

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

Кибернетика вə техника



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Кибернетика и техника

1

1974

„ЕЛМ“ НƏШРИЈЈАТЫ—ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭЛМ“
БАКЫ — БАКУ



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: А. И. Гусейнов (редактор), Ю. А. Сеидов, (зам. редактора), Г. Б. Абдуллаев, М. И. Алиев, Дж. Э. Аллахвердиев, Ю. А. Амензаде, Н. А. Гулиев, Ч. М. Джуварлы, Р. А. Еганов (ответств. секретарь) Г. Ф. Султанов.

А. И. ГУСЕЙНОВ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР И ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ В АЗЕРБАЙДЖАНЕ

Академии наук СССР исполняется 250 лет. Сегодня это крупнейший центр фундаментальных исследований в области естественных и общественных наук. Ее правомерно называют штабом советской науки.

Одним из передовых подразделений АН СССР является Академия наук Азербайджанской ССР. Руководствуясь историческими решениями XXIV съезда КПСС, азербайджанские ученые внесли весомый вклад в развитие науки. Большую работу по сближению науки с производством и внедрению научных результатов в различных областях народного хозяйства проделали наши физики, математики, механики, кибернетики, энергетики.

Все основные достижения наших ученых связаны с повседневной помощью АН СССР. До Великой Октябрьской революции в Азербайджане не было ни одного вуза, а сегодня республика располагает целой армией физиков, математиков, астрофизиков и кибернетиков, труды которых признаны не только в нашей стране, но и за рубежом. И в этом деле большая заслуга принадлежит передовым ученым Москвы, Ленинграда и других крупных городов нашей Родины.

Сейчас развитие физики в республике идет в нескольких направлениях: физика полупроводников, физика твердого тела, ядерная физика, молекулярная физика, первое из которых получило наиболее широкий размах.

В Азербайджане исследования в области физики были начаты после установления Советской власти, при самом активном участии лучших представителей русской науки: Е. Б. Лопухина, С. Н. Усатого, В. И. Тихомирова, А. Г. Алфимова и др. Приятно отметить, что в Баку начал свою научно-педагогическую деятельность выдающийся ученый акад. И. В. Курчатова (1926 г.).

Неоценимую помощь в становлении и развитии физической науки в Азербайджане оказали институты АН СССР, из которых прежде всего следует назвать ФТИ им. А. Ф. Иоффе (Ленинград), ФИАН им.

© Издательство „Элм“, 1974 г.



Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“.

П. Н. Лебедева (Москва), Институт физики металлов АН СССР (Свердловск) и др. Большую помощь в координации научных исследований, постановке многих проблем современной физики оказывают выдающиеся ученые нашей страны: А. М. Прохоров, Н. Г. Басов, В. М. Тучкевич, Б. М. Вул, С. В. Вонсовский, Х. И. Амирханов, Л. В. Келдыш, Д. Н. Наследов, А. Р. Регель, Л. С. Стильбанс и др.

Исследованиями в различных областях физики занимаются также ученые многих вузов республики.

Значительны достижения азербайджанских физиков в области исследования полупроводников и полупроводниковых приборов. Работа в этом направлении была начата еще в 1937 году. До 1950 года были проведены исследования по теплопроводности закиси меди, явлениям теплового выпрямления, анодного скачка потенциала в полупроводнике на границе контакта с металлом (Х. И. Амирханов, Г. Б. Абдуллаев).

Особенно бурно эта область физики стала развиваться после 1950 года. Работы по изучению физических процессов, происходящих в селеновых выпрямителях, выполненные Г. Б. Абдуллаевым в ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР и Институте физики АН Азербайджанской ССР, послужили началом комплексного исследования селена. Изучение физических свойств селена и приборов на его основе позволило выявить многие вопросы, имеющие научное и прикладное значение. Были выявлены уникальные особенности этого полупроводника и широкие возможности применения его не только в электронике, но и в биологии, медицине, химии и т. д. С 1957 года Институт физики АН Азербайджанской ССР является ведущим в Советском Союзе по изучению селена и приборов на его основе.

Значительны также успехи в получении новых сложных полупроводников. Созданы двойные, тройные и более сложные полупроводниковые материалы, представляющие интерес для новой техники. Получены кристаллы селенида галлия, на котором совместно с ФИАН СССР было обнаружено индуцированное излучение. Кристаллы типа $A^{III}B^{IV}$ оказались перспективными в области квантовой электроники, нелинейной оптики, элементов памяти и т. д.

Получены также монокристаллы теллура, германия, кремния и их твердых растворов. Особенно перспективными оказались тройные полупроводниковые соединения. На основе сложных полупроводников были созданы переключающие диоды с электрической памятью, электрофотографические слои, дозиметры жестких излучений, тензорезисторы, гальваномагнитные приборы и др.

В течение ряда лет физиками республики проводятся комплексные исследования по созданию полупроводниковых материалов для термоэлектрических преобразователей. Установлено, что галенит азербайджанского месторождения представляет интерес как термоэлектрический материал. Синтезировано много различных эффективных термоэлектрических полупроводников, на основе которых созданы термоэлектродгенераторы, термоэлектрические холодильники, используемые в различных аппаратах для биологических и медицинских исследований.

Применение комплекса резонансных методов (ЭПР, ЯГР, ЯМР и др.) при изучении полупроводников привело к открытию их новых свойств.

Перспективы развития физики полупроводников в дальнейшем будут связаны с комплексным исследованием процессов создания новых полупроводниковых материалов с оптимальными физическими параметрами, в том числе магнитных, стеклообразных, аморфных, органических, нужных новой технике. В соответствии с развитием в республике полупроводниковой электроники и микроэлектроники исследования в

этом направлении будут охватывать вопросы создания новых технологических циклов.

В дальнейшем внимание ученых будет направлено на создание новых многофункциональных запоминающих и переключающих приборов, высокоэффективных преобразователей лучистой энергии и энергии ядерных частиц в электрическую, создание новых тензометрических и гальваномагнитных приборов, новых термоэлектрических материалов и устройств для высокоэффективного преобразования тепловой энергии в электрическую и получения глубокого холода.

В 50-е годы в Азербайджанском государственном университете им. С. М. Кирова были начаты работы по теоретической ядерной физике, а в 60-е годы Институт физики АН Азербайджанской ССР приступил к исследованиям в области элементарных частиц. В первые же годы развития в республике ядерной физики были получены интересные результаты по изучению условий устойчивости тяжелых ядер, а также упругого рассеяния фермионов по теории затухания. Был предложен оригинальный метод учета поляризационных состояний фермионов и фотонов.

Немалый вклад внесен азербайджанскими теоретиками в изучение законов сохранения четности, применимости квантовой электродинамики на малых расстояниях, формфакторов элементарных частиц. Существенные результаты были получены в построении на основе модели Редже теории множественного рождения частиц высокой энергии.

В последние годы выполнена серия сложных и важных работ, посвященных релятивистски инвариантному описанию элементарных частиц. Исследованы свойства нуклонных резонансов в электромагнитных и слабых процессах. Азербайджанские теоретики планируют дальнейшее развитие исследований в области квантовой теории поля и элементарных частиц. Будут разрабатываться аксиоматические методы в теории поля, изучаться симметрии и теоретико-групповые методы в физике элементарных частиц, модели в сильных взаимодействиях, структура слабых взаимодействий и т. д.

В течение последнего 20-летия в республике велись фундаментальные исследования молекул и конденсированного состояния вещества методами микроволновой газовой, диэлектрической, ЭПР-, ЯМР-, УФ-спектроскопии.

На разработанных азербайджанскими учеными газовых радиоспектрометрах были исследованы вращательные спектры молекул большого количества одноатомных спиртов, галогенозамещенных этана, этилена, пропилена, этилмеркаптана и их изотопических разновидностей. Впервые экспериментально установлено существование молекул пропилового и этилового спиртов в нескольких транс- и гош-ротамерных формах. Определены структуры и параметры внутренней динамики исследованных молекул. Подробно изучены недавно обнаруженное явление инверсии водорода групп OH и SH, а также особенности проявления этого эффекта в МВ-вращательных спектрах молекул спиртов и этилмеркаптана.

Методом диэлектрической спектроскопии исследованы процессы молекулярной релаксации в моногалобензолах, фталатах, одноатомных алифатических спиртах и карбоновых кислотах в чистом жидком состоянии, концентрированных и разбавленных растворах в твердом состоянии, а также в условиях полимерной матричной изоляции. Доказана чувствительность динамического диэлектрического поведения к микронеоднородности жидких смесей, компоненты которых обладают ближней упорядоченностью.

Разработаны новые методы измерения диэлектрических коэффициентов в широком диапазоне частот. Установлена возможность применения метода диэлектрической спектроскопии в целях контроля за

количеством полярных включений в смесях. Изучено комплексобразование на основе специфического межмолекулярного взаимодействия в жидких смесях по спектрам ЯМР. Эти исследования были начаты с помощью Физического института им. Лебедева АН СССР и проводятся в тесном контакте с ведущими специалистами.

С 1940 года в республике ведутся исследования по эмиссионной и адсорбционной спектроскопии и люминесценции, спектроскопические анализы пород и руд месторождений Азербайджана и люминесцентный анализ нефтей и нефтепродуктов. Для исследования последних применялись также методы комбинационного рассеяния света.

Большой цикл работ посвящен люминесценции щелочно-галогидных кристаллофосфоров и ароматических углеводородов. Разработаны методы квазилинейчатых спектров люминесценции и поглощения сложных стабильных органических молекул и их свободных радикалов. Определены энергии электронного перехода, колебательных частот основного и возбужденных электронных состояний. На основе люминесцирующих свободных радикалов созданы элементы световой памяти.

С целью выяснения природы жидкого состояния была исследована вязкость жидкостей и газообразных сред. Изучены теплопроводности, вязкости, теплоемкости и другие свойства при различных условиях (температура, давление), включая также область критического состояния, создана аппаратура для прецизионного измерения вязкости. Выполнен цикл работ по разработке методики и измерению теплопроводности, температуропроводности и теплоемкости жидкостей.

В дальнейшем в области молекулярной физики будут развиваться методы исследования молекул и конденсированного состояния вещества, изучаться проявления специфических межмолекулярных и внутримолекулярных взаимодействий в строении и свойствах конденсированного состояния вещества и макромолекул (в том числе биологически активных), разрабатываться приборы для определения содержания полярных включений в неполярных газах и жидкостях.

Значительны достижения азербайджанских ученых в решении проблем энергетики. Начало планомерной научной разработки вопросов энергетики и электрификации республики связано с созданием сектора энергетики при АзОЗФАНе и энергетического факультета в АЗИНЕФТЕХИме им. М. Азизбекова, куда были привлечены крупные ученые и специалисты: В. С. Гридин, З. Б. Ельшевич, К. В. Покровский, М. М. Скворцов во главе с акад. АН Азербайджанской ССР И. Г. Есьманом. Благодаря неоценимой помощи русских ученых Г. М. Кржижановского, Винодга, К. А. Круга, М. А. Стыриковича, В. И. Попкова, Л. Р. Неймана, И. В. Костенко, И. И. Новикова энергетика как наука в Азербайджане получила мощное развитие, а АЗНИИЭ им. И. Г. Есьмана, энергетический факультет АЗИНЕФТЕХИМа и ряд лабораторий Института физики АН Азербайджанской ССР физико-технического профиля стали крупными исследовательскими центрами.

В республике возникла целая школа высоковольтников, работы которой пользуются заслуженным авторитетом в Союзе и известны за рубежом. Здесь разрабатывается ряд актуальных вопросов из области электрофизики и техники высоких напряжений, связанных с созданием современных и разработкой будущих мощных электропередач сверх- и ультравысокого напряжения и касающихся природы диэлектрических потерь и электропроводности изоляционных жидкостей, механизма физических процессов при частичных разрядах в изоляции, причин старения твердых диэлектриков, поведения изоляции в условиях интенсивного загрязнения. Разрабатываются вопросы создания теории и методов расчета различных коммутационных перенапряжений и способов борьбы с ними, теории и методы существенного ограничения токов короткого

замыкания, методы математического моделирования волновых процессов в сложных электрических сетях сверхвысокого напряжения. Результаты ряда этих работ внедрены в промышленность, отмечались в числе важнейших достижений советской науки, а последняя работа удостоена премии АН СССР имени П. Н. Яблочкова за 1973 год.

Важное значение для электрофизики и техники высоких напряжений имеют многолетние исследования физики молний, позволившие расширить наши представления об этом явлении и наметить практические меры по борьбе с грозowymi перенапряжениями. Все эти работы проводятся в тесном контакте с ведущими институтами и учеными.

Значительные исследования с применением ЦВМ и моделей проводятся в области эквивалентирования сложных энергосистем. Разработаны инженерные методы расчета устойчивости энергосистем и определения параметров различных типов синхронных машин, а также методика расчета электромагнитных полей и электрических параметров мощных генераторных токопроводов.

В области автоматизированного электропривода ведутся исследования, связанные с разработкой теоретических вопросов регулируемого электропривода переменного и постоянного тока. В последние годы начаты теоретические исследования по анализу динамических режимов сложных систем управления тиристорных электроприводов. Разработаны и внедряются рациональные схемы тиристорного возбуждения синхронных машин и тиристорный ступенчатый регулятор напряжения на электропугружных двигателях.

Важные результаты получены по исследованию электропривода глубиннонасосных установок. Исследуются статические и динамические режимы работ различных систем электроприводов буровых механизмов и установок глубокого бурения. Разработан электробур постоянного тока.

В области теплотехники ученые республики занимаются исследованием процесса теплообмена при изменении агрегатного состояния органических теплоносителей и термодинамических и транспортных свойств индивидуальных веществ и их смесей, в том числе воды и водяного пара при широком изменении параметров. Дан ряд практических рекомендаций для промышленности. Дальнейшие работы в этом направлении имеют существенное значение для решения проблемы опреснения воды.

Выведены новые зависимости термодинамики потоков высоких давлений для паровых и газовых турбин, даны конкретные приложения полученных решений. Тесный контакт ученых-энергетиков Азербайджана и АН СССР, несомненно, является могучим стимулом для развития этой отрасли науки в республике.

Плодотворно работают наши астрономы. Шемахинская астрофизическая обсерватория (ШАО) — довольно молодое научное учреждение, созданное в январе 1960 года. По оснащенности ШАО АН Азербайджанской ССР — одна из лучших в Советском Союзе. Этот центр имеет двухметровый телескоп, созданный специалистами народного предприятия «Карл Цейсс», метровый телескоп системы Шмидта АЗТ-15, 70-см фотоэлектрический телескоп АЗТ-8, горизонтальный солнечный телескоп (диаметр зеркала 44 см) и др.

В подготовке научных кадров большую помощь ШАО АН Азербайджанской ССР оказывают центральные астрономические учреждения (Главная астрономическая обсерватория АН СССР в Пулковке, Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга при МГУ им. М. В. Ломоносова, Институт прикладной математики АН СССР, Крымская астрофизическая обсерватория АН СССР, Бюраканская ас-

трофическая обсерватория АН Армянской ССР и др.) и известные ученые страны.

В становлении обсерватории, подготовке высококвалифицированных научных кадров, постановке и координации научных исследований огромную помощь оказали такие крупные ученые, как А. А. Михайлов, В. А. Амбарцумян, А. Б. Северный, Я. Б. Земдович, В. А. Крат, Э. Р. Мустель, О. А. Мемлик. ШАО ведет научную работу в трех основных направлениях—физика Солнца, физика звезд и тела солнечной системы. Эти исследования были начаты задолго до создания обсерватории (в 1953 году, когда при Институте физики и математики АН Азербайджанской ССР была создана астрономическая экспедиция).

Большая работа ведется здесь по изучению научного наследия Марагинской обсерватории, существовавшей в XIII веке на территории Азербайджана, и ее основателя Мухаммеда Насирэддина Туси, итогом которой явилась монография Г. Д. Мамедбейли «Основатель Марагинской обсерватории Насирэддин Туси», изданная в Баку в 1961 году. В ней показана роль астрономов Марагинской обсерватории в развитии многих вопросов математики, астрономии и физики. Особого внимания заслуживает цикл работ, посвященных солнечным вспышкам. Подробно исследована начальная фаза вспышек в рамках теории сильного газодинамического взрыва. Исследования магнитных звезд посвящены выявлению связи магнитных полей с аномалиями химических элементов. Выполнен ряд работ по структуре белых карликов и нейтронных звезд, изучены условия их устойчивости. Предложены методы обнаружения релятивистских звезд, выявлено количество их в Галактике.

В области небесной механики следует отметить исследования по происхождению астероидов. Ими окончательно была доказана несостоятельность гипотезы Ольберса о происхождении астероидов в результате распада одной большой планеты. Математически обоснована возможность образования астероидов вследствие неоднократных распадов нескольких крупных первичных тел. Нельзя не упомянуть работы по изучению планет солнечной системы, которые имеют большое значение в век космических полетов. Используя возможности двухметрового телескопа, сотрудники обсерватории получили много новых и интересных сведений об атмосфере (температура, давление, химический состав) Венеры, Марса, Юпитера, Сатурна.

Дальнейшие исследования в области физики звезд и туманностей будут направлены на изучение физических процессов в атмосфере звезд, а также на выявление малоизвестных форм существования материи—нейтронных звезд и коллапсаров. Предусматривается расширение исследований микроструктуры и эволюции кольца астероидов, а также развитие математической основы гипотезы о последовательных распадах крупных тел.

Исследования в области математики в настоящее время ведутся в Институте математики и механики АН Азербайджанской ССР, в университете им. С. М. Кирова и других вузах республики.

Математическая наука в Азербайджане еще в средние века была на чрезвычайно высоком уровне. Выдающиеся ученые того времени прочно вошли в историю мировой науки. Большую роль в развитии математической мысли сыграли труды по геометрии и тригонометрии выдающегося азербайджанского математика и астронома XIII века Мухаммеда Насирэддина Туси.

Глубокая исследовательская работа в области математических наук в республике была начата лишь после установления Советской власти. И в этом большая заслуга ученых Академии наук СССР. Огромные усилия в деле подготовки научных кадров для республики, координации научных исследований и уточнения перспективных направ-

лений приложили крупнейшие ученые страны: М. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров, Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Петровский, И. Н. Векуа, С. Л. Соболев, С. Н. Бернштейн, П. С. Александров, М. А. Лаврентьев, А. Н. Тихонов, С. М. Никольский, В. И. Смирнов, А. А. Дородницын, В. В. Степанов, А. О. Гельфонд, Л. А. Люстерник, Я. Б. Лопатинский, Б. В. Гнеденко, Х. А. Рахматулин, В. В. Немыцкий, М. А. Наймарк, О. А. Олейник, М. И. Вишик, Г. Е. Шилов, М. М. Вайнберг, А. Г. Костюченко, Л. М. Глускин и др.

Основными направлениями развития математики в Азербайджане являются функциональный анализ с его различными приложениями, теория дифференциальных уравнений в частных производных и теория функций, а в последние годы и специальные вопросы алгебры и топологии. Полученные в этих направлениях научные результаты снискали математической школе республики заслуженный авторитет. Особенно большие достижения имеются в области функционального анализа и Баку справедливо считается одним из основных центров, успешно развивающих эту важную область современной математики.

Еще в сороковых годах в Азербайджане З. И. Халиловым была создана абстрактная теория линейных сингулярных уравнений, охватывающая классическую теорию таких уравнений, разработанную Гильбертом, Карлеманом, Нётером и другими, получившую значительное развитие в работах советских ученых. Другим важным направлением является теория нелинейных сингулярных интегральных уравнений, которая в сороковых годах впервые стала развиваться в Баку (А. И. Гусейнов). В связи с этим вопросом изучались также различные свойства сингулярных операторов, приближенные решения сингулярных интегральных уравнений.

Сюда же можно отнести и результаты, полученные по изучению регулярных интегральных уравнений: построение аналога теории Фредгольма для интегральных уравнений, ядро которых линейно относительно параметра; разработку теории аналитических операторных уравнений, в частности проблемы ветвления решения, изучение положительных решений нелинейных интегральных и операторных уравнений.

Существенный вклад сделан учеными Азербайджана в области теории линейных операторов. Получен ряд результатов по несамосопряженным операторам в гильбертовом и банаховом пространствах; выделен класс несамосопряженных операторов, близких к нормальным и полиномиально зависящим от параметра, для которых остаются справедливыми фундаментальные результаты М. В. Келдыша о пучках, называемых ныне келдышевскими; установлены теоремы о кратной полноте системы собственных и присоединенных элементов для широкого класса несамосопряженных операторов, рационально зависящих от спектрального параметра.

Решена проблема разложения по решениям задачи квантовой теории рассеяния несамосопряженного многомерного оператора Шредингера. Найден эффект кратной полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиальных пучков операторов при наличии непрерывного спектра. При этом для определения класса операторов получены теоремы о кратном разложении по обобщенным собственным и присоединенным векторам; выделены классы полиномиальных пучков, для которых система собственных и присоединенных элементов, отвечающих некоторой части собственных значений, образует кратко полную систему. Получены важные результаты по факторизации полиномиальных пучков и полукорректным задачам Коши.

Введено понятие числового образа полиномиального пучка, которое успешно применено к установлению теорем о кратной полноте. Интен-

сивные исследования ведутся и по решениям обратных спектральных задач для систем уравнений квантовой механики, в частности полностью решена обратная задача теории рассеяния для одномерных систем Дирака с ненулевой массой, а также обратная задача по данным рассеяния для системы уравнений Штурма—Лиувилля, которые встречаются в многоканальной задаче теории рассеяния с ненулевыми внутренними энергиями.

Интенсивно развивается также теория несамосопряженных дифференциальных и операторно-дифференциальных уравнений (структура спектра, теоремы о разложении и о кратном разложении и др.).

Существенные результаты получены по теории дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах: впервые в мировой литературе исследована устойчивость решений квазилинейных дифференциальных уравнений с неограниченными операторами в банаховом пространстве; исследованы локальная и нелокальная разрешимость задачи Коши для многих важных классов линейных и квазилинейных уравнений, полученные результаты применены к решению смешанных задач для квазилинейных уравнений в частных производных.

Заслуживают внимания работы в области развития и создания новых приближенных методов решения дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах и абстрактных вольтерровых уравнений.

Успешно разрабатывается теория дифференциальных уравнений в частных производных. Здесь следует отметить теорию уравнений с разрывными коэффициентами; разрешимость различных краевых задач в классах слабых и обобщенных решений; теорию так называемых обратных краевых задач, когда по некоторым дополнительным данным восстанавливаются неизвестные коэффициенты уравнения; исследование поведения решений конкретных систем; уравнения с отклоняющимся аргументом и т. д.

Найден обобщенный метод Фурье для решения линейных и нелинейных граничных задач с неразделяющимися переменными, когда главная часть уравнения может иметь как дискретный, так и непрерывный спектр. Разработаны модифицированный вычетный метод контурного интеграла решения граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Исследована разрешимость граничных задач для эллиптических и параболических уравнений с разрывными коэффициентами в классах быстрорастущих функций. Ряд важных результатов получен и по качественной теории дифференциальных уравнений.

Следует отметить также результаты по изучению влияния малого параметра на решение граничных задач, вырождающихся с изменением типа, а также решение краевых задач в тонких областях.

Начиная с сороковых годов, в республике ведутся исследования по теории функций (И. И. Ибрагимов), которые охватывают такие актуальные проблемы, как полнота и базисность систем аналитических функций; экстремальные задачи в классах целых функций; приближение функций полиномами и их обобщениями, в частности целыми функциями и семействами линейных операторов; приближение функций многих переменных различными агрегатами; различные вопросы теории рядов Фурье, Дирихле и Тейлора—Дирихле; дифференциальные свойства функций многих переменных и др.

Установлен общий критерий равномерной сходимости интерполяционного ряда Ньютона для всего класса целых аналитических функций. Получен ряд точных неравенств между различными нормами целых функций, а также даны точные оценки норм линейных операторов, действующих в пространствах целых функций. Исследованы экстремальные задачи в пространствах со взвешенной нормой. Изучена сходимость

и найден порядок сходимости последовательности линейных положительных операторов в точке и в норме различных функциональных пространств. Установлены теоремы вложения для различных весовых классов дифференцируемых функций многих переменных. Исследована полнота общих систем аналитических функций.

Проведены исследования в области неевклидовой геометрии над различными алгебрами, в частности над алгебрами альтернионов и псевдоальтернионов. Получены интересные результаты по булевым алгебрам, в области теории идеалов алгебр с одной тернарной косоассоциативной операцией, в вопросах характеристики различных математических структур посредством алгебр их отображений.

В ближайшие годы намечается продолжить исследования в следующих направлениях: спектральные свойства несамосопряженных операторов и операторных пучков в гильбертовом и банаховом пространствах; прямые и обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов; полугрупповые методы решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах и их приложения к нестационарным граничным задачам теории дифференциальных уравнений; теория операторных и интегральных уравнений. Предполагается развитие топологических функциональных и приближенных методов решения граничных задач для линейных и квазилинейных уравнений в различных функциональных пространствах. Будут разрабатываться вопросы приближения функций действительного и комплексного переменного полиномами и их обобщениями, вопросы полноты, экстремальные свойства целых функций и др. Предполагается также продолжить исследования по алгебре и топологии.

Говоря об успехах ученых Азербайджана в области механики, следует отметить, что до установления Советской власти в республике исследований в этой отрасли практически не проводилось. Начиная с 20-х годов, развитие нефтяной промышленности республики стимулировало разработку основ подземной гидравлики и теории фильтрации. В теоретических и практических исследованиях получен ряд важных результатов в теории фильтрации газоконденсатных и не-newтоновских систем (А. Х. Мирзаджанзаде). Важные результаты получены также в области механики сплошных сред. Решен ряд конкретных задач теории упругости и пластичности, в частности решены различные задачи кручения и изгиба областей с включениями. Проведен ряд важных исследований по вопросам динамического сопротивления твердых тел и полимеров при импульсивных воздействиях.

Руководствуясь директивными решениями, предполагается провести исследования по проблемам, имеющим прикладное значение: изучить напряженное и деформируемое состояние твердых тел, обладающих упругими, упруго-пластическими и упруго-вязко-пластическими свойствами, а также динамическое сопротивление материалов (полимеров, металлов и др.) и их механические характеристики. Получат развитие гидропластические и экспериментальные исследования стационарных и нестационарных движений вязко-пластических жидкостей.

Одной из самых молодых и бурно развивающейся наукой является кибернетика. В 1965 году на базе Вычислительного центра Академии наук Азербайджанской ССР был создан Институт кибернетики. Активное участие в его организации, а также в определении перспективных направлений исследований принимали М. В. Келдыш, В. М. Глушков, А. А. Дородницын, А. Н. Тихонов, А. И. Берг, Н. Н. Моисеев и другие выдающиеся ученые.

Основным направлением деятельности этого института является проведение теоретических исследований по кибернетике, разработка и применение современных математических методов и средств вычисли-

тальной техники для решения актуальных народнохозяйственных задач, создание автоматизированных систем управления в нефтяной, нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности, в экономике и планировании.

За последние годы кибернетики республики достигли существенных результатов. Получены оценки резольвенты вполне непрерывных операторов, зависящих от спектрального параметра в окрестностях точек скопления полюсов резольвенты в терминах наилучшего приближения этих операторов конечномерными операторами в гильбертовом и банаховом пространствах. Эти оценки использованы в доказательстве теоремы о кратной полноте системы собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов, рационально зависящих от спектрального параметра также в гильбертовом и банаховом пространствах. Приведенные результаты даже в случае операторов, полиномиально зависящих от спектрального параметра в гильбертовом пространстве, сильно обобщают известные результаты Келдыша о несамосопряженных операторах.

Для полиномиально и рационально зависящих операторных пучков в гильбертовом пространстве доказаны теоремы о кратной полноте части собственных и присоединенных элементов. Введены различные понятия n -кратной полноты системы в топологических линейных пространствах. Доказаны общие теоремы относительно n -кратно полных систем, сравнены различные понятия n -кратной полноты для таких систем. Доказана n -кратная полнота конкретных систем функций.

Получены довольно интересные общие сведения относительно проекционных операторов приближенного вычисления собственных значений вполне непрерывных операторов, а также наилучших приближений конечномерными операторами. Построено эффективное R -множество в пространстве Бера, что, в свою очередь, привело к обобщению известной теоремы Клини о гиперарифметических множествах на эффективных R -множествах. Установлено соотношение между вычислимостью функции на машинах Тьюринга с оракулами, относительной рекурсивностью и R -операциями Колмогорова. Разработаны приближенные способы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений, к которым приводятся задачи приближенного конформного отображения.

Установлены новые, весьма общие теоремы о вычислимости функционалов, получаемых посредством функции подстановок, и предложен способ нахождения параметров вероятностных распределений. Разработана математическая постановка задачи оптимального размещения оснований и кустования скважин, найден алгоритм решения и применения математической модели, а также алгоритм для построения оптимальной схемы размещения оснований и кустования скважин в Самотлорском месторождении. Разработаны методы и алгоритмы оптимизации режима бурения, определения оптимального профиля наклонно направленных скважин и специализированные вычислительные устройства для контроля проходки скважины по заданному профилю.

Найдены разностно-итерационные алгоритмы решения одномерных и двумерных задач со свободной границей, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными. Показана эффективность метода применительно к одномерным и двумерным задачам нестационарной фильтрации. Для решения задач нестационарной фильтрации двухфазной сжимаемой жидкости с учетом капиллярных и гравитационных сил предлагается разностный метод в подвижных сетках.

Проведены исследования на устойчивость решений дифференциальных уравнений в критических случаях. Получены критерии монотонной устойчивости систем, нейтральных в линейном приближении. Найдено

аналитическое частное решение систем уравнений газодинамики в виде ударной волны и исследована толщина сильной ударной волны. Предложены приближенно-аналитические и численные методы решения нелинейных задач эксплуатации магистрального газопровода. Разработаны алгоритмы и комплекс специализированных цифровых вычислительных устройств на интегральных микросхемах для автоматизации обработки информации и управления работой глубиннонасосных нефтяных скважин.

Завершена разработка принципиальных и монтажных схем электронного командного устройства (ЭКУ) для управления технологическим процессом вулканизации автопокрышек, предназначенного как для работы в АСУ технологическим процессом вулканизации совместно с ЭВМ, так и в автономном режиме. Найден общий метод информационного анализа систем управления, позволяющий, в отличие от уже известных, учитывать динамику преобразования информации в процессе взаимодействия всех звеньев разомкнутых и замкнутых систем.

Спроектирован комплекс аппаратуры для автоматизации обработки физиологической информации и статистического анализа информации, заданной в графическом виде. Построены структурная и экономико-математическая модели комплекса производств завода органических продуктов объединения «Сумгаитхимпром», на основе которых решена задача оптимизации плана комплекса действующих производств.

Исследовано воздействие морских волн на нефтепромысловые сооружения (сваи). По данным реализации входа и выхода исследуемого объекта построена математическая модель динамики объекта в виде стохастической весовой функции. По модели объекта и входному сигналу решена задача прогнозирования выхода.

Разработана экономико-математическая модель оптимального отраслевого планирования народного хозяйства республики, выполнены расчеты на ЭВМ по прогнозированию в народном хозяйстве на перспективу и найден алгоритм выбора календарного плана капитальных вложений на сетевых моделях. На базе действующей промышленной установки разработана математическая модель процесса каталитического крекинга, которая использована в создании автоматизированной системы управления нефтеперерабатывающим заводом.

Составлены математико-экономические модели задач планирования для нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности, которые были использованы при создании автоматизированных систем управления этими производствами. Решены задачи по оптимальному размещению и специализации сельскохозяйственного производства и планового межотраслевого баланса республики; проведены исследования на объектах нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности по выявлению требований к созданию автоматизированных систем управления и системам автоматизации обработки информации; разработаны алгоритмы управления отдельными подкомплексами и специализированные вычислительные устройства для автоматизации обработки информации.

В перспективе институт предполагает проводить исследования по математическим проблемам оптимального управления; по математической статистике и теории вероятностей; по разработке численных методов решения задач оптимизации и управления математической физики; по исследованию и разработке теории, принципов построения и применения новых математических методов и кибернетических средств для автоматизации управления процессами, протекающими в нефтегазоносных пластах, в бурении, добыче и транспортировке нефти и газа; по математическому описанию и оптимизации нефтехимических процессов; по созданию автоматизированных систем планирования, учета и управ-

ления в нефтедобывающей, нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности; по разработке и применению математико-экономических методов и методов теории массового обслуживания для решения актуальных народнохозяйственных задач в экономике и планировании республики; по созданию республиканской автоматизированной системы управления (РАСУ) народным хозяйством республики как составной части общегосударственной системы (ОГАС).

Институт оснащен электронными цифровыми вычислительными машинами (БЭСМ-6, М-220, МИР-2) и необходимыми радиоэлектронными приборами и оборудованием, установка и эксплуатация которых в начальный период были осуществлены при содействии ряда институтов АН СССР.

Институт поддерживает тесные научные связи с ведущими институтами АН СССР (Институт прикладной математики, Институт проблем управления, Институт проблем передачи информации, Вычислительный центр, Математический институт им. В. А. Стеклова, Центральный экономико-математический институт) и союзных республик (Институт кибернетики АН УССР, Институт кибернетики с ВЦ АН Узб. ССР), Сибирским отделением АН СССР, Дальневосточным научным центром и др. Систематически приглашаются ведущие ученые страны для чтения лекций, обсуждения планов научных исследований, проведения консультаций. В последние годы институт посетили М. В. Келдыш, М. Д. Миллионщиков, А. А. Дородницын, А. Н. Тихонов, В. М. Глушков, Б. В. Гнеденко, Н. Н. Моисеев, Л. А. Люстерник, А. А. Ляпунов, Я. З. Цыпкин, В. В. Солодовников, А. М. Молчанов, В. А. Зыков, В. Г. Болтянский, А. С. Дадаев и др.

В небольшой статье трудно охватить даже основные направления развития и достижений физико-технических и математических наук в Азербайджане. Все перечисленные выше достижения ученых республики были бы немыслимы без постоянной и бескорыстной помощи ученых Академии наук СССР и академий наук союзных республик.

Уровень развития науки и культуры Азербайджана — прекрасный пример, свидетельствующий о торжестве ленинской национальной политики партии и правительства, направленной на развитие и процветание всех народов нашей Родины.

A. I. Guseinov

Academy of Sciences of USSR and
physical-technical and mathematical sciences
in Azerbaijan

SUMMARY

The paper considers the development of physical-technical and mathematical sciences in Azerbaijan and the place of Academy of Sciences of USSR and the leading Soviet scientists in this development.

А. И. ГУСЕЙНОВ, Ф. Г. МАКСУДОВ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК В АЗЕРБАЙДЖАНЕ

Многочисленные археологические находки, сохранившиеся исторические памятники и документы доказывают, что зачатки научных знаний по математике и астрономии в Азербайджане возникли в далекие времена.

В 1259 г. великий азербайджанский ученый-астроном, математик, философ, историк, врач и государственный деятель Мухаммед Насирэддин Туси (1201—1274) основал Марагинскую астрономическую обсерваторию, оснащенную совершенными по тем временам астрономическими инструментами и приборами. Созданные в стенах Марагинской обсерватории математические и астрономические труды до сего времени не утратили своего значения.

Большую роль в развитии геометрии сыграл труд Насирэддина Туси „Тохрир Эвклидис“ („Изложение Евклида“). Эта книга была отпечатана в Риме в конце XVI в. на арабском языке, а позже на латинском.

Спустя несколько лет с момента основания Марагинской обсерватории, Насирэддин Туси написал трактат под названием „Китаб Шаккул Гита“ („Трактат о полном четырехстороннике“). Именно благодаря этой его работе плоская и сферическая тригонометрия стала самостоятельной математической дисциплиной. В ней, в частности, впервые дано понятие о сферическом полярном треугольнике. В обсерватории были составлены шестизначные тригонометрические таблицы. Математическими и астрономическими трудами, созданными здесь, пользовались такие ученые, как Коперник, Саккери, Региомонтан, Валлис, Ньютон и многие другие.

Известные азербайджанские ученые Саид Яхья Бакуви (умер в 1464 г.), Бадраддин Эмир Ахмед Ляляви (умер в 1506 г.), Гиясаддин Ширвани, работавшие в Марагинской обсерватории в начале XVI века, а позже Насираллах Хамхани (XVIII в.), кроме трудов по астрономии и математике, писали трактаты по философии, логике, грамматике. Творчество этих ученых пока еще мало изучено и ожидает своих исследователей.

Последующие века не были отмечены сколько-нибудь значительными достижениями азербайджанских ученых в области математики. Марагинская обсерватория постепенно пришла в упадок. И в дальнейшем Азербайджан не смог внести почти никакого вклада в развитие естествознания и математики.

Глубокие научные исследования в области естественных и математических наук в Азербайджане начались лишь после установления

Советской власти. Были созданы вузы и научно-исследовательские учреждения. В настоящее время в области математики, механики и кибернетики работают более 20 докторов и 200 кандидатов наук, в том числе 4 академика и 4 чл.на-корреспондента республиканской Академии наук. Наряду с исследованиями в области теоретической математики, в республике успешно решаются конкретные задачи, касающиеся прикладных наук (подземной механики, сельского хозяйства, экономики).

Основными направлениями математических исследований в нашей республике являются дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ с различными его приложениями и теория функций. К числу наиболее важных достижений прежде всего относятся научные результаты, полученные в области применения функционального анализа в теории дифференциальных и интегральных уравнений и в теории функций, значение их признано как в нашей стране, так и за рубежом. Баку считается одним из основных центров, успешно развивающих функциональный анализ и его применение.

Основы научных успехов этой школы заложены в 40—50-х годах главным образом трудами академиков АН Азербайджанской ССР З. И. Халилова, И. И. Ибрагимова, академика АН УССР Я. Б. Лопатинского, долгие годы работавшего в Азербайджане, а также одного из авторов этой статьи. Большинство математиков республики являются их учениками.

Систематическое исследование интегральных уравнений началось только в конце XIX века. Ранее работы в этой области носили случайный характер. Создание Фредгольмом общей теории линейных интегральных уравнений можно считать одним из выдающихся достижений XX века. Дальнейшее развитие эта теория получила в трудах Гильберта и его учеников.

В настоящее время в теории интегральных уравнений выделяются два важных класса: регулярные интегральные уравнения, в которых интеграл рассматривается в общепринятом смысле, и сингулярные интегральные уравнения, в которых смысл понятия интеграла видоизменен.

Теория линейных сингулярных интегральных уравнений разрабатывалась Гильбертом, Карлеманом, Нётером, а также советскими учеными, преимущественно в Грузии. Значительный вклад в развитие сингулярных интегральных уравнений внесен также азербайджанскими математиками (А. И. Гусейнов, А. А. Бабаев и др.).

Важным направлением исследований является теория нелинейных сингулярных и интегральных уравнений. Впервые этот вопрос начал разрабатывать А. И. Гусейнов (1944 г.). Позже этой проблемой заинтересовались другие ученые нашей страны и за рубежом. Получен ряд интересных результатов. Уже в ранних исследованиях была доказана разрешимость ряда классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Основную трудность представляло построение определенных функциональных пространств, связанных с сингулярным оператором, в которых существенным является варьирование топологии в процессе сходимости последовательных приближений. Наряду с различными вариантами метода последовательных приближений, для построения приближенных решений нелинейных сингулярных интегральных уравнений успешно использовались и другие, в частности метод Ньютона—Канторовича.

В связи с решением задач теории нелинейных сингулярных интегральных уравнений потребовалось изучить различные свойства сингулярных интегральных операторов: построение пространств функций, в которых они действуют; характер действия таких операторов,

вопросы их дифференцируемости и др. Можно сказать, что наиболее полные результаты в этой области получены в Баку (А. А. Бабаев, В. В. Салаев и др.). Впоследствии был сделан ряд важных обобщений на сложные многообразия в работах азербайджанских и польских математиков.

Получение ряда неравенств, связывающих различные нормы функций из гильбертовых классов, позволило сформулировать теоремы существования и единственности решения интегрального нелинейного сингулярного уравнения с ядром Коши, установить характер зависимости решения от параметра, а также устойчивость решения. В последние годы в Баку разработан и обоснован алгоритм численного решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений (А. А. Бабаев) и осуществлена его машинная реализация.

Теория нелинейных и линейных регулярных интегральных уравнений довольно широко представлена в Азербайджане. Укажем хотя бы на аналог теории Фредгольма для интегральных уравнений, ядро которых линейно относительно параметра (З. И. Халилов). Здесь следует отметить также важные результаты по аналитической теории нелинейных регулярных интегральных уравнений и нелинейных регулярных операторных уравнений. Разработана теория аналитических операторных уравнений, достаточно подробно изучена, в частности, проблема ветвления их решений однозначной, многозначной или алгебраической их продолжимости. Разработанную методику удалось также применить к исследованию особых решений интегро-дифференциальных уравнений с определенными нелинейностями (К. Т. Ахмедов, А. Ш. Габибзаде).

Группа математиков исследовала положительные собственные значения и собственные функции для линейных и нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и Урысона, когда ядро линейно зависит от параметра. Получен ряд ценных результатов о положительных решениях для различных классов операторных уравнений (Я. Д. Мамедов).

Во второй половине сороковых годов З. И. Халиловым была выдвинута стройная теория линейных сингулярных операторов в абстрактных пространствах. Удачно определив понятие сингулярного оператора, З. И. Халилов построил теорию операторных уравнений с не вполне непрерывными операторами, к которым, естественно, не была применима известная теория Рисса-Шаудера. Эти результаты в дальнейшем вызвали ряд успешных изысканий как в нашей стране, так и за рубежом. Из последующих исследований, проводимых в Азербайджане, следует отметить цикл работ по сингулярным уравнениям в кольцах с инволюцией (А. Ш. Габибзаде). Основные работы в этой области, сделанные в то время, были обобщены в монографии З. И. Халилова „Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах“ (1949).

Изданный в Баку З. И. Халиловым (1948) учебник „Основы функционального анализа“ явился первой книгой в стране, посвященной этой важнейшей и актуальнейшей области современной математики.

Интерес к проблемам теории дифференциальных уравнений с частными производными, граничащим с функциональным анализом, способствовал появлению в Азербайджане ряда работ, посвященных задаче Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (З. И. Халилов). Возникновение этого направления способствовало в дальнейшем разработке мировой наукой метода сведения нестационарных задач для уравнений с частными производными к задаче Коши для дифференциальных уравнений в соответствующем образом подобранных функциональных пространствах.

Современная релятивистская квантовая теория выдвигает проблему глобального изучения линейных и нелинейных гиперболических уравнений в тех или иных функциональных пространствах. В этой связи большое значение имеют исследования, проводимые учеными Азербайджана в области локальной и глобальной разрешимости нестационарных задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах, в особенности гиперболических (С. Я. Якубов).

Важное значение имеют также результаты наших ученых в области теории устойчивости решений дифференциальных уравнений с неограниченными операторами в нормированных пространствах с выходом в теорию уравнений с частными производными, теории колеблемости и неколеблемости решений уравнений в гильбертовом пространстве (З. И. Халилов, Ю. И. Домшлак). Здесь же следует упомянуть работы по теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений в критических случаях, являющиеся продолжением классических исследований Ляпунова по изучению критических случаев теории устойчивости (З. А. Искендерзаде).

Заслуживают также внимания работы азербайджанских математиков в области развития и создания новых приближенных методов решения как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений в абстрактных пространствах и абстрактных вольтерровых уравнений. Особо надо отметить существенные сдвиги в нелинейном анализе, связанные с широким применением односторонних оценок (Я. Д. Мамедов, Р. А. Шафиев).

Разработан аналог метода Галеркина для решения стационарных и нестационарных уравнений с монотонными операторами в банаховых и линейных топологических пространствах. Результаты применены, в частности, к задаче фильтрации газа (Г. Н. Агаев).

Многочисленные работы математиков Азербайджана посвящены теории граничных задач для уравнений с частными производными.

Проводились исследования разрешимости краевых задач для двумерных полигармонических уравнений с общими линейными граничными условиями (З. И. Халилов). С помощью общего комплексного представления регулярных решений задача сводилась к решению одномерного сингулярного интегрального уравнения. В этих исследованиях важны два фактора: во-первых, удалось разрешить указанную проблему задолго до построения общей теории разрешимости краевых задач, оформление которой завершается лишь в наши дни; во-вторых, рассматривались и такие граничные операторы, у которых порядок больше, чем порядок уравнения. Эта теория применялась при решении общей задачи теории пластин и оболочек. В Азербайджане впервые решена одна из трех основных задач Кирхгофа математической теории пластин, а именно, общая краевая задача изгиба опертой упругой пластинки (З. И. Халилов).

Разработан метод сеток, применяемый при решении краевых задач для уравнений смешанного типа (З. И. Халилов). Решена задача Трикоми для общего линейного уравнения смешанного типа с коэффициентами, являющимися сингулярными на границе раздела (Х. М. Наджафов). Как известно, эти проблемы возникли в процессе изучения истечения жидкости.

Общеизвестно значение метода Фурье в решении смешанных задач для уравнений с частными производными. Азербайджанскими учеными найден метод разложения решения по собственным функциям главной части уравнения, позволяющий охватить задачи с неразделяющимися переменными, которые не поддаются обычному методу Фурье (З. И. Халилов). Этот цикл исследований охватывает также нелинейные задачи (А. И. Гусейнов, К. И. Худавердиев, Г. И. Чандиринов).

Как известно, вычетный метод Коши в отличие от метода Фурье применялся к смешанным задачам, для которых соответствующие спектральные задачи несамосопряжены. Недостаток вычетного метода Коши заключается в том, что он применяется только к уравнениям с постоянными коэффициентами. В связи с этим разработан вычетный метод для уравнений с переменными коэффициентами, вообще говоря, для задач с неразделяющимися переменными (М. Л. Расулов). Здесь следует отметить монографию М. Л. Расулова „Метод контурного интеграла“ (1963). В ней подытожен ряд важных результатов автора и его учеников.

Еще в трудах С. Л. Соболева и Л. Шварца были исследованы задача Коши для дифференциальных уравнений, содержащих операторы свертки, и корректность постановки ее в классе обобщенных функций (Г. Н. Агаев). Рассматривались также смешанные и краевые задачи в классах обобщенных функций, получены результаты по корректной постановке задачи Коши в специальных областях (Г. Н. Агаев, Н. М. Сулейманов). Следует отметить также работы по решению в классах обобщенных функций обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами (Ф. С. Алиев).

Определенные проблемы механики и физики ставят задачи по изучению влияния на решение краевой задачи малого параметра при старших производных. В Азербайджане в этом направлении получено много интересных результатов, из которых особо следует выделить построение асимптотики решения гиперболических уравнений, вырождающихся в гиперболические, эллиптические, а также решения краевых задач в тонких областях. Последнее позволяет математически обосновать упрощения, производимые механиками при изучении деформации тел, имеющих малые толщины (М. Г. Джавадов).

Учеными республики успешно разрабатывается теория уравнений с частными производными по многим ее аспектам. Здесь можно указать теорию уравнений с разрывными коэффициентами, качественную теорию эллиптических и параболических уравнений, разрешимость различных краевых задач в классах слабых и обобщенных решений, теорию так называемых обратных краевых задач, когда по некоторым дополнительным данным восстанавливаются неизвестные коэффициенты уравнения, исследование поведения решений корректных по Петровскому систем для больших значений времени, уравнения с отклоняющимся аргументом и т. д.

В связи с проблемами современной механики сплошных сред и квантовой физики появились новые задачи по спектральной теории самосопряженных и особенно несамосопряженных линейных операторов как общих, так и дифференциальных в отличие от классических задач, исследованных целой плеядой ученых, начиная с Д. Гильберта. В настоящее время в этом направлении успешно работают главным образом советские ученые и ученые США.

Серьезных успехов добились и азербайджанские ученые. Решены новые прямые и обратные спектральные задачи. Решена обратная краевая задача по двум спектрам для уравнения Штурма—Лиувилля, т. е. найден метод восстановления уравнения по двум спектрам, соответствующим двум различным краевым условиям задачи. Доказаны теоремы о разложении по собственным и присоединенным функциям задачи теории рассеяния, соответствующей уравнению Шредингера. Решена обратная краевая задача по двум спектрам для уравнения Штурма—Лиувилля, т. е. найден метод восстановления уравнения по двум спектрам, соответствующим двум различным краевым условиям задачи. Доказаны теоремы о разложении по собственным и присоединенным функциям задачи теории рассеяния,

соответствующей уравнению Шредингера. Решена обратная задача для системы уравнений Дирака (М. Г. Гасымов). Результаты, полученные по упомянутым обратным задачам, имеют принципиальное значение в построении квантовой теории с помощью так называемой матрицы рассеяния, представляющей собой, грубо говоря, отношение падающей и отраженной волн (подход Гейзенберга).

Изучена структура спектра для различных классов одномерных несамосопряженных дифференциальных операторов. Доказана теорема разложения по собственным и присоединенным функциям в случае непрерывного спектра, найдены условия полноты системы собственных и присоединенных функций оператора Шредингера с комплексным потенциалом (Ф. Г. Максудов). Выявлено влияние промежуточных членов уравнения на распределение собственных значений. Изучена асимптотика спектральной функции и асимптотика числа собственных значений самосопряженных дифференциальных операторов высшего порядка с операторными коэффициентами (М. Г. Гасымов, М. Байрамоглу). Установлены условия нормальности оператора, порожденного одномерным дифференциальным выражением и общими граничными условиями.

Кроме различных проблем спектральной теории дифференциальных операторов в конкретных пространствах, большое место в исследованиях азербайджанских математиков занимает изучение спектральных свойств общих операторов в гильбертовом пространстве.

Удалось выделить класс несамосопряженных операторов, близких к нормальным операторам, полиномиально зависящих от спектрального параметра, для которых остаются справедливыми фундаментальные результаты М. В. Келдыша о несамосопряженных операторах, близких к самосопряженным. Введено понятие наилучшего приближения вполне непрерывного оператора конечномерными операторами и установлен ряд важных свойств вполне непрерывных операторов в терминах наилучшего приближения. Используя эти свойства, удалось доказать теоремы о кратной полноте системы собственных и присоединенных элементов для широкого класса несамосопряженных операторов, рационально зависящих от спектрального параметра (Дж. Э. Аллахвердиев). Надо сказать, что аппарат наилучшего приближения вполне непрерывных операторов конечномерными операторами позволил перенести многие из указанных результатов в банаховы пространства.

Обнаружен эффект расщепления многократно полных систем собственных и присоединенных элементов на однократные, почти полные или полные системы собственных и присоединенных элементов (Дж. Э. Аллахвердиев, М. Г. Джавадов). В дальнейшем эти результаты нашли применение при рассмотрении вопросов устойчивости плоского течения вязкой жидкости, а также единственности решения некорректно поставленных задач и устойчивости некоторых численных методов.

Следует отметить также появившиеся в последнее время работы по спектральной теории квадратичных и полиномиальных пучков, не являющихся пучками М. В. Келдыша. Эти работы имеют важное значение и для теории смешанных задач (М. Г. Гасымов).

