин аянтын табуу үчүн анын бир эле гранынын аянтын таап, алынган натыйжаны грандардын санына көбөйтүү жетиштүү болот. Ошентип, туура көп грандыктын бетинин аянты $S = S_1 \cdot n$ формуласы аркылуу аныкталат, S_1 – бир гранынын аянты, n – грандарынын саны.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Туура тетраэдрдин кыры a. Бетинин аянтын тапкыла.

2. Туура октаэдрдин кыры a. 1) Жанаша жаткан эки гранынын борборлорунун арасындагы аралыкты; 2) бетинин аянтын тапкыла.

3. Туура октаэдрде: 1) карама-каршы грандары параллель; 2) карама-каршы грандарынын арасындагы аралыктар барабар; 3) карама-каршы кырлары параллель болоорун далилдегиле.

4. Туура икосаэдрдин кыры a га барабар. Бетинин аянтын тапкыла.

5. Туура додекаэдрдин кыры a га барабар. Бетинин аянтын тапкыла.

Көрсөтмө. Бир граны жагы a га барабар туура беш бурчтук. Анын аянтын таап, додекаэдрдин грандарынын санына көбөйтүү керек. Туура беш бурчтуктун аянты

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)} \approx 1{,}72a^2$$

III ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Эки грандуу бурчтун аныктамасын айтып бергиле.
2. Эки грандуу бурчтун кандай элементтерин билесиңер?
3. Эки грандуу бурчтун сызыктуу бурчу деп эмнени айтабыз?
4. Көп грандуу бурчка аныктама бергиле. Анын кандай элементтерин билесиңер?
5. Көп грандуу бурчтардын түрлөрүн атагыла.
6. Томпок көп грандуу бурчтун жалпак бурчтарынын кандай касиетин билесиңер?
7. Көп грандыкты аныктагыла.
8. Көп грандыктардын кандай түрлөрүн билесиңер? Аларды баяндап түшүндүрүп бергиле.
9. Томпок жана томпок эмес көп грандыктарга мисалдар келтиргиле.
10. Жөнөкөй көп грандыктарды атагыла.
11. Көп грандыктардын бетинин аянты кандай аныкталаарын түшүндүрүп бергиле.
12. Призманын аныктамасын айткыла. Элементтерин айтып, сүрөттөп көрсөтүп бергиле.
13. Туура призманы баяндагыла. Анын тик призмадан кандай айырмасы бар?
14. Параллелепипеддин аныктамасын, түрлөрүн, элементтерин айтып бергиле.
15. Параллелепипеддин кандай касиеттерин билесиңер?
16. Тик бурчтуу параллелепипеддин кандай касиеттери бар?
17. Призманын каптал бетинин аянты эмнеге барабар?
18. Тик (туура) призманын бетинин аянты кандай аныкталат?
19. Параллелепипеддин (жантык, тик, тик бурчтуу) бетинин аянтын табуу жолун түшүндүрүп бергиле.
20. Пирамиданын элементтерин, түрлөрүн айтып бергиле.
21. Туура пирамиданын кандай касиеттери бар?
22. Тетраэдрдин аныктамасын айтып бергиле. Сүрөтү кандай түзүлөт?
23. Пирамиданын негизине параллель тегиздик менен кескенде кандай касиеттерди баяндоого болот?
24. Кесилген пирамиданын аныктамасы, касиеттери кандай?
25. Туура пирамиданын бетинин аянты кандай аныкталат?
26. Кесилген пирамиданын бетинин аянтын аныктоону түшүндүрүп бергиле.
27. Туура көп грандыктардын кандай түрлөрүн билесиңер?
28. Туура көп грандыктын бетинин аянтын табуунун оңой жолу кандай?

III ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО МАСЕЛЕЛЕР

1. Чоңдугу 120° ка барабар болгон эки грандуу бурчтун ичинде жаткан чекит анын ар бир гранынан *a* аралыкта. Ал чекиттен эки грандуу бурчтун кырына чейинки аралыкты тапкыла.

2. Эгерде томпок көп грандуу бурчтун ар бир жалпак бурчу 60° болсо, ал канча грандуу болушу мүмкүн?

3. Беш грандуу томпок көп грандык болушу мүмкүнбү? Сүрөтүн сызып көрсөткүлө.

4. Куб, тетраэдр, беш бурчтуу призма үчүн Эйлердин теоремасын текшерип көрсөткүлө.

5. 8 кыры бар томпок көп грандык болобу? Сызгыла. Атагыла.

6. Туура эки тетраэдрдин тиешелүү кырлары барабар болсо, анда тетраэдрлер барабар болоорун далилдегиле.

7. Тетраэдрдин кайчылаш кырлары барабар. Тетраэдрдин бардык грандары барабар болоорун далилдегиле.

8. Туура төрт бурчтуу призманын негизинин диагоналы *a*, каптал гранынын диагоналы *b*. Призманын диагоналын тапкыла.

9. Тик параллелепипеддин негизинин жактары 8 *дм* жана 5 *дм*, негизинин диагоналдарынын бири 3,2 *дм*. Параллелепипеддин чоң диагоналы 13 *дм*. Анын экинчи диагоналын тапкыла.

10. Туура үч бурчтуу пирамиданын кесилишпөөчү кырлары өз ара перпендикулярдуу экендигин далилдегиле.

11. Туура алты бурчтуу пирамиданын негизинин жагы *a*, бийиктиги *m*. Диагоналдык кесилиштердин аянттарын аныктагыла.

12. Үч бурчтуу кесилген туура пирамиданын негиздеринин жактары 4 *дм* жана 1 *дм*, каптал кыры 2 *дм*. Кесилген пирамиданын бийиктигин жана апофемасын тапкыла.

13. Тик бурчтуу параллелепипеддин үч өлчөмү 3,4 жана 5. Параллелепипеддин диагоналы анын эң кичине гранына кандай бурч менен жантайган?

14. Туура: а) тетраэдрдин кубдун бетинде; б) октаэдрдин кубдун бетинде; в) октаэдрдин туура тетраэдрдин бетинде; г) октаэдрдин туура икосаэдрдин бетинде; д) кубдун туура додекаэдрдин бетинде; е) икосаэдрдин кубдун бетинде жаткан чокуларын көрсөткүлө.

15. а) Туура октаэдрдин кыры *a*. Удаалаш эки гранынын борборлорунун арасындагы аралыкты тапкыла. б) Туура октаэдрдин кырынын узундугу 3кө барабар. Карама-каршы параллель грандарынын арасындагы аралыкты тапкыла.

16. Туура октаэдрде төмөндөгүлөрдү далилдегиле: а) грандары эки-экиден параллель; б) карама-каршы грандарынын арасындагы аралыктар барабар; в) карама-каршы кырлары параллель.

17. Туура алты бурчтуу призманын бийиктиги h ка, негизинин жагы a га барабар. Призманын толук бетин тапкыла.

18. Кубдун бетинин аянты 54 $см^2$. Анын диагоналын тапкыла.

19. Тик параллелепипеддин негизи – диагоналдары 6 *см* жана 8 *см* болгон ромб. Анын каптал гранынын диагоналы 13 *см*. Параллелепипеддин толук бетинин аянтын тапкыла.

20. Тик бурчтуу параллелепипеддин грандарынын аянттары S_1, S_2, S_3. Анын кырларын тапкыла.

21. Туура тетраэдрдин бетинин аянты 36 $см^2$. Анын кырын тапкыла.

22. Туура үч бурчтуу призманын каптал гранынын диагоналы l ге барабар болуп, негизинин тегиздигине α бурчу менен жантайган. Призманын каптал бетинин аянтын тапкыла.

23. Туура төрт бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 2 *см*, негизиндеги эки грандуу бурчу 60°. Каптал бетинин аянтын тапкыла.

24. Туура n бурчтуу пирамиданын каптал бетинин аянты негизинин аянтынан үч эсе чоң. Негизинин жагына карата түзүлгөн эки грандуу бурчту тапкыла.

25. Кесилген пирамиданын негиздери жактары 8 *см* жана 4 *см* болгон квадраттар. Тең капталдуу трапеция болуп эсептелген каптал грандарынын бири негиздеринин тегиздиктерине перпендикулярдуу, ал эми ага каршы жаткан граны негизинин тегиздиги менен 60° бурч түзөт. Кесилген пирамиданын каптал бетинин аянтын тапкыла.

26. Эгерде кесилген туура төрт бурчтуу пирамиданын негиздеринин жактары a жана b га, ал эми каптал бетинин аянты негиздеринин аянттарынын суммасына барабар болсо, пирамиданын бийиктигин тапкыла.

27. Кыры a га барабар болгон октаэдрдин бетинин аянтын тапкыла.

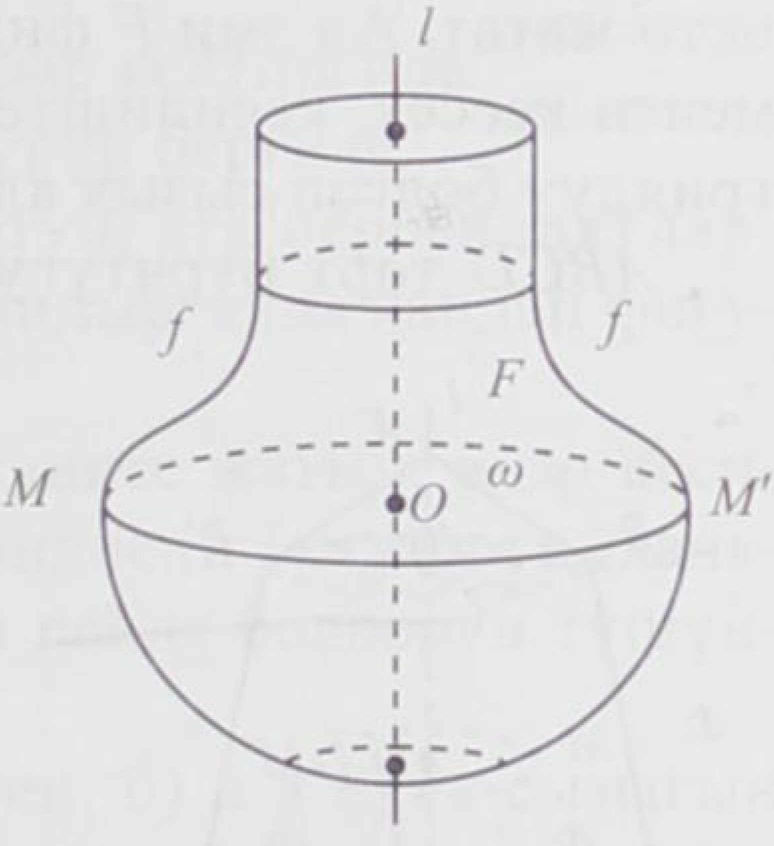
28. Кесилген пирамиданын негиздеринин аянттары 64 $м^2$ жана 100 $м^2$. Пирамида бийиктигинин ортосу аркылуу өтүп, негизине параллель болгон тегиздик менен кесилген. Кесилиштин аянтын тапкыла.

IV глава **АЙЛАНУУ ТЕЛОЛОРУ. АЛАРДЫН БЕТТЕРИНИН АЯНТТАРЫ**

§ 26. АЙЛАНУУ ТЕЛОЛОРУ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Мейкиндикте l огу берилсин. Мейкиндиктин ар бир чекитин ушул октун айланасында айландыруу аркылуу жүргүзүлгөн өзгөртүүнү карап көрөбүз.

Мейкиндикте l огунун айланасында φ бурчуна айландыруу деп, төмөндөгү 4 шарт аткарылгандай кылып өзгөртүүнү айтабыз (51-сүрөт).



51-сүрөт

1. Мейкиндиктеги ар кандай M чекити жана анын түспөлү болгон M' чекити l огуна перпендикуляр болгон бир эле a тегиздигинде жатат.

2. M жана M' чекиттеринен окко чейинки аралыктар барабар: $OM = OM'$.

3. MOM' бурчу берилген φ бурчуна барабар: $\varphi = \angle MOM'$.

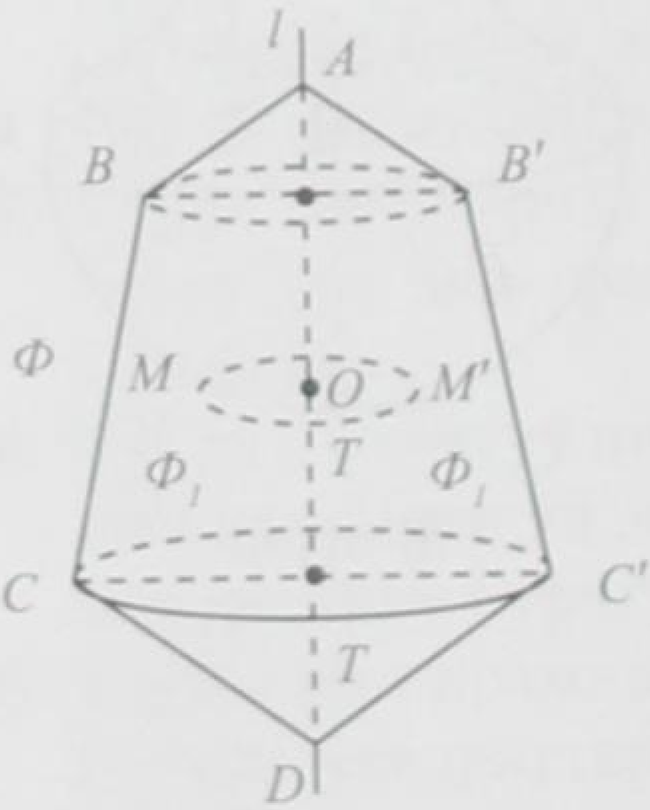
4. Эгерде $\varphi > 0$ болсо, OM ди OM' ти көздөй айландыруу багыты сааттын жебесинин айлануу багытына карата бирдей болот, ал эми $\varphi < 0$ болгондо, тескери багытта болот.

Бул аныктаманын негизинде мейкиндикте F фигурасын l огунун айланасында φ бурчуна бурсак, анда F' фигурасын алабыз. Мындай өзгөртүү F жана F' фигураларынын арасында өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүктү аныктаарын билүү анчалык кыйын эмес. l огунун айланасында буруудa φ бурчун 360° деп алсак, анда l огунун айланасында толук айландырууга ээ болобуз.

f жалпак сызыгы жана l огу берилсин (51-сүрөт). Эгерде f сызыгын l огунун айланасында айландырсак (башкача айтканда 360° ка бурсак), анда мейкиндикте F фигурасы пайда болот.

Ал фигураны айлануудан пайда болгон бет, же кыскача айлануу бети деп аташат. Мисалы, сфераны эске түшүрүп көргүлө. Аны жарым айлананы (f ти) диаметрдин (l огунун) айланасында айландыруудан алынган бет (F фигурасы) деп кароого болот. Демек, f сызыгынын ар бири M чекити l огуна перпендикулярдуу болгон тегиздикте айлананы сызып, анын борбору l огунда жатат. Бул шарт менен аныкталган бардык чекиттердин көптүгү мейкиндикте F фигурасын, башкача айтканда, айлануу бетин аныктайт. Демек, айлануу бетин айлануу огуна перпендикулярдуу тегиздик менен кескенде айлана пайда болот, анын борбору окто жатат. Ал эми F фигурасын l огу аркылуу өтүүчү тегиздик менен кессек, кесилиште f ге барабар жана бири-бирине симметриялуу болгон сызык алынат l.

$ABCD$ төрт бурчтугу берилсин (52-сүрөт). Аны Φ_l аркылуу белгилейли. Анын чектеги сызыгы сынык сызык гана эмес, каалагандай ийри сызык болушу мүмкүн.



52-сүрөт

Эгерде Φ_l фигурасын l огунун (AD түз сызыгынын) айланасында айландырсак, мейкиндикте Φ фигурасы пайда болот. Ал фигура айланууда пайда болгон тело, же кыскача, айлануу телосу деп аталат. Мында Φ_l фигурасынын ичинде жаткан каалагандай M чекитинин да октун айланасында айланууcу эсепке алынат (мисалы, шарды эске түшүргүлө).

Демек, бул айландырууда Φ_l фигурасынын ар бир M чекити l огуна перпендикуляр болгон тегиздикте тегеректи сызат, анын борбору l огунда жатат. Бул шарт менен аныкталган бардык M чекиттердин көптүгү мейкиндикте Φ телосун аныктайт. Ошентип, айлануу телосун айлануу огуна перпендикулярдуу тегиздик менен кескенде тегерек алынат, ал эми l айлануу огу аркылуу өтүүчү тегиздик менен кессек, кесилиште бири-бирине симметриялуу жана берилгенге (Φ_l ге) барабар болгон фигуралар пайда болот.

Ошентип, мейкиндикте айлануу фигурасы – бул жалпы түшүнүк. Ал фигура айлануу бети же айлануу телосу болушу мүмкүн. Бардык эле айлануу фигурасын тело деп эсептөөгө болбойт. Мисалы, тегерек, шакекче, сфера айлануу фигурасы болот, бирок алар тело болуп эсептелбейт (телонун аныктамасын, түшүнүгүн эске түшүрүп көргүлө).

Айлануу телолорунун ички чекиттери, томпоктугу жөнүндөгү түшүнүктөр мейкиндиктеги жалпы фигураларды аныктагандай эле мүнөздөлөт.

Айлануу телолорунун жөнөкөй түрлөрү болуп цилиндр, конус, кесилген конус, шар эсептелет, алар менен силер 9-класстан кыскача таанышсыңар.

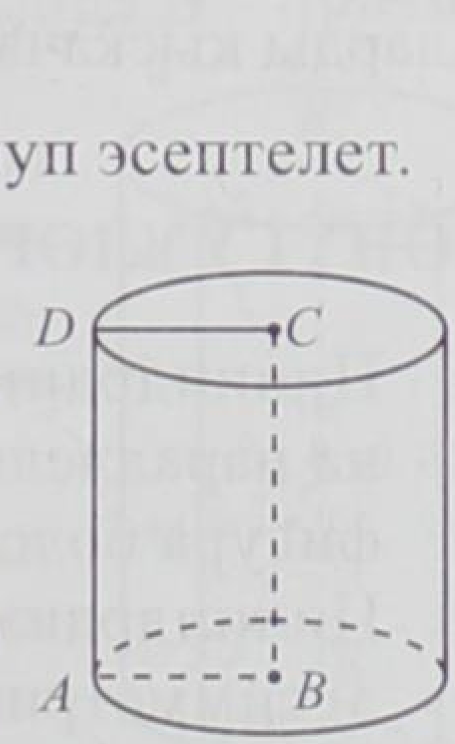
КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Айлануу бетин аныктагыла. Мисалдар келтиргиле.
2. Айлануу телосун аныктап, түшүндүрүп бергиле.
3. AB кесиндисинин A учу аркылуу өтүп, ага перпендикулярдуу болгон октун айланасында айландырганда кандай фигура пайда болот?
4. AB кесиндиси жана l огу бир тегиздикте жатып, алар кесилишпейт жана AB l. Эгерде AB кесиндисин l огунун айланасында айландырсак, кандай фигура пайда болоорун түшүндүрүп бергиле.
5. l огунун айланасында : а) M чекитин, б) $a \parallel l$ түз сызыгын в) $a \cap l$ түз сызыгын айландырганда кандай фигура пайда болоорун түшүндүрүп бергиле.
6. ABC үч бурчтугун BC жагы аркылуу өтүүчү октун айланасында айландырганда пайда болуучу фигураны сызып көрсөткүлө. Кандай фигура пайда болду? $AO \perp BC$ жана $O \in BC$ деп алгыла.

§ 27. ЦИЛИНДР

Цилиндр айлануу телолорунун бир түрү болуп эсептелет. Аны менен силер кыскача таанышсыңар.

Тик бурчтукту анын бир жагынын айланасында айландыруудан пайда болуучу тело **цилиндр** деп аталат.



53-сүрөт

Мисалы, $ABCD$ тик бурчтугун BC жагынын айланасында айландырсак, айлануу телосуна ээ болобуз, ал цилиндр болот (53-сүрөт). Мында $AB = DC$ кесиндилери барабар эки тегеректи сызат, алар цилиндрдин негиздери деп аталат. Цилиндрдин негизинин радиусун (AB же DC) цилиндрдин радиусу деп атайбыз.

Цилиндр пайда болгудай кылып тик бурчтук айландырыла турѓан жак (BC) цилиндрдин огу болуп эсептелет.

Мында $ABCD$ тик бурчтугунун AD кесиндиси октун айланасында айлануу бетин аныктайт, ал бет цилиндрдин каптал бети деп аталат. Бул беттин AD га барабар болгон ар бир кесиндиси цилиндрдин түзүүчүсүн аныктайт. Демек, цилиндрдин бардык түзүүчүлөрү бири-бирине барабар жана параллель.

$AD = BC$ кесиндилери цилиндрдин бийиктиги болуп эсептелет. Ал негиздери аркылуу аныкталуучу тегиздиктердин арасындагы аралыкка барабар.

Эгерде цилиндрди анын огу аркылуу өтүүчү тегиздик менен кессек, кесилиште тик бурчтук пайда болот. Анын бир жагы берилген цилиндрдин түзүүчүсүнө барабар, ал эми экинчи жагы болсо цилиндрдин негизинин диаметрине ($2AB$ га) барабар боло тургандыгы түшүнүктүү.

Цилиндрди анын огуна перпендикулярдуу тегиздик менен кескенде кесилиште негизине барабар болгон тегерек пайда болот.

Эгерде тегиздик цилиндрдин түзүүчүсү аркылуу өтүп, цилиндр менен башка жалпы чекитке ээ болбосо, анда ал цилиндрге жаныма тегиздик деп аталат.

Эгерде цилиндрдин түзүүчүлөрү бири-бирине параллель болуп, бирок негизинин тегиздигине перпендикулярдуу болбосо, анда ал жантык цилиндр деп аталат. Кээде негиздери ийри сызык менен чектелген цилиндрлер да кездешет. Алар айлануу телосу болуп эсептелбейт. Демек, тик тегерек цилиндр гана айлануу телосу боло алат, биз төмөндө тик тегерек цилиндрлерди карайбыз. Аларды кыскача, цилиндр деп эле атайбыз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Цилиндрдин: 1) огу аркылуу; 2) негизине параллель; 3) огуна параллель жүргүзүлгөн тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот? Кесилиштерди чиймеде көрсөткүлө.

2. Цилиндрдин: 1) симметрия борбору; 2) симметрия огу; 3) симметрия тегиздиги болобу? Канча?

3. Цилиндрдин радиусу 8 *см*, бийиктиги 20 *см*. Анын октук кесилишинин аянтын тапкыла.

4. Цилиндрдин октук кесилишинин аянты 48 $м^2$, бийиктиги 4 *м*. Анын радиусун эсептегиле.

5. Цилиндрдин бийиктиги 3 *дм*, диаметри 4 *дм*. Анын октук кесилишинин диагоналын тапкыла.

6. Цилиндрдин радиусу 2,5 *см*, октук кесилишинин диагоналы 10 *см*. Анын бийиктигин тапкыла.

7. Цилиндрдин бийиктиги h, радиусу r. Эки түзүүчүсү аркылуу өткөн кесүүчү тегиздик негизинин айланасынан 60° жааны кесип өтөт. 1) Кесилиштин аянтын тапкыла; 2) Кесилиш цилиндрдин огунан кандай аралыкта болот?

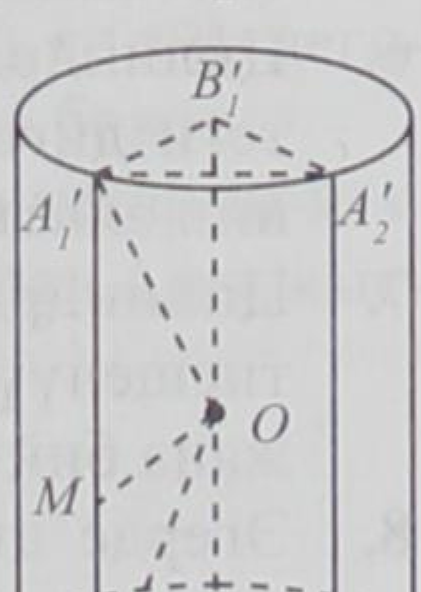
8. Цилиндрдин бийиктиги 5 *дм*, радиусу 10 *см*. Анын огунан 8 *см* аралыкта окко параллель жүргүзүлөн кесилиштин аянтын тапкыла.

9. Октук кесилиштин аянты 8 $дм^2$, негизинин аянты 12 $дм^2$. Окко параллель болуп, андан 1 *дм* аралыкта жүргүзүлгөн кесилиштин аянтын тапкыла.

10. Цилиндрдин радиусу R, бийиктиги H, ал эми огуна параллель кесилиштин аянты S. Кесилиштин тегиздиги октон кандай аралыкта?

§ 28. ЦИЛИНДРДИН БЕТИНИН АЯНТЫ

Радиусу R ге барабар болгон цилиндр берилсин. *А* га туура n бурчтуу призма ичтен сызылган, башкача айтканда, призманын негиздеринин чокулары цилиндрдин негиздеринин айланасында жатат деп эсептейбиз (54-сүрөт). Анын негизинин бир жагы $A_1A_2 = a$ болсун. Берилген цилиндр тик, тегерек болгондуктан, анын түзүүчүсү призманын каптал кырына (же бийиктигине) барабар болот, башкача айтканда $A_1A_1' = H = l$, мында H – призманын бийиктиги l – цилиндрдин түзүүчүсү.



54-сүрөт

Туура тик призманын каптал бетинин аянты $S = P \cdot H$ (1) формуласы аркылуу аныктала тургандыгы белгилүү, $P = n \cdot a$ – призманын негизиндеги, башкача айтканда, цилиндрдин негизине ичтен сызылган туура n бурчтуктун периметри.

Эгерде туура призманын грандарынын санын эки эселентип көбөйтсөк, анда призманын каптал бетинин аянты цилиндрдин каптал бетинин аянтына жакындайт. Бул учурда анын негизинин периметри сырттан сызылган айлананын узундугуна жакындайт. Ал эми призманын H бийиктиги өзгөрүүсүз калат. Анда цилиндрдин каптал бетинин аянтын ага ичтен сызылган туура призманын каптал грандарынын санын чексиз эки эселентип чоңойткондогу аянтынын предели катарында кароого болот. Мында $\lim\limits_{n\to\infty} P = C$ деп жазууга мүмкүн (C – цилиндрдин негизиндеги айлананын узундугу). $C = 2\pi R$ экендиги белгилүү. Анда (1) ден $C_{кц} = 2\pi RH$ (2) болот, $S_{кц}$ – цилиндрдин каптал бетинин аянты. Демек, цилиндрдин каптал бетинин аянты анын негизинин айланасынын узундугун бийиктигине көбөйткөнгө барабар.

Ал эми цилиндрдин толук бетинин аянты: $S = 2\pi RH + 2\pi R^2$ (3) боло тургандыгы түшүнүктүү, πR^2 – цилиндрдин негизинин аянты.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Цилиндрдин каптал бетинин аянтынын октук кесилишинин аянтына катышын тапкыла.
2. Жагы a га барабар квадратты жагынын айланасында айландырганда пайда болгон цилиндрдин толук бетинин аянтын аныктагыла.
3. Жагы a га барабар квадрат анын бир жагына параллель болгон октун айланасында айланат. Ал ок квадраттын жакын жаткан жагынан, ошондой эле a аралыкта болсо, айлануу бетинин аянтын тапкыла.
4. Жактары a жана b болгон тик бурчтук a жагынын айланасында айланат. Айлануу бетинин аянтын тапкыла.
5. Цилиндрдин радиусу R, ал эми октук кесилишинин диагоналы d. Цилиндрдин: 1) каптал бетинин; 2) толук бетинин аянтын аныктагыла.
6. Цилиндрдин октук кесилишинин диагоналы d, ал негизинин тегиздигине φ бурчу менен жантайган. Цилиндрдин негизинин аянтын жана каптал бетинин аянтын тапкыла.
7. Цилиндрдин бетинин аянты жана каптал бетинин аянты тиешелүү түрдө 70 $дм^2$ жана 30 $дм^2$. Цилиндрдин радиусун жана бийиктигин аныктагыла.
8. Эгерде цилиндрдин бир негизинин d диаметри экинчи негизинин борборунап φ бурчу менен көрүнсө, анын бетинин аянтын тапкыла.

9. Цилиндрдин октук кесилишинин аянты S болсо, каптал бетинин аянтын аныктагыла.

10. Цилиндрдин негизинин аянты S, ал эми октук кесилишинин аянты Q. Цилиндрдин толук бетин аныктагыла.

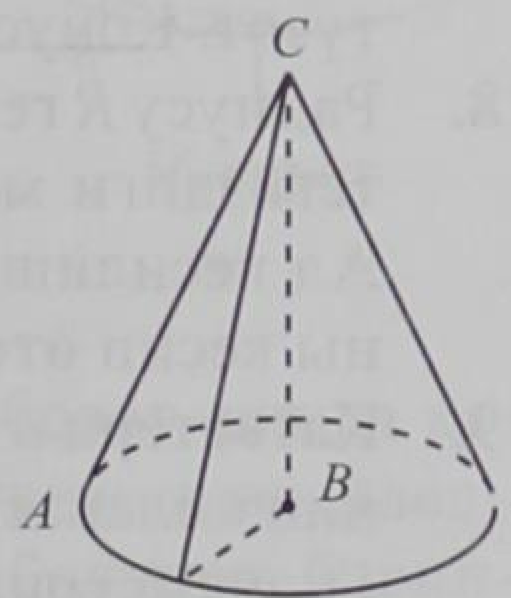
11. Тик бурчтуктун жактары a жана b. Аны ар бир жагынын айланасында айландыруудан пайда болгон беттердин каптал беттеринин аянттары барабар болоорун далилдегиле.

§ 29. КОНУС

Айлануу телолорунун дагы бир түрү конус болуп эсептелет.

Тик бурчтуу үч бурчтукту анын катетинин айланасында айландыруудан пайда болгон тело конус деп аталат.

Мисалы, ABC тик бурчтуу үч бурчтугун BC катетинин айланасында айландырсак, айлануу телосуна ээ болобуз, ал конус болуп эсептелет (55-сүрөт). Мында $\angle ABC = 90°$, ал эми BA кесиндиси бул айландырууда тегеректи сызат. Ал тегерек конустун негизи болот, анын радиусу – конустун радиусу деп эсептелет.



55-сүрөт

Конус пайда болгудай кылып, тик бурчтуу үч бурчтук айландырыла турган катет (BC) конустун огу деп аталат.

Конустун каптал бети, түзүүчүсү, бийиктиги, жанымa тегиздиги цилиндрдегиге окшош аныкталат.

Эгерде конусту огу аркылуу өтүүчү тегиздик менен кессек, кесилиште тең капталдуу үч бурчтук пайда болот, анын капталдары конустун түзүүчүсүнө (AC га), ал эми негизи конустун негизинин диаметрине ($2AB$ га) барабар болот.

Кээде цилиндрдегидей эле тик тегерек эмес конустар да кездешет. Биз төмөндө тик тегерек конусту гана карайбыз. Аны, кыскача, конус деп эле атайбыз.

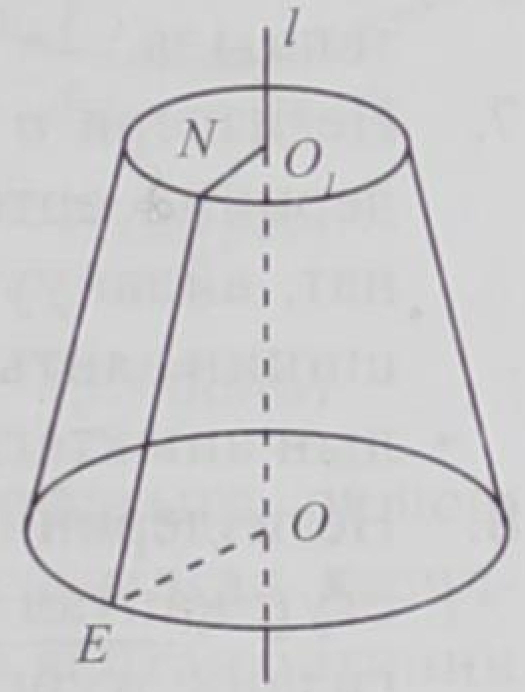
КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Конусту: 1) огу аркылуу өткөн; 2) негизине параллель; 3) огуна параллель тегиздик менен кескенде кесилиште кандай фигура пайда болот? Кесилиштерди чиймеде көрсөткүлө.
2. Конустун: 1) симметрия борбору; 2) симметрия огу; 3) симметрия тегиздиги болобу? Канча?
3. Конустун радиусу 0,6 *дм*, бийиктиги 0,8 *дм*. Конустун түзүүчүсүн жана октук кесилишинин аянтын тапкыла.
4. Конустун октук кесилишинин аянты 54 $м^2$, бийиктиги 9 *м*. Конустун түзүүчүсүн жана радиусун тапкыла.
5. Конустун октук кесилишинин аянты 72 $см^2$, түзүүчүсү $\sqrt{180}$ *см*. Анын радиусун жана бийиктигин аныктагыла.
6. Конустун түзүүчүсү l, негизинин тегиздиги менен φ бурчун түзөт. Конустун: 1) бийиктигин; 2) диаметрин; 3) негизинин аянтын; 4) октук кесилишинин аянтын тапкыла.
7. Конустун бийиктиги 18 *дм* болуп, түзүүчүсү менен 30° бурч түзөт. Конустун түзүүчүсүн жана диаметрин тапкыла.
8. Радиусу R ге барабар конуста чокусу аркылуу анын негизинин тегиздиги менен 60° бурч түзгөндөй кесилиш жүргүзүлгөн. Ал кесилиштин тегиздиги негизиндеги айланадан 120° жааны кесип өтөт. Кесилиштин аянтын тапкыла.
9. Катеттери a жана b болгон тик бурчтуу үч бурчтук b катетинин айланасында айланат. Айлануудан пайда болгон беттин: 1) диаметрин; 2) түзүүчүсүн; 3) негизинин аянтын; 4) октук кесилишинин аянтын тапкыла.
10. Конустун бийиктиги h, радиусу R. Анын эки түзүүчүсү аркылуу өткөн тегиздик негизинин айланасынан 60° жааны кесип өтөт. 1) Кесилиштин негизи конустун огунан кандай аралыкта болот? 2) Кесилиштин аянтын тапкыла.
11. Конустун негизинин аянты S, түзүүчүсү l. Конустун октук кесилишинин аянтын тапкыла.

§ 30. КЕСИЛГЕН КОНУС

Тик бурчтуу трапецияны анын кичине каптал жагынын айланасында айландыруудан пайда болгон тело кесилген конус деп аталат.

Мисалы, EOO1N тик бурчтуу трапециясын ($EO \perp O_1O$, $NO_1 \perp OO_1$, $EO \parallel NO_1$) OO_1 жагынын (l огунун) айланасында айландырсак, кесилген конус пайда болот (56-сүрөт). Трапециянын OE жана O_1N негиздерин l огунун айланасында айландырганда алар тиешелүү түрдө кесилген конустун негиздери деп аталуучу тегеректерди аныктайт, алардын тиешелүү борборлору O жана O_1 радиустары OE жана O_1N болот.



56-сүрөт

Кесилген конустун каптал бети, түзүүчүсү (EN), бийиктиги (OO_1), жаныма тегиздиги цилиндрдегиге окшош аныкталат. Кесилген конустун октук кесилишинде тең капталдуу трапеция пайда болоору түшүнүктүү, анткени – ал трапециянын негиздери кесилген конустун негиздеринин диаметрлери, каптал жактары кесилген конустун түзүүчүлөрү болот.

Толук конусту негизине параллель болгон тегиздик менен кескенде кесилген конус пайда болот деп да кароого болот. Чындыгында эле, толук конусту негизине параллель болгон тегиздик менен кескенде ал эки бөлүккө бөлүнөт: биринчиси толук конуска окшош болгон кичине конус, экинчиси–кесилген конус болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Кесилген конусту: 1) огу аркылуу өткөн; 2) негиздерине параллель; 3) огуна параллель болуп, бирок эки негизин тең кесип өтүүчү тегиздик менен кессек, кесилишинде кандай фигура пайда болот? Кесилиштердин сүрөттөрүн чиймеде көрсөткүлө.

2. Кесилген конустун: 1) симметрия борбору; 2) симметрия огу; 3) симметрия тегиздиги болобу? Канча?

3. Кесилген конустун негиздеринин радиустары 8 *см* жана 5 *см*, бийиктиги 4 *см*. Анын: 1) түзүүчүсүн; 2) октук кесилишинин аянтын; 3) октук кесилиштин диагоналын тапкыла.

4. Кесилген конустун октук кесилишинин аянты 27 $м^2$, бийиктиги 9 $м$, негиздеринин биринин радиусу 4 $м$. Анын экинчи негизинин радиусун жана түзүүчүсүн аныктагыла.
5. Кесилген конустун октук кесилишинин аянты 48 $дм^2$, негиздеринин радиустары 9 $дм$ жана 3 $дм$. Анын: 1) бийиктигин; 2) түзүүчүсүн; 3) негиздеринин аянттарынын суммасын тапкыла.
6. Кесилген конустун түзүүчүсү l чоң негизинин тегиздиги менен φ бурчун түзөт. Кесилген конустун: 1) бийиктигин; 2) кичине негизинин радиусу b болсо, чоң негизинин радиусун тапкыла.
7. Негиздери a жана b болгон тең капталдуу трапеция негиздеринин ортолору аркылуу өткөн октун айланасында айланат, айлануу бетинин бийиктиги h. Анын 1) октук кесилишинин аянтын; 2) түзүүчүсүн; 3) октук кесилиштин диагоналын аныктагыла.
8. Негиздеринин радиустары R жана r болгон кесилген конустун каптал бетиндеги эки түзүүчүсү аркылуу кесүүчү тегиздик жүргүзүлгөн. Ал тегиздик негиздеринин айланаларын 90° жаа боюнча кесип, чоң негизине 60° бурч менен жантайган. Кесилиштин аянтын тапкыла.
9. Конус чокусунан d аралыкта негизине параллель тегиздик менен кесилген. Эгерде берилген конустун радиусу R, ал эми бийиктиги H болсо, анда кесилген конустун кичине негизинин аянтын тапкыла.

   Көрсөтмө. Конустардын октук кесилишин жүргүзүп, алынган үч бурчтуктардын окшоштугунан пайдаланып, кичине негизинин радиусун аныктоо керек.

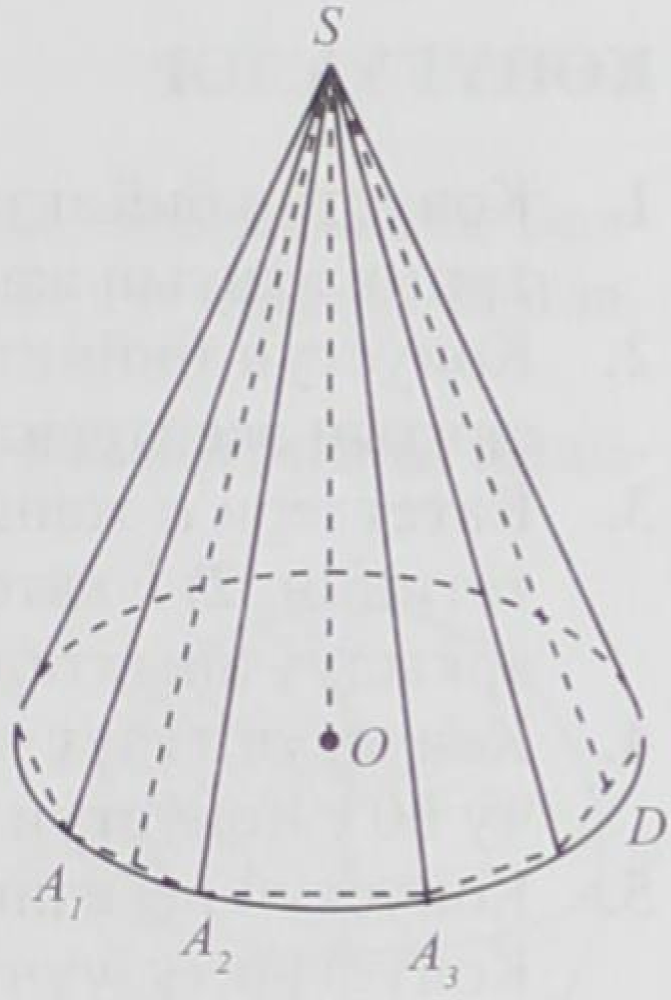
§ 31. КОНУСТАРДЫН БЕТТЕРИНИН АЯНТТАРЫ

Конус берилген (57-сүрөт). Ал конустун негизине $A_1A_2...A_n$ туура n бурчтугун ичтен сызып, анын чокуларын конустун S чокусу менен туташтырсак, конуска ичтен сызылган туура n бурчтуу пирамида пайда болот. Анын каптал бетинин аянты (§ 23) $S = \frac{1}{2} P \cdot m$ (1) болот. Мында P – пирамиданын негизинин периметри, $m = SD$ – апофемасы.