Недавно были проведены исследования, позволяющие ввести для операторов с непрерывным спектром понятие, являющееся аналогом введенного М. В. Келдышем для операторов с дискретным спектром свойства кратной полноты собственных и присоединенных функций (М. Г. Гасымов, Ф. Г. Максудов).

Большая группа ученых Азербайджана, занятая исследованиями в области теории функций. Эти исследования в основном посвящены изучению теории приближения функций посредством многочленов и целых функций, экстремальных задач в классах многочленов и целых функций, теории интерполяции, теорем вложения классов дифференцируемых функций многих переменных. В этих областях также есть некоторые достижения. Установлен общий критерий равномерной сходимости интерполяционного ряда Ньютона для всего класса целых аналитических функций. Эти условия близки к условиям единственности целой функции по ее значениям в узлах интерполяции. Получены интересные результаты по изучению приближения функций с обобщениями (И. И. Ибрагимов).

Установлен ряд точных неравенств между различными нормами целой функции многих переменных конечной степени по каждому переменному, а также даны точные оценки нормы конкретных дифференциальных операторов, действующих над целыми функциями конечной степени (И. И. Ибрагимов, А. С. Джафаров). Получено точное неравенство типа С. М. Никольского между разными нормами конечной степени вдоль прямых, параллельных действительной оси (И. И. Ибрагимов, Д. И. Мамедханов). Для целых функций конечной степени установлены точные неравенства между различными нормами в обобщенном пространстве Лебега, т. е. в пространстве функций, каждая из которых по разным аргументам суммируется в различных степенях (И. И. Ибрагимов, А. С. Джафаров, Р. Г. Мамедов).

Проводились также исследования экстремальных задач в пространствах со взвешенной нормой. Установлены новые неравенства между различными взвешенными нормами целых функций и получен ряд результатов по наилучшему приближению дифференцируемых функций с помощью целых функций конечной степени, а также алгебраических, тригонометрических и гармонических полиномов. Указанные результаты применены к установлению новых прямых и обратных теорем вложения, к исследованию связей между дифференциальными свойствами гармонических функций в специальных областях и дифференциальными свойствами их следов, к определению порядка равномерной сходимости вариационного процесса, состоящего из последовательности алгебраических многочленов, к решению крайних задач для самосопряженного эллиптического уравнения в полупространстве и к вопросам сходимости ортогональных рядов (А. С. Джафаров).

Большой цикл работ посвящен вопросу приближения функций посредством различных линейных операторов как конкретных, так и общих. Найдены асимптотические формулы и порядки приближения функций (Р. Г. Мамедов, А. Д. Гаджиев).

В области теории функций комплексного переменного следует отметить результаты по исследованию полноты определенных конкретных и общих последовательностей. Решена проблема о единственности функций, определенных в круге по ее значениям и значениям ее производных в двух точках (И. И. Ибрагимов).

Многие результаты в области конструктивной теории функций, полученные азербайджанскими математиками, нашли свое отражение в монографиях акад. АН Азербайджанской ССР И. И. Ибрагимова „Экстремальные свойства целых функций конечной степени“ (1962) и „Методы интерполяции функций и некоторые их применения“ (1971).

Кроме указанных выше главных направлений, в республике ведутся исследования в области неевклидовых геометрий, в частности над алгебрами альтернионов и псевдоальтернионов (Б. А. Розенфельд, М. А. Джавадов, Н. Т. Аббасов), а также в области абстрактной алгебры. Получены интересные результаты по теории идеалов алгебр с одной

тернарной косоассоциативной операцией. В таких алгебрах введено понятие регулярности и изучено их строение. Важные результаты получены по характеристике структур в смысле Бурбаки посредством алгебр отображений этих структур (Л. Г. Мустафаев), а также решены некоторые алгебраические проблемы теории графов (Р. Б. Фейзуллаев). Рассмотрены некоторые вопросы классической теории групп и колец и теории матриц.

Важные результаты получены в области математических задач механики сплошных сред. Разработаны точные и приближенные способы решения плоской задачи теории упругости и задачи кручения и изгиба тел с включениями методами теории функций комплексного переменного (Ю. А. Амензаде).

Получены некоторые результаты по математическому изучению упруго-пластических нитей и пластин, находящихся под действием ударных сил (К. А. Керимов, П. А. Рахманов, Д. Г. Агаларов). Решены многочисленные задачи теории движения вязко-пластических жидкостей и фильтрации жидкости применительно к проблемам бурения и разработки нефтяных месторождений. Вообще вопросы математической теории задач подземной гидромеханики давно находятся в поле зрения ученых нашей республики. Это, естественно, объясняется спецификой народного хозяйства Азербайджана, в котором важное место занимает нефтяная промышленность.

Еще в 1954 г. акад. АН Азерб. ССР З. И. Халиловым впервые была решена общая задача фильтрации газированной нефти. Ее специфика, в частности, заключалась в том, что для одной из двух неизвестных функций, входящих в некую нелинейную систему, ставилась смешанная задача, а для другой — задача Коши. Предложенный тогда им же конечно-разностный метод эффективного решения таких задач стал основой многих расчетов и исследований.

Широко изучались математические задачи подземной гидродинамики неустановившихся течений и фильтрации несжимаемой жидкости в однородных и неоднородных пластах с разными мощностями и проницаемостями к скважинам. Эти исследования сыграли определенную роль в проектировании и разработке различных нефтяных и газовых месторождений (А. Х. Мирзаджанзаде, М. Т. Аббасов, Г. П. Гусейнов, К. Н. Джалилов, К. Ф. Ширинов, Ю. А. Бабич и др.).

В последние годы успешно ведутся исследования по математической логике, теории множеств, топологии, теории вероятностей и математической статистике. Внимание ученых Азербайджана все больше привлекают также математические вопросы кибернетики, теории алгоритмов, теория конечных автоматов, математические методы в экономике и планировании, методы математического описания и оптимизации технологических процессов в нефтедобыче, нефтепереработке и нефтехимии.

Опыт, накопленный азербайджанскими учеными по изучению дифференциальных уравнений с неограниченными операторами в банаховых пространствах, позволил исследовать некоторые общие проблемы анализа и синтеза управляющих систем с распределенными параметрами. Например, задача синтеза сведена к математической задаче о восстановлении коэффициентов уравнения с частными производными по заданной функции Грина соответствующей краевой задачи (З. И. Халилов). Ряд важных математических задач теории оптимального управления, в частности теория уравнений с „максимумами“, решен группой ученых во главе с К. Т. Ахмедовым.

Предложено так называемое преобразование Лапласа—Галуа, играющее для последовательностных машин по существу ту же роль,

что обычное дискретное преобразование Лапласа для непрерывных и импульсных систем (Р. Г. Фараджев).

В связи с проблемой машинного поиска логического вывода промоделирован на ЭЦВМ разрешающий алгоритм Тарского в алгебре вещественных полиномов, оказавшийся достаточно эффективным для решения ряда алгебраических задач, утверждение которых содержит один квантор. Составлен разрешающий алгоритм, использующий правила вывода эвристического характера для теории пределов. При помощи этого алгоритма получено машинное доказательство теорем пределов и др. (Н. Джафарова, С. Пшеничникова).

Проведен также ряд исследований по теории логических систем первого порядка, в частности исследована непротиворечивость аксиоматики Куайна теории множеств (М. Р. Бунятов). Даны новые критерии полноты подмножеств в многозначной логике, связанные с существенно меньшим предиктным перебором (Р. А. Байрамов). Ведутся работы в области теории массового обслуживания. Исследована задача обслуживания неординарного потока, состоящего из одинаковых приоборов, решена задача обслуживания при наличии профилактики и восстановления для двух потоков требований, получено обобщение формулы Полячека—Хинчина (Т. И. Насирова, А. А. Шахбазов). Изучаются также некоторые вопросы теории алгоритмов с помощью дескриптивной теории множеств (В. Амстиславский).

Большое научное и практическое значение приобрели исследования по математическому описанию и оптимизации конкретных технологических процессов нефтепереработки и нефтехимии. Построены математические модели и разработаны алгоритмы решения задач по рациональному устройству нефтяных месторождений (задача оптимального размещения замерных установок, построение оптимальной нефтесборной сети и оптимальной трассы эстакады и т. д.). Определены оптимальные профили наклонно направленных скважин с большим отклонением и решена задача оптимизации режима вертикальных скважин. Эти решения реализованы на ЭВМ.

Из всего изложенного видно, какой огромный шаг сделала математическая наука в нашей республике за 50 лет Советской власти. Результаты исследований азербайджанских математиков публикуются во всесоюзных и зарубежных научных изданиях, докладываются на всесоюзных и международных математических симпозиумах, конференциях, конгрессах.

Только лишь в прошедшем 1972 году математики нашей республики выступали с докладами в Болгарии, Польше, Венгрии и Индии. Скачок, который сделала математическая наука в республике, бывшей всего лишь полвека назад отсталой окраиной, был бы невозможен, если бы не постоянная и бескорыстная помощь ведущих ученых и научных учреждений Москвы, Ленинграда, Киева, Тбилиси. Не будем поименно перечислять этих замечательных ученых, которые постоянно готовят для нашей республики высококвалифицированные кадры, так как их очень много, а лишь поблагодарим их еще раз со всей искренностью за огромный труд.

Дружба всех народов нашей страны оказывает благотворное влияние и на научный прогресс. Приятно отметить, что среди высококвалифицированных математиков Дагестана, Туркмении, Узбекистана, Чечено-Ингушетии, Кабардино-Балкарии есть специалисты, прошедшие подготовку в аспирантуре Академии наук Азербайджанской ССР и Азгосуниверситета им. С. М. Кирова.

В дальнейшем математики Азербайджана считают своим гражданским и профессиональным долгом всемерно выполнять указания нашей партии и правительства, сформулированные в Директивах XXIV съезда КПСС, о необходимости обеспечения в новом пятилетии

дальнейшей разработки проблем теоретической и прикладной математики и кибергетики с целью наиболее широкого применения в народном хозяйстве математических методов и электронно-вычислительной техники, автоматизации процессов производства и совершенствования управления.

Прежде всего усилия будут направлены на дальнейшее развитие тех областей математики, которые уже получили в республике существенное развитие: функциональный анализ и его приложения, теория граничных задач для уравнений с частными производными, теория линейных и нелинейных сингулярных интегральных уравнений, конструктивная теория функций. Будет обращено также внимание на обогащение тематики применением новых методов. Прежде всего это касается методов алгебраической топологии применительно к решению проблем глобального нелинейного анализа, а также методов дифференциальной топологии многообразий. Планы развития этих актуальных областей теоретической математики на ближайшие годы тщательно разработаны.

На современном этапе научно-технический прогресс теснейшим образом связан с кибернетикой, созданием и широким применением электронно-вычислительной техники. Можно без преувеличения сказать, что бурное развитие за последние десятилетия отдельных отраслей науки, техники и производства обусловлено разработкой и применением кибернетических методов и средств, в частности ЭЦВМ, которые позволили автоматизировать различные виды умственной деятельности.

Теоретические исследования по кибернетике будут проводиться по следующим направлениям: разработка математических проблем кибергетики и теории оптимального управления; создание критериев оптимальности в системах, описываемых дифференциальными интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями; развитие теории алгоритмов и теории информации; разработка эффективных вычислительных алгоритмов для многомерных многофазных задач подземной гидромеханики и многомерных задач с подвижной границей для исследования и уточнения гидродинамических моделей с целью оптимального управления рассматриваемыми процессами; разработка эффективных средств математического обеспечения и автоматизации программирования; создание автоматизированных программирующих систем для хранения и анализа массовой информации конкретной природы (составление каталогов библиотек и т. д.); разработка и оптимизация вероятностно-статистических моделей сложных систем типа массового обслуживания, надежности и управления запасами; разработка математических моделей и методов решения задач оптимального проектирования, планирования и управления для различных отраслей народного хозяйства, моделей развития народного хозяйства страны и экономических районов; разработка эффективных численных алгоритмов решения задач математического программирования большой размерности и соответствующей системы стандартных программ для ЭЦВМ.

В статье трудно полностью охватить историю и перспективы математических наук в республике. С каждым днем растут темпы развития, в науку приходят молодые талантливые ученые. Все это дает основания надеяться, что Азербайджан достигнет еще больших успехов в области математических наук.

Институт математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступило 6. III 1973

Э. И. Гусейнов, Ф. Г. Магсудов

Азербайджанда ријазиијатин инкишафы

ХУЛАСӘ

Азербайджанын елм вә мәдәнијәтинин зәнкин бир тарихи вардыр. Азербайджанда ријазиијат елми орта әсрләрдә ән јүксәк инкишаф сәвијәсинә галхмышдыр. Лакин сонҗакы әсрләр һеч дә хүсуси наилијәтләрлә фәргләнмир.

Тәбиијат елмләри вә ријазиијат саһәсиндәки елми тәдгигатлар Азербайджанда јалныз Совет һакимијәти гурулдугдан сонра инкишафа башламышдыр. Ријазиијат саһәсиндә ән әһәмијјәтли наилијәтләр сырасында функционал анализин дифференсиал вә интеграл тәнликләрә тәтбиғи вә функцијалар нәзәријәси саһәсиндә алынмыш нәтичәләри хүсуси гәјд етмәк лазымдыр. Бу саһәдә, елми әһәмијјәти өлкәмиздә вә хариҷдә гијмәтләндирилән дәјәрли нәтичәләр әлдә едилмишдир.

A. I. Gusseinov, F. G. Maksudov

Development of mathematics in Azerbaijan

SUMMARY

Azerbaijan has rich history of science and culture going back deep into the centuries.

The mathematical science was on the extremely high level during the Middle Ages in Azerbaijan. The following centuries were not marked by somehow significant achievements.

Thorough research work in the field of natural sciences and mathematics began only after the establishing of the Soviet Regime in Azerbaijan which aroused secret creative power of the people.

To the most important achievements in the field of mathematics first of all we may attach the scientific results obtained in the sphere of applications of functional analysis in the theory of differential and integral equations, and in the theory of functions. In this sphere the essential results has been obtained scientific significance of which is recognized in our country and abroad.

ДК 519. 283:62—505. 3:629. 78

Р. Г. ФАРАДЖЕВ

К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНЫХ МАШИН

Как было показано в работе [1], широкий класс нелинейных последовательностных машин (НПМ) в аналитическом виде описывается при помощи конечнозначного аналога Вольтерровых разложений. В этом случае связь между входной и выходной величинами НПМ выражается следующим образом:

$$y[n] = \sum_{m=1}^{N_0(p-1)} \sum_{n_1=1}^n \cdots \sum_{n_m=1}^n \kappa_m[n_1, \dots, n_m] \cdot x[n - n_1] \cdots x[n - n_m], GF(p), \quad (1)$$

здесь $x[n]$ и $y[n]$ — модулярные функции, характеризующие соответственно входной и выходной сигналы, N_0 — «память» исходной НПМ. Все операции ведутся над конечным полем $GF(p)$.

Как и в случае импульсных систем, ядра $\kappa_m[n_1, \dots, n_m]$ для НПМ удовлетворяют условиям физической реализуемости, т. е. $\kappa_m[n_1, \dots, n_m] = 0$ при $n_i < 0$, $m = 1, 2, \dots, N_0(p-1)$.

Наименьшее n_i при этом есть индекс ядра. Функциональная форма (1) для НПМ, называемая аналогом ряда Вольтерра, в дискретном виде впервые была применена Альпером [2] для решения задач анализа и синтеза нелинейных и импульсных систем. На случай двоичных НПМ такой формы записи работ конечных систем в некотором виде встречаются также в [3].

Для дальнейшего рассмотрения запишем разложение (1) в следующей форме:

$$y[n] = \sum_{m=1}^{N_0(p-1)} y_m[n], GF(p), \quad (2)$$

где

$$y_m[n] = \sum_{n_1=0}^n \cdots \sum_{n_m=0}^n \kappa_m[n_1, \dots, n_m] \cdot x[n - n_1] \cdots x[n - n_m], GF(p). \quad (3)$$

В таком представлении $y_m[n]$ является модулярным функционалом (1) m -ой степени, так как при замене $x[n]$ на $a \cdot x[n]$ ($a \neq 0 \in GF(p)$ — постоянное) значение $y_m[n]$ приводится к виду $a^m \cdot y_m[n]$ ($m < p$).

На рис. 1 НПМ, описываемая при помощи разложений (2)–(3), изображена схематически.

В отличие от задачи анализа НПМ, состоящей в нахождении ядра Вольтерра для заданной НПМ, в задаче синтеза речь идет о построении НПМ с заданными ядрами Вольтерра. В качестве примера на рис. 2 представлена схема, которая в простейшем случае моделирует ядро Вольтерра m -го порядка.

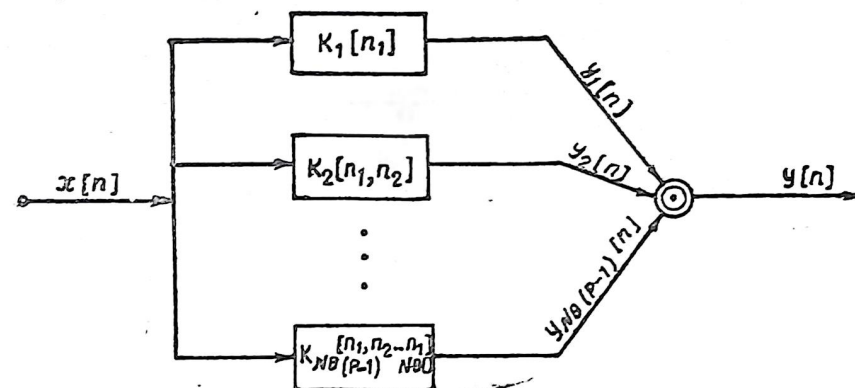


Рис. 1

В этой НПМ входной величине $x[n]$ соответствует выходная величина $y_m[n]$, которая представляет собой модулярное произведение выходов $y_1[n]$, m линейных последовательностных машин (ЛПМ),

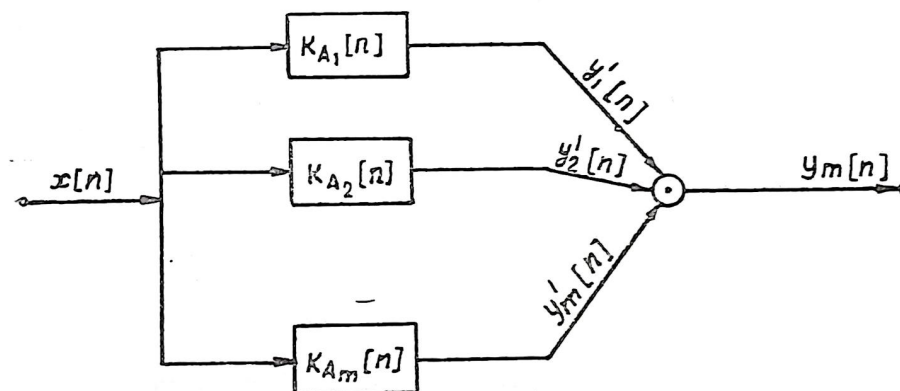


Рис. 2

имеющих импульсные характеристики (ядра 1-го порядка) $\kappa_{A1}[n]$, соответственно. Как видно, в данной схеме нелинейность представлена наличием лишь одного модулярного умножителя. Из этой схемы имеем:

$$y_m[n] = y_1'[n] \cdots y_m'[n] = \left(\sum_{n_1=0}^n \kappa_{A1}[n_1] \cdot x[n - n_1] \right) \cdot \left(\sum_{n_2=0}^n \kappa_{A2}[n_2] \cdot x[n - n_2] \right) \cdots \left(\sum_{n_m=0}^n \kappa_{Am}[n_m] \cdot x[n - n_m] \right) = \sum_{n_1=0}^n \cdots \sum_{n_m=0}^n (\kappa_{A1}[n_1] \cdots \kappa_{Am}[n_m]) \cdot x[n - n_1] \cdots x[n - n_m], GF(p). \quad (4)$$

В этом случае ядра Вольтерра для НПМ представляются в виде модулярного произведения:

$$\kappa_m[n_1, \dots, n_m] = \kappa_{A_1}[n_1] \cdot \dots \cdot \kappa_{A_m}[n_m], GF(p) \dots \quad (5)$$

и становятся таким образом сепарабельными ядрами. В общем случае ядра не являются таковыми и поэтому не могут быть представлены, как на рис. 2.

Рассматриваемая НПМ, как видно, принадлежит к типу, в котором различные ЛПМ соединяются между собой через умножители. Такой класс нелинейных систем в непрерывном случае впервые рассмотрен Шетсеном [4]. Оказывается, применение метода в некоторой степени аналогичного развитому в [4] позволяет определить возможность представления ядра Вольтерра в виде произведения сомножителей, т. е. синтеза НПМ в одном специальном виде.

Хотя указанный метод постепенно иллюстрируется для случая второго, третьего и четвертого ядер, тем не менее он справедлив для синтеза ядра высшего порядка. Следует отметить, что методика вначале излагается для так называемой основной расчетной НПМ, а затем дается для общего случая.

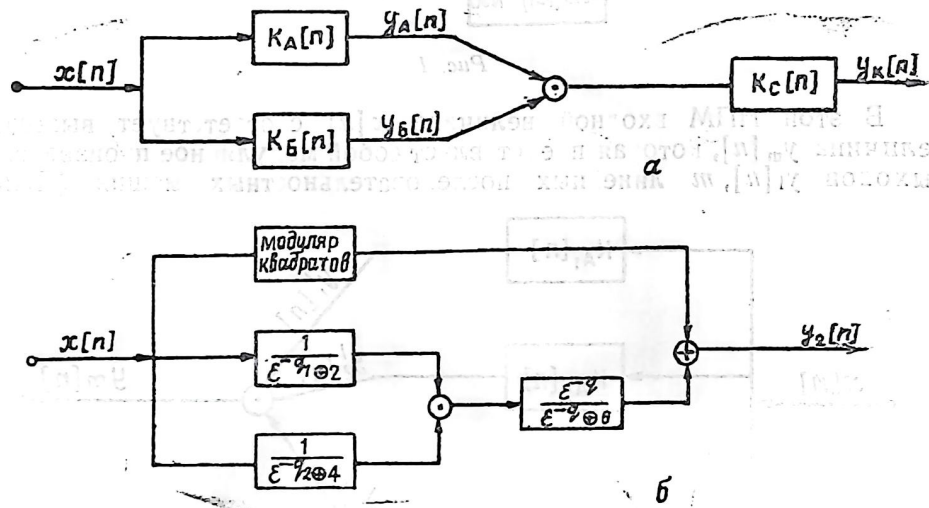


Рис. 3

Итак, допустим, имеем три экземпляра ЛПМ, обозначаемые через A, B, C и имеющие импульсные характеристики $\kappa_A[n], \kappa_B[n], \kappa_C[n]$, соответственно. Пусть эти ЛПМ при помощи операции умножения образуют схему, представленную на рис. 3(а). Тогда, применяя результаты теории ЛПМ [4] из рис. 3(а), имеем:

$$\left. \begin{aligned} y_A[n] &= \sum_{m_1=0}^n \kappa_{A_1}[m_1] \cdot x[n-m_1] \\ y_B[n] &= \sum_{m_2=0}^n \kappa_{B_1}[m_2] \cdot x[n-m_2] \end{aligned} \right\}, GF(p)$$

$$y_2[n] = \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^n \sum_{m_2=0}^n (\kappa_C[m] \cdot \kappa_A[m_1] \cdot \kappa_B[m_2]) \times$$

$$\times x[n-(m+m_1)] \cdot x[n-(m+m_2)], GF(p),$$

или же, принимая $m+m_1=n_1, m+m_2=n_2$, получим

$$y_2[n] = \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^n \kappa_2[n_1, n_2] \cdot x[n-n_1] \cdot x[n-n_2], GF(p) \dots \quad (8)$$

Здесь

$$\kappa_2[n_1, n_2] = \sum_{m=0}^n \kappa_C[m] \cdot \kappa_A[n_1-m] \cdot \kappa_B[n_2-m], GF(p).$$

Теперь, перейдя к изображению в смысле многомерного преобразования Лапласа—Галуа [1, 6], имеем

$$\begin{aligned} K_2^*(q_1, q_2) &= K_A^*(q_1) \cdot K_B^*(q_2) \cdot K_C^*(q_1+q_2) = \\ &= \frac{P_A^*(q_1) \cdot P_B^*(q_2) \cdot P_C^*(q_1+q_2)}{Q_A^*(q_1) \cdot Q_B^*(q_2) \cdot Q_C(q_1+q_2)}, GF(p), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$R^*(q_i) = R(\bar{\epsilon}^{q_i}), F^*(q_1+q_2) = F(\bar{\epsilon}^{q_1} + \bar{\epsilon}^{q_2}).$$

Если же имеется система, содержащая параллельное соединение M таких НПМ второго порядка, то $\kappa_2[n_1, n_2]$ и $K^*(q_1, q_2)$ соответственно примут вид:

$$\begin{aligned} \kappa_2[n_1, n_2] &= \sum_{i=1}^M \sum_{m=0}^n \kappa_{A_i}[n_1-m] \cdot \kappa_{B_i}[n_2-m] \cdot \kappa_{C_i}[m], GF(p); \\ K_2^*(q_1, q_2) &= \sum_{i=1}^M K_{A_i}^*(q_1) \cdot K_{B_i}^*(q_2) \cdot K_{C_i}^*(q_1+q_2) = \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{P_{A_i}^*(q_1) \cdot P_{B_i}^*(q_2) \cdot P_{C_i}^*(q_1+q_2)}{Q_{A_i}^*(q_1) \cdot Q_{B_i}^*(q_2) \cdot Q_{C_i}^*(q_1+q_2)}, GF(p) \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Следовательно, если для синтеза ядра второго порядка используется M модулярных умножителей (разумеется совместно с линейными операциями), то многомерное преобразование Лапласа—Галуа этого ядра, т. е. многомерная передаточная функция соответствующей НПМ, имеет вид (10) и наоборот, если ядро второго порядка для НПМ представим в форме (10), то оно может быть синтезировано с помощью, кроме линейных операций, максимального числа M устройств модулярного умножения.

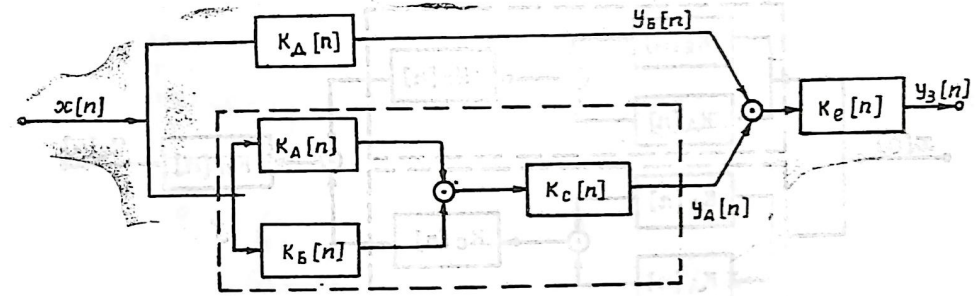


Рис. 4

Рассмотрим теперь случай, когда основная расчетная НПМ содержит ядра третьего порядка, объединенные с помощью не более двух модулярных умножителей (рис. 4). Аналогично предыдущему из рис. 4 получим

$$\begin{aligned} K_3^*(q_1, q_2, q_3) &= K_A^*(q_1) \cdot K_B^*(q_2) \cdot K_C^*(q_1+q_2) \cdot \\ &\cdot K_D^*(q_3) \cdot K_E^*(q_1+q_2+q_3), GF(p). \end{aligned} \quad (11)$$

В случае же, когда НПМ представляет собой параллельное соединение M таких систем с ядрами третьего порядка, соответствующую многомерную передаточную функцию можно представить в виде

$$K_3^*(q_1, q_2, q_3) = \sum_{i=1}^M \frac{P_{A_i}^*(q_1) \cdot P_{B_i}^*(q_2)}{Q_{A_i}^*(q_1) \cdot Q_{B_i}^*(q_2)} \dots$$

$$\frac{P_{C_1}^*(q_1 + q_2) \cdot P_{D_1}^*(q_3) \cdot P_{E_1}^*(q_1 + q_2 + q_3)}{Q_{C_1}^*(q_1 + q_2) \cdot Q_{D_1}^*(q_3) \cdot Q_{E_1}^*(q_1 + q_2 + q_3)}, GF(p) \dots, \quad (12)$$

где

$$R^*(q_1, q_2, q_3) = R(\bar{\varepsilon}^{q_1} \oplus \bar{\varepsilon}^{q_2} \oplus \bar{\varepsilon}^{q_3}).$$

Таким образом, налицо следующий факт: если изображение ядра третьего порядка может быть представлено в форме (12), то соответствующая НПМ может быть синтезирована, кроме линейных операций, еще и с помощью не более 2M умножителей.

Описанная выше методика позволяет производить анализ и синтез ядер для НПМ более высокого порядка. Однако процедура значительно усложняется с ростом ядер, так как при этом возрастает число основных расчетных НПМ, из которых строится требуемая система. Например, в случае ядер четвертого порядка существует уже не одна, а две основные расчетные НПМ (рис. 5). Поэтому при синтезе ядра четвертого порядка необходимо рассматривать обе схемы и из них выбрать ту, которая позволяет получить НПМ с минимальным числом блоков.

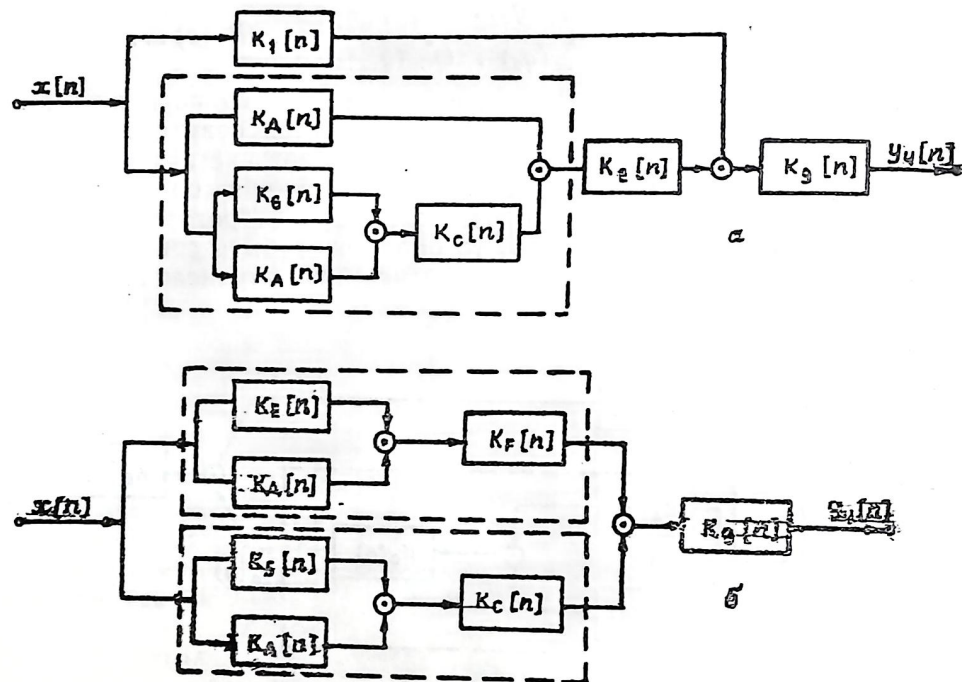


Рис. 5

На основании рис. 5 и с учетом предыдущих случаев можем найти многомерную функцию НПМ, соответствующую случаям (рис. 5):

$$K_{41}^*(q_1, q_2, q_3, q_4) = K_A^*(q_1) \cdot K_B^*(q_2) \cdot K_C^*(q_1 + q_2) \cdot K_D^*(q_3) \cdot K_E^*(q_1 + q_2 + q_3) \cdot K_F^*(q_4) \cdot K_G^*(q_1 + q_2 + q_3 + q_4), GF(p); \quad (13)$$

$$K_{42}^*(q_1, q_2, q_3, q_4) = K_A^*(q_1) \cdot K_B^*(q_2) \cdot K_C^*(q_1 + q_2) \cdot K_D^*(q_3) \cdot K_E^*(q_1 + q_2 + q_3 + q_4), GF(p) \dots, \quad (14)$$

где

$$R^*(q_1, q_2, q_3, q_4) = R(\bar{\varepsilon}^{q_1} \oplus \bar{\varepsilon}^{q_2} \oplus \bar{\varepsilon}^{q_3} \oplus \bar{\varepsilon}^{q_4}).$$

Аналогично предыдущим случаям можно найти и многомерную передаточную функцию параллельного соединения M таких основных расчетных НПМ с ядрами четвертого порядка.

Как следует из вышеприведенных формул (10), (12)–(14), передаточная функция ЛПМ, следующая за модулярным умножителем, является функцией суммы аргументов передаточных функций ЛПМ, предшествующих устройству умножения. Возможен и более общий случай для НПМ четвертого порядка, содержащих в качестве нелинейных элементов 3M модулярных умножителя, причем выходом этой системы является сумма выходов для M1 основных расчетных НПМ (рис. 5, а) и сумма выходов M2 = M – M1 основных расчетных НПМ (рис. 5, б) при одной и той же входной величине x[n]. В этом случае многомерное преобразование Лапласа–Галуа ядра такого типа примет вид:

$$K_4^*(q_1, q_2, q_3, q_4) = \sum_{v=1}^{M_1} K_{4,1}^{*(v)}(q_1, q_2, q_3, q_4) \oplus \sum_{v=1}^{M_2} K_{4,2}^{*(v)}(q_1, q_2, q_3, q_4), GF(p) \dots \quad (15)$$

При этом передаточная функция K4(q1, q2, q3, q4) может быть представлена аналогично (10)–(12). Если K4(q1, q2, q3, q4) не может быть представлена в требуемой форме, то соответствующее ядро невозможно синтезировать, используя максимум 3M устройств умножения.

Следует заметить, что число основных расчетных НПМ, лежащих в основе вышеприведенной методики, увеличивается с ростом порядка ядер. Проведенные исследования, например, показали, что, как и в случае обычных нелинейных систем [4], для ядра пятого порядка существуют три основных расчетных НПМ, для ядра шестого порядка — шесть и т. д. Несмотря на эти трудности, развиваемая методика, в основном для ядер второго и третьего порядков, может быть применена также при анализе и синтезе ядер высокого порядка.

Проиллюстрируем приведенные выше результаты о синтезе ядер НПМ на примере ядра второго порядка, имеющего в смысле многомерного (двухмерного) преобразования Лапласа–Галуа изображение, т. е. передаточную функцию следующего вида:

$$K_2^*(q_1, q_2) = \frac{P_2^*(q_1, q_2)}{Q_2^*(q_1, q_2)} = \frac{P_2(\bar{\varepsilon}^{q_1}, \bar{\varepsilon}^{q_2})}{Q_2(\bar{\varepsilon}^{q_1}, \bar{\varepsilon}^{q_2})} = \frac{\bar{\varepsilon}^{2q_1} \cdot \bar{\varepsilon}^{q_2} \oplus 4 \cdot \bar{\varepsilon}^{2q_1} \oplus 5 \cdot \bar{\varepsilon}^{q_1} \cdot \bar{\varepsilon}^{q_2} \oplus \bar{\varepsilon}^{q_1} \cdot \bar{\varepsilon}^{2q_2} \oplus 2 \cdot \bar{\varepsilon}^{2q_2} \oplus 5 \cdot \bar{\varepsilon}^{q_1} \oplus 6}{5 \cdot \bar{\varepsilon}^{q_1} \cdot \bar{\varepsilon}^{q_2} \oplus \bar{\varepsilon}^{q_1} \cdot \bar{\varepsilon}^{2q_2} \oplus 2 \cdot \bar{\varepsilon}^{2q_2} \oplus 4 \cdot \bar{\varepsilon}^{q_1} \oplus 6 \cdot \bar{\varepsilon}^{q_2} \oplus 6}, GF(7) \dots \quad (16)$$

Это значит, что рассматриваемая НПМ определена над полем GF(7), т. е. является семеричной; в настоящем примере Q2*(q1, q2) представимо в форме Q_A*(q1) · Q_5*(q2) · Q_C*(q1 + q2).

Для определения каждой из трех функций, входящих в разложение, положим сначала

$$\bar{\varepsilon}^{q_1} = 0, \bar{\varepsilon}^{q_2} = \bar{\varepsilon}^q,$$

тогда

$$Q_2^*(0, \bar{\varepsilon}^q) = Q_A^*(0) \cdot Q_5^*(q) \cdot Q_C^*(q) = 2 \cdot \bar{\varepsilon}^{2q} \oplus 6 \cdot \bar{\varepsilon}^q \oplus 6 = 2 \cdot (\bar{\varepsilon}^q \oplus 4) \cdot (\bar{\varepsilon}^q \oplus 6), GF(7).$$

Пусть $\bar{\epsilon}^q, \bar{\epsilon}^{q_1} = 0$, тогда получим

$$Q_2^*(\bar{\epsilon}^q, 0) = Q_A^*(q) \cdot Q_B^*(0) \cdot Q_C^*(q) = 4 \cdot \bar{\epsilon}^{2q} \circ 4 \cdot \bar{\epsilon}^q \circ 6 = \\ = 4 \cdot (\bar{\epsilon}^q \circ 2) \cdot (\bar{\epsilon}^q \circ 6), GF(7).$$

Наконец, полагая

$$\bar{\epsilon}^{q_1} = \bar{\epsilon}^q, \bar{\epsilon}^{q_2} = (p-1)\bar{\epsilon}^q,$$

получим

$$Q_2^*(\bar{\epsilon}^q \circ (p-1)\bar{\epsilon}^q) = Q_A^*(q) \cdot Q_B^*((p-1)\bar{\epsilon}^q) \cdot Q_C^*(0) = \\ = 6 \cdot (\bar{\epsilon}^q \circ 2) \cdot (6 \cdot \bar{\epsilon}^q \circ 4), GF(7).$$

Следовательно, сравнивая полученные выше разложения, будем иметь

$$Q_A^*(q) = \bar{\epsilon}^q \circ 2, Q_B^*(q) = \bar{\epsilon}^q \circ 4, Q_C^*(q) = \bar{\epsilon}^q \circ 6.$$

Окончательно получим

$$Q_2^*(q_1, q_2) = (\bar{\epsilon}^{q_1} \circ 2) \cdot (\bar{\epsilon}^{q_2} \circ 4) \cdot (\bar{\epsilon}^{q_1} \circ \bar{\epsilon}^{q_2} \circ 6),$$

тогда

$$K_2^*(q_1, q_2) = 1 \circ \frac{\bar{\epsilon}^{q_1} \circ \bar{\epsilon}^{q_2}}{(\bar{\epsilon}^{q_1} \circ 2) \cdot (\bar{\epsilon}^{q_2} \circ 4) \cdot (\bar{\epsilon}^{q_1} \circ \bar{\epsilon}^{q_2} \circ 6)}, GF(7) \quad (17)$$

может быть представлена как на рис. 3(б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн А. С., Пышкин И. В., Попков Ю. С., Фараджев Р. Г. „Автом. и телемех.“, 1971, № 12.
2. Alper P. A. Consideration of the Discrete Volterra series, IEEE Transactions of the Circuits Theory, vol. CT-12, No. 4, 1965.
3. Reifen B. and Yudkin H. On nonlinear sequential circuits and their inverses. IEEE Transactions on Electronic Computers, vol. EC-15, No. 4, 1956.
4. Schetzen M. Synthesis of a Class of Nonlinear Systems. International Journal of Electronic, vol. XVIII, No. 5, 1966.
5. Цыпкин Я. З., Фараджев Р. Г. „ДАН СССР“, т. 166, 1966, № 3.
6. Ван-Трис Г. Синтез оптимальных нелинейных систем управления, пер. с англ. яз. Изд-во „Мир“, 1963.

Институт кибернетики АН Азерб. ССР,
АГУ имени С. М. Кирова

Поступило 2. I 1973

Р. Г. Фараджев

Бир синиф гејри-хэтти ардычыллыг машинларынын
анализ вэ синтез мээсэлэлэринэ даир

ХҮЛАСЭ

Тэдгигатда гејри-хэтти ардычыллыг, машинларынын Волтер нүвәси аналогларынын модулар һасил вуруглары шәклиндә кестәрилмәсинә имкан верән метод ишләнмишдир. Мәғаләдә бу һала ујғун синтез үсулу вә иллүстратив мисал кәтирилмишдир.

R. G. Faradzjov

To the analysis and synthesis of the class of nonlinear
sequential machines

SUMMARY

In the present paper it is developed a method which gives the opportunity to represent volterra kernel analogues for nonlinear sequential machines as a modular product of factors. For this special case the method of synthesis and illustrative example are given.

А. Х. АБРАМОВ, Ч. С. АГАЛАРОВ, С. Л. КАПЛАН, У. С. РЗАЕВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЕРЕРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В АСУ

В автоматизированных системах управления предприятиями, оснащенных цифровыми ЭВМ, возникает необходимость в расчете последовательности переработки информации с целью минимизации потерь от задержек при решении различных задач управления и контроля.

При этом следует учитывать тот факт, что в реальных процессах решение той или иной задачи (выполнение той или иной программы) может быть прервано как поступлением более важной, так и отсутствием необходимой для продолжения решения задачи промежуточной информации. Последняя может поступать от первичных измерительных устройств, зависеть от результатов выполнения других программ, от надежности каналов связи ЭВМ с объектами и т. д. Примером подобной ситуации может служить переработка программ контроля и управления в АСУ товарным цехом нефтеперерабатывающего завода [1].

Нахождение оптимальной последовательности решения задач на ЭВМ при наличии двух вышеназванных причин прерывания выполнения задач и являлось предметом данного исследования. Этой цели могут служить математические модели однолинейных систем массового обслуживания [2, 3]. Так, в работе [3] показано, что для системы управления с прерыванием обслуживания по причине поступления более важной (старшей по приоритету) программы, учет информации об оставшемся времени обслуживания позволяет уменьшить средние потери от ожидания. При этом оказывается, что оптимальным является правило, при котором в любой момент времени следует обслужить требования с наименьшим отношением:

$$\frac{\text{оставшееся время обслуживания}}{\text{штраф за единицу времени пребывания}} \quad (1)$$

В настоящей работе проверялась применимость правила (1) при переработке информации в системе управления с двумя причинами прерываний выполнения задач, сформулированными выше. Аналитически исследовать такую систему не удастся. Поэтому мы прибегли к методу статистического моделирования.

Оптимальное правило прерывания определяется с помощью метода, предложенного в [4]. Полученное значение потерь сравнивается с потерями при использовании правила (1).

Постановка задачи

В качестве математической модели переработки информации в АСУ рассматривается система массового обслуживания, состоящая из одного прибора (ВМ) и N входящих простейших потоков требований (задач) с интенсивностями λ_i , $i = \overline{1, N}$. Время обслуживания требований i -го потока постоянное и равно τ_i .

Обслуживание требований i -го потока может прерываться по причине: 1) поступления более важных задач из потоков от 1 до $i-1$ и 2) отсутствия промежуточной информации. Длительности промежутков времени, через которые наступают моменты отсутствия промежуточной информации, распределены по показательному закону: $E_1(t) = 1 - e^{-\mu_1 t}$. Поступление отсутствующей промежуточной информации с интенсивностью μ_i : $D_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}$.

Допустим, имеем систему управления, причем управляющие воздействия (выбор задачи на обслуживание) можно принимать в любой момент времени. Тогда задача сводится к нахождению оптимального правила прерывания обслуживания, при котором достигается минимум потерь:

$$F = \sum_{i=1}^N C_i \lambda_i \tau_i. \quad (2)$$

Здесь C_i —штраф за единицу времени пребывания требований i -го потока в системе, τ_i —среднее время пребывания требования i -го потока в системе.

Нахождение оптимального правила прерывания обслуживания сводится к отысканию в классе дисциплины правила прерывания, определяемого матрицей $X = \|x_{ij}\|$, где x_{ij} означает „зону недоступности“ для прерываний обслуживания требования j -го потока требованиями i -го потока. Другими словами, если поступающее на обслуживание требование i -го потока застанет на приборе требование j -го потока, то условием прерывания последнего является выполнение соотношения $\xi_j \geq x_{ij}$, где ξ_j —оставшееся время обслуживания требования j -го потока. В момент окончания обслуживания на прибор направляется требование из очереди (если таковая есть) с наименьшим отношением (1), для которого имеется в наличии промежуточная информация.

Определение оптимального правила прерывания

Итак, для минимизации функционала (2), подсчитываемого с помощью статистического моделирования, используем метод Бусленко—Соколова [4], смысл которого состоит в следующем. Минимизация функционала (2), зависящего от многих переменных x_{ij} , производится с помощью итерационной схемы, суть которой заключается в выборе такой матрицы X , чтобы значение функционала (2) не возрастало. При совпадении значения матрицы X для двух последующих итераций итерационный процесс заканчивается. Одна итерация включает в себя несколько этапов, на каждом из которых по методу Кифера—Джонсона [5] определяется оптимальное значение одного из элементов x_{ij} при фиксированных остальных. По этому методу отрезок $[0, \tau_i]$ изменения аргумента x_i линейно отображается на отрезок $[0, \mu_n]$, где μ_n — n -ое число Фибоначчи, выбираемое из условия требуемой точности определяемой точки минимума. Затем производится локализация точки минимума в этом отрезке путем n -кратного вычисления

функционала (2) в соответствующих точках. При переходе с одного этапа к другому значение функционала не должно возрастать.

Приведем операторную схему алгоритма определения оптимального правила прерывания (АОП):

$$A_1^7 A_2 P_{3 \downarrow 5} \Phi_4^3 P_{5 \downarrow 6} \Phi_6 A_7^5 A_8 Y_9, \quad (3)$$

здесь A_1 —ввод и подсчет с помощью алгоритма моделирования (АМ) при фиксированной матрице $X = X^0$; $X = X^0$ —значения функционала (2);

A_2 —подсчет элементов x_{ij} матрицы X^k по методу Кифера—Джонсона и подсчет функционала F^k ;

P_3 —проверка условия $F^k < F^*$;

Φ_4 —засылка $F^k \Rightarrow F^*$;

P_5 —проверка условия $X^k \neq X^*$;

Φ_6 —засылка $X^k \Rightarrow X^*$;

A_7 —подсчет числа итераций: $\langle k+1 \rangle \Rightarrow \langle k \rangle$;

A_8 —обработка результатов;

Y_9 —окончание счета и выдачи результатов.

Алгоритм моделирования

Моделирование проводится по моментам качественного изменения состояний системы, которыми являются моменты поступления требования, моменты прерываний и моменты освобождения прибора [6].

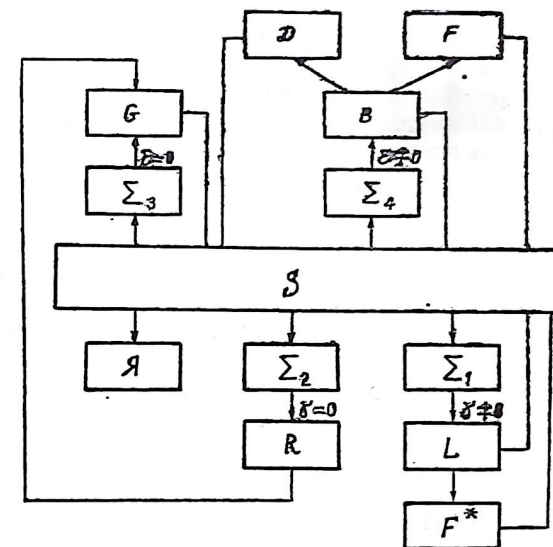


Рис.

Увеличенная блок-схема алгоритма моделирования показана на рисунке.

Операторная схема алгоритма моделирования имеет вид:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\Phi_1 P_2 \downarrow 32 A_3 P_4 \downarrow 22 P_5 \downarrow 11;}^S; \quad \overbrace{A_6 F_7 P_8 \downarrow 16 P_9 \downarrow 19 \Phi_{10};}^B; \\ & \overbrace{5 A_{11}^{24} \Phi_{12} P_{13}^1 F_{14} \Phi_{15};}^G; \quad \overbrace{8 P_{16}^1 F_{17} \Phi_{18};}^D; \quad \overbrace{9 P_{19}^1 F_{20} \Phi_{21};}^F; \\ & \overbrace{4 P_{22} \downarrow 25 A_{23} \Phi_{24}^{12};}^R; \quad \overbrace{22 P_{25} \downarrow 28 F_{26} \Phi_{27}^{1,25} A_{28} P_{29}^1;}^L; \quad \overbrace{F_{30} \Phi_{31}^1 A_{32}^{A_0}}^{F^*} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Φ_1 —определение очередного момента t качественного изменения состояния системы (сканирования);
 P_2 —проверка условия $t < T$, где T —длительность реализации процесса;
 A_3 —сбор и подсчет статистики ($\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ и Σ_4);
 P_4 —проверка, что наступило раньше: поступило ли требование или обслужилось очередное, с одной стороны, наступил ли момент отсутствия промежуточной информации или поступления промежуточной информации для ранее прерванного требования, с другой стороны;
 P_5 —проверка условия: поступило требование или освобожден прибор;
 A_6 —подсчет числа поступающих требований i -го потока ($i = \overline{1, N}$);
 F_7 —формирование очередного момента поступления требования i -го типа;
 P_8 и P_{25} —проверка условия: свободен ли прибор;
 P_9 и P_{29} —проверка возможности прерывания обслуживания требования при поступлении требования согласно правилу X ;
 Φ_{10} —постановка поступившего требования в очередь;
 A_{11} —подсчет количества обслуженных требований i -го потока ($i = \overline{1, N}$);
 Φ_{12} —выбор наивысшего по приоритету требования из очереди;
 P_{13}, P_{16}, P_{19} —проверка: есть ли для выбранного на обслуживание требования промежуточная информация;
 $F_{14}, F_{17}, F_{20}, F_{26}, F_{30}$ —формирование очередного момента освобождения прибора от обслуживания требования i -го потока;
 $\Phi_{15}, \Phi_{18}, \Phi_{21}, \Phi_{27}, \Phi_{31}$ —формирование очередного момента прерывания обслуживания требования в силу отсутствия информации;
 P_{22} —проверка: наступил ли момент отсутствия промежуточной информации или же момент наступления промежуточной информации;
 A_{23}, A_{28} —подсчет оставшегося времени обслуживания требования в момент прерывания в силу отсутствия промежуточной информации, или в момент прерывания по приоритету;
 Φ_{24} —формирование момента поступления промежуточной информации;
 A_{32} —обработка результатов и передача управления алгоритму оптимального прерывания.

Результаты численных исследований

Была составлена программа, реализующая алгоритм моделирования (АМ) (4) и алгоритм нахождения оптимального правила прерывания (АОП) (3) для машины М-220. Рабочая программа занимает соответственно около 700 и 130 ячеек оперативной памяти.

При определении значения функционала F моделирование проводилось в течение 20000 часов работы системы. Это занимает 4—5 минут машинного времени. Одна итерация АОП—определение одного элемента x_{ij} матрицы X —включает в себя, как уже отмечалось выше, n -кратное обращение к АМ, где число n обусловлено требуемой точностью определения x_{ij} . В нашем случае $n = 13 \div 15$ обеспечивает точность 10^{-3} .

Таким образом, выполнение одной итерации составляет 1,5 часа машинного времени.

При проведении исследования была взята модель с тремя входящими потоками требования, исходные данные которой представлены в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные задачи			
Характеристики системы	№ потока		
	1	2	3
Интенсивность входящих потоков	0,25	0,3	0,1
Среднее время обслуживания	1	2	0,2
Интенсивность прерывания по причине отсутствия промежуточной информации	1	0,01	1
Среднее время поступления промежуточной информации	0,05	0,0002	0,06
Экономические веса	8	12	1

Так как входящие потоки требований в табл. 1 расположены в порядке важности (1), то в матрице X варьировались только элементы X_{12}, X_{13}, X_{23} , а для остальных $x_{ij} = \tau_j$. Последнее означает, что требования потока i при $i > j$ не будут прерывать обслуживания требования потока j , так как это может привести только к увеличению потерь. В качестве исходного правила обслуживания было принято правило с относительными приоритетами:

$$x^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 0,125 \\ 1 & 2 & 0,166 \\ 1 & 2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

В результате моделирования оптимальным оказалось правило, определяемое матрицей

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 & 0,083 & 0,125 \\ 1 & 2 & 0,166 \\ 1 & 2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Сравнение этих двух матриц показывает, что элементы X_{13} и X_{23} не изменились. Этого следовало ожидать по той причине что (см. табл. 1) величины, характеризующие интенсивности прерывания требований второго и третьего потоков, в силу отсутствия промежуточной информации взяты такими, что прерываний по второй причине у этих потоков не наблюдается или почти (в силу показательного распределения) не наблюдается.

Программа моделирования (АМ) позволяет также вычислить функционал F и некоторые характеристики рассматриваемой модели, а именно: среднее время ожидания ω_i требований и простой обслуживаемого прибора π (табл. 2).

Таблица 2

Дисциплина	Характеристики				
	ω_i по потокам			π	F
	1	2	3		
X^0	0,7515	14,3675	212,1026	0,0687	80,1833
X^*	0,4846	10,5670	79,9579	0,0806	51,2332

Сравнивая F^0 с F^* , видим, что АОП приводит существенно к уменьшению значения потерь. Это позволяет рекомендовать для исследования подобных моделей и нахождения АОП метод Бусленко—Соколова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов А. Х., Агаларов Ч. С., Рзаева У. С. Об алгоритме контроля и управления и оптимальной обработке информации в системах централизованного управления нефтеперерабатывающим заводом. Тезисы доклада на I республ. конф. по оптимизации химич. реакторов. Баку. 1969.
 2. Бронштейн О. И., Рыков В. В. Изв. АН СССР, техн. киберн. № 6.
 3. Бронштейн О. И., Веклеров Е. Б. Изв. АН СССР, техн. киберн., 1967, № 5.
 4. Бусленко И. П., Соколов Г. А. Об одном классе задач оптимального распределения. Экономика и математич. методы, т. I, вып. 1, 1965.
 5. Беллман Р. Динамическое программирование. Изд-во ИЛ, 1960.
 6. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. Изд-во "Наука", 1968.
- Институт кибернетики АН Азерб. ССР

Поступило 2. I 1973

А. Х. Абрамов, Ч. С. Агаларов, С. Л. Каплан, У. С. Рзаева

Автоматлашдырылмыш идарәетмә системләриндә мә'lуматларын оптимал ишләнмәси

ХУЛАСӘ

Тәдгигатда автоматлашдырылмыш идарәетмә системләриндә мә'lуматларын оптимал ишләнмәси Бусленко-Соколов үсулу илә тапылмышдыр. Мәгаләдә көстәрилиб ки, бу үсулла мөвчуд гәјдалара нисбәтән истәһсал иткиләринин даһа чох ашағы дүшмәсинә наил олмаг мүмкүндүр.

A. Kh. Abramov, Ch. S. Agalarov, S. L. Kaplan, U. S. Rzaeva

The definition of optimal sequence of information processing in automated control systems

SUMMARY

Information processing system in automated control systems is formed by a single—line queueing system with plural input streams of requirements and two reasons of queueing interruption.

For the system research it is used the method of Monte—Carlo, and for the optimisation—the method of Buslenko-Sokolov.

А. А. ШАХБАЗОВ

ОБСЛУЖИВАНИЕ С РАЗОГРЕВОМ И ЗАВИСИМОСТЬЮ ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ОТ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ

Изучается система $M^r|G|1$ с одним обслуживающим прибором, неординарным пуассоновским входным потоком требований, произвольным распределением времени обслуживания и зависимостью времени обслуживания от длины очереди: если в момент поступления клиента прибор свободен, то он „разогревается“. Найдено условие существования эргодического распределения вложенной цепи Маркова, списывающее состояние системы, и производящая функция этого распределения.

Система обслуживания, которую будем исследовать, характеризуется следующими данными:

1. На вход системы с одним обслуживающим прибором и очередью в случайные моменты времени $t_1=u_1$, $t_2=u_1+u_2$, ... поступают клиенты партиями съемов $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ соответственно. Величины $u_1, \zeta_1, u_2, \zeta_2, \dots$ независимы в совокупности, причем

$$P\{u_n < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$$

$$M\zeta^n = a(z), \quad M\zeta_n = a'(1) = a < \infty.$$

2. Длительность обслуживания n -го клиента v_n является случайной величиной с функцией распределения

$$P\{v_n < x\} = \begin{cases} B_1(x), & \text{если } N_{n-1} \leq L, \\ B_2(x), & \text{если } N_{n-1} > L, \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r!} \int_0^\infty x dB_2(x) (x < \infty \quad (r = 1, 2),$$

где N_n —длина очереди непосредственно после момента окончания обслуживания n -го клиента (номера присваиваются по порядку обслуживания клиентов), L —неотрицательное целое число.

3. Каждая партия, заставшая в момент своего поступления прибор свободным, прежде чем начать обслуживаться, ожидает случайного времени η с функцией распределения

$$P\{\eta < x\} = C(x), \quad c = \int_0^\infty x dC(x) < \infty.$$

4. Партия клиентов обслуживается в порядке поступления, а клиенты партии—в произвольном порядке.

Замечания. Отметим три частных случая описанной системы, которые рассмотрены в литературе:

- а) $B_1(x) = B_2(x)$, $a(z) = z$ (Р. Д. Финч [1]);
 б) $P\{\eta = 0\} = 1$, $a(z) = z$ (Т. Сузуки [2, 3]);
 в) $B_1(x) = B_2(x)$ (А. А. Шахбазов [4]).

Основной результат данной работы содержится в следующей теореме:

Теорема. Если $\lambda a < \mu_2$, то существует предельное распределение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{N_n = j\} = \pi_j \left(\pi_j > 0, \sum_0^{\infty} \pi_j = 1 \right), \quad (2)$$

не зависящее от распределения величины N_1 и

$$\sum_0^L \pi_j z^j = \pi_0 \frac{[a(z)\tilde{C}(\tau) - 1]\tilde{B}_1(\tau)}{z - \tilde{B}_1(\tau)} \Big|_L, \quad (3)$$

$$\sum_{L+1}^{\infty} \pi_j z^j = \frac{\pi_0 [a(z)\tilde{C}(\tau) - 1]\tilde{B}_1(\tau) - [z - \tilde{B}_1(\tau)] \sum_0^L \pi_j z^j}{z - \tilde{B}_2(\tau)}, \quad (4)$$

где $\tau = \lambda - \lambda a(z)$, $\tilde{B}_2(\tau)$ — преобразование Лапласа — Стильеса функции $B_2(x)$, а неизвестное π_0 определяется из условия $\sum_0^{\infty} \pi_j = 1$.

Доказательство. Если обозначить через $m(t)$ число клиентов потока, поступивших в систему за промежуток времени t , то

$$Mz^{m(t)} = e^{\lambda a(z)t - \lambda t} (|z| \leq 1), \quad (5)$$

где $M\xi$ — математическое ожидание величины ξ .

Пусть θ — положительная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Тогда по формуле полной вероятности

$$Mz^{m(\theta)} = \tilde{F}(\lambda - \lambda a(z)), \quad (6)$$

где

$$\tilde{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x), \quad \text{Res} \geq 0.$$

Обозначим через θ_1 и θ_2 случайные величины с функцией распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$, соответственно, и положим

$$\kappa_j^{(r)} = P\{m(\theta_r) = j\} \quad (r = 1, 2; j \geq 0).$$

Согласно формуле (6) производящая функция величины θ_r

$$Mz^{\theta_r} = \sum_0^{\infty} \kappa_j^{(r)} z^j = \tilde{B}_r(\lambda - \lambda a(z)). \quad (7)$$

Случайные величины N_n и N_{n+1} связаны между собой стохастическими соотношениями:

$$N_{n+1} = \begin{cases} N_n + m(v_{n+1}) - 1, & \text{если } N_n > 0, \\ \zeta + m(\eta) + m(\tau_{n+1}) - 1, & \text{если } N_n = 0, \end{cases} \quad (8)$$

*) Если $f(z) = \sum_0^{\infty} f_n z^n$, то согласно определению $f(z)|_L = \sum_0^L \pi_j z^j$.

где ζ — объем партии, поступившей в момент времени, когда прибор был свободен; $m(\eta)$ — число клиентов, поступивших за время разогрева прибора. Из этого соотношения вытекает, что последовательность $N_n (n \geq 1)$ образует однородную цепь Маркова с множеством состояний $\{0, 1, 2, \dots\}$. Вероятности переходов этой цепи

$$P_{ij} = \begin{cases} \kappa_j^{(1)} & (j \geq 0; i = 0), \\ \kappa_{j+1-i}^{(1)} & (j \geq i-1; i = 1, 2, \dots, L), \\ \kappa_{j+1-i}^{(2)} & (j \geq i-1; i = L+1, L+2, \dots). \end{cases}$$

Поскольку $p_{ij} > 0 (j \geq \max(i-1, 0), i \geq 0)$, то цепь Маркова $N_n (n \geq 1)$ неприводима и непериодична. Воспользуемся следующим достаточным признаком эргодичности цепи Маркова, вытекающим из теоремы Мустафы: неприводимая и непериодическая цепь Маркова с множеством состояний $\{0, 1, 2, \dots\}$ и переходными вероятностями p_{ij} эргодична, если

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} j p_{ij} - i \right) < 0. \quad (9)$$

Пологая $p_r = \frac{\lambda a}{\mu_r}$ и вычислив величину $\sum_{j=1}^{\infty} j p_{ij} - i$ для цепи Маркова $N_n (n \geq 1)$, получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} j p_{ij} - i = \begin{cases} p_1 & (i = 0), \\ p_1 - 1 & (i = 1, 2, \dots, L), \\ p_2 - 1 & (i = L+1, L+2, \dots). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} j p_{ij} - i \right) = p_2 - 1 < 0,$$

что доказывает эргодичность цепи $N_n (n \geq 1)$,

Покажем, что производящая функция

$$\pi_n(z) = Mz^{N_n} \quad (|z| \leq 1)$$

удовлетворяет рекуррентным равенствам

$$z\pi_{n+1}(z) - \tilde{B}_2(\tau)\pi_n(z) = [a(z)\tilde{C}(\tau) - 1]\tilde{B}_1(\tau)P\{N_n = 0\} + [\tilde{B}_1(\tau) - \tilde{B}_2(\tau)] \sum_{i=0}^L P\{N_n = i\} z^i. \quad (10)$$

Согласно формулам (1) и (7)

$$Mz^{m(v_{n+1})} = \begin{cases} \tilde{B}_1(\tau), & \text{если } N_n \leq L, \\ \tilde{B}_2(\tau), & \text{если } N_n > L. \end{cases} \quad (11)$$

Из (8) и (11) вытекает

$$M\{z^{N_{n+1}} | N_n = i\} = \begin{cases} z^{-1} a(z) \tilde{C}(\tau) \tilde{B}_1(\tau) & (i = 0), \\ z^{i-1} \tilde{B}_1(\tau) & (1 \leq i \leq L), \\ z^{i-1} \tilde{B}_2(\tau) & (i \geq L+1). \end{cases}$$

Подставляя найденное выражение $M\{z^{N_{n+1}} | N_n = i\}$ в формулу

$$Mz^{N_{n+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} M\{z^{N_{n+1}} | N_n = i\} P\{N_n = i\},$$

получим (10).

Переходя при $n \rightarrow \infty$ к пределу в (10), получим равенство:

$$[z - \tilde{B}_2(\tau)] \sum_0^{\infty} \pi_i t^i = [a(z) \tilde{C}(\tau) - 1] \tilde{B}_1(\tau) \pi_0 + \\ + [\tilde{B}_1(\tau) - \tilde{B}_2(\tau)] \sum_0^L \pi_i z^i, \quad (12)$$

равносильное равенству (4). В [4] доказано, что производящая функция стационарной длины очереди в системе $M^*|G|1$, характеризуемой функциями $1 - e^{-\lambda x}$ ($x > 0$), $a(z)$, $B_1(x)$ и $C(x)$, равна $\pi_0 [a(z) \tilde{C}(\tau) - 1] [z - \tilde{B}_1(\tau)]^{-1}$. Так как при наличии в указанной системе $\leq L$ клиентов время обслуживания имеет функцию распределения $B_1(x)$, то для системы $M^*|G|1|L$ с ограниченной очередью имеем

$$\sum_0^L \pi_j z^j = \pi_0 \frac{[a(z) \tilde{C}(\tau) - 1] \tilde{B}_1(\tau)}{z - \tilde{B}_1(\tau)} \Big|_L.$$

Теорема полностью доказана.

Частные случаи формул (3) и (4) приведены в работах [1—4]. Например, при $a(z) = z$, $\tilde{C}(\tau) = 1$ получаем результат Т. Сузуки [3]:

$$\sum_0^L \pi_j z^j = \frac{\pi_0 (z-1) \tilde{B}_1(\tau)}{z - \tilde{B}_1(\tau)} \Big|_L, \quad (13)$$

$$\sum_{L+1}^{\infty} \pi_j z^j = \frac{\pi_0 (z-1) \tilde{B}_1(\lambda - \lambda z) - [z - \tilde{B}_1(\lambda - \lambda z)] \sum_0^L \pi_j z^j}{z - \tilde{B}_2(\lambda - \lambda z)}. \quad (14)$$

Эти формулы в случае

$$B_r(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\rho_r x} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

сильно упрощаются. Действительно, положив в (13) и (14)

$$\tilde{B}_r(\lambda - \lambda z) = [1 + \rho_r - \rho_r z]^{-1} \quad (r = 1, 2),$$

находим:

$$\sum_0^L \pi_j z^j = \frac{\pi_0}{1 - \rho_1 z} \Big|_L = \pi_0 \frac{1 - (\rho_1 z)^{L+1}}{1 - \rho_1 z}, \\ \sum_{L+1}^{\infty} \pi_j z^j = \pi_0 \frac{(1 + \rho_2 - \rho_2 z) (\rho_1 z)^{L+1}}{(1 + \rho_1 - \rho_1 z) (1 - \rho_2 z)}, \\ \pi_0 = \begin{cases} \frac{(1 - \rho_1) (1 - \rho_2)}{(1 - \rho_2 - (\rho_1 - \rho_2) \rho_1^{L+1})}, & \rho \neq 1, \\ \frac{1 - \rho_2}{1 + (1 - \rho_2) (L + 1)}, & \rho = 1. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Finch P. D. A probability limit theorem with application to a generalisation of queueing theory. Acta. Math. Acad. Sci. Hung., 10, 3—4 (1959), 317—326.
2. Suzuki T. On a queueing with service depending on queue-length, Commentarii mathematici Universitatis Sancti Pauli, 10, 1 (1961), 1—12.
3. Suzuki T. and Ebe M. Decision rules for the queueing system $M|G|1$ with service depending on queue-length, Memoirs of the defense academy Japan, 7, 3 (1967), 1263—1273.
4. Шахбазов А. А. „ДАН СССР“, т. 145, 1962, № 2.
5. Moustafa M. D. Input—output Markov processes, Proc. Koninklijke Nederlandse Akad. Wetenschappen, 60 (1957), 112—118.

Институт кибернетики АН Азерб. ССР

Поступило 2. I 1973

Ә. Ә. Шахбазов

Гыздырылан чиһазла ишләјән вә хидмәт мүддәти
нөвбәнин узунлуғундан асылы олан систем һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ашағыдакы тәләбләр и өдәјән күтләви хидмәт системиндән бәһс едилмиш вә ашағыдакылар мүүјјән едилмишдир: а) систем бир чиһаз васитәсилә гејри-ординар Пуассон селинин сифаришләрини јеринә јетирир; б) һәр бир сифариш тәсадүфи мүддәт әрзиндә јеринә јетирилир вә бу тәсадүфи мүддәтин пәјланма функцијасы нөвбәнин узунлуғундан асылыдыр; в) чиһазын бошдајанма вәзијјәтиндә системә верилән сифариш мүүјјән тәсадүфи мүддәт кечдикдән сонра өдәнилмәјә башланыр. Бу системин фәалијјәтини идарә едән Марков зәнчиринин ергодик олма шәрти тапылмыш вә систем стасионар режимдә ишләдикдә нөвбә узунлуғунун доғуран функцијасы тәјјин едилмишдир. Бахылан системин хүсуси һаллары бәшгә мүүллифләр тәрәфиндән тәдгиг едилмишдир.

A. A. Shahbazov

Service with warming-up and dependence of service time
on queue size

SUMMARY

In the single—server queueing system it is obtained a generating function of a stationary distribution of queue size under following assumptions.

- a) distribution function of the interarrival time
- b) service time has general distribution, which depends on the queue size;
- c) if at the arrival moment the customer finds the server idle, then he waits for a random time with distribution function.

А. Б. КАСУМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДУБЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ С РАЗНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРИ НЕНАДЕЖНОМ ОБСЛУЖИВАЮЩЕМ ПРИБОРЕ

1. Постановка задачи

Имеется система с одним основным и одним резервным элементами, причем резерв ненагруженный. Распределение времени безотказной работы основного элемента равно $G_1(x)$. Отказавший основной элемент заменяется резервным. Распределение времени безотказной работы резервного элемента равно $G_2(x)$. Имеется обслуживающий прибор, производящий восстановление вышедших из строя элементов (основного и резервного).

Интенсивность восстановления в момент t зависит от длины очереди на восстановление отказавших элементов в этот момент и равна μ_i ($i = 1, 2$), если длина очереди в этот момент равна i , т. е. вероятность восстановления за интервал времени $(t, t + \Delta t)$ равна $\mu_i \Delta t + O(\Delta t)$, если длина очереди в момент t равна i , (Δt) мало. В какой-то определенный промежуток времени может восстанавливаться только один элемент. Сам обслуживающий прибор может выходить из строя и восстанавливаться как в свободном, так и в занятом состояниях. Интенсивность выхода его из строя и восстановления зависит от состояний основного и резервного элементов. Для этих состояний введем следующую кодировку.

i	Код	Состояния
0	00	Оба элемента исправны, работает основной
1	00	Оба элемента исправны, работает резервный
2	10	Основной элемент отказал, резервный исправен
3	01	Основной элемент исправен, резервный отказал
4	11	Оба элемента отказали, на восстановлении находится основной
5	11	Оба элемента отказали, на восстановлении находится резервный

Вероятность выхода из строя в интервале времени $(t, t + \Delta t)$ равна $\alpha_i \Delta t + O(\Delta t)$ ($i = 0, 5$) (см. таблицу).

Вероятность восстановления отказавшего обслуживающего прибора в интервале времени $(t, t + \Delta t)$ равна $\beta_i \Delta t + O(\Delta t)$ ($i = 0, 5$) (см. таблицу). Обслуживание происходит в порядке очереди.

Требуется определить нестационарные распределения вероятностей состояний данной системы и распределение времени ее безотказной работы.

2. Уравнения для вероятностей состояний системы

Введем в рассмотрение случайный процесс:

$$\tau(t) = \{v_1(t), v_2(t), l(t), \xi(t)\},$$

где

$$v_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если основной элемент исправен,} \\ 1, & \text{если основной элемент неисправен;} \end{cases}$$

$$v_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{если резервный элемент исправен,} \\ 1, & \text{если резервный элемент неисправен;} \end{cases}$$

$$l(t) = \begin{cases} 0, & \text{если восстанавливающий прибор исправен,} \\ 1, & \text{если восстанавливающий прибор неисправен;} \end{cases}$$

$\xi(t)$ — время с момента t до отказа работающего в этот момент элемента.

Легко видеть, что процесс $\tau(t)$ будет кусочно-линейным марковским [1].

Введем следующие вероятности:

$$\varphi_{rklj}(x, t) = p\{v_1(t) = r, v_2(t) = k, l(t) = j, \xi(t) < x\} \quad (r, k, j = 0, 1);$$

$\varphi_{rklj}(x, t)$ обозначает вероятность того, что в момент t состояние системы будет $rklj$, $\xi(t) < x$, ($r, k, j = 0, 1$), кроме случая $r = k = 1$.

При $r = k = 1$, т. е. когда оба элемента неисправны, $\xi(t)$ опускается. $\varphi_{00j}(x, t)$ обозначает вероятность того, что в момент t состояние системы будет $00j$, $\xi(t) < x$ ($j = 0, 1$), в этом случае оба элемента исправны и работает резервный ($\varphi_{00j}(x, t)$ определяется так же, как и $\varphi_{00j}(x, t)$, при этом оба элемента исправны, работает основной).

$\varphi_{11j}(t)$ обозначает вероятность того, что в момент t состояние системы будет $11j$, в этом случае оба элемента неисправны, на восстановлении находится резервный ($\varphi_{11j}(t)$ определяется так же, как и $\varphi_{11j}(t)$, при этом оба элемента неисправны, на восстановлении находится основной).

Аналогичным образом определяем:

$$p_{rklj}(t) = p\{v_1(t) = r, v_2(t) = k, l(t) = j\},$$

$$p_{00j}(t) = p\{v_1(t) = 0, v_2(t) = 0, l(t) = j\},$$

$$p_{11j}(t) = p\{v_1(t) = 1, v_2(t) = 1, l(t) = j\}.$$

Введенные функции $\varphi_{rklj}(x, t)$, $\varphi_{00j}(x, t)$ и $\varphi_{11j}(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \varphi_{000}(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{000}(x, t)}{\partial t} - \alpha_0 \varphi_{000}(x, t) + \beta_0 \varphi_{001}(x, t) +$$

$$+ \mu_2 \varphi_{010}(x, t) - \frac{\partial \varphi_{000}(0, t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi_{001}(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{001}(x, t)}{\partial t} + \alpha_0 \varphi_{000}(x, t) - \beta_0 \varphi_{001}(x, t) - \frac{\partial \varphi_{001}(0, t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi_{000}(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{000}(x, t)}{\partial t} - \alpha_1 \varphi_{000}(x, t) + \beta_1 \varphi_{001}(x, t) +$$

$$+ \mu_1 \varphi_{100}(x, t) - \frac{\partial \varphi_{000}(0, t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi_{001}(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{001}(x, t)}{\partial t} + \alpha_1 \varphi_{000}(x, t) - \beta_1 \varphi_{001}(x, t) - \frac{\partial \varphi_{001}(0, t)}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{100}(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_{100}(x, t)}{\partial t} - \alpha_2 \varphi_{100}(x, t) + \beta_2 \varphi_{101}(x, t) - \\
&- \mu_1 \varphi_{100}(x, t) + \mu_2 \varphi_{110}(t) - \frac{\partial \varphi_{100}(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{000}(0, t)}{\partial x} G_2(x), \\
\frac{\partial \varphi_{101}(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_{101}(x, t)}{\partial t} + \alpha_2 \varphi_{100}(x, t) - \beta_2 \varphi_{101}(x, t) - \\
&- \frac{\partial \varphi_{101}(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{001}(0, t)}{\partial x} G_2(x), \\
\frac{\partial \varphi_{010}(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_{010}(x, t)}{\partial t} - \alpha_3 \varphi_{010}(x, t) + \beta_3 \varphi_{011}(x, t) - \\
&- \mu_2 \varphi_{010}(x, t) + \mu_1 \varphi_{110}(t) - \frac{\partial \varphi_{010}(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{000}(0, t)}{\partial x} G_1(x), \\
\frac{\partial \varphi_{011}(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_{011}(x, t)}{\partial t} + \alpha_3 \varphi_{010}(x, t) - \\
&- \beta_3 \varphi_{011}(x, t) - \frac{\partial \varphi_{011}(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{001}(0, t)}{\partial x} G_1(x), \\
\frac{\partial \varphi_{110}(t)}{\partial t} &= -\alpha_4 \varphi_{110}(t) + \beta_4 \varphi_{111}(t) - \mu_1 \varphi_{110}(t) + \frac{\partial \varphi_{100}(0, t)}{\partial x}, \\
\frac{\partial \varphi_{111}(t)}{\partial t} &= \alpha_4 \varphi_{110}(t) - \beta_4 \varphi_{111}(t) + \frac{\partial \varphi_{101}(0, t)}{\partial x}, \\
\frac{\partial \varphi_{110}(t)}{\partial t} &= -\alpha_5 \varphi_{110}(t) + \beta_5 \varphi_{111}(t) - \mu_2 \varphi_{110}(t) + \frac{\partial \varphi_{010}(0, t)}{\partial x}, \\
\frac{\partial \varphi_{111}(t)}{\partial t} &= \alpha_5 \varphi_{110}(t) - \beta_5 \varphi_{111}(t) + \frac{\partial \varphi_{011}(0, t)}{\partial x},
\end{aligned} \quad (2,1)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned}
\varphi_{rkj}(x, 0) &= \varphi_{rkj}^{(0)}(x); \quad \varphi_{00j}(x, 0) = \varphi_{00j}^{(0)}(x); \quad \varphi_{11j}(x, 0) = \varphi_{11j}^{(0)}(x); \\
p_{rkj}(0) &= p_{rkj}^{(0)}; \quad p_{00j}(0) = p_{00j}^{(0)}; \quad p_{11j}(0) = p_{11j}^{(0)}; \\
\varphi_{000}(0) &= p_{000}^{(0)}; \quad \varphi_{000}(0) = p_{000}^{(0)}.
\end{aligned}$$

3. Решение системы уравнений

Введем преобразования Лапласа [2]:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_{rkj}(s, u) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx-ut} dx \varphi_{rkj}(x, t) dt; \\
\tilde{\varphi}_{00j}(s, u) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx-ut} dx \varphi_{00j}(x, t) dt; \\
\tilde{\varphi}_{11j}(u) &= \int_0^\infty e^{-ut} d\varphi_{11j}(t); \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_{rkj}(0, u)}{\partial x} = \int_0^\infty e^{-ut} \frac{\partial \varphi_{rkj}(0, t)}{\partial x} dt; \\
\frac{\partial \tilde{\varphi}_{00j}(0, u)}{\partial x} &= \int_0^\infty e^{-ut} \frac{\partial \varphi_{00j}(0, t)}{\partial x} dt; \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_{11j}(0, u)}{\partial x} = \int_0^\infty e^{-ut} \frac{\partial \varphi_{11j}(0, t)}{\partial x} dt; \\
\tilde{\varphi}_{rkj}^{(0)}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} d\varphi_{rkj}(x); \quad \tilde{g}_l(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG_l(x);
\end{aligned}$$

$$\tilde{p}_{rkj}(u) = \int_0^\infty e^{-ut} dp_{rkj}(t), \quad (l = 1, 2)$$

Применяя к (2, 1) преобразование Лапласа, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
(u - s + \alpha_0) \tilde{\varphi}_{000}(s, u) &= \beta_0 \tilde{\varphi}_{001}(s, u) + \mu_2 \tilde{\varphi}_{010}(s, u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} + \tilde{\varphi}_{000}^{(0)}(s), \\
(u - s + \beta_0) \tilde{\varphi}_{001}(s, u) &= \alpha_0 \tilde{\varphi}_{000}(s, u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} + \tilde{\varphi}_{001}^{(0)}(s), \\
(u - s + \alpha_1) \tilde{\varphi}_{000}(s, u) &= \beta_1 \tilde{\varphi}_{001}(s, u) + \mu_1 \tilde{\varphi}_{100}(s, u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} + \tilde{\varphi}_{000}^{(0)}(s), \\
(u - s + \beta_1) \tilde{\varphi}_{001}(s, u) &= \alpha_1 \tilde{\varphi}_{000}(s, u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} + \tilde{\varphi}_{001}^{(0)}(s), \\
(u - s + \alpha_2 + \mu_1) \tilde{\varphi}_{100}(s, u) &= \beta_2 \tilde{\varphi}_{101}(s, u) + \mu_2 \tilde{\varphi}_{110}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{100}(0, u)}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial \tilde{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} \tilde{g}_2(s) + \tilde{\varphi}_{100}^{(0)}(s), \\
(u - s + \beta_2) \tilde{\varphi}_{101}(s, u) &= \alpha_2 \tilde{\varphi}_{100}(s, u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{101}(0, u)}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial \tilde{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} \tilde{g}_2(s) + \tilde{\varphi}_{101}^{(0)}(s), \\
(u - s + \alpha_3 + \mu_2) \tilde{\varphi}_{010}(s, u) &= \beta_3 \tilde{\varphi}_{011}(s, u) + \mu_1 \tilde{\varphi}_{110}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{010}(0, u)}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial \tilde{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} \tilde{g}_1(s) + \tilde{\varphi}_{010}^{(0)}(s), \\
(u - s + \beta_3) \tilde{\varphi}_{011}(s, u) &= \alpha_3 \tilde{\varphi}_{010}(s, u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{011}(0, u)}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial \tilde{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} \tilde{g}_1(s) + \tilde{\varphi}_{011}^{(0)}(s), \\
(u + \alpha_4 + \mu_1) \tilde{\varphi}_{110}(u) &= \beta_4 \tilde{\varphi}_{111}(u) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{100}(0, u)}{\partial x} + p_{110}^{(0)}, \\
(u + \beta_4) \tilde{\varphi}_{111}(u) &= \alpha_4 \tilde{\varphi}_{110}(u) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{101}(0, u)}{\partial x} + p_{111}^{(0)}, \\
(u + \alpha_5 + \mu_2) \tilde{\varphi}_{110}(u) &+ \beta_5 \tilde{\varphi}_{111}(u) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{010}(0, u)}{\partial x} + p_{110}^{(0)}, \\
(u + \beta_5) \tilde{\varphi}_{111}(u) &= \alpha_5 \tilde{\varphi}_{110}(u) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{011}(0, u)}{\partial x} + p_{111}^{(0)}.
\end{aligned} \quad (3, 1)$$

Устремляя в (3, 1) $s \rightarrow 0$, получаем другую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
(u + \alpha_0) \tilde{p}_{000}(u) &= \beta_0 \tilde{p}_{001}(u) + \mu_2 \tilde{p}_{010}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} + p_{000}^{(0)}, \\
(u + \beta_0) \tilde{p}_{001}(u) &= \alpha_0 \tilde{p}_{000}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} + p_{001}^{(0)}, \\
(u + \alpha_1) \tilde{p}_{000}(u) &= \beta_1 \tilde{p}_{001}(u) + \mu_1 \tilde{p}_{100}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} + p_{000}^{(0)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u + \beta_1) \tilde{p}_{001}(u) &= \alpha_1 \tilde{p}_{000}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} + p_{001}^{(0)}, \\
(u + \alpha_2 + \mu_1) \tilde{p}_{100}(u) &= \beta_2 \tilde{p}_{101}(u) + \mu_2 \tilde{p}_{110}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{100}(0, u)}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial \tilde{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} + p_{100}^{(0)}, \\
(u + \beta_2) \tilde{p}_{101}(u) &= \alpha_2 \tilde{p}_{100}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{101}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} + p_{101}^{(0)}, \\
(u + \alpha_3 + \mu_2) \tilde{p}_{010}(u) &= \beta_3 \tilde{p}_{011}(u) + \mu_1 \tilde{p}_{110}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{010}(0, u)}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial \tilde{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} + p_{010}^{(0)}, \\
(u + \beta_3) \tilde{p}_{011}(u) &= \alpha_3 \tilde{p}_{010}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{011}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} + p_{011}^{(0)}, \\
(u + \alpha_4 + \mu_1) \tilde{p}_{110}(u) &= \beta_4 \tilde{p}_{111}(u) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{100}(0, u)}{\partial x} + p_{110}^{(0)}, \\
(u + \beta_4) \tilde{p}_{111}(u) &= \alpha_4 \tilde{p}_{110}(u) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{101}(0, u)}{\partial x} + p_{111}^{(0)}, \\
(u + \alpha_5 + \mu_2) \tilde{p}_{110}(u) &= \beta_5 \tilde{p}_{111}(u) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{010}(0, u)}{\partial x} + p_{110}^{(0)}, \\
(u + \beta_5) \tilde{p}_{111}(u) &= \alpha_5 \tilde{p}_{110}(u) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{011}(0, u)}{\partial x} + p_{111}^{(0)}.
\end{aligned} \tag{3, 2}$$

Из (3, 2) найдем преобразования Лапласа нестационарного распределения вероятностей состояний дублированной системы.

Неизвестные частные производные находятся следующим образом. Сперва решаем последовательно пары уравнений в (3, 1) относительно $\tilde{\varphi}_{000}(s, u)$, $\tilde{\varphi}_{001}(s, u)$, $\tilde{\varphi}_{100}(s, u)$, $\tilde{\varphi}_{010}(s, u)$, $\tilde{\varphi}_{110}(s, u)$, $\tilde{\varphi}_{111}(s, u)$. Например, из четвертой пары уравнений системы (3, 1) получим

$$\begin{aligned}
[(u - s + \beta_3)(u - s + \alpha_3 + \mu_2) - \alpha_3 \beta_3] \tilde{\varphi}_{010}(s, u) &= (u - s + \beta_3) (\mu_1 \tilde{\varphi}_{110}(u) - \\
&- \frac{\partial \tilde{\varphi}_{010}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} \tilde{g}_1(s) + \tilde{\varphi}_{010}^{(0)}(s)) + \\
&+ \beta_3 \left(-\frac{\partial \tilde{\varphi}_{011}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} \tilde{g}_1(s) + \tilde{\varphi}_{011}^{(0)}(s) \right).
\end{aligned} \tag{2, 2}$$

Неизвестное $\tilde{\varphi}_{110}(u)$ находится из уравнения

$$\begin{aligned}
[(u + \beta_4)(u + \alpha_4 + \mu_1) - \alpha_4 \beta_4] \tilde{\varphi}_{110}(u) &= \\
= (u + \beta_4) \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_{100}(0, u)}{\partial x} + p_{110}^{(0)} \right) + \beta_4 \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_{101}(0, u)}{\partial x} + p_{111}^{(0)} \right).
\end{aligned}$$

Учитывая свойство аналитичности $\tilde{\varphi}_{010}(s, u)$ при $\operatorname{Re}\{s\} \geq 0$ и $\operatorname{Re}\{u\} > 0$, находим, что правая часть уравнения (2, 2) при

$$s = s_{31}(u) = u + \frac{\alpha_3 + \beta_3 + \mu_2}{2} - \sqrt{\frac{(\alpha_3 + \beta_3 + \mu_2)^2}{4} - \beta_3 \mu_2},$$

$$s = s_{32}(u) = u + \frac{\alpha_3 + \beta_3 + \mu_2}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha_3 + \beta_3 + \mu_2)^2}{4} - \beta_3 \mu_2}$$

равна нулю. Отсюда получаем два уравнения для левой части.

Аналогичным образом, поступая как в [3], получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{\varphi}_{010}(0, u)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{\varphi}_{011}(0, u)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{\varphi}_{100}(0, u)}{\partial x}, \\
\frac{\partial \tilde{\varphi}_{101}(0, u)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{\varphi}_{110}(0, u)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{\varphi}_{111}(0, u)}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Решая эту систему, определяем частные производные, которые затем подставляем в (2, 2). Таким образом находим преобразования Лапласа нестационарного распределения вероятностей состояний дублированной системы.

Для определения времени безотказной работы введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_{rkl}(x, t) &= p\{v_1(t) = r, v_2(t) = k, l(t) = j, \xi(t) < x, \\
&v_1(\tau) \neq 1, v_2(\tau) \neq 1 \text{ при } 0 \leq \tau \leq t\},
\end{aligned}$$

т. е. $\bar{\varphi}_{rkl}(x, t)$ обозначает вероятность того, что в момент t состояние системы будет rkl , $\xi(t) < x$, кроме $r = k = 1$ и до момента t не было состояния отказа системы ($r, k, j = 0, 1$) ($\bar{\varphi}_{00j}(x, t)$ обозначает то же самое, что и $\varphi_{00j}(x, t)$, и кроме того, что до момента t не было состояния отказа системы).

$\bar{\varphi}_{11j}(t)$ и $\bar{\varphi}_{11j}(t)$ обозначают $p\{v_1(t) = 1, v_2(t) = 1, l(t) = j \text{ при } 0 \leq \tau \leq t, v_1(\tau) \neq 1, v_2(\tau) \neq 1, t_1 \leq \tau < t, v_1(\tau) = 1, v_2(\tau) = 1\}$, только в первом случае восстанавливается основной элемент, а во втором резервный.

Для введенных функций $\bar{\varphi}_{rkl}(x, t)$, $\bar{\varphi}_{00j}(x, t)$, $\bar{\varphi}_{11j}(t)$, как ранее, составим систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Применяя к этой системе преобразование Лапласа, получим:

$$(u - s + \alpha_0) \bar{\varphi}_{000}(s, u) = \beta_0 \bar{\varphi}_{001}(s, u) + \mu_2 \bar{\varphi}_{010}(s, u) - \frac{\partial \bar{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} + \bar{\varphi}_{000}^{(0)}(s),$$

$$(u - s + \beta_0) \bar{\varphi}_{001}(s, u) = \alpha_0 \bar{\varphi}_{000}(s, u) - \frac{\partial \bar{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} + \bar{\varphi}_{001}^{(0)}(s),$$

$$(u - s + \alpha_1) \bar{\varphi}_{001}(s, u) = \beta_1 \bar{\varphi}_{001}(s, u) + \mu_1 \bar{\varphi}_{100}(s, u) - \frac{\partial \bar{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} + \bar{\varphi}_{001}^{(0)}(s),$$

$$(u - s + \beta_1) \bar{\varphi}_{001}(s, u) = \alpha_1 \bar{\varphi}_{000}(s, u) - \frac{\partial \bar{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} + \bar{\varphi}_{001}^{(0)}(s),$$

$$\begin{aligned}
(u - s + \alpha_2 + \mu_1) \bar{\varphi}_{100}(s, u) &= \beta_2 \bar{\varphi}_{101}(s, u) - \frac{\partial \bar{\varphi}_{100}(0, u)}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial \bar{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} \tilde{g}_2(s) + \bar{\varphi}_{100}^{(0)}(s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u - s + \beta_2) \bar{\varphi}_{101}(s, u) &= \alpha_2 \bar{\varphi}_{100}(s, u) - \frac{\partial \bar{\varphi}_{101}(0, u)}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial \bar{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} \tilde{g}_2(s) + \bar{\varphi}_{101}^{(0)}(s),
\end{aligned}$$

$$(u - s + \alpha_3 + \mu_2) \bar{\varphi}_{010}(s, u) = \beta_3 \bar{\varphi}_{011}(s, u) - \frac{\partial \bar{\varphi}_{010}(0, u)}{\partial x} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \bar{\varphi}_{000}(0, u)}{\partial x} \bar{g}_1(s) + \bar{\varphi}_{010}^{(0)}(s), \\
(u-s+\beta_3) \bar{\varphi}_{011}(s, u) &= \alpha_3 \bar{\varphi}_{010}(s, u) - \frac{\partial \bar{\varphi}_{011}(0, u)}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial \bar{\varphi}_{001}(0, u)}{\partial x} \bar{g}_1(s) + \bar{\varphi}_{011}(s), \\
u \bar{\varphi}_{110}(u) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_{100}(0, u)}{\partial x}, \\
u \bar{\varphi}_{111}(u) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_{101}(0, u)}{\partial x}, \\
u \bar{\varphi}_{110}(u) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_{010}(0, u)}{\partial x}, \\
u \bar{\varphi}_{111}(u) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_{011}(0, u)}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{2, 3}$$

Решая систему (2, 3), аналогичным образом находим неизвестные

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_{100}(0, u)}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\varphi}_{101}(0, u)}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\varphi}_{010}(0, u)}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\varphi}_{011}(0, u)}{\partial x}.$$

Преобразования Лапласа—Стилтьеса распределения времени безотказной работы равно

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-ut} dp \{t < t\} &= \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_{100}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{101}(0, u)}{\partial x} + \right. \\
&\left. + \frac{\partial \bar{\varphi}_{010}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{011}(0, u)}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, в статье найдены преобразования Лапласа нестационарного распределения вероятностей состояний и распределения времени безотказной работы дублированной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., Изд-во „Наука“, 1966.
2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., Изд-во „Наука“, 1965.
3. Ивницкий В. А., Касумов А. Б. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“. 1972, № 1.

Институт кибернетики АН Азерб. ССР

Поступило 2. I 1973.

А. Б. Гасымов

Е'тибарсыз хидмэт чиһазы һалында мүхтәлиф характеристикаларла әвәзедичи системин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә бир әсас вә бир жүкләнмәмиш еһтијат елементи олан системин тәдгигиндән бәһс олуишдур. Систем һәм иш вахты, һәм дә бошдајанма вахты бәрпа олуиш вә сырадан чыха билән чиһазла бәрпа едилмишдир. Әсас вә еһтијат елементләрин саз ишләмә вахт-

ларынын пайланма функцијалары ујғун олағар $G_1(x)$ вә $G_2(x)$ -дир. Системин бәрпа олуишмасы, саз ишләмәси вә хидмәтедичи чиһазын бәрпа олуишмасы вахтлары үстлү пайланма ғанунуна табедир.

Верилмиш системин һалларынын гејғи-статистик еһтималларынын вә онун саз ишләмә вахтынын пайланма функцијасынын Лаплас чевири-мәси тапылмышдыр.

A. B. Kasumov

The research of duplicated system with different characteristics [at nonreliable service device]

SUMMARY

At the paper it is researched the system with one basic and the reserve element, the reserve being unloaded.

System regeneration is carried out by the service device which can get out of action and regenerate in free and engaged states.

Time distribution of reliable work of basic and reserve element is accordingly.

Regeneration time of system elements, time of reliable work and service device regeneration have exponential distribution.

It is defined Laplace transformation of nonstationary distribution of states probabilities of given system and time distribution of its reliable work.

УДК 532. 546

Р. А. МУСТАФАЕВ

ДВУХСЛОЙНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОДНОФАЗНЫХ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Впервые двухслойная разностная схема с весовым множителем, равным 0,5, была рассмотрена в [1], где на многочисленных примерах продемонстрирована ее эффективность. В последующем эти схемы исследовались многими авторами [2, 3 и др.].

В [5] описано применение двухслойной разностной схемы с различными значениями весового множителя для решения группы нестационарных двухфазных задач типа Веригина. В настоящей статье рассматривается применение двухслойной разностной схемы с весовым множителем для решения двух нестационарных однофазных задач с подвижной границей, возникающих при создании и эксплуатации газохранилищ в водоносных пластах и эксплуатации газовых месторождений, граничащих с активными краевыми водами.

Пусть через скважину, расположенную в ограниченном пласте радиуса L , первоначально занятом водой, с известным давлением на контуре и в начальный момент времени, с произвольным весовым расходом нагнетается газ. Пренебрегая вязкостью газа, для определения давления в пласте и радиуса распространения газовой области имеем следующие задачи: определить давление $p(r, t)$ в водяной части пласта и подвижную границу $\rho(t)$, удовлетворяющие уравнению

$$\kappa \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial p}{\partial r} \right) = r^n \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{в } D: \{ \rho(t) < r < L, \quad 0 < t < T \}, \quad (1)$$

начальным и граничным условиям:

$$p(r, 0) = \psi(r), \quad \rho(0) \leq r \leq L; \quad (2)$$

$$p(\rho(t), t) = W(t) F_n^{-1}(t) = \Phi_n(t) \rho^{-(n+1)}(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (3)$$

$$p(L, t) = \varphi(t) \quad (4)$$

или

$$\frac{\partial p(L, t)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (4')$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \alpha_0 \frac{\partial p(\rho(t), t)}{\partial r}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где

$$\kappa = \frac{\kappa K}{m \mu}, \quad \alpha_0 = -\frac{\kappa}{m \mu \bar{\sigma}}, \quad W(t) = \frac{W_n(t) p_n T}{m \bar{\sigma} T_n},$$

$$F_n(t) = \begin{cases} \pi \rho^2(t) & \text{при } n=1, \\ \frac{2}{3} \pi \varepsilon \rho^3(t) & \text{при } n=2 \quad (\varepsilon=1-\text{полусфера}, \quad \varepsilon=2-\text{сфера}); \end{cases}$$

$n=1$ в случае нагнетания газа через одиночную гидродинамически совершенную скважину, расположенную в центре конечного кругового горизонтального пласта (плоскорadiaльное движение), $n=2$ при нагнетании газа через единичную скважину, расположенную в центре конечного сферического пласта (сферически-радиальное движение).

При $n=1$ точное решение задачи (1)–(5) в случае бесконечного пласта рассмотрено в [6], а численное решение с использованием неявной разностной схемы в случае конечного пласта – в [7]. При $n=2$ численное решение с применением неявной разностной схемы в случае пласта конечной длины дано в [8].

Поступая аналогично [4, 5], введем безразмерные переменные

$$\frac{r}{L_0} = \bar{r}, \quad \frac{t}{T_0} = \bar{t}, \quad \frac{p(r, t)}{p_0} = \bar{p}(r, t)$$

и выполним замену вида

$$s = [\bar{r} - \rho(t)] [L - \rho(t)]^{-1}.$$

В последующем ради простоты записи черточки отбрасываются. Для решения задачи (1)–(5) применим двухслойную разностную схему с весовым множителем θ и неравномерной сеткой. Тогда для определения искомых величин на $(j+1)$ -ом временном слое получим следующие итерационно-разностные выражения:

$$\begin{aligned} & [\alpha^{(k)} c_{i+1} (1 + c_{i+1})^{-1} + n \beta^{(k)} + \gamma^{(k)}] P_{i+1, j+1}^{(k)} - \\ & - [\alpha^{(k)} c_{i+1} + (n \beta^{(k)} + \gamma^{(k)}) (1 - c_{i+1}) + \theta^{-1}] P_{i, j+1}^{(k)} + \\ & + [\alpha^{(k)} c_{i+1} (1 + c_{i+1})^{-1} - n \beta^{(k)} - \gamma^{(k)}] c_{i-1} P_{i-1, j+1}^{(k)} = \\ & = \alpha [\bar{\alpha} c_{i+1} (1 + c_{i+1})^{-1} + n \bar{\beta} + \bar{\gamma}] P_{i+1, j} - \\ & - [\bar{\alpha} c_{i+1} + (n \bar{\beta} + \bar{\gamma}) (1 - c_{i+1}) + (1 - \theta)^{-1}] P_{i, j} + \\ & + [\bar{\alpha} c_{i+1} (1 + c_{i+1})^{-1} - n \bar{\beta} - \bar{\gamma}] c_{i-1} P_{i-1, j} \end{aligned} \quad (6)$$

$$(i = \overline{0, N}; \quad j = \overline{0, M-1}; \quad \kappa = 1, 2, \dots);$$

$$P_{i, 0} = \psi_i \quad (i = \overline{0, N}); \quad (7)$$

$$P_{0, j+1} = \Phi_{n, j+1}^{(k)} \quad (j = \overline{0, M-1}; \quad \kappa = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

$$P_{N, j+1} = \varphi_{j+1} \quad (j = \overline{0, M-1}) \quad (9)$$

или

$$\begin{aligned} & n \alpha^{(k)} P_{N-1, j+1}^{(k)} - (n \alpha^{(k)} + \theta^{-1}) P_{N, j+1}^{(k)} = \\ & = \alpha [n \bar{\alpha} P_{N-1, j} - (n \bar{\alpha} - (1 - \theta)^{-1}) P_{N, j}] \end{aligned} \quad (9')$$

$$\begin{aligned} & \rho_{j+1}^{(k)} = \rho_j - \bar{\alpha} \nabla_{j+1} [L - \rho_{j+1}^{(k-1)}]^{-1} \nabla_i^{-1} [P_{i, j+1}^{(k-1)} - P_{0, j+1}^{(k-1)}] \\ & (j = \overline{0, M-1}; \quad \kappa = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (10)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha^{(k)} &= 2a^2 \nabla_{j+1} [\nabla_{i+1} (L - \rho_{j+1}^{(k)})]^{-2}, \quad \gamma^{(k)} = (1 - s_i) (\rho_{j+1}^{(k)} - \rho_i) [2 \nabla_{i+1} (L - \rho_{j+1}^{(k)})]^{-1}, \\ \beta^{(k)} &= a^2 \nabla_{j+1} [2 \nabla_{i+1} [s_i (L - \rho_{j+1}^{(k)}) + \rho_{j+1}^{(k)}] (L - \rho_{j+1}^{(k)})^{-1}], \quad \alpha = -(1 - \theta) \theta^{-1}, \\ a^2 &= T_0 \times L_0^{-2}, \quad \bar{\alpha} = -\alpha_0 T_0 p_0 L_0^{-2}, \quad c_{i+1} = \nabla_{i+1} \nabla_i^{-1}, \quad 0 < \theta < 1; \end{aligned} \quad (11)$$

$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ получаются из выражений (11) при отбрасывании верхнего индекса у $\alpha^{(k)}$, $\beta^{(k)}$, $\gamma^{(k)}$ и замене индексов $j+1$ и j соответственно на j и $j-1$.