Эгерде § 28 дегидей талкуулоолорду жүргүзсөк, анда $\lim\limits_{n\to\infty} P = C = 2\pi R$ болот, С – конустун негизиндеги айлананын узундугу, R – радиусу. Бул учурда m апофемасы конустун l түзүүчүсүнө барабар болуп калат. Анда конустун каптал бетинин аянты (1) формуланын негизинде

$$C_K = \pi Rl \qquad (2)$$

болуп калат. Демек, конустун каптал бетинин аянты негизинин айланасынын узундугунун жарымын түзүүчүсүнө көбөйткөнгө барабар. Ал эми конустун толук бетинин аянты



57-сүрөт

$$S_T = \pi Rl + \pi R^2 \qquad (3) \qquad \text{же } S_T = \pi R(l + R) \qquad (3') \text{ болот.}$$

Кесилген конустун бетинин аянты жогорудагыга окшош аныкталат. Ал үчүн кесилген конуска ичтен сызылган кесилген туура n бурчтуу пирамиданы сызабыз. Анын каптал бетинин аянты $S = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)m_K$ (4) формуласы менен аныкталаары белгилүү, мында P_1, P_2 – кесилген пирамиданын негиздеринин периметрлери, m_K – апофемасы.

Эгерде § 28 гидей талкуулоолорду жүргүзсөк, P_1, P_2 периметрлери кесилген конустун негиздеринин айланаларынын узундугуна, ал эми m_K – түзүүчүсүнө умтулат. Натыйжада

$$S_K = \pi (R + r)l \quad (5)$$

болот, мында R, r – кесилген конустун негиздеринин радиустары, l – түзүүчүсү. Демек, кесилген конустун каптал бетинин аянты негиздеринин айланаларынын узундуктарынын суммасынын жарымын түзүүчүсүнө көбөйткөнгө барабар.

Эми кесилген конустун толук бетинин аянты оңой аныкталат:

$$S_T = \pi (R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2 \qquad (6)$$

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Конустун бийиктиги 8 *м*, диаметри 12 *м*. Конустун каптал бетинин аянтын жана толук бетинин аянтын тапкыла.
2. Конустун бийиктиги 6 *дм*, түзүүчүсү 10 *дм*. Толук бетинин аянтын эсептегиле.
3. Катеттери a жана b болгон тик бурчтуу үч бурчтук: 1) a катетинин; 2) b катетинин айланасында айланат. Айлануу бети аркылуу аныкталган конустун бетинин аянтын аныктагыла.
4. Конустун түзүүчүсү l, октук кесилишинин чокусундагы бурчу $60°$. Конустун толук бетинин аянтын тапкыла.
5. Конустун негизинин аянты S, ал эми анын бетинин аянты $3S$. Конустун түзүүчүсү негизинин тегиздигине кандай бурч менен жантайган?
6. Кесилген конустун каптал бетинин аянтын $\pi l(R + r)$ формуласы аркылуу эсептелээрин далилдегиле, мында R, r – негиздеринин радиустары, l – түзүүчүсү.

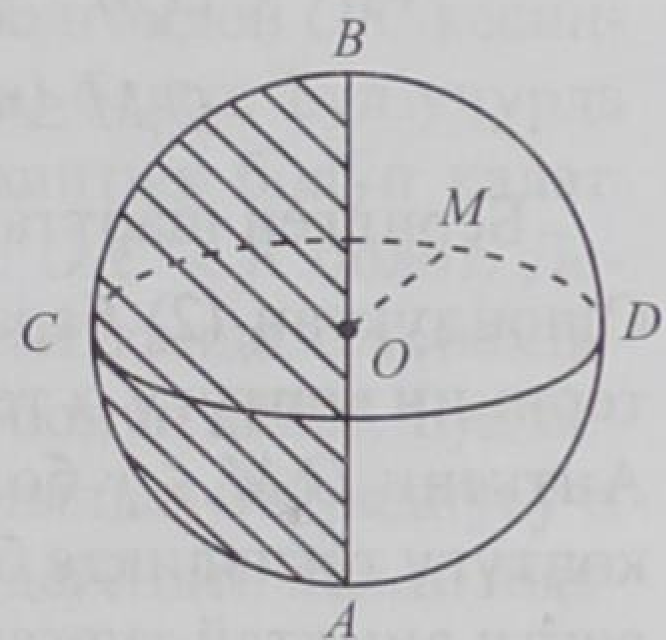
   Көрсөтмө. Чоң негиз менен берилген толук конустун каптал бетинин аянтынан кичине негиз менен берилген конустун каптал бетинин аянтын кемитүү керек.
7. Негиздери a жана b болгон тик бурчтуу трапеция негиздерине перпендикулярдуу жана узундугу h ка барабар каптал жагынын айланасында айланат. Айлануудан пайда болгон кесилген конустун толук бетинин аянтын тапкыла.
8. Кесилген конустун бийиктиги 8 *дм*, негиздеринин диаметрлери 20 *дм* жана 8 *дм*. Анын: каптал бетинин аянтын жана толук бетинин аянтын тапкыла.
9. Кесилген конустун бийиктиги h, негиздеринин радиустарынын катыштары 1:3 катышына барабар. Түзүүчүсү менен негизинин тегиздигинин арасындагы бурч $45°$. Кесилген конустун бетинин аянтын тапкыла.
10. Тик бурчтуу трапеция негиздерине перпендикулярдуу жагынын айланасында айланат. Эгерде трапециянын кичине негизи 4 *дм*, ал эми каптал жагы 20 *дм* болсо, айлануудан пайда болгон беттин аянтын эсептегиле.
11. Кесилген конустун октук кесилишинин диагоналы d чоң негизи менен φ бурчун, ал эми түзүүчүсү менен $90°$ бурчту түзөт. Анын каптал бетинин аянтын тапкыла.
12. Конустун нетизинин аянты Q, ал эми түзүүчүсү негизи менен φ бурчун түзөт. Конустун каптал бетинин аянтын тапкыла.

    Көрсөтмө. Конустун негизинин радиусун берилген аянты аркылуу туюнтуу керек.

§ 32. ШАР ЖАНА СФЕРА

Тегиздикте айлана менен тегерек кандай байланышта болсо, мейкиндикте сфера менен шар да ошолорго окшош байланыштагы фигуралар болуп эсептелет.

Жарым тегеректи, аны чектеп турган диаметринин айланасында айландыруудан пайда болгон тело шар деп аталат.



58-сүрөт

Мисалы, *ABC* жарым тегерегин *AS* диаметринин айланасында айландырсак, айлануу телосу пайда болот, ал шарды аныктайт (58-сүрөт).

Жарым тегеректин борбору (*O*) шардын ***борборун***, ал эми диаметри (*AB*) шардын ***диаметрин*** аныктайт. Демек, шардын огу анын диаметри болуп да эсептелет.

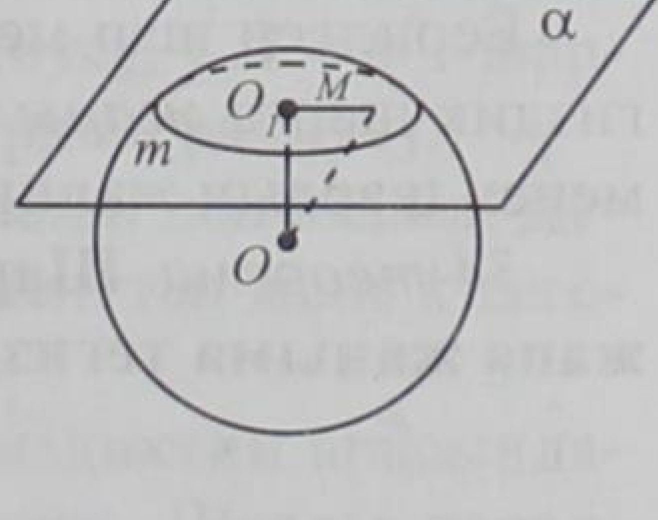
Шардын борборунан бетинде жаткан каалаган *M* чекитине чейинки аралык ($OM = R$) шардын ***радиусу*** болот. Шардын бетинде жаткан ар кандай эки чекитти туташтыруучу кесинди анын ***хордасы*** деп аталат.

Шарды чектеп турган бет же шардык бет сфера деп аталат. Шардын борбору, огу, радиусу, диаметри, хордасы сферанын да борбору, огу, радиусу, диаметри, хордасы болуп эсептелет.

Шарды төмөндөгүдөй дагы аныктоого болот. ***O* чекитинен баштап эсептегенде *R* аралыгынан чоң эмес алыстыкта жаткан мейкиндиктеги бардык чекиттердин көптүгүнөн турган тело шар деп аталат**. Анда шардын каалагандай *M* чекити $OM < R$ болот. Демек, шарды туюк, томпок тело катары кароого мүмкүн.

Борбору *O*, радиусу *R* ге барабар болгон шарды, кыскача $\omega(O; R)$ аркылуу, анын сферасын $C(O; R)$ аркылуу белгилейбиз.

33-теорема. **Шар менен тегиздиктин ар кандай кесилиши тегерек болот. Ал тегеректин борбору шардын борборунан тегиздикке түшүрүлгөн перпендикулярдын негизинде жатат.**



59-сүрөт

Д а л и л д ө ө : $\omega(O; R)$ шары жана аны кесүүчү α тегиздиги берилсин (59-сүрөт). α га OO перпендикулярын жүргүзөбүз. α тегиздигинен шарда жаткан каалагандай *M* чекитин алабыз. Андай чекитти табууга мүмкүн, анткени шарт боюнча α менен шар кесилишет.

M чекитин O жана O_1 менен туташтырып OO_1M үч бурчтугуна ээ болобуз. Пифагордун теоремасын колдонсок,

$$OM^2 = OO_1^2 + O_1M^2, \quad (1)$$

$M \in \omega(O,R)$, анда $OM \leq R$ болот. Демек, (1) ден $O_1M^2 = OM^2 - OO_1^2$, башкача айтканда

$$O_1M^2 \leq R^2 - OO_1^2, \quad \text{же}$$

$$O_1M \leq \sqrt{R^2 - OO_1^2}. \quad (2)$$

Берилген шартта $r = \sqrt{R^2 - OO_1^2}$ (3) мааниси турактуу.

Ошондуктан (2) барабарсыздыкты канааттандыруучу М чекиттеринин көптүгү α тегиздигинде кандайдыр тегеректи аныктайт. Анткени $O_1M \leq r$ болгондой кылып алынуучу M чекиттеринин көптүгү тегиздикте борбору O_1, радиусу r ге барабар болгон тегеректи аныктай тургандыгы белгилүү.

Ошону менен бирге, бул тегеректин каалагандай M чекити шарда жатат, себеби $OM \leq R$. Демек, α тегиздиги менен шардын кесилиши борбору O_1 де жаткан жана радиусу r ге барабар болгон тегерек болот. Теорема далилденди.

1-натыйжа. **Шардын борбору аркылуу өтүүчү тегиздик менен анын кесилиши эң чоң тегерек болот.**

Бул натыйжанын тууралыгы (3) барабардыктан келип чыгат.

Шардын борбору аркылуу өтүүчү тегиздикти диаметрлик тегиздик деп аташат.

2-натыйжа. **Шардын ар кандай диаметрлик тегиздиги анын симметрия тегиздиги боло алат.**

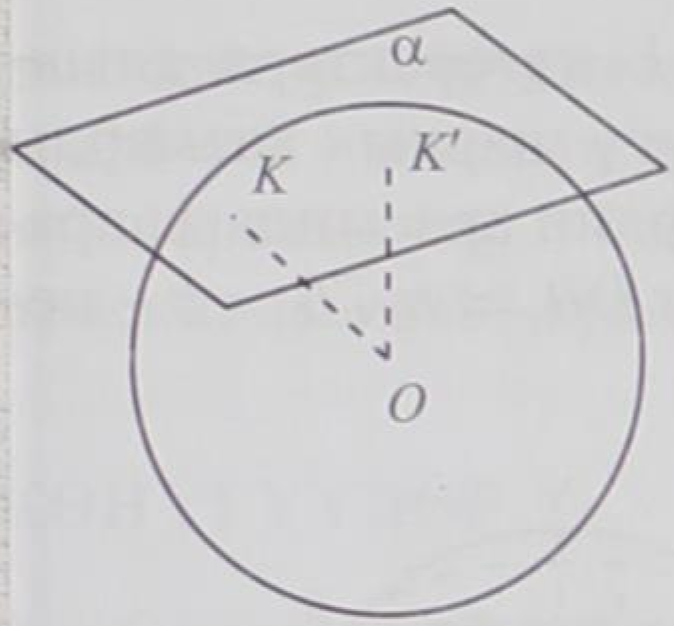
3-натыйжа. **Шардын борбору анын симметрия борбору болуп эсептелет.**

Акыркы эки натыйжаны шардын аныктамасына жана симметриялардын аныктамаларына негиздеп далилдөөгө мүмкүн.

4-натыйжа. **Шардын борборунан бирдей алыстыкта жаткан эки тегиздиктин шар менен кесилиштери барабар тегеректер болушат.**

Берилген шар менен бир гана жалпы чекитке ээ болуучу тегиздик шарга ***жаныма тегиздик*** деп аталат. Жаныма тегиздиги менен шардын жалпы чекитин жануу чекити деп атайбыз.

34-теорема. **Шардын жануу чекитине жүргүзүлгөн радиус жана жаныма тегиздик перпендикуляр болушат.**



60-сүрөт

Д а л и л д ө ө: $\omega(O;R)$ шары берилсин (60-сүрөт). α жануу тегиздиги шарды K чекитинде жанып өтсүн. Анда $OK = R$ болот. $OK \perp \alpha$ болоорун далилдейбиз.

Тескерисинче, OK кесиндиси α тегиздигине перпендикулярдуу эмес деп эсептейли. Анда $OK' \perp \alpha$ болгондой OK' кесиндисин табууга ($K' \in \alpha$) болот. Бул учурда OK кесиндиси α га жантык болуп калат. Жогорудагы белгилүү теореманын негизинде $OK' < R$ болот. Демек, K' чекити шардын ичинде жатат, башкача айтканда, α тегиздиги берилген шар менен эки жалпы чекитке ээ болуп калат. Бул берилген шартка карама-каршы. Ал карама-каршылык OK радиусу α жаныма тегиздигине перпендикулярдуу эмес дегенден келип чыкты. Ошондуктан $OK \perp \alpha$ болот. Теорема далилденди.

35-теорема. (34-теоремага тескери теорема). **Шардын радиусуна ал шардын бетинде жаткан учу аркылуу ага перпендикулярдуу болуп жүргүзүлгөн тегиздик жаныма болот.**

Бул теореманы 34-теоремага окшоштуруп, өз алдыңарча далилдегиле.

Берилген шар менен бир гана жалпы чекитке ээ болуучу түз сызык шарга жаныма түз сызык деп аталат. Ал жануу чекитине жүргүзүлгөн радиуска перпендикулярдуу болот (35-теорема).

Ошентип, $\omega(O;R)$ шарынын O борборунан a тегиздигине чейинки аралык d га барабар болсо, анда:

1. $d < R$ болгондо тегиздик менен шар кесилишет, алардын кесилиши тегерек болот.

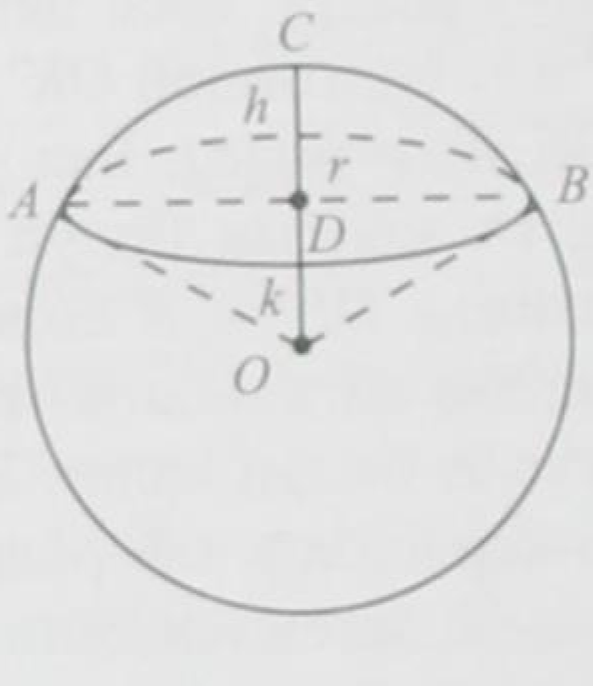
2. $d = R$ болгондо тегиздик шарды жанып өтөт.

3. $d > R$ болгондо тегиздик менен шар жалпы чекитке ээ болбойт, б.а. кесилишпейт.

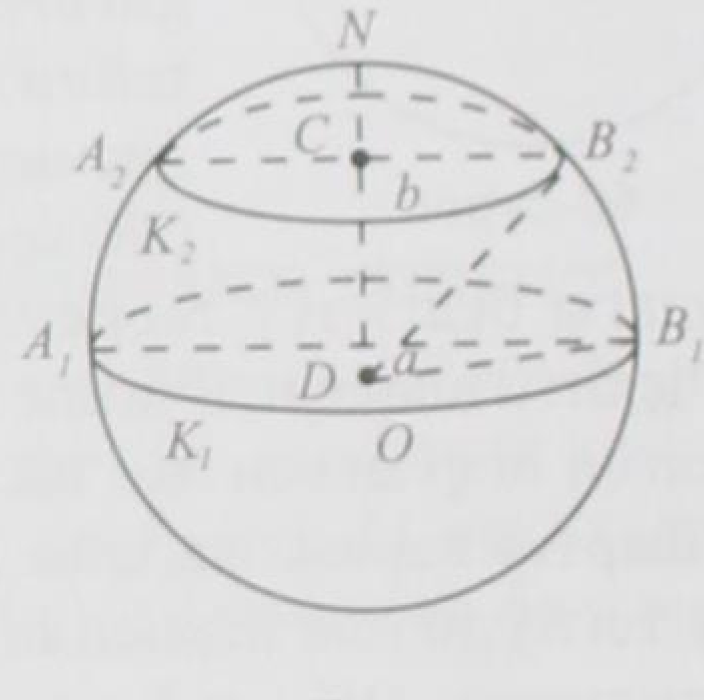
Тегиздик аркылуу бөлүнүп алынган шардын бөлүгү ***шардык сегмент*** деп аталат. Шардын ACB бөлүгү (61-сүрөт) шардык сегмент болот. Шардын тегиздик менен кесилишиндеги k тегереги шардык сегменттин негизи, $DB = r$ анын радиусу, $CD = h$ – шардык сегменттин бийиктиги болот. $OB = R$ шардын радиусу.

Шардык сегменттин бети ***сфералык сегмент*** деп аталат. Демек, шардык сегменттин бети сфералык сегменттен жана k тегерегинен турат.

Шарды кесип өтүүчү параллель эки тегиздиктин арасындагы шардын бөлүгү шардык катмар деп аталат. Шарды параллель тегиздиктер менен кескенде k_1 жана k_2 тегеректери алынсын (62-сүрөт). Анда шардын $A_1B_1B_2A_2$ бөлүгү шардык катмарды аныктайт. k_1, k_2 анын негиздери, ал негиздердин арасындагы аралык $CD = h$ – шардык катмардын бийиктиги $DB_1 = a$, $CB_2 = b$ – негиздеринин радиустары болуп эсептелет.



61-сүрөт

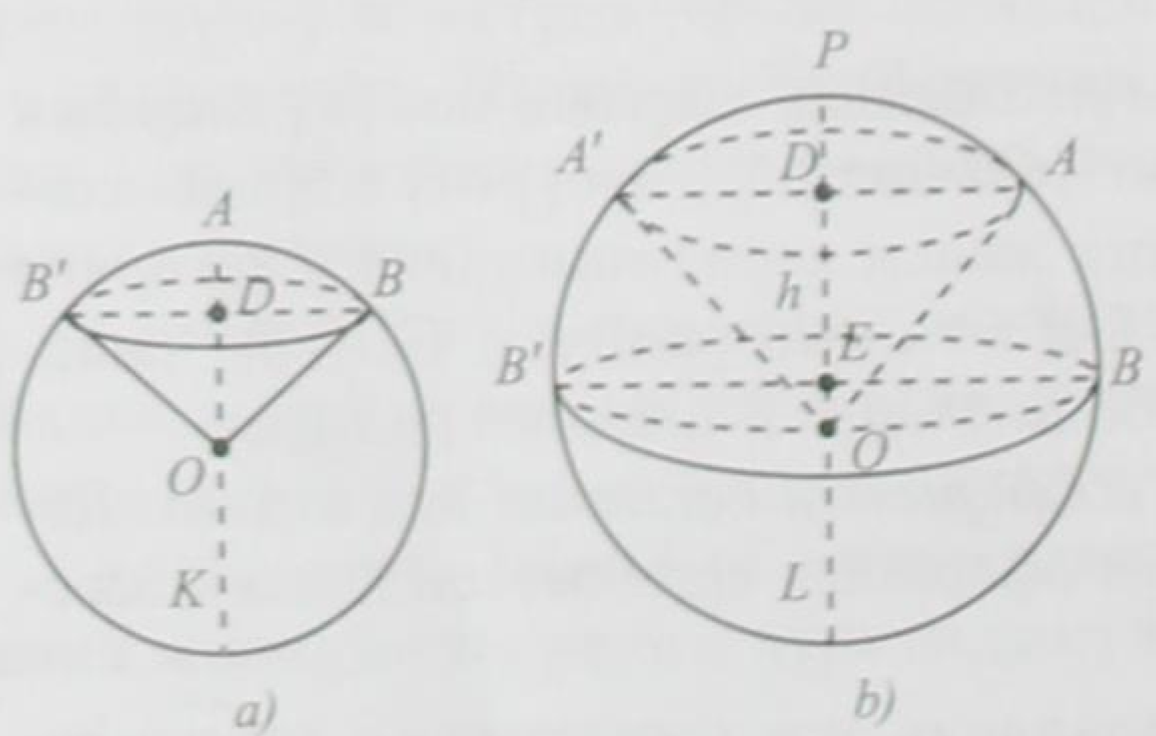


62-сүрөт

Сфераны кесип өтүүчү параллель эки тегиздиктин арасындагы сферанын бөлүгү ***шардык алкак*** деп аталат. Анын шардык катмардын каптал бети деп да атайбыз.

Эми шардык секторду карайбыз (63-сүрөт). Тегеректик секторду анын диаметринин айланасында айландыруудан пайда болгон айлануу телосу ***шардык сектор*** деп аталат. Шардык сектордун эки түрү болот. Эгерде тегеректик сектордун радиусу айлануу огунда, башкача айтканда, *AK* диаметринде жатса (63*а*-сүрөт), анда ал учурда пайда болгон шардык сектор (*BOB'*) 1-түрдөгү же жөнөкөй шардык секторду аныктайт.

Эгерде *PL* диаметри *AOB* тегеректик сектордун *AB* жаасын кесип өтпөсө (63*б*-сүрөт), бул учурда пайда болгон *ABOA'B'* шардык сектор 2-түрдөгү шардык секторду же көңдөй шардык секторду аныктайт. 1-түрдөгү шардык сектордун негизинин бети шардык сегмент, ал эми 2-түрдөгүнүкү – шардык алкак боло тургандыгы түшүнүктүү. Албетте, 1-түрдөгү шардык сектор томпок фигура, ал эми 2-түрдөгү шар-



63-сүрөт

дык сектор – томпок эмес фигура болуп эсептелет. Мында $EB = a$, $DA = b$ – жаанын хордасынын учтарынан айлануу огуна чейинки аралыктар, $h = ED$ – хорданын айлануу огуна түшүрүлгөн проекциясы (63*б*-сүрөт).

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Сферанын борбору анын симметрия борбору болуп эсептелерин далилдегиле.
2. Сфера канча симметрия огуна жана канча симметрия тегиздигине ээ болот?
3. Шардын диаметри 24 *см*. Анын борборунан 16 *см* аралыкта жаткан тегиздик шар менен кесилишеби?
4. Эгерде шардын радиусу 5 *дм* болсо, анын: 1) чоң тегерегинин аянтын; 2) экваторунун узундугун эсептегиле.
5. Радиусу 6,5 *м* болгон шар борборунан 2,5 *м* аралыкта тегиздик менен кесилген. Кесилиштин аянтын тапкыла.
6. Жердин борбору аркылуу өтүүчү тегиздик менен кесилишинде пайда болгон тегеректин айланасынын узундугун жана аянтын тапкыла. Жердин радиусун болжол менен 6400 *км* деп алгыла.
7. Ай – шар формасында. Анын диаметрин болжол менен 3480 *км* деп алып, анын борбору аркылуу өтүүчү тегиздик менен кесилишиндеги чоң тегеректин: айланасынын узундугун жана аянтын эсептегиле.
8. Шардын радиусунун ортосу ага перпендикулярдуу тегиздик жүргүзүлгөн. Кесилиштен пайда болгон тегеректин аянтынан чоң тегеректин аянтына болгон катышын тапкыла.
9. Радиусу 8 *дм* ге барабар шар α тегиздигин жанып өтөт. M чекити жануу тегиздигинде жатып, шардын борборунан 10 *дм* аралыкта. Жануу чекитинен M чекитине чейинки аралыкты тапкыла.
10. Бир эле шарга андан тышкары жаткан чекиттен эки жаныма түз сызык жүргүзүлгөн. Берилген чекиттен жануу чекиттерине чейинки аралыктар барабар болоорун далилдегиле.
11. Шардын радиусу R. Анын учу аркылуу радиус менен φ бурчун түзгөндөй тегиздик жүргүзүлгөн. Кесилиштин аянтын тапкыла.
12. Радиусу 39 *дм* болгон шардын бетинде үч чекит берилген. Алардын арасындагы түз сызыктуу аралыктар 18 *дм*, 24 *дм*

жана 30 *дм*. Шардын борборунан ал чекиттер аркылуу өтүүчү тегиздикке чейинки аралыкты тапкыла.

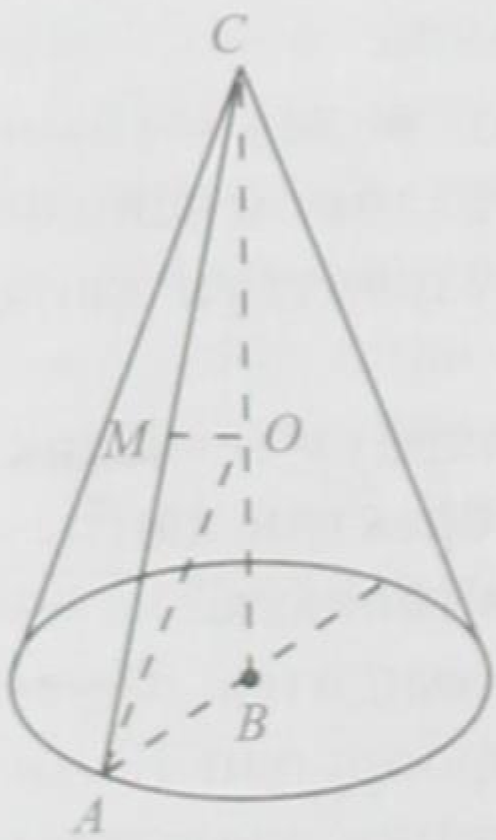
13. Үч бурчтуктун жактары 39 *дм*, 42 *дм* жана 45 *дм*. Эгерде шардын радиусу 15 *дм* болуп, үч бурчтуктун жактары шарды жанып өтсө, анда шардын борборунан үч бурчтуктун тегиздигине чейинки аралыкты тапкыла.

Көрсөтмө. Үч бурчтуктун аянтын Герондун формуласы менен таап, $S=pr$ формуласынан r ди аныктоо керек, p – үч бурчтуктун жарым периметри, r – үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын радиусу.

14. Эгерде эки сферанын радиустары жана борборлорунун арасындагы аралык тиешелүү түрдө: 1) 4 *см*, 2 *см*, 8 *см*; 2) 5 *дм*, 4 *дм*, 9 *дм*; 3) 3 *м*, 5 *м*, 6 *м* болсо, сфералар өз ара кандай жайланышат?

15. Сфералык сегменттин радиусу R, ал эми анын октук кесилишиндеги жаасы φ. Анын: негизинин узундугун жана бийиктигин тапкыла.

§ 33. ШАРДЫН БЕТИНИН АЯНТЫ



64-сүрөт

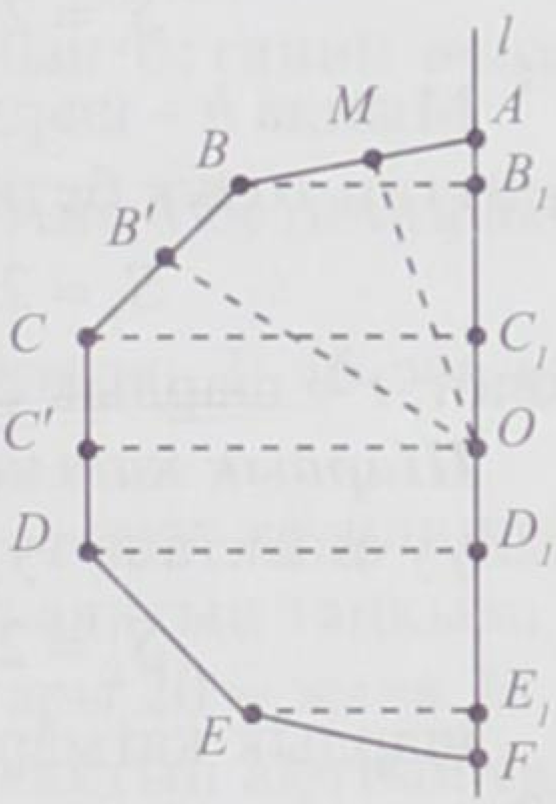
Цилиндрдин, конустун, кесилген конустун каптал беттеринин аянттарын табууда бир өзгөчөлүк бар. Алардын ар биринин каптал бетинин аянтын дагы башкача жол менен табууга болот. Атап айтканда, алардын каптал беттеринин аянттары, бийиктиги каралып жаткан телонун бийиктигине барабар болгон кандайдыр цилиндрдин каптал бетинин аянтына барабар, ал цилиндрдин негизинин радиусу – чокусу айлануу телосунун огунда жатып, негизи ал телонун түзүүчүсү болуп эсептелген тең капталдуу үч бурчтуктун бийиктигине барабар.

Бул ырастоонун тууралыгын конус үчүн карап көрөлү.

Берилген конустун түзүүчүсү $AC = l$, бийиктиги $BC = H$, радиусу $AB = R$ болсун (64-сүрөт). AC түзүүчүсү аркылуу октук кесилишти жүргүзүп, AC нын ортосунан ага MO перпендикулярын түзөбүз. O – конустун огунда жатат, ΔACO – тең капталдуу. $\Delta ABC \sim \Delta OMC$ (жалпы тар бурчка ээ болгон тик бурчтуу үч бурчтуктар), анда $BC : AB = CM : MO$ же $H : R = \frac{l}{2} : MO$ (1) болот.

Конустун каптал бетинин аянты $S_к = \pi Rl$ (2) экендиги белгилүү. Эми (1), (2) ден $S_к = 2\pi \cdot MO \cdot H$ (3). Жогорудагы ырастоо конус үчүн далилденди. Кесилген конус үчүн да ал ушундай жол менен далилденет, башкача айтканда, (3) туура болот, ал эми цилиндр үчүн туура экендиги түшүнүктүү. Бул ырастоо шардын бетинин аянтын табууга жардам берет.

36-теорема. **Туура сынык сызыкты, анын тегиздигинде жатып, борбору аркылуу өтүүчү жана аны кеспөөчү октун айланасында айландырганда пайда болгон айлануу бетинин аянты негизинин радиусу берилген сынык сызыктын апофемасына барабар, ал эми бийиктиги – сынык сызыктын окко түшүрүлгөн проекциясына барабар болгон цилиндрдин каптал бетинин аянтын аныктайт.**



65-сүрөт

Далилдөө: *ABCDEF* туура сынык сызыгы берилсин (65-сүрөт). Анын борбору O болсун. OA кесиндиси аркылуу l огун жүргүзүп, берилген сынык сызыкты ага проекциялап, AB_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F кесиндилерин алабыз. Натыйжада бир жагы l огунда жаткан үч бурчтуктар, төрт бурчтуктар пайда болот. Аларды l огунун айланасында айландырсак, же конус, же цилиндр, же кесилген конус пайда болот. Ар бир учурда айлануу бетинин аянты, жогорудагы ырастоонун негизинде $S_к = 2\pi \cdot MO \cdot H_к$ болот. Мында $MO = a$ – апофема болуп, бардык учурда бирдей. Ал эми $H_к$ – тиешелүү түрдө ар бир айлануу бетинин бийиктиги, алардын суммасы *ABCDEF* туура сынык сызыгынын l огундагы проекциясын аныктайт: $H = AF = AB_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1F$. Анда пайда болгон жалпы айлануу бетинин аянты үчүн (1) формуланы $S = 2\pi\, a\, H$ (2) түрүндө жазууга болот. Бул негизинин радиусу a, бийиктиги H болгон цилиндрдин каптал бетинин аянтын аныктайт. Теорема далилденди.

Эми шардын бетинин аянтын табууга токтолобуз. 65-сүрөттөгү *ABCDEF* туура сынык сызыгын жарым айланага ичтен сызылган деп эсептейли. Ал жарым айлана менен чектелген жарым тегеректи l огунун айланасында айландырсак, ал айлануу телосун – шарды аныктайт.

Эгерде жарым айланага ичтен сызылган туура сынык сызыктын жактарынын санын эки эселентип көбөйтсөк, анда a апофемасынын узундугу жарым тегеректин радиусунун, башкача айтканда, шардын радиусунун узундугуна умтулат, ал эми $H = 2R$ (жарым тегеректин же шардын диаметри) өзгөрбөйт. Бул учурда берилген сынык сызыктын айлануусунан пайда болгон беттин аянты шардын бетинин (сферанын) аянтына умтулат. Натыйжада шардын бетинин аянты, (2) формуланын негизинде,

$$S_{\omega} = 4\pi R^2 \qquad (3)$$

болот. Бул формула аркылуу шардын бетинин аянты аныкталат.

Шардык сегменттин бетинин аянтын (2) жана (3) формулаларды колдонуп, аныктоого болот.

$$S_{c} = 2\pi R \cdot h \qquad (4)$$

Мында h – шардык сегменттин бийиктиги. Анда шардык сегменттин толук бетинин аянты

$$S_{T} = 2\pi R \cdot h + \pi R^2 \qquad (5)$$

болот, r – шардык сегменттин негизинин радиусу.

Шардык катмардын каптал бетинин аянты (4) формула аркылуу аныктала тургандыгы белгилүү:

$$S_{K} = 2\pi R \cdot h \qquad (6)$$

h – шардык катмардын бийиктиги. Анын толук бетинин аянты (62-сүрөт)

$$S_{T} = 2\pi R \cdot h + \pi a^2 + \pi b^2 \qquad (7)$$

формуласы аркылуу аныкталат. a, b – шардык катмардын негиздеринин радиустары.

Жөнөкөй шардык сектордун бети шардык сегменттин бетинин жана конустун каптал бетинин суммасынан турат. Ошондуктан анын бетинин аянты

$$S = \pi R(2h + a) \quad (8)$$

болот, h – шардык сегменттин бийиктиги, a – конустун негизинин радиусу, R – шардын радиусу, S – жөнөкөй шардык сектордун бетинин аянты.

2-түрдөгү же көңдөй шардык сектордун бети анын алкагынын бетинин жана конустарынын каптал беттеринин суммасынан турат. Ошондуктан анын бетинин аянты.

$$S = \pi R(2h + a + b) \qquad (9)$$

формуласы аркылуу эсептелет, h – шардык алкактын бийиктиги, a жана b – конустардын негиздеринин радиустары.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Шардын диаметри 5 *дм*. Анын бетинин аянтын тапкыла.

2. Сферанын аянты 804 *см*^{2}. Анын радиусун тапкыла.

3. Борбору O чекитинде жаткан шар α тегиздигин M чекитинде жанып өтөт. B чекити α тегиздигинде жатып, OB – 52 *дм*, MB = 48 *дм*. Шардык беттин аянтын тапкыла.

4. Эки сферанын аянттарынын катышы алардын радиустарынын же диаметрлеринин квадраттарынын катышына барабар болоорун далилдегиле.

5. Сферанын радиусун 4 эсе чоңойтсок, анын бетинин аянты кандай өзгөрөт?

6. Шардын чоң тегерегинин аянты 100 *дм*^{2}. Анын бетинин аянтын эсептегиле.

7. Шардын бетинин аянтын: 1) 9 эсе чоңойтсок; 2) 16 эсе кичирейтсек, анын радиусу кандай өзгөрөт?

8. Шардык сегменттин радиусу R, ал эми октук кесилишиндеги жаасы: 1) 60°; 2) 120°. Анын бетинин аянтын тапкыла.

9. Шардык алкактын негиздеринин радиустары 20 *м* жана 24 *м*, ал эми шардын радиусу 25 *м*. Шардык алкактын аянтын тапкыла.

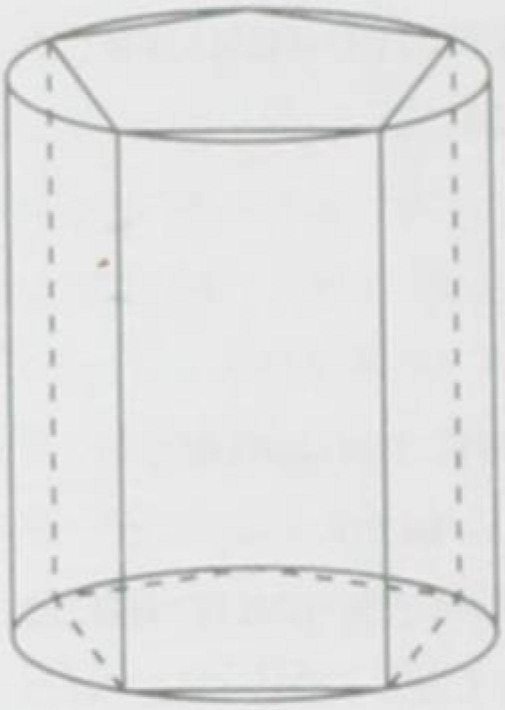
10. Шардык сегменттин радиусу r, октук кесилишиндеги жаасы 90°. Анын толук бетинин аянтын тапкыла.

11. Шардык сегменттин бийиктиги h, октук кесилишиндеги жаасы 120°. Анын толук бетинин аянтын тапкыла.

§ 34. АЙЛАНУУ ТЕЛОЛОРУ МЕНЕН КӨП ГРАНДЫКТАРДЫН АЙКАЛЫШЫ

Стереометрияда бири-бирине ичтен (сырттан) сызылган телолорду да кароого туура келет.

1. Цилиндрге ичтен (сырттан) сызылган призма. Эгерде призманын негиздери цилиндрдин негиздерине ичтен сызылган болсо, анда призма цилиндрге ***ичтен сызылган*** деп аталат.

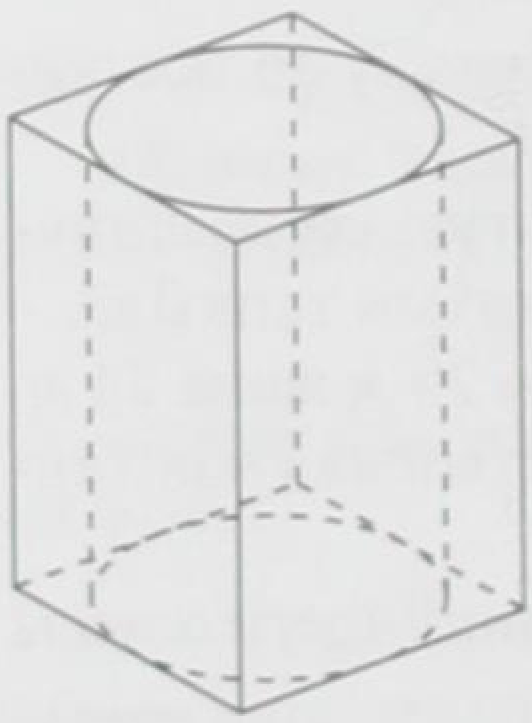


66-сүрөт

Анын сүрөтүн түзүү үчүн адегенде цилиндрдин ичине сызылган көп грандыктын төмөнкү негизинин сүрөтүн түзүү оңтойлуу. Ал эллипстин ичине сызылган көп бурчтук болот. Көп грандыктын калган чокуларынын сүрөтүн түзүү анчалык кыйынчылык келтирбейт. Ал үчүн төмөнкү негизиндеги чокулары аркылуу цилиндрдин түзүүчүсүнө параллель түз сызыктар жүргүзүп, цилиндрдин жогорку негизи менен кесилишин аныктоо керек. 66-сүрөттө цилиндрге ичтен сызылган беш бурчтуу тик призма көрсөтүлгөн.

Эгерде призманын негиздери цилиндрдин негиздерине сырттан сызылган болсо, анда призма цилиндрге сырттан сызылган деп аталат.

Анын сүрөтүн түзүү жогорудагыга окшош. 67-сүрөттө цилиндрге сырттан сызылган төрт бурчтуу призма көрсөтүлгөн.



67-сүрөт

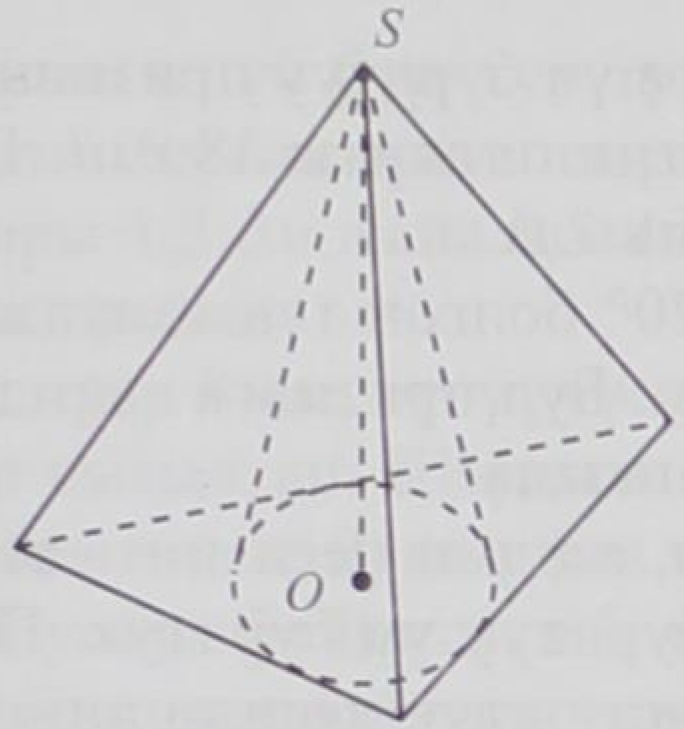
2. Конуска ичтен (сырттан) сызылган пирамида. Эгерде конустун жана пирамиданын чокулары дал келип, пирамиданын негизи конустун негизине ичтен сызылса, анда пирамида конуска ***ичтен сызылган*** деп аталат.

Анын сүрөтү 1-учурга окшош түзүлөт. Мында биринчи иретте конустун сүрөтүн түзүү оңтойлуу. Андан кийин анын негизиндеги эллипске пирамиданын негизиндеги көп бурчтуктун ичтен сызылган сүрөтүн сызып, анын чокуларын конустун чокусу менен туташтырсак, изделүүчү сүрөткө ээ болобуз (сүрөтүн өзүңөр сызгыла).

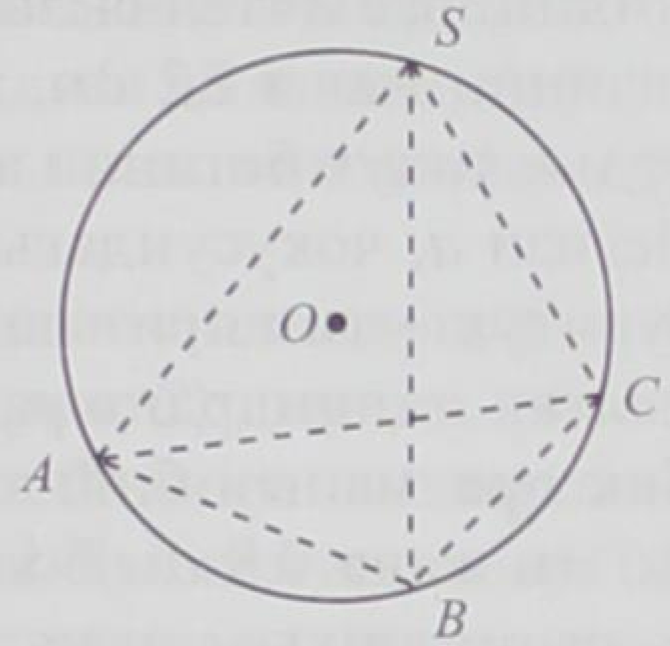
Эгерде конус менен пирамиданын чокулары дал келип, пирамиданын негизи конустун негизине сырттан сызылса, анда пирамида конуска ***сырттан сызылган*** деп аталат. 68-сүрөттө конуска сырттан сызылган үч бурчтуу пирамиданын сүрөтү көрсөтүлгөн. Анын сүрөтүн түзүү 1-учурдагыга окшош.

3. Шарга ичтен (сырттан) сызылган көп грандыктар. Эгерде шар берилген көп грандыктын бардык грандарын жанып өтсө, анда көп грандык шарга ***сырттан сызылган*** же шар көп грандыкка ичтен сызылган деп аталат.

Эгерде көп грандыктын бардык чокулары шардын бетинде (сферада) жатса, анда көп грандык шарга ***ичтен сызылган*** же шар көп грандыкка ***сырттан сызылган*** деп аталат.



68-сүрөт



69-сүрөт

Шардын сүрөтү параллель проекциялоо жолу менен алынгандыктан, ага ичтен жана сырттан сызылган фигуралардын сүрөтү да ошол проекциялоого негизделип түзүлүшү керек. Адегенде шардын сүрөтүн түзүп, андан кийин ага карата ичтен же сырттан сызылган фигуранын сүрөтүн түзүү оңтойлуу болот. Мисалы, 69-сүрөттө шарга ичтен сызылган үч бурчтуу пирамида көрсөтүлгөн, анын бардык кырлары шардын ичинде жаткандыктан, алар пунктир сызыгы менен көрсөтүлдү.

Шардын башка фигуралар менен айкалышын да кароого болот. Мисалы, шарга ичтен сызылган конустун, тик призманын, цилиндрдин, ошондой эле шарга сырттан сызылган цилиндрдин, төрт бурчтуу тик призманын, үч бурчтуу туура пирамиданын, конустун айкалыштарын да кароого болот. Фигуралардын айкалыштарына тиешелүү стереометриялык маселелерди чыгарууда тиешелүү сүрөттүн туура болушу маанилүү ролду ойноп тургандыгын эстен чыгарбоо керек.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Цилиндрге ичтен сызылган туура төрт бурчтуу призманы түзгүлө. Алардын негизги элементтеринин кандай жайланышканын жана кантип түзүү керек экендигин түшүндүрүп бергиле.

Көрсөтмө. Цилиндрдин негизине ичтен сызылган $ABCD$ квадратын (анын сүрөтүн) түзгүлө. AA_1, $BB1$, CC_1, DD_1 түзүүчүлөрүн жүргүзгүлө. $ABCDA_1B1C_1D_1$ – изделүүчү призма болот.

2. Цилиндрдин радиусу 6 *см*, бийиктиги $\sqrt{8}$ *см*. Цилиндрге ичтен сызылган туура төрт бурчтуу призманын бетинин аянтын тапкыла.

3. Цилиндрге ичтен сызылган туура үч бурчтуу призманын негизинин жагы 1,2 *дм*, каптал бетинин аянты 18 $дм^2$. Цилиндрдин толук бетинин аянтын тапкыла.
4. Негизи a, чокусундагы бурчу 120° болгон тең капталдуу үч бурчтук – тик призманын негизи. Бул призмага сырттан сызылган цилиндрдин радиусун тапкыла.
5. Тик призманын бийиктиги 1 *дм*, ал эми негизи – катеттери 0,6 *дм* жана 0,8 *дм* болгон тик бурчтуу үч бурчтук. Призмага сырттан сызылган цилиндрдин октук кесилишинин аянтын эсептегиле.
6. Радиусу R ге барабар болгон цилиндрге туура алты бурчтуу призма ичтен сызылган. Цилиндрдин октук кесилиши – квадрат. Призманын: 1) диагоналдык кесилиштеринин; 2) каптал бетинин; 3) толук бетинин аянтын тапкыла.
7. Пирамиданын бардык каптал кырлары барабар. Ал кандайдыр конуска ичтен сызылган пирамида болоорун далилдегиле.
8. Конустун радиусу R, түзүүчүсү l. Конуска ичтен сызылган пирамиданын бийиктигин аныктагыла.
9. Конустун каптал бетинин аянты S, анын радиусу r. Конуска ичтен сызылган туура: 1) үч; 2) төрт; 3) n бурчтуу туура пирамиданын каптал кырын тапкыла.
10. Туура n бурчтуу пирамиданын бийиктиги h, анын каптал кыры менен түзгөн бурчу φ. Ага сырттан сызылган конустун октук кесилишинин аянтын тапкыла.
11. Туура призмага сырттан сфера сызууга болот. Далилдегиле.
12. Кубдун кыры a. Ага сырттан сызылган шардын радиусун тапкыла.
13. Тик бурчтуу параллелепипедге сырттан шар сызууга болот. Далилдегиле.
14. Тик бурчтуу параллелепипеддин өлчөмдөрү 16 *дм*, 24 *дм*, 48 *дм*. Сырттан сызылган шардын: радиусун жана бетинин аянтын тапкыла.
15. Шардын радиусу 9 *см*. Ага ичтен сызылган туура төрт бурчтуу призманын бийиктиги 14 *см*. Анын негизинин жагын тапкыла.
16. Туура пирамиданын каптал кыры l, ал негизи менен φ бурчун түзөт. Сырттан сызылган шардын радиусун жана бетинин аянтын аныктагыла.
17. Туура тетраэдрдин кыры a. Ага сырттан сызылган шардын радиусун тапкыла.

18. Кесилген үч бурчтуу туура пирамиданын бийиктиги 1,7 *дм*, ал эми негиздерине сырттан сызылган айланалардын радиустары 1,2 *дм* жана 0,5 *дм*. Сырттан сызылган шардын радиусун тапкыла.

19. Радиусу 8 *см*, түзүүчүсү 12 *см* болгон цилиндрге шар сырттан сызылган. Шардын: 1) диаметрин; 2) шардык катмардын бийиктигин; 3) шардык сегменттин бийиктигин тапкыла.

20. Конустун бийиктиги h, түзүүчүсү l. Бул конуска сырттан сызылган шардын радиусун жана бетинин аянтын аныктагыла.

21. Шардын радиусу R. Бийиктиги h болгон конус шарга ичтен сызылган. Конустун октук кесилишинин аянтын тапкыла.

22. Конустун түзүүчүсү l, ал бийиктиги менен α бурчун түзөт. Конуска сырттан сызылган шардын бетинин аянтын аныктагыла.

23. Цилиндрдин радиусу r, бийиктиги h. Ага сырттан сызылган сферанын аянтын тапкыла.

24. Туура: 1) төрт; 2) үч бурчтуу призмага сырттан сызылган цилиндрди түзгүлө. Негизги элементтеринин сүрөтүн көрсөткүлө.

25. Радиусу r, октук кесилиши квадрат болгон цилиндрге туура үч бурчтуу призма сырттан сызылган. Анын каптал бетинин жана толук бетинин аянттарын тапкыла.

26. Радиусу r, октук кесилиши квадрат болгон цилиндрге туура төрт бурчтуу призма сырттан сызылган. Анын каптал бетинин жана толук бетинин аянттарын тапкыла.

27. Цилиндрге туура үч бурчтуу призмалар сырттан жана ичтен сызылган. Бул призмалардын каптал беттеринин аянттарынын катышын тапкыла.

28. Негизи a, чокусундагы бурчу 120° болгон тең капталдуу үч бурчтук тик призманын негизи болуп эсептелет. Бул призмага ичтен сызылган цилиндрдин радиусун тапкыла.

29. Тик призманын бийиктиги 1 *дм*, ал эми негизи катеттери 0,6 *дм* жана 0,8 *дм* болгон тик бурчтуу үч бурчтук. Призмага ичтен сызылган цилиндрдин: 1) октук кесилишинин; 2) толук бетинин аянтын эсептегиле.

30. Кубга ичтен жана сырттан цилиндрлер сызылган. Цилиндрлердин каптал беттеринин аянттарынын катышын тапкыла.

31. Конуска ичтен сызылган туура: 1) үч; 2) төрт; 3) алты бурчтуу пирамиданы сызгыла. Негизги элементтерин сүрөттөп көрсөткүлө.

32. Туура үч бурчтуу пирамиданын негизинин жагы a, ал эми негизиндеги эки грандуу бурчу φ. Ичтен сызылган конустун октук кесилишинин аянтын тапкыла.
33. Туура пирамиданын каптал кыры l негизинин тегиздиги менен φ бурчун түзөт. Пирамидага сырттан сызылган конустун толук бетинин аянтын эсептегиле.
34. Кубга ичтен сфера сызууга болоорун далилдегиле.
35. Кубдун кыры a. Ага ичтен сызылган шардын бетинин аянтын аныктагыла.
36. Туура пирамидага ичтен сфера сызууга болот. Далилдегиле. ***Көрсөтмө***. Негизиндеги эки грандуу бурчтун биссектрисалык тегиздиги менен пирамиданын бийиктигинин кесилишин таап, анын грандарынан бирдей алыстыкта болоорун көрсөтүү керек.
37. Бийиктиги h, негизиндеги эки грандуу бурчу $60°$ болгон туура пирамидага ичтен сызылган шардын бетинин аянтын тапкыла.
38. Радиусу r болгон шарга туура үч бурчтуу призма сырттан сызылган. Призманын негизинин жагын тапкыла.
39. Кандай шартта туура призмага шарды ичтен сызууга болот?
40. Конустун бийиктиги 1,6 *см*, түзүүчүсү 2 *см*. Ичтен сызылган шардын радиусун аныктагыла.
41. Конустун түзүүчүсү l негизи менен φ бурчун түзөт. Ичтен сызылган шардын бетинин аянтын тапкыла.
42. Кандай шарт аткарылганда кесилген конуска ичтен шар сызууга болот?
43. Радиусу r ге барабар болгон шарга кесилген конус сырттан сызылган, анын түзүүчүсү негизи менен a бурчун түзөт. Конустун октук кесилишинин аянтын тапкыла.
44. Шарга цилиндр сырттан сызылган. Алардын беттеринин аянттарынын катышын тапкыла.

IV ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Цилиндрди аныктагыла. Негиздерин, түзүүчүсүн, бийиктигин атагыла.
2. Конусту аныктагыла. Негизин, түзүүчүсүн, бийиктигин атагыла.
3. Кандай тегиздик цилиндрге (конуска) жаныма тегиздик болот?

4. Кесилген конусту аныктагыла. Негиздерин, түзүүчүсүн, бийиктигин атагыла.
5. Цилиндрдин (конустун, кесилген конустун) октук кесилишинде кандай фигура пайда болот?
6. Цилиндрдин (конустун, кесилген конустун) каптал бетине аныктама бергиле.
7. Шарды кандай аныктоого болот? Анын элементтерин аныктагыла.
8. Сфераны аныктагыла. Анын шардан кандай айырмасы бар?
9. Шардын тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот?
10. Сферанын борбору аркылуу өтүүчү тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот?
11. Цилиндрдин бетинин аянты кандай аныкталат? Ал эмнеге барабар?
12. Конустун бетинин аянты эмнеге барабар?
13. Кесилген конустун бетинин аянты эмнеге барабар?
14. Шарга жаныма тегиздикти (түз сызыкты) аныктагыла. Алардын катеттерин айтып бергиле.
15. Шардын бетинин аянты эмнеге барабар? Формуласын айтып бергиле.
16. Цилиндрге ичтен (сырттан) сызылган призманы атагыла.
17. Конуска ичтен (сырттан) сызылган пирамиданы аныктагыла.
18. Кандай көп грандык шарга ичтен (сырттан) сызылган деп аталат?
19. Шардык сегмент кандай аныкталат?

IV ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО МАСЕЛЕЛЕР

1. Цилиндрде анын огуна параллель болгон тегиздик жүргүзүлгөн. Ал негизинин айланасынан 120° жааны кесет. Түзүүчүсү 10 *см*, кесүүчү тегиздиктен окко чейинки аралык 2 *см*. Кесилиштин аянтын тапкыла.
2. Цилиндрдин бийиктиги 6 *дм*, ал эми негизинин радиусу 5 *дм*. Берилген кесиндинин учтары эки негизинин айланаларында жатат, анын узундугу 10 *дм*. Кесинди октон кандай аралыкта экендигин тапкыла.
3. Конустун бийиктиги h, радиусу r. Конустун чокусу жана негизинин 60° жаасын тиреп турган хордасы аркылуу өтүүчү кесилиштин аянтын тапкыла.

4. Кесилген конустун негиздеринин аянттары S_1 жана S_2. Негиздерине параллель болгон ортоңку кесилиштин аянтын тапкыла.
5. Шардын радиусу 9 *дм*. Бийиктиги 14 *дм* болгон туура төрт бурчтуу призма шарга ичтен сызылган. Призманын негизинин жагын тапкыла.
6. Конустун түзүүчүсү негизинин диаметрине барабар. Конустун бетинин аянты – диаметри конустун бийиктигине барабар болгон сферанын аянтына барабар болоорун далилдегиле.
7. Конустун каптал бетинин аянты 106,76 $м^2$, бийиктиги 7,5 *м*. Түзүүчүсүн тапкыла.
8. Конустун бийиктиги h ка барабар. Ал конустун каптал бетин анын аянты үч барабар бөлүккө бөлүнгөндөй кылып, негизине параллель жүргүзүлгөн эки тегиздик негизинен кандай аралыктарда болушат?
9. Кесилген конустун негиздеринин радиустары R жана r. Каптал бетинин аянты негиздеринин аянттарынын суммасына барабар. Кесилген конустун бийиктигин тапкыла.
10. Чака кесилген конус формасында болуп, негиздеринин диаметрлери 30 *см* жана 20 *см*, ал эми түзүүчүсү 30 *см*. Эгерде анын бетинин 1 $м^2$ аянтын сырдоого 200 г боёк талап кылынса, анда ал чаканын ичи-сыртын сырдоого канча боёк сарп кылынат?
11. Радиусу R болгон сферанын аянты бийиктиги жана радиусу R болгон цилиндрдин бетинин аянтына барабар болоорун далилдегиле.
12. Шар кубдун бардык грандарын жанып өтөт. Бул фигуралардын беттеринин аянттарынын катышын тапкыла.
13. Шардык сегменттин бийиктиги 2 *дм*, ал эми шардын радиусу 5 *дм*. Шардык сегменттин бетинин жана толук бетинин аянттарын тапкыла.
14. Радиусу 2,4 *см* болгон шардык катмардын каптал (сфералык) бетинин аянты 22,609 $м^2$. Шардык катмардын бийиктигин тапкыла.

V глава **КӨП ГРАНДЫКТАРДЫН ЖАНА АЙЛАНУУ ТЕЛОЛОРУНУН КӨЛӨМДӨРҮ**

§ 35. ТЕЛОНУН КӨЛӨМҮ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Мейкиндикте ар кандай тело көлөмгө ээ болот. Анткени ал мейкиндиктин кандайдыр бир бөлүгүн ээлеп турат. Ал тело мейкиндиктин кандай бөлүгүн ээлеп тургандыгын билүү үчүн аны өлчөөгө туура келет. Мисалы, силер кубдун, тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмдөрүн өлчөө менен таанышсыңар.

Демек, көлөм чоңдук катары каралат, ошондуктан аны өлчөөгө болот. Көлөмдү өлчөө үчүн анын бирдигин тандап алуу керек. Кырынын узундугу 1 бирдикке барабар болгон куб көлөмдү өлчөөнүн бирдиги катары алынып, *бирдик куб* деп аталат. Анын көлөмүн бирге барабар деп эсептейбиз. Мисалы, кубдун кыры 1см болсо, анда бирдик кубдун көлөмү 1 $см^3$ болот да, ал аркылуу өлчөнгөн кандайдыр телонун көлөмү ал көлөмдө канча бирдик куб камтылган болсо, ошончо оң сандагы $см^3$ дан турат.

Демек, ар бир телого көлөмү деп аталуучу терс эмес сан туура келет. Көлөм жөнүндө төмөндөгүдөй негизги касиеттерди белгилөөгө болот.

1. Барабар телолор барабар көлөмдөргө ээ.

2. Эгерде тело бир нече бөлүктөргө бөлүнсө, анда анын көлөмү бөлүктөрдүн көлөмдөрүнүн суммасына барабар болот.

Телонун көлөмүн V аркылуу белгилейбиз. Мисалы, экинчи касиетти төмөндөгүдөй түшүнүү керек. Эгерде F фигурасы ички жалпы чекиттерге ээ болбогон F_1 жана F_2 фигураларына бөлүнсө, башкача айтканда, $F = F_1 + F_2$ болсо, анда F фигурасынын көлөмү V, F_1 дин көлөмү V_1 менен F_2 нин көлөмү V_2 нин суммасына барабар: $V = V_1 + V_2$.

Демек, F_1 фигурасы F фигурасынын ичинде жатса, анда алардын көлөмдөрү тиешелүү түрдө $V_1 < V$ барабарсыздыгын канааттандырат.

Бул негизги касиеттерден пайдаланып, жөнөкөй көп грандыктардын жана айлануу телолорунун көлөмдөрүн табууга болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. F_1 жана F_2 көп грандыктары берилсин. Алардын көлөмдөрү тиешелүү түрдө 6 $см^3$ жана 24 $см^3$ болсун. Анда: 1) көп грандыктар кесилишпеген учурдагы алардын биригүүсүнүн көлөмүн тапкыла. 2) F_1 көп грандыгы F_2 көп грандыгынын ичинде жаткан учурдагы алардын биригүүсүнүн көлөмүн тапкыла.
2. Курулуш кирпичинин көлөмү 1800 $см^3$ болсо, 10000 кирпич коюлган дубалдын көлөмү кандай болот? Кирпичтин арасына куюлган аралашма ал көлөмдү 15% га чоңойторун эске алгыла.
3. Кубдун көлөмү 12 $дм^3$. Кубдун карама-каршы грандарынын диагоналдары аркылуу өткөн тегиздик аны кандай бөлүктөргө бөлөт? Ар бир бөлүктүн көлөмүн тапкыла.
4. Кубдун кыры a болсо, анын көлөмү $V = a^3$ формуласы менен эсептелээрин түшүндүрүп бергиле.
5. Кубдун кыры a га барабар. Анын кырын 3 эсе чоңойтсок, анда көлөмү кандай өзгөрөт?
6. Кубдун кыры a. Кырын 2 эсе кичирейтсек, анда анын көлөмү кандай өзгөрөт?
7. Кыры: 1) 20 *см*; 2) 2 *дм* болгон кубдардын көлөмдөрүн салыштыргыла.
8. Цилиндрдин көлөмү V болсун. Цилиндр өзүнүн огу аркылуу өтүүчү жана бири-бирине перпендикулярдуу болгон эки тегиздик менен кесилген. Ар бир бөлүктүн көлөмүн аныктагыла.
9. Кырлары 6 *см*, 8 *см* жана 10 *см* болгон үч коргошун кубдарын эритип, бир куб жасашты. Жасалган кубдун кырын тапкыла.

36. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДДИН КӨЛӨМҮ

Ар кандай параллелепипеддин көлөмүн аныктоодон мур-
да адегенде тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмүн аныктоо-
о токтолобуз.

37-теорема. **Тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмү анын үч өлчөмүнүн көбөйтүндүсүнө барабар.**

Д а л и л д ө ө : Тик бурчтуу параллелепипед берилсин. Анын үч өлчөмү деп аталуучу кырлары a,b,c болсун. Бул параллелепипеддин көлөмү анын үч өлчөмүнүн көбөйтүндүсүнө барабар экана $V = a \cdot b \cdot c$ (1) формуласы аркылуу аныкталаары белгилүү. Бирок, ал формуладагы a, b, c кесиндилеринин узундуктары мурда оң бүтүн же рациоаналдык сандар түрүндө каралган.

(1) формула a, b, c кырларынын жок дегенде бири иррационалдык сан болгондо да туура боло тургандыгын көрсөтүүгө болот. a,b,c – иррационалдык сандар болсун, анда аларды чексиз мезгилсиз ондук бөлчөктөр түрүндө жазууга болот.

a, b, c кырларынын $\frac{1}{10^n}$ тактыкка чейинки кеми менен алынган жакындатылган тиешелүү маанилери a_1, b_1, c_1 ал эми алардын ошол эле тактыкка чейинки ашыгы менен алынган жакындаштырылган маанилери a_2, b_2, c_2 болсун дейли. Анда $a_1\ b_1\ c_1$ $a_2\ b_2\ c_2$ сандары чектүү ондук бөлчөктөр, башкача айтканда, рационалдык сандар болушат.

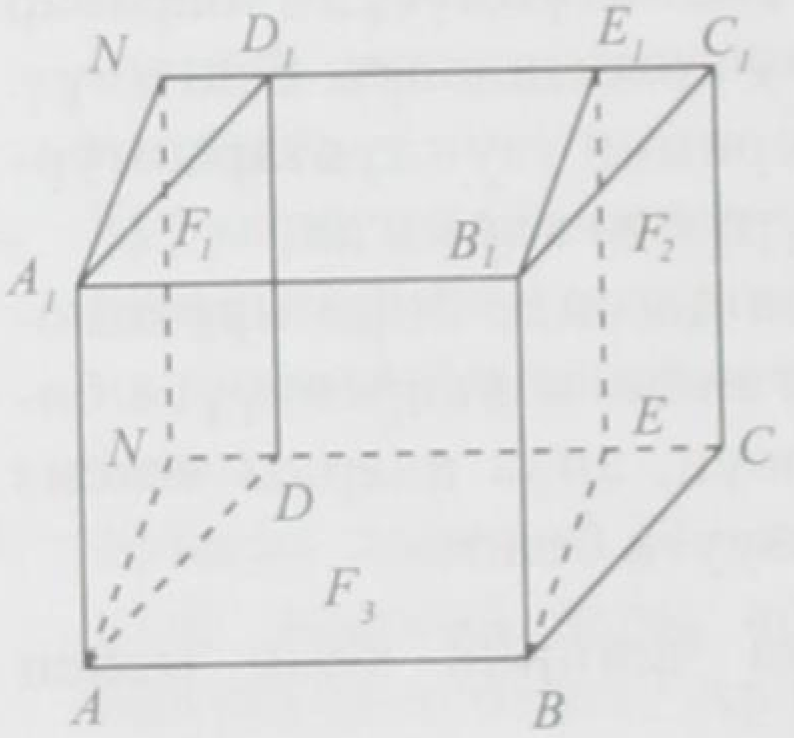
Ошондуктан $a_1b_1c_1 = V_1$ саны берилген параллелепипеддин ичинде, ал эми $a_2b_2c_2=V_2$, саны анын сыртында жаткан тик бурчтуу параллелепипеддердин көлөмдөрүн туюнтушат. Анда телонун көлөмүн аныктоонун 2-касиетиндеги талкуулоонун негизинде $V_1 < V < V_2$ же $a_1b_1c_1 < V < a_2b_2c_2$ (1′) болот. Бирок, алынган шарт боюнча $a_1 \le a < a_2$, $b_1 < b \le b_2$, $c_1 \le c < c_2$. Анда жакындаштырылган сандарды көбөйтүүнүн эрежесин колдонсок,

$a_1b_1c_1 < abc < a_2b_2c_2$ (2) болуп калат. Натыйжада (1′) жана (2) барабарсыздыктары, каалагандай бирдей тактык менен алынган V жана abc сандарынын жакындаштырылган маанилеринин барабар экендигин көрсөтөт. Ошондуктан ал сандар барабар: $V = abc$, башкача айтканда (1) формула a, b, c кырларынын узундуктары каалагандай чыныгы сандар болгон учурда да туура болот. Теорема далилденди.

Эгерде a, b кырларын тик бурчтуу параллелепипеддин негизинин жактары, ал эми c – бийиктиги деп эсептесек, анда (1) формуланы $V = S \cdot H$ (3) түрүндө жазууга болот. $S = ab$ – тик бурчтуу параллелепипеддин негизинин аянты, $c = H$ – анын бийиктиги. Демек, ***тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмү негизинин аянтын бийиктигине көбөйткөнгө барабар*** деп да баяндоого болот.

38-теорема. **Тик параллелепипеддин көлөмү негизинин аянтын анын бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

Д а л и л д ө ө : $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тик параллелепипеди берилсин (70-сүрөт). $ABCD$ – параллелограмм. AA_1 жана BB_1 кырлары аркылуу AB кырына перпендикулярдуу болгон тегиздиктер жүргүзсөк $ABENA_1B_1E_1N_1$ тик бурчтуу параллелепипедин алабыз. Мында $ABEN$ тик бурчтук болот.



70-сүрөт

$ABCDA_1B_1C_1D_1$, $ABENA_1B_1E_1N_1$, $ADNA_1D_1N_1$, $BCEB_1C_1E_1$ жана $ABEDA_1B_1E_1D_1$ көп грандыктарын тиешелүү түрдө F, F', F_1, F_2, F_3, алардын көлөмдөрүн $V(F)$, $V'(F')$, же $V_2(F_2)$, $V_3(F_3)$ же $V, V', V_1\ V_2, V_3$, аркылуу белгилейбиз.

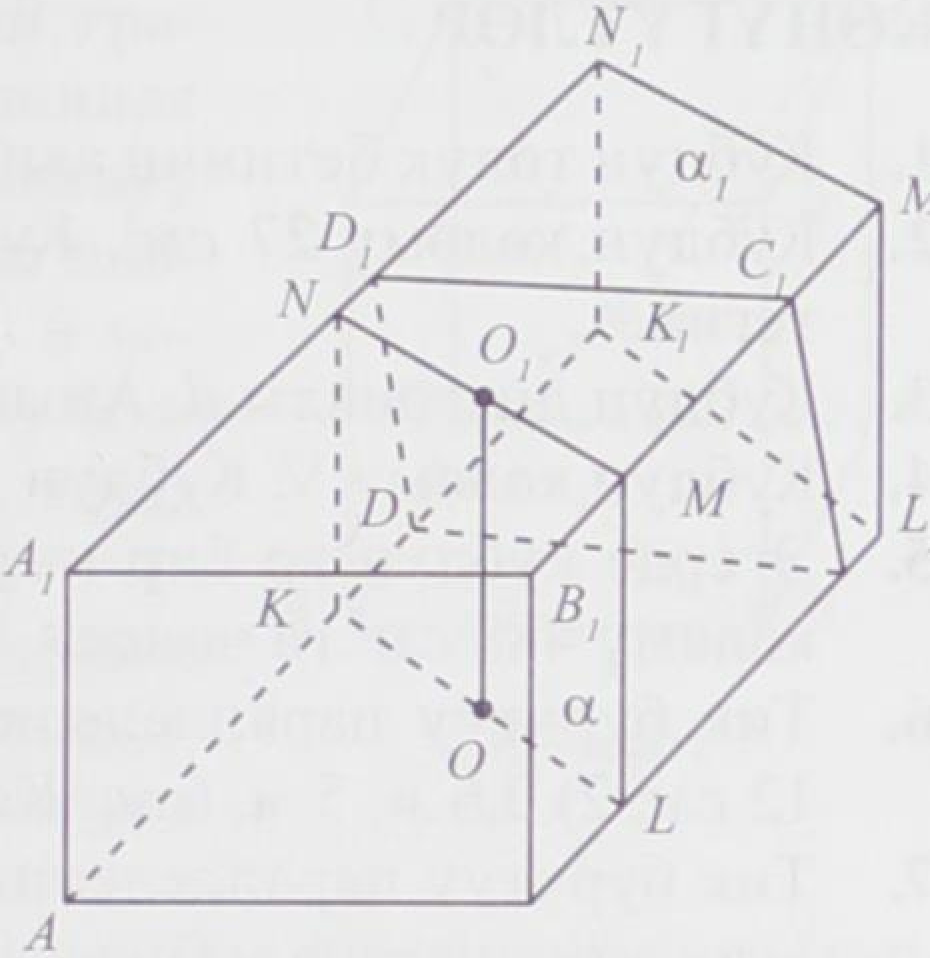
Эгерде F_1 ди $\vec{AB}$ векторуна параллель которсок, F_2 алынат, анда $F_1 = F_2$ болот. Фигуралардын көлөмдөрүн аныктоодогу 1- касиеттин негизинде $V(F_1) = V(F_2)$ (3) алынат. $F_3 + F_2 = F$, $+ F_3 = F'$ боло тургандыгы түшүнүктүү. Көлөмдөр түшүнүгүнүн 2- касиети боюнча $V(F_3) + V(F_2) = V(F)$, $V(F_1) + V(F_3) = V(F')$ болот. (3) барабардыкты пайдалансак $V(F) = V(F')$, башкача айтканда, алардын көлөмдөрү барабар: $V = V$ (4) болот.

F' тик бурчтуу параллелепипедине 37-теореманы колдонсок, $V = AB \cdot AN \cdot AA_1$ (5) болот. $S = AB \cdot AH - ABEN$ тик бурчтугунун же $ABCD$ параллелограммынын аянты, $AA_1 = H$ – параллелепипеддин бийиктиги.

Натыйжада берилген параллелепипеддин көлөмү (4), (5) барабардыктарынын негизинде $V = S \cdot H$(6) болот. Теорема далилденди.

39-теорема. **Жантык параллелепипеддин көлөмү негизинин аянтын бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

Далилдөө: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – жантык параллелепипеди берилген (71-сүрөт). BC кырынын L чекити аркылуу ал кырга перпендикулярдуу болгон α тегиздигин жүргүзөбүз. Натыйжада $KLMN$ перпендикулярдык кесилиши пайда болот, ал параллелограмм боло тургандыгы түшүнүктүү.



71-сүрөт

Параллелепипеддин кырларын жана грандарын α тегиздигинен ары карай улантып, BC кырынын уландысына L ден баштап, $LL_1 = BC$ кесиндисин өлчөп коёбуз. L_1 чекити аркылуу $BC \perp \alpha_1$ тегиздигин жүргүзсөк, кесилиште $K_1L_1M_1N_1 = KLMN$ төрт бурчтугу пайда болот. Натыйжада $KLMNK_1L_1M_1N_1$ тик параллелепипедине ээ болобуз.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$, $KLMNK_1L_1M_1N_1$, $ABLKA_1B_1MN$, $DCL_1K_1D_1C_1M_1N_1$ жана $KLCDNMC_1D_1$ көп грандыктарын тиешелүү түрдө F, F', F_1, F_2, F_3, алардын көлөмдөрүн – V, V', V_1, V_2, V_3 аркылуу белгилеп, 37-теоремадагыга окшоштуруп далилдесек (F_1 ди $\vec{BC}$ векторуна параллель которсок), F менен F' тин көлөмдөрү барабар болот:

$$V = V' \quad (7)$$

Мында $V = V_1 + V_3$, $V = V_3 + V_2$ болот.

F^1 – тик параллелепипед, 37-теореманын негизинде $V = S \cdot LL_1$ (8), S – $KLMN$ параллелограммынын аянты, ал эми ал параллелограммдын KL негизине түшүрүлгөн бийиктиги OO_1 болот. Анда $S = KL \cdot OO_1$ болот. $LL_1 = BC$ боло тургандыгын эске алсак, (8) ден $V' = \mathrm{KL} \cdot OO_1 \cdot BC = S' \cdot OO_1$ (9) болот.

$S' = BC \cdot KL$, (түзүү боюнча $KL \perp BC$), ал $ABCD$ параллелограммынын аянты.

Мында $OO_1 = H$ кесиндиси берилген параллелепипеддин да бийиктиги болот. Анткени – түзүү боюнча $OO_1 \perp KL$ жана ВС кырына перпендикулярдуу болгон α тегиздигинде жатат, анда OO_1 кесиндиси $ABCD$ тегиздигине перпендикулярдуу болот.

Ошентип, (9) барабардыктан $V = S' \cdot H$ (10) болуп теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

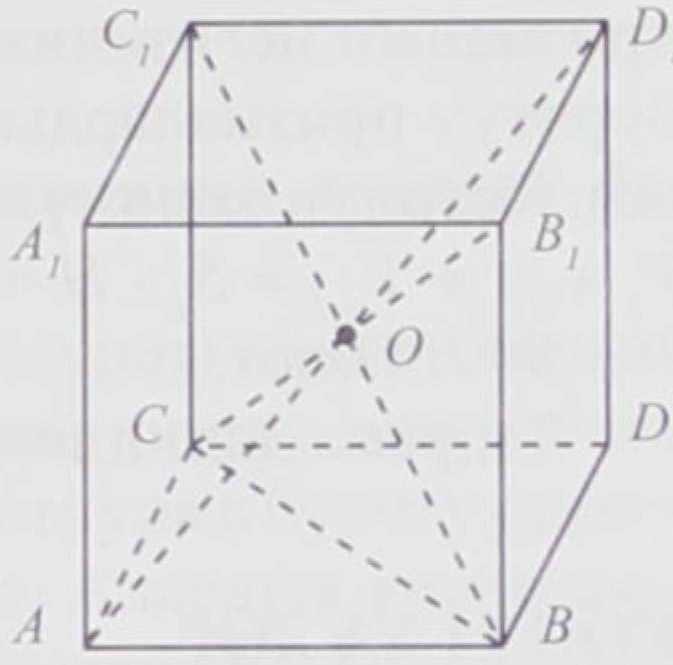
1. Кубдун толук бетинин аянты 24 $дм^2$. Анын көлөмүн тапкыла.
2. Кубдун көлөмү 27 $см^3$. Кубдун толук бетинин аянтын эсептегиле.
3. Кубдун диагоналы d. Анын көлөмүн тапкыла.
4. Кубдун көлөмү V. Кубдун диагоналын аныктагыла.
5. Эгерде кубдун ар бир кырын 2 *см* ге чоңойтсок, анда анын көлөмү 488 $см^3$ га чоңоет. Кубдун кырын тапкыла.
6. Тик бурчтуу параллелепипеддин өлчөмдөрү: 1) 4 *см*, 5 *см*, 12 *см*; 2) 0,6 *м*, 5 *м*, 6 *м*,. Көлөмүн эсептегиле.
7. Тик бурчтуу параллелепипеддин негизинин жактары a жана b, ал эми диагоналы негизине φ бурчу боюнча жантайган. Параллелепипеддин көлөмүн тапкыла.
8. Тик бурчтуу параллелепипеддин эки-экиден перпендикулярдуу болушкан грандарынын аянттары Q_1, Q_2, Q_3. Анын көлөмү $\sqrt{Q_1 Q_2 Q_3}$ болоорун далилдегиле.
9. Тик параллелепипеддин негизинин аянты 6 $дм^2$, бийиктиги 25 *см*. Анын көлөмүн тапкыла.
10. Тик параллелепипеддин негизинин жактары 4 *см* жана 6 *см*, алардын арасындагы бурч 30°, каптал бетинин аянты 80 $см^2$. Анын көлөмүн тапкыла.
11. Тик параллелепипеддин ар бир кыры a га барабар, ал эми диагоналдарынын бири $2a$. Параллелепипеддин көлөмүн аныктагыла.
12. Жантык параллелепипеддин грандары – жагы a жана бурчу 60° болгон ромбдор. Параллелепипеддин көлөмүн тапкыла.
13. Тик параллелепипеддин негизинин жагы a, ал эми ага ичтен сызылган шардын радиусу r. Параллелепипеддин көлөмүн тапкыла.