Таблица

θ	0,5		0,7		0,9		1,0		БИС; 1,0	
$10^5 t$	$10^3 p(t)$	$P(p(t), t)$	$10^3 p(t)$	$P(p(t), t)$	$10^3 p(t)$	$P(p(t), t)$	$10^3 p(t)$	$P(p(t), t)$	$10^3 p(t)$	$P(p(t), t)$
1	0,157	1,496	0,155	1,521	0,154	1,539	0,154	1,547	0,154	1,547
2	0,198	1,614	0,199	1,603	0,199	1,602	0,199	1,604	0,203	1,464
4	0,269	1,612	0,270	1,605	0,270	1,604	0,270	1,604	0,276	1,528
8	0,375	1,586	0,376	1,584	0,376	1,583	0,376	1,583	0,381	1,542
16	0,529	1,561	0,529	1,560	0,529	1,560	0,529	1,560	0,533	1,535
32	0,748	1,542	0,748	1,541	0,749	1,541	0,749	1,541	0,752	1,527
64	1,06	1,529	1,06	1,529	1,06	1,529	1,06	1,529	1,06	1,520
128	1,47	1,522	1,47	1,522	1,47	1,522	1,47	1,522	1,50	1,513
256	2,13	1,511	2,13	1,511	2,13	1,509	2,13	1,511	2,13	1,506
512	3,01	1,509	3,01	1,509	3,01	1,509	3,01	1,509	3,01	1,504
1024	4,25	1,510	4,25	1,510	4,25	1,510	4,25	1,510	4,26	1,503
2048	6,01	1,512	6,01	1,512	6,01	1,512	6,01	1,512	6,03	1,505
3072	7,40	1,514	7,40	1,514	7,40	1,514	7,40	1,514	7,41	1,504

Таблица 2

θ	0,5		0,7		0,9		1,0		БИС; 1,0	
$10^5 t$	$10^3 p(t)$	$P(p(t), t)$	$10^3 p(t)$	$P(p(t), t)$	$10^3 p(t)$	$P(p(t), t)$	$10^3 p(t)$	$P(p(t), t)$	$10^3 p(t)$	$P(p(t), t)$
1	0,100	1,100	0,100	1,200	0,100	1,200	0,100	1,200	0,100	1,200
2	0,103	1,269	0,103	1,271	0,103	1,271	0,103	1,273	0,100	1,399
4	0,110	1,335	0,110	1,336	0,110	1,336	0,110	1,337	0,109	1,381
8	0,125	1,341	0,125	1,341	0,125	1,341	0,125	1,341	0,125	1,339
16	0,148	1,288	0,148	1,289	0,148	1,289	0,148	1,288	0,149	1,278
32	0,182	1,224	0,182	1,224	0,182	1,224	0,182	1,224	0,183	1,216
64	0,228	1,169	0,228	1,169	0,228	1,169	0,228	1,169	0,228	1,162
128	0,287	1,126	0,287	1,126	0,287	1,126	0,287	1,126	0,287	1,120
256	0,363	1,095	0,363	1,095	0,363	1,095	0,363	1,095	0,363	1,089
512	0,459	1,072	0,459	1,072	0,459	1,072	0,459	1,072	0,460	1,063
1024	0,580	1,055	0,580	1,055	0,580	1,055	0,580	1,055	0,582	1,047
2048	0,733	1,042	0,733	1,042	0,733	1,042	0,733	1,042	0,736	1,031
3072	0,841	1,036	0,841	1,036	0,841	1,036	0,841	1,036	0,851	1,022

t	$0,2 \cdot 10^{-4}$		$0,16 \cdot 10^{-3}$		$0,64 \cdot 10^{-3}$		$0,256 \cdot 10^{-2}$	
N_n	N_1	N_2	N_1	N_2	N_1	N_2	N_1	N_2
0,5	17	19	13	14	10	10	7	7
0,7	18	19	14	14	10	11	7	7
0,9	18	14	14	14	10	11	7	7
1,0	15	14	14	14	10	11	7	7

Процесс вычислений осуществлялся по следующим схемам:

1. Итерационная неявная разностная схема. Имея $(k-1)$ -ое приближение искомых величин, из (10) определяется $p_{j+1}^{(k)}$, а затем из (6), (8), (9) или (9') определяются все $P_{i,j+1}^{(k)}$. Итерационный процесс происходил до совпадения двух последовательных приближений с заданной точностью.

2. Безытерационная неявная разностная схема (БИС). По этой схеме на первом временном шагу вычисление происходит как в п. 1. Затем итерируется только значение $p_{j+1}^{(k)}$. После нахождения p_{j+1} из (6), (8), (9) или (9') определяются $P_{i,j+1}$.

Для решения получающейся системы линейных алгебраических уравнений использовался метод прсгонки. В качестве разностной сетки применялось разбиение по пространственной переменной: начальные 5—7 шагов равны $p(0)$, затем шаг удваивался до тех пор, пока сумма всех шагов не достигала некоторого значения H . Если после удвоения сумма оказывается больше H , то шаг равен разности между H и суммой предыдущих шагов. Последующие шаги равны h .

В качестве примера численных расчетов задачи (1)—(5), решенной на ЭЦВМ „БЭСМ-2М“, рассмотрим случаи:

$$a^2 = 0,4323 \cdot 10^{-1}, \quad \alpha = 0,2087 \cdot 10^{-1},$$

$$p(0) = 0,1 \cdot 10^{-2}, \quad L = 10 \text{ км},$$

$$\Phi_n(t) = \begin{cases} 3 \Phi_n t + p^{n+1}(0), & 0 < t < \frac{1}{3}, \\ \Phi_n + p^{n+1}(0), & \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3}, \\ 3 \Phi_n (1-t) + p^{n+1}(0), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

$$\varphi(r) = 1, \varphi(t) = 1, \quad n = 1; 2.$$

Условия (12) соответствуют следующему технологическому процессу. Через скважину, расположенную в пласте радиусом 10 км при радиусе в начальный момент газовой области радиусом $p(0) = 10 \text{ м}$ в течение четырех месяцев закачивается 10^3 км^3 газа, затем следуют четырехмесячный простой хранилища и сброс всего закачанного газа. Результаты численных расчетов для $n=1$, $\Phi_1 = 0,8891 \cdot 10^{-1}$ и $n=2$, $\epsilon=1$, $\Phi_2 = 0,6668 \cdot 10^{-5}$ при условии (4) сведены соответственно в табл. 1 и 2. В этих таблицах указаны значения подвижной границы $p(t)$ и давления $P(p(t), t)$ на подвижной границе в разные моменты времени при различных значениях весового множителя θ . Как следует из табл. 1 и 2, уже через несколько временных шагов значения искомых величин при различных θ совпадают. Для сравнения в таблицах приведены значения, вычисленные при $\theta=1$, т. е. по чисто неявной схеме и по схеме БИС. Как видно из этих таблиц, схема БИС дает хорошее практическое совпадение

Таблица 3

$0,512 \cdot 10^{-2}$		$0,1624 \cdot 10^{-1}$		$0,2048 \cdot 10^{-1}$		$0,3072 \cdot 10^{-1}$	
N_1	N_2	N_1	N_2	N_1	N_2	N_1	N_2
5	5	2	2	2	2	2	2
5	5	3	2	2	2	2	2
5	5	3	2	2	2	2	2
5	5	3	2	2	2	2	2

со значениями искомых величин, вычисленных по итерационной схеме 1. Для выявления влияния весового множителя θ при прочих равных условиях на скорость сходимости итерационного процесса в табл. 3 приведено число итераций N , необходимое для достижения заданной точности вычислений в различные моменты времени. Нижний индекс при N соответствует значениям $n=1$ и $n=2$. Из табл. 3 видно, что через несколько десятков временных шагов число итераций, необходимое для достижения заданной точности вычислений при различных θ , совпадает. При этом двухслойная схема с весовым множителем $\theta < 1$ и чисто неявная схема ведут себя практически одинаково. Аналогичные результаты получаются и в случае непроницаемого внешнего контура, т. е. при условии (4').

Автор благодарен К. Ф. Ширинову за внимание и содействие в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crank J., Nicolson P. Proceeding Cambr. Phil. soc., 43, 1947.
2. Douglas J. J. soc. Industr. and Appl. Math., 3, № 1, 1955.
3. Самарский А. А. ЖВМ и МФ, т. 2, 1962, № 5.
4. Мустафаев Р. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1972, № 1.
5. Мустафаев Р. А. Тр. ИК АН Азерб. ССР, 1972.
6. Чарный И. А. Подземная гидродинамика. Гостехиздат, 1963.
7. Пирмамедов Б. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1967, № 3.
8. Мустафаев Р. А. Тр. ИК АН Азерб. ССР, 1971.

Институт кибернетики АН Азерб. ССР

Поступило 2. I 1973

Р. А. Мустафаев

Икигатлы фэрглэр схеми илэ бэ'зи гејри-стационар бирфаазалы мүтәһәррик сәрһәдли мәсәләләрин һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә сујун газ илэ сыхышдырылмасына даир ики гејри-стационар бирфаазалы мүтәһәррик сәрһәдли мәсәләләрин әдәди һәллиндән бәһс едилмишдир. Биринчи мәсәләдә сонлу үфғи су лајында, икинчи мәсәләдә исә сонлу сферик су лајында јерләшән гујуја газын вурулмасы просесинә бахылмышдыр. Әдәди һесабамаһларда сонлу фэргләр үсулунун икигатлы схеминдән истифадә олунмушдур. Әдәди һесабамаһлар „БЭСМ-2М“ ЕНМ-да һәлл едилмишдир.

R. A. Mustafaeв

Two-layer difference scheme of the solution of certain unsteady-state one-phase problems with moving boundary

SUMMARY

This paper treats the application of two-layer difference scheme with weighted factor for the solution of two unsteady one-phase problems with moving boundary.

Numerical calculations were carried out on the „БЭСМ-2М“ computer.

УДК 62 518:155. 001. 57

О. К. ХАНМАМЕДОВ

ОБ ОДНОЙ ПОИСКОВО-ИГРОВОЙ МНОГОШАГОВОЙ ЗАДАЧЕ

Настоящая статья посвящена исследованию аспекта оптимального движения поисковой системы, рассмотренной в [1], с возобновлением движения ее непосредственно из опрошенной очередной точки локального минимума многоэкстремальной функции $y=F(x)$. Возобновление движения достигается введением вспомогательной полунепрерывной функции

$$F(x: x \in X^o) = \begin{cases} y, & y < y_i, \\ \bar{y}, & y \geq y_i; \end{cases} \quad (1)$$

$i=1, 2, \dots$ — номер локального минимума, из которого возобновляется движение, $\bar{y}$ определяется из уравнения

$$(x - x_i)/c + \bar{y}/y_i = 1, \quad (2)$$

где c может определяться одним из выражений

$$c = c(\mu_1(a)) = \sup X^o - x_i, \quad (3)$$

$$c = c(\mu_2(a)) = \inf X^o - x_i; \quad (4)$$

μ_1, μ_2 — стратегии поисковой системы, определяемые при заданных случайных числах $a \in [-1, 1]$, a — фактор неопределенности. На точках локального минимума строится ориентированный граф, соответствующий заданной многоэкстремальной функции. Узлы графа соответствуют состояниям некоторого конечного автомата [2] с правилами движения по графу, установленными в соответствии с алгоритмом поиска [1].

Процедура глобального поиска строится таким образом, что система после нахождения очередного локального минимума выбирает значение параметра c согласно (3) или (4). При этом скорость сходимости процедуры глобального поиска существенно зависит от „удачности“ выбора значения c и, следовательно, возникает необходимость исследования возможности выбора такой оптимальной стратегии, которая минимизировала бы время поиска глобального минимума. Рассмотрим некоторые стохастические постановки игровой задачи, порождаемой методом глобального поиска [1].

Допустим, на конечном числе выборок $1, 2, 3, \dots$ „природа“ распределила случайные числа x_{ji} (где i — номер выборки, j — номер числа x из последовательности $(\inf X^o = x_1 < x_2 < \dots < x_n = \sup X^o)$) и состав-

ветствующие им значения функции $F(x_{ji}) = b_{ji}$ таким образом, что

$$\max_{r_x} M\{L(x, \mu(a))\}, \quad (5)$$

принимая r_a известным и фиксированным (r_a, r_x — функции распределения a и x , M — математическое ожидание, L — некоторая функция, позже мы на ней остановимся).

В свою очередь, поисковая система распределяет значения $a \in [-1, 1]$, т. е. строит последовательность $\{a_i\}$ таким образом, чтобы

$$\min_{r_a} \max_{r_x} M\{L(x, \mu(a))\}, \quad (6)$$

r_x считается фиксированным.

Поисково-игровую задачу (6) в чистых для автомата стратегиях можно сформулировать по-иному. В задаче (6) противник автомата — «природа» наделена некоторыми активными действиями с функцией распределения r_x . Допустим, что активные действия (право выбора r_a) присущи лишь поисковому автомату, при этом автомат предполагает априорный вариант распределения r_x и выбирает действия r_a согласно этим предположениям так, чтобы

$$\min_{r_a} M\{\max_{r_x} L(x, \mu(a))\}. \quad (7)$$

Такая постановка исследуемой задачи в ряде случаев правомернее, нежели (6), так как в действительности «ход природы» есть не что иное, как проявление неопределенности, в общем-то пассивной, во случайной среды. Кроме того, правомерность задачи (7) следует из очевидного неравенства:

$$M \max_{r_x} \{L(x, \mu(a))\} \geq \max_{r_x} M\{L(x, \mu(a))\}.$$

Пусть $N(x, a)$ — число опрошенных узлов графа, $R(x_0)$ — множество узлов графа, полученное после случайного выбора первоначальной точки $x_0 \in X^0$, т. е. $R(x_0)$ — конечное множество, причем $\sup R(x_0) = R \geq N(x, a)$.

Пусть

$$L_N = \sum_{i=1}^{N(x,a)} Q^1(x(i-1), a(i)), \quad (8)$$

где Q^1 — независимые случайные числа, определяемые как

$$Q^1(x(i-1), a(i)) = \int_{x_j(i)}^{x_{l(i+1)}} \sqrt{1 + F^{(1)2}(x)} dx, \quad l-j=1. \quad (9)$$

Или с учетом различия скоростей движения системы на ребрах графа:

$$Q^1 = \frac{\int_{x_j(i)}^{x_{l(i+1)}} \sqrt{1 + F^{(1)2}(x)} dx}{|F(x_j(i)) - F(x_{l(i+1)})|},$$

причем

$$Q^j(x(i-1), a(i)) = \begin{cases} Q_1^1 \cap Q_2^1 (Q_2^1, Q_1^1 \neq 0), & \text{если } \nabla F(x_{l(i+1)}) = 0, \\ Q_k^1 = 0, & \text{если для } \mu_k (k=1, 2) \exists x(i+1) \in X^0, \\ & \exists \nabla F(x(i+1)) = 0 \text{ и } F(x(i+1)) > F(x(i)), \end{cases}$$

где $l, j \in R(x_0)$ — номера очередных узлов графа.

В соответствии с (7) требуется

$$\min_{r_a} M_a \{\max_{r_x} L_N\}. \quad (10)$$

Учитывая, что в задаче (8—10) при случайно выбранной первоначальной точке $x_0 \in X^0$ справедливо

$$\max_{r_x} L_N = L_{R(x_0)}, \quad (11)$$

то задача (10) в случае успешной игры «природы» примет вид

$$\min_{r_a} M_a \{L_{R(x_0)}\}. \quad (12)$$

Таким образом, поисковый автомат при выборе стратегий целенаправленного псеведения предполагает самую наихудшую ситуацию в среде; а именно: при выбранной начальной точке x_0 общее число точек x_i локальных минимумов $F(x)$, для которых $F(x_i) < F(x_0)$, $i = 1, 2, \dots, R(x_0)$ наибольшее.

Решая задачу (12), автомат преследует две цели: минимизацию числа опрашиваемых узлов графа (т. е. выделение минимального множества $N \in R(x_0)$) и минимизацию (8) на множестве N , так как одному и тому же минимальному множеству N в силу выражения (9) могут соответствовать несколько различных значений (12).

Пусть N — заранее не заданное, произвольное число опрошенных узлов графа. Тогда в силу (8)

$$L_N = Q^1(x(0), a(1)) + Q^2(x(1), a(2)) + \dots + C^N(x(N-1), a(N)), \quad (13)$$

причем автомат осуществляет некоторое преобразование

$$x(i) = T(x(i-1), a(i)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

В соответствии с (12) задача поисковой системы заключается в

$$\min M_a \left\{ \sum_{i=1}^N Q^1(x(i-1), a(i)) \right\}. \quad (15)$$

Если обозначить

$$M_a \left\{ \sum_{i=1}^N Q^1(x(i-1), a(i)) \right\} = \Phi_N(x(0)), \quad (16)$$

то на первом этапе для произвольного $n(1)$ будем иметь

$$\Phi_N(x(0)) = M_a [Q^1(x(0), a(1))] + M_a \left\{ \sum_{i=2}^N Q^1(x(i-1), a(i)) \right\},$$

но, так как $a(1)$ должно быть оптимальным, удовлетворяющим (15) то очевидно, что

$$\Phi_N(x(0)) = \min_{a(1)} \{M_a [Q^1(x(0), a(1))] + \Phi_{N-1}(x(1))\}.$$

Рассуждая аналогичным образом, можно установить, что

$$\Phi_{N-1}(x(1)) = \min_{a(2)} \{M_a [Q^2(x(1), a(2))] + \Phi_{N-2}(x(2))\},$$

где

$$\Phi_{N-2}(x(2)) = \min_{a(3)} \{M_a [Q^3(x(2), a(3))] + \Phi_{N-3}(x(3))\}$$

и т. д...

$$\Phi_1(x(N-1)) = \min_{a(N)} M_a [Q^N(x(N-1), a(N))].$$

Тогда для произвольного i -го этапа принятия решения будем иметь

$$\Phi_{N-i+1}(x(i-1)) = \min_{a(i)} \{M_a [Q^i(x(i-1), a(i))] + \Phi_{N-i}(x(i))\}; \quad (17)$$

с учетом (14)

$$\Phi_{N-i+1}(x(i-1)) = \min_{a(i)} \{M_a [Q^i(x(i-1), a(i))] + \Phi_{N-i}[T(x(i-1), a(i))]\}.$$

Таким образом, на каждом i -ом этапе принятия решения вырабатывается $a(i)$, означающий определенный закон распределения вероятностей выбора альтернатив (3) и (4), при этом поисковая система представляет собой последовательностную машину [3] без обратной связи. Ясно, что на каждом этапе поисково-игровой системе необходимо решать одну и ту же задачу (17).

Процесс решения задачи (17) заключается в удачном выборе одного из двух условий (3) и (4). При этом автомат осуществляет свой выбор рандомизированно. Допустим, $p_1 = p(c(\mu_1))$ и $p_2 = p(c(\mu_2))$ — вероятности выбора автоматом стратегий μ_1 и μ_2 , соответственно. Выбор стратегии μ_1 означает выбор условия (3), а выбор стратегии μ_2 — условия (4). Вероятности p_1, p_2 связаны с параметром a зависимостями

$$p_1 = (1 + a(i))/2 \text{ и } p_2 = (1 - a(i))/2. \quad (18)$$

Пусть на произвольном i -ом этапе многошаговой задачи (15) выбрано то или иное значение $a(i)$, которому соответствуют произвольные вероятности (18), и пусть на всех последующих этапах с вероятностью 1 выбираются лишь только оптимальные значения $a^*(k)$, $\mu_j(a^*(k))$, $k > i$, $j = 1, 2$. Тогда значение $a(j)$ в силу альтернатив (3), (4) соответствуют два числа: Q_1^i и Q_2^i , где

$$Q_1^i = \Phi_{N_1}(x(i-1)), \quad Q_2^i = \Phi_{N_2}(x(i-1)); \quad (19)$$

N_1, N_2 — минимальные множества, соответствующие выбору на i -ом этапе альтернативы (3), (4), соответственно, $\Phi_{N_1}(x(i-1))$ и $\Phi_{N_2}(x(i-1))$ определяются выражением (16).

Поскольку каждая из стратегий μ_1, μ_2 , выбранных автоматом на произвольном этапе, в общем случае согласно (9) может привести к одному из двух исходов: C_1^i, C_2^i , то задача (17) для произвольного этапа исследуемого многошагового процесса на двумерной плоскости характеризуется четырьмя ситуациями $S(j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, представленными в табл. 1. Очевидно, что

$$Q_{11}^i = Q_{12}^i = C_1^i, \quad Q_{21}^i = Q_{23}^i = C_2^i,$$

Таблица 1

$S(j)$	p_1	Q_{11}^i	p_2	Q_{21}^i
$S(1)$	$\frac{1+a}{2}$	Q_{11}^i	$\frac{1-a}{2}$	Q_{21}^i
$S(2)$	.	Q_{12}^i	"	0
$S(3)$	.	0	.	Q_{23}^i
$S(4)$	.	0	.	0

а ситуация $S(4)$ соответствует окончанию процесса глобального поиска. Математическое ожидание приращения функционала (12) для каждой из ситуаций можно определить по формуле

$$M\{Q_j^i\} = C_{1j}^i p_1 + Q_{2j}^i p_2, \quad i = 1, 2, \dots,$$

откуда согласно табл. 1 имеем:

$$M\{Q_{j=1}^i\} = C_1^i \left(\frac{1+a(i)}{2} \right) + C_2^i \left(\frac{1-a(i)}{2} \right);$$

$$M\{Q_{j=3}^i\} = C_2^i \left(\frac{1-a(i)}{2} \right); \quad M\{Q_{j=2}^i\} = C_1^i \left(\frac{1+a(i)}{2} \right); \quad (20)$$

$$M\{Q_{j=4}^i\} = 0.$$

Пусть $G(s, i)$ — функция распределения вероятностей $p(s(j), i)$ наступления $S(j)$ ситуации на i -ом этапе принятия решения. Тогда суммарный вклад в $L(a, N)$ на i -ом этапе вычислим по формуле

$$M\{Q^i\} = \sum_{j=1}^4 M\{Q_j^i\} \cdot p(S(j), i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (21)$$

или, подставив соответствующие значения (20) в (21), из условия оптимальности $M_a\{Q^i\} = 0$ получим

$$\frac{C_1^i}{C_2^i} = \frac{p(S(1), i) + p(S(3), i)}{p(S(1), i) + p(S(2), i)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Условие оптимальности (22) в случае неполной информированности, с учетом цели функционирования системы (12), позволяет устанавливать приближенные приоритеты той или иной ситуации в табл. 1. Действительно, зная положение избирающей точки $x_j(i) \in X^o$, нетрудно оценить соотношение Q_1^i/C_2^i . Например, если принять

$$Q_1^i = x_j(i-1) - \inf X^o, \quad Q_2^i = \sup X^o - x_j(i-1).$$

Свой выигрыш, в смысле (12), поисково-игровой автомат может существенно увеличить в случае наличия информации о соотношении Q_1^i/C_2^i , $i = 1, 2, 3, \dots$, причем в зависимости от значения этого соотношения оптимальные значения параметра a есть $a^* = \text{sign } 1$, что легко можно установить из выражения (21) с учетом (20). Кроме того, необходимые условия оптимальности, вытекающие из условия (22) при некоторых гипотезах о функции $G(k, S)$ распределения вероятностей $p(S(j), k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$; $j = 1, 2, 3, 4$, могут быть использованы для установления соотношения C_1^k/Q_2^k (табл. 2).

Таблица 2

$G(k, S)$	Q_1^k/Q_2^k	$a^*(k)$	p_1	p_2
$p(S(2), k) < p(S(3), k)$	< 1	$+1$	1	0
$p(S(2), k) > p(S(3), k)$	> 1	-1	0	1
$p(S(2), k) = p(S(3), k)$	1	$[-1, 1]$	$[0, 1]$	$[0, 1]$

Пусть многошаговый процесс принятия решения — марковский процесс, для которого $G(k, S | 1, 2, 3, \dots, k-1) = G(k, S | k-1)$, пусть также $p(Q(k) | S(j))$, $k = 1, 2, 3, \dots$; $j = 1, 2, 3, 4$ — вероятность выполнения условия $\Delta L(k) = L(a(k), k) - L(a(k-1), k-1) = Q(k) \neq 0$ для j -ой ситуации на k -ом этапе принятия решения. В соответствии с табл. 1 имеем $p(Q(k) | S(1)) = 1$, $p(Q(k) | S(2)) = p(Q(k) | S(3)) = 0.5$; $p(Q(k) | S(4)) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Пусть при $k = 1$ априори принят определенный закон распределения вероятностей $G(1, S)$. Согласно табл. 2 автомат выбирает $a^* = \text{sign } 1$. После реализации этого этапа принятия решения определяем $\Delta G(2, S) = (\Delta p(S(1), 2), \Delta p(S(2), 2), \Delta p(S(3), 2), \Delta p(S(4), 2))$, где $\Delta p(S(j), 2) = p(S(j) | Q(1)) - p(S(j), 1)$, $j = 1, 2, 3, 4$, и с учетом значений вероятностей

$$p(Q(\kappa) | S(1)) \text{ по формуле Байеса для } \kappa\text{-го этапа}$$

$$p(S(j) | Q(\kappa)) = \frac{p(S(j), \kappa) \cdot p(Q(\kappa) | S(j))}{\sum_{j=1}^{s-4} p(S(j), \kappa) \cdot p(Q(\kappa) | S(j))}, \quad (23)$$

$$j = 1, 2, 3, 4; \kappa = 1, 2, \dots$$

получаем новые значения вероятностей наступления той или иной ситуации в системе на последующем этапе принятия решения, т. е. получаем $p(S(j), 2); j = 1, 2, 3, 4$.

Сопоставив новые значения вероятностей $p(S(j), 2)$ с табл. 2, автомат выбирает оптимальную стратегию $a^*(2) = \text{sign } 1$. Проведя аналогичные вычисления на конечном числе этапов принятия решения, можно установить, что

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} p(S(j) | Q(\kappa)) = p^*(S(j)), j = 1, 2, 3, 4, \quad (24)$$

$p^*(S(j))$ — финальная ситуационная вероятность. Расчетами установлено, что если $p(S(1), 1) \neq 0$, то процесс $S(j) \rightarrow S^*(j), j = 1, 2, 3, 4$, эргодичный, с финальными вероятностями

$$p^*(S(1)) = 1, p^*(S(2)) = p^*(S(3)) = p^*(S(4)) = 0. \quad (25)$$

Для эргодического процесса $S(j) \rightarrow S^*(j)$ финальные ситуационные вероятности $p^*(S(j))$ можно определить из (23), приняв в (23) $p(S(j), Q(\kappa)) = p(S(j), \kappa - 1) = p^*(S(j)), j = 1, 2, 3, 4; \kappa = 1, 2, \dots$ и решая полученную систему уравнений относительно $p^*(S(j))$.

После десяти тактов уточнения гипотез по формуле (23) вероятности $p(S(j))$ стабилизируются и принимают значения (25). Согласно (25) на каждом последующем (после десятого) этапе принятия решения имеет место ситуация $S(1)$ с вероятностью 1. Финальная матричная игра автомата с „природой“ в ситуации $S(1)$ имеет матрицу

$$\begin{matrix} & \eta_1 & \eta_2 \\ p_1 & \begin{vmatrix} Q_1 & Q_2 \end{vmatrix} \\ p_2 & \begin{vmatrix} Q_2 & Q_1 \end{vmatrix} \end{matrix}. \quad (26)$$

где η_1, η_2 — стратегии „природы“, $\eta_1 (Q_2 < Q_1), \eta_2 (Q_2 > Q_1)$. Поскольку $Q_1 \neq Q_2$, матрица (26) не имеет седловой точки. В случае выбора „природой“ η_1 математическое ожидание цены игры определяется как

$$M(Q(\eta_1)) = p_1 Q_1 + (1 - p_1) \cdot Q_2, \quad (27)$$

а в случае выбора „природой“ η_2

$$M(Q(\eta_2)) = p_1 Q_2 + (1 - p_1) \cdot Q_1. \quad (28)$$

Таблица 3

η_1	$p_1 < 0,5$	$\Delta M(Q(\eta_1))$	$\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} Q_2 < Q_1 \\ Q_2 > Q_1 \end{matrix}$
	$p_1 > 0,5$	$\Delta M(Q(\eta_1))$	$\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} Q_2 > Q_1 \\ Q_2 < Q_1 \end{matrix}$
η_2	$p_1 < 0,5$	$\Delta M(Q(\eta_2))$	$\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} Q_1 < Q_2 \\ Q_1 > Q_2 \end{matrix}$
	$p_1 > 0,5$	$\Delta M(Q(\eta_2))$	$\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} Q_1 > Q_2 \\ Q_1 < Q_2 \end{matrix}$
η_1, η_2	$p_1 = 0,5$	$\Delta M(Q(\eta_1, \eta_2))$	=	0	Произвольно

Если автомат использует смешанные стратегии $p_1 = p_2 = 0,5$, то независимо от рандомизаций со стороны „природы“

$$[M(Q(\eta_1, \eta_2)) = 0,5(Q_1 + Q_2)]. \quad (29)$$

Тогда в соответствии с (27)–(29)

$$\Delta M(Q(\eta_1)) = M(Q(\eta_1, \eta_2)) - M(Q(\eta_1)) = (p_1 - 0,5)(Q_2 - Q_1), \quad (30)$$

$$\Delta M(Q(\eta_2)) = M(Q(\eta_1, \eta_2)) - M(Q(\eta_2)) = (p_1 - 0,5)(Q_1 - Q_2). \quad (31)$$

Из (30), (31) следует истинность табл. 3, согласно которой оптимальным в смысле (12) стратегиям автомата соответствуют неравенство $\Delta M > 0$ и правило:

$$\text{если } Q_2 < Q_1, \text{ то } p_1 < 0,5; p_2 > 0,5; \quad (32)$$

$$\text{если } Q_2 > Q_1, \text{ то } p_1 > 0,5; p_2 < 0,5,$$

предполагающее наличие информации о соотношении Q_2/Q_1 .

В случае, когда система функционирует в условиях отсутствия информации, математическое ожидание цены игры определяется как

$$M(Q(p, q)) = (Q_2 - Q_1)(p_1 - 2p_1q_1 + q_1) + Q_1. \quad (33)$$

Из (33) нетрудно установить, что в случае отсутствия информации наилучшими стратегиями поведения как для автомата, так и для „природы“ являются смешанные стратегии $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0,5$. Однако смешанные стратегии $p_1 = p_2 = 0,5$, гарантируя некоторую минимаксную цену игры $0,5(Q_1 + Q_2)$, не позволяют улучшить ее, ибо в этом случае автомат функционирует с меньшим риском и максимальной энтропией $H_{S_1} = \sum_i -p_i \log p_i = \max H = 1$, а избыточность

R_{S_1} , характеризующая возможность улучшения эффективности поиска и определяемая как $R_{S_1} = 1 - H_{S_1} = 0$, минимальна. С введением ограничений (32) система начинает функционировать в условиях возросшего риска, энтропия H_{S_1} уменьшается, а избыточность $R_{S_1} \neq 0$. Присутствие элемента риска в действиях автомата и избыточности в поисковой системе могут увеличить эффективность функционирования рассматриваемой системы. В связи с этим возникает необходимость исследования одного класса стохастических автоматов с переменной структурой, отличных от рассмотренных в [4] тем, что рассматриваемые нами автоматы взаимодействуют со случайной средой $S(p_1, p_2)$, изменяя ее. Исследованию этого класса стохастических автоматов будет посвящена отдельная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ханмамедов О. К. „Автом. и вычисл. техника“, 1972, № 3.
2. Ханмамедов О. К. „Автом. и вычисл. техника“, 1972, № 4.
3. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М., „Наука“, 1964.
4. Цетлин М. Л. Исследование по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., „Наука“, 1969.

Институт кибернетики АН Азерб. ССР

Поступило 20. IV 1973

О. Г. Ханмамедов |

Бир чохадымлы ахтарыш-оюн масэлэси наггында

ХҮЛАСӘ

Мәгалә ахтарыш системинин оптимал һәрәкәт мәсәләләринин тәдгиг олунмасы вә бу үсуллардан алынган стохастик минимакс мәсәләләринин тәдгигинә һәср едилмишдир. Тәдгигатлар нәтижәсиндә ајдын олмушдур ки, јахынлашма сүр'әти элағәләндиричи параметрин стра- текијасынын сечилмәси еһтималындан даһа чох асылыдыр.

On one searching-gaming multi-step problem

SUMMARY

It is researched the aspect of optimal movement of searching system, discussed in early works of the author. The system renews the movement directly from the interrogated regular point of local minimum of multi-extremum function. The speed of converge of the procedure essentially depends on the „good luck“ of the parameter selection. They are discussed mini—max stochastic problems, generated by the searching method.

It is given the analysis of multi-step problem, using Bayesian estimations. The ergodicity of the process is stated and the final situation is defined.

Ч. С. АГАЛАРОВ, Р. З. МАМЕДЛИ

 ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
 С УЧЕТОМ ВЫБРОСОВ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ
 НА ВХОДЕ

При решении задач идентификации стохастических систем с целью отсеивания неценной информации значения случайных функций, выходящие за заданный уровень, часто отсекают [1]. В частности, для нормальных случайных процессов значения случайных функций, превышающие утроенную величину среднеквадратичного отклонения (3σ), отбрасываются, что ведет к еще большему ухудшению оценок статистических характеристик, вызванных конечностью рассматриваемых реализаций, в то время как их можно использовать в качестве полезного сигнала при определении динамической характеристики системы.

Случайный сигнал, превышающий по амплитуде заданный уровень на короткий промежуток времени, будем называть выбросом. В качестве исходных данных имеются реализации входа и выхода, полученные в процессе нормальной эксплуатации. Эквивалентный шум, приведенный к выходу системы, — случайный процесс с нулевым математическим ожиданием (МО) $v(t)$.

Для наглядности и простоты изложения проанализируем одномерную систему. При решении задачи сначала будем определять статистическую характеристику системы в виде коэффициента передачи. Затем, используя коэффициент передачи, дадим алгоритм определения динамической характеристики, которая определится в виде весовой функции.

Известно [2], что если на статический объект управления действует постоянное (или медленно изменяющееся по сравнению со временем протекания переходного процесса) возмущение, то передаточная функция в установившемся режиме вырождается в статический коэффициент передачи системы. В том случае, когда на входе объекта, описываемого уравнением

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)x(\tau)d\tau + v(t), \quad (1)$$

стационарный в широком смысле случайный процесс, то оценка коэффициента передачи системы [3], полученная путем решения уравнения (1) относительно средних значений входа и выхода, тем точнее, чем больше время наблюдения T и чем меньше уровень помех σ_x и σ_y .

Представляет интерес случай, когда входной сигнал—нестационарный случайный процесс с выбросами. Пусть нестационарность входного сигнала по МО носит линейный характер, т. е. среднее значение случайного процесса изменяется по линейному закону. Уравнение (1) относительно МО входа и выхода запишется следующим образом:

$$M[y(t)] = \int_{-\infty}^t g(t-\tau) M[x(\tau)] d\tau. \quad (2)$$

Согласно принятому предположению

$$M[x(\tau)] = A \cdot \tau + B$$

Тогда уравнение (2) запишется в виде

$$M[y(t)] = A \cdot \int_{-\infty}^t \tau \cdot g(t-\tau) d\tau + B \cdot K, \quad (3)$$

где $K = \int_{-\infty}^t g(t-\tau) d\tau$.

Полагая, что $g(t-\tau)$ финитна и время „памяти“ системы равно T_g , и применяя обобщенную теорему о среднем [4] к уравнению (3), получим

$$M[y(t)] = A \cdot \tau_{cp}(t, t-T_g) \cdot \int_{t-T_g}^t g(t-\tau) d\tau + B \cdot K,$$

где $\tau_{cp} = t - \delta(t)$; $\max \delta(t) = T_g$.
Тогда

$$M[y(t)] = K(A \cdot t + B) - A \delta(t) \cdot K.$$

Запишем теперь выражение для оценки коэффициента передачи системы:

$$K^* = \frac{\int_0^T M[y(t)] dt}{\int_0^T M[x(t)] dt} = \frac{K \left[\int_0^T (A \cdot t + B) dt - \int_0^T A \cdot \delta(t) dt \right]}{\int_0^T (A \cdot t + B) dt} = K \left(1 \pm \frac{2T_g}{T} \right). \quad (4)$$

Как видно из (4), при большом T оценка K^* стремится к истинному значению коэффициента передачи системы K . Когда нестационарность входного сигнала по МО носит нелинейный характер, аналогично линейному случаю можно получить оценку коэффициента передачи системы. Например, для нелинейностей второго и третьего порядка соответственно будем иметь:

$$K^* = K \left(1 \pm \frac{3T_g}{T} \right); [K^* = K \left(1 \pm \frac{4T_g}{T} \right). \quad (5)$$

Как видно, и здесь оценки K^* при большом T сходятся к K . Таким образом, оценки K^* , определенные из выражений (4), (5), будут состоятельными.

Далее, если учесть специфику входного сигнала—случайный процесс с выбросами, то, естественно, для такого процесса на сравнительно небольшом отрезке реализации, приблизительно $4T_g$, не представляет трудности найти его среднее значение без выбросов $m_x(\tau)$. Используя коэффициент передачи, легко можно определить оценку

реакции системы на среднее значение входного сигнала без выбросов:

$$m_y^*(t) = K^* \cdot m_x(\tau), \quad \tau, t \in 4T_g. \quad (6)$$

Действительно, если считать, что $m_x(\tau)$ —медленно меняющаяся функция без скачков, то по формуле (6) с достаточно хорошей точностью можно определить $m_y^*(t)$ на отрезке реализации длиной $4T_g$. Если же определять $m_y(t)$ непосредственно по выходной реализации, то будет иметь место систематическая ошибка, обусловленная реакцией системы на выбросы, от которой нельзя избавиться никаким усреднением. Это легко пронаблюдать, если выходной процесс $y(t)$ представить в виде

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau) \cdot m_x(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n x_{\text{выб}}(\tau_i) g(t-\tau_i) \Delta\tau + v(t). \quad (7)$$

Подставляя в (7) вместо $\int_{-\infty}^t g(t-\tau) m_x(\tau) d\tau$ $m_y(t)$ и производя операцию МО полученного равенства, будем иметь:

$$m_y^{**}(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^n x_{\text{выб}}(\tau_i) g(t-\tau_i) \Delta\tau.$$

Таким образом, из последнего равенства вытекает, что реакция на выбросы является систематической ошибкой при оценке $m_y(t)$ непосредственно по выходной реализации.

Следующим этапом в задачах идентификации является определение динамической характеристики системы.

Центрируя входные и выходные процессы относительно их средних, приведем систему к тому, что на вход ее поступает стационарный случайный процесс $\xi(\tau)$ с нулевым МО и выбросами, а на выходе наблюдается реакция на выбросы, искаженная приведенной к выходу помехой. Анализ системы будет производиться относительно выбросов на входе и соответствующей им реакции на выходе. Тогда случайный процесс $\xi(\tau)$ на входе будет служить помехой при определении реакции на чистый выброс. Приводя $\xi(\tau)$ к выходу, получим систему относительно чистых выбросов на входе и соответствующей им реакции на выходе, испорченной приведенной к выходу помехой $v(t)$, куда войдет и помеха от стационарной составляющей входного сигнала.

Для выделения из экспериментальной кривой выходного процесса реакции на выброс требуется соответствующая статистическая обработка. Для этого достаточно иметь определенное количество реакций системы на выбросы в условиях помех и усреднить их по множеству.

Рассмотрим определение импульсной переходной функции через реакцию системы на чистые выбросы. Представим уравнение одномерной стационарной линейной системы в дискретном виде:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n g(i\tau) \cdot x(t-i\tau) \Delta\tau. \quad (8)$$

Обозначив $g_1 = g(i\tau)$, запишем (8) для значений $t = \Delta\tau, 2\Delta\tau, \dots, n\Delta\tau$ в матричной форме:

$$-\frac{1}{\Delta\tau} \times \begin{vmatrix} y(\tau) \\ y(2\tau) \\ y(3\tau) \\ \vdots \\ y(n\tau) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x(0), x(-\tau), \dots & x[(1-n)\tau] \\ x(\tau), x(0), x(-\tau), \dots & x[(2-n)\tau] \\ x(2\tau), x(\tau), x(0), \dots & x[(3-n)\tau] \\ \vdots & \vdots \\ x[(n-1)\tau], x[(n-2)\tau], x[(n-3)\tau], \dots, x(0) & g_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_n \end{vmatrix} \quad (9)$$

В векторном виде (9) запишется следующим образом:

$$Y = A \cdot G, \quad (10)$$

где $A = \|a_{ij}\|$ — n -мерная квадратная матрица, элементы которой по диагоналям являются случайными выбросами в моменты их появления и нулями в остальные моменты.

$Y = \|y_i\|$ — n -мерный столбец, элементами которого являются значения ординат реакции системы.

$G = \|g_i\|$ — n -мерный столбец, элементами которого являются значения ординат искомой импульсной переходной функции в дискретном ряде точек.

Представив уравнение (10) явно относительно неизвестной, получим решение нашей задачи:

$$G = A^{-1} \cdot Y,$$

где A^{-1} — матрица обратная A .

Для объектов с двумя входами и одним выходом надо иметь систему независимых матричных уравнений:

$$\begin{cases} Y^I = A \cdot G^I + B \cdot G^{II}, \\ Y^{II} = C \cdot G^I + D \cdot G^{II}. \end{cases} \quad (11)$$

Систему (11) можно записать в виде одного матричного уравнения, решив которое относительно неизвестного вектора импульсных переходных функций, получим

$$\begin{pmatrix} G^I \\ G^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y^I \\ Y^{II} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Очевидно, по аналогии с (12) можно получить решение для системы с многими входами.

В качестве примера была решена задача идентификации для инерционного звена первого порядка. На вход звена с импульсной переходной функцией $g(t) = \frac{\kappa}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ поступал сигнал $x(t) = 4 + 2 \sin \frac{\pi}{8T} \cdot t$,

к которому прибавлялась помеха — стационарный случайный процесс с нулевым МО и дисперсией $D_x = 4$. На выход системы также накладывалась помеха с дисперсией $D_y = 4$. Задача решалась по предложенному алгоритму идентификации, а также путем решения интегрального уравнения относительно авто- и взаимно-корреляционных функций соответственно входу и выходу системы. В результате машинного моделирования импульсная переходная функция (рис.) по разработанному алгоритму получена с ошибкой $\sigma_{g*} = 0,06$, а по корреляционному анализу — с ошибкой $\sigma_{g**} = 0,19$.

С точки зрения объема вычислительных работ количество вычислений для данного примера приблизительно одинаково, если не считать, что обращение матриц с главной диагональю и параллельными ей диагоналями, если это проводить по специальной программе, значительно проще, чем обращение полной матрицы. С увеличением размерности системы разность в объеме вычислительных работ увеличивается в пользу предложенного метода. Это связано с тем, что выбросы считаются независимыми, и ведя анализ относительно них, мы развязываем входы и приводим многомерную систему к решению системы независимых уравнений. Следует также отметить, что при решении задачи по предложенному алгоритму в силу того, что оценка импульсной переходной функции находится путем усреднения по множеству реакций на выбросы, проблемы, связанные с регуляризацией полученных оценок характеристик системы, здесь отпадают.

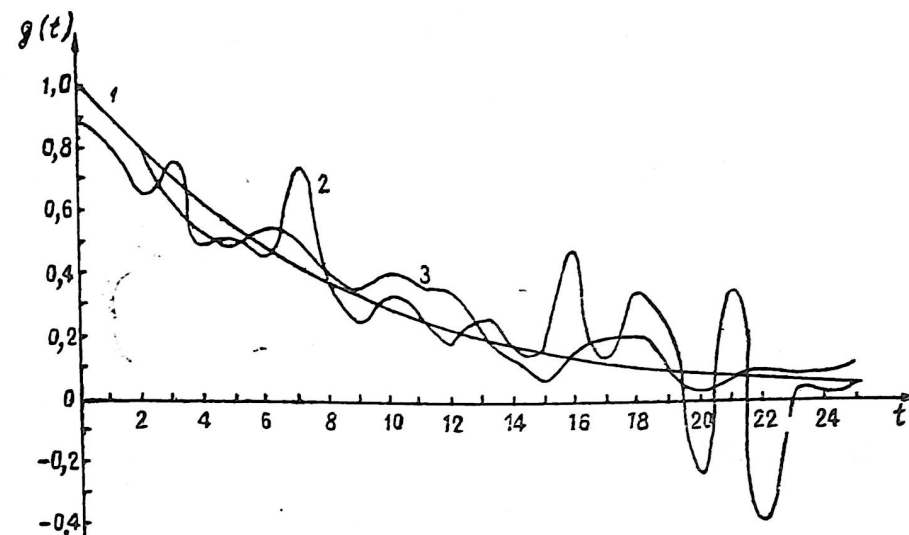


Рис. 1 — истинная импульсная переходная функция (ИПФ); 2 — оценка ИПФ, определенная по корреляционному анализу; 3 — оценка ИПФ, определенная по предложенному методу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулик В. Т. Принципы алгоритмизации и построения управляющих машин. Киев, 1963.
2. Васильев Д. В., Чуич В. Г. Системы автоматического управления. М., 1967.
3. Лившиц Н. А., Пугачев В. И. „Советское радио“, М., 1963.
4. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. 1. М., „Наука“, 1968.

Институт кибернетики АН Азерб. ССР

Поступило 20. IV 1973

Ч. С. Агаларов, Р. З. Мамедли

Киришдә тәсәдүфү сигналларын чыхынтыларыны нәзәрә алмагла стохастик системләрин идентификләшдирилмәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә чыхынтылары киришдә актив сигнал кими гәбул едәрәк хәтти стасионар системләрин идентификләшдирилмәси үчүн үсул верилмишдир. Системин оператору статика үчүн етүрмә әмсалы, динамика үчүн исә импульс кечиричи функција кими тә'јин олунмушдур. Тәклиф едилен үсул чөхөлчүлү системләр үчүн үмүмиләшдирилмишдир. Хәтти биртәртибли системин идентификләшдирилмәси мәсәләси бир мисал кими һәлл олунмушдур.

Ch. S. Agalarov, R. Z. Mamedli

The identification of stochastic system with respect for overshoots of random signals on the input

SUMMARY

It is suggested a method of identification of linear stationary systems by the data of normal exploitation when random processes with overshoots are observed on the inputs of the system. Definition of static characteristic in the form of a system transfer coefficient and dynamic characteristic in the form of a pulse transitional functional is carried out for the one-dimensional object. The suggested method is generalized for multidimensional systems. As an example, it is given the solution of a problem of identification of the first order linear inertial unit. It is given the comparison of the results of the solution obtained by the suggested method with the existing methods of identification.

УДК. 621.372:621.3.014.33

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ. Т. А. ЮСИФ-ЗАДЕ

ЗАМЕЩЕНИЕ ЛИНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С УЧЕТОМ ПОТЕРЬ ЦЕПНЫМИ СХЕМАМИ

Повышение напряжения и мощности электропередач развитие сетей высокого и сверхвысокого напряжений требуют всемерного расширения исследований происходящих в электропередачах процессов. Для аналитического исследования различных видов перенапряжений в линиях дальних электропередач последние замещаются многочастотными цепными схемами.

В настоящей статье рассматривается вопрос замещения линий с распределенными параметрами, с учетом потерь, цепными схемами. Как известно, изображение напряжения в конце разомкнутой линии с распределенными параметрами при включении на постоянное напряжение ($E=1$) имеет вид

$$U(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{\operatorname{ch} \nu^* l}, \quad (1)$$

где l — длина линии,

$\nu^* = \sqrt{(r_0 + L_0 p) \cdot (g_0 + C_0 p)}$ — коэффициент распространения, r_0, L_0, C_0, g_0 — единичные параметры.

Оригинал выражения (1) можно определить по формуле разложения:

$$u(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r_0 g_0} l)} - \frac{\pi \cdot e^{-\delta t}}{\tau^2} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1) \cdot \sin \left[(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right]}{\omega_k (\delta^2 + \omega_k^2)} \cdot (\delta \sin \omega_k t + \omega_k \cos \omega_k t), \quad (2)$$

где τ — время пробега волны в один конец линии,

$$\omega_k = \sqrt{\left[(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2\tau} \right]^2 - \sigma^2},$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{L_0} - \frac{g_0}{C_0} \right),$$

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{L_0} + \frac{g_0}{C_0} \right).$$

Кривые, построенные на основе формулы (2), представлены на рис. 2—5. Расчеты производились на ЭЦВМ „Наири-2“.

Для цепи, изображенной на рис. 1 а, можно записать:

$$u_1(p) = [1 + gr + (Lg + rC)p + LCp^2] \cdot u_2(p) + (r + pL) \cdot i_2(p), \\ i_1(p) = i_2(p) + (g + pC) \cdot u_2(p).$$

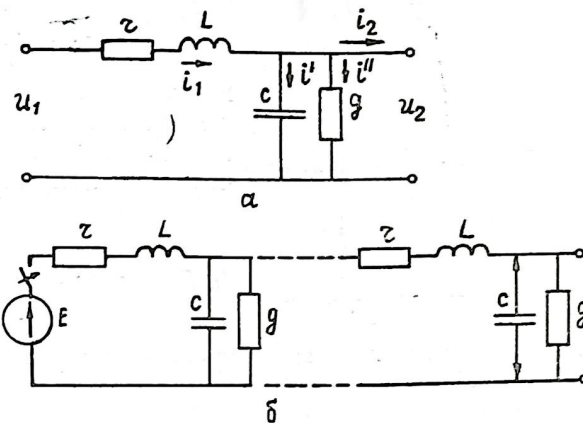


Рис. 1

Коэффициенты этого четырехполюсника имеют вид:

$$A(p) = LCp^2 + (Lg + rC)p + 1 + gr, \\ B(p) = r + pL, \\ C(p) = g + pC, \\ D(p) = 1.$$

Определим процесс в конце цепной схемы, изображенной на рис. 1, б. Для этой схемы изображение напряжения в конце n -ой ячейки имеет вид [1]:

$$u_n(p) = u(p) \cdot \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 e^{-nv} - Z_2 \cdot e^{nv}}, \quad (3)$$

где n — число ячеек,

$$Z_1 = \frac{e^{-v} - D(p)}{C(p)} = \frac{e^{-v} - 1}{pC}, \quad z_2 = \frac{e^{-v} - D(p)}{C(p)} = \frac{e^{-v} - 1}{pC}.$$

Выразив Z_2 через Z_1 :

$$Z_2 = Z_1 \cdot \frac{e^{-v} - 1}{e^{-v} - 1},$$

после ряда преобразований получим

$$u_n(p) = u(p) \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu}{\operatorname{sh}(n+1)\nu - \operatorname{sh} n\nu}. \quad (4)$$

где

$$\operatorname{sh} \nu = \sqrt{\left[\frac{A(p) + D(p)}{1} \right]^2 - 1} = \sqrt{\left[\frac{LCp^2 + (Lg + rC)p + gr}{2} + 1 \right]^2 - 1}.$$

Воспользовавшись формулой [2]:

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2},$$

получим

$$\operatorname{sh}(n+1)\nu - \operatorname{sh} n\nu = 2 \operatorname{sh} \frac{\nu}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{2n+1}{2} \nu.$$

При этом выражение (4) примет вид:

$$u_n(p) = u(p) \cdot \frac{\text{sh } \nu}{2 \text{sh } \frac{\nu}{2} \cdot \text{ch } \frac{2n+1}{2} \nu} \quad (5)$$

Замечая, что

$$\text{sh } \nu = 2 \text{sh } \frac{\nu}{2} \cdot \text{ch } \frac{\nu}{2},$$

и подставляя вместо $u(p)$ преобразование единичной функции по Лапласу ($E=1$), окончательно получим

$$u_n(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{\text{ch } \frac{\nu}{2}}{\text{ch } \frac{2n+1}{2} \nu} \quad (6)$$

Полюсы (6) имеют вид:

$$p_1 = 0, \quad \nu_k = j \frac{2k-1}{2n+1} \cdot \pi \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Рис. 2. Кривые изменения напряжения: сплошная — в конце ненагруженной линии при $l=400$ км, $r_0=0,01$ ом/км, $g_0=10^{-6}$ 1/ом·км; пунктирная — в конце разомкнутой цепной схемы $n=4$, $l=0,01$ км.

Воспользовавшись выражением

$$\text{ch } \nu_k = \frac{A(p_k) + D(p_k)}{2} = \frac{LCp_k^2 + (Lg + rC)p_k + gr}{2} + 1,$$

можно записать:

$$LCp_k^2 + (Lg + rC)p_k + gr + 2 = 2 \text{ch } \nu_k. \quad (7)$$

Приведем уравнение (7) к виду

$$p_k^2 + \left(\frac{g}{C} + \frac{r}{L} \right) p_k + \frac{gr}{LC} + \frac{4}{LC} \cdot \sin^2 \frac{2k-1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = 0,$$

откуда

$$p_{1,2(k)} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 - \beta},$$

где

$$\alpha = \frac{g}{C} + \frac{r}{L},$$

$$\beta = \frac{gr}{LC} +$$

$$+ \frac{4}{LC} \cdot \sin^2 \frac{2k-1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Для оригинала выражения (6) имеем

$$u(t) = \frac{\mu}{\text{ch } \frac{2n+1}{2} \nu} - \sum_{k=1}^n 4 \cdot \frac{(-1)^{k+1} \cdot e^{-\delta t} \cdot (\delta \sin \omega_k t + \omega_k \cos \omega_k t)}{\omega_k \cdot (2n+1) \cdot (\delta^2 + \omega_k^2)} \times \omega_0^2 \cdot \sin \frac{2k-1}{2n+1} \pi, \quad (8)$$

где

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{gr}{4}},$$

$$\gamma = \ln \left[\frac{gr+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{gr+2}{2} \right)^2 - 1} \right],$$

$$\delta = \frac{1}{2} \alpha,$$

$$\omega_k = \sqrt{\beta - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

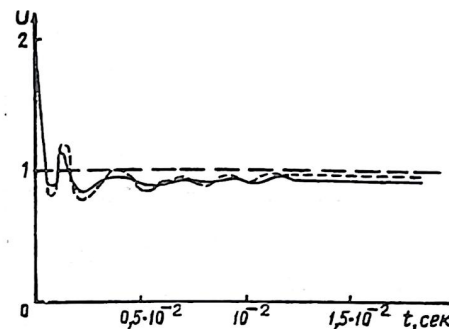


Рис. 4. Кривые изменения напряжения: сплошная — в конце ненагруженной линии при $l=600$ км, $r_0=0,05$ ом/км, $g_0=10^{-5}$ 1/ом·км; пунктирная — в конце разомкнутой цепной схемы при $n=6$, $l_n=100$ км.

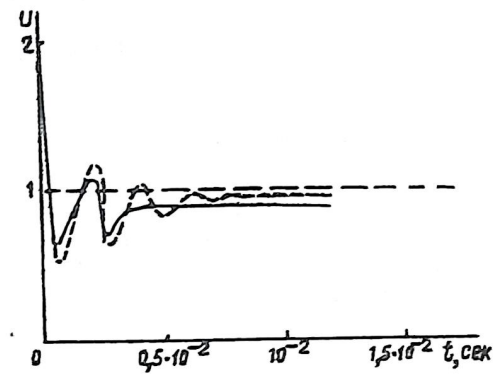


Рис. 5. Кривые изменения напряжения: сплошная — в конце ненагруженной линии при $l=700$ км, $r_0=0,04$ ом/км, $g_0=10^{-5}$ 1/ом·км; пунктирная — в конце разомкнутой цепной схемы при $n=7$, $l_n=100$ км.

Результаты расчетов, произведенных на ЭЦВМ, представлены на рис. 2—5. Как видно, для замещения линий длиной до 600 км достаточно принять $l_n = 100$ км. Параметры ячеек при этом должны определяться следующим образом:

$$r = l_n \cdot r_0,$$

$$L = l_n \cdot L_0,$$

$$C = l_n \cdot C_0,$$

где l_n — длина линии, замещаемая одной ячейкой.

Как показали расчеты на ЭЦВМ, для замещения линий длиной $600 \text{ км} \leq l \leq 1400 \text{ км}$ достаточно принять $l_n = 50 \text{ км}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург С. Г. Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. Изд-во „Высшая школа“, 1967.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. Гостехиздат, 1967.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 19. VII 1972

Иткилар нәзәрә алынмагла пајланмыш параметрли хәтләрин зәнчирвары дөврәләрлә әвәз едилмәси

ХҮЛАСӘ

Узун електрик верилмиш хәтләриндә мүхтәлиф нөвлү ифрат кәр-кинлик һадисәләрини аналитик тәдгиг етмәк үчүн онлар зәнчирвары схемләрлә әвәз олунур.

Мәгаләдә мүхтәлиф узунлуглу пајланмыш параметрли хәтләрин зәнчирвары схемләрлә әвәз олунан заман [аҷе]каларын сајынын тә'јин едилмәси мәсәләсинә бахылмышдыр.

Ch. M. Juvarly, T. A. Usif-Zade

The representing of lines with distributed parameters and with taking in account the losses by the circuit schemes

SUMMARY

The ability of unloaded lines with distributed parameters with taking in account the losses by the circuit schemes is investigated.

The curves of changing of voltage on the end of unloaded line with distributed parameters and breaked circuit scheme are given.

УДК 539.3

Ш. М. МУТАЛЛИМОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ,
ВЫЗВАННОЙ ТЕПЛОВЫМ УДАРОМ

Распространение волн напряжений в твердом теле, возникающее при тепловом воздействии, рассмотрено в работах [1—3]. Данная статья посвящена задаче о тепловом ударе в стенку сферической полости радиуса r_0 с учетом скорости тепла.

Пусть в безграничной упругой среде имеется сферическая полость радиуса r_0 , на стенку которой направлен тепловой удар. Рассмотрим случай, когда температура распространяется с конечной скоростью. Определим распределение температуры, напряжений, смещения, скорости частиц для каждой точки пространства $r - r_0 \geq 0$ в зависимости от скорости тепловой волны c_0 и скорости волны напряжения a_0 . Предполагаем, что коэффициенты Пуассона ν , теплопроводности a , теплового расширения и модуль сдвига не зависят от температуры. Функция распределения температуры определяется из следующей системы:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

$$T(r, t) = \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0, \quad (2)$$

$$T(r, t) = 0 \text{ при } c_0 t \leq r - r_0, \quad (2')$$

$$T(r, t) = f_1(t) \text{ при } r = r_0. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение, определяющее радиальное перемещение $U(r, t)$, имеет вид

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{r^2} U + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} a \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$a_0 = \sqrt{2(1 - \nu)G/\rho_0(1 - 2\nu)}. \quad (4)$$

Граничными и начальными условиями для уравнения (4) являются:

$$U(r, t) = 0 \text{ при } t = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial U(r, t)}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0, \quad (6)$$

$$\sigma_r(r, t) = P(t) \text{ при } r = r_0. \quad (7)$$

Решение

После применения интегрального преобразования Лапласа по времени

t , а также с учетом условия (2) уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - \left(\frac{p^2}{c_0^2} + \frac{p}{a} \right) \bar{T} = 0. \quad (8_1)$$

Решение этого уравнения, остающееся ограниченным при $r \rightarrow \infty$, будет следующим:

$$\bar{T}(r, p) = \frac{A(p)}{r} \exp \left(-r \sqrt{\frac{p^2}{c_0^2} + \frac{p}{a}} \right) \quad (8_2)$$

Из условия (3) получим изображение решения в виде

$$\bar{T}(r, p) = \bar{f}_1(p) \frac{r_0}{r} \exp \left[-\frac{r-r_0}{c_0} \sqrt{p^2 + \frac{pc_0^2}{a}} \right]. \quad (8)$$

Переход к оригиналу дает:

$$T(r, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{r-r_0}{c_0}, \\ \frac{r_0}{r} \exp \left(-\frac{c_0}{2a} (r-r_0) \right) f_1 \left(t - \frac{r-r_0}{c_0} \right) - \\ - \frac{r_0(r-r_0)}{r} \frac{c_0}{2a} \int_{(r-r_0)/c_0}^t f_1(t-\tau) \exp \left(-\frac{c_0^2 \tau}{2a} \right) I_1 \left(\frac{c_0^2}{2a} \times \right. \\ \left. \times \left(\tau^2 - \left(\frac{r-r_0}{c_0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\tau^2 - \frac{(r-r_0)^2}{c_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} d\tau; & t c_0 > r-r_0. \end{cases} \quad (9)$$

Применяя к уравнению (4) преобразование Лапласа с учетом начальных условий (5) и (6), получим

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \bar{U} - \frac{p^2}{a_0^2} \bar{U} = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}. \quad (10)$$

Решение, ограниченное при $r \rightarrow \infty$, ищем в виде

$$\bar{U}(r, p) = C_2(p) \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{p}{a_0} + \frac{1}{r} \right) C_1(p) \exp \left(-\frac{rp}{a_0} \right). \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение (10) и учитывая (8₁), определим коэффициент $C_2(p)$:

$$C_2(p) = R_2 n_2 / p(p + n_1),$$

где

$$n_2 = c_0^2 a_0^2 / a_0^2 - c_0^2; \quad n_1 = n_2 / a; \quad R_2 = \alpha(1+\nu) / (1-\nu).$$

Если

$$a_0 = c_0, \quad c_2(p) = (1+\nu) \alpha a / p(1-\nu).$$

Из условия (7) определяются коэффициенты $C_1(p)$ и $\bar{U}(r, p)$, выражающиеся в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}(r, p) = & \frac{1}{r} \left(\frac{p}{a_0} + \frac{1}{r} \right) \exp \left[-\frac{(r-r_0)p}{a_0} \right] \left[p^2 - p a_1 + \right. \\ & + a_2 \left. \right]^{-1} \left\{ \bar{P}(p) + A_1 f_1(p) + A_2 n_2 \bar{f}_1(p) [p(p + \right. \\ & + n_1)]^{-1} \left[r_0^{-1} c_0^{-1} \sqrt{p^2 + p c_0^2 / a} \right] - A_3 \bar{f}_1(p) n_2 [p(p + \right. \\ & + n_1)]^{-1} \left[2 r_0^{-2} + 2 r_0^{-1} c_0^{-1} \sqrt{p^2 + p c_0^2 / a} + \right. \\ & + (p^2 + p c_0^2 / a) c^{-1} \left. \right] \left. \right\} + \bar{f}_1(p) A_7 n_2 (p + n_1)^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times p^{-1} \left[-r_0 r^{-2} - r_0 r^{-1} c_0^{-1} \sqrt{p^2 + p c_0^2 / a} \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{r-r_0}{c_0} \sqrt{p^2 + p c_0^2 / a} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть функция $f(t_1)$ задана в виде:

$$f_1(t) = T_0 \exp(-c_0^2 t / 2a) I_0^1(dt); \quad d = i c_0^2 / 2a. \quad (13)$$

Тогда решение $U(r, t)$ будет следующим:

$$\begin{aligned} U(r, t) = & T_0 A_7 n_2 n_1^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^t r_0 r^{-1} [1 - \exp(-n_1(t-\tau))] \times \\ & \times I_0 \left(\frac{c_0^2}{2a} \sqrt{\tau^2 - (r-r_0)^2 / c_0^2} \right) d\tau + A_5 a_0^{-1} r^{-1} \int_0^t P(t-\tau) \times \\ & \times \left[\frac{\beta_1 + a_0 r^{-1}}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \exp \left[\beta_1 \left(\tau - \frac{r-r_0}{c_0} \right) \right] + \frac{\beta_2 + a_0 r^{-1}}{\beta_2 - \beta_1} \exp \left[\beta_2 \left(\tau - \frac{r-r_0}{c_0} \right) \right] \right] \times \\ & \times d\tau + T_0 \int_0^t A_5 (a_0 r)^{-1} \left[-a_0 r^{-1} (\beta_1 \beta_2 n_1)^{-1} H \left(\tau - \frac{r-r_0}{c_0} \right) - \left(\frac{a_0}{r} - n_1 \right) n_1^{-1} \times \right. \\ & \times (n_1 + \beta_1)^{-1} (n_1 + \beta_2)^{-1} \cdot \exp \left[-n_1 \left(\tau - \frac{r-r_0}{c_0} \right) \right] + d_3 \exp \left[\beta_1 \left(\tau - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{r-r_0}{c_0} \right) \right] + d_4 \exp \left(\beta_2 \left(\tau - \frac{r-r_0}{c_0} \right) \right) \right] \cdot \exp \left(-\frac{c_0^2}{2a} (t-\tau) \right) I_0^1(d(t-\tau)) d\tau + \\ & + T_0 B_2 A_5 a^{-1} r^{-1} \left\{ -a_0 r^{-1} d_1^{-1} H \left(t - \frac{r-r_0}{a_0} \right) - \right. \\ & - d_2 \exp \left(-n_1 \left(t - \frac{r-r_0}{a_0} \right) \right) + d_3 \exp \left(\beta_1 \left(t - \frac{r-r_0}{a_0} \right) \right) + \\ & + d_4 \exp \left(\beta_2 \left(t - \frac{r-r_0}{a_0} \right) \right) \left. \right\} - \frac{T_0 A_3 n_2 A_0}{c_0 r a_0} \int_0^t \left\{ (-n_1 + \right. \\ & + a_0 r^{-1}) d_5 \exp \left(-n_1 \left(\tau - \frac{r-r_0}{a_0} \right) \right) + d_6 \exp \left[\beta_1 \left(\tau - \frac{r-r_0}{a_0} \right) \right] + \\ & + d_7 \exp \left[\beta_2 \left(\tau - \frac{r-r_0}{a_0} \right) \right] \cdot \exp \left[-\frac{c_0^2}{2a} (t-\tau) \right] I_0^1(d(t-\tau)) d\tau \left. \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь обозначено: I^1 — функция Бесселя действительного аргумента;

$$A_1 = 2G(1+\nu)/(1-2\nu); \quad A_2 = 4G\nu/(1-2\nu)(1-\nu)r_0; \quad A_7 = R_2;$$

$$A_3 = 2Ga(1-\nu)/(1-2\nu); \quad A_4 = 4G\nu/(1-2\nu)r^2 a_0; \quad A_5 = \frac{A_4}{A_5} - 1;$$

$$A_5 = 2G(1-\nu)/(1-2\nu)ra_0^2; \quad a_1 = A_5 - m; \quad a_2 = A_5 a_0 r_0^{-1} - mA_5;$$

$$m = a_0/r_0; \quad \beta_{1,2} = (A_5 - m)/2 \pm \sqrt{\frac{(A_5 - m)^2}{4} + mA_5 - A_5 mA_5^{-1}};$$

$$B_1 = A_2 n_2 r_0^{-1} - 2A_3 n_2 r_0^{-2}; \quad B_2 = A_2 n_2 c^{-1} - 2A_3 n_2 r_0^{-1} c^{-1}$$

$$d_2 = (a_0 r^{-1} - n_1) [n_1(n_1 + \beta_1)(n_1 + \beta_2)]^{-1}; \quad d_1 = \beta_1 \beta_2 n_1;$$

$$d_3 = (\beta_1 + a_0 r^{-1}) [\beta_1(\beta_1 + n_1)(\beta_1 - \beta_2)]^{-1}; \quad A_6 = A_4 \cdot \frac{1-\nu}{\mu};$$

$$d_4 = (\beta_2 + a_0 r^{-1}) [\beta_2(\beta_2 + n_1)(\beta_2 - \beta_1)]^{-1};$$

$$d_5 = (-n_1 + c_0^2/a) [(n_1 + \beta_1)(n_1 + \beta_2)]^{-1}; d_6^1 = (\beta_1 + a_0 r^{-1}) \left(\beta_1 + \frac{c_0^2}{a} \right);$$

$$d_7 = (\beta_2 + a_0 r^{-1}) \left(\beta_2 + \frac{c_0^2}{a} \right) / (\beta_2 + n_1)(\beta_2 - \beta_1); d_8 = \frac{d_6^1}{(\beta_1 + n_1)(\beta_1 - \beta_2)};$$

$H(z)$ —единичная функция;

$$H(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0 \\ 1 & \text{при } z > 0. \end{cases}$$

В случае, когда скорость тепловой волны меньше скорости упругой сферической волны, в области $0 \leq r - r_0 \leq c_0 t$ смещение выражается формулами (14), а напряжения и деформации находятся из соотношений:

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_r + 2\nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T],$$

$$\sigma_\theta = \frac{2G}{1-2\nu} [\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha T], \quad (15)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{U}{r} \quad (15_1)$$

В области между тепловой и упругой волнами смещение определяется следующим образом:

$$U(r, t) = \frac{A_5}{a_0 r} \int_0^t [(\beta_1 + a_0 r^{-1})(\beta_1 - \beta_2)^{-1} \exp \left[\beta_1 \left(\tau - \frac{r - r_0}{a_0} \right) \right] + \frac{\beta_2 + a_0 r^{-1}}{\beta_2 - \beta_1} \exp \left(\beta_2 \left(\tau - \frac{r - r_0}{a_0} \right) \right)] \cdot P(t - \tau) d\tau + \int_0^t A_5 a_0 r^{-1} T_0 \left\{ -a_0 r^{-1} \times \right.$$

$$\times H \left(\tau - \frac{r - r_0}{a} \right) (\beta_1 \beta_2 n_1)^{-1} - d_2 \exp \left[-n_1 \left(\tau - \frac{r - r_0}{a_0} \right) \right] + d_3 \exp \left[\beta_1 \left(\tau - \frac{r - r_0}{a} \right) \right] + d_4 \exp \left(\beta_2 \left(\tau - \frac{r - r_0}{a_0} \right) \right) \} \exp \left[\frac{c_0^2}{5a} (t - \tau) \right] I_0^1(d(t - \tau)) d\tau +$$

$$+ B_2 A_5 T_0 a_0 r^{-1} \left\{ -\frac{a_0 r^{-1}}{\beta_2 \beta_1 n_1} H \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) - d_2 \exp \left[-n_1 \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) \right] + \right.$$

$$+ d_3 \exp \left[\beta_1 \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) \right] + d_4 \exp \left[\beta_2 \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) \right] \} -$$

$$- A_3 n_2 A_5 T_0 (c_0 r a_0)^{-1} \int_0^t \left\{ (a_0 r^{-1} - n_1) d_5 \exp \left(-n_1 \left(\tau - \frac{r - r_0}{a_0} \right) \right) + \right.$$

$$+ d_6 \exp \left(\beta_1 \left(\tau - \frac{r - r_0}{a_0} \right) \right) + d_7 \exp \left[\beta_2 \left(\tau - \frac{r - r_0}{a_0} \right) \right] \} \exp \left(-\frac{c_0^2}{2a} (t - \tau) \right) I_0^1(d(t - \tau)) d\tau.$$

Зная смещение в области $c_0 t \leq r - r_0 \leq a_0 t$, деформации можно определить по формулам (15₁), а напряжения вычислить из соотношений:

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial U}{\partial r} + 2\nu \frac{U}{r} \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{2G}{1-2\nu} \left[\frac{U}{r} + \nu \frac{\partial U}{\partial r} \right]. \quad (17)$$

В области $r - r_0 \geq c_0 t$ среда невозмущенная, т. е. здесь все параметры равны нулю.

Если скорости тепловой и упругой волн совпадают, то смещение, напряжения и деформации определяются выражениями (14), (15) и (15₁), соответственно.

Допустим, скорость упругой сферической волны меньше скорости тепловой волны, тогда в области от радиуса r_0 до упругой сферической волны смещение, напряжения и деформации определяются также в виде (14), (15) и (15₁), соответственно, а в области между упругой и тепловой волнами $\sigma_r, \sigma_\theta, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ определяются из формул (15) и (15₁), смещение же—из выражения

$$U(r, t) = \frac{A_7 n_2 T_0}{n_1 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^t [1 - \exp(-n_1(t - \tau))] \exp \left(-\frac{c_0^2 \tau}{2a} \right) \times$$

$$\times I_0 \left(\frac{c_0^2}{2a} \sqrt{\tau^2 - (r - r_0)^2 / c_0^2} \right) d\tau -$$

$$- r_0 r^{-2} \frac{A_7 n_2 T_0}{n_1} \int_0^t [1 - \exp(-n_1(t - \tau))] \times$$

$$\times \exp \left(-\frac{c_0^2 \tau}{2a} \right) I_0 \left(\frac{c_0^2}{2a} \sqrt{\tau^2 - \frac{(r - r_0)^2}{c_0^2}} \right) d\tau;$$

$$U = 0, \text{ если } c_0 t < r - r_0. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь случай, когда среда подчиняется физическому закону:

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_r + 2\nu\varepsilon_\theta - \alpha(1+\nu)T] - \frac{4G^2}{(1-2\nu)^2 \mu_0} \int_0^t \exp(R(t - \tau)) \varphi_1(\tau) d\tau,$$

$$\sigma_\theta = \frac{2G}{1-2\nu} [\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - \alpha(1+\nu)T] -$$

$$- \frac{4G^2}{(1-2\nu)^2 \mu_0} \int_0^t \exp(R(t - \tau)) \varphi^2(\tau) d\tau; \quad (19)$$

$$\varphi_1(\tau) = (1-\nu)\varepsilon_r + 2\nu\varepsilon_\theta - \alpha(1+\nu)T,$$

$$\varphi_2(\tau) = \varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - \alpha(1+\nu)T;$$

μ —коэффициент вязкости.

Уравнение, определяющее перемещение $U(r, t)$, примет вид

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{r^2} U - R_1 \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (4_1)$$

Граничные и начальные условия для уравнения (4) остаются [в силе и для (4₁)].

Температура определяется выражением (9). Волновая картина движения остается прежней. В области от r_0 до фронта тепловой волны напряжения и деформации определяются выражениями (19), (15₁), соответственно, а смещение

$$U(r, t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{r} \left(\sqrt{K_1(p)} + \frac{1}{r} \right) \exp[-\sqrt{K_1(p)}(r - r_0)] [\bar{P}(p) -$$

$$- N_3(p) \tilde{f}_1(p) - N_2(p) C_2(p) g_1(p) - C_2(p) N_1(p) g_2(p)] \times$$

$$\times [(K_1^{1/2}(p) - r_0^{-1})(N_2(p) r_0^{-2} - N_1(p) K_1^{1/2}(p) r^{-1} - N_1(p) \cdot r_0^2)^{-1} \times$$

$$\times \exp(pt) dp + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{R}_2 n_2 \bar{f}(p) \left[r_0 r^{-2} + r_0 r^{-1} c_0^{-1} \left(p^2 + \frac{p c_0^2}{a} \right)^{1/2} \right] \times (20) \\ \times (p(p + n_1))^{-1} \cdot \exp \left[pt - \frac{r - r_0}{c_0} \left(p^2 + \frac{p c_0^2}{a} \right)^{1/2} \right] dp,$$

K_1 ; $N_{1,2}$; $g_{1,2}$ —известные функции.

В области, заключенной между фронтом тепловой и фронтом упругой волн, смещение определяется первым слагаемым формулы (20), напряжения вычисляются по (19), где нужно положить $T = 0$.

Когда скорости обеих волн совпадают, то образуется одна область движения σ_r , σ_θ , U выражается формулами (19), (20), соответственно. Перед фронтом упругой волны все параметры равны нулю. Если скорость упругой сферической волны меньше скорости тепловой волны, то в области от r_0 до фронта упругой волны параметры среды выражаются формулами (15₁), (19), (20), соответственно. В области между фронтами упругой и тепловой волн напряжения и деформации определяются по формулам (19), (15₁), соответственно, а для смещения U из выражения (20) получим

$$U(r, t) = r_0 \bar{R}_2 n_2 \frac{\partial}{\partial r} \int_0^t [1 - \exp(-n_1(t - \tau))] \times \\ \times \left[r^{-1} \exp \left(-\frac{c_0}{2a} (r - r_0) \right) f_1 \left(\tau - \frac{r - r_0}{c_0} \right) - \frac{r - r_0}{r} \frac{c_0}{2a} \times \right. \\ \left. \times \int_{(r-r_0)/c_0}^{\tau} f_1(\tau - z) \exp \left(-\frac{c_0^2 z}{2a} \right) \frac{I_0^1 \left(\frac{c_0^2}{2a} \sqrt{z^2 - (r - r_0)^2 / c_0^2} \right)}{\sqrt{z^2 - (r - r_0)^2 / c_0^2}} dz \right] d\tau, \\ U = 0 \text{ при } r = r_0 \geq c_0 t.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Даниловская В. И. ПММ, т. 26, 1952.
2. Коляно Ю. М., Семеряк М. М. „Проблемы прочности“, 1971, № 8.
3. Гавдзинский В. Н., Мальцев Д. В. „Инженерно-физич. ж.“, т. 21, 1971, № 1.

Институт математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступило 13. III 1973

Ш. М. Мутәллимов

Истилик зәрбәсинин тә'сириндән мүнхитдә сферик далғанын јажылмасы

ХҮЛАСӘ

Бу ишдә r_0 радиуслу сферик бошлуғун диварына истилик зәрбәсинин тә'сириндән гејри-мәһдуд мүнхитдә сферик далғанын јажылмасы мәсәләсинә бахылыр. Сферик далғанын вә истилик далғасынын сүр'әтләриндән асылы олараг әмәлә кәлән һәјәчанланма саһәләриндә һәрәкәтин әсас параметрләри тәјин олунмушдур. Һәр саһәдәки һәлл аналитик шәкилдә тапылмышдыр.

SH. M. Mutallimov

Propagation of a spherical wave in the medium generated by a heat impact

SUMMARY

We consider propagation of a thermal wave and a stress wave in a boundless medium having spherical cavity of the radius r_0 and generated by a heat impact. Main movement parameters for every point of the space $r - r_0 > 0$ are determined in relation to velocity of thermal and spherical waves.

З. Б. ХЕИРОВ

ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ И КРУГОВЫМ ЦИЛИНДРАМИ

Из практики известно, что во многих случаях ввиду неточного изготовления цилиндрических труб, между которыми должна двигаться вязкая жидкость, приходится иметь дело с движением жидкости между эллиптическим и круговым цилиндрами. Задача о поступательном движении вязкой жидкости между несоосными цилиндрами эллиптического и кругового сечений рассматривается впервые.

Предположим, что движение однородной несжимаемой вязкой жидкости обусловлено как наличием перепада давления вдоль параллельных осей цилиндрических труб бесконечной длины, так и поступательным движением кругового цилиндра с постоянной скоростью в сторону убывания давления. Предположим также, что центр сечения кругового цилиндра совпадает с правым фокусом эллиптического цилиндра.

Обозначим через O правый фокус эллипса, а через O' — его левый фокус. За начало координат возьмем точку O , прямую OO' примем за полярную ось, а ось z направим параллельно осям цилиндров в сторону движения. Известно, что уравнение эллипса в выбранных нами полярных координатах (r, φ) представляется в виде

$$r = \frac{b^2}{a + c \cos \varphi},$$

где a и b — полуоси эллипса, $2c$ — расстояние между его фокусами, φ — полярный угол. Если предполагать, что эксцентриситет эллипса $e = \frac{c}{a}$ — такая бесконечно малая величина по отношению к единице, что ее кубом можно пренебречь, то приближенное уравнение эллиптического контура получим в виде

$$r = \frac{b^2}{a} (1 - e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi).$$

После перехода к безразмерному радиусу x согласно формуле

$$x = \frac{ar}{b^2}$$

уравнения внутреннего и внешнего контуров можно представить следующим образом:

$$x_1 = p \equiv \frac{aR'}{b^2}, \quad x_2 = 1 - e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi, \quad (1)$$

где R' — радиус внутреннего кругового контура.

По предположению движение совершается параллельно оси z . Поэтому радиальная и касательная скорости равны нулю, а тогда из уравнения непрерывности следует, что осевая скорость v_z от координаты z не зависит. Если предполагать, что массовой силой можно пренебречь, то из первых двух уравнений движения получим

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0,$$

т. е. давление может зависеть только от координаты z и времени t . Введя безразмерные переменные

$$v = \frac{\tau_z}{V}, \quad x = \frac{ar}{b^2}, \quad \tau = \frac{a^2 \eta}{b^4} t,$$

третье уравнение движения приведем к виду

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - q, \quad (2)$$

где v — кинематическая вязкость жидкости, V — характерная скорость рассматриваемого движения, для краткости записи принято

$$q = \frac{b^4}{a^2 \eta V} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (3)$$

Из уравнения (2) следует, что функция (3) может зависеть только от времени τ . Предположим, что безразмерный перепад давления (3) может быть представлен в виде периодической функции времени:

$$q = a_0 + a_1 \cos \omega \tau, \quad (4)$$

где a_0 , a_1 и ω — постоянные величины. Движения, соответствующие такому перепаду давления, следуя Л. Г. Лойцянскому (4), назовем пульсирующими. Тогда уравнение движения (2) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - (a_0 + a_1 \cos \omega \tau). \quad (5)$$

Найдем решение уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию

$$v(x, \varphi, 0) = 0, \quad (6)$$

граничным условиям

$$v(x_1, \varphi, \tau) = v(x_2, \varphi, \tau) = 0, \quad (7)$$

а также условию периодичности относительно угла

$$v(x, \varphi, \tau) = v(x, \varphi + 2\pi, \tau). \quad (8)$$

Решение задачи (5) — (8) будем искать в виде

$$v(x, \varphi, \tau) = \frac{a_0}{4} (x^2 - 1) - \frac{a_1}{\omega} \sin \omega \tau + \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(x, \tau) + e b_n(x, \tau) + e^2 c_n(x, \tau)] \cos n \varphi, \quad (9)$$

где функции $a_n(x, \tau)$, $b_n(x, \tau)$ и $c_n(x, \tau)$, предполагаемые конечными, со своими производными первого и второго порядка по x и первого порядка по τ подлежат определению. Очевидно, что функция вида (9) удовлетворяет условию периодичности (8) независимо от функций $a_n(x, \tau)$, $b_n(x, \tau)$ и $c_n(x, \tau)$.

Подставляя (9) в уравнение (5) и приравнявая соответствующие коэффициенты, получим дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial y_n}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial y_n}{\partial x} \right) - \frac{n^2}{x^2} y_n, \quad (10)$$

которым должны удовлетворять функции $a_n(x, \tau)$, $b_n(x, \tau)$ и $c_n(x, \tau)$.

Пользуясь начальным условием (6), граничными условиями (7) и подставляя вместо x_2 и $y_n(x_2, \tau)$ их приближенные значения

$$1 - e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi, y_n(1, \tau) + (-e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial x} y_n(1, \tau) + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \varphi \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} y_n(1, \tau),$$

получим следующие начальные и граничные условия, которым должны удовлетворять функции $a_n(x, \tau)$, $b_n(x, \tau)$ и $c_n(x, \tau)$:

$$\begin{aligned} a_0(x, 0) &= \frac{a_0}{4} (1-x^2); a_n(x, 0) = 0, n = \overline{1, \infty}; \\ b_n(x, 0) &= c_n(x, 0) = 0, n = \overline{0, \infty}; a_0(p, \tau) = C \ln p + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega \tau; a_n(p, \tau) = 0, n = \overline{1, \infty}; b_n(p, \tau) = \\ &= c_n(p, \tau) = 0, n = \overline{0, \infty}; a_0(1, \tau) = \frac{a_1}{\omega} \sin \omega \tau; \\ a_n(1, \tau) &= 0, n = \overline{1, \infty}; \frac{\partial}{\partial x} a_1(1, \tau) - 2b_0(1, \tau) = 0; \\ a_0 + \frac{\partial}{\partial x} [2a_0(1, \tau) + a_2(1, \tau)] - 2b_1(1, \tau) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} [a_{n-1}(1, \tau) + a_{n+1}(1, \tau) - 2b_n(1, \tau)] &= 0, n = \overline{1, \infty}; \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} 3a_0 + 2 \frac{\partial}{\partial x} [2a_0(1, \tau) + a_2(1, \tau) - 2b_1(1, \tau)] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [2a_0(1, \tau) + a_2(1, \tau)] + 8c_0(1, \tau) &= 0, \\ 2 \frac{\partial}{\partial x} [3a_1(1, \tau) + a_3(1, \tau) - 4b_0(1, \tau) - 2b_2(1, \tau)] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [3a_1(1, \tau) + a_3(1, \tau)] + 8c_1(1, \tau) &= 0; \\ 3a_0 + 2 \frac{\partial}{\partial x} [2a_0(1, \tau) + 2a_2(1, \tau) + a_4(1, \tau) - \\ - 2b_1(1, \tau) - 2b_3(1, \tau)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [2a_0(1, \tau) + 2a_2(1, \tau) + \\ + a_4(1, \tau)] + 8c_2(1, \tau) &= 0; 2 \frac{\partial}{\partial x} [a_{n-2}(1, \tau) + 2a_n(1, \tau) + \\ + a_{n+2}(1, \tau) - 2b_{n+1}(1, \tau) - 2b_{n+1}(1, \tau)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [a_{n-2}(1, \tau) + \\ + 2a_n(1, \tau) + a_{n+2}(1, \tau)] + 8c_n(1, \tau) &= 0, n = \overline{3, \infty}, \end{aligned}$$

где для краткости записи принято

$$C = \left[v_0 - \frac{a_0}{4} (p^2 - 1) \right] \cdot \frac{1}{\ln p}. \quad (12)$$

Из уравнения (10) и условий (11) очевидно, что

$$a_n(x, \tau) = 0, n = \overline{1, \infty}. \quad (13)$$

С учетом последнего равенства будем иметь

$$b_n(x, \tau) = 0, n \neq 1. \quad (14)$$

Учитывая (10) и соотношения (11)–(14), получим

$$c_n(x, \tau) = 0, n \neq 0, 2. \quad (15)$$

Таким образом, неопределенными остались функции $a_0(x, \tau)$, $b_1(x, \tau)$, $c_0(x, \tau)$ и $c_2(x, \tau)$.

Из системы (11) видно, что эти функции должны удовлетворять следующим начальным и граничным условиям:

$$a_0(x, 0) = \frac{a_0}{4} (1-x^2), a_0(p, \tau) = C \ln p + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega \tau, a_0(1, \tau) = \frac{a_1}{\omega} \sin \omega \tau; \quad (16)$$

$$b_1(x, 0) = b_1(p, \tau) = 0, b_1(1, \tau) = \frac{a_0}{2} + \frac{\partial}{\partial x} a_0(1, \tau); \quad (17)$$

$$\begin{aligned} c_0(x, 0) = c_0(p, \tau) = 0, c_0(1, \tau) = -\frac{3a_0}{8} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} a_0(1, \tau) - \\ - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} a_0(1, \tau) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} b_1(1, \tau). \end{aligned} \quad (18)$$

$$c_2(x, 0) = c_2(p, \tau) = 0, c_2(1, \tau) = c_0(1, \tau). \quad (19)$$

Следует отметить, что если к уравнению (10) применять метод разделения переменных, то оно относительно x будет уравнением Бесселя n -го порядка:

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dU_n}{dx} \right) + \left(\lambda^2 x - \frac{n^2}{x} \right) U_n = 0. \quad (20)$$

Поэтому, применяя формулу Дюамеля (1), функцию $a_0(x, \tau)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_0(x, \tau) &= f_{01}(0) a_{01}(x, \tau) + \int_0^\tau f'_0(t) [a_{01}(x, \tau - t) + \\ &+ a_{02}(x, \tau - t)] dt + \sum_{k=1}^\infty A_{3k} U_0(\lambda_k x) e^{-\lambda_k^2 \tau}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$f_{01}(\tau) = C \ln p + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega \tau, f'_0(t) = a_1 \cos \omega t;$$

$$a_{01}(x, \tau) = 1 - \frac{\ln x}{\ln p} + \sum_{k=1}^\infty A_{1k} U_0(\lambda_k x) e^{-\lambda_k^2 \tau}; \quad (22)$$

$$a_{02}(x, \tau) = 1 - \frac{\ln x}{\ln p} + \sum_{k=1}^\infty A_{2k} U_0(\lambda_k x) e^{-\lambda_k^2 \tau};$$

$$A_{1k} = \frac{2p U_1(\lambda_k p)}{\lambda_k [U_1^2(\lambda_k) - p^2 U_1^2(\lambda_k p)]}, A_{2k} = \frac{2U_1(\lambda_k)}{\lambda_k [p^2 U_1^2(\lambda_k p) - U_1^2(\lambda_k)]},$$

$$A_{3k} = a_0 \frac{\lambda_k p (p^2 - 1) U_1(\lambda_k p) + 2 [U_2(\lambda_k) - p^2 U_2(\lambda_k p)]}{2 [U_1^2(\lambda_k) - p^2 U_1^2(\lambda_k p)]};$$

$$U_i(\lambda_k x) = Y_0(\lambda_k) I_i(\lambda_k x) - I_0(\lambda_k) Y_i(\lambda_k x), i = 0, 1, 2;$$

I и Y — бесселевы функции соответственно первого и второго рода, λ_k — корни уравнения,

$$U_0(\lambda p) = 0.$$

Выполняя в формуле (21) интегрирование и преобразуя полученное выражение, функцию $a(x, \tau)$ находим в виде:

$$a_0(x, \tau) = C \ln x + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega \tau + \sum_{k=1}^{\infty} A_k U_0(\lambda_k x) e^{-\lambda_k^2 \tau} + a_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{4k}}{\lambda_k^4 + \omega^2} U_0(\lambda_k x) (\lambda_k^2 \cos \omega \tau + \omega \sin \omega \tau - \lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2 \tau}), \quad (23)$$

где для краткости принято:

$$A_k = A_{1k} \cdot C \ln p + A_{3k}, \quad A_{4k} = A_{1k} + A_{2k}.$$

С помощью решения (23) условия (17) для функции $b_1(x, \tau)$ приведем к виду:

$$b_1(b, 0) = b_1(p, \tau) = 0, \quad b_1(1, \tau) = f_1(\tau), \quad (24)$$

где для краткости записи обозначено

$$f_1(\tau) = \beta - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k U_1(\lambda_k) e^{-\lambda_k^2 \tau} - a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k A_{4k}}{\lambda_k^4 + \omega^2} \times U_0(\lambda_k) \cdot (\lambda_k^2 \cos \omega \tau + \omega \sin \omega \tau - \lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2 \tau}), \quad \beta = \frac{a_0}{2} + C. \quad (25)$$

Тогда на основании известной формулы Дюамеля функцию $b_1(x, \tau)$ можно представить в виде

$$b_1(x, \tau) = f_1(0) b(x, \tau) + \int_0^{\tau} f_1'(t) b(x, \tau - t) dt, \quad (26)$$

где

$$b(x, \tau) = \frac{1}{1-p^2} \left(x - \frac{p^2}{x} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m U_1(\mu_m x) e^{-\mu_m^2 \tau}, \quad (27)$$

$$B_m = \frac{2}{\mu_m(1-p^2)} \cdot \frac{p^2 U_0(\mu_m) - p^2 U_0(\mu_m p) + U_2(\mu_m) - p^2 U_2(\mu_m p)}{U_0(\mu_m) U_2(\mu_m) - p^2 U_0(\mu_m p) U_2(\mu_m p)},$$

$$U_i(\mu_m x) = Y_i(\mu_m) I_i(\mu_m x) - I_i(\mu_m) Y_i(\mu_m x), \quad i = 0, 1, 2,$$

μ_m — корни уравнения,

$$U_1(\mu p) = 0.$$

При помощи формул (26) и (27) функцию $b_1(x, \tau)$ найдем в следующем виде:

$$b_1(x, \tau) = \frac{f_1(\tau)}{1-p^2} \left(x - \frac{p^2}{x} \right) + f_1(0) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} B_m U_1(\mu_m x) e^{-\mu_m^2 \tau} + \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{\lambda_k A_k B_m}{1-p^2} U_1(\lambda_k) U_1(\mu_m x) (e^{-\lambda_k^2 \tau} - e^{-\mu_m^2 \tau}) - a_1 \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{\lambda_k A_{4k} B_m}{\lambda_k^4 + \omega^2} U_1(\lambda_k) U_1(\mu_m x) \left\{ \frac{1}{\mu_m^4 + \omega^2} [\omega(\omega^2 - \lambda_k^2 \mu_m^2) \sin \omega \tau + \omega^2 (\lambda_k^2 + \mu_m^2) (\cos \omega \tau - e^{-\mu_m^2 \tau})] + \frac{\lambda_k^4}{\mu_m^2 - \lambda_k^2} (e^{-\lambda_k^2 \tau} - e^{-\mu_m^2 \tau}) \right\}. \quad (28)$$

С помощью решений (23) и (28) условия (18) и (19) для функций $c_0(x, \tau)$ и $c_2(x, \tau)$ приводятся к виду:

$$c_i(x, 0) = c_i(p, \tau) = 0, \quad c_i(1, \tau) = f(\tau), \quad i = 0, 2. \quad (29)$$

где принято обозначение:

$$f(\tau) = \gamma - \frac{1+3p^2}{4(1-p^2)} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k U_1(\lambda_k) e^{-\lambda_k^2 \tau} + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k A_{4k}}{\lambda_k^4 + \omega^2} U_1(\lambda_k) \times (\lambda_k^2 \cos \omega \tau + \omega \sin \omega \tau - \lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2 \tau}) \right] + \frac{f_1(0)}{2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \mu_m U_0(\mu_m) e^{-\mu_m^2 \tau} + \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^3 \mu_m A_k B_m}{2(\mu_m^2 - \lambda_k^2)} U_1(\lambda_k) U_0(\mu_m) (e^{-\lambda_k^2 \tau} - e^{-\mu_m^2 \tau}) - \frac{a_1}{2} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \mu_m A_{4k} B_m}{\lambda_k^4 + \omega^2} \times U_1(\lambda_k) U_0(\mu_m) \left\{ \frac{1}{\mu_m^4 + \omega^2} [\omega(\omega^2 - \lambda_k^2 \mu_m^2) \sin \omega \tau + \omega^2 (\lambda_k^2 + \mu_m^2) \times (\cos \omega \tau - e^{-\mu_m^2 \tau})] + \frac{\lambda_k^4}{\mu_m^2 - \lambda_k^2} (e^{-\lambda_k^2 \tau} - e^{-\mu_m^2 \tau}) \right\},$$

$$\gamma = \frac{a_0(5p^2 - 1) + 2C(3p^2 + 1)}{8(1-p^2)}. \quad (30)$$

На основании формулы Дюамеля функции $c_0(x, \tau)$ и $c_2(x, \tau)$ можно представить в виде

$$c_i(x, \tau) = f(0) c_{i1}(x, \tau) + \int_0^{\tau} f'(t) c_{i1}(x, \tau - t) dt, \quad i = 0, 2, \quad (31)$$

где

$$c_{01}(x, \tau) = 1 - \frac{\ln x}{\ln p} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{0n} U_0(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \tau},$$

$$c_{21}(x, \tau) = \frac{1}{1-p^4} \left(x^2 - \frac{p^4}{x^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} U_2(\nu_n x) e^{-\nu_n^2 \tau}, \quad (32)$$

$$C_{0n} = \frac{2 U_1(\lambda_n)}{\lambda_n [p^2 U_1^2(\lambda_n p) - U_1^2(\lambda_n)]},$$

$$C_{2n} = \frac{2}{\nu_n(p^4 - 1)} \cdot \frac{p^4 U_1(\nu_n) - p^3 U_1(\nu_n p) + U_3(\nu_n) - p^3 U_3(\nu_n p)}{p^4 U_1(\nu_n p) U_3(\nu_n p) - U_1(\nu_n) U_3(\nu_n)},$$

$$U_i(\nu_n x) = Y_2(\nu_n) I_i(\nu_n x) - I_2(\nu_n) Y_i(\nu_n x), \quad i = 1, 2, 3,$$

ν_n — корни уравнения,

$$U_2(\nu p) = 0.$$

Учитывая в формуле (31) соотношения (30) и (32), после некоторых преобразований функции $c_0(x, \tau)$ и $c_2(x, \tau)$ находим в виде:

$$c_0(x, \tau) = \left(1 - \frac{\ln x}{\ln p} \right) f(\tau) + f(0) \sum_{n=1}^{\infty} C_{0n} U_0(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \tau} + \frac{1+3p^2}{4(1-p^2)} \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k A_{kn} C_{0n}}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} U_1(\lambda_k) U_0(\lambda_n x) (e^{-\lambda_k^2 \tau} - e^{-\lambda_n^2 \tau}) - a_1 \frac{1+3p^2}{4(1-p^2)} \times \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k A_{4k} C_{0n}}{(\lambda_k^4 + \omega^2)(\lambda_n^2 + \omega^2)} U_1(\lambda_k) U_0(\lambda_n x) [\omega(\omega^2 - \lambda_k^2 \lambda_n^2) \sin \omega \tau + \omega^2 (\lambda_k^2 + \lambda_n^2) (\cos \omega \tau - e^{-\lambda_n^2 \tau})] - \frac{f_1(0)}{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\mu_m^2 B_m C_{0n}}{\lambda_n^2 - \mu_m^2} U_0(\mu_m) U_0(\lambda_n x) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times (e^{-\mu_m^2 \tau} - e^{-\lambda_n^2 \tau}) + \sum_{n,k,m=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^3 \mu_m A_k B_m C_{0n}}{2(\mu_m^2 - \lambda_k^2)} U_1(\lambda_k) U_0(\mu_m) U_0(\lambda_n x) \times \\
& \times \left[\frac{\mu_m^2}{\mu_n^2 - \mu_m^2} (e^{-\mu_m^2 \tau} - e^{-\lambda_n^2 \tau}) - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} (e^{-\lambda_k^2 \tau} - e^{-\lambda_n^2 \tau}) \right] - \\
& - \frac{a_1}{2} \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \mu_m A_{4k} B_m C_{0n}}{\lambda_k^4 + \omega^2} U_1(\lambda_k) U_0(\mu_m) U_0(\lambda_n x) \left\{ \frac{1}{\mu_m^4 + \omega^2} \left[a_{kmn} \sin \omega \tau + \right. \right. \\
& + b_{kmn} (\cos \omega \tau - e^{-\lambda_n^2 \tau}) + \frac{\omega^2 \mu_m^2 (\lambda_k^2 + \mu_m^2)}{\lambda_n^2 - \mu_m^2} (e^{-\mu_m^2 \tau} - e^{-\lambda_n^2 \tau}) \left. \right] + \\
& + \frac{\lambda_k^4}{\mu_m^2 - \lambda_k^2} \left[\frac{\mu_m^2}{\lambda_n^2 - \mu_m^2} (e^{-\mu_m^2 \tau} - e^{-\lambda_n^2 \tau}) - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} (e^{-\lambda_k^2 \tau} - e^{-\lambda_n^2 \tau}) \right] \left. \right\}, \\
& c_2(x, \tau) = \frac{f(\tau)}{1 - p^4} \left(x^2 - \frac{p^4}{x^2} \right) + f(0) \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} U_2(\nu_n x) e^{-\nu_n^2 \tau} + \\
& + \frac{1 + 3p^2}{4(1 - p^2)} \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k A_{4k} C_{2n}}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} U_1(\lambda_k) U_2(\nu_n x) (e^{-\lambda_k^2 \tau} - e^{-\nu_n^2 \tau}) - \\
& - a_1 \frac{1 + 3p^2}{4(1 - p^2)} \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k A_{4k} C_{2n}}{(\lambda_k^4 + \omega^2)(\nu_n^4 + \omega^2)} U_1(\lambda_k) U_2(\nu_n x) \left[\omega(\omega^2 - \lambda_k^2 \nu_n^2) \times \right. \\
& \times \sin \omega \tau + \omega^2 (\lambda_k^2 + \nu_n^2) (\cos \omega \tau - e^{-\nu_n^2 \tau}) - \frac{f_1(0)}{2} \sum \frac{\mu_m^3 B_m C_{2n}}{\nu_n^2 - \mu_m^2} \times \\
& \times U_0(\mu_m) U_2(\nu_n x) (e^{-\mu_m^2 \tau} - e^{-\nu_n^2 \tau}) + \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^3 \mu_m A_k B_m C_{2n}}{2(\mu_m^2 - \lambda_k^2)} U_1(\lambda_k) \times \\
& \times U_0(\mu_m) U_2(\nu_n x) \left. \right] \left[\frac{\mu_m^2}{\nu_n^2 - \mu_m^2} (e^{-\mu_m^2 \tau} - e^{-\nu_n^2 \tau}) - \frac{\lambda_k^2}{\nu_n^2 - \lambda_k^2} \times \right. \\
& \times (e^{-\lambda_k^2 \tau} - e^{-\nu_n^2 \tau}) \left. \right] - \frac{a_1}{2} \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \mu_m A_{4k} C_{2n}}{\lambda_k^4 + \omega^2} U_1(\lambda_k) U_0(\mu_m) U_2(\nu_n x) \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{\mu_m^4 + \omega^2} \left[\bar{a}_{kmn} \sin \omega \tau + \bar{b}_{kmn} (\cos \omega \tau - e^{-\nu_n^2 \tau}) + \omega^2 \mu_m^2 \frac{\lambda_k^2 + \mu_m^2}{\nu_n^2 - \mu_m^2} \times \right. \right. \\
& \times (e^{-\mu_m^2 \tau} - e^{-\nu_n^2 \tau}) \left. \right] + \frac{\lambda_k^4}{\mu_m^2 - \lambda_k^2} \left[\frac{\mu_m^2}{\nu_n^2 - \mu_m^2} (e^{-\mu_m^2 \tau} - e^{-\nu_n^2 \tau}) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} (e^{-\lambda_k^2 \tau} - e^{-\nu_n^2 \tau}) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Здесь приняты обозначения:

$$A_{kn} = \lambda_k^2 A_k - a_1 \frac{\lambda_n^4 A_{4k}}{\lambda_k^4 + \omega^2}, \quad \bar{A}_{kn} = \lambda_k^2 A_k - a_1 \frac{\nu_n^4 A_{4k}}{\lambda_k^4 + \omega^2},$$

$$a_{kmn} = \frac{\omega^3}{\lambda_n^4 + \omega^2} (\omega^2 - \lambda_k^2 \mu_m^2 - \lambda_k^2 \lambda_n^2 - \lambda_n^2 \mu_m^2), \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
b_{kmn} &= \frac{\omega^2}{\lambda_n^4 + \omega^2} (\omega^2 \lambda_n^2 - \lambda_k^2 \lambda_n^2 \mu_m^2 + \omega^2 \lambda_k^2 + \omega^2 \mu_m^2), \\
\bar{a}_{kmn} &+ \frac{\omega^3}{\nu_n^4 + \omega^2} (\omega^2 - \lambda_k^2 \mu_m^2 + \lambda_k^2 \nu_n^2 + \nu_n^2 \mu_m^2), \\
\bar{b}_{kmn} &= \frac{\omega^2}{\nu_n^4 + \omega^2} (\omega^2 \nu_n^2 - \lambda_k^2 \nu_n^2 \mu_m^2 + \omega^2 \lambda_k^2 + \omega^2 \mu_m^2).
\end{aligned}$$

Учитывая соотношения (9) и (13)–(15), решение задачи (5)–(8) получим в виде

$$\begin{aligned}
v(x, \varphi, \tau) &= \frac{a_0}{4} (x^2 - 1) - \frac{a_1}{\omega} \sin \omega \tau + a_0(x, \tau) + \\
&+ eb_1(x, \tau) \cos \varphi + e^2 [c_0(x, \tau) + c_2(x, \tau) \cos 2\varphi],
\end{aligned} \tag{36}$$

где вместо функций $a_0(x, \tau)$, $b_1(x, \tau)$, $c_0(x, \tau)$ и $c_2(x, \tau)$ подразумеваются их значения согласно формулам (23), (28), (33) и (34).