§ 37. ПРИЗМАНЫН КӨЛӨМҮ

40-теорема. **Үч бурчтуу призманын көлөмү негизинин аянтын бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

Д а л и л д ө ө: $ABCA_1B_1C_1$ үч бурчтуу призмасы берилген (72-сүрөт). Анын көлөмүн V аркылуу белгилейли.

Берилген призманы анын BCC_1B_1 гранынын диагоналдарынын кесилишинде жаткан O чекитине карата симметриялуу чагылдырсак, $BCDB_1C_1D_1$ призмасы пайда болот. (Мында A чокусу D_1 ге, B чокусу C_1 ге ж.б. өтөт). Симметриялуу болгондуктан, алар барабар болушат. Анда алардын көлөмдөрү да барабар.



72-сүрөт

Бул үч бурчтуу призмалардын биригүүсү $ABDCA_1B_1D_1C_1$ параллелепипедин түзөт. 39-теореманын негизинде анын көлөмү $V' = S' \cdot H$ (1) болот.

Мында негизинин аянты $S' = S(ABCD) = 2S(ABC)$ (2) боло тургандыгы белгилүү, H – берилген призманын бийиктиги (призманын жогорку негизинин чокуларынын биринен төмөнкү негизинин тегиздигине түшүрүлгөн перпендикуляр).

Натыйжада телолордун көлөмдөрүн аныктоонун касиеттеринин негизинде

$$2V = V' \qquad (3)$$

барабардыгына ээ болобуз. Бул (3) барабардыкка (1) жана (2) барабардыктарын пайдалансак,

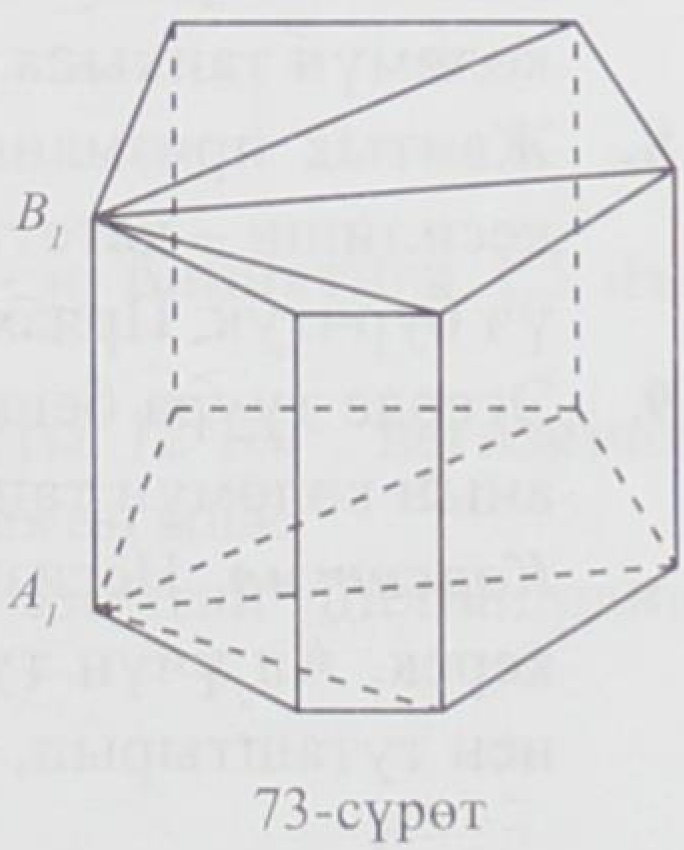
$$V = S(ABC) \cdot H \qquad (4)$$

болот. Теорема далилденди.

41-теорема. **Ар кандай призманын көлөмү негизинин аянтын бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

Д а л и л д ө ө : n бурчтуу призма берилген (73-сүрөт). Негизинин аянтын S, бийиктигин H, көлөмүн V аркылуу белгилейли. $V = S \cdot H$ боло тургандыгын далилдейбиз.

Призманын A_1B_1 каптал кыры аркылуу диагоналдык кесилиштерди жүргүзсөк (негиздеринин туура келүүчү диагоналдары аркылуу), анда берилген призма үч бурчтуу (п-2) призмаларга бөлүнөт. Алардын ар биринин көлөмү 40-теоремага ылайык негизинин аянтын бийиктигине көбөйткөнгө барабар. Бирок, бардык үч бурчтуу призмалардын бийиктиктери бирдей, ал берилген призманын бийиктигине барабар.



73-сүрөт

Негизиндеги үч бурчтуктардын аянттары $S_1, S_2, ..., S_{n-2}$ болсун. Анда берилген призманын негизинин аянты $S = S_1 + ... + S_{n-2}$ болот. Тиешелүү үч бурчтуу призмалардын көлөмдөрү: $V_1 = S_1 \cdot H$,.., $V_{n-2} = S_{n-2} \cdot H$ болот. Телонун көлөмүн аныктоонун негизинде (2-касиет) $V = V_1 + V_2 + ... + V_{n-2} = S_1 \cdot H + ... + S_{n-2} \cdot H = (S_1 + ... + S_{n-2}) \cdot H = S \cdot H$ же $V = S \cdot H$ болот.

Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

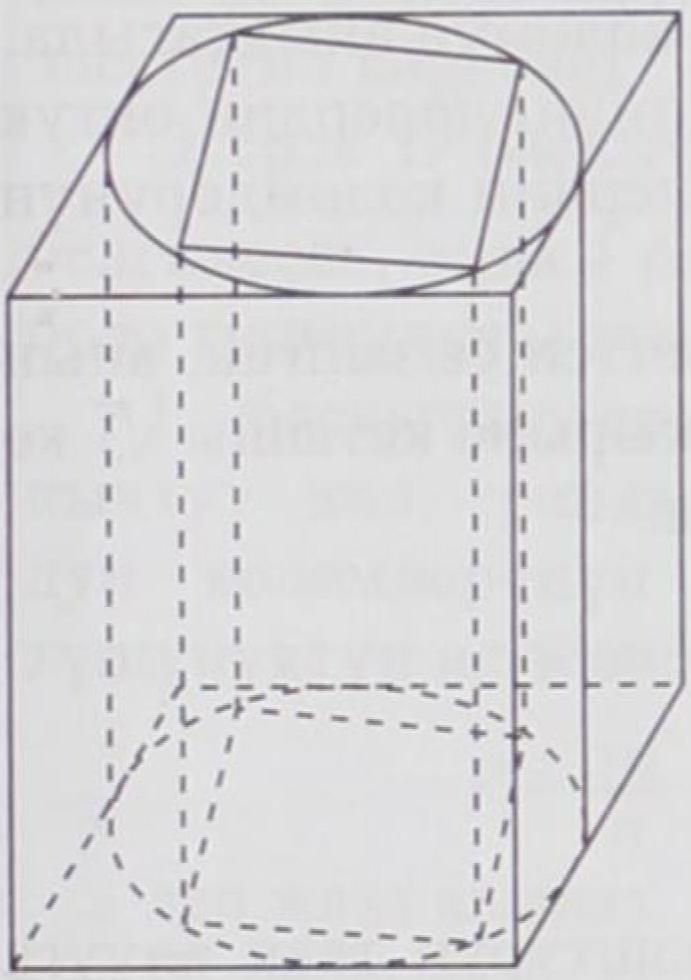
1. Негизинин жагы a жана h бийиктиги боюнча туура: 1) үч бурчтуу; 2) төрт бурчтуу; 3) алты бурчтуу призманын көлөмүн тапкыла.
2. 1-маселеде: а) $a = 2$ *см*, $h = 6$ *см*; б) $a = 4$ *м*; $h = 1{,}2\sqrt{3}$ *м* болгон учур үчүн призманын көлөмүн эсептегиле.
3. Туура төрт бурчтуу призманын диагоналы 35 *дм*, ал эми каптал гранынын диагоналы 25 *дм*. Призманын көлөмүн тапкыла.
4. Үч бурчтуу тик призманын бийиктиги 6,5см, негизинин жактары 29 *см*, 25 *см*, 6 *см*. Көлөмүн тапкыла.
5. Тик призманын негизи – аянты S, тар бурчу α болгон тик бурчтуу үч бурчтук. Чоң каптал гранынын аянты Q га барабар. Призманын көлөмүн аныктагыла.
6. Үч бурчтуу жантык призманын негизинин жактары 50 *дм*, 60 *дм* жана 90 *дм*, каптал кыры 100 *дм*, ал негизинин тегиздиги менен 45° бурч түзөт. Призманын көлөмүн тапкыла.
7. Призманын негизи – тең капталдуу трапеция болуп, анын негиздери 44 *дм* жана 28 *дм*, ал эми каптал жагы 17 *дм*. Призманын негизине перпендикулярдуу болушкан диагоналдык кесилиштердин бири бурчу 45° болгон ромб. Призманын көлөмүн тапкыла.
8. Жантык призманын каптал кыры 1 *дм*, перпендикулярдык кесилиши – катеттери 0,8 *дм* жана 0,6 *дм* болгон тик бурчтуу үч бурчтук. Призманын көлөмүн эсептегиле.
9. Эгерде туура беш бурчтуу призманын ар бир кыры a болсо, анын көлөмүн тапкыла.

   Көрсөтмө. Негизиндеги туура 5 бурчтуктун аянтын табуу керек. Ал үчүн туура 5 бурчтуктун чокуларын борбору менен туташтырып, үч бурчтуктун аянтын эсептөө зарыл.

§ 38. ЦИЛИНДРДИН КӨЛӨМҮ

42-теорема. **Цилиндрдин көлөмү негизинин аянтын бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

Д а л и л д ө ө: Цилиндр берилген (74-сүрөт). Анын негизинин радиусу R, бийиктиги H болсун. Бул цилиндрге ичтен жана сырттан сызылган туура n бурчтуу призмаларды карайбыз. Алардын көлөмдөрү тиешелүү түрдө V_n' жана V_n'' болсун. Цилиндрдин көлөмүн V деп белгилейли. Анда фигуралардын көлөмүнүн аныктамасы боюнча $V_n' < V < V_n''$ (1) болот.



74-сүрөт

$V_n' = S_n' \cdot$ H, $V_n'' = S_n \cdot H$ (S_n', S_n'' – призмалардын негиздеринин аянттары) болоору белгилүү (41-теорема). Эгерде n ди чексиз чоңойтсок, анда S_n' жана S_n'' маанилери цилиндрдин негизинин аянтынан аз гана айырмаланат, башкача айтканда, алардын пределдери $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = \lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = S = \pi R^2$ боло тургандыгы белгилүү, ал эми цилиндрдин жана призмалардын бийиктиктери өзгөрбөйт. Ошондуктан призмалардын көлөмдөрүнүн пределдери $\lim\limits_{n\to\infty} V_n' = \lim\limits_{n\to\infty} V_n'' = S \cdot H = \pi R^2 \cdot H$ болот.

Бирок, каалагандай n саны үчүн (1) барабарсыздык туура болгондуктан, $\lim\limits_{n\to\infty} V_n' = V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n''$ болот.

Ошентип, $V = \pi R^2 \cdot H$ (2) формуласын алабыз. Теорема далилденди.

(2) формула каалагандай цилиндр үчүн туура болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Цилиндрдин негизинин диаметри 20 *см*, бийиктиги 1,5 *дм*. Цилиндрдин көлөмүн эсептегиле.
2. Цилиндрдин октук кесилишинин аянты 12 *дм*^{2}, негизинин радиусу 3 *дм* болсо, анын көлөмүн аныктагыла.
3. Кыры *a* га барабар кубга ичтен сызылган цилиндрдин көлөмүн тапкыла.

4. Цилиндрдин октук кесилишинин диагоналы d, ал негизиндеги тегиздиги менен φ бурчун түзөт. Цилиндрдин көлөмүн эсептегиле.
5. Цилиндрдин каптал бетинин жайылмасы – жагы a га барабар болгон квадрат. Цилиндрдин көлөмүн тапкыла.
6. Бардык кырлары a га барабар болгон туура алты бурчтуу призмага ичтен сызылган цилиндрдин көлөмүн аныктагыла.
7. Шарга сырттан жана ичтен сызылган цилиндрлердин октук кесилиштери квадраттар. Ал цилиндрлердин көлөмдөрүнүн катышын аныктагыла.
8. Цилиндрге туура үч бурчтуу призма ичтен сызылган, анын көлөмү V, негизинин жагынын каптал кырына катышы $\sqrt{3}$ кө барабар. Цилиндрдин көлөмүн тапкыла.

§ 39. ПИРАМИДАНЫН КӨЛӨМҮ

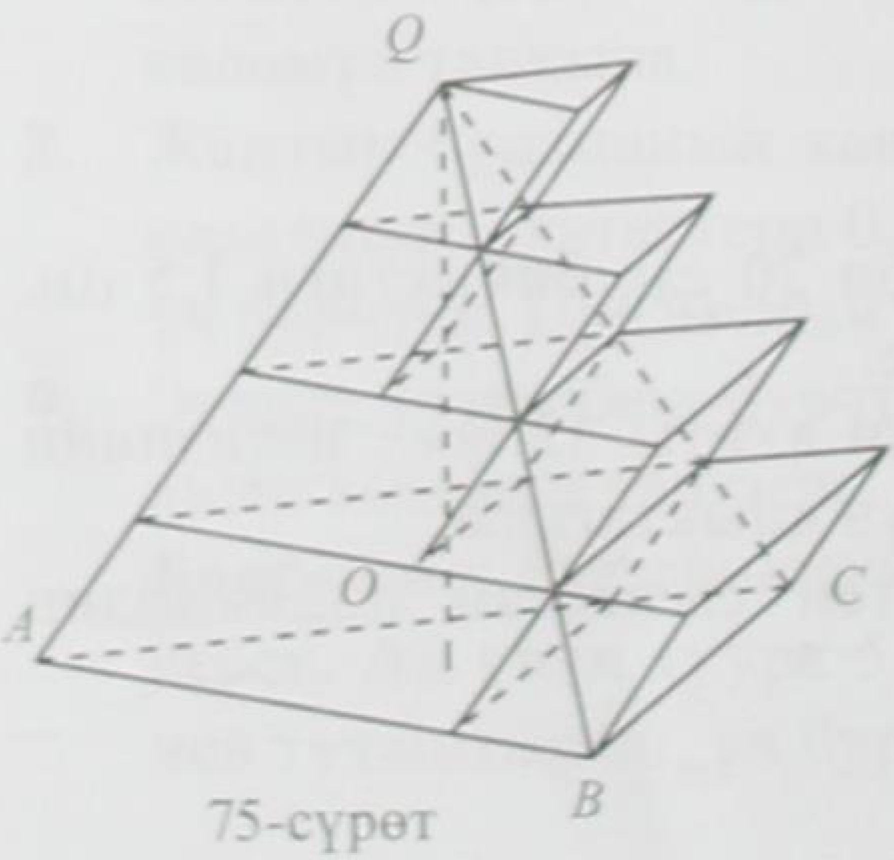
Пирамиданын көлөмүн призмага окшоштуруп таап алууга дайыма эле мүмкүн боло бербейт. Ошондуктан анын көлөмүн табуу үчүн кыйла татаал ыкмаларды колдонууга туура келет.

43-теорема. **Үч бурчтуу пирамиданын көлөмү негизинин аянтынын бийиктигине көбөйтүндүсүнүн үчтөн бирине барабар.**

Д а л и л д өө. $QABC$ пирамидасы берилген (75-сүрөт). Анын негизинин аянтын S, көлөмүн V, бийиктигин H аркылуу белгилейли. Пирамиданын Q чокусунан негизинин тегиздигине түшүрүлгөн перпендикуляр $QO = H$ болсун.

$V = \frac{1}{3} S \cdot H$ боло тургандыгын далилдейбиз.

Эгерде H бийиктигин n барабар бөлүктөргө бөлүп, бөлүү чекиттери аркылуу пирамиданын негизине параллель тегиздиктер жүргүзсөк, алар пирамиданы n бөлүккө бөлөт. Бул бөлүктөр аркылуу ичтен (биринчисинен башкасына) жана сырттан призмалар сызабыз (сүрөттө көрсөтүлгөндөй). Натыйжада баскычтуу эки көп грандыкка ээ болобуз. I топто n–1 призма болот, алардан түзүлгөн баскычтуу көп



75-сүрөт

грандык пирамиданын ичинде жатышат. Ал эми II топто n призмалар болуп, алардан түзүлгөн баскычтуу көп грандык пирамидага сырттан сызылган болот.

II баскычтуу көп грандык I баскычтагы көп грандыктан бир гана призма менен айырмаланат, ал төмөнкү катмардагы призма, анын негизинин аянты S ке, бийиктиги $\frac{H}{n}$ ге барабар (сүрөттөн элестетип көргүлө).

Эгерде II баскычтуу көп грандыктын көлөмүн V_1 аркылуу белгилесек, анда I баскычтуу көп грандыктын көлөмү $V_1 - \frac{SH}{n}$ боло тургандыгы түшүнүктүү.

I баскычтуу көп грандык пирамидага ичтен, ал эми II баскычтуу көп грандык – сырттан сызылгандыктан, телолордун көлөмдөрүнүн аныктамасынын 2-касиетинде берилген түшүнүктүн негизинде

$$V_1 - \frac{SH}{n} < V < V_1 \qquad (1)$$

деп жаза алабыз.

II баскычтуу көп грандыктын призмаларынын көлөмдөрүн табабыз. Пирамиданын кесилиштеринин аянттарын тиешелүү түрдө $S_1, S_2, ..., S_{n-1}$ аркылуу белгилейли.

Пирамиданы негизине параллель тегиздик менен кескенде кесилиштин жана негиздин аянттарынын катышы пирамида-нын чокусунан аларга чейинки аралыктардын катыштарынын квадратына барабар боло тургандыгы белгилүү. Анда

$$S_1 : S = \left(\frac{H}{n}\right)^2 : H^2, S_2 : S = \left(\frac{2H}{n}\right)^2 : H^2, ..., S_{n-1} : S = \left(\frac{(n-1) \times H}{n}\right)^2 : H^2$$

же

$$S_1 = \frac{1}{n^2} S, S_2 = \frac{2^2}{n^2} S, ..., S_{n-1} = \frac{(n-1)^2}{n^2} S \qquad (2)$$

болот.

II баскычтуу көп грандыктын көлөмү андагы ар бир призманын көлөмдөрүнүн суммасына барабар:

$$V_1 = S_1 \frac{H}{n} + S_2 \frac{H}{n} + ... + S \frac{H}{n} \qquad (3)$$

(2), (3) барабардыктардан

$$V_1 = S_1 \frac{H}{n^3} S(1^2 + 2^2 + ... + n^2) \qquad (4)$$

келип чыгат.

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}\, n\,(2n^2 + 3n + 1) \qquad (5)$$

боло тургандыгы белгилүү. Бул барабардыктын тууралыгын математикалык индукция методуна негиздеп далилдөөгө болот. Натыйжада (4) дөн

$$V_1 = \frac{SH}{n^2}\,\frac{1}{6}\,(2n^2 + 3n + 1) \qquad (6)$$

келип чыгат.

Туюнтмаларга тиешелүү өзгөртүүлөрдү жасагандан кийин (1) барабарсыздыкты төмөндөгүдөй жазууга болот.

$$SH\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) < V - \frac{SH}{3} < SH\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) \qquad (7)$$

n санын каалаганчалык чоң кылып алганда (7) барабарсыздыктын оң жана сол жактарындагы $\frac{1}{2n}$ жана $\frac{1}{6n^2}$ маанилери нөлгө умтулат. Анда алардын арасындагы жаткан $V - \frac{SH}{3}$ мааниси нөлдөн аз гана айырмаланып, предели нөлгө барабар болот. Бул качан гана $V = \frac{1}{3}\,SH$ болгондо аткарылышы мүмкүн.

Теорема далилденди.

Натыйжа. **Ар кандай пирамиданын көлөмү негизинин аянтынын бийиктигине көбөйтүндүсүнүн үчтөн бирине барабар.**

n бурчтуу пирамида берилсин. Негизиндеги көп бурчтуктун аянты S, бийиктиги H болсо, анда көлөмү $V = \frac{1}{3}\,SH$ болот.

Бул натыйжанын тууралыгы 43-теоремадан келип чыгат. Анын далилдениши 41-теоремага окшош. Аны өз алдынарча далилдөөгө сунуш кылабыз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Туура төрт бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 6 *см*, бийиктиги 10 *см* болсо, анын көлөмүн эсептегиле.

2. Туура n бурчтуу пирамиданын негизинин жагы a, бийиктиги h болсо, анын көлөмүн $V = \dfrac{na^2h}{12tg\dfrac{180^\circ}{n}}$ (1) формуласы аркылуу эсептөөгө болоорун далилдегиле.

Көрсөтмө. Пирамиданын негизиндеги көп бурчтуктун чокуларын борбору менен туташтырып, негизинин аянтын табуу керек.

3. Негизинин жагы a жана h бийиктиги боюнча туура: 1) үч бурчтуу; 2) төрт бурчтуу; 3) алты бурчтуу пирамиданын көлөмүн тапкыла.

   Көрсөтмө. 2-маселедеги (1) формуланы пайдалангыла.

4. 3-маселеде: а) $a = 4$ *см*, $h = 12$ *см*; б) $a = 1{,}8$ *м*, $h = 20{,}4$ *м* болгон ар бир учур үчүн пирамиданын көлөмүн эсептегиле.
5. Негизинин жагы a жана b каптал кыры боюнча туура: 1) үч бурчтуу; 2) төрт бурчтуу; 3) алты бурчтуу пирамиданын көлөмүн тапкыла.
6. 5-маселеде: а) $a = 3$ *см*, $b = 4$ *см*; б) $a = 2$ *м*, $b = 4$ *м* болгон ар бир учур үчүн пирамиданын көлөмүн эсептегиле.
7. Туура төрт бурчтуу пирамиданын бийиктиги h, негизиндеги эки грандуу бурчу φ. Анын көлөмүн аныктагыла.
8. Туура төрт бурчтуу пирамиданын негизинин жагы a, чокусундагы жалпак бурчу φ. Анын көлөмүн тапкыла.
9. Пирамиданын негизи – жактары 8 *дм* жана 6 *дм* болгон тик бурчтук, ар бир каптал кыры *дм*. Пирамиданын көлөмүн эсептегиле.
10. Тетраэдрдин бир кыры 4 *см*, калган кырларынын ар бири 3 *см*. Анын көлөмүн эсептегиле.
11. Үч бурчтуу пирамиданын каптал кырлары a, $в$ га барабар жана эки-экиден өз ара перпендикулярдуу. Пирамиданын көлөмүн тапкыла.
12. Пирамиданын негизи ромб, анын жагы a, тар бурчу α. Негизиндеги бардык эки грандуу бурчтар φ ге барабар. Пирамиданын көлөмүн тапкыла.

§ 40. КЕСИЛГЕН ПИРАМИДАНЫН КӨЛӨМҮ

Кесилген пирамиданын көлөмү

$$V = H\left(S_1 + \sqrt{S_1 \times S_2} + S_2\right) \qquad (1)$$

формуласы аркылуу аныкталат, мында S_1 жана S_2 кесилген пирамиданын негиздеринин аянттары, H – кесилген пирамиданын бийиктиги.

(1) формуланы далилдеш үчүн берилген кесилген пирамиданы толук пирамидага чейин толуктап, ал толук пирамиданын көлөмүнөн толуктоочу пирамиданын көлөмүн кемитүү керек.

Мында пирамидалардын негиздеринин аянттарынын катышын алардын тиешелүү бийиктиктеринин квадраттарынын катышы аркылуу туюнтуу зарыл.

Толуктоочу пирамиданын бийиктигин h, негизинин аянтын S_1 деп эсептесек, анда толук пирамиданын негизинин аянты S_2 болот. Жогорудагы пирамиданын негизине параллель кесилиш менен анын негизинин аянттарынын катышын эске алсак, анда $S_2 : S_1 = (h + H)^2 : h^2$ ка ээ болобуз, мындан $h = \dfrac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$ болоору түшүнүктүү.

Эми кесилген пирамиданын көлөмү $V = \frac{1}{3} S_2(h + H) - \frac{1}{3} S_1 h$ болот. Мындан (1) келип чыгат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Кесилген үч бурчтуу туура пирамиданын негиздеринин жактары a жана b, каптал кыры негизи менен φ бурчун түзөт. Пирамиданын көлөмүн тапкыла.
2. Кесилген төрт бурчтуу туура пирамиданын негиздеринин жактары a жана b, чоң негизиндеги эки грандуу бурчу φ. Пирамиданын көлөмүн тапкыла.
3. Кесилген туура алты бурчтуу пирамиданын негиздеринин жактарынын катышы $1 : 2$ ге барабар, ал эми каптал кыры l ге барабар болуп, негизинин тегиздиги менен $60°$ бурч түзөт. Пирамиданын көлөмүн эсептегиле.
4. Пирамиданын негизи – тик бурчтуу трапеция, анын параллель эмес жактарынын чоңу 12 *см*, ал эми тар бурчу $30°$. Пирамиданын бардык каптал грандары негизинин тегиздигине бирдей бурч менен жантайган, каптал бетинин аянты 90 *см*^{2}. Пирамиданын көлөмүн тапкыла.
5. Кыры a га болгон туура тетраэдрдин көлөмүн тапкыла.
6. Туура октаэдрдин кыры a. Анын көлөмүн тапкыла.
7. Пирамиданын бийиктиги h. Негизине параллель болуп, пирамиданы көлөмү боюнча тең экиге бөлүүчү кесилиш анын чокусунан кандай аралыкта болот?
8. Пирамиданын бийиктигинин ортосу аркылуу негизине параллель болгон тегиздик жүргүзүлгөн. Ал пирамиданын көлөмүн кандай катышта бөлөт?

Көрсөтмө: Берилген пирамида менен аны кесүүдөн пайда болуучу пирамидалар окшош. Ошондуктан $V_1 : V = h_1^3 : h^3$ болоору белгилүү. (V_1 жана V – кесилип алынган жана берилген пирамидалардын көлөмдөрү, h_1 жана h – алардын бийиктиктери).

Мында $(V - V_1) : V_1$ катышын табуу керек.

§ 41. КОНУСТУН, КЕСИЛГЕН КОНУСТУН КӨЛӨМДӨРҮ

44-теорема. **Конустун көлөмү негизинин аянтынын бийиктигине көбөйтүндүсүнүн үчтөн бирине барабар.**

Д а л и л д ө ө : Бул теорема 43-теоремага окшош далилденет. Берилген конуска ичтен сызылган n бурчтуу туура пирамиданы карайбыз. Алардын бийиктиктери бирдей болот. Пирамиданын көлөмү $V_n = \frac{1}{3} S_n H$ (1) формуласы аркылуу аныктала тургандыгы белгилүү. Мында H – бийиктиги, Sn – n бурчтуу туура пирамиданын негизинин аянты. n ди чексиз чоңойткондо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S = \pi R^2$ болуп, $S = \pi R^2$ конустун негизинин аянты болоору белгилүү, R – конустун негизинин радиусу. Конустун көлөмүн V аркылуу белгилесек, жогорудагыдай талкуулоолордун негизинде $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$ болуп, пирамиданын көлөмү конустун көлөмүн аныктап калат. Анда (1) формуладан

$$V_n = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H \quad (2)$$

болот. Теорема далилденди.

Эми кесилген конустун көлөмүн табабыз. Ага ичтен сызылган n бурчтуу кесилген туура пирамиданы карайлы. Анын көлөмү

$$V_n = \frac{1}{3} H\left(S_n' + \sqrt{S_n' \times S_n''} + S_n''\right) \qquad (3)$$

болоору белгилүү, H – кесилген пирамиданын бийиктиги, S_n', S_n'' – негиздеринин аянттары. Жогорудагыдай талкуулоолордун негизинде n ди чексиз чоңойткондо S_n', S_n'' тин маанилери конустун негиздеринин аянттарына умтулат.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = \pi R^2$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = \pi R^2$ мында R, r – кесилген конустун негиздеринин радиустары. Ал эми V_n көлөмү кесилген конустун V

көлөмүнө умтулат. $\lim_{n\to\infty} V_n = V$ болот. Анда (3) формуладан

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right) \qquad (4)$$

келип чыгат. Бул формула аркылуу кесилген конустун көлөмү аныкталат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Конустун октук кесилиши каптал жагы 10 *см*, негизи 8 *см* болгон тең капталдуу үч бурчтук. Конустун көлөмүн тапкыла.
2. Конустун негизинин диаметри 4,2 *дм*, бийиктиги 10 *дм*. Көлөмүн эсептегиле.
3. Конустун негизинин радиусу 8 *м*, түзүүчүсү 10 *м*. Көлөмүн тапкыла.
4. Кырманда үйүлгөн буудай конус формасына ээ. Анын бийиктиги 2 *м*, негизинин айланасынын узундугу 16 *м*. Эгерде 1 $м^3$ буудайдын массасы 750 кг болсо, үймөктө канча тонна буудай бар?
5. Конустун түзүүчүсү негизинин тегиздиги менен 30° бурч түзөт. Конустун негизинин радиусу 6дм. Конустун көлөмүн аныктагыла.
6. Конустун каптал бетинин жайылмасы – радиусу 1,2 *дм* болгон жарым тегерек. Конустун көлөмүн эсептегиле.
7. Туура үч бурчтуу пирамидага ичтен сызылган конустун көлөмү ошол эле пирамидага сырттан сызылган конустун көлөмүнөн 4 эсе кичине болоорун далилдегиле.
8. Катети a, жанаша жаткан тар бурчу a болгон тик бурчтуу үч бурчтук гипотенузасынын айланасында айланат. Айлануудан пайда болгон телонун көлөмүн аныктагыла.
9. Кесилген конустун негиздеринин радиустары 0,1 *м* жана 0,9 *м*, түзүүчүсү 1 *м*. Анын көлөмүн тапкыла.
10. Кесилген конустун негиздеринин радиустары R жана r $(R > r)$, түзүүчүсү негизине 45° бурч менен жантайган. Кесилген конустун көлөмүн аныктагыла.
11. Радиусу R ге барабар болгон шарга конус ичтен сызылган. Анын октук кесилишинин чокусундагы бурчу α. Конустун көлөмүн тапкыла.
12. Жагы a га барабар квадратты анын чокусу аркылуу өтүп, диагоналына параллель болгон октун айланасында айландырганда пайда болуучу телонун көлөмүн аныктагыла.

13. Кесилген конустун негиздеринин радиустары R жана r $(R > r)$. Анын көлөмүнүн толук конустун көлөмүнө катышын аныктагыла.

14. Конустун түзүүчүсү l, ал эми негизиндеги айлананын узундугу C. Конустун көлөмүн тапкыла.

15. Жагы a жана тар бурчу α болгон ромб тар бурчунун чокусу аркылуу өтүп, анын жагына перпендикулярдуу болгон октун айланасында айланат. Айлануудан пайда болуучу телонун көлөмүн аныктагыла.

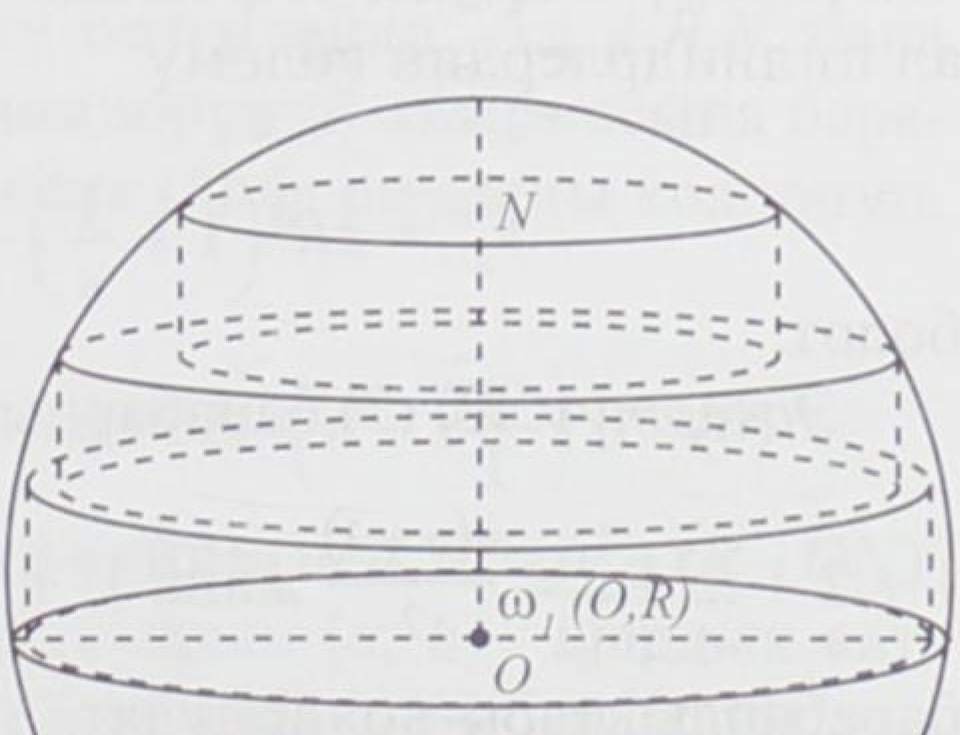
16. Конустун негизинин аянты S, ал эми каптал бетинин аянты Q. Конустун көлөмүн тапкыла.

17. Радиусу R, бийиктиги H болгон конус берилген. Конустун көлөмүн тең экиге бөлгөндөй кылып, негизине параллель тегиздик жүргүзүү керек. 1) Ал кесилиш негизинин тегиздигинен кандай аралыкта болот? 2) Кесилиштин радиусун аныктагыла.

§ 42. ШАРДЫН ЖАНА АНЫН БӨЛҮКТӨРҮНҮН КӨЛӨМДӨРҮ

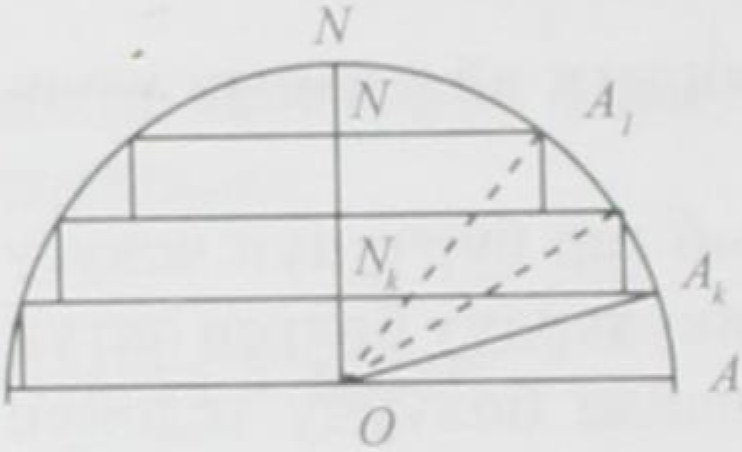
45-теорема. **Радиусу R болгон шардын көлөмү $\frac{4}{3}\pi R^3$ га барабар.**

Д а л и л д ө ө. $\omega_1(O;R)$ жарым шарын алалы (76-сүрөт). $ON = R$ айлануу огу болсун, ON огун n барабар бөлүккө бөлөбүз. Бөлүү чекиттери аркылуу чоң тегерекке параллель тегиздиктер жүргүзөбүз. Кесилиштеринде параллель тегеректер пайда болот. Жогору жагындагы ар бир тегеректи төмөнкүсүнө ортогоналдык (тик бурчтуу) проекциялаcак, цилиндрлер пайда болот. Алар шардын ичинде жатат жана алардын ар биринин би-йиктиги $\frac{R}{n}$ ге барабар болот, анткени ON ди барабар n бөлүккө бөлгөнбүз.



76-сүрөт

ON огу боюнча кесилишти алабыз (77-сүрөт). Жогору жагынан баштап эсептегенде цилиндрлердин негиздеринин радиустарын тиешелүү түрдө r_1, r_2, ..., r_{n-1} аркылуу белгилейли. Анда k – чы цилиндр үчүн (ΔOA_kN_k дан)



77-сүрөт

$$r_k^2 = OA_k^2 - ON_k^2 = R^2 - (R - NN_k)^2 =$$
$$= R^2 - \left(R - R\frac{k}{n}\right)^2 = 2R^2\frac{k}{n} - R^2\,\frac{k^2}{n^2};$$

Бул учурда k – чы цилиндрдин көлөмү

$$V_k = \pi r_k^2 \cdot \frac{R}{n} = \frac{\pi R}{n}\left(2R^2\frac{k}{n} - R^2\,\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{2\pi R^3}{n^2} \cdot k - \frac{\pi R^3}{n^3} \cdot k^2 \quad (1)$$

Мында $k = 1;\ 2;\ ...\ n - 1$ боло тургандыгы түшүнүктүү.

Анда жалпы цилиндрдин көлөмү (1) формуланын негизинде.

$$V_n' = V_1 + V_2 + ... + V_{n-1} = \frac{2\pi R^3}{n^2}\Big(1 + 2 + ... + (n-1)\Big) -$$
$$\frac{\pi R^3}{n^3}\Big(1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2\Big) = \frac{2\pi R^3}{n^2} \cdot \frac{(n-1) \times n}{2} - \quad (2)$$
$$\frac{\pi R^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \times n \times (2n-1)}{6} = \pi R^3\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{\pi R^3}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

болот, мында § 39 тагы (5) формула пайдаланылды.

Эгерде 76-сүрөттө төмөн жагындагы ар бир тегеректи улам жогоркусуна ортогоналдык проекциялаcак, анда да цилиндрлер пайда болот. (Мында жогору жагындагы биринчи тегерек жаныма тегиздикке проекцияланат). Бул цилиндрлердин ар биринин бөлүктөрү шардын сыртында жатат. Жогорудагыдай эсептесек, ал цилиндрлердин көлөмү

$$V_n'' = \pi R^3\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\pi R^3}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \quad (3)$$

болот.

Эскертүү. (2) (3) барабардыктарда жогоруда белгилүү болгон

$$1 + 2 + ... + \mathrm{n} = \frac{n(n+1)}{2} \text{ жана } 1^2 + 2^2 + ... + \mathrm{n}^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

барабардыктары колдонулат. n чексиздикке умтулганда ($\mathrm{n} \to \infty$) V_n' жана V_n'' туюнтмалары пределге ээ болушат жана алардын пределдери бирдей, з дин каалагандай маанилеринде (V' - жарым шардын көлөмү)

$$V'_n < V < V''_n$$

болоору белгилүү, анда жалпы предели жарым шардын V' көлөмүнө барабар. Натыйжада (2) ден төмөндөгүнү алабыз:

$$V' = \lim_{n\to\infty} V'_n = \lim_{n\to\infty}\left(\pi R^3\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{\pi R^3}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)=$$

$$=\pi R^3\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{\pi R^3}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\pi R^3-\frac{\pi R^3}{3}=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

Толук шардын көлөмү

$$V = 2V',$$

же

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (4)$$

болот.

Теорема далилденди.

Эми шардын бөлүктөрүнүн көлөмдөрүн табууга токтолобуз.

I. Шардык сегменттин көлөмү. Жогоруда жарым шар үчүн айтылгандарды радиусу r, ал эми бийиктиги h болгон шардык сегмент үчүн кайталасак, анда шардык сегменттин көлөмү үчүн

$$V_{mc}=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right) \qquad (5)$$

формуласына ээ болобуз (өз алдынарча далилдегиле).

II. Шардык катмардын көлөмү. $A_1B_1C_1D_1$ шардык катмарынын (62-сүрөт) көлөмүн V аркылуу белгилейли. Ал A_1B_1N жана A_2B_2N шардык сегменттеринин көлөмдөрүнүн айырмасына барабар. 62-сүрөттөгү белгилөөлөрдү жана (5) формуланы колдонуп, аны төмөндөгүдөй жазууга болот.

$$V=\pi\cdot DN^2\left(R-\frac{DN}{3}\right)-\pi\cdot CN^2\left(R-\frac{CN}{3}\right) \qquad (6)$$

$DM-CN=h$ – шардык катмардын бийиктиги. $R^2=a^2+(R-DN)^2$ жана $R^2=b^2+(R-CN)^2$ барабардыктарын (a, b – шардык катмардын негиздеринин радиустары) эске алсак, (6) барабардыкты жөнөкөйлөнткөндөн кийин төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$V=\frac{1}{2}\pi h\left(a^2+b^2\right)+\frac{1}{6}\pi h^3 \qquad (7)$$

Бул формула аркылуу шардык катмардын көлөмү аныкталат.