Следует отметить, что при помощи формул (23), (28), (33), (34) и (35) можно получить следующие характерные частные случаи: 1) нестационарного движения между эллиптическим и круговым цилиндрами при постоянном перепаде давления; 2) пульсирующего движения между двумя соосными круговыми цилиндрами и 3) стационарного движения между эллиптическим и круговым цилиндрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., 1955.
2. Кочин Н. К., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. М., 1963.
3. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Баку, 1959.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., 1970.
5. Кузнецов М. Д. ДАН СССР, т. XXXV, 1952, № 4.
6. Шевелев Я. В. ДАН СССР, т. XCI, 1953, № 1.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступило 30. VI 1972

З. Б. Хеиров

Эллиптик вэ даирэви цилиндрлэр арасында өзлү мајенин ритмик һәрәкәти

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә охлары мұхтелиф олан эллиптик вэ даирэви цилиндрлэр арасында өзлү мајенин дүзхәли ритмик һәрәкәти һағғындакы (5)–(8) мәсәләләринә бахылмышдыр ки, онун да һәлли (36) шәклиндә тапылмышдыр.

Z. B. Kheirov

Pulsating movement of the tenacious liquid between elliptic and circular cylinders

SUMMARY

A problem (5)–(8) of rectilinear pulsating movement of the tenacious liquid between elliptic and circular cylinders is observed in this article; the solution the problem is found in the equation. (36).

М. А. ГУЛИЕВ, М. А. МУСАЕВ, Н. А. ПАРФЕНТЬЕВА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В КОНЕЧНОМ ПЛАСТЕ С ЛОКАЛЬНО-ПРОНИЦАЕМОЙ КРОВЛЕЙ

В последние годы вопросы, связанные с исследованием процессов, протекающих в многослойной среде, представляют большой интерес для разработки нефтяных месторождений. Однако точное решение задач о течении жидкости в многослойной среде связано с большими математическими трудностями. Поэтому для решения подобного рода задач широкое применение находят специальные приближенные методы [1, 2, 4].

Однако приближенные методы применяются в основном в тех случаях, когда предполагается, что нефтяной пласт имеет полубесконечный вид. Обычно в реальных условиях пласты конечны. Поэтому часто представляет интерес приближенное решение задач о течении жидкости из одного пласта в другой с учетом конечности пласта.

Пусть батарея скважин, заменяемая галереей, пущена в эксплуатацию с постоянным дебитом Q в конечном пласте, который имеет мощность h и проницаемость k . На границе пласта $x=l$ поддерживается постоянное давление p_k . В начальный момент времени давление в любой точке пласта постоянное и равно p_0 . Подошва пласта считается непроницаемой. Над эксплуатируемым пластом простирается другой пласт, который отделяется от него локально-проницаемой зоной шириной $(a_2 - a_1)$, с коэффициентом проницаемости k_r и мощностью b_r . Над этой зоной поддерживается постоянное давление p^0 .

Для точного решения вышеописанной задачи следует интегрировать дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \alpha (p - p^0) [\sigma(x - a_1) - \sigma(x - a_2)] = \frac{1}{x} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

при указанных начальном и граничном условиях [1]. В уравнении (1) α — коэффициент пьезопроводности, $\sigma(x)$ — единичная функция Хевисайда и α — коэффициент, учитывающий параметры пласта и локально-проницаемой зоны.

В настоящей работе вышеописанная задача решается с применением метода Галеркина, имеющего ряд преимуществ в решении подобного рода задач и обладающего широкими возможностями. Таким образом, надо найти такое решение, которое точно удовлетворяло бы граничным условиям и приближенно — уравнению (1) и началь-

Для решения описанной выше задачи закон распределения давления в пласте задаем в виде

$$p^* = p_k + (l - x) \left(\varphi l + \varphi x - \frac{Q}{A^*} \right), \quad (2)$$

который удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} p^* &= p_k \text{ при } x = l, \\ A^* \frac{\partial p^*}{\partial x} &= 0 \text{ при } x = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где A^* — постоянный коэффициент.

Неизвестное $\varphi(t)$ определяется после вычисления невязки $R(p^*)$, которая находится из уравнения (1) с учетом закона распределения (2):

$$R(p^*) = \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} - \alpha (p^* - p^0) [\sigma(x - a_1) - \sigma(x - a_2)] - \frac{1}{x} \frac{\partial p^*}{\partial t} \neq 0 \quad (4)$$

и

$$R(p^*) = -2\varphi - \frac{1}{x} (l^2 - x^2) \varphi' - \alpha \left[p_k + (l - x) \left(\varphi l + \varphi x - \frac{Q}{A^*} \right) - p^0 \right] \times \\ \times [\sigma(x - a_1) - \sigma(x - a_2)] \neq 0. \quad (5)$$

Для минимизации невязки $R(p^*)$ исходим из

$$\int_0^l R(p^*) (l^2 - x^2) dx = 0. \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi' \frac{8}{15x} + \varphi \left[\frac{4}{3} l^3 + \alpha l^4 (a_2 - a_1) - \frac{2}{3} \alpha l^2 (a_2^3 - a_1^3) + \frac{\alpha (a_2^5 - a_1^5)}{5} \right] + \\ + \alpha (p_k - p^0) (a_2 - a_1) l^2 - \alpha (p_k - p^0) \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} - \frac{Q \alpha l^3}{A^*} (a_2 - a_1) + \\ + \frac{Q \alpha l^2}{A^*} \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} + \frac{Q \alpha l}{A^*} \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} - \frac{Q \alpha}{A^*} \frac{a_2^4 - a_1^4}{4} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение (7) получено из (6) с учетом свойств единичной функции Хевисайда. Оно может быть представлено в виде

$$\varphi' = -\varphi \frac{A}{k} - \frac{B}{k}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} B &= \alpha (p_k - p^0) (a_2 - a_1) l^2 - \alpha (p_k - p^0) \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} - \frac{Q \alpha l^3}{A^*} (a_2 - a_1) + \\ &+ \frac{Q \alpha l}{A^*} \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} - \frac{Q \alpha}{A^*} \frac{a_2^4 - a_1^4}{4} = 0, \quad k = \frac{8}{15x}, \\ A &= \frac{4}{3} l^3 + \alpha l^4 (a_2 - a_1) - \frac{2}{3} \alpha l^2 (a_2^3 - a_1^3) + \frac{\alpha (a_2^5 - a_1^5)}{5}. \end{aligned}$$

Решением уравнения (8) будет

$$\varphi(t) = C e^{-\frac{A}{k} t} - \frac{B}{A}. \quad (9)$$

Неизвестное постоянно C находится из выражения

$$\int_0^l (p|_{t=0} - p^*|_{t=0}) (l^2 - x^2) dx = 0 \quad (10)$$

в виде

$$C = \frac{25}{32} \frac{Q}{A^* l} - \frac{10}{8l^2} (p_k - p_0) + \frac{B}{A}. \quad (11)$$

Тогда неизвестное $\varphi(t)$ определяется по формуле:

$$\varphi(t) = \left[\frac{25}{32} \frac{Q}{A^* l} - \frac{10}{8l^2} (p_k - p_0) \right] e^{-\frac{A}{\kappa} t} - \frac{B}{A} \left(1 - e^{-\frac{A}{\kappa} t} \right). \quad (12)$$

Из (2) с учетом зависимости (12) получаем

$$p^* = p_k - \frac{Q}{A^*} (l - x) + (l^2 - x^2) \left[\frac{25}{32} \frac{Q}{A^* l} - \frac{10}{8l^2} (p_k - p_0) \right] e^{-\frac{A}{\kappa} t} - \frac{B}{A} \left(1 - e^{-\frac{A}{\kappa} t} \right) (l^2 - x^2). \quad (13)$$

Формула (13) позволяет для любого момента времени определить давление в произвольном сечении пласта.

Количество жидкости, перетекающей через локально-проницаемую зону кровли пласта, определяется следующим образом:

$$Q_y = \frac{dq}{dt} = \frac{\kappa_r}{\mu b_r} \int_{a_1}^{a_2} (p^* - p_0) dx, \quad (14)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\kappa_r}{\mu b_r} \left[(p_k - p_0) (a_2 - a_1) - \frac{Ql}{A^*} (a_2 - a_1) + \frac{Q(a_2^2 - a_1^2)}{2A^*} + \varphi l^2 (a_2 - a_1) - \varphi \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} \right]. \quad (15)$$

Из (15) и (12) имеем

$$q = \frac{\kappa_r}{\mu b_r} \left\{ \left[(p_k - p_0) (a_2 - a_1) - \frac{Ql}{A^*} (a_2 - a_1) + \frac{Q(a_2^2 - a_1^2)}{2A^*} - \frac{Bl^2}{A} (a_2 - a_1) + \frac{B(a_2^3 - a_1^3)}{3A} \right] t - \frac{\kappa}{A} \left[l^2 (a_2 - a_1) - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{25}{32} \frac{Q}{A^* l} - \frac{10}{8l^2} (p_k - p_0) + \frac{B}{A} \right] e^{-\frac{A}{\kappa} t} \right\}. \quad (16)$$

Как видно из (16), на количество перетекания жидкости через кровлю пласта влияет не только ширина локально-проницаемой зоны, но и ее расположение.

Заметим, что из выведенных формул как частный случай можно получить формулы для решения задачи о течении жидкости в пласте, вся кровля которого проницаема [4]. Тогда вместо (16) получим

$$q = \frac{\kappa_r l}{\mu b_r} \left\{ \left(p_k - p_0 - \frac{Ql}{2A^*} - \frac{2Bl^2}{3A} \right) t - \frac{2\kappa l^2}{3A} \left[\frac{25}{32} \frac{Q}{A^* l} - \frac{10}{8l^2} (p_k - p_0) + \frac{B}{A} \right] e^{-\frac{A}{\kappa} t} \right\}.$$

Для случая, когда кровля пласта содержит большое число локально-проницаемых зон, уравнение (1) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \alpha (p - p_0) \sum_{i=1}^n [\sigma(x - a_{2i-1}) - \sigma(x - a_{2i})] = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (17)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Решение аналогичной задачи с большим числом локально-проницаемых зон также получается в виде (13). Коэффициенты A и B в этом случае принимают, соответственно, следующий вид:

$$B = \alpha l^2 \left(p_k - p_0 - \frac{Ql}{A^*} \right) \sum_{i=1}^n (a_{2i} - a_{2i-1}) + \frac{Ql^2}{2A^*} \sum_{i=1}^n (a_{2i}^2 - a_{2i-1}^2) - \frac{Q\alpha}{4A^*} \sum_{i=1}^n (a_{2i}^4 - a_{2i-1}^4) + \frac{\alpha}{3} \left(\frac{Ql}{A^*} - p_k + p_0 \right) \sum_{i=1}^n (a_{2i}^3 - a_{2i-1}^3), \quad (18)$$

$$A = \frac{4}{3} l^3 + \alpha l^4 \sum_{i=1}^n (a_{2i} - a_{2i-1}) - \frac{2}{3} \alpha l^2 \sum_{i=1}^n (a_{2i}^3 - a_{2i-1}^3) + \frac{\alpha}{5} \sum_{i=1}^n (a_{2i}^5 - a_{2i-1}^5). \quad (19)$$

Для большого числа локально-проницаемых зон количество перетекающей через кровлю жидкости определяется из нижеследующего выражения:

$$q = \frac{\kappa_r}{\mu b_r} \left\{ \left[\left(p_k - p_0 - \frac{Ql}{A^*} - \frac{Bl^2}{A} \right) \sum_{i=1}^n (a_{2i} - a_{2i-1}) + \frac{Q}{2A^*} \sum_{i=1}^n (a_{2i}^2 - a_{2i-1}^2) + \frac{B}{3A} \sum_{i=1}^n (a_{2i}^3 - a_{2i-1}^3) \right] t - \right. \\ \left. - \frac{\kappa}{A} \left[l^2 \sum_{i=1}^n (a_{2i} - a_{2i-1}) - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (a_{2i}^3 - a_{2i-1}^3) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{25}{32} \frac{Q}{A^* l} - \frac{10}{8l^2} (p_k - p_0) + \frac{B}{A} \right] e^{-\frac{A}{\kappa} t} \right\}. \quad (20)$$

Формула (20) позволяет судить о взаимовлиянии локально-проницаемых зон.

Если на границе $x=0$ задается постоянное давление p_k , то неизвестное $\varphi(t)$ определяется по формуле:

$$\varphi(t) = \left[\frac{5}{l^2} (2p_0 - p_k - p_n) + \frac{B}{A} \right] e^{-\frac{A}{\kappa} t} - \frac{B}{A}, \quad (21)$$

где

$$A = \alpha \left(\frac{l^3}{3\alpha} + \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} l^2 - l \frac{a_2^4 - a_1^4}{2} + \frac{a_2^5 - a_1^5}{5} \right), \quad \kappa = \frac{l^5}{30\alpha},$$

$$B = \alpha \left[(p_n - p_0) \left(l \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} \right) + \frac{p_k - p_n}{l} - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} - \frac{a_2^4 - a_1^4}{4} \right].$$

Количество жидкости, перетекающей через локально-проницаемую зону,

$$q = \frac{\kappa_r}{\mu b_r} \left[(p_n - p_0) (a_2 - a_1) + \frac{p_k - p_n}{2l} (a_2^2 - a_1^2) - \frac{B}{A} \left(l \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} \right) \right] t - \frac{\kappa_r}{\mu b_r} \left[\frac{5}{l^2} (2p_0 - p_k - p_n) + \frac{B}{A} \right] \times \\ \times \left(l \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} \right) \frac{\kappa}{A} e^{-\frac{A}{\kappa} t}. \quad (22)$$

Для этого случая также можно вывести соответствующие формулы при большом числе локально-проницаемых зон. Формулы (21) и (22) получены при

$$p^* = p_n + \frac{p_k - p_n}{l} x + x(l-x)\varphi(t). \quad (23)$$

Таким образом, выведены простые формулы для решения при различных граничных условиях задачи о течении жидкости в пласте с локально-проницаемой кровлей. Численные расчеты по решению аналогичной задачи и эксперименты на электронной модели [5] показали, что приближенные формулы, полученные в результате применения метода Галеркина, дают хорошее совпадение с результатами моделирования при больших значениях времени.

Авторы благодарят проф. М. А. Гусейн-заде за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М., 1965.
2. Шелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостехиздат, 1959.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1952.
4. Гулиев М. А. Ж. прикл. мех. и техн. физики, АН СССР, 1969, № 6.
5. Гулиев М. А. К моделированию физических полей и систем. Баку, 1970.

АзПИ им. Ч. Ильдрыма

Поступило 12.VII 1972

М. А. Гулиев, М. Э. Мусаев, Н. А. Парфентьева

Локал кечиричи таваны олан сонлу лајда маје ахыны һаггында
мәсәләнин һәллиһә Галјоркин методунун тәтбиги

ХҮЛАСӘ

Мәһәләдә Галјоркин методунун тәтбиги илә локал кечиричи таваны олан сонлу лајда маје ахынына даир мұхтәлиф мәсәләләрин һәлли верилір. Заманын мұхтәлиф анлары үчүн лајын йстәнилән ен кәсијиндә тәзјиги мұәјјән етмәкдән өтрү (13) тәғриби дүстур чыхарылмышдыр. Локал кечиричи зонадан ахан мајенин мигдарыны һесабламағ үчүн (16) дүстур алынмышдыр. Лајын таванында чохла локал кечиричи зоналар олан һал үчүн дә мұвафиг дүстурлар һасил едилмишдыр.

M. A. Guliev, M. A. Musaev, P. A. Parfentieva

The application of Galerkin [method to the solution of the problem on fluid flow in the [finite reservoir with locally-permeable roofing

SUMMARY

In the paper it is solved a problem on fluid flow in finite reservoir with locally-permeable roofing with the application of Galerkin method. For the determination of pressure in the reservoir sections for any time moment an approximate formula is obtained, convenient for carrying out numerical calculations. It is also discussed a case when the roofing of the reservoir contains a large number of locally-permeable zones.

С. А. АЛЕСКЕРОВА, М. И. МУСТАФАЕВ

КРУЧЕНИЕ БРУСА, СЕЧЕНИЕ КОТОРОГО ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЮ КОНЦЕНТРИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО С НЕЦЕНТРАЛЬНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВЫРЕЗОМ

1. Рассмотрим задачу кручения полого бруса, поперечное сечение которого представляет собою трехсвязную область S , ограниченную окружностями L_0 , L_1 и эллипсом L_2 (рис.). Ось эллиптической полости проходит на некотором расстоянии от оси бруса.

Решение задачи сводится к отысканию функции $\varphi_1(z)$ [2] из условий:

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = t\bar{t} + C_j \text{ на } L_j \quad (j=0, 1, 2).$$

Здесь t —аффикс точки кривой L_j и C_j —некоторые вещественные постоянные, одну из них, например, C_0 можно фиксировать произвольно; остальные подлежат определению. Примем $C_0 = -R_0^2$, тогда $t\bar{t} + C_0 = 0$ на L_0 . Затем, учитывая, что на L_1 $t\bar{t} = R_1^2$ и $R_1^2 + C_1 = C_1^{**}$, окончательно получим:

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = 0 \quad \text{на } L_0, \quad (1, 1)$$

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = C_1^{**} \quad \text{на } L_1, \quad (1, 2)$$

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = t\bar{t} + C_2 \quad \text{на } L_2. \quad (1, 3)$$

Введем вспомогательные неизвестные функции следующим образом [3]:

$$2\omega(t_0) = \varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)} \quad \text{на } L_0, \quad (1, 4)$$

$$2\omega(t_1) = \varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)} \quad \text{на } L_1. \quad (1, 5)$$

Сложим (1, 4) с (1, 1) и (1, 5) с (1, 2), тогда:

$$\varphi_1(t) = \omega(t_0) \quad \text{на } L_0, \quad (1, 6)$$

$$\varphi_1(t) = \omega(t_1) + C_1^* \quad \text{на } L_1 \quad \left(\text{где } C_1^* = \frac{C_1^{**}}{2} \right). \quad (1, 7)$$

На основании свойств интегралов типа Коши и теоремы аналитического продолжения введенная новая функция

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega(t_0)}{t_0 - z} dt_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z} dt_1 \quad (1, 8)$$

является регулярной всюду вне эллипса L_2 . Эта функция внутри окружности L_1 определяется формулой:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega(t_0)}{t_0 - z} dt_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z} dt_1 + C_1^*. \quad (1, 9)$$

2. С помощью функции

$$z - e = A \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \left(A = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}, \quad \rho = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right), \quad (2, 1)$$

конформно отображающей внешность эллипса L_2 на внешность окружности γ радиуса ρ и функции (1, 8) из (1, 3) получим

$$\begin{aligned} \varphi^*(\tau) + \overline{\varphi^*(\tau)} = & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_n^* + b_n^{**}) \left(\frac{\tau^n}{\rho^n} + \frac{\rho^n}{\tau^n} \right) + A^2 \left(\frac{\tau^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{\tau^2} \right) + \\ & + Ae \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\tau}{\rho} + \frac{\rho}{\tau} \right) + A^2 \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) + e^2 + C_2 - \\ & - (c_0^* + \overline{c_0^*}) - (\alpha_0^{**} + \overline{\alpha_0^{**}}), \end{aligned} \quad (2, 2)$$

где $\varphi^*(\zeta) = \varphi(z)$; τ — аффикс точки γ ;

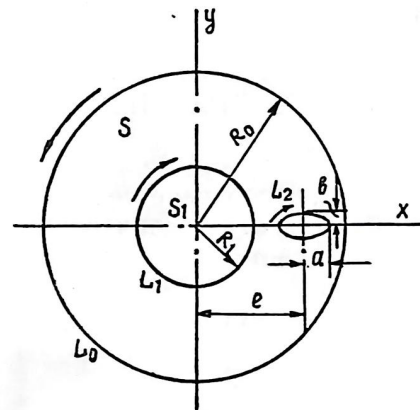


Рис.

$$b_n^* = \frac{1}{\rho^n} \sum_{k=|n|}^{\infty} \left(\frac{A}{R_0 - e} \right)^k C_k^{\frac{n+k}{2}} \alpha_k^*,$$

$$b_n^{**} = \frac{1}{\rho^n} \sum_{k=|n|}^{\infty} \left(\frac{A}{R_1 - e} \right)^k C_k^{\frac{n+k}{2}} \alpha_k^{**}; \quad (2, 3)$$

$$b_0^* = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{A}{R_0 - e} \right)^k C_k^{\frac{k}{2}} \alpha_k^*;$$

$$b_0^{**} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{A}{R_1 - e} \right)^k C_k^{\frac{k}{2}} \alpha_k^{**};$$

$$b_{-n}^* = \rho^{2n} b_n^*; \quad b_{-n}^{**} = \rho^{2n} b_n^{**} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Звездочка при сумме указывает, что индекс k принимает значения одинаковой четности со значениями, принимаемыми индексом n . Кроме того, здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_k^* &= \frac{(R_0 - e)^k}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega(t_0)}{(t_0 - e)^{k+1}} dt_0, \\ \alpha_k^{**} &= \frac{(R_1 - e)^k}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{(t_1 - e)^{k+1}} dt_1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2, 4)$$

Функционалы α_k^* и α_k^{**} ($k = 1, 2, \dots$) условимся считать вещественными, а c_0^* и α_0^{**} — комплексными величинами, в справедливости которых убеждаемся по ходу решения.

Принимая во внимание, что $\varphi^*(\zeta)$ регулярна во внешности окружности γ и обращается в нуль на бесконечности, из (2, 2) найдем:

$$\varphi^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\rho^n}{\zeta^n}; \quad (2, 5)$$

$$C_2 = -A^2 \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) - e^2 + (\alpha_0^* + \overline{\alpha_0^*}) + (\alpha_0^{**} + \overline{\alpha_0^{**}}) + 2(b_0^* + b_0^{**}),$$

где

$$\lambda_n = -(1 + \rho^{2n})(b_n^* + b_n^{**}) + A^2 \varepsilon_n^{(2)} + Ae \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \varepsilon_n^{(1)}, \quad (2, 6)$$

$$\varepsilon_n^{(1)} = \begin{cases} 1 & (n=1); \\ 0 & (n \neq 1), \end{cases} \quad \varepsilon_n^{(2)} = \begin{cases} 1 & (n=2); \\ 0 & (n \neq 2). \end{cases}$$

Используя функцию

$$\zeta = \frac{z - e + \sqrt{(z - e)^2 - (2A)^2}}{2A}, \quad (2, 7)$$

обратную функции (2, 1), из (2, 5) в S получим

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{\rho}{2A} \right)^n [(z - e) - \sqrt{(z - e)^2 - (2A)^2}]^n. \quad (2, 8)$$

Представим вспомогательные функции $\omega(t)$ в виде рядов Фурье:

$$\omega(t_0) = \alpha_0 + \sum_{k_1=1}^{\infty} \alpha_{k_1} \left[\left(\frac{t_0}{R_0} \right)^{k_1} - \left(\frac{R_0}{t_0} \right)^{k_1} \right], \quad (2, 9)$$

$$\omega(t_1) = \beta_0 + \sum_{k_1=1}^{\infty} \beta_{k_1} \left[\left(\frac{t_1}{R_1} \right)^{k_1} - \left(\frac{R_1}{t_1} \right)^{k_1} \right],$$

где α_{k_1} , β_{k_1} вещественные, а α_0 и β_0 чисто мнимые коэффициенты. Учитывая (1, 8) и (2, 9) в соотношениях (1, 4) и (1, 5), получим:

$$\omega(t) = \varphi(t) - \overline{\varphi(t)} - \sum_{k_1=1}^{\infty} \beta_{k_1} \left[\left(\frac{R_1}{t} \right)^{k_1} - \left(\frac{R_1}{R_0} \frac{t}{R_0} \right)^{k_1} \right] + \alpha_0 \text{ на } L_0; \quad (2, 10)$$

$$\omega(t) = \varphi(t) - \overline{\varphi(t)} + \sum_{k_1=1}^{\infty} \alpha_{k_1} \left[\left(\frac{t}{R_0} \right)^{k_1} - \left(\frac{R_1}{R_0} \frac{R_1}{t} \right)^{k_1} \right] + 2\alpha_0 - \beta_0 \text{ на } L_1.$$

На основании (2, 5), приняв обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{R_0^m}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega(t_0)}{t_0^{m+1}} dt_0; \quad -\beta_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t_1) t_1^{m-1}}{R_1^m} dt_1; \\ I_{m,n}^{(0)} &= -\left(\frac{e}{R_0} \right)^m \sum_{v_1=n-1}^{N(m,n)} \left(\frac{A}{e} \right)^{v_1+1} C_{m-1}^{v_1} \left(C_{v_1}^{\frac{v_1-n+1}{2}} - C_{v_1}^{\frac{v_1-n-1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (2, 11)$$

$$I_{m,n}^{(1)} = (-1)^{m-n} \left(\frac{R_1}{e} \right)^m \left(\frac{2A}{e} \right)^n \sum_{v_1=0}^{\infty} C_{-n}^{v_1} \sum_{v_2=0}^{\infty} (-1)^{v_2} C_{\frac{v_1}{2}}^{v_2} \left(\frac{2A}{e} \right)^{2v_2} C_{-(2v_1+n)}^m,$$

$$N(m, n) = \begin{cases} m-1, & \text{если } m \text{ и } n \text{ одинаковой четности,} \\ m-2, & \text{если } m \text{ и } n \text{ различной четности,} \end{cases}$$

из (2, 10) найдем:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \sum_{n=1}^m \rho^n \lambda_n I_{m,n}^{(0)} + \beta_m \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^m, \\ \beta_m &= \sum_{n=1}^m \rho^n \overline{\lambda_n} I_{m,n}^{(1)} + \alpha_m \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^m. \end{aligned} \quad (2, 12)$$

Подставляя (2, 9) в (2, 4), получим:

$$\alpha_k^* = \left(\frac{R_0}{e} - 1\right)^k \sum_{k_1=k}^{\infty} (-1)^{k_1-k} C_{k_1-k}^{k_1} \left(\frac{e}{R_0}\right)^{k_1} \alpha_{k_1}, \quad (2, 13)$$

$$\alpha_k^{**} = \left(\frac{R_1}{e} - 1\right)^k \sum_{k_1=1}^{\infty} (-1)^{k_1-1} \left(\frac{R_1}{e}\right)^{k_1} C_{k+k_1-1}^k \beta_{k_1}.$$

Учитывая (2, 3) и (2, 13), из (2, 6) после перестановки порядка суммирования найдем

$$\lambda_n = \frac{1}{\rho^n} \left[\sum_{k_1=|n|}^{\infty} \mu_{k_1,n}^{(0)} \alpha_{k_1} + \sum_{k_1=1}^{\infty} \mu_{k_1,n}^{(1)} \beta_{k_1} \right] + A^2 \varepsilon_n^{(2)} + Ae \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \varepsilon_n^{(1)}, \quad (2, 14)$$

где

$$\mu_{k_1,n}^{(0)} = -(1+\rho^{2n}) \left(\frac{e}{R_0}\right)^{k_1} \sum_{k=|n|}^{\rho(k_1,n)} (-1)^{k_1-k} \left(\frac{A}{e}\right)^k C_k^{\frac{n+k}{2}} C_{k_1-k}^{k_1} \quad (2, 15)$$

$$\mu_{k_1,n}^{(1)} = -(1+\rho^{2n}) \left(\frac{R_1}{e}\right)^{k_1} \sum_{k=|n|}^{\infty} (-1)^{k_1-1} \left(\frac{A}{e}\right)^k C_k^{\frac{n+k}{2}} C_{k+k_1-1}^k,$$

$$\rho(k_1, n) = \begin{cases} k_1, & \text{если } k_1 \text{ и } n \text{ одинаковой четности,} \\ k_1-1, & \text{если } k_1 \text{ и } n \text{ различной четности.} \end{cases}$$

Учитывая в (2, 12) формулу (2, 14), после некоторых преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} (q_{k_1,m} \alpha_{k_1} + p_{k_1,m} \beta_{k_1}) = f_m^{(0)} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (2, 16)$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} (q_{k_1,m}^* \alpha_{k_1} + p_{k_1,m}^* \beta_{k_1}) = f_m^{(1)};$$

$$q_{k_1,m} = - \sum_{n=1}^{E(k_1,m)} I_{m,n}^{(0)} \mu_{k_1,n}^{(0)}, \quad q_{m,m} = 1 - \sum_{n=1}^m I_{m,n}^{(0)} \mu_{m,n}^{(0)};$$

$$p_{k_1,m} = - \sum_{n=1}^{E(k_1,m)} I_{m,n}^{(0)} \mu_{k_1,n}^{(1)}, \quad p_{m,m} = - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^m - \sum_{n=1}^m I_{m,n}^{(0)} \mu_{m,n}^{(1)};$$

$$q_{k_1,m}^* = - \sum_{n=1}^{E(k_1,m)} I_{m,n}^{(1)} \mu_{k_1,n}^{(0)}, \quad q_{m,m}^* = - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^m - \sum_{n=1}^m I_{m,n}^{(1)} \mu_{m,n}^{(0)};$$

$$p_{k_1,m}^* = - \sum_{n=1}^{E(k_1,m)} I_{m,n}^{(1)} \mu_{k_1,n}^{(1)}, \quad p_{m,m}^* = 1 - \sum_{n=1}^m I_{m,n}^{(1)} \mu_{m,n}^{(1)};$$

$$f_m^{(0)} = Ae (1 + \rho^2) I_{m,1}^{(0)} + A^2 \rho^2 I_{m,2}^{(0)};$$

$$f_m^{(1)} = Ae (1 + \rho^2) I_{m,1}^{(1)} + A^2 \rho^2 I_{m,2}^{(1)}.$$

Здесь $E(k_1, m) = k_1$, если $k_1 \leq m$ и $E(k_1, m) = m$, если $k_1 > m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амензаде Ю. А. „ДАН СССР“, 119, 1958, № 6.
 2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во „Наука“, 1966.
 3. Шерман Д. И. „ДАН СССР“, 63, 1948, № 5.
- АЗИНЕФТЕХИМ им. М. Азизбекова

Поступило 5. I 1972

С. А. Элэскэрова, М. И. Мустафаев

Мэргээдэн ханарда эллипсэхкилли ојуу олан консентрик даирэви хэлгэ кэсикли брусун бурулмасы

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ ен кэсији елипсэхкилли ојууа малик даирэви хэлгэ олан брусун бурулмасына бахылмышдыр. Ојуугун оху брусун охундан мүэјјэн мэсафэдэ јерлэшмишдир.

Мэсэлэнин хэлли сонсуз чэбри тэнликлэр системинэ кэтирилмишдир.

S. A. Aleskerova, M. I. Mustafaev

The bar twisting with section like concentric circle with non-central elliptic cut

SUMMARY

The problem of the bar twisting with section like concentric circle with non-central elliptic cut has been solved. The solution is reduced to the recurring algebraic equations system.

З. Г. КЕРИМОВ, Г. Н. ДЖАЛИЛ-ЗАДЕ, М. А. САДЫХОВ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ С УЧЕТОМ РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ КОЛЕБАНИЙ

В процессе бурения нефтяных и газовых скважин широко применяются легкосплавные бурильные трубы (ЛБТ), а также различные конструкции забойных виброгасителей. Особенно положительно сказывается гашение колебания бурильных труб на их долговечности и на показателях при алмазном бурении [1].

Экспериментальное исследование механической характеристики материалов ЛБТ и гасителей показывает наличие существенной нелинейности между напряжением и деформацией [2, 3].

Исследование динамики колонны бурильных труб с учетом наличия нелинейности характеристики ее элементов связано с известными математическими трудностями. Однако для выбора соответствующих конструкций, а также материалов виброгасителей для данной компоновки колонны бурильных труб и долота необходимо иметь общее аналитическое выражение для коэффициента гашения вибрации.

В [4] решена задача по определению коэффициента гашения вибрации бурильных труб. При этом материал гасителя рассматривается как вязко-упругое тело—тело Фойхта. Ниже исследуется динамика колонны бурильных труб с учетом рассеяния энергии колебания материалами виброгасителя и бурильной колонной.

Согласно [5] зависимость между комплексным напряжением и деформацией при гармоническом процессе деформирования описывается посредством комплексного модуля упругости:

$$\sigma^* = E_0 (\omega + i\nu) \cdot E^*,$$

где E_0 —модуль упругости материала;

ω, ν —параметры, зависящие от коэффициента внутреннего трения

$$\omega = \frac{1 - \frac{\nu^2}{4}}{1 + \frac{\nu^2}{4}}; \quad \nu = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma^2}{4}};$$

γ —коэффициент внутреннего трения;

$$\gamma = \frac{\psi}{2\pi}; \quad \psi = \frac{\Delta Q}{Q};$$

ΔQ —необратимо поглощенная телом за один цикл часть энергии циклических деформаций;

Q —потенциальная энергия тела, отвечающая амплитуде деформаций за тот же цикл (рис. 1).

При этом предполагается, что потери на внешние сопротивления отсутствуют.

Основным преимуществом представленной зависимости является то, что нелинейная зависимость между напряжением и деформацией с учетом рассеяния энергии в комплексном виде описывается линейной зависимостью.

Буровая оснастка (рис. 2) состоит из пружины 1, имитирующей талевый канат с приведенной жесткостью c ; 2—сосредоточенной массы m , имитирующей поступательно движущиеся элементы талевой системы (крюк, штроп, элеватор и др.); вертикального стержня 3 с равномерно распределенной по длине массой, имитирующей бурильную колонну; виброгасителя 4 и долота 5. При этом динамика системы талевое механизма, бурильной колонны, виброгасителя и долота может быть описана следующим образом.

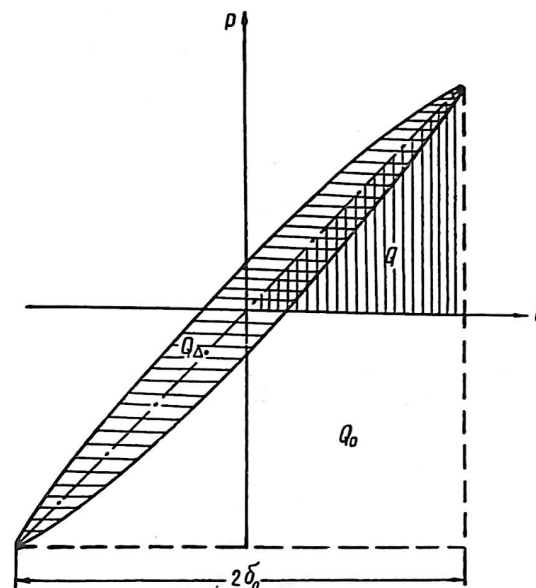


Рис. 1

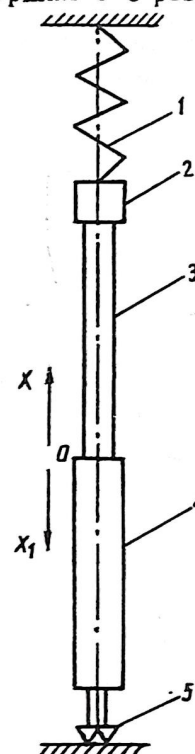


Рис. 2

1. Для талевое механизма

$$m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = EF (\omega + i\nu) \frac{\partial U}{\partial x} - cU \quad (1)$$

при $x = l$; $0 \leq t \leq +\infty$.

2. Для бурильной колонны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (\omega + i\nu) a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2)$$

при $0 \leq x \leq l$; $0 \leq t \leq +\infty$.

3. Для виброгасителя

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = (\omega_1 + i\nu_1) a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \quad (3)$$

при $0 \leq x_1 \leq l_1$; $0 \leq t \leq +\infty$.

4. Для долота

$$U_1(l, t) = A_0 e^{i\omega t} \quad (4)$$

Здесь m —масса поступательно движущихся элементов талевое механизма; c —жесткость канатной системы $\left(c = \kappa \frac{E_k F_k}{l_k}\right)$; E_k —мо-

дуль упругости материала каната; F_k —площадь поперечного сечения каната; l —расстояние между осями талевого каната; k —кратность полиспасты; F —площадь блока и кронблока; E —модуль упругости материала труб; F —площадь поперечного сечения труб; $a^2 = \frac{E}{\rho}$, ρ —плотность материала труб;

ρ_1, E_1 —соответственно, плотность и модуль упругости материала гасителя; U —комплексное перемещение; ω —угловая скорость шарошки; l, l_1 —соответственно, длина бурильной колонны и виброгасителя (индекс 1 относится к виброгасителю).

Учитывая неразрывность перемещений и усилий в точке соединения колонны труб с виброгасителем, будем иметь:

при $x = x_1 = 0$,

$$U(0; t) = U_1(0; t) \quad (5)$$

$$(\omega + i\nu) EF \frac{\partial U(0; t)}{\partial x} = (\omega_1 + i\nu_1) E_1 F_1 \frac{\partial U_1(0; t)}{\partial x_1}. \quad (6)$$

Для упрощения дальнейших записей введем следующие безразмерные величины:

$$\bar{U} = \frac{U}{l}; \quad \bar{U}_1 = \frac{U_1}{l}; \quad \bar{x}_1 = \frac{x_1}{l_1}; \quad \bar{x} = \frac{x}{l};$$

$$\tau = \frac{\rho_1 a_1 l}{l_1}; \quad \omega + i\nu = p^2; \quad \omega_1 + i\nu_1 = p_1^2;$$

$$\bar{A}_0 = \frac{A_0}{l_1}; \quad K_p = \frac{p}{p_1}; \quad \bar{m} = \frac{m p_1^2 a_1^2}{l_1^2 c};$$

$$\bar{E}F = \frac{p^2}{c l} EF; \quad K_{EF} = \frac{EF}{E_1 F_1}; \quad K_l = \frac{l}{l_1}; \quad K_a = \frac{a}{a_1}.$$

Тогда (2) и (3) получают вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \tau^2} = b^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} \quad \text{при } 0 \leq \bar{x} \leq 1,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \bar{x}_1^2} \quad \text{при } 0 \leq \bar{x}_1 \leq 1,$$

где

$$b^2 = \frac{p^2 a^2 l_1^2}{p_1^2 a_1^2 l} = \left(\frac{K_p K_a}{K_l} \right)^2.$$

При этом граничные условия (1), (4), (5), (6) примут вид:

$$\bar{m} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \tau^2} = EF \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} - U \quad \text{при } \bar{x} = 1,$$

$$\bar{U}_1 = K_l U$$

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}_1} = K_{EF} K_p^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \quad \text{при } \bar{x}_1 = \bar{x} = 0,$$

$$\bar{U}(1; \tau) = \bar{A}_0 e^{i\omega \frac{l_1 \tau}{a_1 p_1}} \quad \text{при } \bar{x} = 1.$$

Поставленная задача была решена как задача без начальных [6] условий и выражение для действительного перемещения получено в виде

$$U_1(x, t) = A_0 \left(\frac{a_0 \cos \omega t - b_0 \sin \omega t}{\lambda^2 + n^2} \right).$$

Коэффициент гашения φ для виброгасителя определяется как отношение амплитуды колебания при $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$:

$$\varphi = \sqrt{\frac{(a_0^2 + b_0^2)|_{x_1=0}}{(a_0^2 + b_0^2)|_{x_1=l_1}}},$$

где

$$a_0 = \lambda (\beta_1 + \beta_3) + \psi (\beta_2 + \beta_4),$$

$$b_0 = \lambda (\beta_2 + \beta_4) - \psi (\beta_1 + \beta_3),$$

$$\lambda = K_0 M_1 f - K_0 N_1 g + \delta H_1 + p K_1,$$

$$\psi = K_0 M_1 g + K_0 N_1 f - \delta K_1 + p H_1,$$

$$\beta_1 = K_0 + M_{1x} f - K_0 N_{1x} g,$$

$$\beta_2 = K_0 M_{1x} g + K_0 N_{1x} f,$$

$$\beta_3 = H_{1x} \delta + K_{1x} p,$$

$$\beta_4 = H_{1x} p - K_{1x} \delta,$$

$$c_1 = G a_2 M - G b_2 N + Q H,$$

$$c_2 = G a_2 N + G b_2 M - Q K,$$

$$c_3 = G a_2 H + G b_2 K - Q M,$$

$$c_4 = G b_2 H - G a_2 K - Q N,$$

$$f = \frac{c_1 c_3 + c_2 c_4}{c_3^2 + c_4^2},$$

$$g = \frac{c_2 c_3 - c_1 c_4}{c_3^2 + c_4^2};$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}}, \quad b_2 = \frac{\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}},$$

$$\delta = \frac{1 + \frac{\gamma_1 \gamma}{4}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma_1^2}{4} + \frac{\mu_1^2 \gamma}{16}}},$$

$$\rho = \frac{\gamma - \gamma_1}{2 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma_1^2}{4} + \frac{\gamma_1 \gamma}{16}}},$$

$$K_{1x} = \cos \omega \alpha_1 \bar{x}_1 \operatorname{sh} \omega \alpha_1 \bar{x}_1 \frac{\gamma_1}{2},$$

$$H_{1x} = \sin \omega \alpha_1 \bar{x}_1 \operatorname{ch} \omega \alpha_1 \bar{x}_1 \frac{\gamma_1}{2},$$

$$K_1 = \cos \omega \alpha_1 \operatorname{sh} \omega \alpha_1 \frac{\gamma_1}{2},$$

$$H_1 = \sin \omega \alpha_1 \operatorname{ch} \omega \alpha_1 \frac{\gamma_1}{2},$$

$$K = \cos \omega \alpha \operatorname{sh} \omega \alpha \frac{\gamma}{2},$$

$$H = \sin \omega \alpha \operatorname{ch} \omega \alpha \frac{\gamma}{2},$$

$$N_{1x} = \sin \omega \alpha_1 \bar{x}_1 \operatorname{sh} \omega \alpha_1 \bar{x}_1 \frac{\gamma_1}{2},$$

$$M_{1x} = \cos \omega \alpha_1 \bar{x}_1 \operatorname{ch} \omega \alpha_1 \bar{x}_1 \frac{\gamma_1}{2},$$

$$N_1 = \sin \omega \alpha_1 \operatorname{sh} \omega \alpha_1 \frac{\gamma_1}{2},$$

$$M_1 = \cos \omega \alpha_1 \operatorname{ch} \omega \alpha_1 \frac{\gamma_1}{2},$$

$$N = \sin \omega \alpha \operatorname{sh} \omega \alpha \frac{\gamma}{2},$$

$$M = \cos \omega \alpha \operatorname{ch} \omega \alpha \frac{\gamma}{2},$$

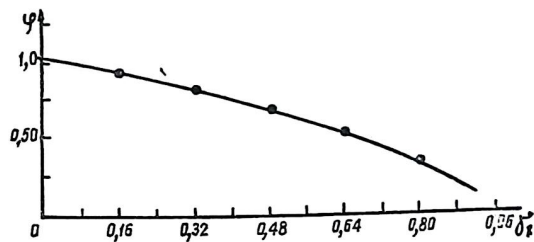


Рис. 3

$$K_0 = \frac{K_a}{K_{EF}};$$

$$\alpha_1 = \frac{l_1}{a_1 \sqrt{1 + \frac{\gamma_1^2}{4}}},$$

$$\alpha = \frac{l}{a \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}},$$

$$Q = \left(\frac{m\omega^2}{c} - 1 \right); \quad G = \frac{EF\omega}{ca}.$$

Численный расчет произведен для случая:

$$l = 2000 \text{ м}; \quad l_1 = 2 \text{ м}; \quad E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; \quad c = 4000 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$F = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; \quad E_1 = 5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2; \quad F_1 = 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$a = 5 \cdot 10^8 \text{ м/сек}; \quad a_1 = 40 \text{ м/сек}; \quad m = 800 \text{ кг}; \quad \omega = 40 \frac{1}{\text{сек}}$$

$$\gamma = 0,016; \quad \gamma_1 = 0,16; 0,32; 0,48; 0,64; 0,80; 0,96.$$

График изменения $\varphi(\gamma_1)$ представлен на рис. 3.

Пользуясь указанной зависимостью, можно подобрать соответствующий материал, а также длину демпфирующей части и размеры материалов гасителя, обеспечивающие заданную степень гашения колебаний буровой колонны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Копылов В. Е. Вибрации при алмазном бурении. М., Изд-во „Недра“, 1967.
2. Керимов З. Г., Джанахмедов А. Х. „Нефть и газ“, 1971, № 2.
3. Диланов Г. М. Исследование вопросов виброзащиты бурового инструмента при глубоком бурении. Канд. дисс. Баку, 1970.
4. Керимов З. Г., Копылов В. Е. „Нефть и газ“, 1971, № 4.
5. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М., 1960.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Физматгиз, 1966.

АЗИНЕФТЕХИМ им. М. Азизбекова

Поступило 27. IX 1972

З. Г. Керимов, Г. Н. Челилзаде, М. А. Садыгов

Рэгс енерджисинин сепэлэнмэсини нэзэрэ алмагла газыма
кэмэринин динамикасынын тэдгиги

ХУЛАСЭ

Мэгалэдэ гујудиби рэгс сөндүрүчү васитэсилэ газыма кэмэринин рэгсинин сөндүрүлмэ эмсалынын тапылмасына гаршы гејри-хэтти рэгслэр нэзэријэси мөсөлөсү гојулмуш вэ хэлл едилмишдир.

Хэлл өлчүсүз шәкилдә алынышыдыр. Бу, мүхтәлиф рәгс сөндүрүчүләрин конструксиясынын сечилмәси үчүн сөндүрмә эмсалынын һесаблинамасы заманы тәтбиг едилә биләр.

Z. G. Kerimov, G. N. Jalilzade, M. A. Sadyghev

Study of the dynamics of drilling string with allowance
for the dispersion of vibration energy,

SUMMARY

It is set and settled the problem of non-linear theory of vibrations applicable for the determination of coefficient of vibration damping of drill pipe in the presence of bottom-hole vibration dampers.

The solution has been obtained in dimensionless form. It may be used in calculation of coefficient of vibration damping for the choice of different designs of vibration dampers.

М. К. АЛИЕВА, Н. С. ГАСАНОВ, Г. И. ГАШИМОВА, А. Г. МЕХТИЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКАЧКОВ ИЗОХОРНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭТАНОЛА-РЕКТИФИКАТА

В последние годы появился ряд экспериментальных и теоретических работ, посвященных изучению закономерности изменения физических и термодинамических величин, в том числе изохорной теплоемкости веществ при переходе из гетерогенного состояния в гомогенное. Это вызвало дискуссию в вопросе о том, скачкообразно или непрерывно изменяется величина C_v на критической изохоре при переходе через критическую точку. Актуальность изучения характера изменения теплоемкости при постоянном объеме при переходе критического типа особенно возрастает в связи с общей проблемой фазовых переходов. В настоящее время представления о фазовых переходах и переходах критического типа проникают в область физики низких температур, физики твердых тел, физической химии, химической технологии и металлургии, что свидетельствует об их практическом значении.

Известно, что при переходе через линию сосуществующих фаз C_v изменяется скачком, величина которого определяется уравнением

$$\Delta C_v = T \left[\frac{dp}{dT} - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v^s \right] \frac{d\tau_3}{dT}, \quad (1)$$

во всех точках пограничной кривой, за исключением критической $\frac{dp}{dT} > \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$, а в критической—по уравнению Планка—Гиббса:

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)^{кр} = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{v_{кр}}^s \quad \text{и} \quad \left(\frac{dv_s}{dT} \right)^{кр} = \infty.$$

Следовательно, в правой части (1) появляется неопределенность. Именно благодаря этой неопределенности нет однозначного ответа на вопрос о том, существует ли скачок C_v в критической точке или переход является непрерывным.

Однако экспериментальные результаты исследования изохорной теплоемкости при переходе через линию насыщения из двухфазной области в однофазную на критической изохоре позволяют найти верное решение вопроса о величине теплоемкости C_v и скачка ΔC_v в критической точке.

В настоящее время существует надежный метод [1] экспериментального исследования теплоемкости C_v в жидкой, паровой фазах и гетерогенном состоянии. Из полученных экспериментальных данных

представляется возможным определить значения скачков теплоемкости при переходе вещества из гетерогенного состояния в гомогенное, включая критическую область, критические параметры исследуемых веществ и т. п., а также установить количественные различия в поведении их в исследуемых одно- и двухфазных областях.

Методом адиабатного калориметра Амирханова—Керимова нами была исследована теплоемкость C_v этанола-ректификата в широком интервале параметров состояния [2,3] и получено большое число экспериментальных данных в различных диаграммах.

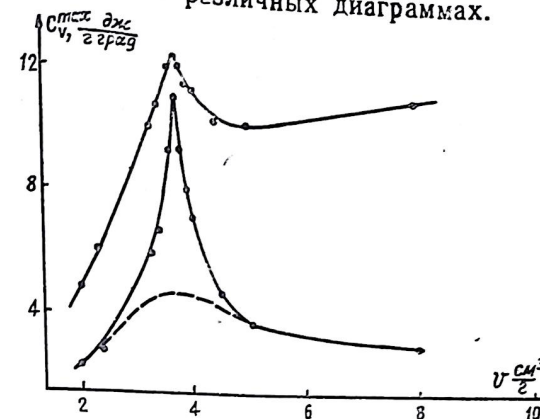


Рис. 1. Предельные значения изохорной теплоемкости этанола-ректификата.

На рис. 1 представлены максимальные значения $C_v^{\max}(v, T)$ на линии насыщения со стороны двухфазной (верхняя сплошная кривая) и однофазных областей (нижняя сплошная кривая). Предельные значения теплоемкости C_v со стороны двухфазной области на нижней пограничной кривой с приближением к критической точке возрастают и в ней проходят через максимум; при удалении от критической точки по верхней пограничной кривой $C_v^{\max}$ уменьшаются до определенного значения удельного объема и температуры насыщения и вновь монотонно увеличиваются с изменением последних.

Как видно из рис. 1, вдали от критической точки значения $C_v^{\max}(v, T)$ меняются линейно, а в ее окрестности изменение их носит экстремальный характер. Предельные значения теплоемкости со стороны однофазных областей—жидкости и пара, примыкающих к пограничной кривой, уменьшаются при удалении от критической точки в обе стороны от нее; наибольший максимум, как и в вышеупомянутом случае для верхней кривой рис. 1, соответствует критической точке.

В области непрерывного изменения C_v за предельное значение теплоемкости жидкости и пара принимается теплоемкость, соответствующая первой точке в момент свершения перехода через линию насыщения. При этом предельное значение C_v^s в однофазной области некоторым образом зависит от захвата двухфазного состояния при переходе вещества в гомогенную фазу.

Расстояние между сплошными кривыми на рис. 1 соответствует значениям скачков теплоемкости ΔC_v при переходе вещества из гетерогенного состояния в гомогенное.