III. Шардык сектордун көлөмү. Жөнөкөй шардык сектордун көлөмү шардык сегменттин жана конустун көлөмдөрүнүн суммасынан турат (63а-сүрөттү карагыла). Жөнөкөй шардык сектордун көлөмүн н аркылуу белгилесек, анда ал

$$V=\frac{1}{3}\pi a^2\cdot OD+\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right) \ (8)$$

болот.

Мында h – шардык сегменттин бийиктиги, a – конустун негизинин радиусу, OD – конустун бийиктиги. $a^2=h(2R-h)$ боло тургандыгын эске алсак, (8) төмөндөгүдөй жазылат.

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 h \qquad (9)$$

Бул формула аркылуу жөнөкөй шардык сектордун көлөмү аныкталат.

2-түрдөгү шардык сектордун көлөмү (V) жөнөкөй эки шардык секторлордун , башкача айтканда, $BCB'P$ жана $AOA'P$ секторлорунун (63б-сүрөт) көлөмдөрүнүн айырмасына барабар. (9) формуланын негизинде

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2\cdot PE-\frac{2}{3}\pi R^2\cdot PD,$$

$PE-PD=h_1$ – 2-түрдөгү шардык сектордун бийиктиги экендигин эске алсак,

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 h_1 \qquad (10)$$

Бул формула аркылуу 2-түрдөгү шардык сектордун көлөмү аныкталат. (9) жана (10) формулалар бири-биринен бийиктиги боюнча айырмаланат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Шардын радиусу 6 *см.* Көлөмүн эсептегиле.
2. Шардын көлөмү 523,5 $дм^3$. Шардын диаметрин тапкыла.
3. Эки шардын көлөмдөрүнүн катышы алардын радиустарынын кубдарынын катышына барабар болоорун далилдегиле.

4. Эгерде шардын радиусун 4 эсе чоңойтсок, анда анын көлөмү кандай өзгөрөт?

5. Шардын чоң тегерегинин аянты 9 эсе чоңойтулса, анда анын көлөмү кандай өзгөрөт?

   Көрсөтмө. Чоң тегеректин аянты 9 эсе чоңойсо, анда радиусу 3 эсе чоңоёт.

6. Жердин көлөмү Айдын көлөмүнөн канча эсе чоң болот? (Жердин диаметри болжол менен 13 миң км, Айдыкын 3,5 миң км деп кабыл алгыла).

7. Кубдун кыры *a*. Ага: 1) ичтен сызылган; 2) сырттан сызылган шардын көлөмүн тапкыла.

8. Диаметри 2 *см* болгон шар түрүндөгү коргошун куймасын алыш үчүн диаметри 10 *мм* болгон коргошун шариктерин эритип пайдаланууга туура келет. Андай шариктерден канчаны пайдалануу керек?

9. $Oxyz$ системасында $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ сферасы берилген. Сфера менен чектелген шардын көлөмүн тапкыла.

10. Шардын борборунан 4 *дм* аралыкта өткөн тегиздик радиусу 3 *см* кесилишти аныктайт. Шардын көлөмүн тапкыла.

11. Туура үч бурчтуу пирамиданын негизинин жагы *a*, негизиндеги эки грандуу бурчу α. Ага ичтен сызылган шардын көлөмүн тапкыла.

    Көрсөтмө. Пирамиданын негизинин медианасы жана шардын борбору аркылуу өтүүчү тегиздиктин кесилишинен пайдалангыла.

12. Конустун түзүүчүсү негизи менен α бурчун түзөт. Ага ичтен сызылган шардын көлөмү V га барабар. Конустун көлөмүн тапкыла.

    Көрсөтмө. Конустун негизинин диаметри жана шардын борбору аркылуу өтүүчү кесилиштен пайдалангыла.

13. Конустун түзүүчүсү l негизинин тегиздиги менен a бурчун түзөт. Конуска: 1) ичтен сызылган; 2) сырттан сызылган шардын көлөмүн аныктагыла.

14. Архимеддин теоремасын далилдегиле: шардын көлөмү ага сырттан сызылган цилиндрдин көлөмүнөн 1,5 эсе кичине болот.

15. $Oxyz$ системасында $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферасы менен чектелген шар берилген. Шардын: 1) бир; 2) эки; 3) үч координаталар тегиздиги аркылуу бөлүнгөн бөлүктөрүнүн ар биринин көлөмүн тапкыла.

Көрсөтмө. Шардын борбору аркылуу өтүп, ага өз ара перпендикуляр болгон тегиздиктер менен кесилишин тапкыла.

16. Конустун түзүүчүсү менен негизинин тегиздигинин арасындагы бурч φ. Конуска шар ичтен сызылган. Конустун көлөмүнүн шардын көлөмүнө болгон катышын тапкыла.
17. Шардын радиусу 4,5 *дм*, анын сегментинин бийиктиги 1,5 *дм*. Шардык сегменттин көлөмүн тапкыла.
18. Шардын диаметрине перпендикулярдуу тегиздик ал диаметрди 2 *см* жана 6 *см* бөлүктөргө бөлөт. Шардын бөлүктөрүнүн көлөмдөрүн тапкыла.
19. Шардык сетменттин бийиктиги шардын диаметринин $\frac{1}{4}$ бөлүгүн түзөт. Бул сегменттин көлөмү шардын көлөмүнүн кандай бөлүгүн түзөт?
20. Шардын радиусу 10 *дм*, ага радиустары 6 *дм* болгон эки параллель кесилиштер жүргүзүлгөн. Кесилиштерден пайда болгон шардык катмардын көлөмүн аныктагыла.
21. Шардык сектордун радиусу r, октук кесилишиндеги бурчу 120°. Шардык сектордун көлөмүн тапкыла.
22. Шардын радиусу 2 *м*, ал эми шардык сектордун негизиндеги айлананын радиусу 1 *м*. Шардык сектордун көлөмүн тапкыла.
23. Шардык сектордун октук кесилишиндеги жаасы α, ал эми шардын радиусу r. Шардык сектордун көлөмүн эсептегиле.

V ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Фигуранын көлөмүн аныктоону түшүндүрүп бергиле. Анын кандай касиеттери бар?
2. Параллелепипеддин көлөмүн табуунун кандай жолдорун билесиңер?
3. Үч (көп) бурчтуу призманын көлөмүн кантип табууга мүмкүн?
4. Пирамиданын көлөмүн табуунун жолун айтып (түшүндүрүп) бергиле.
5. Кесилген пирамиданын көлөмүн кантип табууга болот?
6. Цилиндрдин көлөмүн кантип табууга болот? Ал эмнеге барабар?
7. Конустун көлөмү эмнеге барабар? Ал кантип табылат?
8. Кесилген конустун көлөмү кандай аныкталат? Эмнеге барабар?

9. Шардын көлөмүн тапкыла.
10. Шардык сегменттин көлөмү эмнеге барабар?
11. Шардык катмардын көлөмү кантип табылат? Ал эмнеге барабар?
12. Шардык сектордун көлөмү кантип аныкталат? Анын формуласын чыгаргыла.

V ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО МАСЕЛЕЛЕР

1. Параллелепипеддин негизи – аянты 5 $дм^2$ болгон ромб. Параллелепипеддин негизине перпендикулярдуу болгон диагоналдык кесилиштердин аянттары 6 $дм^2$ жана 15 $дм^2$. Параллелепипеддин көлөмүн тапкыла.
2. Эки тик параллелепипеддин каптал беттеринин аянттары барабар. Эгерде алардын негиздери бирдей аянтка ээ болсо, анда ал параллелепипеддер бирдей көлөмгө ээ болушабы?
3. Жантык призманын негизи – жагы a га барабар болгон тең жактуу үч бурчтук. Каптал грандарынын бири – квадрат, ал грандын тегиздиги негизинин тегиздигине 60° бурч менен жантайган. Призманын көлөмүн тапкыла.
4. Туура алты бурчтуу пирамиданын диагоналдык кесилиштеринин бири аны барабар болбогон эки бөлүккө бөлөт. Бул бөлүктөрдүн көлөмдөрүнүн катышын тапкыла.
5. Берилген пирамиданын көлөмүн 1:4 катышында бөлсүн үчүн анын негизине параллель болгон тегиздикти чокусунан кандай аралыкта жүргүзүү керек?
6. Кыры a га барабар болгон кубга ичтен сызылган цилиндрдин көлөмүн тапкыла.
7. Туура төрт бурчтуу призмага сырттан сызылган цилиндрдин көлөмү ал призмага ичтен сызылган цилиндрдин көлөмүнөн эки эсе чоң болоорун далилдегиле.
8. Туура үч бурчтуу призмага ичтен жана сырттан сызылган цилиндрлердин көлөмдөрүнүн катышын тапкыла.
9. Конустун октук кесилиши жагы 2 $м$ болгон тең жактуу үч бурчтук. Конустун көлөмүн жана бетинин аянтын тапкыла.
10. Конустун негизинин аянты S, каптал бетинин аянты M. Конустун көлөмүн тапкыла.
11. Кесилген конустун негиздеринин радиустары 1 $дм$ жана 9 $дм$, түзүүчүсү 1 $м$. Көлөмүн тапкыла.
12. Шардын көлөмү эки эсе чоңойсун үчүн анын диаметрин канча эсе чоңойтуу керек?

СТЕРЕОМЕТРИЯ БОЮНЧА ТАТААЛЫРААК МАСЕЛЕЛЕР

1. Кубдун тегиздик менен кесилишинде кандай туура көп бурчтук алынышы мүмкүн? Жообуңарды түшүндүргүлө.
2. Кыры a га барабар болгон кубдун ичине диаметри $\frac{a}{2}$ жана бийиктиги h болгондой үч цилиндрди кыймылдабагандай кылып кантип орноштурууга болот?
3. Туура тетраэдрдин бийиктигинин ортосу негизинин чокулары менен кесиндилер аркылуу туташтырылган. Ал кесиндилер өз ара перпендикуляр экендигин далилдегиле.
4. Туура тетраэдрдин кырларынын ортолору туура октаэдрдин чокулары болоорун далилдегиле.
5. Эгерде 4-маселедеги тетраэдрдин көлөмү V болсо, ал октаэдрдин көлөмүн тапкыла.
6. Шарга ичтен сызылган цилиндрге дагы экинчи шар ичтен сызылган. Ал шарлардын беттеринин аянттарынын катышын жана көлөмдөрүнүн катышын тапкыла.
7. Конуска шар ичтен сызылган. Конустун жана шардын көлөмдөрүнүн катышы экиге барабар. Конустун жана шардын толук беттеринин аянттарынын катышын тапкыла.
8. Кыры a га барабар болгон кубга шар ичтен сызылган. Кубдун үч гранын жана ичтен сызылган шарды жанып өтүүчү экинчи шардын радиусун тапкыла.
9. Радиусу R, бийиктиги H болгон конуска радиусу r жана бийиктиги h болгон цилиндр ичтен сызылган. $\frac{r}{R} + \frac{h}{H} = 1$ болоорун далилдегиле.
10. Туура көп грандыкка ичтен (сырттан) шар сызууга болот. Далилдегиле.
11. Шарга конус сырттан сызылган. Алардын көлөмдөрүнүн катышы беттеринин аянттарынын катышына барабар. Далилдегиле.
12. Радиусу r болгон сферанын O борборунан өз ара перпендикуляр OA, OB, OC үч шоолалары жүргүзүлгөн. AOB, BOC, COA жалпак бурчтары аркылуу чектелген сферанын кичине бөлүгүнүн аянтын тапкыла.
13. AOB, BOC жана COA бурчтарынын ар бири $60°$ ка барабар. AO түз сызыгы менен OB жана OC түз сызыктары аркылуу өтүүчү тегиздиктин арасындагы бурчту тапкыла.
14. Төрт бурчтуу туура призманын негизинин жагы a, ал эми бийиктиги h. Каптал кырындагы эки грандуу бурчун 1:2 ка-

тышында бөлүүчү тегиздик менен ал призманын кесилишинин аянтын тапкыла.

15. Кубдун диагоналынын тең ортосу аркылуу ага перпендикуляр тегиздик жүргүзүлгөн. Эгерде кубдун кыры a болсо, кесилиштин аянтын тапкыла.

16. Конустун көлөмү анын бетинин аянтын ичтен сызылган шардын радиусунун $\frac{1}{3}$ ине көбөйткөнгө барабар. Далилдегиле.

17. Бетинин аянты S ке барабар болгон туура тетраэдрдин бардык кырларын жанып өтүүчү сферанын аянтын тапкыла.

18. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери a жана b. Бул үч бурчтукту гипотенузанын айланасында айландыруудан алынган телого ичтен сызылган шардын көлөмүн тапкыла.

19. Пирамиданын негизинде кичине катети a, ага жанаша жаткан бурчу β болгон тик бурчтуу үч бурчтук жатат. Каптал кыры негизинин чоң катетине барабар. Пирамиданын көлөмүн тапкыла.

20. Пирамиданын негизи жактары a, b жана алардын арасындагы бурчу $120°$ болгон үч бурчтук. Ар бир каптал кыры негизинин тегиздигине α бурчу менен жантайган. Пирамиданын көлөмүн тапкыла.

21. Төрт бурчтуу туура пирамиданын негизинин жагы a, чокусундагы жалпак бурчу пирамиданын каптал кыры менен негизинин арасындагы бурчка барабар. Пирамиданын көлөмүн тапкыла.

22. Эгерде конустун түзүүчүсү менен тегиздигинин арасындагы бурч α, ал эми октук кесилишинин аянты Q болсо, конустун толук бетинин аянтын аныктагыла.

23. Эгерде кубдун, туура тетраэдрдин жана октаэдрдин ар биринин көлөмү V, бетинин аянты S болсо, аларга ичтен сызылган шардын радиусу $r = \frac{3V}{S}$ болот. Далилдегиле.

24. Туура тетраэдрдин кыры a. Тетраэдр менен тегиздиктин кесилиши квадрат боло турган кесилиштин аянтын аныктагыла.

25. Кыры a болгон туура октаэдрдин көлөмүн тапкыла.

26. Кыры a болгон октаэдрге ичтен (сырттан) сызылган шардын радиусун аныктагыла.

27. Туура үч бурчтуу пирамида бийиктиги h, негизинин бийиктигинин борборунан каптал гранына чейинки аралык b. Пирамидага ичтен сызылган шардын радиусун аныктагыла.

28. Туура үч бурчтуу пирамидада негизинин жагы b, ал эми каптал кыры $2b$. Каптал кырынын ортосу аркылуу ага перпендикуляр болгон тегиздик жүргүзүлгөн. Кесилиштин аянтын тапкыла.

29. Эгерде үч бурчтуу пирамидада бардык грандарынын периметрлери барабар болсо, анда анын бардык грандары барабар болоорун далилдегиле.

30. Радиусу 10 *см* шарга огу боюнча цилиндр түрүндөгү көзөнөк жасалган. Көзөнөктүн диаметри 12 *см*. Телонун толук бетинин аянтын эсептегиле.

31. Үч бурчтуу пирамидада үч граны өз ара перпендикуляр жана алардын аянттары S_1, S_2 жана S_3. Төртүнчү гранынын аянтын тапкыла.

32. Радиусу R ге барабар жарым сферага бирдей үч шар ичтен сызылган. Ар бир шар калган эки шарды, жарым сфераны жана анын негизин жанып өтөт. Ал шарлардын радиусун тапкыла.

33. Түзүүчүсү l болуп, негизинин тегиздигине α бурчу менен жантайган конуска сырттан сызылган шардын көлөмүн тапкыла.

34. Шардын диаметрине перпендикуляр болуп, аны 3 *см* жана 9 *см* бөлүккө бөлүүчү тегиздик жүргүзүлгөн. Шардык бөлүктөрдүн көлөмүн тапкыла.

35. Шардык сегменттин бийиктиги шардын диаметринин 0,1 бөлүгүн түзөт. Бул сегменттин көлөмү шардын көлөмүнүн кандай бөлүгүн түзөт?

36. Радиусу 13 *см* шарга радиустары 5 *см* болгон эки параллель кесилиштер жүргүзүлгөн. Алынган шардык катмардын көлөмүн тапкыла.

37. Шардын радиусу 75 *см*, шардык сектордун негизинин радиусу 60 *см* болсо, шардык сектордун көлөмүн тапкыла.

38. Бурчу 30° жана радиусу r болгон тегеректик сектор жаанын учу жана борбор аркылуу өтүүчү түз сызыктын айланасында айланат. Шардык сектордун көлөмүн тапкыла.

ТИРКЕМЕЛЕР

I. ПЛАНИМЕТРИЯ КУРСУ БОЮНЧА КЫСКАЧА МААЛЫМАТТАР

Планиметрия курсунун материалдарын кайталоодо жана колдонууда оңтойлуу болсун үчүн төмөндөгүдөй кыскача маалыматтар берилди. Ал маалыматтар тиешелүү темаларга байланыштырылып зарыл болгон учурда керектүү формулалар аркылуу жазылды.

Маалыматтарды баяндоодо төмөндөгүдөй кыскача белгилөөлөр пайдаланылды: « = » – барабар, > – чоң, < – кичине, $\angle$ – бурч, $\neq$ – барабар эмес, Δ – үч бурчтук, $\perp$ – перпендикуляр, $\|$ – параллель, P – периметр, p – жарым периметр, R, r – радиустар, h – бийиктик, a, b, c – үч бурчтуктун жактары, m_a – үч бурчтуктун A чокусунан a жагына жүргүзүлгөн медиана, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ же α, β, γ – үч бурчтуктун бурчтары, S – аянт, ~ – окшош, $\acute{\omega}(O,R)$ – борбору O, радиусу R болгон айлана, $|a|$ – a санынын абсолюттук чоңдугу.

Маалыматтарды баяндоодогу текстте алардан тышкары сөздөрдү кыскартуучу белгилер колдонулду: А. – аныктама, Т. – теорема, Н. – натыйжа, б.а. – башкача айтканда, д.а. – деп аталат. Текстти окуган учурда тиешелүү сүрөттөрдү өзүңөр чийгиле же планиметрия курсунун окуу китебинен пайдалангыла.

1. Планиметриянын аксиомалары

Планиметриянын негизги түшүнүктөрү болуп чекит, түз сызык, тегиздик эсептелет.

Аксиомалар – бул далилдөөсүз кабыл алынган сүйлөмдөр. Ак-сиомаларда негизги түшүнүктөрдүн касиеттери баяндалат.

I. Тиешелүүлүк аксиомалары

I$_1$. Каалагандай түз сызыкка карата ал түз сызыкта жатуучу чекиттер жана жатпаган чекиттер болот.

I$_2$. Каалагандай эки чекит аркылуу бир гана түз сызык өтөт.

II. Иреттүүлүк аксиомалары

II$_1$. Түз сызыктагы үч чекиттин бирөө гана калган экөөнүн арасында жатат.

II$_2$. Түз сызыкта жаткан чекит ал түз сызыкты жарым эки түз сызыкка бөлөт.

II$_3$. Тегиздикте жаткан түз сызык аны жарым эки тегиздикке бөлөт.

III. Өлчөөнүн аксиомалары

III$_1$. Ар бир кесинди нөлдөн чоң болгон белгилүү бир узундукка ээ болот.

III$_2$. АВ түз сызыгынын C чекити A жана B чекиттеринин арасында жатса, анда AB кесиндисинин узундугу AC жана CB кесиндилеринин узундуктарынын суммасына барабар.

III$_3$. Ар бир бурч нөлдөн чоң болгон белгилүү бир градустук ченге ээ болот. Жайылган бурч 180° ка барабар.

III$_4$. Эгерде OC шооласы AOB бурчунун чокусунан чыгып, анын жактарынын арасында жатса, анда AOB бурчу AOC жана COB бурчтарынын суммасына барабар.

IV. Өлчөп коюунун аксиомалары

IV$_1$. Берилген шоолага анын башталыш чекитинен тартып берилген узундуктагы кесиндини бир маанилүү өлчөп коюуга болот.

IV$_2$. Градустук чени 180° тан кичине болгон бурчту берилген шооладан баштап берилген жарым тегиздикке бир маанилүү өлчөп коюуга болот.

V. Параллелдик аксиомасы

Тегиздикте берилген түз сызыктан тышкары жаткан чекит аркылуу өтүүчү жана ал түз сызыкка параллель болгон бир гана түз сызык өтөт.

2. Жөнөкөй фигуралар

А. Чекиттердин ар кандай көптүгү **геометриялык фигура** деп аталат. Эгерде F жана F_1 фигураларынын тиешелүү чекиттери дал келгендей кылып беттештирүүгө мүмкүн болсо, анда алар барабар (конгруэнттүү) д. а. Ал $F = F'$ түрүндө жазылат.

а) **Кесинди**. А. Түз сызыктын эки чекит менен чектелген бөлүгү кесинди д. а. Кесинди чекиттерден турат. Ошондуктан ал фигура болот. AB кесиндиси AC жана CB кесиндилеринин суммасына барабар: $AB = AC + CB$. Кесиндинин узундугун өлчөө дегенибиз, ал кесиндиде канча бирдик кесинди бар экендигин көрсөтүүчү санды табуу.

б) **Шоола**. А. Жарым түз сызык шоола д. а. AO шооласында O анын башталыш чекити, A анын каалаган чекити болот. Шоола да геометриялык фигура.

3. Бурчтар

А. Бир чекиттен чыгуучу эки шоола менен чектелген тегиздиктин бөлүгү бурч деп аталат. Бурч $\angle AOB$ же α түрүндө белгиленет.

а) Бурчтардын түрлөрү

А. Бир жагы жалпы жак болуп, калган эки жагы бир түз сызыкты түзүүчү жалпы чокулуу эки бурч **жандаш** бурчтар деп аталат.

$\angle AOD$ жана $\angle DOB$ жандаш бурчтар, OA, OB жактары бир түз сызыкты аныктайт.

А. Жактары түз сызыкты түзүүчү АОВ бурчу **жайылган** бурч д. а.

Эгерде эки бурчту беттештиргенде тиешелүү жактары жана чокулары дал келишсе, анда алар барабар болушат.

А. Бурчту тең экиге бөлүүчү шоола анын **биссектрисасы** д.а.

А. Жайылган бурчтун жарымы **тик бурч** деп аталат. OC шооласы AOB бурчун тең экиге бөлсө, анда $\angle AOC$ жана $\angle COB$ тик бурчтар болушат.

А. Тик бурчтан кичине бурч **тар бурч** д. а. $\angle AOD < \angle AOC$ болсо $\angle AOD$ тар бурч болот.

А. Тик бурчтан чоң, бирок жайылган бурчтан кичине болгон бурч кең бурч д.а. $\angle AOC < \angle AOF < \angle AOB$ болсо $\angle AOF$ кең бурч болот.

А. Бир бурчтун жактары экинчи бурчтун жактарынын толуктоочу шоолалары болсо, анда ал бурчтар вертикалдык бурчтар д. а. $\angle AOB$ жана $\angle COD$ вертикалдык бурчтар, мында AB, CD түз сызыктар.

б) Бурчтар менен аткарылуучу амалдар

А. Тик бурчтун 1:90 бөлүгүнүн чоңдугунун чени градус д. а. Демек, тик бурч 90° ка, жайылган бурч 180° ка барабар. Бурчтун чоңдугу градус аркылуу өлчөнөт.

Бурчтардын суммасынын (айырмасынын) чоңдугун табыш үчүн алардын чоңдуктарынын суммасын (айырмасын) табуу керек. α бурчу, n саны берилсин. $n\alpha$ бурчунун чоңдугун табыш үчүн α бурчунун чоңдугун n санына көбөйтүү керек.

Т. Вертикалдык бурчтар барабар болушат.

4. Параллель түз сызыктар

А. Тегиздиктеги эки түз сызык кесилишпесе, анда алар параллель д. а.

a жана b түз сызыктары параллель болсо, $a \parallel b$ деп жазылат.

а) Параллель түз сызыктардын касиеттери. $a \parallel b$ түз сызыктарын l түз сызыгы кескенде 8 бурч түзүлөт: ички кайчылаш бурчтар, туура келүүчү бурчтар, ички бир жактуу бурчтар.

Эгерде эки түз сызыктын ар бири үчүнчү түз сызыкка параллель болсо, анда ал эки түз сызык параллель болушат. Кыскача: $a \parallel c$, $b \parallel c$, болсо, $a \parallel b$ болот.

б) Түз сызыктардын параллелдик белгилери.

Т. Эки түз сызыкты үчүнчү түз сызык менен кескенде: 1) ички бир жактуу бурчтарынын суммасы 180° ка барабар болсо; 2) туура келүүчү бурчтары барабар болсо; 3) ички кайчылаш бурчтары барабар болсо, анда берилген эки түз сызык параллель болушат.

Т. (Фалестин теоремасы). **Эгерде бурчтун жактарын кесип өтүүчү параллель түз сызыктар анын бир жагын барабар кесиндилерге бөлсө, анда алар анын экинчи жагын да барабар кесиндилерге бөлөт.**

5. Перпендикулярдуу түз сызыктар

А. Тик бурч боюнча кесилишүүчү эки түз сызык перпендикулярдуу түз сызыктар д.а. a жана b түз сызыктары перпендикулярдуу болсо, анда $a \perp b$ деп жазылат.

Т. Бир түз сызыкка перпендикулярдуу болгон эки түз сызык параллель болушат.

Т. Түз сызыктан тышкары жаткан чекит аркылуу ага перпендикулярдуу болгон бир гана түз сызык жүргүзүүгө болот.

6. Үч бурчтуктар

А. Бир түз сызыкта жатпаган үч чекиттен жана аларды экиэкиден туташтыруучу үч кесиндиден түзүлгөн фигура ***үч бурчтуктар*** д. а.

ΔABC да A,B,C – чокулары, a,b,c – жактары, α, β, γ же $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – бурчтары.

а) Үч бурчтуктун негизги сызыктары

Үч бурчтуктун чокусун каршысында жаткан жактын ортосу менен туташтыруучу кесинди анын ***медианасы*** д. а. Үч бурчтуктун үч медианасы бир чекитте кесилишет. Ал чекит медианаларды үч бурчтуктун чокуларынан баштап эсептегенде 2:1 катышында бөлөт.

А. Үч бурчтуктун бурчунун биссектрисасынын, ошол бурчтун чокусунан ага каршы жаткан жагына чейинки кесиндиси үч бурчтуктун ***биссектрисасы*** д.а. Үч бурчтуктун үч биссектрисасы бир чекитте кесилишет, ал чекит үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын борбору болот.

Т. Үч бурчтуктун бурчунун биссектрисасы чокусунун каршысында жаткан жакты жанаша жаткан жактарына пропорциялаш бөлүктөргө бөлөт.

А. Үч бурчтуктун чокусунан анын каршысында жаткан жагына же ал жак аркылуу өтүүчү түз сызыкка түшүрүлгөн перпендикуляр кесинди үч бурчтуктун ***бийиктиги*** д. а.

Үч бурчтуктун бийиктиктери же алардын уландылары бир чекитте кесилишет. Ал чекит тар бурчтуу үч бурчтукта – анын ичинде, кең бурчтуу үч бурчтукта – сыртында, тик бурчтуу үч бурчтукта – анын тик бурчунун чокусунда жатат. Тең жактуу үч бурчтуктун бийиктиктери анын медианалары да, биссектрисалары да болуп эсептелет. Тик бурчтуу үч бурчтукта эки бийиктиги катеттери менен дал келет.

А. Үч бурчтуктун эки жагынын ортолорун туташтыруучу кесинди анын ***орто сызыгы*** д. а.

Т. Үч бурчтуктун орто сызыгы жактарынын бирине параллель жана ал жактын жарымына барабар.

б) Үч бурчтуктун түрлөрү

1) жактарына карата

А. Эгерде үч бурчтуктун бардык жактары бири-бирине барабар болушпаса, анда алар ***түрдүү жактуу үч бурчтук*** д. а.

А. Эгерде үч бурчтуктун эки жагы барабар болсо, анда ал ***тең капталдуу үч бурчтук*** д. а.

А. Эгерде үч бурчтуктун бардык жактары барабар болсо, анда ал ***тең жактуу үч бурчтук*** д. а.

2) Бурчтарына карата

А. Үч бурчтуктун бардык бурчтары тар бурчтар болсо, ал ***тар бурчтуу үч бурчтук*** д. а.

А. Үч бурчтуктун бир бурчу тик болсо, ал ***тик бурчтуу үч бурчтук*** д. а. Тик бурчуна жанаша жаткан жактары анын катеттери, каршы жаткан жагы гипотенузасы болот.

А. Үч бурчтуктун бир бурчу кең бурч болсо, ***ал кең бурчтуу үч бурчтук*** д. а.

Т. Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 180° ка барабар. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ же $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

А. Үч бурчтуктун ички бир бурчуна жандаш бурч анын ***тышкы бурчу*** д. а.

Н. Үч бурчтуктун тышкы бурчу аны менен жанаша жатпаган ички эки бурчтун суммасына барабар.

Н. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын суммасы 90° ка барабар.

в) Үч бурчтуктардын барабардыгынын белгилери

А. Эгерде эки үч бурчтуктун тиешелүү жактары жана бурчтары барабар болушса, ***анда алар барабар*** д. а.

1) Т. Эгерде бир үч бурчтуктун эки жагы жана алардын арасындагы бурчу экинчи үч бурчтуктун тиешелүү эки жагына жана алардын арасындагы бурчуна барабар болсо, анда ал эки үч бурчтук барабар болушат.

2) Т. Эгерде бир үч бурчтуктун бир жагы жана ага жанаша жаткан эки бурчу экинчи үч бурчтуктун тиешелүү жагына жана ага жанаша жаткан эки бурчуна барабар болсо, анда ал эки үч бурчтук барабар болушат.

3) Т. Эгерде бир үч бурчтуктун үч жагы экинчи үч бурчтуктун тиешелүү үч жагына барабар болсо, анда ал эки үч бурчтук барабар болушат. Тик бурчтуу үч бурчтук үчүн бул үч белги жөнөкөйлөтүлүп колдонулат.

г) Тең капталдуу үч бурчтуктун касиеттери

Т. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурчтары барабар.

Т. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизине жүргүзүлгөн биссектрисасы анын медианасы да, бийиктиги да боло алат.

Н. Үч бурчтукта барабар жактардын каршысында барабар бурчтар жана барабар бурчтардын каршысында барабар жактар жатат.

д) Үч бурчтуктардын жактарынын жана бурчтарынын байланышы

1) Тик бурчтуу үч бурчтук

Т. (Пифагордун теоремасы). **Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттеринин квадраттарынын суммасы гипотенузасынын квадратына барабар.**

ΔABC да $\angle C = 90°$, a, b – катеттер, c – гипотенуза болсо, теорема боюнча $c^2 = a^2 + b^2$ болот.

А. Тик бурчтуу үч бурчтукта α тар бурчуна каршы жаткан катеттин гипотенузага катышы α ***бурчунун синусу*** д. а.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \qquad (1)$$

А. Тик бурчтуу үч бурчтукта α тар бурчуна жанаша жаткан катеттин гипотенузага катышы α ***бурчунун косинусу*** д. а.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \qquad (2)$$

А. Тик бурчтуу үч бурчтукта α тар бурчуна каршы жаткан катеттин жанаша жаткан катетке болгон катышы α ***бурчунун тангенси*** д. а.

$$tg\, \alpha = \frac{a}{b} \qquad (3)$$

Т. Тик бурчтуу үч бурчтуктун ар бир катети гипотенузасынан кичине болот.

2) Кыйгач бурчтуу (тик бурчтуу эмес) үч бурчтук

Т. Ар кандай үч бурчтуктун чоң жагынын каршысында чоң бурч жатат.

Т. Ар кандай үч бурчтуктун чоң бурчунун каршысында чоң жак жатат.

Т. (Косинустар теоремасы). **Ар кандай үч бурчтуктун бир жагынын квадраты калган эки жагынын квадраттарынын суммасынан ал жактардын жана алардын арасындагы бурчтун косинусунун эки эселенген көбөйтүндүсүн кемиткенге барабар.**

Үч бурчтуктун b жагына жана каршысындагы β бурчуна карата теореманы

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta \qquad (4)$$

формуласы аркылуу жазууга болот. Үч бурчтуктун калган жактарына карата теореманы (4) формулага окшоштуруп жазууга болот.

Т. (Синустар теоремасы). **Ар кандай үч бурчтуктун жактары ал жактарга каршы жаткан бурчтардын синустарына пропорциялаш болот.**

Бул теореманы

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad (5)$$

формула түрүндө жазууга болот. Мындагы белгилөөлөр жогорудан белгилүү.

е) Жантык жана перпендикуляр

ABC тик бурчтуу үч бурчтугу берилсин, $\angle C = 90°$. AC катети аркылуу a түз сызыгы өтөт деп эсептейли. AB – гипотенуза.

А. BC кесиндиси B чекитинен a түз сызыгына түшүрүлгөн ***перпендикуляр***, BA кесиндиси – ***жантык*** д. а.

А. AC кесиндиси BA жантыгынын a түз сызыгына түшүрүлгөн проекциясы, BC кесиндисинин узундугу B чекитинен a түз сызыгына чейинки ***аралык*** д. а.

Н. Чекиттен түз сызыкка түшүрүлгөн перпендикуляр ал чекиттен жүргүзүлгөн жантыктан кичине болот.

Т. Үч бурчтуктун бир жагы калган эки жагынын суммасынан кичине болот.

Үч бурчтуктун кай бир чоңдуктарын аныктоочу формулалар

1) Периметри: $P = a + b + c$, жарым периметри $p = (a + b + c) : 2$.

2) Аянты: $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$; $S = \frac{1}{2} ab \sin \angle C$; $S = p \cdot r$; (r – үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын радиусу);

$S = (abc) : 4R$ (R – үч бурчтукка сырттан сызылган айлананын радиусу);

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – Герондун формуласы.

3) Косинустар теоремасы: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\alpha$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\gamma$

4) Синустар теоремасы: $\frac{a}{sin\ \alpha} = \frac{b}{sin\ \beta} = \frac{c}{sin\ \gamma}$.

5) Бийиктиги: $h_a = b\ sin\ \gamma$ же $h_a = c\ sin\ \beta$.

6) Медианалары: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$;

$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$.

7) Ички бурчтарынын биссектрисалары:

$l_A = \frac{2\sqrt{bcp\ (p - a)}}{b + c}$; $l_B = \frac{2\sqrt{acp\ (p - b)}}{a + c}$; $l_C = \frac{2\sqrt{abp\ (p - c)}}{a + b}$.

7. Айлана жана тегерек

а) Айлана. А. Тегиздикте берилген чекиттен бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин көптүгү ***айлана*** д. а.

Борбору O, радиусу R болгон айлананы $\omega(O;R)$ аркылуу белгилейбиз (ω-омега, грек алфавитинин тамгасы), $OM = R$ болот, M айлананын чекити.

А. Айлананын каалагандай эки чекитин туташтыруучу кесинди (ВС) анын ***хордасы*** д. а.

А. Айлананын борбору аркылуу өтүүчү хорда (AD) анын ***диаметри*** д. а. , $AD = 2R$.

А. Айлана менен бир гана жалпы чекитке ээ болуучу түз сызык (a) айлананын ***жанымасы*** д. а.

А. Айлананын эки радиусунун арасындагы бурч ($\angle DOM$) ***борбордук бурч*** д.а.

Т. Эгерде айланада берилген борбордук эки бурч барабар болушса, анда аларга туура келүүчү жаалар да барабар болушат.

А. Чокусу берилген айланада жатып, жактары ал айлананы кесип өтүүчү бурч ($\angle CBF$) айланага ***ичтен сызылган бурч*** д. а.

Т. Айланага ичтен сызылган бурч өзү тирелген жаанын жарымы менен өлчөнөт.

Н. Айлананын диаметрине тирелген бурч тик бурч болот.

Н. Бир эле жаага тирелген, ал эми чокулары жаанын учтары аркылуу өтүүчү түз сызыктын бир жагында жатуучу ичтен сызылган бурчтар барабар болушат.

А. Эгерде айлана көп бурчтуктун бардык жактарын жанып өтсө, анда айлана көп бурчтукка ***ичтен сызылган*** д.а.

А. Эгерде көп бурчтуктун бардык чокулары айланада жатса, анда айлана көп бурчтукка ***сырттан сызылган*** д.а.

Ар кандай туура көп бурчтукка сырттан жана ичтен айланалар сызууга болот, алардын борборлору дал келишет. Туура көп бурчтуктун жагы, ичтен жана сырттан сызылган айланалардын радиустары төмөндөгү формулалар аркылуу байланышкан: $a_n = 2R\,sin\,\frac{180^\circ}{n}$, $r = R\,cos\,\frac{180^\circ}{n}$, мында a_n – туура көп бурчуктун жагы, n – жактардын саны, R – сырттан, r – ичтен сызылган айланалардын радиустары.

Айлананын узундугу катары ага ичтен жана сырттан сызылган туура көп бурчтуктардын жактарынын санын чексиз чоңойткондо алардын периметрлери умтулган жалпы предел кабыл алынат. Айлананын узундугу $C = 2\pi R = \pi d$ формуласы аркылуу аныкталат (d-айлананын диаметри).

Ар кандай айлананын узундугунун диаметрине болгон катышы турактуу чоңдук, ал π (пи) ге барабар. Айлананын α борбордук бурчуна туура келүүчү l жаасынын узундугу $l = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}$ болот.

Борбору $C(a; b)$ чекитинде жаткан радиусу R ге барабар болгон айлананын теңдемеси $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ түрүндө болот, ал эми борбору координаталар башталышында жатса, анын теңдемеси $x^2 + y^2 = R^2$ болот.

$\omega(O;R)$ айланасынын O борборунан a түз сызыгына чейинки аралык d болсун. Эгерде $d = R$ болсо, анда алар жанышат, $d < R$ болсо, алар эки чекитте кесилишет, $d > R$ болсо кесилишпейт. Эки айлананын өз ара жайланышы алардын борборлорунун арасындагы аралыкка байланыштуу болот.

б) Тегерек

А. Тегиздиктин айлана менен чектелген бөлүгү ***тегерек*** д. а.

Тегеректи чектеп турган айлананын борбору, радиусу жана диаметри тегеректин да борбору, радиусу жана диаметри болот.

Тегеректи дагы төмөндөгүдөй аныктоого болот.

А. Ар бир чекити берилген O чекитинен R аралыктан ашпагандай аралыкта жатуучу тегиздиктин чекиттеринин көптүгү ***тегерек*** д. а.

M тегеректин чекити болсо, анда тегеректии ар бир M чекити үчүн $OM < R$ болот. Демек, айлананын чекити да тегерекке тиешелүү.

Тегеректин аянты катары ага ичтен жана сырттан сызылган туура көп бурчтуктун жактарынын санын чексиз чоңойткондо алардын аянттары умтулган жалпы предел кабыл алынат. Тегеректин аянты

$$S = \pi R^2 = \frac{1}{2} CR = \frac{1}{4} \pi d^2$$

болот. C – айлананын узундугу, d – диаметри.

А. Тегеректин эки радиусу менен чектелген бөлүгү анын ***сектору*** д. а.

$\alpha°$ борбордук бурчуна туура келүүчү сектордук аянты:

$$S_{сек} = \frac{\pi R^2 \alpha°}{360°}$$

А. Тегеректин хорда аркылуу кесилип алынган бөлүгү ***сегмент*** д. а.

АВ хордасы аркылуу аныкталган сегменттин аянтын табыш үчүн тиешелүү сектордун аянтынан АОВ үч бурчтугунун аянтын кемитүү керек.

. Геометриялык түзүүлөр

Геометриялык түзүүлөр атайын куралдардын жардамы менен ишке ашырылат. Негизги курал катары циркуль жана сызгыч колдонулат.

Геометриялык түзүүлөр маселелер түрүндө берилет. Түзүүгө берилген маселелерди чыгарууда, алгач төмөндөгүдөй жөнөкөй маселелерди чыгаруу каралат (айрымдары түзүүсү менен кошо берилди).

1) Берилген бурчка барабар бурчту түзгүлө.

2) Берилген бурчтун биссектрисасын түзгүлө.

Түзүү: $\angle AOB$ берилген. $\omega(O; r)$ айланасын сызабыз. Анын жаасы бурчтун жактарын C жана D чекиттеринде кесип өтөт. $\omega_1(C; r)$ жана $\omega_2(O; r)$ айланалары E чекитинде кесилишсе (O дон айырмаланган). OE – изделүүчү биссектриса болот (чиймени өзүңөр сызгыла).

3) Берилген кесиндини тең экиге бөлгүлө.

Түзүү. AB кесиндиси берилген. $\omega(A;AB)$, $\omega_1(B; AB)$ жарым айланаларын сызып, C жана D чекиттерин табабыз. AB менен CD кесиндилери изделүүчү O чекитинде кесилишет.

4) Берилген чекит аркылуу өтүп, берилген түз сызыкка перпендикулярдуу болгон түз сызыкты түзгүлө.

5) Түз сызыктан тышкары жаткан чекит аркылуу өтүп, берилген түз сызыкка параллель болгон түз сызыкты түзгүлө.

9. Төрт бурчтуктар

Төрт бурчтук көп бурчтуктун айрым учуру болуп эсептелет. Анын 4 чокусу, 4 жагы, 4 бурчу бар. Карама-каршы чокуларын туташтыруучу кесиндилер диагоналдар болушат. Жактарынын суммасы периметри болот.

Т. Төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 360° ка барабар.

Н. Төрт бурчтуктун тышкы бурчтарынын суммасы 360° ка барабар.

Т. Эгерде төрт бурчтуктун карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° болсо, анда ага сырттан айлана сызууга болот.

Т. Эгерде төрт бурчтуктун карама-каршы жактарынын суммалары барабар болсо, анда ага ичтен айлана сызууга болот.

Төрт бурчтуктун төмөндөгүдөй түрлөрү бар.

а) Параллелограмм

А. Карама-каршы жактары параллель болгон төрт бурчтук ***параллелограмм*** д. а.

Т. Параллелограммдын карама-каршы жактары барабар.

Н. Параллелограммдын: 1) карама-каршы бурчтары барабар; 2) диагоналдары кесилишкен чекитте (O до) тең экиге бөлүнөт; 3) бир жагына жанаша жаткан бурчтарынын суммасы 180° ка барабар.

Т. Эгерде> томпок төрт бурчтуктун карама-каршы эки жагы барабар жана параллель болсо, анда ал параллелограмм болот.

Т. Параллелограммдын диагоналдарынын квадраттарынын суммасы анын жактарынын квадраттарынын суммасына барабар. Параллелограммдын аянты $S = ah$ же $S = absin\angle 1$ формулалары аркылуу табылат, мында a, b жактары, h бийиктиги, $\angle 1$ – бурчу.

б) Тик бурчтук

А. Бардык бурчтары тик болгон параллелограмм ***тик бурчтук*** д. а.

Тик бурчтук параллелограммдын айрым бир учуру болгондуктан, параллелограммдын бардык касиеттери тик бурчтук үчүн да туура болот.

Т. Тик бурчтуктун диагоналдары барабар. Тик бурчтуктун жанаша жаткан жактары a жана b болсо: периметри $P = 2(a + b)$, аянты $S = ab$, диагоналы $d^2 = a^2 + b^2$ формулалары аркылуу эсептелет.

в) Ромб

А. Бардык жактары барабар болгон параллелограмм ***ромб*** д.а.

Параллелограммдын бардык касиеттери ромб үчүн да туура болот.

Т. Ромбдун диагоналдары өз-ара перпендикулярдуу жана алар бурчтарын тең экиге бөлөт.

Т. Эгерде параллелограммдын диагоналдары перпендикулярдуу болушса, анда ал ромб болот. Ар кандай ромбго ичтен айлана сызууга болот. Ромбдун аянтын: $S = ah$ (a – ромбдун жагы, h – бийиктиги), $S = a^2 sin\alpha$ (α – ромбдун бурчу), $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$ ($d_1 d_2$ – ромбдун диагоналдары) формулалары аркылуу табууга болот.

г) Квадрат

А. Бардык жактары барабар болгон тик бурчтук ***квадрат*** д. а.

Тик бурчтуктун бардык касиеттери квадрат үчүн да туура болот.

Квадратты бардык бурчтары тик болгон ромб катарында да кароого болот. Ошондуктан квадраттын диагоналдары өз ара барабар жана перпендикулярдуу болушат.

Эгерде квадраттын жагы б болсо, анда диагоналы $d = a\sqrt{2}$, ал эми аянты $S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$ болот.

Квадратка ичтен жана сырттан айлана сызууга болот.

д) Трапеция

А. Эки гана жагы параллель болгон төрт бурчтук трапеция д.а.

ABCD трапеция, анын параллель жактары ($a \parallel b$) негиздери, параллель эмес жактары (*BCAD*) каптал жактары болот.

Бир бурчу 90° болсо, тик бурчтуу трапеция, ал эми каптал жактары барабар, б. а. $BC = AD$ болсо, тең капталдуу трапеция болот.

Трапециянын чокусунан негизине түшүрүлгөн перпендикуляр анын бийиктиги болот.

А. Трапециянын каптал жактарынын тең ортолорун туташтыруучу кесинди (MN) трапециянын ***орто сызыгы*** д.а.

Т. Трапециянын орто сызыгы негиздерине параллель жана негиздеринин суммасынын жарымына барабар: $MN = \frac{a+b}{2}$,

$MN \parallel a$, $MN \parallel b$, MN – орто сызыгы

Трапециянын аянты негиздеринин суммасынын жарымын бийиктигине көбөйткөнгө барабар, б. а. $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, h – бийиктиги.

10. Тригонометриялык теңдештиктер

Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын арасындагы байланышты (6-пункттагы (1), (2), (3) формулалар-ды) жана Пифагордун теоремасын колдонуп, α тар бурчуна карата төмөндөгү теңдештиктерди алууга болот.

1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 2) $tg\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

3) $1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ 4) $1 + \frac{1}{tg^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

5) $\cos (90° - \alpha$ 6) $\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$

11. Көп бурчтуктар

а) Томпок көп бурчтуктар

Б. Эгерде сынык сызыктын жактары кесилишпесе жана жанаша жаткан эки жагы бир түз сызыкта жатпаса, анда ал жөнөкөй сынык сызык деп аталат.

Эгерде сынык сызыктын учтарын кесинди аркылуу туташтырсак, анда биз туюк сынык сызыкка ээ болобуз.

А. Жөнөкөй туюк сынык сызык менен чектелген тегиздиктин ***бөлүгү көп бурчтук*** д. а.

Көп бурчтукту чектеп турган жөнөкөй туюк сынык сызык

$A_1A_2 \dots A_n$ $(n > 2)$ болсун. A_1 A_2 ,..., A_n – көп бурчтуктун чокулары, A_1A_2, A_2A_3 ,..., A_nA_1 кесиндилери көп бурчтуктун жактары болушат.

Көп бурчтуктар чокуларынын же жактарынын санына карата мүнөздөлөт (үч, төрт, он бурчтук).

Көп бурчтуктун жактарынын узундуктарынын суммасы анын периметрин аныктайт.

Көп бурчтуктун каалагандай жагы аркылуу түз сызык жүргүзгөндө көп бурчтук ал түз сызык аркылуу аныкталган жарым тегиздиктердин биринде гана жатса, анда ал ***томпок көп бурчтук*** болот, жарым тегиздиктердин экөөндө тең жатса, анда ал томпок эмес көп бурчтук болот. Планиметриянын мектептик курсунда томпок көп бурчтуктар гана каралат, аларды жөн эле көп бурчтуктар деп аташат. n бурчтуктун диагоналдарынын саны $\frac{n(n-3)}{2}$ ге барабар (A_1A_3, A_1A_4 ,..., A_nA_2 – диагоналдар).

Т. п. бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 180°(n – 2) ге барабар.

Н. Көп бурчтуктун тышкы бурчтарынын суммасы 360° ка барабар.

Ар кандай көп бурчтуктун аянты аны үч бурчтуктарга бөлүү аркылуу табылат.

А. Томпок көп бурчтуктун бардык чокулары бир айланада жатса, анда ал көп бурчтук айланага ***ичтен сызылган*** д.а.

А. Эгерде айлана томпок көп бурчтуктун бардык жактарын жанып өтсө, анда көп бурчтук айланага ***сырттан сызылган*** д.а.

б) Туура көп бурчтуктар

А. Бардык жактары жана бардык бурчтары барабар болгон томпок көп бурчтук ***туура көп бурчтук*** д. а.

Томпок көп бурчтуктагы түшүнүктөр, касиеттер, белгилөөлөр мында да сакталат.

Туура *n* бурчтуктун бир жагы a_n болсо, анда анын периметри $P = n \cdot a_n$, ал эми ар бир бурчу $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ ге барабар болот.

А. Эки туура n бурчтуктун жактары барабар болсо, анда ***алар барабар*** деп аталат.

А. Эгерде ар кандай эки туура n бурчтуктун жактарынын саны бирдей, бирок барабар болбосо, анда алар бир аттуу туура ***көп бурчтуктар*** деп аталат.

Т. Ар кандай туура көп бурчтукка сырттан жана ичтен айлана сызууга болот. Айланага ичтен жана сырттан сызылган туура n бурчтук үчүн төмөндөгүдөй формулаларды алууга болот.

1) $a_n = 2R \sin \frac{180°}{n}$, мында R – сырттан сызылган айлананын радиусу. Айрым учурлар үчүн $a_3 = R\sqrt{3}$; $a_4 = R\sqrt{2}$; $a_4 = R$.

2) $S = \frac{1}{2} P \cdot r$, мында r – ичтен сызылган айлананын радиусу. Айрым учурда $S_3 = 3r^3\sqrt{3}$; $S_4 = 4r^2$; $S6 = 2r^2\sqrt{3}$.

3) $r = R \cos \frac{180°}{n} \cdot n = 3; 4; 6$ болгондо тиешелүү түрдө $r = \frac{R}{2}$; $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ болот.

Жагы a_3, a_4, a_6 болгон туура үч, төрт, алты бурчтуктардын аянттары тиешелүү түрдө $S_3 = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4}$; $S_4 = a_4^2$; $S_6 = \frac{3a_6^2\sqrt{3}}{2}$ болот.

12. Тик бурчтуу координаталар системасы

1) Чекиттин координаталары

Тегиздикте O чекитинде кесилишүүчү, бири-бирине перпендикулярдуу O_x жана O_y октору берилип, алар боюнча бирдей масштаб бирдиктери аныкталса, анда тегиздикте тик бурчтуу декарттык координаталар системасы аныкталган болот.

O – координаталар башталышы, Ox – абсцисса огу, Oy – ордината огу, $|e_1| = |e_2| = 1$ масштаб бирдиги. Мында M чекити берилсе, октордо $OM_1 = x$, $OM_2 = y$ сандары табылат, ал эми x, y сандары M чекитинин координаталары деп аталып, $M(x, y)$ аркылуу белгиленет.

$A(x_1; y_1)$ жана $B(x_2; y_2)$ чекиттери берилсе, алардын аралыгы $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ болот. AB кесиндисинин ортосунда жаткан $C(x;y)$ чекитинин координаталары: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ болот.

2) Сызыктардын теңдемелери

xOy тик бурчтуу координаталар системасында сызыктардын теңдемелерин түзүүгө болот. Борбору $C(a;\ b)$ чекитинде жатып, радиусу R ге барабар болгон айлананын теңдемеси $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ болот. Борбору O башталышында жаткан айлананын теңдемеси $x^2 + y^2 = R^2$ болот. Түз сызыктын: а) жалпы теңдемеси $ax + by + c = 0$; б) эки чекит аркылуу өтүүчү теңдемеси $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$; в) бурчтук коэффициенти (k) менен берилген теңдемеси $y = kx + b$.

13. Векторлор

А. Багытталган кесинди ***вектор*** д. а.

Вектор $\vec{a}$ же $\overrightarrow{AB}$ аркылуу белгиленет. Вектор белгиленген кесиндинин узундугу вектордун узундугун аныктайт. Ал $|\overrightarrow{AB}|$, AB, $|\vec{a}|$ же a түрүндө белгиленет.

А. Вектордун баштапкы жана акыркы чекиттери дал келсе, ал ***нөл вектор*** д.а. $\vec{0}$ аркылуу белгиленет, $|\vec{0}| = 0$.

А. $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун узундуктары барабар багыттары бирдей болсо, алар ***барабар*** д.а. Ал $\vec{a} = \vec{b}$ түрүндө жазылат. Мында $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ болот.

А. Эгерде эки вектордун узундуктары барабар, бирок карама-каршы багытта болушса, анда алар карама-каршы векторлор д.а. Алар $\vec{a}$ жана $-\vec{a}$ аркылуу белгиленет.

$A(x_1; y_1)$ жана $B(x_2; y_2)$ чекиттери берилсе, $\overrightarrow{AB}$ векторунун координаталары $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$ б. а. $\overrightarrow{AB} = (a_1;\ a_2)$ же $\vec{a} = (a_1;\ a_2)$ болот. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$ болоору түшүнүктүү.

1) Векторлордун суммасы

$\vec{a} = (a_1;\ a_2)$ жана $\vec{b} = (b_1;\ b_2)$ векторлору берилсин.

А. $\vec{c} = (a_1 + b_1\,;\, a_2 + b_2)$ вектору $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун суммасы д.а. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ аркылуу белгиленет. $\vec{a} + \vec{b}$ векторун түзүү үч бурчтук же параллелограмм эрежесине негизделген.

Векторлорду кошуунун закондору:

а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (орун алмаштыруу закону);

б) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (топтоштуруу закону).

2) Векторлордун айырмасы

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун айырмасы деп, $\vec{b}$ векторуна кошкондо $\vec{a}$ векторун берүүчү $\vec{c}$ векторун атайбыз. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ аркылуу жазылат. $\vec{c} = (a_1 - b_1;\, a_2 - b_2)$ боло тургандыгы түшүнүктүү.

3) Векторду санга көбөйтүү

А. $\vec{a} = (a_1;\, a_2)$ векторунун k санына көбөйтүндүсү деп, $\vec{b} = (ka_1;\, ka_2)$ векторун айтабыз. Мында $\vec{b} = k\vec{a}$ болот.

А. $\vec{a}$ жана $\vec{b} = k\vec{a}$ векторлору ***коллинеардуу*** векторлор д. а.

$k > 0$ болгондо алар бирдей багытталат, ал эми $k < 0$ болгондо карама-каршы багытталышат.

$\vec{e}_1$ жана $\vec{e}_2$ координаталык векторлоруна карата $\vec{a} = (a_1;\, a_2)$ векторун $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ түрүндө ажыратып жазууга болот.

Векторду санга көбөйтүүнүн касиеттери:

а) $(mk)\vec{a} = m(k\vec{a})$ (топтоштуруу закону);

б) $(m + k)\vec{a} = m\vec{a} + k\vec{a}$;

в) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\,\vec{b}$

б), в) ажыратуу закондору, m,k – сандар.

4) Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү

А. Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү векторлордун узундуктарын алардын арасындагы бурчтун косинусуна көбөйткөнгө барабар, б. а.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$, мында φ – векторлордун арасындагы бурч.

Касиеттери:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

б) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

в) $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

г) $\vec{a}^{2n} \geq 0$

Векторлор координаталары менен берилсе, алардын скалярдык көбөйтүндүсү жана арасындагы бурчтун косинусу төмөндөгү формулалар аркылуу табылат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2,$$

$$\cos \varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

14. Геометриялык өзгөртүүлөр

А. Эгерде F фигурасынын чекиттери F' фигурасынын тиешелүү чекиттерине өз ара бир маанилүү чагылдырылса, анда F фигурасы F' фигурасына ***геометриялык өзгөртүлдү*** д. а.

1) Жылдыруу

Жылдыруу – геометриялык өзгөртүүлөрдүн бир түрү.

А. Чекиттердин арасындагы аралык сакталгандай кылып геометриялык өзгөртүү ***жылдыруу*** д. а.

A, B чекиттерин жылдырганда A', B' чекиттерине өзгөртүлсө, анда $AB = A'B'$ болот. F фигурасын жылдырууда F' фигурасы алынса, анда $F = F'$ болот. Эгерде $F = F'$ болсо, анда алардын бирин жылдыруу аркылуу экинчисине дал келтирүүгө болот. Жылдыруу кесиндини ага барабар кесиндиге, бурчту – ага барабар бурчка которот. Жылдырууда түз сызыкта жаткан чекит түз сызыкта жаткан чекитке өтөт да, алардын өз ара жайланышуу тартиби сакталат.

2) Октук симметрия

А. MM' кесиндиси l түз сызыгына перпендикулярдуу болуп, ал түз сызык аркылуу тең экиге бөлүнсө, анда M жана M' чекиттери ***l түз сызыгына карата симметриялуу*** д. а.

l симметрия огу, $MO = OM'$ болот, $MM' \cap l = O$.

А. Тегиздиктин ар бир M чекитин кандайдыр бир l огуна карата симметриялуу кылып M' чекитине өзгөртүү ***окко карата симметрия*** д. а.

Касиеттери: а) эки чекиттин аралыгы өзгөрбөйт; б) окко карата симметрия жылдыруу болот; в) F менен F' окко карата симметриялуу болсо, $F = F'$ болот.

3) Борбордук симметрия

А. MM' кесиндиси O чекитинде тең экиге бөлүнсө, анда M жана M' чекиттери O чекитине карата симметриялуу д. а.

Калган талкуулоолор, касиеттер октук симметрияга окшош.

4) Параллель которуу

Тегиздиктин ар бир M чекитин M' чекитине $\vec{MM'} = \vec{a}$ болгондой кылып өзгөртүү ***параллель которуу*** д. а.

Параллель которуунун касиеттери 2) учурдагы октук симметриянын касиеттерине окшош. Кошумча: в) параллель которууда ар кандай түз сызык ага параллель түз сызыкка өзгөртүлөт.

5) Буруу

α бурчу O чекити берилсин.

А. Тегиздиктин M чекитин $OM = OM'$; $\angle MOM' = \alpha$ болгондой кылып M' чекитине өзгөртүү ***буруу*** д. а.

Буруунун касиеттери 2) учурдагы октук симметриянын касиеттерине окшош. Кошумча: в) $\alpha = 180°$ болсо, анда буруу борбордук симметрия болот.

15. Окшош фигуралар

а) Окшош өзгөртүү

А. Тегиздиктин ар кандай A жана B чекиттерин тиешелүү түрдө A' жана B' чекиттерине $A'B' = k \cdot AB$ болгондой ($k \neq 0$) кылып ***чагылдыруу окшош өзгөртүү*** д. а.

$k = 1$ болсо, окшош өзгөртүү жылдыруу болот. k саны окшоштук коэффициенти д. а.

А. Тегиздиктин ар бир M чекитин $OM' = k \cdot OM$ болгондой кылып OM шooласында жатуучу M' чекитине чагылдыруу гомотетия д. а. O – гомотетия борбору, $k \neq 0$ – гомотетия коэффициенти.

Касиеттери: 1) Гомотетия өз ара бир маанилүү өзгөртүү болот; 2) Гомотетия борбору аркылуу өтүүчү түз сызык өзүнө өзгөртүлөт; 3) AB кесиндиси $A'B'$ кесиндисине өзгөртүлсө, $A'B' = k \cdot AB$ жана $A'B' \parallel AB$ болот; 4) Гомотетияда $a \parallel b$ түз сызыктары $a' \parallel b'$ түз сызыктарына өзгөртүлөт. Гомотетия окшош өзгөртүүнүн айрым учуру болуп эсептелет.

б) Окшош фигуралар

А. Окшош өзгөртүүдө F фигурасы F' фигурасына өзгөртүлсө, алар ***окшош фигуралар*** д. а. Ал $F \sim F'$ түрүндө белгиленет.

А. Эгерде эки үч бурчтуктун тиешелүү бурчтары барабар, ал эми тиешелүү жактары пропорциялаш болсо, анда ал үч бурчтуктар ***окшош*** д. а. Белгилениши: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Үч бурчтуктардын окшоштуктарынын белгилери: 1) эгерде бир үч бурчтуктун эки бурчу экинчи үч бурчтуктун тиешелүү эки бурчуна барабар болсо, анда алар окшош болушат; 2) эгерде бир үч бурчтуктун эки жагы экинчи үч бурчтуктун эки жагына пропорциялаш болуп, ал жактардын арасындагы бурчтар барабар болушса, анда алар окшош болушат; 3) эгерде бир үч бурчтуктун үч жагы экинчи үч бурчтуктун үч жагына пропорциялаш болушса, анда алар окшош болушат.

Н. Эгерде эки тик бурчтуу үч бурчтуктун: бирден тар бурчтары барабар болсо же биринин катеттери экинчисинин катеттерине пропорциялаш болсо, анда алар окшош болушат.

А. Эгерде эки көп бурчтуктун тиешелүү жактары пропорциялаш, ал эми тиешелүү бурчтары барабар болушса, анда ал эки көп бурчтук окшош д. а.

Бул аныктаманын негизинде эки туура n бурчтуктар окшош болушат.

Т. Эгерде көп бурчтуктар окшош болушса, анда: 1) алардын периметрлеринин катышы окшоштук коэффициентине барабар; 2) алардын аянттарынын катышы окшоштук коэффициентинин квадратына барабар.

Т. Окшош фигуралар: рефлексивдик ($F \sim F'$), симметриялуулук ($F \sim F'$ болсо, $F' \sim F$ болот), транзитивдик ($F \sim F'$, $F_1 \sim F_2$ болсо $F \sim F_2$ болот) касиеттерине ээ болот.

16. Фигуралардын аянттары

Аянт – бул жагы узундук бирдигинен турган квадрат аркылуу туюнтулуучу жалпак фигуранын чени болуп эсептелет. Ал сан аркылуу туюнтулат да, бирдиги анын катарына жазылып коюлат. Жалпы учурда, F фигурасынын аянтын $S(F)$ аркылуу белгилесек, бирдик квадраттын аянты e^2 (e – бирдик кесинди) болсо, анда $S(F) = ke^2$ аркылуу жазууга болот. Мында k саны берилген өлчөө бирдигиндеги аянттын сан маанисин туюнтат.

Аянттын далилдөөсүз кабыл алынган касиеттери:

1) Барабар фигуралар барабар аянттарга ээ болушат.

2) Эгерде фигура бөлүктөргө бөлүнгөн болсо, анда анын аянты ошол бөлүктөрдүн аянттарынын суммасына барабар.

Тагыраак айтканда, каалаган фигуранын аянтын табуу талап кылынса, анда канча бирдик квадратты ошол фигурага батыштырууга болоорун аныктоо зарыл.

Үч бурчтуктун, квадраттын, тик бурчтуктун, ромбдун, параллелограммдын, трапециянын, тегеректин аянттарын табуу формулалары тиешелүү фигураларды караганда көрсөтүлдү. Ар кандай көп бурчтуктун аянтын табыш үчүн аны кесилишпей тургандай үч бурчтуктарга бөлүп, алардын аянттарынын суммасын эсептөө сунуш кылынат.

II. МЕКТЕПТИН ГЕОМЕТРИЯСЫНЫН ЛОГИКАЛЫК ТҮЗҮЛҮШҮ

Геометриянын мектептик курсунун кандай түзүлгөндүгү, кандай түшүнүктөрдөн башталаары жана андагы геометриялык материалдар кандай удаалаштыкта баяндала тургандыгы баарыбызды кызыктырат.

Геометриянын мектептик курсунун кандай түзүлгөндүгү жөнүндөгү суроо геометриянын илимий жактан түзүлүшүнүн принциптерине тыгыз байланышта. Ошондуктан адегенде геометриянын түзүлүшүнүн принциптерин кыскача баяндоого туура келет. Ал жалпысынан төмөндөгүдөй түшүндүрүлөт.

Геометрия боюнча топтолгон материалдарды китепке каалагандай чаржайыт жаза берсек, анда удаалаштык, байланыштуулук болбой, системалуулукту жоготот элек. Ошондуктан геометрияны логикалык так негиздөө зарылдыгы келип чыгат. Бул зарылчылык биринчи иретте Платон тарабынан көтөрүлгөн. Ал, каалагандай илимдин тармагынан негизги түшүнүктөрдү жана андан логикалык түрдө келип чыгуучу ырастоолорду бөлүп алып каралып жаткан маселенин илимий базасын түзүш керек деп эсептелген.

Математикалык илимди түзүүдө логикалык принциптердин так баяндалышы адегенде Аристотель тарабынан берилген. Аристотелдин ойлору боюнча илим белгилүү тартипте жайланышкан, ал илимге тиешелүү болгон сүйлөмдөрдүн тобунан турат. Ал сүйлөмдөр эки бөлүктөн турушу зарыл: негизгилер жана андан келип чыгуучулар (теоремалар). Ал эми бул сүйлөмдөргө кирген түшүнүктөр да, негизги түшүнүктөр жана андан келип чыгуучу түшүнүктөр болуп экиге бөлүнөт. Негизги сүйлөмдөр өзүнөн-өзү белгилүү болуп далилдөө талап кылынбайт. Ошондой эле негизги түшүнүктөр да дароо түшүнүктүү болуш керек, аларга аныктоо берилбейт. Ошентип, геометриянын илимий негизделишине төмөндөгүдөй талаптар коюлат: максималдуу удаалаштык, логикалык байланыштуулук, тактык жана ачыктык. Ошондуктан геометриянын бардык материалдарын бир катар так айтылган сүйлөмдөргө ажыратуу принциби сунуш кылынат. Андай сүйлөмдөр болуп аксиомалар, теоремалар, аныктамалар эсептелет.

Геометриялык түшүнүктөрдүн касиеттери жана байланыштары кандайдыр ырастоолор түрүндө туюнтулат да, алардын тууралыгы далилдөөлөр аркылуу көрсөтүлөт. ***Далилдөөнү талап кылган сүйлөмдөр, теоремалар деп аталышат. Теореманын тууралыгын көрсөтүүчү талкуулоолор тизмеги анын далилдөөсү деп аталат.***

Адатта биз кандайдыр бир теореманы далилдегенде ал мурда далилденген теоремалардан келип чыга тургандыгын көрсөтөбүз. Бирок далилдөөнү дайыма эле мындай жүргүзүп отуруу мүмкүн эмес. Башкача айтканда теореманы далилдениши өзүнөн мурдакы буга чейин белгилүү болгон теоремага келип такалат. Ал мурдакы теореманын далилдениши өз кезегинде андан да мурдакы теоремага негизделет ж.у.с. бирок теоремалардын далилденишинин бул системасын чексиз узарта берүүгө болбойт, анткени алгачкы теореманы далилдей турган мындан мурда келүүчү теорема жок болуп калат. Бул учурда далилдөөнү кандайдыр бир белгилүү түшүнүккө негиздөөгө туура келет. Демек, кандайдыр бир ырастоону далилдөөсүз кабыл алуу зарылдыгы келип чыгат. Негизги, алгачкы катарында далилдөөсүз кабыл алынган сүйлөмдөрдү (ырастоолорду) ***аксиомалар*** деп аташат. Аксиомалар каалагандай алына бербейт (аларга биз кийин токтолобуз). Ошентип, теоремалардын аксиомалар аркылуу далилдене тургандыгы белгилүү болду. Геометрияда жаңы терминдин маанисин белгилеп, бизге белгилүү болгон түшүнүк аркылуу жаңы түшүнүктүн маанисин ачып көрсөтүүчү сүйлөм ***аныктама*** деп аталат. Аныктама аркылуу жаңы түшүнүк мурда белгилүү болгон, кыйла жөнөкөй же кыйла жалпы түшүнүккө келтирилет.

Жогоруда теоремаларга карата айтылган принцип аныктамаларга да колдонулат. Биз дайыма жаңы түшүнүккө аныктама бергенде мурда аныкталган түшүнүктөн пайдаланабыз. Бирок, дайыма эле ошондой принципте иштөөгө мүмкүн болбой калат. Себеби эң биринчи аныктаманы айталбайбыз, анткени андан мурда аныкталган түшүнүк жок да. Ошондуктан айрым түшүнүктөрдү аныктоосуз кабыл алууга туура келет. Аныкталбай турган түшүнүктөргө чекит, түз сызык жана тегиздик кирет. Геометрияны баяндай баштаганда аныктоосуз кабыл алынган түшүнүктөр ***негизги же баштапкы*** түшүнүктөр деп аталат. Албетте, геометрияны түзүүдө негизги түшүнүктөр катары, кошумча, башка түшүнүктөр да алынышы мүмкүн.

Жогоруда көрсөтүлгөн принциптердин негизинде геометриянын (же жалпы эле илимдин) баяндалган методу ***дедуктивдик же аксиомалык метод*** деп аталат.

Ошентип, геометриянын системалык курсунун логикалык баяндалышы төмөндөгүдөй болот:

1. Негизги геометриялык түшүнүктөр берилет.
2. Алардын жардамы менен калган бардык түшүнүктөргө аныктамалар берилет.
3. Аксиомалар баяндалат.
4. Аныктамалардын жана аксиомалардын негизинде теоремалар далилденет.

Демек, геометриянын баяндалышынын (негизделишинин) ар кандай логикалык жолдору бар. Ал негизги түшүнүктөрдү тандап алууга жана аксиомалардын алынышына байланыштуу. Мисалы, мурда мектептин геометрия курсу Б. Н. Колмогоровдун аксиомалар системасына негизделип түзүлгөндүгү белгилүү. Анда негизги түшүнүктөр катары «чекит», «түз сызык», «аралык» жана «тегиздик» кабыл алынган. Ал эми негизги байланыштар «жатат», «жылдыруу», «арасында жатат» деген сөздөр аркылуу берилген. Анын аксиомалар системасы 5 группага бөлүнүп, 12 аксиомадан турат. Аны жалпы аксиомалар системасы менен салыштырганда Б. Н. Колмогорводун аксиомалар системасында «аралык» деген негизги түшүнүк кошумча кабыл алынган жана «жылдыруу» аксиомасы сунуш кылынган. Бул конгруэнттүүлүк түшүнүгүнө байланыштуу.

Геометриянын мектептик курсун Г.Вейлдин аксиомалар системасы (ал тиркемеде берилген) боюнча түзүүгө да болот. Мында негизги объектилер катары «вектор» жана «чекит» алынат. Ал эми негизги байланыштар катары «вектордук алгебранын амалдары» жана «чекиттен баштап векторду өлчөп коюу амалы» кабыл алынган. Бирок, геометриянын башталыш курсунда ал бир топ кыйынчылыктарды туудурат. Ошондуктан аны жогорку класстардан гана баштап окуу сунуш кылынышы мүмкүн. Экинчи жагынан, бул чыныгы сандардын теориясынын окулушуна да байланыштуу.

Мектепте, бул геометрия окуу китеби түзүлгөнгө чейин А.В.Погореловдун 7–11-класстар үчүн «Геометрия» окуу китеби колдонулуп келген. Ал окуу китебинде негизги түшүнүктөр катары «чекит», «түз сызык», «тегиздик» кабыл алынып жүргөндүгү белгилүү. Бул Евклиддин геометриясында кабыл алынган негизги түшүнүктөргө окшош. Мында негизги байланыштар катары «тиешелүү», «тиешелүү эмес» деген терминдер колдонулган. Бул окуу китебинде «аксиома» деген терминдин ордуна «негизги касиеттер» деген термин алынган. Алар 5 группадан турат, ал группаларда 10 аксиома, б.а. негизги касиеттер баяндалган. Ошентип, геометриянын түзүлүшүнүн ар кандай логикалык жолу бар экендигине карабастан, кийинки мезгилдерге чейин мектептин геометриясынын окутулушу Евклиддин геометриясына негизделип келгендиги белгилүү.

Азыркы түзүлгөн геометриянын мектептик курсу да ошого негизделген жана жогоруда айтылган геометрияны түзүүнүн принцибине ылайыкталган. Атап айтканда, негизги түшүнүктөр катарында чекит, түз сызык, тегиздик кабыл алынган. (§ 1.1.) Мындан негизги байланыштар болуп «жатат», «арасында жатат» деген сөздөр эсептелет.

Планиметриянын мектептик курсунун аксиомалар системасы беш топко бөлүнгөн, алар 12 аксиомадан турат:

$I_{1,2}$ – тиешелүүлүк аксиомалары (§ 1.2).

$II_{1,2,3}$ – иреттүүлүк аксиомалары (§ 1.3; §1.4).

$III_{1,2,3,4}$ – өлчөөнүн аксиомалары (§3.2; §4.3).

$IV_{1,2}$ – өлчөп коюунун аксиомалары (§ 4.3).

V – параллелдик аксиомасы (§ 5).

Андан тышкары жаңы түшүнүктөргө тиешелүү параграфтарда аныктамалар берилген жана аныктамаларды, аксиомаларды колдонуп, 70 ке жакын теоремалар далилденген.

Мында белгилей кете турган нерсе: негизги түшүнүктөр эркинче эле алынып, аксиомалар каалагандай түзүлө бербейт. Алар бир катар логикалык талаптарды канааттандырыш керек. Атап айтканда, аксиомалар системасы: 1) карама-каршы эмес; 2) көз каранды эмес; 3) толук болушу керек. Ал талаптардын аткарылышын негиздөө өзүнчө суроо болуп эсептелет. Биз мында аларга токтолгон жокпуз, анткени тиешелүү адабияттарда баяндалган.

III. ЕВКЛИДДИН ГЕОМЕТРИЯСЫНЫН НЕГИЗДЕЛИШИ

Эки миңден ашык жылдар бою геометриянын мектептик курсунун мазмуну катары Евклиддин «Башталыш» жыйнагы алынып келди. Жогоруда геометриянын кыскача тарыхынан белгилүү болгондой, ал жыйнак (китеп деп аталат) геометрия боюнча биринчи эмгек. Ошондуктан анын «Евклиддик геометрия» деп аталып калышы да ошол Евклиддин ысмына байланыштуу. Мааниси жана мазмуну боюнча Евклиддик геометрия мектепте окулуучу геометрия же элементардык геометрия деп аталат.

Ошондуктан Евклиддик геометриянын негизделиши, түзүлүшү кимди болсо да кызыктырбай койбойт. Төмөндө ал суроолорго кеңири токтолобуз.

1. «Башталыш» жыйнагы жөнүндө жалпы маалымат.

9-класста геометриянын кыскача тарыхы менен таанышканда биздин эрага чейинки VII—III кылымда Грецияда геометрия боюнча көп материалдар топтолгондугун байкадык. Ал материалдар чаржайыт баяндалып, бир системага түшүрүлгөн эмес эле. Демек, ошол мезгилде ал топтолгон материалдарды бир системага түшүрүү зарылчылыгы келип чыккан.

Геометриялык материалдарды системалаштырууга байыркы гректик көп эле окумуштуулар аракет кылышкан. Мисалы, Гиппократ, Хиосский (б.э.ч. V кылымда), Февдий (б.э.ч. IV) ж.б. Бирок, Евклиддин «Башталыш» деп аталган жыйнагы чыккандан кийин алардын эмгектери унутулуп калган. Демек, ал геометрия боюнча биринчи китеп болгон. Ал биздин эрага чейин болжол менен III кылымда түзүлгөн. Бул эмгекте гректик геометрлердин кылымдар бою геометрия боюнча ачкан илимий жаңылыктары, эмгектери жыйынтыкталган жана системалаштырылган. Ал дедуктивдик метод менен түзүлгөн, тагыраак айтканда адегенде далилдөөнү талап кылбаган сүйлөмдөр (аксиомалар) кабыл алынып, калган сүйлөмдөр алар аркылуу далилденген.

Бул жыйнакта азыр мектепте окулуп жаткан көп геометриялык материалдар ошондо эле кеңири баяндалган. Атап айтканда үч бурчтуктар, параллелограммдын жана трапециянын касиеттери, Пифагордун теоремасы, көп бурчтуктардын окшоштугу жөнүндөгү ж.б. геометриялык материалдар ушунчалык так жана системалуу баяндалган, ал эми теоремалардын далилдениши логикалык жактан талапка толук жооп берген. Ал материалдардын геометрияны окуп-үйрөнүүдө эки миң жылдан ашык негизги окуу куралы катары колдонулуп келгендиги бекеринен эмес. Демек, бул байыркы гректерден бизге чейин толук келген биринчи математикалык эмгек.

«Башталыш» жыйнагынын автору, улуу математик Евклиддин өмүр – баяны жөнүндөгү биздин маалыматыбыз эң эле аз. Анткени анын эмгектеринде жана башка китептерде кайсы жерде жана качан туулгандыгы, качан кайтыш болгондугу жөнүндө так, толук маалыматтар жок. Бирок, ошол кездеги окумуштуулар тарабынан жазылып калтырылган айрым маалыматтарга караганда ал болжол менен биздин эрага чейинки III кылымда жашаган. Евклид Платон мектебинде окуган деген маалымат бар.

Биздин эрага чейинки 331-жылы Александр Македонский өзүнүн дүйнөлүк монархиясын орнотууну аяктап, Египетте империянын борбору деп эсептеле турган шаарды түзгөн. Ал шаарды Александрия деп атаган. Мунун натыйжасында бул шаарда соода жана ар кандай өндүрүштөр тез өнүгө баштаган. Александр Македонский өлгөндөн кийин Птолемей I падышалык кылат. Ал илимдин жана искусствонун өнүгүшүнө өзгөчө көңүл бурган. Анын натыйжасында Александрия шаары экономикалык, саясий жана маданий жактан биринчи орунга чыккан. Евклид мына ушул учурда иштеген көрүнүктүү окумуштуулардын катарында турган.

Евклид Птолемей I нин убагында Александрияда математикалык мектепти башкаруу үчүн чакырылган. Демек, ал Александрияда өзүнүн математикалык мектебин түзгөн.

«Башталыш» жыйнагында баяндалгандардын кайсы бөлүгү Евклиддин өзүнө тиешелүү экендигин, б.а. өзү ачкандыгын, ал эми кайсы бөлүгү ага чейинки окумуштуулар тарабынан ачылгандыгын аныктоочу толук, так маалыматтар жок. Бирок, ал убакытта мындай чоң көлөмдөгү илимий материалдарды системалаштыруу зор эмгекти талап кылат эле.

«Башталыш» жыйнагынын маанисине кыскача маалымат берели. Ал 13 китептен турат. I–VI китептеринде планиметрия каралган. Атап айтканда: I–китебинде үч бурчтуктар, параллель жана перпендикуляр түз сызыктар, параллелограммдар, көп бурчтуктардын аянттары, Пифагордун теоремасы жөнүндө жазылган.

II китебинде алгебранын геометрияда колдонулушу каралат. Мында квадраттык теңдеменин геометриялык жол менен чыгарылышы көрсөтүлгөн.

III китебинде айлана жана тегерек жөнүндө жазылган.

IV китебинде айланага ичтен жана сырттан сызылган көп бурчтуктар, туура көп бурчтуктарды түзүү жөнүндө каралган.

V китебинде пропорциялаштык теориясы жана иррационалдуу сандар жөнүндө жазылган.

VI китеби фигуралардын окшоштугуна арналган.

VII–IX китептеринде арифметика каралган. Ал китептеринде бүтүн сандар жөнүндөгү окуу геометриялык формада берилген. Ошону менен катар, бул китептеринде эки сандын эң чоң жалпы бөлүүчүсү жөнүндөгү кадимки теориялар баяндалган.

X китебинде ченелүүчү жана ченелбөөчү чоңдуктар жөнүндө айтылат.

XI–XIII китептери стереометрияга арналган. Анда стереометриянын негизги теоремалары, пирамида, призма, конус, цилиндр, сфера жана туура көп грандыктар жөнүндө каралган. Демек, жогорудагы маалыматтарга караганда, Евклиддин – «Башталыш» жыйнагында геометриянын мектептик курсунун материалдары дээрлик толук баяндалган.

2. «Башталыш» жыйнагында геометриялык материалдардын баяндалышы

Аныктоолор, постулаттар[1] жана аксиомалар системасы Евклиддин «Башталыш» жыйнагын түзүүнүн негизи болуп саналат.