На рис. 2 показан характер изменения величин скачков изохорной теплоемкости при переходе из гетерогенного состояния в гомогенное—жидкую и паровую фазы. Левая часть кривых на рис. 2 показывает изменение величин ΔC_v в зависимости от удельных объемов и соответствующих им температур перехода из двухфазной области

в жидкую фазу, а правая соответствует переходу в паровую фазу. Как видно из рис. 2, линейность функции $\Delta C_v = f(v)$ наблюдается до удельных объемов, близких примерно к $v = 3 \text{ см}^3/\text{г}$. Здесь скачок теплоемкости совершается в температурном интервале, равном шагу проведенного опыта по температурам $0,03-0,04^\circ$, а начиная с $v > 3$ $\text{см}^3/\text{г}$, величина температурного интервала перехода увеличивается, о чем свидетельствуют промежуточные точки на кривых $C_v(T)$. Число таких промежуточных экспериментальных точек возрастает с приближением к критической точке по изохорам и, следовательно, растет продолжительность температурных переходов из гетерогенного состояния в гомогенное.

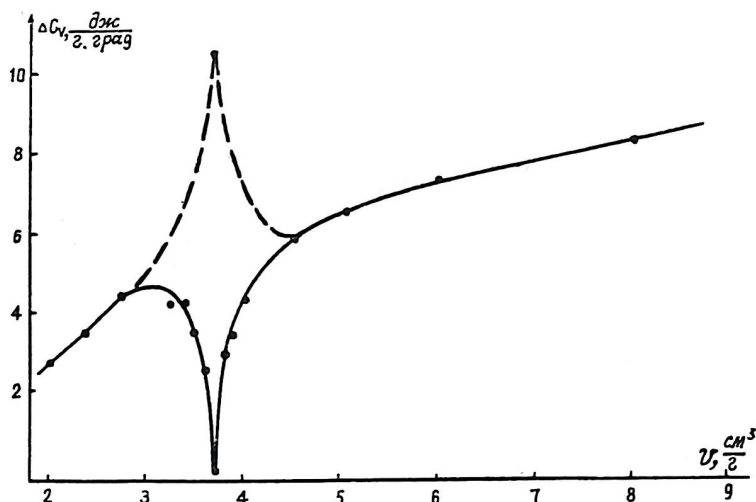


Рис. 2. Характер изменения скачков ΔC_v эталона-ректификата.

С удалением от критической точки в сторону большего значения удельных объемов число промежуточных переходных точек убывает, вследствие этого уменьшается продолжительность переходов по температурам. При удельных объемах $v > 4 \text{ см}^3/\text{г}$ переход совершается вновь скачком в температурном интервале $0,04^\circ$. Такая своеобразная картина перехода через линию насыщения приводит к затруднениям в однозначном ответе на вопрос о характере изменения величины скачков ΔC_v в окрестности критической точки. Действительно, если принять за величину скачка изменение теплоемкости в температурном интервале $0,04^\circ$, как это было сделано вдали от критической точки, то можно говорить об уменьшении значений ΔC_v с приближением к критической точке по изохорам справа и слева от нее, так как уменьшается разница между предельной со стороны двухфазной области теплоемкостью и ее значением в первой же точке на изохоре при совершении этого перехода.

Такой подход приводит нас к заключению о минимальной величине ΔC_v при значении критического удельного объема (рис. 2, нижняя часть сплошной кривой в окрестности критической точки).

Если же за величину скачка ΔC_v принять разницу предельных значений теплоемкостей двухфазной области и теплоемкостей чистой гомогенной фазы (пунктирная кривая на рис. 1), то изменение функции $\Delta C_v(v)$ вблизи критической точки происходит по пунктирной кривой рис. 2. По виду данной кривой можно заключить, что в этом случае величина скачка ΔC_v с приближением к критической точке резко возрастает, достигает в ней максимального значения, а затем с удалением от нее уменьшается вплоть до определенных значений.

удельного объема. Далее значения ΔC_v возрастают, как и при пересечении нижней пограничной кривой, но с меньшим наклоном. Таким образом, можно заключить, что отсутствие однозначного ответа на вопрос о величине скачка ΔC_v вблизи критической точки исходит из трудностей выбора верного критерия—температурного интервала, к которому следует отнести величину скачка. Если учесть сохранение физического понятия разности температур в критической точке, то можно утверждать существование скачка ΔC_v в ней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амирханов Х. И., Керимов А. М. „Теплоэнергетика“, 1962, № 6.
2. Керимов А. М., Алиева М. К. Сб. „Теплофизические свойства жидкостей“. М., „Наука“. 1970.
3. Керимов А. М., Алиева М. К., Гасанов Н. С. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1972, № 3 и 4.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 16. III 1973

М. К. Алијева, Н. С. Гасанов, К. И. Гашимова, А. Г. Мехтијев

Этанол-ректификатын тэдгигинэ көрэ сабит тэзјигдэ истилик тутумунун сычрајышларынын тэјини

ХҮЛАСЭ

Этанол-ректификатын сабит тэзјигдэ истилик тутумунун өлчүлмәси әсасында ΔC_v -нин сычрајышларынын гјмәти ики фазалы областдан маје вә бухар фазаларына (дојма хәттиндән кечмәклә) кечәркән тэјин едилмишдир.

M. L. Alieva, N. S. Gasanov, G. I. Gashimova, A. G. Mekhtiyev

Determining of isochor heat conductivity jumps by the results fo investigating ethanol-rectificate

SUMMARY

The values of the jumps ΔC_v in case of transferring the saturation line from the two-phase region into the liquid and vapour have phases been determined basing on the results of investigating isochor heat conductivity jumps of ethanol-rectificate.

Я. Б. КАДЫМОВ, Р. Г. ДЖАГУНОВ, Т. Б. ГУРБАНОВ, Х. А. МУСАЕВ

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ В ЧАСТОТНЫХ ТАХОМЕТРАХ

Тахометры с частотным выходом [1] относятся к категории достаточно точных измерительных преобразователей. Поэтому улучшение их конструкции или эксплуатационных характеристик оказывается технически целесообразным. Так, например, замена индукционных или индуктивных преобразователей в частотных тахометрах пьезоэлектрической аморфной пластинкой [2, 3] дает хорошие практические результаты. В частности, заметно увеличивается чувствительность измерительного механизма. Кроме того, пьезоэлектрический тахометр способен работать при высоких температурах окружающей среды (порядка 300°C и более). Этому способствуют физические особенности керамических пьезоэлементов, из которых изготавливается биморфная пластинка.

Прибор состоит из биморфной пластинки 1, один конец которой запрессовывается в диэлектрическом корпусе 2 и металлическом якоре 3, насаженном на ось 4. К свободному концу пластинки крепится металлический сердечник 5, который располагается над миниатюрным постоянным магнитом 6, жестко связанным с якорем (рис. 1). При вращении якоря сердечник периодически попадает в сферу притяжения магнита. Возникающая при этом магнитодвижущая сила вызывает прогиб биморфной пластинки, который за счет прямого пьезоэффекта преобразуется в импульс напряжения.

Из приведенной схемы тахометра следует, что частота этих импульсов строго соответствует числу оборотов якоря. Так как магнитодвижущая сила, обратно пропорциональная квадрату расстояния между сердечником и магнитом, уравновешивается силой упругости биморфной пластинки, которая является линейной функцией величины прогиба, вывод универсальной аналитической зависимости, описывающей работу тахометра, сопряжен с весьма ощутимыми трудностями. Исходя из этого, ниже предлагается методика расчета тахометра, дающая хорошие практические результаты. Максимальное напряжение, снимаемое с ненагруженной биморфной пластинки,

$$U_0 = 0,7 E_p l_3 (\delta). \quad (1)$$

Соответствующий этому напряжению прогиб находится по формуле:

$$\Delta_n = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-12} \varepsilon^2 l_1^2}{E_p l_3} E_p^2 (M). \quad (2)$$

Воспользовавшись уравнением (2) и известными в теории магнитных цепей зависимостями [4], можно найти среднее значение напряженности магнитного поля в зазоре между якорем и сердечником, при которой выполняется условие (1):

$$H \approx \frac{7 \cdot 10^{-3} \varepsilon E_p l_3 \Delta_n}{l_{M1}} \sqrt{\frac{l_2}{S_{TM} l_1} \left[\frac{a}{M} \right]}. \quad (3)$$

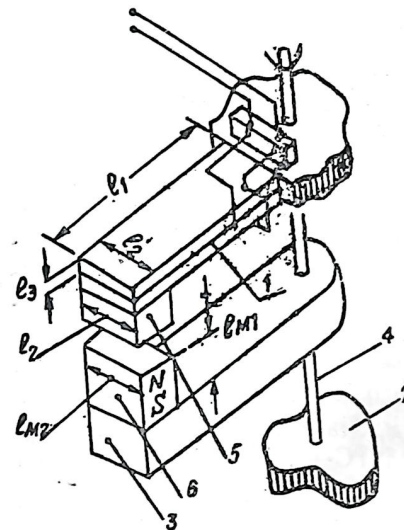


Рис. 1

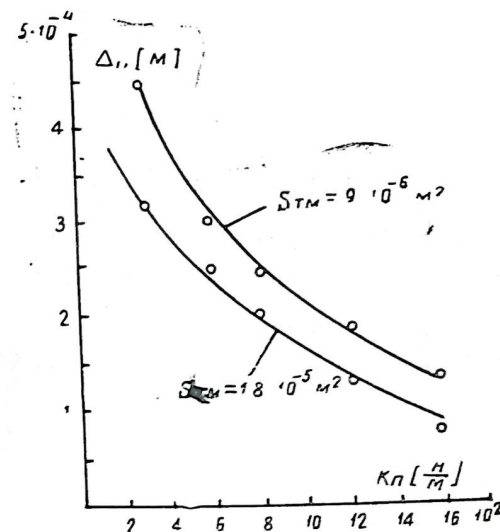


Рис. 2

По формуле (3) с достаточной для практики точностью могут быть подобраны размеры биморфной пластинки и магнита. В формулах (1) ÷ (3)

E_p — остаточная поляризация в пьезокерамике $\left(\frac{B}{M} \right)$;

E_y — модуль упругости пьезокерамики $\left(\frac{H}{M} \right)$;

ε — относительная диэлектрическая постоянная пьезокерамики;
 $l_1 l_2 l_3$ — длина, ширина и толщина одного из составляющих биморфную пластинку пьезоэлементов (M);

Δ_n — зазор, остающийся между сердечником и магнитом после изгиба биморфной пластинки (M);

l_{M1} — длина магнита (M);

S_{TM} — сечение торца магнита (M).

Для пьезокерамики ЦТС-19 $E_p = 2 \cdot 10^6 \frac{B}{M}$, $E_y = 4 \cdot 10^{10} \frac{H}{M}$, $\varepsilon = 1500$.

Расчет напряжения, генерируемого нагруженной биморфной пластинкой, ведется по известным в теории электрических цепей зависимостям [5].

Вследствие инерционности биморфной пластинки ее максимальный прогиб ограничивается вполне определенным значением числа оборотов. Это значение можно считать максимально возможным:

$$N_{max} = \frac{l_c - l_{M2}}{2 \pi r t_c} \left[\frac{1}{сек} \right]. \quad (4)$$

Здесь l_c — ширина сердечника (M),

l_{M2} — ширина магнита (M),

r — радиус вращения якоря (M),

t_c — время переходного процесса в биморфной пластинке (сек).

В том случае, если $l_c < l_{m2}$, числитель (4) должен быть записан как $l_{m2} - l_c$. Так как переходный процесс в биморфной пластинке носит колебательный характер, с достаточной степенью приближения $t_c \approx 5T$. Постоянная времени, входящая в это равенство, находится из передаточной функции [3]. Для практических целей нахождение ее величины может быть осуществлено по следующей формуле:

$$T_c \approx \frac{0,3 l_1^2}{l_3} \sqrt{\frac{\gamma}{E_y}} \text{ [сек]}. \quad (5)$$

Здесь γ — удельный вес пьезокерамики $\left(\frac{H}{м^3}\right)$. Пьезокерамика ЦТС-19 имеет удельный вес $7 \cdot 10^4 \frac{H}{м^3}$.

Наиболее сложной частью расчета тахометра является определение функциональной связи между прогибом пластинки магнитодвижущей силой. Поэтому на рис. 2 представлены экспериментальные данные, позволяющие проследить зависимость прогибов пластинок, имеющих различные коэффициенты жесткости. Кривые сняты для двух оксидных (бариевых) магнитов квадратного сечения, отличающихся площадью торца и имеющих $l_{m1} = 5 \cdot 10^{-3} м$. Пьезоэлементы биморфных пластинок изготовлены из керамики ЦТС-19. Для всех случаев начальный зазор между сердечником и магнитом был выбран $8 \cdot 10^{-4} м$.

Погрешность измерений описанным тахометром не превышает $\pm 1-2\%$ в нормальных условиях. При температуре $+200^\circ C$ она увеличивается до $\sim 4\%$. Так, например, на ненагруженной пластинке $l_3 = 5 \cdot 10^{-4} м$ возникает напряжение $\sim 700 в$. При необходимости это напряжение может быть значительно увеличено путем применения симметричной конструкции и увеличения числа биморфных пластинок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Туричин А. М. Электрические измерения неэлектрических величин. Госэнергоиздат, 1966.
2. Джагулов Р. Г., Королев Ю. В., Рагозин Ю. С. „Приборостроение“, 1969, № 1.
3. Джагулов Р. Г., Седыкин Ф. В., Захаров В. А. „Приборы и системы управления“, 1967, № 5.
4. Витенберг М. И. Расчет электромагнитного реле. Изд-во „Энергия“, 1966.
5. Магнитные и диэлектрические приборы. Под ред. Г. В. Катца. Изд-во „Энергия“, 1964.

АзПИ им. Ч. Ильдрыма

Поступило 29. III 1973

И. Б. Гадимов, Р. Г. Чагулов, Т. Б. Гурбанов, Х. А. Мусаев
Пьезоэлектрик чевричилерин тезлик тахометрлеринде
истиfadeолунма имканы haгында

ХУЛАСЭ

Магаләдә тезлик тахометринин тәдгигинин нәтичәләринә бахылмышдыр. Тәдгигат кәстәрир ки, фырланма сүр'әтинин бу чүр тахометрлә өлчүлмәси хәтаны минимума ендирир. Тахометр конструкциясынын садәлији, габаритинин кичиклији илә фәрглидир.

Ya. B. Kadimov, R. G. Jagupov, F. B. Kurbanov, Kh. A. Musaiev

On question of application piezoelectric transducer in the frequency tachometer

SUMMARY

In this paper some results of investigation piezoelectric transducer in the frequency tachometer are given.

УДК 621. 316. 722

А. А. ЭФЕНДИЗАДЕ, Т. И. НИЗАМОВ

К ВОПРОСУ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПРОЦЕССА В ИМПУЛЬСНОМ ТРАНСФОРМАТОРЕ ПРИ РАЗРЯДКЕ КОНДЕНСАТОРА

В электромеханических устройствах [1 ÷ 3] и установках экспериментальной физики [4] в качестве накопителя энергии широко применяются конденсаторные батареи с импульсными трансформаторами. Однако вопросы, связанные с процессами, происходящими в импульсном трансформаторе (ИТ), когда первичная обмотка подключается к заряженному конденсатору, в литературе еще недостаточно освещены. Настоящая работа является попыткой провести анализ электромагнитных процессов в магнитно связанных контурах при разрядке заряженного конденсатора и дать упрощенную методику для практических расчетов.

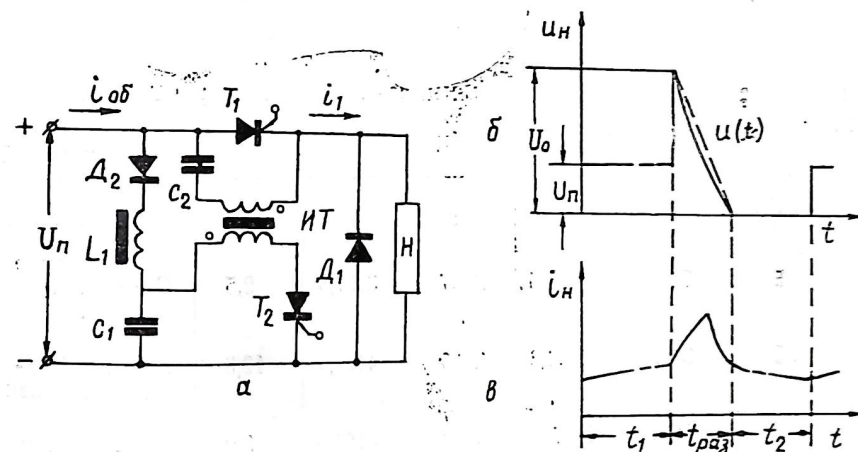


Рис. 1

В качестве примера рассмотрим электромагнитные процессы в схеме импульсного регулятора напряжения (рис. 1а, б, в) [3]. Предположим, что силовой тиристор T_1 включен и в цепи проходит ток нагрузки $i_1(t)$, а коммутирующий конденсатор C_1 заряжен до определенной величины напряжения U_{C0} . Для выключения тиристора T_1 деленной величины напряжения U_{C0} . Для выключения тиристора T_1 включается вспомогательный тиристор T_2 , который подключает первичную обмотку ИТ к конденсатору. Последний, разряжаясь по первичной обмотке ИТ, наводит э. д. с. во вторичной обмотке, кото-

рая через разделительный конденсатор C_2 прикладывается к тиристору T_1 в обратном направлении, вследствие чего он выключается. Учитывая допущения, что процесс в цепи заряда (D_2, L_1, C_1) не влияет на процесс разрядки, тиристоры переключаются мгновенно,

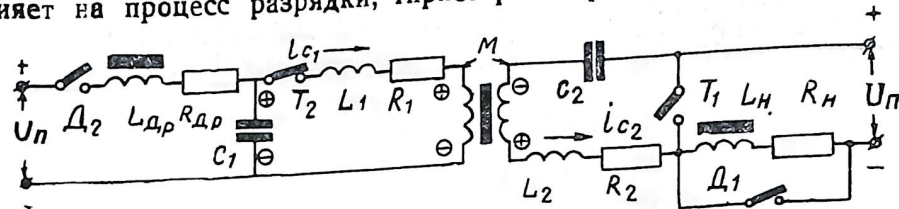


Рис. 2

ИТ работает в линейном режиме. В интервале времени включенного состояния тиристора T_2 схему замещения регулятора можно представить, как показано на рис. 2. В общем виде процесс при разрядке и перезарядке конденсатора будет описываться системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} L_1 C_1 \frac{d^2 u_{C_1}}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} + u_{C_1} + M C_2 \frac{d^2 u_{C_2}}{dt^2} &= 0, \\ L_1 C_2 \frac{d^2 u_{C_2}}{dt^2} + R_1 C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} + u_{C_2} + M C_1 \frac{d^2 u_{C_1}}{dt^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где L_1 и R_1 — параметры первичного контура;

L_1, R_1 — параметры вторичного контура, причем $L_1 = L_2 + L_n$ и $R = R_2 + R_n$ — параметры при разрядке, а $L_1 = L_2$ и $R_1 = R_2$ при перезарядке конденсатора C_1 ;

M — коэффициент взаимной индукции обмоток ИТ.

Величины напряжений и токов конденсаторов C_1 и C_2 соответственно определяются уравнениями четвертого порядка [3]:

$$u_{C_1}(t) = f_1(A_n, \delta_k, \omega_k), \quad i_{C_1}(t) = \varphi_1(A_n, \delta_k, \omega_k),$$

$$u_{C_2}(t) = f_2(B_n, \delta_k, \omega_k), \quad i_{C_2}(t) = \varphi_2(D_n, \delta_k, \omega_k),$$

где $n = 1 \div 4, k = 1 \div 2$;

δ_k и ω_k — сопряженные корни с отрицательными вещественными частями характеристического уравнения, соответствующего системе уравнений (1); A_n, B_n, D_n — коэффициенты, зависящие от начальных условий и параметров δ_k, ω_k .

Таблица 1

$L_1, \text{гн}$	$R_1, \text{ом}$	$\kappa_{св}$	ω_1	ω_2	δ_1	δ_2	Примечание
1	5	0,99	104265	499,7	3997,5	2,5	$C_1 = 2 \text{ мкф}$ $C_2 = 4 \text{ мкв}$
1	25	0,99	104244,3	499,5	4487,5	12,5	$\kappa_{св}$ — коэффициент связи
0,5	5	0,99	104271	706,3	4120,0	5,0	$R_1 = 0,36 \text{ ом}$
0,5	25	0,99	104225,6	706,9	5100,1	24,9	$L_1 = L_2 = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ гн}$
0	5	0,99	113121,7	8543,1	57674,4	450,5	
1	0	0,99	104222	499,7	3874,8	0,2	

Не останавливаясь в дальнейшем на цикле перезарядки конденсатора C_1 , подробно рассмотрим процесс в ИТ в интервале времени влияние параметров нагрузки на величины δ_k и ω_k . Анализируя эти данные, заметим, что в зависимости от параметров нагрузки δ_1 изменяется на $(5 \div 8)\%$, а ω_1 остается практически неизменным, однако δ_2 и ω_2 изменяются пропорционально. Причем δ_1 и ω_1 оказываются значительно больше (на два порядка), чем δ_2 и ω_2 . Так как коэффициенты A_n, B_n, D_n приближенно определяются, соответственно, параметрами δ_k и ω_k , то коэффициенты, обозначенные индексами 1 и 2, 3 и 4. Следовательно, процессы при разрядке конденсатора C_1 в основном определяются параметрами $\delta_1, \omega_1, A_1, A_2, B_1, B_2, D_1$ и D_2 .

В свете вышесказанного для анализа процесса при разрядке конденсатора C_1 можно рассмотреть эквивалентные схемы (рис. 3 а, б).

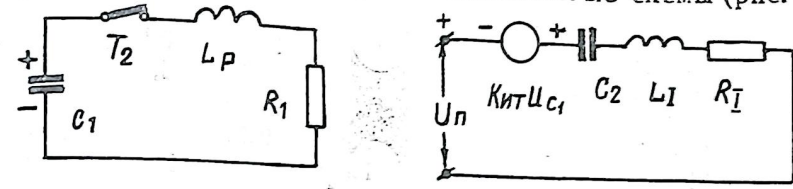


Рис. 3

Процесс, показанный на рис. 3 (а), описывается уравнением

$$L_p C_1 \frac{d^2 u_{C_1}}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} + u_{C_1} = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) осуществляется при начальных условиях

$$i_{C_1}(0) = I_{нач}; \quad u_{C_1}(0) = -U_{C_1,0},$$

$$u_{C_1} = \left[U_{C_1,0} \frac{\omega_{01}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t - \varphi) + \frac{I_{нач}}{C_1 \omega_1} \sin \omega_1 t \right] e^{-\delta_1 t}. \quad (3)$$

При этом процесс изменения тока

$$i_{C_1} = \left[\frac{U_{C_1,0} - R_1 I_{нач} \sin \omega_1 t - \frac{\omega_{01}}{\omega_1} I_{нач} \sin(\omega_1 t - \varphi)}{L_p \omega_1} \right] e^{-\delta_1 t}, \quad (4)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{01}^2 - \delta_1^2},$$

где

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_p C_2}} \text{ — собственная частота колебаний,}$$

$$\delta_1 = \frac{R_1}{2L_p} \text{ — коэффициент затухания контура,}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{\omega_{01}}{\omega_1} \text{ — начальная фаза колебаний.}$$

Величина R_1 представляет сумму сопротивлений, входящих в первичный контур, когда $L_1 > L_2 = \text{const}$, а R_1 изменяется от заданного значения (R_n) до минимального, равного R_2 . В случае же, когда $L_1 = L_2$ и при любых значениях R_1 , величина R_1 определяется как в схеме замещения ИТ [5]. Величина L_p определяется при любых значениях L_1 и R_1 в виде

$$L_p = (1 - \kappa_{св}^2) L_1. \quad (5)$$

В табл. 2 приведены вычисленные корни (δ_1, ω_1) характеристического уравнения, соответствующего системе уравнений (1), и корни (δ_1, ω_1) характеристического уравнения, соответствующего уравнению (2) при постоянстве параметров вторичного контура.

Таблица 2

C_1 , мкф	C_2 , мкф	ω_1	ω_I	$\frac{\omega_1 - \omega_I}{\omega_1}$ %	δ_1	δ_I	$\frac{\delta_1 - \delta_I}{\delta_1}$ %	Примечание $\kappa = 0,99$ $R_1 = 0,36 \text{ ом}$ $R_I = 5 \text{ ом}$ $L_I = 1 \text{ гн}$
1	1	147507,5	147500	+0,007	3997,5	3913	2,20	$L_1 = L_2 =$ $= 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ гн}$
2	2	104323,9	104087	+0,2	"	"	"	
2	4	104265	104087	+0,16	"	"	"	
3	6	85110,7	85007	+0,12	"	"	"	
4	8	73714,8	73617	+0,13	"	"	"	
5	10	65870,1	65750	+0,18	"	"	"	
6	12	60109,0	60070	+0,06	"	"	"	
$L_1 = L_2, \text{ гн}$								
10^{-4}		491814,2	491815	~ 0	90097,5	90000	0,1	$C_1 = 2 \text{ мкф}$
10^{-2}		157849,4	15810	-0,09	9122,5	9000	1,3	$C_2 = 4 \text{ мкф}$
10^{-4}		303119,5	302520	+0,17	90097,5	90000	0,1	$C_1 = 5 \text{ мкф}$
10^{-3}		99582,1	99581,6	~ 0	9122,5	9000	1,3	$C_2 = 10 \text{ мкф}$
10^{-2}		31683,5	31648	+0,11	1022,5	900	12	

Применение рассматриваемого метода проиллюстрируем на примере для одного из вариантов схем (рис. 1, а) со следующими параметрами: $C_1 = 2 \text{ мкф}$, $C_2 = 4 \text{ мкф}$, $L_1 = L_2 = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ гн}$, $R_1 = 0,36 \text{ ом}$, $R_I = 5 \text{ ом}$, $L_I = 1 \text{ гн}$, $\kappa_{св} = 0,99$, $U_n = 30 \text{ в}$, $I_{нач} \approx I_{ср} = 4 \text{ а}$.

При этом были получены следующие результаты.

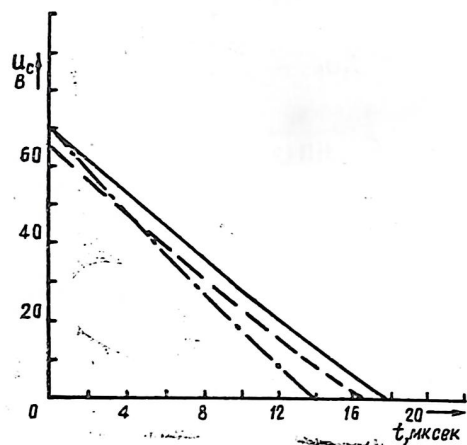


Рис. 4

Величины	Расчет	Эксперимент
$I_{\text{макс}}, \text{ а}$	14,5	18
$t_{\text{раз}}, \text{ мксек}$	18	15

На рис. 4 показано изменение напряжения при разрядке конденсатора C_1 . Пунктирная кривая — экспериментальные данные, штрихпунктирная построена для уравнения четвертого порядка, а сплошная — по соотношению (3).

Процесс, иллюстрируемый рис. 3, б, описывается уравнением

$$u(t) = iR_I + L_I \frac{di}{dt}. \quad (6)$$

Аппроксимируя изменение напряжения $u(t)$ прямой линией (пунктирная линия на рис. 1, б), решение (6) можно представить в виде

$$i = \left\{ I_{\text{нач}} + \frac{U_0}{R_I} \left[\frac{t}{t_{\text{раз}}} e^{\frac{t}{T_I}} + \left(1 + \frac{T_I}{t_{\text{раз}}} \right) \left(e^{\frac{t}{T_I}} - 1 \right) \right] \right\} e^{-\frac{t}{T_I}}, \quad (7)$$

где $u(t) = U_n + \kappa_{\text{ит}} u_{C_1}$; $U_0 = U_n (1 + \kappa_{\text{ит}} \kappa_{\text{ит}})$ — величина напряжения на нагрузке при включении тиристора T_2 ;
 $\kappa_{\text{ит}} = \frac{U_{C_1,0}}{U_n}$ — коэффициент, показывающий превышение напряжения на конденсаторе;
 $t_{\text{раз}}$ — время полного разряда конденсатора;
 $I_1 = \frac{L_I}{R_I}$ — постоянная времени цепи;
 $\kappa_{\text{ит}}$ — коэффициент трансформации ИТ;
 t — время, отсчитываемое с момента включения тиристора T_2 .
 Таким образом, для практических расчетов при разрядке конденсатора на обмотку ИТ процесс целесообразно разделить и рассмотреть каждую часть отдельно.

Выводы

При разрядке конденсатора на обмотку ИТ процесс в первичном и вторичном контурах может быть рассмотрен отдельно. Первичный контур характеризуется следующими параметрами (с учетом коэффициента связи): индуктивностью рассеяния (L_p), активным сопротивлением (R_1) и емкостью (C_1). Вторичный контур характеризуется параметрами цепи нагрузки (R_I , L_I), причем время длительности процесса определяется временем разрядки ($t_{\text{раз}}$) конденсатора C_1 .

Рассмотренный метод может быть использован также и для других типов широтно-импульсных преобразователей с трансформаторной схемой гашения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазенок Т. А. Тиристорные широтно-импульсные преобразователи для систем электропривода постоянного тока. Л., Изд-во ЛДНТГ, 1968.
2. Лабунцов В. А., Обухов С. Г., Смирнов В. П. „Электротехника“ 1969, № 1.
3. Низамов Т. И., Андрущук В. В. „За технический прогресс“, 1971, № 2.
4. Бондалетов В. Н. Тр. Чувашского гос. ун-та им. И. Н. Ульянова (электротехника и энергетика), вып. 2, 1968.
5. Ермолин Н. П. Расчет маломощных трансформаторов. Изд-во „Энергия“, 1970.

АзНИИ Энергетики им. И. Г. Есьмана

Поступило 20. III 1973

А. Э. Эфендизаде, Т. И. Низамов

Конденсатор импульс трансформаторуна бошаддыгы заман
 баш верен электромагнит просеслери наггында

ХУЛАСЭ

Тәчрүби физика вә хусусилә электромеханики гурғуларда долмуш конденсатор енержисинин импульс трансформаторунун долгына бошалмасындан кениш истифадә едилір. Буна көрә дә бурада баш верен электромагнит надисәсинин садә үсулла арашдырлымасы хусуси әһәмијјәт кәсб едир.

Тәдгигат кәстәрир ки, конденсаторун бошалмасы мүддәтиндә импульс трансформаторунун биринчи вә икинчи дөврәләриндә баш верен просеслери бир-бириндән ајры арашдырмаг олар. Алынмыш садә ријазии фәдәләр кәстәрир ки, дөврәләрдәки кәркиндик вә чәрә-јанларын дәјишмәсини нисбәтән јахшы дәгигликлә тәјјин етмәк мүмкүндүр.

Some observations of electromagnetic processes of pulse transfermer at a condenser's discharge

SUMMARY

In modern practice of experimental physics, particularly in electro-mechanics, a combination "charged capacitor and pulse transformer" is finding ever expanding application. In this respect of fundamental importance is the analysis of transient processes occurring in the inverted thyristors.

The investigations indicated that within the capacitor discharge time the transient process with regard to the coupling coefficient can be considered separately in each winding. At this the duration of the process has been found by vary with the time of full discharge of a capacitor. The obtained simple mathematical relations made it possible to determine the values of current and voltage with a minimum error.

В. А. АТОЯН, И. А. МАМЕДОВ

УСТАНОВКА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ И ДАВЛЕНИИ МЕТОДОМ ВЗВЕШИВАНИЯ

В последние годы широко применяется ультразвукаческий метод исследования свойств вещества, в основе которого лежит определение скорости звука и его поглощение в данной жидкости или газе. Но скорость звука непосредственно связана с плотностью, значит, зная плотность жидкости под давлением, можно определить и скорость распространения звука в ней [1—4].

С этой целью в лаборатории экспериментальной и теоретической физики Азербайджанского государственного педагогического института им. В. И. Ленина нами была собрана установка (рис. 1), позволяющая измерять одновременно плотность, вязкость жидкости и скорость звука в ней в зависимости от давления и температур.

Установка состоит из автоклава, системы вакуумирования, термостатирования и гидравлической части (рис. 1).

Корпус автоклава (1) из нержавеющей стали (рис. 1, а) с внутренним цилиндрическим каналом (2), являющимся измерительной камерой, помещен в воздушный термостат (7), состоящий из двух полуцилиндрических рубашек с металлическим корпусом (18), внутри которого помещается нагревательная спираль (17), изолированная толстым асбестовым слоем (19). К автоклаву непосредственно присоединены три вентиля высокого давления (4, 5, 6) и контролирующий манометр.

Один из вентиля (5) служит для вакуумирования, другой (6) — для заполнения, а специальный вентиль (4) работает в открытом положении, когда создается давление при помощи гидравлического пресса. В систему вакуумирования входят термпарный вакуумметр, диффузионный и форвакуумные насосы.

Уплотнительное устройство состоит из нажимной гайки (10), уплотняющего стакана (8), фторопластовых и паранитовых прокладок (9, 16). В систему заполнения входят: стеклянная мензурка с исследуемой жидкостью и присоединительное устройство с вентилем (6).

Одним из основных узлов установки является гидравлическая часть: корпус прижимного сосуда (1, б) с внутренним цилиндрическим каналом (2), заполненным маслом; обтюратор (4) с сильфоном (3), который заполняется исследуемой жидкостью; гидравлический пресс (11) типа МП-2500 кг/см². Принцип работы установки заключается в следующем: при открытых ventilyах (4, 5) и закрытом вентиле (6)

производится вакуумирование системы. После этого закрывается вентиль (5), открывается вентиль (6) и система заполняется исследуемой жидкостью, объем которой определяется по делениям мензурки. При установившейся постоянной температуре давление поднимается до определенного значения при помощи пресси и закрывается

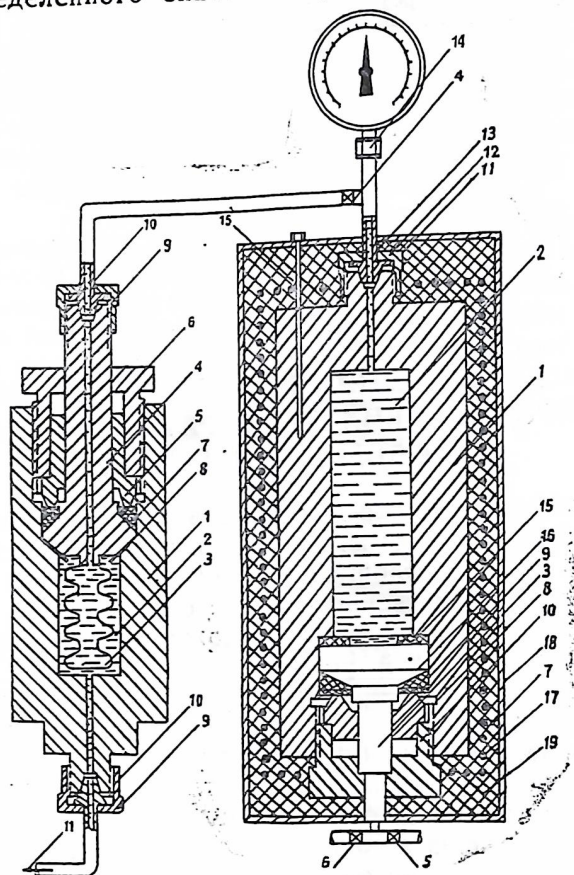


Рис. 1. Установка для измерения плотности жидкостей.

вентиль (4). После установления давления при помощи вентил (5) снимается масса жидкости, которая взвешивается на аналитических весах. При этом фиксируется спад давления в системе, соответствующего массе изъятной жидкости.

Зная массу снимаемой жидкости Δm , первоначальный объем системы V_0 и плотность жидкости ρ_0 при постоянной температуре, можно вычислить плотность в зависимости от давления:

$$\rho_p = \rho_0 + \frac{\Delta m}{V_0} \quad (1)$$

При постоянном давлении, зная массу снимаемой жидкости и изменение первоначального объема системы, можно определить плотность в зависимости от температуры. Если учесть, что это изменение незначительное для данного материала, вычисление производится по формуле:

$$\rho_T = \rho_0 - \frac{\Delta m}{V_0}, \quad (2)$$

где ρ_0 — плотность при начальной температуре T°, C .

Плотность метилэтилкетона в зависимости от температуры и давления

$\frac{\kappa g}{cm^3}$ P	I	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300
10	815,8	822,8	829,6	835,8	841,4	847,0	852,4	857,6	862,6	867,6	872,2	877,0	881,8	886,0
20	806,7	814,2	821,6	828,2	834,2	840,1	845,8	851,3	856,7	861,8	866,6	871,4	876,0	880,5
30	796,5	805,7	813,4	820,4	826,8	833,2	839,2	845,0	850,7	856,0	861,0	865,8	870,6	875,0
40	787,1	796,8	805,2	812,7	819,7	826,4	832,8	838,8	844,7	850,3	855,6	860,3	865,1	869,5
50	777,8	788,2	797,0	805,0	812,5	819,4	826,1	832,5	839,6	844,4	850,0	854,9	859,6	864,0
60	768,5	779,4	788,9	797,2	805,2	812,5	819,6	826,2	832,5	838,6	844,4	849,3	854,1	858,4
70	752,2	770,7	780,6	789,5	797,9	805,6	813,0	819,9	826,5	832,9	838,4	843,9	848,6	853,0
80	750,0	761,8	772,4	781,8	790,6	798,8	806,4	813,6	820,4	827,1	833,4	838,6	843,2	847,4
90		753,4	764,5	774,1	783,4	791,9	800,0	807,6	815,6	821,5	827,6	833,1	837,7	842,0
100		744,8	756,2	766,5	776,0	785,1	793,8	801,4	808,6	815,6	821,9	827,6	832,3	836,5
110		736,0	748,0	758,8	768,8	778,2	787,2	795,2	802,8	810,0	816,4	821,8	826,6	831,1
120		727,3	740,0	751,0	761,5	771,3	780,7	788,8	797,0	804,3	810,7	816,1	821,0	827,6
130			731,8	743,5	754,5	764,5	774,2	782,9	791,0	798,6	805,1	810,5	815,5	820,0
140			723,6	736,0	747,0	757,7	767,7	776,5	785,1	792,9	800,5	805,0	810,0	814,5
150				728,2	740,0	750,9	761,0	770,4	779,1	787,1	793,8	799,4	804,5	809,0
160				720,3	732,5	744,0	754,6	764,2	773,3	781,3	788,1	793,8	798,9	803,4
170				712,7	725,1	737,1	748,0	757,9	767,3	775,7	782,5	788,1	793,3	797,9
180					718,0	730,1	741,3	751,7	761,4	770,0	776,7	782,5	787,7	792,4
190					710,5	723,5	734,8	745,6	755,6	764,4	771,0	779,9	782,1	786,8
200					703,0	716,5	728,1	739,4	749,5	758,6	765,4	771,1	776,5	781,4

С помощью данной установки измерялась плотность ряда кетон. В таблице приведены результаты измерения плотностей метилэтилкетона в интервале температур от 10 до 200°C и давлений от 1 до 1300 атм. Температура измерялась хромель-алюмелевой термопарой с точностью до 0,1°C, давление—до 0,5 атм, масса—до 0,001 г, объем—до 0,1 см³, плотность—до 0,3%.

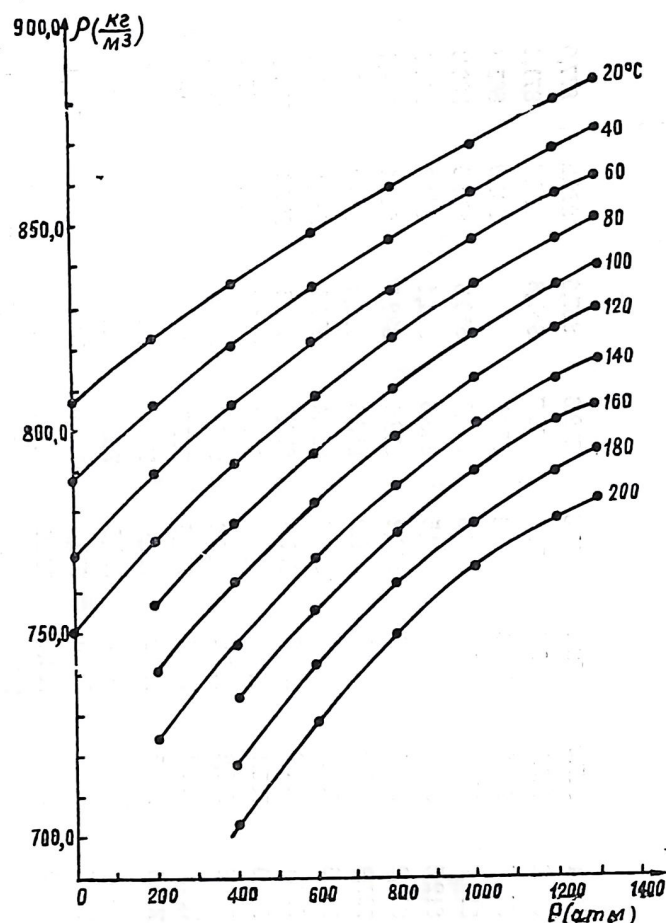


Рис. 2. Зависимость плотности метилэтилкетона от давления по изотермам.

На рис. 2 представлена зависимость плотности метилэтилкетона от давления, которое в указанном интервале давлений меняется по экспоненциальной кривой. Температурный коэффициент плотности для метилэтилкетона в пределах вышеуказанных давлений и температур меняется от 0,9314 до 0,550 градусов⁻¹. С помощью описанной установки одновременно измеряются скорость звука в данной жидкости и вязкость [2, 3]. Результаты измерения вязкости, плотности и скорости звука позволяют вычислить ряд термодинамических параметров: коэффициент объемного расширения, адиабатическую и изотермическую сжимаемости и их отношение, а кроме того, установить взаимосвязь между ними.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панькевич Г. М., Шойтов Ю. С. Сб. „Ультразвук и физико-химические свойства вещества“, вып. 3, М., 1969.
2. Шойтов Ю. С., Панькевич Г. М., Отпущенников Н. Ф. „Теплоэнергетика“, 10, 76, 1969.

3. Отпущенников Н. Ф. Сб. „Ультразвук и физико-химические свойства вещества“, вып. 4, 7, 1970.
4. Бадалян А. Л., Отпущенников Н. Ф. О некоторых термодинамических свойствах жидкой фазы гексен-1 при повышенных давлениях. Ультразвук и физико-химические свойства вещества. Уч. зап. Пед. ин-та т. 91, 5. Курск, 1971. АПИ им. В. И. Ленина

Поступило 27. XII 1972

В. А. Атоян, И. А. Мамедов

Тәрәзидә чәкмә методу илә жүксәк температур вә тәзјигдә маје вә газларын сыхлығыны тәјин етмәк үчүн гурғу

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә сыхлығы, өзлүлүјү вә тәдгиг олуан мүнхтдә сәсин јајылма сүр'әтини жүксәк температур вә тәзјигдә тәјин етмәк үчүн ишләдилән гурғунун тәсвири верилмишдир. Нәмчигин метилетилкетон үчүн сыхлығын 10—200°C температур вә 1—1300 атм тәзјиг интервалында өлчмәдән алынан нәтичәләр ишә дахил едилмишдир. Тәчрү-бәдән мүәјјән едилмишдир ки, тәзјигин жүксәлмәси илә метилетилкетонун сыхлығы экспоненциал артыр.

V. A. Atoyany, I. A. Mamedov

Setting for definition of liquid and gas density at high temperatures and pressures by means of weighing

SUMMARY

The design of the setting which gives the possibility to measure simultaneously the density, the tenacity and the velocity of sound in a given object at high temperatures and pressures is given in this article. The received experimental meanings of the density of metiletilketon in the interval of temperatures from 10°C till 200°C and at the pressure atmospheric till 1300 atm. are also given.

The results of the experiment show that the density of metiletilketon in the mentioned interval of pressure is increased if we increase the pressure according to the exponential law.

УДК 543.275.3:532.584

Ю. С. КЕНГЕРЛИНСКИЙ, Л. М. ШАПИРО, В. Э. АБДУЛЛАЕВ

СИГНАЛ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗАТОРА ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОГО СОСТАВА КАТАЛИЗАТОРА

Для анализа гранулометрического состава катализаторов, нашедших применение на установках переработки нефти, используется метод, основанный на модуляции светового потока движущимися частицами [1]. Этот метод позволяет в кратчайшие сроки получить

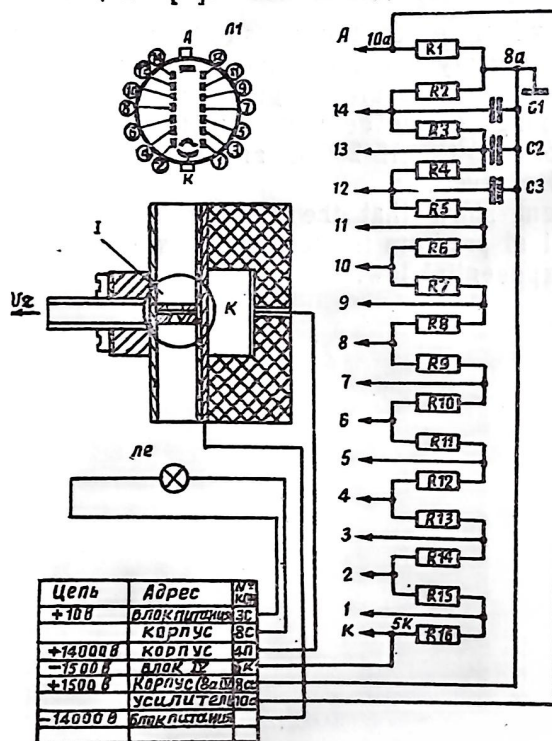


Рис. 1. Принципиальная схема измерительного преобразователя устройства „СКИФ-2“.

на движущемся катализаторе. Проба катализатора помещается в камеру К (рис. 1), представляющую собой плоский конденсатор, в верхней части которого имеется отверстие, связывающее камеру со световодным измерительным преобразователем I.

результаты анализа, а его разрешающая способность удовлетворяет требованиям, предъявляемым к решению практических задач. В разработанном устройстве для контроля гранулометрического состава пылевидного алюмосиликатного катализатора „СКИФ-2“ использован фотоэлектронный метод контроля светового поля.

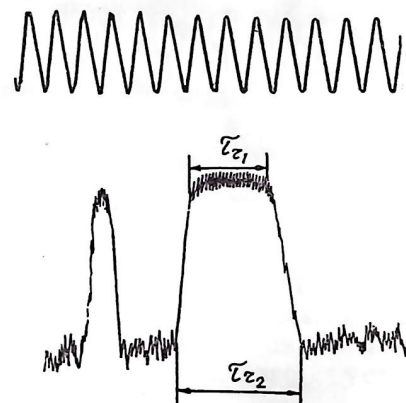


Рис. 2. Импульс фототока.

Вылетающие под действием электрического поля частицы конденсатора и пересекают световое поле, образованное световодным измерительным преобразователем, на одном конце которого смонтирован источник света (Л2) с электрической лампочкой типа К 10—50, а другой конец направлен на катод фотоэлектронного умножителя типа ФЭУ-22 (Л1). При прохождении частицы мимо неподвижной апертуры поток света, падающий на катод ФЭУ, ослабляется и на выходе устройства образуются импульсы фототока, соответствующие размерам частиц.

При прохождении частиц, ось симметрии которых совпадает с осью симметрии апертуры на выходе ФЭУ, образуются импульсы фототока, равные по амплитуде и различные по длительности. Длительность импульса фототока определяется скоростью движения частиц катализатора (v_q), размером d_q —условным диаметром частиц и диаметром апертуры d_a . Длительность верхней плоской части импульса

$$\tau_{q1} = \frac{d_q - d_a}{v_q}. \quad (1)$$

Длительность нижней части импульса

$$\tau_{q2} = \frac{d_q - d_a}{v_q}. \quad (2)$$

Средняя длительность импульса

$$\tau_q = \frac{\tau_{q1} + \tau_{q2}}{2} = \frac{d_q}{v_q}.$$

При прохождении частиц, ось симметрии которых не совпадает с осью симметрии апертуры на выходе ФЭУ, образуются импульсы фототока с малой амплитудой. Схема селекции не пропускает эти импульсы на анализирующее устройство.

Движение частицы определяется силой воздействия электрического поля в камере-конденсаторе и силой тяжести. Предполагается, что частицы имели соприкосновение с атмосферой и покрылись слоем влаги, который можно рассматривать как проводящий [2]. В этом случае сила воздействия электрического поля на частицу F_z равна

$$\begin{aligned} F_z &= E \cdot q_q = \frac{U_0}{l_k} \sigma \frac{\pi d_q^2}{4} = \\ &= \frac{U_0}{l_k} \cdot \frac{q_q}{S} \cdot \frac{\pi d_q^2}{4} = \frac{U_0}{l_k} \cdot \frac{U_0 C_0}{S} \cdot \frac{\pi d_q^2}{4} = \\ &= \frac{U_0^2}{l_k} \cdot \frac{\epsilon \cdot S \cdot 10^{-12}}{3,6 \pi l_k \cdot S} \cdot \frac{\pi \cdot d_q^2}{4} = \frac{U_0^2 \epsilon d_q^2 \cdot 10^{-12}}{l_k^2 \cdot 14,4}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$\frac{\pi d_q^2}{4}$ —поверхность частицы;
 $E = \frac{U_0}{l}$ —напряженность электрического поля в камере;
 U_0 —напряжение на пластинах камеры-конденсатора;
 l_k —расстояние между пластинами (высота) камеры-конденсатора;
 q_q —электрический заряд на поверхности частицы катализатора
($q_q = \sigma \frac{\pi \cdot d_q^2}{4}$);

σ — электрический заряд на единицу поверхности пластины камеры-конденсатора ($\sigma = \frac{q_n}{S}$);

q_n — количество электричества в камере-конденсаторе при приложенном напряжении U_0 и емкости C_0 ;
 S — площадь пластины камеры-конденсатора;

$$C_0 = \frac{\epsilon S \cdot 10^{-12}}{3,6\pi l_k}.$$

Сила, действующая на частицу катализатора с условным диаметром 100 мкм в устройстве „СКИФ-2“, составляет

$$F_s = 1,37 \cdot 10^{-7} \text{ н.} \quad (4)$$

Сила тяжести, действующая на частицу с тем же условным диаметром,

$$F_m = \gamma W \cdot g = 2,2 \cdot 10^{-9} \text{ н.} \quad (5)$$

где γ — удельный вес,

W — объем частицы.

Как видно из (4) и (5), сила воздействия электрического поля более чем в 10 раз превосходит силу тяжести и, соответственно, обеспечивает движение частиц к световому полю.

Скважность импульсов определяется кулоновскими силами, возникающими между частицами с одноименными зарядами. При расстоянии, равном размеру апертуры (40 мкм), сила взаимодействия между частицами размером 100 мкм будет [2]

$$F = \frac{q_q^2}{\pi \cdot \epsilon_0 d_q^2} = 4,38 \cdot 10^{-8} \text{ н.}$$

что почти в пять раз превышает силу тяжести, действующую на частицу этого размера. Суммируя изложенное, отметим, что с помощью электрического поля можно создать поток частиц катализатора, движущихся с определенными интервалами в заданном направлении, например, через световое поле, как это имеет место в устройстве „СКИФ-2“.