Аксиома менен постулатты Евклид кайсы принцип боюнча ажыратканы азырынча белгисиз. Анын ырастоосу боюнча аксиома – бул шектенүүгө мүмкүн болбогон, тубаса, сөзсүз туура деп эсептелүүчү чындык, ал эми постулат болсо геометрияны окуй баштаганда ар бир кадамы чындык катары кабыл алынган, андан кийинкилердин бардыгы так далилденген сүйлөмдөр болуп эсептелет. Демек, аксиомаларда – ар кандай чоңдуктардын касиеттери каралган (Евклиддин китептеринде) деп эсептешет.

---

[1] Латын сөзү, талап кылуу дегенди түшүндүрөт.

Азыркы көз караштa постулаттар менен аксиомалардын ортосунда айырма жок, анын бардыгы аксиома деп эсептелет.

I китеби 23 аныктама, 5 постулат жана 9 аксиома менен башталат. Мисалы, айрым аныктамалар төмөндөгүдөй берилген:

1. Бөлүгү болбогон нерсе чекит болот.
2. Туурасы болбогон узундук сызык болот.
3. Сызыктын учтары чекиттер болушат.
4. Өзүнүн бардык чекиттерине карата бирдей жайланышкан сызык түз сызык болот.
5. Узуну менен туурасы гана болгон нерсе бет болот.

Калган аныктамалары бурчтарга, тегерекке, көп бурчтукка, үч бурчтуктарга, тик бурчтукка, квадратка, ромбго, параллелограммга ж.б. арналган. Эң кийинки 23-аныктама төмөндөгүдөй айтылат: «Бир тегиздикте жатуучу жана эки жагына тең канчалык созсок да кесилишпей турган түз сызыктар параллель түз сызыктар болот».

Аныктамалардан кийин 5 постулат баяндалган. Алар төмөндөгүлөр:

1. Ар бир чекиттен каалагандай экинчи чекитке чейин түз сызык жүргүзүүгө мүмкүн.
2. Ар бир чектелген түз сызыкты чексиз созууга мүмкүн.
3. Каалаган чекитти борбор кылып, каалагандай радиус менен айлана сызууга мүмкүн.
4. Бардык тик бурчтар конгруэнттүү болуп эсептелет.
5. Эгерде эки түз сызык үчүнчү түз сызык менен кесилишкенде бир жактуу ички эки бурчту түзүп, ал бурчтардын суммасы эки тик бурчтан кичине болсо, анда ал эки түз сызыкты созсок, алар дайыма суммасы эки тик бурчтан кичине болгон бурчтар жагында кесилишет.

Бул постулаттардан кийин аксиомалар берилген. Алар төмөндөгүдөй баяндалган:

1. Бир эле чоңдукка конгруэнттүү болгондор өз ара конгруэнттүү болушат.
2. Конгруэнттүү чоңдуктарды конгруэнттүү чоңдуктарга кошсок, анда алар конгруэнттүү болушат ж.б.

Евклиддин «Башталыш» жыйнагында аныктамалардан, постулаттардан жана аксиомалардан башка «сүйлөмдөр» деген термин да колдонулат. Ал «сүйлөмдөр» деп, теоремаларды жана түзүүгө берилген маселелерди атаган. Алар белгилүү тартипте берилип, ар бири далилденет. I китебинде 48 сүйлөм айтылып, алар далилденет. Мисалы, 15-сүйлөмүндө вертикалдык бурчтардын барабардыгы далилденет.

3. Евклиддин «Башталыш» жыйнагына карата айрым пикирлер

Жогоруда биз белгилеп көрсөткөндөй, Евклиддин «Башталыш» эмгегинин тарыхый мааниси өтө чоң. Бул геометрия боюнча алгачкы эң чоң илимий эмгек. Ал аксиомалардын негизинде геометрияны логикалык тизмектештикте түзүүгө аракеттенген. Анын түзгөн геометриясында ага чейин мурда ачылган жаңылыктардын бардыгы системалаштырылган. Ал аныктама, аксиома же постулат деп эсептелгендерден башканын баарын далилдөөгө аракеттенген.

Ошону менен катар Евклиддин «Башталыш» жыйнагынан айрым кемчиликтерди учуратууга болот. Алардын айрымдары төмөндөгүлөр:

1. Анын аныктамаларынын так эместиги жана алардын айрымдарынын эч жерде колдонулбагандыгы. Мисалы, чекит, сызык жана түз сызыктын аныктамалары. Алар кийинчерээк эч жерде колдонулбайт. Демек, аларды аныктабай калтырып кетсе да болот. Евклиддин мындай түшүнүктөрүнүн аныктамаларга кошулуп калышынын себеби негизги жана андан келип чыгуучу түшүнүктөрдү так ажыратпагандыгынан болуш керек.

2. Аксиома менен постулатты ажыратып баяндаган. Жогоруда биз эскерткендей, алардын арасында айырма жок.

3. Үзгүлтүксүздүк, конгруэнттүүлүк жана ирреттүүлүк аксиомалары жок. Демек, Евклиддин аксиомалар системасы толук эмес болгон.

4. V Постулат

Евклиддин V постулаты жогоруда баяндалган. Аны чиймеде көрсөтсөк, төмөндөгүдөй болот: a жана b түз сызыктарын үчүнчү c түз сызыгы кесип өткөндө пайда болгон ички бир жактуу бурчтардын чоңдугу α жана β болсун. $\alpha + \beta < 180°$ болсо, ошол бурчтар белгиленген жагында a жана b түз сызыктары кесилишет деп эсептелет. Бул учурда c түз сызыгынын экинчи жагында бир жактуу ички бурчтардын суммасы $180°$ тан чоң болоору түшүнүктүү. Ал эми бир жактуу ички бурчтардын суммасынын $180°$ градуска барабар болгон учуру жөнүндө кийинчерээк айтабыз.

Евклиддин башка постулаттарына караганда V постулатка өзгөчө көңүл бурганыбыздын себеби бар. Анткени ал геометриянын негизделишине байланыштуу суроолорду чечүүдө зор роль ойногон.

V постулаттын негизинде параллель түз сызыктардын теориясы түзүлгөн. Ал эми параллель түз сызыктардын теориясына геометриянын көп теоремаларынын далилдениши негизделген. Атап айтканда: үч бурчтуктардын ички бурчтарынын суммасы, фигуралардын окшоштугу, көп бурчтуктардын аянттары ж.б.

V постулаттын: а) башка постулаттардагыдай жөнөкөй жана өзүнөн-өзү белгилүү болгондой мүнөзгө ээ эместиги;

б) баяндалыштын татаал жана узун болушу;

в) Евклиддин «Башталыш» жыйнагында бул постулаттын кийинчерээк пайдаланылышы окумуштуулар арасында шектенүүнү туудурган. Ошондуктан көп окумуштуулар: «V постулат ачык эмес, аны далилдөө керек» – деп, анын далилдөөсүн негиздешкен. Бир топ далилдөөлөр болгон. Бирок, аларды тактап изилдегенде каталары бар экендиги байкалган. Ошентип V постулатты далилдөө аракеттери Евклиддин мезгилинен баштап, XIX кылымдын аягына чейин ийгиликсиз болгон.

Айрым окумуштуулар V постулатты айтылышы жөнөкөй, бирок аны менен тең күчтө болгон башка аксиома менен алмаштырууга аракет кылышкан. Атап айтканда, англиялык окумуштуу Джон Плейфер 1795-жылы азыркы параллелдик аксиомасын түзгөн. «Түз сызыктан тышкары жаткан чекит аркылуу ал түз сызыкка параллель болгон бир гана түз сызык өтөт». Бул аксиома V постулат менен эквиваленттүү.

5. V постулатты далилдөөгө жасалган аракеттер

V постулатты теорема катары далилдөөгө көп окумуштуулар аракет кылышкан. Алсак, Посидоний (б.э.ч. Iк.), байыркы грек философу жана математиги Прокл (б.э.нын 410-485-жж.), азербайжан окумуштуусу Нассир-Эддин Туси (1201-1274-ж.), англис математиги Д.Валлис (1616-1703-ж.), венгер математиги Фаркаш Бояи (1775-1856-ж.).

Булардын бардыгынын далилдөөлөрүндө кемчиликтер болгон. Ал кемчиликтердин негизгиси: далилдөөдө V постулатка эквиваленттүү болгон сүйлөмдөр колдонулат, б.а. V постулаттын далилдениши кайрадан өзүнө негизделип калган.

Проклдын далилдөөсүнө токтолобуз. a жана b түз сызыктары берилип, аларды c түз сызыгы A жана B чекиттеринде кесип өтсүн. Пайда болгон ички бир жактуу бурчтардын чоңдугун α жана β деп белгилейли. $\alpha + \beta < 180°$ болсун, a жана b түз сызыктарынын α менен β бурчтары белгиленген жакта кесилишээрин далилдейбиз.

B чекити аркылуу *a* түз сызыгына параллель болгон b' түз сызыгын жүргүзөбүз. *b* түз сызыгынан каалагандай *C* чекитин алып, b' түз сызыгына *CE* перпендикуляр кесиндисин түзөбүз. *C* чекити *b* түз сызыгы боюнча *B* дан алыстаса, анда *CE* аралыгы улам чоңоет, *a* жана b' параллель түз сызыктарынын арасындагы аралык турактуу болгондуктан, *b* түз сызыгына *a* түз сызыгында да жата тургандай *D* чекити табылат. Демек, *a* жана *b* түз сызыктары ушул *D* чекитинде кесилишет. V постулат далилденди.

Далилдөөдө биз төмөндөгүдөй үч болжолдоого таяндык:

1. Түз сызыктан тышкары жаткан чекит аркылуу берилген түз сызыкка параллель түз сызык жүргүзүү мүмкүн

2. Тар бурчтун бир жагындагы чекиттен экинчи жагына чейинки аралык бурчтун чокусунан алыстаганда чексиз чоңоёт.

3. Параллель түз сызыктардын арасындагы аралык турактуу.

Бул үч болжолдоонун ар бири өз алдынча далилдөөнү талап кылат. Ал эми 3-болжолдоо V постулатка эквиваленттүү, анткени 3-болжолдоо туура болгондо гана *D* чекити табылат.

Ошентип, Евклиддин калган аксиомаларынын жана постулаттарынын негизинде V постулатты далилдөөгө карата кылымдар бою жасалган аракеттер ийгиликсиз аяктады. Бирок, бул аракеттер экинчи жагынан пайдалуу да болду. Анткени V постулатты жокко чыгарган учурда окумуштуулар жаңы геометриялык түшүнүктөргө келип жатышты. Мунун өзү жаңы геометриянын ачылышына түрткү болду.

IV. ЛОБАЧЕВСКИЙДИН ГЕОМЕТРИЯСЫНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

1. Евклиддик эмес геометриянын пайда болушу

Көп кылымдар бою Евклиддин V постулатын далилдөөгө карата жасалган аракеттер XIX кылымдын башталышына чейин созулду. Натыйжада ал жаңы, Евклиддик эмес геометриянын ачылышына алып келди. Ошентип, үч окумуштуу тарабынан бири-биринен көз карандысыз жаңы геометрия ачылды. Алар жаңы геометрияны түзүүчүлөр болуп эсептелет.

Атап айтканда, жаңы геометрия Россияда Николай Иванович Лобачевский (1792-1856), Германияда Карл Фридрих Гаусс (1777-1855), Венгрияда Янош Бояи (1802-1860) тарабынан ачылган. Бул убакытка чейин окумуштуулар «Берилген түз сызыктан тышкары жаткан чекит аркылуу ага параллель болгон бир гана түз сызык жүргүзүүгө болот» – деген аксиоманы, атап айтканда ага эквиваленттүү болгон Евклиддин V постулатын өзгөртүүгө мүмкүн эмес деп бекем ишенип келишкен. Лобачевский, Гаусс, Бояи аны карама-каршы аксиома менен алмаштырууну сунуш кылышты.

Я.Бояи 1823-жылы, 21 жашында жаңы, Евклиддик эмес геометрияны ачкан. Бирок, анын эмгеги 1832-жылы гана (Лобачевскийдин эмгегинен кийин) атасынын (Ф.Бояинин) китебине тиркеме катары жарыяланган.

Ф.Гаусс параллель түз сызыктар жөнүндөгү суроого биринчи жолу 1792-жылы эле көңүл бурган, ал V постулатты далилдөөгө аракеттенген. Кийинчерээк ал V постулатты далилдөөгө мүмкүн эмес экендигине ишенген жана 1816-жылы Евклиддик эмес геометриянын негизги идеяларын тапкан. Бирок, ал бүткүл дүйнөлүк окумуштуулар алдында өзүмдүн авторитетимди жоготуп алам го деп коркуп, жаңы идеясын жарыялаган эмес. Анткени – ал кездеги окумуштуулар Евклиддин геометриясын өзгөртүүгө мүмкүн эмес, бир гана геометрия бар деп аябай ишенип алышкан. Мунун өзү жаңы геометриянын кабыл алынышын жана өнүгүш мезгилин кыйла артка таркан. Бул жагынан Н.И.Лобачевский бир кыйла чечкиндүү кадам жасады.

2. Н. И. Лобачевский

Николай Иванович Лобачевский 1792-жылы 1-декабрда Горький шаарында туулган. Атасы уезддик жер ченегич болгон. Атасынын иштеп тапканы аз болгондуктан, үй-бүлөсү жакырчылыкта жашаган. Анын үстүнө Николай жаш кезинде эле атасы өлүп калган.

Н.И.Лобачевскийдин апасы Просковья Александровна жаш, турмушка тың, бирок чала сабаттуу аял болгон. Ал үч уулун Александр, Николай, Алексейди алып Казань шаарына келет. Бул учурда, мурда жабылып калган Казань гимназиясы кайрадан 1798-жылы ачылган болот. Просковья Ивановна үч уулун тең ушул гимназияга өткөрөт, ал гимназияда балдар мамлекеттин эсебинен окутулуучу. Николай болсо, ага 1802-жылы өтөт. Ошол кезде Казань гимназиясында Москва Университетин бүтүрүп келген мыкты педагог, математик Григорий Иванович Карташевский иштейт эле. Ал бир нече тилди билген педагог болгон. Ал сабакты өзүнүн программасы боюнча жүргүзүп, окуучулары жалаң гана математика менен эмес, анын келип чыккан тарыхы менен да тааныштыруучу. Мунун өзү Н. И. Лобачевскийдин келечекте математикага кызыгуусуна жакшы шарт түзгөн.

Н.И. Лобачевский 1806-жылы гимназияны бүткөндөн кийин Казань университетине кирүү экзаменин тапшырат. Бирок аны университетке дароо эле ала койгон жок, ага чет тилди, өзгөчө латын тилин үйрөнүүнү сунуш кылышты. Анткени XIX кылымдын башында Россиядагы университеттерде иштеген профессорлор негизинен чет мамлекеттерден келгендер болчу. Алар лекцияны көбүнчө немец же латын тилинде окуучу. Ошондуктан ал кезде студенттердин эки-үч чет тилди жакшы билүүсү талап кылынган. Бул талапты ишке ашыргандан кийин гана Н.И.Лобачевский 1807-жылы университетке кабыл алынат.

Университетте окуп жүргөндө анын математикага кызыгуусу андан ары жогорулайт. Бирок, бул учурда куугунтуктоонун натыйжасында Г.И.Карташевский бошонууга аргасыз болот. Мунун өзү Лобачевскийдин математиканы андан ары өздөштүрүүсүнө аз да болсо тоскоолдук кылат. Натыйжада Лобачевскийге математиканы окутуучу эч ким калбай калат. Ушул учурда ал апасынын тилин алып, медицина жагынан да иш жүргүзө баштайт.

1808-жылдын башында Казанга көрүнүктүү педагог, жогорку квалификациялуу математик, кадимки К.Ф.Гаусстун досу Мартин Бартельс келет. Ошол учурда Н.И.Лобачевский медицинаны таштап, дароо эле М.Бартельстин кол алдында математика боюнча иштөөгө өтөт.

М.Бартельс Лобачевскийдин жөндөмдүүлүгүн байкап калып, аны менен жекече иштей баштайт. Бартельс аны өзүнүн үйүнө чакырып алып, жумасына 4 сааттан математиканы окутат. Мында ал жаңы эле чыккан Гаусстун «Арифметикасын» жана Лапластын[1] «Асман механикасынын» биринчи томун окутат. Бартельс жогорку окуу жайларынын башчыларына Лобачевский жөнүндө мактап жазат. Натыйжада аны ошол кезде эле окутуучулук ишке пайдалана башташат.

Н.И.Лобачевский университетте эң татыктуу студент болгон. Ал өзүнүн жөндөмдүүлүгү, учурдагы проблеманы терең түшүнө билгендиги менен профессорлорду таң калтырган. Албетте, Лобачевскийдин математика боюнча терең, так билим алышына М.Бартельс чоң көмөктөшкөн.

---

[1] Пьер Симон Лаплас (1749-1827) көрүнүктүү француз математиги

1811-жылы Н. И. Лобачевский университетти бүтүрүп, кайра эле ошол университетке окутуучу болуп калтырылат. Ал өзүнүн алгачкы эмгек жолун жалпы билимин жогорулатуу үчүн университетке келген чиновниктер үчүн арифметикадан жана геометриядан лекция окуудан баштаган.

Лобачевскийдин таланттуу экендигин жакшы билгендердин жана профессорлордун талабы боюнча ага университетти бүткөндөн кийин эле (1811-жылы) магистр деген илимий даража берилет. 1814-жылы апрель айында университеттин советинин чечими менен адъюнкт (азыркы доцент) деген наам ыйгарылат. Эки жылдан кийин (1816-жылы) Н.И.Лобачевский экстраординардык профессор болуп иштейт, ал эми кийинчерээк М.Бартельс кеткенден кийин ординардык профессор жана физика-математика бөлүмүнүн деканы болуп калат.

1814-1815-окуу жылынан баштап, ал сандардын теориясы, элементардык математика, сфералык тригонометрия, дифференциалдык жана элементардык геометрия боюнча лекцияларды окуган. Кийинчерээк Лобачевский окуткан сабактардын саны дагы кеңейген, ал математикадан башка физиканы, механиканы жана астрономияны да окуткан.

1827-жылы Казань университетинин совети Лобачевскийди университеттин ректору кылып шайлаган. Ал 19 жыл университетте ректор болуп иштеп, университеттин илимин өнүктүрүүдө, студенттерди окутууну жакшыртууда эң мыкты административдик жөндөмдүүлүктү жана педагогикалык талантты көрсөткөн.

Н.И.Лобачевский ректор катарында жаш окумуштууларды тарбиялоого да өзгөчө көңүл бурган. Жөндөмдүү студенттерди Россиянын мыкты окуу жайларына жана чет мамлекеттерге стажировкага жиберип турган.

1846-жылы июль айында Н.И.Лобачевскийдин профессордук ишине 30 жыл толот. Ошол убактагы университеттин уставы боюнча 30 жыл иштегенден кийин отставкага кетүү талап кылынуучу. Ага карабастан, университеттин Совети аны дагы беш жылга калтыруу жөнүндө чечим кабыл алган.

Бирок, Лобачевскийдин жөндөмдүүлүгүн көрө алышпагандар ар кандай ушактарды жүргүзө баштaшкан. Ал маалыматтар министрликке чейин жеткен. Натыйжада Н.И.Лобачевский ректорлуктан өзүнүн каалоосу менен университеттин Советинин чечими боюнча бошотулган. Ошол эле учурда ал таза математика кафедрасы боюнча профессордук милдетинен да бошотулган.

Н.И. Лобачевскийдин педагогикалык жана административдик активдүү иштерден четтетилиши ага моралдык жана материалдык жактан көп таасир эткен. Ошол себептен ден соолугу начарлап, өмүрүнүн акыркы жылдарында көзү көрбөй калган. Акыркы илимий эмгегин болгон «Пангеометрия» деген китебин өзү айтып берип жаздырган.

Н.И.Лобачевский 1856-жылы 12-февралда дүйнөдөн кайткан.

3. Лобачевскийдин эмгегинин мааниси

а) Лобачевскийдин жаңы геометрияны ачышы.

Жогоруда белгилүү болгондой, жаңы геометриянын ачылышы биринчи жолу улуу орус математиги, Казань университетинин профессору Николай Иванович Лобачевскийдин «Геометриянын башталышы жөнүндө» деген эмгегинде 1829-жылы жарыяланган. Бирок бул ачылыш жөнүндө докладды ал 1826-жылы 11-февралда Казань университетинин физика-математика факультетинин заседаниесинде жасаган.

Ошондуктан 1826-жылдын 23-февралын (эски стиль боюнча 11-февралда) жаңы, евклиддик эмес геометриянын ачылыш датасы деп эсептешет. Н.И.Лобачевскийдин ошондо жасаган доклады «Параллель түз сызыктар жөнүндөгү теореманын так далилдениши бар геометриянын башталышынын кыскача баяндалышы» деп аталып, француз тилинде жазылган. Ушул докладында жаңы геометриянын негизи башталган эле.

Н.И.Лобачевскийдин Казань университетинде окутуучу болуп иштей баштаган учурунун алгачкы жылдарында эле Евклиддин V постулатын далилдөөгө аябай аракет кылган. Өзүнүн V постулатты далилдөөгө жасаган аракетинин ийгиликсиз аякташы жана андан мурдагы окумуштуулардын да аны далилдөөлөрүнүн ийгиликсиз болушу Н. И. Лобачевскийди жаңы идеяга, пикирге алып келген: «Евклиддин V постулатын (параллелдик аксиомасын) далилдөөгө болбойт, анын тууралыгы Евклиддин геометриясынын калган аксиомаларынан келип чыкпайт; V постулатты, б.а. параллелдик аксиомасын тануучу (же ага карама-каршы болгон) аксиоманы кабыл алсак, ал бизди жаңы геометрияга алып келет».

Чындыгында эле, Н.И.Лобачевский Евклиддин параллелдик аксиомасын жокко чыгарып, б.а. тегиздикте берилген түз сызыктан тышкары жаткан чекит аркылуу аны менен кесилишпей турган жок дегенде эки түз сызык жүргүзүүгө болот деп эсептеп, Евклиддин калган аксиомаларын ошол бойдон кабыл алып, эч кандай карама-каршылыкка учурабаган көп теоремаларды далилдеген. Ал теоремалар логикалык жактан туура болгон, бирок ала Евклиддин геометриясындагы теоремалардан таптакыр айырмаланган жаңы геометриянын теоремалары эле. Лобачевский өзүнүн бул жаңы геометриясын «Элестетүүчү геометрия» деп атаган.

Н.И.Лобачевскийдин геометрия боюнча чоң ачылыш жасагандыгын жогору баалашып, аны «Геометриянын Коперниги» деп аташкан. Кылымдар бою өкүм сүрүп келген Евклиддин геометриясынын окумуштуулардын аң-сезимине сиңип калышы, жаңы геометрияны кабыл алууга кыйла тоскоолдук кылган. Албетте, ал кезде мындай жаңы геометрия алар үчүн таң калаарлык болуп көрүнгөн.

Н. И. Лобачевский өзүнүн акыркы эмгегин «Пангеометрия» (бардыгына жалпы геометрия) деп аташы кокусунан эмес болуш керек. Анткени – ал өзүнүн геометриясын жалпы учур, ал эми Евклиддин геометриясын бир айрым учур катарында караган.

Н. И. Лобачевскийдин эмгеги XIX кылымдын экинчи жарымында гана жалпыга таанылa баштады. Н. И. Лобачевский дүйнөдөн кайткандан 10-15 жыл өткөндөн кийин эле анын ысмы дүйнөлүк бардык математиктерге дээрлик белгилүү болуп калды.

б) Лобачевскийдин эмгегинин математикалык мааниси.

Н.И.Лобачевскийдин гениалдуу эмгегинин мааниси өтө зор жана көп кырдуу. Анын эмгегинин илимдеги жана математикадагы маанисин төмөндөгүдөй белгилеп көрсөтүүгө болот.

1) Н.И.Лобачевский тарабынан түзүлгөн жаңы геометрия илимге, анын ичинде геометрия илимине зор көңтөрүш жасады. Эки миң жылдар бою окумуштуулар геометриянын аксиомаларын өзгөртүүгө мүмкүн эмес деп эсептеп келишкендиги белгилүү. Н.И.Лобачевский болсо, илимдин өсүп-өнүгүү процессинде аксиомаларды текшерүүгө, тажрыйбанын негизинде тактоого жана өзгөртүүгө мүмкүн экендигин көрсөттү. Ал Евклиддин V постулатын, б.а. параллелдик аксиоманы ага карама-каршы аксиома менен алмаштырып жаңы, Евклиддик эмес геометрияны түздү. Геометрия жаңы өсүшкө ээ болду.

2) Н.И.Лобачевский Евклиддин V постулаты калган аксиомалардан көз каранды эмес экендигин далилдеди, ошондой эле аны далилдөөгө мүмкүн эмес экендигин көрсөттү. Демек, Н.И.Лобачевскийдин оюу боюнча, Евклиддин геометриясы бирденбир мүмкүн болгон геометрия болуп эсептелбейт, башка да

геометриялар болушу мүмкүн. Ошентип, профессор В.Ф.Кагандын (1859-1953) сөзү боюнча: «Лобачевский геометриянын негизин ширеп турган музду жарып талкалады». Н.И.Лобачевскийге чейин илим бир гана геометрияны билген. Азыркы убакта бизге белгилүү геометриялардын саны көбөйүүдө.

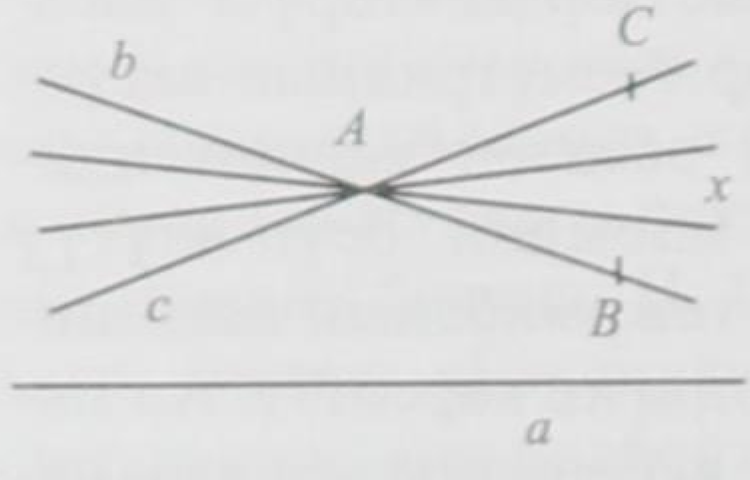
3) Лобачевскийдин геометриясынын түзүлүшү жалпы эле геометриянын түзүлүшүнө, ошону менен бирге математиканын негизделишине азыркыча жаңы көз карашты жаратты. Демек, Лобачевскийдин эмгеги азыркы математика үчүн мүнөздүү болгон аксиомалык методдун башталышын түздү. Аксиомалаштыруу маселеси математиканын башка областтарында да колдонула баштады.

4. Лобачевскийдин аксиомасы

Евклиддин V постулаты менен параллелдик аксиомасы эквиваленттүү экендигин биз жогоруда эскерткенбиз (§ 6). Лобачевский Евклиддин V постулатына, б.а. параллелдик аксиомасына карама-каршы болгон төмөндөгүдөй аксиоманы алган.

V: *a* каалагандай түз сызык, ал эми *A* ал түз сызыкта жатпаган чекит болсун. Ушул түз сызык жана чекит аркылуу аныкталган тегиздикте A чекити аркылуу өтүп, *a* түз сызыгы менен кесилишпеген жок дегенде эки түз сызык болот.

Бул Лобачевскийдин аксиомасы деп аталат. Лобачевский өзүнүн геометриясын түзгөндө Евклиддин параллелдик аксиомасынан башка бардык аксиомаларды, б.а. абсолюттук геометриянын бардык аксиомаларын кабыл алган. Демек, ал Евклиддин параллелдик аксиомасын өзгөрткөн. Анда *a* түз сызыгынан тышкары жаткан *A* чекити аркылуу өтүп, *a* түз сызыгы менен кесилишпей турган түз сызыктын бар экендигин абсолюттук геометриянын теоремалары аркылуу негиздеген.



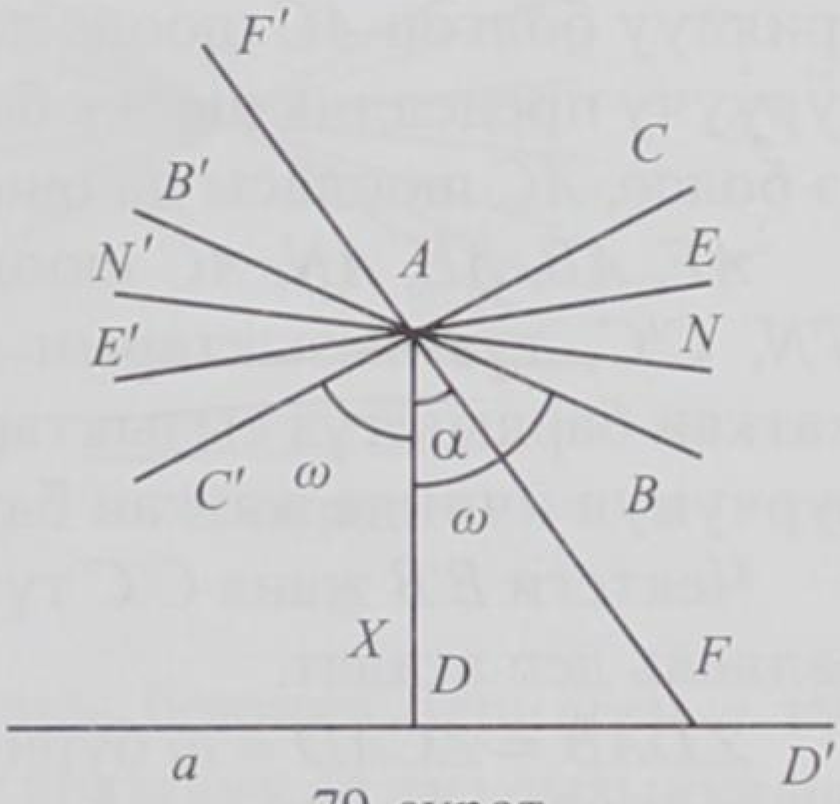
78-сүрөт

Лобачевскийдин аксиомасы боюнча *A* чекити аркылуу, *a* түз сызыгы менен кесилишпей турган жок дегенде эки түз сызык жүргүзүүгө болот. Алар *b* жана *c* түз сызыктары болсун (78-сүрөт). Анда *A* чекит аркылуу өткөн *BAC* бурчунун ичинде жаткан бардык *x* түз сызыктары да *a* менен кесилишпейт. Демек, А чекити аркылуу a түз сызыгы менен кесилишпей турган чексиз көп түз сызыктар өтөт.

Лобачевскийдин аксиомасы аткарылат деп эсептелген тегиздикти (мейкиндикти) Лобачевскийдин тегиздиги (мейкиндиги) деп аташат. Ошентип, Лобачевскийдин геометриясынын аксиомалары Евклиддин аксиомаларынан (I-IV группалардагы аксиомалардан) жана Лобачевскийдин аксиомасынан турат. Демек, абсолюттук геометриянын аксиомалары, Лобачевскийдин аксиомасы жана андан чыгуучу натыйжалардын чогуусу Лобачевскийдин геометриясын аныктайт.

5. Лобачевскийдин геометриясындагы параллель түз сызыктар

a түз сызыгы жана андан тышкары жаткан A чекити берилсин (79-сүрөт). Берилген чекит менен түз сызык бир тегиздикти аныктайт. A чекитинен а түз сызыгына AD перпендикулярын түшүрөбүз. AD га перпендикулярдуу болгон AE шооласын жүргүзөбүз. Анда AE менен a түз сызыгы кесилишпейт.



79-сүрөт

A чекити аркылуу a түз сызыгы менен кесилише турган жана кесилишпей турган чексиз көп түз сызыктар (шоолаларды) жүргүзүүгө болот. Анда A чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктардын (шоолалардын) чогуусун кесилишүүчү жана кесилишпөөчү эки топко бөлөлү. Бул учурда AF шооласы биринчи топко, AE шооласы экинчи топко тиешелүү.

$ZDAF = \alpha$ деп эсептейли. $0° \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ болот. Эгер F чекитин a түз сызыгы боюнча оң жакка жылдырсак, анда α бурчу чоңоет, бирок 90° тан кичине бойдон кала берет. Эгер F чекити a түз сызыгы боюнча чексиз алыстаса, AF шооласы кандайдыр AB пределдик абалына ээ болот. Ал шоола кесилишүүчү жана кесилишпөөчү шоолаларды бөлүп туруучу чектеги пределдик шоола болуп калат. Бул акыркы кесилишүүчү шоола же биринчи кесилишпөөчү шоола болот. Бирок, AB пределдик эмес жөн эле кесилишүүчү шоола боло албайт. Эгерде AB шооласы a түз сызыгы менен пределдик абалда эмес кандайдыр K чекитинде кесилишет десек, анда a түз сызыгында K чекитинин оң жагынан дагы бир K_1 чекитин табат элек. Бул учурда AK_1 шооласы да кесилишүүчү шоола болуп, AB шооласынын оң жагында жатат эле: Анда AB пределдик бөлүүчү шоола боло албай калат. Демек, AB шооласы a түз сызыгы менен кесилишпей турган биринчи шоола. Ошондой эле, AB шооласы AE шооласы менен дал келбейт. Эгер дал келсе, анда Евклиддин параллелдик аксиомасына ээ болот эле. Бул учурда Лобачевскийдин аксиомасы аткарылбай калат.

Ошентип, DAB бурчунун ичинде жатуучу ар кандай A шооласы a түз сызыгын кесип өтөт, ал эми BAE бурчунун ичинде жатуучу ар кандай AN шооласы a түз сызыгын кеспейт.

Эгерде AD перпендикулярына карата AB шооласына симметриялуу болгон AC шооласын жүргүзсөк, ал дагы чектеги бөлүп туруучу пределдик шоола болот. AB шооласы кандай касиеттерге ээ болсо, AC шооласы да ошондой касиеттерге ээ болот.

AF, AB, AE, AN, AC шоолалары тиешелүү түрдө $F'F$, $B'B$, $E'E$, $N'N$, $C'C$, түз сызыктарын аныктайт. $\angle BAC'$ бурчунун ичинде жаткан бардык түз сызыктар a түз сызыгын кеспейт, ал эми BAC бурчунун ичинде жаткан бардык түз сызыктар аны кесет.

Чектеги $B'B$ жана $C'C$ түз сызыктары гана a түз сызыгына параллель деп аталат.

$\angle DAB = \angle CAD = \omega$ бурчун *параллелдик бурчу* деп аташат. Ал дайыма $90°$ тан кичине болот. Демек, А чекити аркылуу өтүп, a түз сызыгы менен кесилишпеген түз сызыктардын бардыгын эле a га параллель деп эсептөөгө болбойт. Мисалы, $E'E$, $N'N$ түз сызыктары a түз сызыгына параллель эмес.

Ошентип, a түз сызыгына карата A чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктардын тобун Лобачевскийдин тегиздигинде үчкө бөлүүгө болот:

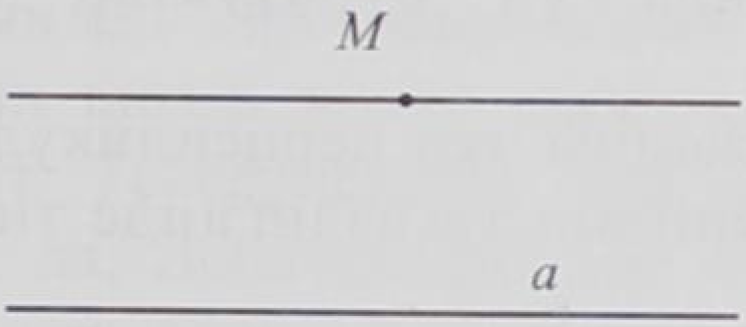
1. Кесилишүүчү түз сызыктар, алар $F'F$ ж.б. түз сызыктар.
2. Параллель түз сызыктар, алар $B'B$ жана $C'C$.
3. Ажыроочу түз сызыктар, алар $E'E$, $N'N$ ж.б.

Лобачевскийдин тегиздигинде параллель түз сызыктардын багыты эске алынат. Мисалы, $B'B$ түз сызыгы a түз сызыгына D дан D' чекитин карай параллель, ал эми $C'C$ түз сызыгы a түз сызыгына D' дан D ны карай параллель деп эсептелет. Эгер $B'B$ түз сызыгы a га параллель болсо, анда a түз сызыгы $B'B$ түз сызыгына параллель болот (ошол эле багыт боюнча). Параллелдикти $\parallel$ аркылуу белгилейбиз.

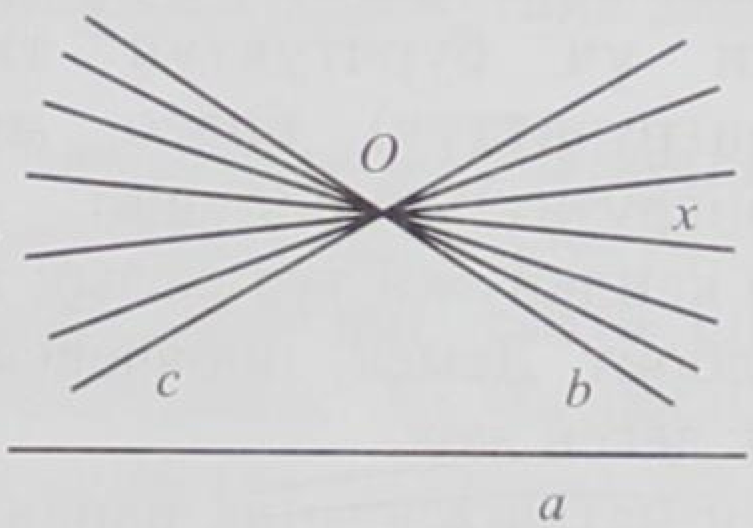
$B'B \parallel a \Rightarrow a \parallel B'B$

Эгер $a \parallel b$, $a \parallel c$ болсо, анда белгилүү бир багыт боюнча $b \parallel c$ болот.

Лобачевскийдин геометриясынын маанисине ачык жана жеңил түшүнүү үчүн жогоруда айтылгандай анын жана Евклиддин V группадагы аксиомаларын салыштырып көрүп төмөнкүдөй түшүнүктөрдү карап чыгууга туура келет. Евклиддин аксиомасы боюнча берилген a түз сызыгынан тышкары жаткан M чекити аркылуу ал түз сызыкка параллель болгон жалгыз бир гана түз сызык өтөт (80-сүрөт).

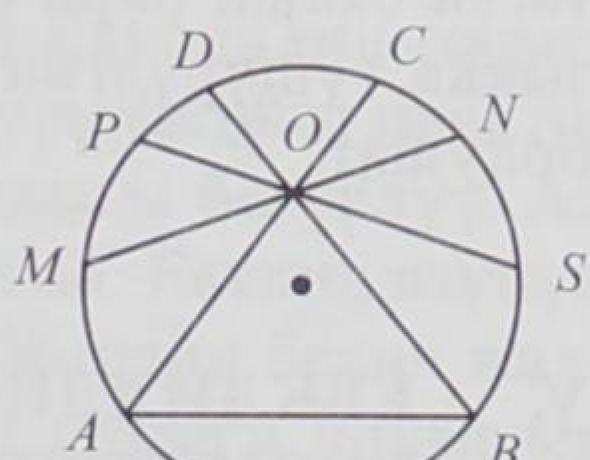


80-сүрөт



81-сүрөт

Ал эми Лобачевскийдин аксиомасы боюнча берилген a түз сызыгынан тышкары жаткан O чекит аркылуу ал түз сызыкка параллель болгон b, c эки түз сызыгы жана a менен кесилишпей турган x чексиз көп түз сызыктар өтөт (81-сүрөт). Анткени Лобачевскийдин геометриясында модель катары тегиздик үчүн тегеректи, чекиттер үчүн ошол тегеректин ички чекиттерин, түз сызык катары ошол тегеректин ички хордасын алсак (82-сүрөт), анда ал ачык байкалат. Ошондуктан, мисалы, тегиздиктен (тегеректен) AB түз сызыгын (хордасын) жана андан тышкары жаткан O чекитин алалы. Анда O чекити аркылуу өтүүчү жана 82-сүрөт AB түз сызыгы менен кесилишпей турган MN жана PS чексиз көп түз сызыктарын (хордаларды) жүргүзүүгө болот, ал эми AC, BD түз сызыктары a га параллель деп эсептелет, мында тегеректин айланасынын A,B чекиттери шарттуу түрдө чексиз алыстатылган чекиттер катары каралат.



82-сүрөт

6. Лобачевскийдин геометриясынын айрым фактылары

Лобачевскийдин геометриясынын планиметрия бөлүгүнүн айрым фактыларын белгилөөгө болот. Албетте, абсолюттук геометриянын теоремаларын, Лобачевскийдин аксиомасын колдонуп, алардын ар бирин далилдөөгө мүмкүн. Бирок биз, алардын далилденишине токтолгонубуз жок.

1. Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 180° тан кичине.
2. Томпок төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 360° тан кичине.
3. Айлананын диаметрине тирелген бурч тик бурчтан кичине.
4. Эки үч бурчтуктун тиешелүү үч бурчу барабар (конгруэнттүү) болсо, анда үч бурчтуктар барабар (конгруэнттүү) болушат.
5. Ар кандай эки түз сызык жалпы эки перпендикулярга ээ болбойт. Демек, Лобачевскийдин тегиздигинде тик бурчтук деген жок.

Мунун натыйжасында параллель түз сызыктардын арасындагы аралык турактуу эмес экендигин байкайбыз. Алар параллелдик багыты боюнча бири-бирине чексиз жакындайт, ал эми карама-каршы багытта бири-биринен алыстайт.

Ажыроочу эки түз сызык бир гана жалпы перпендикулярга ээ болот. Ал перпендикуляр алардын арасындагы эң кыска аралыкты аныктайт.

Ажыроочу түз сызыктар ал жалпы перпендикулярдан алыстаган сайын бири-биринен ажырай баштайт. Демек, бир түз сызыкка түшүрүлгөн эки перпендикуляр ажыроочу түз сызыктар болушат.

V. ЕВКЛИДДИН ЖАНА ЛОБАЧЕВСКИЙДИН ГЕОМЕТРИЯЛАРЫНЫН БАЙЛАНЫШЫ

Евклиддин геометриясынын аксиомалары абсолюттук геометриянын аксиомаларынан, б.а. I, II, III, IV группадагы аксиомалардан жана V параллелдик аксиомасынан тураары бизге белгилүү. Ушул аксиомалар жана алардан логикалык түрдө келип чыгуучу натыйжалардын (теоремалардын) чогуусу Евклиддик геометрияны түзөт.

Н. И. Лобачевский өзүнүн геометриясын түзгөндө абсолюттук геометриянын жана андан келип чыгуучу натыйжаларды (теоремаларды) өзгөрүүсүз кабыл алып, Евклиддин V параллелдик аксиомасын гана V’ аксиомасы менен алмаштырган. Демек, Лобачевскийдин геометриясынын аксиомалары I, II, III, IV группадагы аксиомалардан жана Лобачевскийдин V’ аксиомасынан турат. Бул аксиомалар жана алардан логикалык түрдө келип чыгуучу натыйжалардын (теоремалардын) чогуусу Лобачевскийдин геометриясын аныктайт.

Демек, Евклиддин жана Лобачевскийдин геометриялары бири-биринен бешинчи группадагы аксиомадан жана андан келип чыгуучу натыйжалардан (теоремалардан) гана айырмаланышат.

Мындан Лобачевскийдин геометриясы Евклиддин геометриясын танып жокко чыгарбайт, танат деп корутунду жасоого болбойт. Тескерисинче, эки геометрия тең, Евклиддин геометриясы да, Лобачевскийдин геометриясы да логикалык жактан тең укукта, алардын ар бири өз алдынча карама-каршы эмес, бирин экинчиси жокко чыгарбайт, танбайт. Бирок, Лобачевскийдин геометриясы, жогоруда биз эскерткендей, жалпы геометрия болуп эсептелет, ал эми Евклиддин геометриясы болсо анын айрым учуру катарында каралат.

Евклиддин жана Лобачевскийдин геометрияларынын кайсынысы бизди курчап турган реалдуу мейкиндиктин касиеттерин туура чагылдырат деген суроо туулушу мүмкүн. Буга дароо жооп бере коюу жөнөкөй иш эмес.

Азыр мектепте окулуп жаткан геометрия Евклиддин геометриясынын негизинде түзүлгөн. Геометрия турмуштагы практикалык өлчөөлөрдүн негизинде келип чыккандыгы белгилүү. Ал өлчөөлөрдүн бардыгы жер үстүндө жүргүзүлгөн. Евклид өзүнүн геометриясын түзгөн учурда окумуштуулар Жердин бетин жалпак деп эсептеп келишкен. Ошондой эле, ал кездеги чиймелер бир тегиздикте каралып, ал тегиздик жердин бети деп эсептелген. Бирок, Жердин томпок экендигине көңүл бурушкан эмес. Ар кандай эки чекитти туташтырып, аны түз сызыктын кесиндиси катарында кабыл алышкан. Чындыгында, аны жердин бети боюнча алып караганда жааны берээрин эсепке алышкан эмес. Мына ушундай тарыхый шартта Евклиддин «Башталыш» жыйнагы, б.а. – геометриясы келип чыккан. Анын геометриясына жогоруда толук анализ берилди.

Евклиддин геометриясынын негизги түшүнүктөрү жана алардын байланышы адамдын зор тажрыйбасын жалпылоого негизделген. Ал материалдык нерсенин касиеттерин, материалдык дүйнөнүн законун элестетет. Бирок, ал абсолюттуу так эмес, жакындаштырылган формада. Лобачевскийдин геометриясы жөнүндө деле ушунун өзүн айтууга болот. Бирок, ал жогоруда айтылган шарттарга сын көз менен карады. Геометриянын объектилери-мейкиндик-реалдуу жана аны билүү тажрыйбага негизделген. Ал тажрыйба биздин илимге тыгыз байланышта. Баардык эле тажрыйба илимди толуктап, дүйнөнүн тууралыгын так далилдей бербейт.

Евклиддин геометриясына караганда Н.И. Лобачевскийдин «элестетүүчү» геометриясы реалдуу мейкиндиктин касиеттерин тагыраак чагылдырат деп эсептөөгө мүмкүн. Биз ага жогоруда, Лобачевскийдин эмгегинин маанисин караганда токтолгонбуз. Лобачевский Евклиддин геометриясын колдонулуучу геометрия, ал эми өзүнүн геометриясын элестетүүчү геометрия деп атагандыгы бекеринен эмес.

Евклиддин параллелдик аксиомасынын ачык, даана болушу, ошондой эле окуучулар мурда Евклиддик геометриянын духунда тарбияланып калгандыктан дүйнөнүн Евклиддик мүнөздө чагылышына көнүп калышкан. Эсептөө техникасы жана теориясы жагынан Евклиддин геометриясы жөнөкөй. Ошондуктан ал мектепте окулат жана турмушта, техникада колдонулат. Эгерде биз кадимки эсептөөлөрдүн чегинен чыгып кетсек, б.а. космосту, бүт ааламды (өтө чоң чондук, өтө кичине чондук – атомдор дүйнөсүн) карасак, ошого тиешелүү геометрия жөнүндө сөз жүргүзсөк, анда абал өзгөрүп кетет. Бул учурда Евклиддин геометриясы жетишсиз болот. Андай талапка Лобачевскийдин геометриясы гана жооп бере алат.

ЖООПТОР

I Глава

§ 1

2. 1) $M \in \alpha$; $M \notin \beta$; 2) $N \in l$; $l \subset \beta$; $N \notin \beta$; 3) $a \cap b = A$, $A \in \alpha$; $a \subset \alpha$; $b \not\subset \alpha$ **3.** 1) чексиз көп; 2) чексиз көп; 3) бир түз сызыкта жатпаса – бир, жатса – чексиз көп; 4) төрт. **4.** а) болот; б) болбойт. **6.** Болот. 7. 1) болот, чексиз көп; 2) болот, чексиз көп. **11.** 1) болбойт; 2) бир же үч.

§ 2

1. Көрсөтмө. A чекити жана a түз сызыгы аркылуу β тегиздигин жүргүзгүлө. β тегиздигинде A аркылуу өтүүчү, a га параллель болгон b түз сызыгын жүргүзгүлө; б) AB жана B_1C_1; AB жана A_1D_1; AB жана CC_1; AB жана DD_1 **2.** а) мүмкүн; б) мүмкүн; в) мүмкүн эмес. **3.** 36 *дм* жана 4,5 *дм*. 8. Параллель эмес.

§ 3

1. а) $a \parallel \alpha$; б) $a \parallel \beta$. **4.** Көрсөтмө. Берилген чекит аркылуу $a' \parallel a$, $b' \parallel b$ түз сызыктарын түзгүлө. a', b' аркылуу өтүүчү тегиздик изделүүчү тегиздик болот. **5.** 1) $CF \parallel \alpha$; 2) $CB \cap \alpha$; 3) $AB \parallel \alpha$; 4) $AF \parallel \alpha$

6. Чексиз көп. **8.** $\frac{bc}{a+c}$. **10.** Берилген чекит берилген түз сызыкта жатпаса, чексиз көп тегиздик жүргүзүлөт.

§ 4

10. 18 *дм*. **12.** $A_1B_1 = a$,.

§ 5

1. 60°, 2, 0°. **5.** 1) 90° жана 90°; 2) 135° жана 45°. **6.** $cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$; 90°.

7. 1) $\sqrt{a^2 - b^2 + d^2}$; 2) $\sqrt{a^2 - c^2 + 2d^2}$; **8.** 80°; 2)60°.

§ 6

1. 1) боло албайт; 2) болушу мүмкүн. **2.** 1) $AB_1 \perp ABCD$ ж.б. 2) $BC \perp CDD_1C_1$ ж.б. 3) $B_1A_1 \perp ADD_1A_1$ ж.б. **4.** $a \parallel b$. **5.** Болбойт. **9.** 1) мүмкүн; 2) мүмкүн; Үч бурчтуктун эки жагы бир тегиздикке перпендикуляр болбойт. **11.** Болбойт. **13.** α тегиздигинде жатат. Перпендикуляр түз сызыктын тегиздик менен кесилишкен чекитинен биринчи түз сызыкка түшүрүлгөн перпендикуляр болот. **14.** 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

§ 7

4. 1) 3 *см*; 2) 10 *дм*; 3) 15 *см*. **6.** Борбору перпендикулярдын негизи, ал эми радиусу 0,6 *дм* болгон айлана болот. **7.** 2 *дм*; 16 *дм*. **8.** 1) 15 *см*, 41 *см*. 2) 15 *см*, 41 *см*.

§ 8

1. $\sqrt{a^2-h^2}$. **2.** 1) 4 *дм*; 2) 3,6 *дм*. **3.** 30 *дм*. **4.** 5 *см*.

5. $\sqrt{2m^2-n^2}$, $\sqrt{n^2-m^2}$. **6.** $\sqrt{n^2+m^2-p^2}$, $\sqrt{p^2-m^2}$, $\sqrt{p^2-n^2}$ **8.** 2 *дм* **10.** 0,5 *дм*.

11. 6 *дм*. **12.** $\sqrt{m^2\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$. **13.** 1,2 *дм*, 6,2 *дм*. **14.** $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+m^2}$

§ 9

1. Болот, чексиз көп. **2.** 1) $12\sqrt{3}$ *см*; 12 *см*; 2) 16 *см*; $8\sqrt{3}$ *см*; 3) $10\sqrt{3}$ *см*; $5\sqrt{3}$ *см*.

3. 30°. **4.** а) $cos\varphi=\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) 45°. **6.** а) 1) $12=\sqrt{2}$ *см*; 2) $4\sqrt{2}$ *см*. 8 *см*; 3) $15=\sqrt{2}$ *см*;

15 *см*; б) 1) 12 *см*, $12=\sqrt{3}$ *см*; 2) $\frac{16=\sqrt{3}}{3}$ *см*; $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ *см*; 3) 30 *см*,

$15\sqrt{3}$ *см*; **7.** 30° **8.** $h\sqrt{2}$. **9.** $\frac{h\sqrt{2}}{sin\,\varphi}$. **10.** 1) $4\sqrt{6}$ *см*; 2) $2\sqrt{15}$ *см*. **11.** $90° - \varphi$. **13.** 45°.

14. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ *м*.

§ 10

5. $ABCD \perp BCC_1B_1$, $ABB_1A_1 \perp A_1B_1C_1D_1$ ж.б. **6.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **7.** 1) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

2) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **8.** 1,7 *дм*. **10.** $8\sqrt{2}$ *см*. **11.** 1) $m\sqrt{2}$; 2) $m\sqrt{3}$; 3) 60°.

I Главаны кайталоого берилген маселелердин жооптору

3. 36 *см*. **7.** Чексиз көп **8.** 13 *см* же $\sqrt{313}$ *см* **9.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ *м*.

§ 11

5. Көрсөтмө. 3-касиетти пайдалануу керек.

§ 12

1. Көрсөтмө. Кесиндилердин учтарын параллель проекциялоо керек. **2.** 1) Кесиндинин тең экиге бөлүнүүчүлүгү; 2) Параллелдиги сакталат. **3.** Жалпак фигуранын тегиздиги проекция тегиздигине параллель болгондо. **4.** Мүнөздүү элементтерин (чокуларын, кырларын, параллель жактарын ж.б.) проекция тегиздигине проекциялоо керек.

§ 13

2. 1) Параллелограмм; 2) параллелограмм; 3) параллелограмм. 4) трапеция. **3.** Карама-каршы жактарынын параллелдиги. **4.** Эллипс. **5.** Эллипске ичтен сызылган: 1) үч бурчтук; 2) параллелограмм; 3) карама-каршы жактары параллель алты бурчтук. **6.** Эллипске сырттан сызылган: 1) үч бурчтук; 2) параллелограмм; 3) карама-каршы жактары параллель алты бурчтук. **7.** Грандарынын сүрөттөрү параллелограммдар болот. 8. Горизонталдык жана вертикалдык кесилиштериндеги тегеректердин сүрөттөрү эллипстер болот.

III Глава

§ 14

5. $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. **6.** ≈ 19°30′ же 160°30′. **8.** 1 *дм*. **9.** 9 *дм*.

10. $2\sqrt{a^2 - ab + b^2 + d^2}$. **11.** 0,2 *дм*.

§ 15

1. 1) Болбойт; 2) болбойт; 3) болот. **2.** 1) 3, 4, 5, 6, 7; 2) 3, 4, 5. **3.** Анткени $15° + 20° + 25° < 70°$. **4.** Болот. 5. 70°32′. **6.** 1) 9 грандуу бурч; 2) төрт грандуу бурч.

§ 16

3. 1) Томпок; $\perp\angle(\alpha, BB_1\beta)$. 3) үч. **6.** 8. **7.** 9. **8.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

§ 17

1. 1) 9, ар бир кырында бирден эки грандуу бурч болот; 2) 6, ар бир чокусунда бирден көп грандуу бурч болот. **2.** 1) 4; 2) 10; 3) 70; 4) $n(n-3)$. **3.** 1) болот, анткени – $AB \parallel DC$, $DC \parallel D_1C_1$, демек, $AB \parallel D_1C_1$; 2) $AB \parallel C_1D_1$ – тик бурчтук ($BC_1 \perp AB$). **4.** 1) Трапеция; 2) $\frac{a}{2}$. **5.** 0,8 *дм*. **6.** 8 *см*; $4\sqrt{2}$ *см*. **7.** 1) $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{3a^2+b^2}}{4}$ 8) $\frac{3b^2\sqrt{19}}{16}$. **9.** 45°. **10.** $2b, b\sqrt{5}$. **11.** $l \sin\varphi$. **12.** 1) $a\sqrt{2}$, $2a$; 2) a^2, $a^2\sqrt{3}$.

13. $3\sqrt{7}$ *дм*. **14.** $3\sqrt{2}$.

§ 18

1. 72 $см^2$. **2.** 32 $дм^2$. **3.** 42 $см^2$. **4.** 56 $см^2$. **5.** 40,32 $дм^2$. **6.** $3a^2\sqrt{3}$.

7. 1) $2a(a+2h)$; 2) $\frac{1}{2}a(a\sqrt{3}+6h)$; 3) $3a(a\sqrt{3}+2h)$, **8.** 3 *дм*, 4 *дм* же 4 *дм*, 3 *дм*.

9. $2a\sqrt{4b^2 - a^2 + 2a^2}$, мында $2b > a$. **10.** $4\sqrt{2}$ *дм*. **11.** $4\sqrt{3}$ $дм^2$.

§ 19

3. $a\sqrt{3}$. **4.** 1) $54°36'$; 2) $70°32'$. **5.** $60°$. **8.** 1) 70 *см*; 2) 1,4 *дм*. **9.** 5,6 *дм* жана 6,64 *дм*.

10. 6,25 *дм*^{2}; $\approx$ 6,13 *дм*^{2}.

§ 20

1. 96 *см*^{2}. **2.** 1) 6 *дм*; 2) $6\sqrt{3}$ *дм*. **3.** 1) 280 *см*^{2}; 2) 122 *дм*^{2};

3) $2(ab + ac + bc)$. **4.** $3\sqrt{2}$ *дм*; $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ *дм*; $6\sqrt{2}$ *дм*. **5.** 2,88 *дм*^{2}. 6. $c(a + b)\sin\alpha$.

7. 3 *дм*; 6 *дм*; 9 *дм*. **8.** $6a^2 \sin\varphi$.

§ 21

1. 1) 4, 4, 8; 2) 5, 5, 8. **2.** $n + 1$, $n + 1$, $2n$, болбойт. **3.** 1) 2; 2) 5. **4.** Үч бурчтуу.
5. 1) 4; 2) 5; 3) n. **6.** 1) 8; 2) 12; 3) $2n$. **7.** 1) $l\sin\varphi$; 2) $2l\cos\varphi$;

3) $l^2 \sin\varphi\cos\varphi$; 4) $\sqrt{2l}\cos\varphi$. **8.** 1) $a^2\sqrt{3}$ жана $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$; 2) $60°$ **9.** 4. **10.** $\frac{a^2\sqrt{33}}{9}$

11. $\frac{5\sqrt{65}}{3}$ *дм*. **12.** $\sqrt{2}$ *дм*.

§ 22

1. 7 *см* жана 11 *см*. **2.** 20 *см*; $5\sqrt{7}$ *см*. **3.** $0{,}2\sqrt{2}$ *дм*^{2}. **5.** $(a + b)h$.

6. $\left(\frac{a^2 - b^2}{4}\right) tg\,\varphi$.

§ 23

1. 1) 40 *см*^{2}; 2) 16 *см*^{2}. **2.** 84 *дм*^{2}. **3.** $\frac{a}{4}\sqrt{36h^2 + 3a^2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ 2) $a\sqrt{4h^2 + a^2} + a^2$;

3) $\frac{3a}{2}\sqrt{4h^2 + 3a^2} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **4.** 1) 6 *м*; 2) 4 *м*; 3) 5 *м*. **5.** $\frac{b^2\sqrt{15}}{4}$. **6.** $l^2\sqrt{15}$ **7.** 18 *дм*^{2}.

8. $\approx 71°32'$. **9.** $\approx$ 54,9 *м*^{2}. **10.** $ah + a\sqrt{a^2 + h^2}$. **11.** $2a^2\sqrt{3}$.

13. 1) $\approx$ 1,75 *дм*; 2) $3{,}48\sqrt{2}$ *дм*^{2}; 35,84 *дм*^{2}. **14.** 5600 *см*^{2}. **15.** 16 *м*^{2}. **16.** $\frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

17. 0,16 *дм*^{2}.

18. 1) $\frac{\sqrt{3}}{4} = (a^2 + b^2) + (a + b)\sqrt{12h^2 (a - b)^2}$, 2) $a^2 + b^2 + (a + b)\sqrt{4h^2 + (a - b)^2}$;

3) $\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}(a^2 + b^2) + (a + b)\sqrt{4h^2 + 3(a - b)^2}\right)$.

§ 24

1. 6; 8; 12. **2.** 4; 4; 6. **4.** 8; 6; 12. Тең жактуу үч бурчтуктар, алар бири-бирине барабар. **6.** 20; 12; 30. Ар бир граны бири-бирине барабар үч бурчтуктар. **7.** 12; 20; 30. Ар бир граны бири-бирине барабар болгон он эки бурчтук. **8.** 1) 3; 90°; 2) 3; 60°; 3) 4; 60°; 4) 5; 60°; 5) 3; 108°. **9.** 9. **11.** 90°.

§ 25

1. $\sqrt{3}a^2$ **2.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; 2) $2\sqrt{3a}$. **4.** $5\sqrt{3}a^2$ **5.** $\approx 20{,}6a^2$.

III главаны кайталоого берилген маселелердин жооптору

1. $2a\sqrt{3}$. **2.** 3, 4, 5. **5.** Болот. Төрт бурчтуу пирамида. **8.** $\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$. **9.** $\approx 3{,}4$ *дм.*

11. $aH_1 \frac{1}{4}a\sqrt{3a^2 + 12H^2}$. **12.** 1 *дм*; $\frac{\sqrt{7}}{2} \approx 13$ *дм.* **13.** 45°. **15.** а) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$; б) $\sqrt{b}$.

17. $3a(a\sqrt{3} + 2H)$ **18.** $3\sqrt{3}$ **19.** 288 $см^2$ **20.** $\sqrt{S_1S_2S_3} : S_3$; $\sqrt{S_1S_2S_3} : S_2$; $\sqrt{S_1S_2S_3} : S_1$;

21. $\frac{6}{\sqrt[4]{3}} \approx 4{,}6$ *см.* **22.** $1{,}5l^2 \sin 2\alpha$. **23.** 8 $см^2$. **24.** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ же 70°32′. **25.** ≈ 176 $см^2$

26. $\frac{ab}{a+b}$. **27.** $2a^2\sqrt{3}$. **28.** 81 $м^2$.

IV глава

§ 26

3. Тегерек. **4.** Шакек түрүндөгү фигура. **5.** а) айлана; б) цилиндрлик бет; в) чокусу *l* де жаткан эки конустук бет; **6.** Эки конус.

§ 27

1. 1) Тик бурчтук; 2) тегерек; 3) тик бурчтук. **2.** 1) Болот; 2) болот; 3) болот, чексиз көп. **3.** 320 $см^2$. **4.** 6 *м.* **5.** 5 *дм.* **6.** $5\sqrt{3}$ *см.*

7. 1) $r \cdot h$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}r$. **8.** 6 $дм^2$. **9.** 6,87 $дм^2$. **10.** $\sqrt{R^2 - \left(\frac{S}{2H}\right)^2}$.

§ 28

1. π. 2. πa^2. **3.** πa^2. **4.** $2\pi a(a+b)$. **5.** 1) $2\pi R\sqrt{d^2 - 4R^2}$; 2) $2\pi R\sqrt{d^2 - 4R^2} + 2\pi R^2$.

6. 1) $\pi\frac{d^2\cos^2\varphi}{4}$; 2) $2d^2 \sin\varphi \cos\varphi$. **7.** $2\sqrt{\frac{5}{\pi}}$ *дм*; $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{\pi}}$ *дм*; **8.** $\frac{1}{2}\pi d^2\left(1 + \frac{1}{tg\frac{\alpha}{2}}\right)$.

9. πS **10.** $\pi Q + 2S$.

§ 29

1. 1) Тең капталдуу үч бурчтук; 2) тегерек; 3) тең капталдуу үч бурчтук.
2. 1) Болбойт; 2) болот; 3) болот, чексиз көп. **3.** 1) 1 *дм*; 2) 0,48 $дм^2$.
4. 1) $\sqrt{117}$ *м*; 2) 6 *м*. **5.** 1) 6 *см*; 2) 12 *см*. **6.** 1) $l \sin\varphi$; 2) $2l\cos\varphi$; 3) $\pi l^2\cos^2\varphi$;
4) $l^2\sin\varphi\cos\varphi$. **7.** 1) $12\sqrt{3}$ *дм*; 2) $12\sqrt{3}$ *дм*; **8.** $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. **9.** 1) $2a$; 2) $\sqrt{a^2+b^2}$.
3) πa^2; 4) ab. **10.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 2) $\frac{R\sqrt{4h^2+3R^2}}{4}$. **11.** $\sqrt{\frac{S}{\pi}\left(l^2-\frac{S}{\pi}\right)}$.

§ 30

1. 1) Тең капталдуу трапеция; 2) тегерек; 3) тең капталдуу трапеция.
2. 1) Болбойт; 2) болот; 3) болот; чексиз көп. **3.** 1) 5 *см*; 2) 26 $см^2$;
3) $\sqrt{185}$ *см* $\approx$ 13,6 *см*. **4.** 1) 2 *м*; 2) $\sqrt{85}$ *см*. **5.** 1) 8 *дм*; 2) 10 *дм*; 3) 90π *дм*.
6. 1) $l\sin\varphi$; 2) $b + l\cos\varphi$. **7.** 1) $\frac{a+b}{2}\cdot h$; 2) $\frac{\sqrt{4h^2-(a-b)^2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{4h^2+(a+b)^2}}{2}$;
8. $R^2 - r^2$ (мында $R > r$). **9.** $\pi\left(\frac{Rd}{H}\right)^2$.

§ 31.

1. 1) 60π $м^2$; 2) 96π $м^2$. **2.** 144 $дм^2$. **3.** 1) $\pi b\left(b+\sqrt{a^2+b^2}\right)$; $\pi b\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)$.
4. $\frac{3\pi l^2}{4}$. **5.** 60°. **7.** $\pi\left((a+b)\sqrt{n^2+(a-b)^2}+a^2+b^2\right)$. **8.** 1) 140π $дм^2 \approx 440$ $дм^2$;
2) $25b\pi$ $дм^2 \approx 804$ $дм^2$. **9.** $\pi h^2(2{,}5+2\sqrt{2})$. **10.** 572π $дм^2$. **11.** $\pi d^2\sin\varphi$. **12.** $Q : \cos\varphi$.

§ 32.

2. 1) чексиз көп; 2) чексиз көп. **3.** Кесилишпейт. **4.** 1) 25π $дм^2$; 2) 10π *дм*.
5. 36 $м^2 \approx 113$ $м^2$. **6.** 1) $\approx$ 40 192 *км*; 2) $\approx$ 128 614 400 $км^2$. **7.** 1) $\approx$ 10 927,2 *км*;
2) $\approx$ 9 506 664 $км^2$. **8.** 3:4. **9.** 6 *дм*. **11.** $\pi R^2\cos^2\varphi$. **12.** 36 *дм*. **13.** 9 *дм*.
14. 1) Кесилишпейт; 2) жанышат; 3) кесилишет. **15.** 1) $\pi R\sin\frac{\varphi}{2}$; 2) $2R\sin^2\frac{\varphi}{4}$.

§ 33.

1. 78,5 $дм^2$. **2.** 8 *см*. **3.** 16 $м^2$. **5.** 16 эсе чоңоёт. **6.** 4 $м^2$. **7.** 1) 3 эсе чоңоет;
2) 4 эсе кичиреет. **8.** 1) $\pi R^2(2-\sqrt{3})$; 2) πR^2. **9.** 4π $дм^2$ же 11π $дм^2$. **10.** $\pi R^2\frac{(5-2\sqrt{2})}{2}$
11. $7\pi h^2$.

§ 34.

2. 240 $см^2$. **3.** 24,76 $дм^2$. **4.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **5.** 1 $дм^2$. **6.** 1) $4R^2$ жана $2\sqrt{3}R^2$; 2) $12R^2$;

3) $3R^2\sqrt{3}$. **8.** $\sqrt{l^2 - R^2}$. **9.** $Q : \pi r$ **10.** $h^2 tg\varphi$. **12.** $\frac{3a}{2}$ **14.** 1) 28 *дм*; 2) 9847 *дм*^{2}.

15. 8 *см*. **16.** $l : 2sin\ \varphi$. **17.** $(a\sqrt{c}) : 4$. **18.** 1,3 *дм*. **19.** 1) 20 *см*; 2) 12 *см*; 3) 4 *см*.

20. 1) $\frac{l^2}{2h}$; 2) $\pi\frac{l^4}{2h}$. **21.** $h\sqrt{2Rh - h^2}$ жана $2R > h$.. **22.** $\frac{\pi l^2}{cos^2\varphi}$ **23.** $\pi(4r^2 + h^2)$.

25. 1) $12\sqrt{3}r^2$; 2) $18\sqrt{3}r^2$. **26.** 1) $16r^2$; 2) $24r^2$. **27.** 2. **28.** $\frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$. **29.** 1) 0,4 *дм*^{2};

2) π дм^2. **30.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **32.** $\frac{a^2 tg\varphi}{12}$. **33.** $2\pi l^2 cos^2\frac{\varphi}{2} cos\ \varphi$. **35.** πa^2. **37.** $(4\pi h^2) : 9$.

38. $2r\sqrt{3}$. **39.** Бийиктиги негизинин апофемасынан эки эсе чоң болгондо.

40. 0,6 *см*. **41.** $\pi l^2 cos^2\varphi\ tg^2\frac{\varphi}{2}$. **42.** Негиздеринин радиустарынын суммасы түзүүчүсүнө барабар болгондо. **43.** $\frac{4r^2}{sin\alpha}$. **44.** Барабар.

IV главаны кайталоого берилген маселелердин жооптору

1. $40\sqrt{3}$ *см*^{2}. **2.** 3 *дм*. **3.** $\frac{r}{4}\sqrt{4h^2 + 3r^2}$. **4.** $\frac{1}{4}\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$. **5.** 8 *дм*. **7.** 8,5 *м*.

8. $\frac{\sqrt{3}}{3}H$; $\frac{\sqrt{8}}{3}H$. **9.** $\frac{2Rr}{R+r}$. **10.** ≈ 100. **12.** $\frac{\pi}{6}$. **13.** 16π *дм*^{2}; 32π *дм*^{2}. **14.** 1,5 *м*.

V Глава

§ 35

1. 1) 30 *см*^{3}; 2) 24 *см*^{3}. **2.** ≈ 21 *м*^{3}. **3.** 6 *дм*^{3}. **5.** 27 эсе чоңоет. **6.** 8 эсе кичиреет.

7. Барабар. **8.** $\sqrt{14}$. **9.** 12 *см*.

§ 36

1. 8 *дм*^{3}. **2.** 54 *см*^{2}. **3.** $d^3{:}(3\sqrt{3})$. **4.** $\sqrt[6]{27V^3}$. **5.** 8 *см*. **6.** 1) 240 *см*^{3}; 2) 18 *м*^{3}.

7. $ab\sqrt{a^2 + b^2}\ tg\varphi$. **9.** 15 *дм*^{3}. **10.** 48 *см*^{3}. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$ **12.** $l\ sin\ \varphi$. **13.** $\frac{\sqrt{a^3}}{2}$. **14.** $4r^2a$.

§ 37

1. 1) $\frac{a^2h\sqrt{3}}{4}$; 2) a^2h; 3) $\frac{3}{2}a^2h\sqrt{3}$. **2.** а) 1) $6\sqrt{3}$ *см*^{3}; 2) 24 *см*^{3}. 3) $36\sqrt{3}$ *см*^{3};

б) 0,144 *м*^{3}; 2) $0{,}192\sqrt{3}$ *м*^{3}; 3) 0,864 *м*^{3}. **3.** 3000 *дм*^{3} = 3 *м*^{3}. **4.** 39 *см*^{3}.

5. $\frac{1}{5}Q\sqrt{2S \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha}$. **6.** 100 *м*^{2}. **7.** ≈ 15 *м*^{3} **8.** 0,24 *дм*^{3}. **9.** $\frac{5}{4}a^3 tg54°$.

§ 38

1. 4,71 *дм*^{3}. **2.** 56,52 *дм*^{3}. **3.** $\frac{\pi}{4}a^3$. **4.** $\frac{\pi}{4}d^3 \sin\varphi \cos^2\varphi$. **5.** $\frac{a^3}{4\pi}$. **6.** $\frac{3}{4}\pi a^3$.

7. $2\sqrt{2}$ **8.** $\frac{4\pi V\sqrt{3}}{9}$.

§ 39.

1. 120 *см*^{3}. **3.** 1) $\frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$ 2) $\frac{1}{3}a^2h$; 3) $\frac{a^2h\sqrt{3}}{2}$. **4.** а) 1) $16\sqrt{3}$ *см*^{3} ; 2) 64 *см*^{3};

3) $96\sqrt{3}$ *см*^{3}: б) 1) $0.648\sqrt{3}$ *м*^{3}; 2) 2,592 *м*^{3}. **5.** 1) $\frac{a^2}{11}\sqrt{3b^2-a^2}$, $(a < b\sqrt{3})$;

2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$, $(a < b\sqrt{2})$. 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$, $(a < b)$. **6.** а) 1) $\frac{3}{4}\sqrt{39}$ *см*^{3};

2) $\frac{3}{2}\sqrt{46}$ *см*^{3} 3) $4{,}5\sqrt{21}$ *см*^{3}; б) 1) $\frac{2}{3}\sqrt{11}$ *м*^{3}; 2) $\frac{4}{3}\sqrt{11}$ *м*^{3}; 3) 12 *м*^{3}. **7.** $\frac{4}{3} \cdot \frac{h^3}{tg^2\varphi}$.

8*. $\dfrac{a^3\sqrt{1 - tg^2\dfrac{\varphi}{2}}}{6tg\dfrac{\varphi}{2}}$. **9.** 320 *дм*^{3}. **10.** $\sqrt{11}$ *см*^{3} **11.** $\frac{abc}{l}$. **12.** $\frac{1}{6}a^3 \sin^2\alpha\, tg\varphi$.

§ 40.

1. $\frac{tg\varphi}{12}(a^3 - b^3)$, $(a > b)$. **2.** $\frac{tg\varphi}{6}(a^3 - b^3)$, $(a > b)$. **3.** $\frac{21}{16}l^3$. **4***. 72 *см*^{3}. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

6. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. **7.** $h : \sqrt[3]{2}$. **8.** 1 : 7

§ 41.

1. 48π *см*^{3}. **2.** $14{,}7\pi$ *дм*^{3}. **3.** 128π *м*^{3}. **4.** ≈ 10 т. **5.** $24\sqrt{3}$ *дм*^{3}. **6.** ≈ 0,392 *дм*^{3}.

8. $\frac{1}{3}\pi a^3 \sin\beta\, tg\beta$. **9.** $0{,}182\pi$ *м*^{3}. **10.** $\frac{\pi}{3}(R^3 - r^3)$.

11. $\frac{\pi}{3}R^3 \sin^3\alpha \cdot \dfrac{1}{tg\dfrac{\alpha}{2}}$. **12***. $\sqrt{2}\pi a^3$. **13.** $(R^3 - r^3) : R^3$. **14.** $(c^2 : 24\pi^2)\sqrt{4\pi^2l^2 - c^2}$.

15*. $2\pi a^3 \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$. **16.** $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{S(Q^2 - S^2)}{\pi}}$ **17***. 1) $\frac{H}{2}(2 - \sqrt[3]{4})$; 2) $\frac{R}{2}\sqrt[3]{4}$.

§ 42.

1. ≈ 904 *см*^{3}. **2.** 10 *дм*. **4.** 64 эсе чоңоет. **5.** 27 эсе чоңоёт. **6.** ≈ 64 эсе.

7. 1) $\frac{\pi}{6}a^3$; 2) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}a^3$. **8.** 8 шарик. **9.** 36 куб, бирдик. **10.** $166{,}7\pi$ *дм*^{3}.

11. $\frac{\pi}{54}a^3\sqrt{3}tg^2\frac{\alpha}{2}$. **12.** $\frac{v}{4}\cdot\frac{tg\alpha}{tg^3\frac{\alpha}{2}}$. **13.** 1) $\frac{4}{3}\pi l^3\ cos^3\ \alpha\ tg^3\frac{\alpha}{2}$; 2) $\frac{\pi l^3}{65sin^3\alpha}$

15. 1) $\frac{2}{3}\pi R^3$; 2) $\frac{1}{3}\pi R^3$; 3) $\frac{1}{6}\pi R^3$. **16.** $\frac{tg\varphi}{4tg^3\frac{\varphi}{2}}$. **17.** 9π *дм*^{3}. **18.** $13\frac{1}{3}\pi$ *см*^{3} жана

72π *см*^{3}. **19.** 5:32. **20.** $\approx 1259\pi$ *дм*^{3} . 21. $\frac{1}{3}\pi r^3$. **22.** 2,26 *м*^{3}. **23.** $\frac{2}{3}\pi r^3\left(1-cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

V Главаны кайталоого берилген маселелердин жооптору

1. 15 *дм*^{3}. **2.** 1) Болот; 2) Болбой калышы мүмкүн. **3.** $\frac{3}{8}a^3$. **4.** 1:5.
5. $h : \sqrt[3]{5}$; (h – пирамиданын бийиктиги). **6.** $\frac{\pi}{4}a^3$. **8.** 1:4. **9.** 1,8 *м*^{3}; 9,4 *м*^{2}.

10. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{S(M^2-S^2)}{\pi}}$. **11.** 182π *дм*^{3}. **12.** $\sqrt[3]{2}$ эсе.

Стереометрия боюнча татаалыраак маселелердин жооптору

1. Үч, төрт, алты бурчтук. **5.** 0,5. **6.** 1:2 жана $1:2\sqrt{2}$. **7.** 2. **8.** $\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$.

13. $cos\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **14.** $2ah\sqrt{3}$. **15.** $3\sqrt{3}a^2 : 4$. **17.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}S$. **18.** $\frac{4\pi a^3b^3}{3(a+b)^3}$.

19. $\frac{a^3\,tg\,\beta}{12\,cos\,\beta}\cdot\sqrt{4\,sin^2\beta-1}$. **20.** $\frac{ab}{12}\sqrt{a^2+ab+b^2}\ tg\alpha$. **21.** $\frac{1}{6}a^3\sqrt{\sqrt{5}+1}$. **22.** $\frac{\pi Q}{tg\frac{\alpha}{2}}$.

24. $a^2 : 4$. **25.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **26.** $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r=\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Мында R, r – октаэдрге тиешелүү түрдө сырттан жана ичтен сызылган шардын радиустары. **27.** $\frac{bh}{b+h}$.

28. $\frac{2b^2\sqrt{11}}{49}$ **30.** 512π *см*^{2}. **31.** $\sqrt{S_1^{\ 2}+S_2^{\ 2}+S_3^{\ 2}}$. **32.** $\frac{R}{4}(\sqrt{21}-3)$.

Көрсөтмө. Шарлардын борборлорун жарым сферанын негизине проекциялап, алынган туура үч бурчтуктун жагын шарлардын радиустары менен байланыштыруу керек. Жарым сферанын борбору ал үч бурчтуктун борборунда жатат.

33. $\frac{\pi l^3}{6sin^3\alpha}$. **34.** 45π; 243π. **35.** $\approx 0{,}028$. **36.** 2904π *см*^{3}. **37.** $112{,}5\pi$ *см*^{3}.

38. $\frac{1}{3}\pi r^3(2-\sqrt{3})$.

МАЗМУНУ

10 - К Л А СС

I Глава. Мейкиндиктеги түз сызыктар жана тегиздиктер

II Глава. Мейкиндикте фигураларды өзгөртүү

11 - КЛАСС

III Глава. Көп грандыктар, алардын беттеринин аянттары

IV Глава. Айлануу телолору, алардын беттеринин аянттары

V Глава. Көп грандыктардын жана айлануу телолорунун көлөмдөрү

ТИРКЕМЕЛЕР

Окуу басылмасы

Бекбоев Исак Бекбоевич, Бөрүбаев Алтай Асылканович, Айылчиев Асанбек Айылчиевич

ГЕОМЕТРИЯ

Орто мектептин 10–11-класстары үчүн окуу китеби

Экинчи басылышы

Редактору *А. А. Абдиев*
Корректору *А. А. Узакова*
Техн. редактору *Ю. В. Балингер*
Көркөм редактору *Ю. А. Ким*
Компьютердик калыпка салуучу *А. Д. Даньшин*

Басууга 26.12.2009-ж. кол коюлду.
Кагаз форматы 60х90/16. Көлөмү 12,0 б.т.
Заказ № К 0906016 Нускасы 97780
«Aditi» басма борбору
720020 Бишкек ш., Огонбаев көчөсү, 222

«Continent Print» ЖЧКсында басылды.
720054 Бишкек ш., Интергельпо көчөсү, 1
тел.: (0312) 65 55 56
e-mail: postmaster@continent.kg