Поток света, проходящий через апертуру и попадающий на катод ФЭУ при отсутствии частицы, определяется выражением

$$\Phi_{\max} = \kappa \cdot \Phi,$$

где Φ — поток света, сконцентрированный с помощью рефлектора, фокальная плоскость которого совпадает с плоскостью, проходящей через ось симметрии светового поля;

κ — коэффициент, учитывающий зависимость между размером апертуры и количеством света, попадающим на катод ФЭУ.

Аналитическая форма записи импульса фототока трапецеидальной формы, полученного на выходе ФЭУ (рис. 2), имеет следующий вид [3]:

$$\Phi(t) = \Phi_{\max} \cdot \frac{1}{\tau_1} [t \cdot 1(t) - (t - \tau_1) \cdot 1(t - \tau_1) - (t - \tau_{2,1}) \cdot 1(t - \tau_{2,1}) + (t - \tau_{3,1}) \cdot 1(t - \tau_{3,1})];$$

$$\tau_1 = \tau_3 = \frac{\tau_{q2} - \tau_{q1}}{2}; \quad \tau_q = \tau_{q1};$$

$$\tau_{2,1} = \tau_1 + \tau_2; \quad \tau_{3,1} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau_{q2}.$$

Здесь символ $1f(t)$ означает умножение на единицу при $f(t) > 0$ и умножение на нуль при $f(t) < 0$. Например:

$$\begin{aligned} 1(t - \tau_1) &= 1 \quad \text{при } t > \tau_1, \\ 1(t - \tau_1) &= 0 \quad \text{при } t < \tau_1. \end{aligned}$$

Изображение по Лапласу $\Phi(p)$ для заданной формы импульса имеет вид:

$$\Phi(p) = \frac{\Phi_{\max}}{\tau_1} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-p\tau_1} + \frac{\tau_1}{p} e^{-p\tau_1} - \frac{1}{p^2} e^{-p\tau_{2,1}} + \frac{\tau_{2,1}}{p} e^{-p\tau_{2,1}} + \frac{1}{p^2} e^{-p\tau_{3,1}} - \frac{\tau_{3,1}}{p} e^{-p\tau_{3,1}} \right].$$

Спектральная функция импульса

$$\begin{aligned} G(\omega) &= 2\Phi_{\max} e^{-j\omega\tau_1} e^{-j\frac{\omega\tau_2}{2}} \left[\frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau_1}{2} \sin \frac{\omega\tau_2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \tau_1 \sin \frac{\omega\tau_2}{2} + \omega_{3,1} e^{-j\omega\frac{\tau_{1,2}}{2}} \sin \omega \frac{\tau_1}{2} \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Максимальное значение модуля спектральной функции

$$G(\omega)_{\omega \rightarrow 0} = 3 \cdot \Phi_{\max} \cdot \tau_{2,1}. \quad (7)$$

Из зависимостей (6), (7) можно определить, что составляющие модуля спектральной функции, меняющиеся с частотой, превышающей 10^5 гц, малы (менее 1% от максимального значения модуля спектральной функции). Следовательно, верхний предел частотной характеристики усилительного тракта устройства „СКИФ-2“ составляет 10^5 гц.

Выводы

1. Рассмотрены условия движения частиц пылевидного катализатора в электрическом поле.
2. Рассмотрен метод получения импульсов напряжения, являющихся источником информации о размере гранул катализатора в устройстве „СКИФ-2“.
3. Определены спектральные характеристики импульсов.
4. Получено значение необходимой полосы пропускания тракта усиления и преобразования в устройстве „СКИФ-2“.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мяздриков О. А. Электрические способы объемной гранулометрии. М. Изд-во „Энергия“, 1968.
2. Pich J. Zur Theorie der elektrostatischen Zerstreuung monodisperser Aerosol. Staub, 25, № 1, 1962.
3. Зиновьев О. А., Филипов Л. И. Введение в теорию сигналов и цепей. М., Изд-во „Высшая школа“, 1968.

Поступило 10. I 1973

АзПИ им. Ч. Ильдрима

Ј. С. Кенкэрлински, Л. М. Шапиро, В. Е. Абдуллаев

Катализаторун гранулометрик таркибинин фотоелектрон анализаторунун сигналы

ХУЛАСА

Магаләдә алүминиумсиликат катализаторунун гранулометрик хусусијәтләринин нәзарәти үчүн истифадә олуна „СКИФ“ фотоелектрон гурғусунун вәзифәси вә ишләмә принципи верилмишдир. Нәзәри оларак, гаршылыгы электростатик тәсирин көмәји илә фасиләсиз катализатор ахынын алынмасы әсасландырылмышдыр. Тәдгигатда катализаторун гранулометрик таркиби һаггында информасија мәнбәји олан фоточәрәјан импулсларынын параметрләри

анализ едилмишдир. Мәгаләдә тәҗрүбә тәдҗигатларын нәтиҗәләри кәстәрилмишдир. Еҗня заманда, фоточәрәҗан импульсларыны стандарт сигнала чевирән гурҗунун тезлик характеристикалары әсасландырылмышдыр.

U. S. Kenkirlinsky, L. M. Shapiro, V. E. Abdullaev

The analisere's granulometric signal of compoused catalyser

SUMMARY

The purpose and operating principle of photoelektronik devae "SKIFF-2" for granulometric composition control of aluminosilicate catalyser are considered. Theoretical basing of the possibility of obtaining a catalyser by means of elektrostatik interaction.

In the main part of the article the parameters of photocurrent's impulsis which are the source of information about granulometric composition controled catalyser, are analysed.

In the conlusive part there is an substantation of frequency characteristic of conberter photocurrent's impulsis to standart signal.

АЗЕРБАЙҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә рижәзијјат елмләри сәријасы, 1974, № 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1974, № 1

А. А. АЛЕКПЕРОВ

О ВСЕОБЩНОСТИ И ДВУМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО КОНТИНУУМА, I

(В порядке обсуждения)

Основанными особенностями предложения Минковского (вплоть до малых приращений x, t):

$$\sum_{\nu=1}^n \Delta x_\nu^2 - c^2 \cdot \Delta t^2 \equiv \Delta \sigma^2 = \text{const}; \Delta t^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{\nu=1}^n \Delta x_\nu^2 \equiv \Delta \theta^2 = \text{const}, \quad (1, 1)$$

$$\Delta \sigma = ic \cdot \Delta \theta, \quad n = 1, 2, 3$$

является асимметричность числа измерений континуумов x, t и подобие их интервалов. Именно последнее позволяет предположить, что в преобразованиях Лоренца x и t должны быть связаны как обратные величины. Действительно, положив поочередно

$$x = x(t), \quad t = t(x), \quad x_\nu = x, \quad \nu = 1, 2, 3 \quad (1, 2)$$

и продифференцировав по t предел разности $\Delta x = t(u' - u) = t \cdot \Delta u$ двух коллинеарных систем x', x , ($\nu = 1, 2, 3$), а затем по x предел разности $\Delta t = x(\tau' - \tau) = x \cdot \Delta \tau$, где $\tau_\nu = \frac{dt_\nu}{dx} = \frac{1}{u_\nu}$, получим соответ-

ственно два соотношения: $\frac{u_\nu}{t} = \text{const}$; $\tau_\nu x = \frac{x}{u_\nu} = \text{const}$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} t_u &= \beta t \rightarrow t - t_u = t(1 - \beta) = t - \frac{u}{c^2} x \equiv \Delta t, \\ x_u &= \beta x \rightarrow x - x_u = x(1 - \beta) = x - ut \equiv \Delta x, \end{aligned} \right\} \rightarrow \quad (1, 3)$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ t' &= \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t - \tau_u x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \right.$$

что отвечает требованию.

Следовательно, система (1, 1), инвариантная относительно преобразований Лоренца, должна отвечать в то же время свойству обратных функций (1, 2). Затем скалярные инварианты $\Delta \sigma, \Delta \theta$ должны быть вещественными, так как преобразования Лоренца определены для случая $u < c$. Наконец, возможность координатного представления вре-

мени в виде (1, 2) допускает возможность симметрии в отношении числа измерений системы (1, 1). Однако последняя, как известно, не обладает не одним из перечисленных свойств.

В силу известного соотношения $\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = 0$ положим

$$\Delta \sigma = \pm c \cdot \Delta \theta, \Delta \sigma = -i \sigma \cdot \Delta \theta. \quad (1, 4)$$

В первом случае $\Delta \sigma$ вещественно. Во втором случае величина и знак $\Delta \sigma$ отвечают мировому скаляру $X_\mu x_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$). Действительно:

$$d\theta^2 = -\frac{1}{c^2} \sum_{\mu=1}^4 dX_\mu^2 = -\frac{1}{c^2} d\sigma^2 \rightarrow \rightarrow \pm d\theta = i \tau d\sigma \rightarrow d\sigma = \mp i c \cdot \Delta \theta, \tau c = 1. \quad (1, 5)$$

Теперь в силу (1, 4) и (1, 5) система (1, 1) должны быть представлена в виде:

$$\Delta X^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta \sigma^2; \tau^2 \cdot \Delta X^2 - \Delta t^2 = \Delta \theta^2; \Delta X^2 = \sum_{\nu=1}^3 \Delta x_\nu^2; c\tau = 1. \quad (1, 6)$$

Так как $\Delta \sigma = \text{const}$, $\Delta \theta = \text{const}$, то

$$X^- X^+ = c^2 T^- T^+, T^- T^+ = \tau^2 X^- X^+, \Delta \sigma = \pm c \cdot \Delta \sigma' T \equiv t. \quad (1, 7)$$

Последние соотношения можно получить и из галилеевых преобразований, если ввести в них относительность координат (в алгебраическом смысле). Перенесем для этого начало системы x_ν ($\nu = 1, 2, 3$) поочередно в точки O' и O'' на величину $\Delta x_\nu = a^\nu \Delta t$, где $a = \text{const}$ (рис. 1). Тогда для точки M с произвольной постоянной координат x_0 получим:

$$x = x \pm \Delta x = x \pm a \cdot \Delta t; x' - x \equiv \Delta x \equiv \pm a \cdot \Delta t; x \equiv x_\nu; |\Delta x'| = |\Delta x'|; \left. \begin{aligned} \Delta x > 0: x'_1 - x = a(t' - t); x - at \equiv x^- \equiv \text{const}_1 \\ \Delta x < 0: x' = x - a(t' - t); x + at \equiv x^+ \equiv \text{const}_2 \end{aligned} \right\} \quad (1, 8)$$

$$< x^- x^+ = x^2 - a^2 t^2 = \text{const}_1 \cdot \text{const}_2 \equiv \text{const}. \quad (1, 9)$$

С другой стороны, если λ — произвольный масштаб, то

$$x' = x_0 + at = x_0 + m\lambda \rightarrow at = w\lambda; m > 0. \quad (1, 10)$$

При $m = 1$ $t = \nu \rightarrow \lambda = a\nu \rightarrow x = m\lambda; t = m\nu$ и при $\lambda = 1$ получим $\nu \equiv \tau = \frac{1}{a}$; $a\tau = 1$.

Следовательно, если X, T — два независимых континуума, заданных единственным образом, можно поочередно положить

$$\left. \begin{aligned} x = x(t); t = t; x_\nu = u_\nu t \\ t = t(x); x_\nu = x; t_\nu = \tau_\nu x \end{aligned} \right\}; u_\nu = \frac{dx_\nu}{dx}; \tau_\nu = \frac{dt_\nu}{dx}; \nu = 1, 2, 3; u_\nu \tau_\nu = u\tau = 1 \rightarrow x_\nu t_\nu = x \cdot t. \quad (1, 11)$$

Подобие (1, 11) выражает общий принцип координатно-параметрической индифферентности континуумов X и T , которая означает безразличие в выборе координат или параметра из двух независимых переменных.

Из отношения $t_\nu/x_\nu = x_\nu \tau_\nu / tu_\nu$ следует:

$x \cdot x_\nu - u_\nu^2 t \cdot t_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, 3$, и при $x_\nu = x$, $t_\nu = t$ получим $u_\nu = u \equiv a$. $x^2 - a^2 t^2 = 0 \rightarrow \Delta x = \pm a \cdot \Delta t$. Если в плоскости xOt даны окружность и прямая $\frac{dx_0}{dt} = -a^2 \frac{t}{x_0}$; $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$, то для их совместной точки спра-

ведливо $x \cdot x_0 = -(at)^2$ и при $x_0 = x_\nu = iat$ и $x_\nu = \pm at$, или $x_\nu = -iat$, если окружность заменить гиперболой.

Для совместной точки окружности и прямой, но заданных, соиметь $x/y = -y_0/x$ или в обобщенных индексах (в зависимости от выбора их порядка):

$$x_{\nu\kappa} x_{\nu\kappa} = -x_{\nu\kappa} x_{\kappa\kappa}; x_{\nu\kappa} x_{\nu\kappa} = x_{\nu\kappa} x_{\kappa\kappa}, \nu, \kappa = 1, 2; \quad (1, 12)$$

$$\tau = \kappa \rightarrow \begin{cases} x_{\nu\nu} = ix_{\kappa\kappa}; x_{\kappa\kappa} = -ix_{\nu\nu}; x_{\nu\nu} = x_{\nu\nu} \rightarrow \text{sim} \\ x_{\kappa\kappa} = ix_{\nu\nu}; x_{\nu\nu} = -ix_{\kappa\kappa}; x_{\kappa\kappa} = -x_{\kappa\kappa} \rightarrow \text{asim} \end{cases} \quad (1, 13)$$

$$x_{\kappa\kappa} = \pm ix_{\nu\nu} = \pm ix = \pm iat, \dots \quad (1, 14)$$

Сравнивая (1, 12) с уравнением плоскости, касательной к окружности:

$$< r \cdot r_0 > = x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = b^2, \text{ при } b = 0 \text{ получим}$$

$$r_0 \perp r; r = \pm at. \quad (1, 15)$$

Последнее определяет геометрический смысл (1, 12). Равенство (1, 14)

отвечает собственным значениям матрицы обычного поворота плоскости и при $|x_\nu| = 1$ ее собственными векторами будут $v_1 = [1; i]$ $v_2 = [1; -i]$ и если e_ν ($\nu = 1, 2$) — орты последних, то

$$< e_1 \cdot e_1 > = 1, < e_2 \cdot e_2 > = -1, < e_1 \cdot e_2 > = 0. \quad (1, 16)$$

Следовательно, плоскость наложения систем $x_0 O y$ и $x O y$ является псевдоевклидовой. Тогда $x, t \neq xt$, т. е. континуум x, t неиндифферентен относительно выбранной системы координат. Простейшим случаем при этом, очевидно, является преобразование подобия с центром в начале, тогда в силу (1, 11) следует положить

$$|x_\nu| = \mu |x|, |t| = \mu |t|, 0 < \mu < 1, \nu = 1, 2, 3. \quad (1, 17)$$

Сначала рассмотрим неиндифферентность на прямой, для чего положим $x_\nu = u_\nu t$, $u_\nu \neq u$, и, кроме того, $x = wt$, $w_\nu = w$ ($\nu = 1, 2, 3$) — две коллинеарные системы, находящиеся в относительном движении. Для случаев совпадения и противоположности направлений движения точек, взятых на этих прямых, соответственно будем иметь:

$$x^- = x - x_\nu; x^+ = x + x_\nu; x^-/x^+ = \frac{1-\mu}{1+\mu} \equiv 1 - \eta; \quad (1, 18)$$

$$\eta = \frac{2\mu}{1+\mu} = \frac{2u}{u+w} \equiv \frac{u}{w} = \frac{1}{1 - \frac{w-u}{u}}; 0 < \mu = \frac{u}{w} < 1.$$

Представив последние геометрически, найдем:

$$\mu = \frac{< x, x >}{|x_\nu| \cdot |x|} = \cos \alpha; \eta = \frac{uw}{A_0^2}; A_0^2 = \frac{u+w}{2} w; \quad (1, 19)$$

$$x^+ = \frac{x^-}{1-\eta} = \frac{x-ut}{1-\frac{uw}{A_0^2}} \rightarrow w^+ = \frac{w^-}{1-\eta} = \frac{w-u}{1-\frac{uw}{A_0^2}}$$

Аналогично в системе x_ν ($\nu = 1, 2, 3$) получим:

$$X' = UT; X = WT; w_\nu = w; \frac{X' + X}{2} \cdot X \equiv R^2;$$

$$\eta = \frac{1}{R^2} < X' \cdot X > = \frac{X^2}{R^2} \cdot \delta_{kl}; \delta_{kl} = \sum_{\nu=1}^3 C_{\nu k} C_{\nu l}.$$

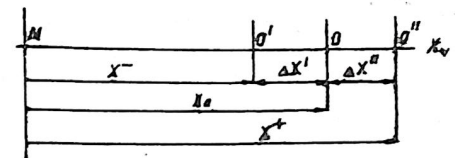


Рис. 1

В силу (1, 18)

$$\eta = \frac{2\delta_{kl}}{1 + \delta_{kl}} \begin{cases} 1; & k = l; & X^- = 0; & U = W = A_0; \\ 0; & k \neq l; & X^- = X^+; & X = UT = 0, \end{cases} \quad (1, 20)$$

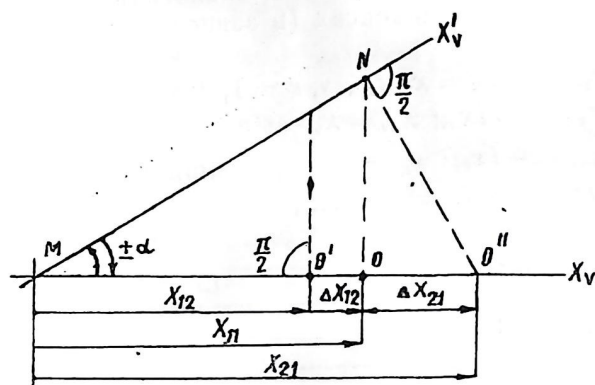


Рис. 2

т. е. при отсутствии деформации пространства ($\mu = \delta_{kl} = 1$ или $\eta = 1$) движение точки, возникшее однажды, сохраняется сколь угодно долго. При полной деформации пространства ($\mu = \delta_{kl} = 0$ или $\eta = 0$) наступает вечный покой. Эти крайние значения η относятся к идеальным и изолированным (недеформируемым) пространствам.

При $|\Delta x'| \neq \Delta x''$ (рис. 1) прямое и обратное преоб-

разование прямой при ее квазиупругой деформации (рис. 2) приводит к соотношениям:

$$\eta = \frac{2x_{11}}{x_{11} + x_{21}} = \frac{2\mu_2}{1 + \eta_2} \quad \left\{ \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{x_{12}}{x_{11}}; \\ \mu_2 &= \frac{x_{11}}{x_{21}}; \end{aligned} \right. \quad \mu^2 = \frac{x_{12}}{x_{21}} = \mu_1 \mu_2. \quad (1, 21)$$

Из геометрического представления μ_1 и μ_2 в круге радиуса $r = 2$ следует:

$$x_{12}/x_{21} = \mu^2 = \mu_1 \cdot \mu_2 = \mu_1 \cdot (2 - \mu_1) = 2\mu_1 - \mu_1^2; \quad \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = 1; \quad (1, 22)$$

$$\Delta x_{12} = -\mu_2 \cdot \Delta x_{21}. \quad (1, 23)$$

Последнее являет собой преобразование инверсии (подобия) прямой с центром в начале координат. Коэффициент

$$\eta_0 = 2\mu_1 - \mu_1^2 = 1 - \frac{(x_{11} - x_{12})^2}{x_{11}^2} = 2 \frac{x_{12}}{x_{11}} - \left(\frac{x_{12}}{x_{11}} \right)^2 = 2 \frac{u_{12}}{u_{11}} - \left(\frac{u_{12}}{u_{11}} \right)^2, \quad (1, 24)$$

подобно η ; $\bar{\eta}$, также определяет эффект (к.п.д.) равномерного движения точки, но по окружности (этот эффект хорошо известен из теории ракет, турбин и т.п.).

В силу (1, 18) в обобщенных индексах можно записать:

$$x^\pm = \frac{x_{kv} \pm x_{vk}}{2}, \quad \mu = \frac{|x_{vk}|}{|x_{kv}|}, \quad 0 < \mu < 1. \quad (1, 25)$$

Последнее согласуется с теоремой о единственности разложения тензора на симметрическую и асимметрическую части, и если p — элемент тензора, то получим обобщенный закон сложения векторов (например, скоростей) на прямой в тензорной форме (при квазиупругой их деформации), т. е.

$$a \text{ sim} = \frac{p_{kv} - p_{vk}}{2} \equiv p^-; \quad \text{sim} = \frac{p_{kv} + p_{vk}}{2} \equiv p^+ \equiv p^-;$$

(1, 26)

$$p' = \frac{p^-}{1 - \eta} \rightarrow p' = \frac{p_{kv} - p_{vk}}{1 - \frac{p_{vk} p_{kv}}{p^2}}, \quad v, k = 1, 2, 3;$$

$$p^2 = p_{vv}^2 = p^+ \cdot p_{kv}; \quad \frac{|p_{vk}|}{|p_{kv}|} = \mu^2; \quad 0 < \mu < 1.$$

Институт „АСУ рыбпроект“

Поступило 4. V 1973

А. А. Элэкперов

Үмумилик вә I, II икиөлчүлү фәза-заман континуму
наггында

ХҮЛАСӘ

I, II ишләригә, оптик проселәрден асылы олмәҗәҗәг, универсал релјативизмин башалмәсына бахылыр.

Ејнштејн релјативизмин вә Минковскинин фәза-заман континумунун бу универсал башламанын хусуси һәлы олмасы кәстәрилир.

A. A. Alekperov

On universality and two dimensionality of space—time
continuity—I II

SUMMARY

Principles of universal relativism, irrespective of optical phenomena, are given in the works—I II.

The fact that relativism according to Einstein and space—time continuity according to Minkovsky are private cases of these universal principles.

А. А. АБДУЛЛАЕВ, Т. Г. РЗАЕВ, З. А. КАРАГЕЗОВ
**ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
И ОПТИМИЗАЦИЯ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ
РАБОТЫ НЕФТЕПЕРЕРАБАТЫВАЮЩИХ ПРОИЗВОДСТВ**

Одной из важных и сложных задач в создании автоматизированных систем управления и планирования работы нефтеперерабатывающих производств является оптимизация календарного планирования (КП). Важную роль при этом играет учет складов под сырьевые ресурсы и продукты. Наши исследования показывают, что модель КП работы таких объектов без учета складов часто оказывается неадекватной.

Ниже на примере одного из отечественных заводов по производству авиабензина рассматривается вопрос построения математической модели и оптимизации КП с учетом складов под сырьевые ресурсы и продукты.

Структурная схема такого производства представлена на рис. 1. Ввиду того, что исследуемый объект инерционный, возмущения медленно изменяющиеся и в системе планирования используются ЭЦВМ, модель оптимального КП ищется в дискретном варианте времени.

Для этого общий период планирования T разбивается на N интервалов величиной Δ и принимается, что решение, найденное в каждый дискретный момент времени, остается неизменным до следующего дискретного момента времени. В общем случае Δ может быть различной для разных интервалов времени.

На рис. 1 приняты следующие обозначения:

$U_1^{(0)}, U_2^{(0)}$ —количество керосино-газойлевой фракции (КГФ), поступающее соответственно из первого и второго источников в склад V_0 ;

$U_{1,r}^{(0,1)}$ ($r = 1, 2, 3$)—количество КГФ, перерабатываемое на установке 1 в r -ом варианте;

$U_{1,r}^{(0,2)}, U_{2,r}^{(0,2)}$ ($r = 1, 2$)—соответственно, количество КГФ и дебутанизированного мотобензина, перерабатываемое на установке 2 в r -ом варианте;

$U_1^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$)—количество жирного газа, вырабатываемое соответственно на установках 1, 2 и 3;

$U_3^{(j)}$ ($j = 1, 2$)—количество нестабильного мотобензина, вырабатываемое соответственно на установках 1 и 2;

$U_2^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$), $U_2^{(5)}$ —количество флегмы, вырабатываемое соответственно на установках 1, 2, 3 и 5;

$U_{1,r}^{(0,3)}$ ($r = 1, 2$)—количество дебутанизированного мотобензина, перерабатываемое на установке 3 в r -ом варианте;

$U_r^{(0,4)}$ ($r = 1, 2, 3$)—количество жирного газа, нестабильного мотобензина и нестабильного авиабензина, перерабатываемое на установке 4, соответственно в первом, втором и третьем вариантах;

$U_4^{(j)}$ ($j = 3, 5, 6$)—количество бензина Оч-80, вырабатываемое соответственно на установках 3, 5 и 6;

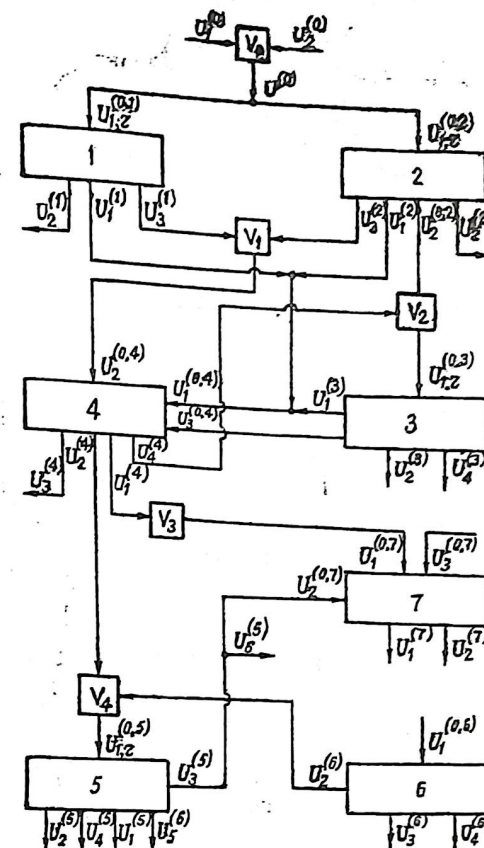


Рис. 1

$U_4^{(4)}$ —количество дебутанизированного мотобензина, вырабатываемое на установке 4;

$U_3^{(4)}, U_3^{(6)}$ —количество ПАФ, вырабатываемое соответственно на установках 4 и 6;

$U_1^{(j)}$ ($j = 2, 1$)—соответственно, количество ББФ и стабильного авиабензина, вырабатываемое на установке 4;

$U_1^{(0,6)}$ —количество крекинг-газа, перерабатываемого на установке (6);

$U_2^{(6)}$ —количество ББФ, вырабатываемое на установке 6;

$U_{1,r}^{(0,5)}$ ($r = 1, 2$)—количество ББФ, перерабатываемое на установке 5 в r -ом варианте;

$U_1^{(5)}$ ($i = 1, 3, 5$)—соответственно, количество бутановой фракции, алкилбензина и пропановой фракции, вырабатываемое на установке 5;

$U_6^{(5)}$ —количество товарного алкилбензина;

$U_1^{(0,7)}$ ($i = 1, 2, 3$)—соответственно, количество стабильного авиабензина, алкилбензина и толуола, вовлекаемое в смешение;

$U_1^{(7)}$ ($i = 1, 2$)—соответственно, количество товарного авиабензина Б-100/130 и Б-95/130, вырабатываемое на установке;

V_0 —склад общих сырьевых ресурсов;

$V_i (i = \overline{1, 4})$ — склады промежуточных продуктов.
Предлагаемая модель оптимального календарного планирования производства авиабензинов включает в себя в основном следующие ограничения и соотношения:

1. Ограничения на затраты сырьевых ресурсов на период планирования T :

$$\sum_{r=1}^3 \sum_{k=0}^{N-1} U_{1,r}^{(0,1)}(k) \leq B_1, \quad (1)$$

$$\sum_{r=1}^2 \sum_{k=0}^{N-1} U_{1,r}^{(0,2)}(k) \leq B_2,$$

где B_1, B_2 — плановые ограничения; N — число интервалов разбиения периода T ; k — номера дискретных моментов разбиения периода T .

2. Ограничения на выпуск товарных продуктов на период планирования T :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^3 a_{1,i}^{(7)}(k) U_i^{(0,7)}(k) \geq B_3, \quad (2)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^3 a_{2,i}^{(7)}(k) U_i^{(0,7)}(k) \geq B_4,$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^2 (a_{3,i}^{(5)}(k) - a_{2,i}^{(0,7)}(k)) U_i^{(0,5)}(k) \geq B_5,$$

где B_1 — плановые ограничения на выпуск товарных продуктов.

3. Балансовые ограничения производства и его отдельных установок:

$$\left(1 - \sum_{i=1}^3 a_{1,i}^{(1)}(k)\right) U_{1,r}^{(0,1)}(k) = 0, \quad r = 1, 2, 3;$$

$$\left(1 - \sum_{i=1}^3 a_{1,i}^{(2)}(k)\right) U_{1,r}^{(0,2)}(k) = 0, \quad r = 1, 2;$$

$$(1 - a_{2,i}^{(2)}(k)) U_{2,i}^{(0,2)}(k) = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\left(1 - \sum_{i=1}^4 a_{1,i}^{(3)}(k)\right) U_{1,r}^{(0,3)}(k) = 0, \quad r = 1, 2;$$

$$\sum_{j=1}^3 U_{j,r}^{(0,4)}(k) - \sum_{i=1}^4 a_{1,i}^{(4)}(k) U_i^{(0,4)}(k) = 0, \quad r = 1, 2, 3; \quad (3)$$

$$\left(1 - \sum_{i=1}^5 a_{1,i}^{(5)}(k)\right) U_{1,r}^{(0,5)}(k) = 0, \quad r = 1, 2;$$

$$\left(1 - \sum_{i=1}^3 a_{1,i}^{(6)}(k)\right) U_{1,i}^{(0,6)}(k) = 0;$$

$$\sum_{j=1}^2 a_{3,j}^{(7)}(k) U_j^{(7)}(k) + \sum_{j=1}^2 U_j^{(0,7)}(k) - \sum_{i=1}^2 a_i^{(7)}(k) U_i^{(0,7)}(k) = 0,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где $a_{j,r,i}^{(p)}(k)$ — коэффициент отбора i -го продукта из j -го вида сырья на p -ой установке при r -ом варианте в k -ый момент времени.

4. Ограничения на мощности производства и на мощности его отдельных установок:

$$\underline{R}_1(k) \leq U^{(0)}(k) \leq \bar{R}_1(k);$$

$$\underline{R}_{2,r}(k) \leq U_{1,2}^{(0,1)}(k) \leq \bar{R}_{2,r}(k), \quad r = 1, 2, 3;$$

$$\underline{R}_{3,r}(k) \leq U_{1,r}^{(0,2)}(k) \leq \bar{R}_{3,r}(k), \quad r = 1, 2;$$

$$\underline{R}_4(k) \leq U_2^{(0,2)}(k) \leq \bar{R}_4(k);$$

$$\underline{R}_{5,r}(k) \leq U_{1,r}^{(0,3)}(k) \leq \bar{R}_{5,r}(k), \quad r = 1, 2;$$

$$\underline{R}_{6,r}(k) \leq \sum_{j=1}^3 U_{j,r}^{(0,4)}(k) \leq \bar{R}_{6,r}(k), \quad r = 1, 2, 3;$$

$$\underline{R}_{7,r}(k) \leq U_r^{(0,5)}(k) \leq \bar{R}_{7,r}(k), \quad r = 1, 2;$$

$$\underline{R}_8(k) \leq U_1^{(0,6)}(k) \leq \bar{R}_8(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (4)$$

где $\underline{R}_i(k), \bar{R}_i(k)$ — соответственно, нижний и верхний пределы изменения мощности производства при переработке общих сырьевых ресурсов в k -ый момент времени; $\underline{R}_{j,r}(k), \bar{R}_{j,r}(k)$ ($j = \overline{2, 8}$) — соответственно, нижний и верхний пределы изменения мощности j -ой установки при переработке сырьевых ресурсов в k -ый момент времени.

5. Ограничение на лимитированные вспомогательные материалы на период планирования T :

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{N-1} a_3^{(7)}(k) U_j^{(7)}(k) \leq B_6, \quad (5)$$

где B_6 — плановое ограничение по затрате толуола;

$a_3^{(7)}(k)$ — нормы затрат толуола на единицы компаундируемых на установке 7 стабильного авиабензина и алкилбензина.

6. Соотношения, связывающие блоки производства:

$$\underline{V}_0(k+1) \leq \Delta V_0(k) + U_j^{(0)}(k) - \sum_{i=1}^2 U_{1,i}^{(0,p)}(k) \leq \bar{V}_0(k+1), \quad j=1, 2; \quad p=1, 2;$$

$$\underline{V}_1(k+1) \leq \Delta V_1(k) + a_j^{(p)}(k) U_{j,r}^{(0,p)}(k) - U_2^{(0,4)}(k) \leq \bar{V}_1(k+1),$$

$$j = 1, 2, 3; \quad p = 1, 2;$$

$$\underline{V}_2(k+1) \leq \Delta V_2(k) + a_r^{(4)}(k) U_r^{(0,4)}(k) - (U_2^{(0,2)}(k) + U_{1,r}^{(0,3)}(k)) \leq \bar{V}_2(k+1), \quad r = 1, 2, 3;$$

$$\underline{V}_3(k+1) \leq \Delta V_3(k) + a_{2,r}^{(4)}(k) U_r^{(0,4)}(k) - U_1^{(0,7)}(k) \leq \bar{V}_3(k+1), \quad r = 1, 2, 3;$$

$$\underline{V}_4(k+1) \leq \Delta V_4(k) + a_{3,r}^{(4)}(k) U_r^{(0,4)}(k) + a_1^{(6)}(k) U_1^{(0,5)}(k) - U_{1,j}^{(0,5)}(k) \leq \bar{V}_4(k+1), \quad j = 1, 2; \quad r = 1, 2, 3; \quad (6)$$

$$U_1^{(1)}(k) + U_1^{(2)}(k) + U_1^{(3)}(k) - U_1^{(0,4)}(k) = 0;$$

$$U_3^{(5)}(k) - U_6^{(5)}(k) - U_6^{(0,7)}(k) = 0,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где $\underline{V}_i(k+1), \bar{V}_i(k+1)$ ($i = \overline{0, 4}$) — соответственно, минимальные и максимальные запасы ресурсов в складе V_i ($i = \overline{0, 4}$) в момент времени $(k+1)$;

$\Delta V_i(k)$ ($k = \overline{0, 4}$) — имеющиеся запасы ресурсов в складах V_i ($i = \overline{0, 4}$) в момент времени k ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$).

7. Ограничения на затраты сырьевых ресурсов, лимитированных вспомогательных материалов и на выпуск конечных продуктов в каждом дискретном интервале разбиения периода T :

$$\begin{aligned}
U^{(0)}(\kappa) &= \hat{U}^{(0)}(\kappa); \\
\underline{b}_0(\kappa) &\leq U_{1,r}^{(0,1)}(\kappa) \leq \bar{b}_0(\kappa), \quad r = 1, 2, 3; \\
\underline{b}'_0(\kappa) &\leq U_{1,r}^{(0,2)}(\kappa) \leq \bar{b}'_0(\kappa), \quad r = 1, 2; \\
\underline{b}_1(\kappa) &\leq U_2^{(0,2)}(\kappa) \leq \bar{b}_1(\kappa); \\
\sum_{j=1}^2 a_3^{(7)}(\kappa) U_j^{(7)}(\kappa) &\leq b_2(\kappa); \\
U_j^{(7)}(\kappa) &\leq U_j^{(7)}(\kappa) \leq \bar{U}_j^{(7)}(\kappa), \quad j = 3, 4; \\
U(\kappa) &\leq U_5^{(5)}(\kappa) \leq \bar{U}_5(\kappa), \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, N-1;
\end{aligned} \quad (7)$$

где $\hat{U}_0(\kappa)$, $\underline{b}_0(\kappa)$, $\bar{b}_0(\kappa)$, $\underline{b}'_0(\kappa)$, $\bar{b}'_0(\kappa)$, $\underline{b}_1(\kappa)$, $\bar{b}_1(\kappa)$, $b_2(\kappa)$ — известные функции дискретного времени κ ($\kappa = 0, 1, 2, \dots, N-1$); $U_j(\kappa)$; $\bar{U}_j(\kappa)$ — соответственно, нижний и верхний допустимые пределы $U_j(\kappa)$.

8. Ограничения на изменения запасов сырьевых ресурсов в складах:

$$\begin{aligned}
y_0(\kappa+1) &= y_0(\kappa) + U_1^{(0)}(\kappa) + U_2^{(0)}(\kappa) - U^{(0)}(\kappa); \\
y_1(\kappa+1) &= y_2(\kappa) + a_{1,r}^{(p)}(\kappa) U_{1,r}^{(p)}(\kappa) - U_2^{(0,4)}(\kappa), \quad p = 1, 2; \quad r = 1, 2; \\
y_2(\kappa+1) &= y_2(\kappa) + a_{1,r}^{(4)}(\kappa) U_r^{(0,4)}(\kappa) - U_2^{(0,2)}(\kappa) - U_{1,i}^{(0,3)}(\kappa), \\
&\quad r = \overline{1, 3}; \quad i = 1, 2; \\
y_3(\kappa+1) &= y_3(\kappa) + a_{2,r}^{(4)}(\kappa) U_r^{(0,4)}(\kappa) - U_1^{(0,7)}(\kappa), \quad r = 1, 2, 3; \\
y_4(\kappa+1) &= y_4(\kappa) + a_{3,r}^{(4)}(\kappa) U_r^{(0,4)}(\kappa) + a_1^{(6)}(\kappa) U_1^{(0,6)}(\kappa) - \\
&\quad - U_r^{(0,5)}(\kappa), \quad r = 1, 2; \\
y_0(0) &= \hat{y}_0(0), \quad y_0(N) = \hat{y}_0(N); \quad y_1(0) = \hat{y}_1(0), \quad y_1(N) = \hat{y}_1(N); \quad i = \overline{1, 4}; \\
&\quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, N-1,
\end{aligned} \quad (8)$$

где $y_0(\kappa)$ — запас общих сырьевых ресурсов в складе V_0 в момент времени κ ($\kappa = \overline{0, 1, N-1}$); $y_i(\kappa)$ ($i = \overline{1, 4}$) — запасы сырьевых ресурсов соответственно в складах V_i ($i = \overline{1, 4}$) в момент времени κ ($\kappa = 0, 1, 2, \dots, N-1$); $\hat{y}_0(0)$, $\hat{y}_0(N)$, $\hat{y}_1(0)$, $\hat{y}_1(N)$ ($i = \overline{1, 4}$) — заданные числа.

9. Критерий цели.

В качестве критерия цели принимается переменная составляющая прибыли, которая для производства авиабензина имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\kappa=0}^{N-1} \left\{ \sum_{r=1}^3 (a_{j,r}^{(7)}(\kappa) U_r^{(0,7)}(\kappa) \cdot c_j(\kappa))_{j=1,2} + \sum_{r=1}^2 [(a_{3,r}^{(5)}(\kappa) - a_2^{(0,7)}(\kappa)) U_r^{(0,5)}(\kappa)] \times \right. \\
&\quad \times c_3(\kappa) + \left[\sum_{r=1}^3 \sum_{p=1}^2 a_{2,r}^{(p)}(\kappa) U_{1,r}^{(0,p)}(\kappa) + \left(\sum_{r=1}^2 a_{2,r}^{(p)}(\kappa) U_{1,r}^{(0,p)}(\kappa) \right)_{p=3,5} + \right. \\
&\quad \left. + a_2^{(2)}(\kappa) U_2^{(0,2)}(\kappa) \right] \cdot c_4(\kappa) + \left[\left(\sum_{r=1}^2 a_{4,r}^{(p)}(\kappa) U_{1,r}^{(0,p)}(\kappa) \right)_{p=3,5} + \right. \\
&\quad \left. + a_4^{(6)}(\kappa) U_1^{(0,6)}(\kappa) \right] \cdot c_5(\kappa) + \left[\sum_{r=1}^3 a_{3,r}^{(4)}(\kappa) U_r^{(0,4)}(\kappa) + a_3^{(6)}(\kappa) U_1^{(0,6)}(\kappa) \right] \times \\
&\quad \times c_6(\kappa) + \sum_{r=1}^2 a_{1,r}^{(5)}(\kappa) U_{1,r}^{(0,5)}(\kappa) \cdot c_7(\kappa) + \sum_{r=1}^2 a_{5,r}^{(5)}(\kappa) U_{1,r}^{(0,5)}(\kappa) \cdot c_8^{(5)} \Big\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \left\{ \sum_{\kappa=0}^{N-1} \left[\sum_{r=1}^3 a_r^{(1)}(\kappa) U_{0,r}^{(0,1)}(\kappa) + \sum_{r=1}^2 a_r^{(2)}(\kappa) U_{1,r}^{(0,2)}(\kappa) + a_3^{(2)}(\kappa) U_2^{(0,2)}(\kappa) + \right. \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=1}^2 a_3^{(3)}(\kappa) U_{1,r}^{(0,3)}(\kappa) + \sum_{r=1}^3 a_r^{(4)}(\kappa) U_r^{(0,4)}(\kappa) + \sum_{r=1}^2 a_1^{(4)}(\kappa) U_{1,r}^{(0,5)}(\kappa) + \right. \\
&\quad \left. + a_1^{(6)}(\kappa) U_1^{(0,6)}(\kappa) \right] - [(y_0(N) - y_0(0)) d_0(N) + (y_1(N) - \\
&\quad - y_1(0)) d_1(N) + (y_2(N) - y_2(0)) d_2(N) + (y_4(N) - y_4(0)) d_4(N)] \Big\}, \quad (9)
\end{aligned}$$

где $c_i(\kappa)$ ($i = \overline{1, 8}$) — цены товарных продуктов;
 $d_i(N)$ ($i = 0, 1, 2, 4$) — затраты на хранение единиц ресурсов в складах;
 $d_r^{(p)}(\kappa)$ — себестоимость единицы сырьевых ресурсов.

Возможны и другие частные критерии, такие как суммарный выход одного из целевых продуктов производства или суммы нескольких таких продуктов за N шагов с учетом их себестоимостей (цен), затраты сырьевых ресурсов за N шагов с учетом их цен, рентабельность работы производства и т. п.

В модели (1)–(9) выходные переменные каждой установки выражены через его сырьевые потоки с помощью коэффициентов отбора продуктов. Требуется найти такие значения варьируемых потоков, которые при ограничениях (1)–(8) максимизируют критерий (9).

Вышеприведенную постановку задачу оптимизации КП производства авиабензина можно записать в следующем общем виде:

$$L = \sum_{\kappa=0}^{N-1} C(\kappa) U(\kappa) \rightarrow \max \quad (10)$$

при ограничениях

$$\sum_{\kappa=0}^{N-1} A(\kappa) U(\kappa) \leq B, \quad (11)$$

$$\bar{A}(\kappa) U(\kappa) \leq \bar{B}(\kappa), \quad (12)$$

$$U(\kappa) \leq 0, \quad \kappa = \overline{0, 1, N-1}, \quad (13)$$

где $A(\kappa)$, $\bar{A}(\kappa)$ — матрицы размеров соответственно $(m \times n_\kappa)$ и $(m_\kappa \times n_\kappa)$;
 $C(\kappa)$ — n_κ -мерный вектор-строка;

B , $\bar{B}(\kappa)$ — вектор-столбцы размеров соответственно m и n_κ ;

$U(\kappa)$ — вектор управляющих воздействий.

В неравенство (11) включены ограничения (1), (2), (5), (8), а в неравенство (12) — ограничения (3), (4), (6)–(7). В частном случае, при $N = 1$ из модели КП (1)–(9) можно получить задачу оптимизации оперативного планирования производства авиабензина.

Для решения задачи оптимизации КП производства по построенной модели можно использовать один из декомпозиционных методов, в частности метод Данцига–Вульфа [2]. Для этого задача (10)–(13) разбивается на одну основную Z -задачу и N вспомогательных $U_\lambda(\kappa)$ -задач, которые решаются поочередно.

Основная Z -задача имеет вид:

$$\sum_{\kappa=1}^{N_\kappa} \sum_{\kappa=0}^{N-1} \sigma_\kappa(\kappa) Z_\kappa(\kappa) \rightarrow \max \quad (14)$$

при условиях

$$\sum_{v=1}^{N_k} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{P}_v(k) Z_v(k) \leq \bar{B}, \quad (15)$$

$$Z_v(k) \geq 0, \quad v = \overline{1, N_k}; \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (16)$$

причем

$$\sigma_v(k) = (C(k) U_v(k)); \quad \bar{P}_v(k) = \begin{pmatrix} A(k) U_v(k) \\ \varepsilon_v(k) e_N(k) \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ I_N \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где $e_N(k)$ — N -мерный единичный вектор с единицей на k -ом месте;

I_N — N -мерный вектор с единичными компонентами;

$U_v(k)$ — значение $U(k)$, соответствующее вершине выпуклого многогранника G_k , отсекаемого ограничениями (12) — (13); при

$$v = 1, 2, \dots, N_k^{(1)} \text{ и } v = N_k^{(1)} + 1, N_k^{(1)} + 2, \dots, N_k$$

$U(k)$ соответствует направляющему вектору множества G_k ; $\varepsilon_v(k) = 1$ при $v = 1, 2, \dots, N_k^{(1)}$; $\varepsilon_v(k) = 0$ при $v = N_k^{(1)} + 1, \dots, N_k$; $k = 0, N-1$.

Здесь $N_k^{(1)}$ — число вершин многогранника G_k .

Для ограниченного множества G_k $N_k^{(1)} = N_k$.

Вспомогательные $U_\lambda(k)$ -задачи имеют вид:

$$L_\lambda(U_\lambda(k)) = (C(k) - \lambda^{(1)} A(k)) U(k) \rightarrow \max \quad (18)$$

при условиях

$$\bar{A}(k) U(k) \leq \bar{B}(k), \quad (19)$$

$$U(k) \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (20)$$

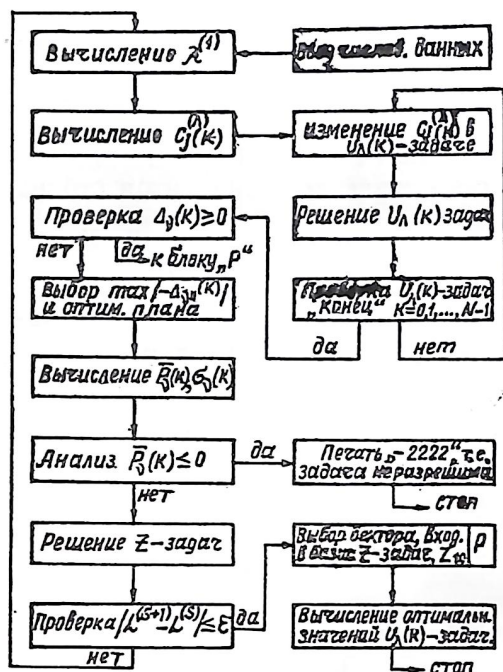


Рис. 2

где $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_m^{(1)})$ — вектор оценок условий Z -задачи относительно исследуемого опорного базиса.

Для решения Z -задачи используется второй алгоритм, а для решения $U_\lambda(k)$ -задачи — первый алгоритм метода последовательного улучшения плана [1]. Решение Z -задачи однозначно определяет решение исходной задачи:

$$U^*(k) = \sum_{v=1}^{N_k} Z_v^*(k) U_v(k),$$

где $Z_v(k)$ ($k = 0, N-1$) — оптимальное решение Z -задачи.

Вспомогательные $U_\lambda(k)$ -задачи порождаются опорными планами Z -задачи и оптимальное значение $L_\lambda^*(U_\lambda(k))$ ($k = 0, N-1$) используется для проверки оптимальности соответствующего опорного плана Z -задачи и обновления базиса этой задачи, если исследуемый план не оптимален. А именно: если $\Delta_{j^*}(k) = \lambda^{(2)}(k) - L_{j^*}^{(k)}(U_{j^*}(k)) = 0$ при всех k ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$), то найденный план Z -задачи оптимален и компонентами вектора $\lambda^{(2)}(k)$ являются относительные оценки условий (11) Z -задачи. Если же при некоторых k ($k = 0, 1, \dots, N-1$)

$\Delta_{j^*}(k) < 0$, то из условия $\Delta_{j^*}(k) = \min_k \Delta_{j^*}(k)$ определяется вектор $\bar{P}_{j^*}(k)$, вводимый в базис и позволяющий улучшить план Z -задачи.

Нами на алгоритмическом языке „АЛГАС“ составлена программа решения задачи КП с помощью вышеизложенного метода на ЭЦВМ „Минск-22“. Программа позволяет решить задачу размеров $(m \times n_k) \leq [(5260)_{10} \cdot k]$ и $(m_k \times n_k) \leq (5260)_{10}$ ячеек при каждом k ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$).

Блок-схема программы представлена на рис. 2.

Задача оптимизации КП производства авиабензина была решена в трех интервалах разбиения месячного периода планирования 1971 г. При этом матрицы $C(k)$, $A(k)$, $\bar{A}(k)$, B , $\bar{B}(k)$ имели соответственно размеры: (1×22) ; (12×22) ; (18×40) ; (12×1) ; (18×1) для каждого момента времени k ($k = 0, 1, 2$).

При решении задачи КП из-за отсутствия данных о коэффициентах затрат на хранение ресурсов в складах соответствующие члены в критерии не были учтены. Анализ полученных результатов показал, что оптимизация КП производства авиабензина позволяет повысить прибыль производства на 2%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1963.
2. Dantzig G. B., Wolfe P. Decomposition algorithm for linear programs Econometrica, v. 29, 1961, № 4.

НИПИ НЕФТЕХИМАВТОМАТ

Поступило 4. V 1973

Э. Э. Абдуллаев, Т. Г. Рзаев, З. А. Гаракезов

Нефт е'малы штеһсалынын ишинин календар
планлашдырылмасынын рижани моделинин гурулмасы
вэ оптималлашдырылмасы

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә нефт е'малы мұәссисәләринин хаммал вә мәһсул еһти-
ятлары анбарларыны нәзәрә алмағла календар (тәғвими) планлашдыр-
манын (КП) рижани модели гурулмушдур. Хүсуси һалда КП-нин ри-
жани моделиндән мұәссисәнин оптимал оператив планлашдырылмасы
мәсәләсинин алынмасы көстәрилмишдир. КП-нин оптимал мәсәләсини
һәлл етмәк үчүн Дансиг-Вулфун декомпозиция үсүлундән истифалә
олунмушдур. Мәсәләнин һәлл үсүлунун алгоритмик „АЛГАС“ ли-
линдә програмы тутулмуш вә бу програма „Минск-22“ ЕНМ-дә
конкрет мәсәлә һәлл олунмушдур. Мәғаләдә програмын блок-схеми
верилмишдир.

A. A. Abdullajev, T. G. Rzaev, Z. A. Karagezov

Mathematical model constructing and calendar planning
ortimization of refinery production operation

SUMMARY

The mathematical model constructing of the refinery production ca-
lendar planning taking into account stock resources and product storages
is considered in this work.

It is pointed out that the optimization problem of the operative pro-
duction planning may be obtained from the calendar planning model in the
particular case. The Danzig Wolf decomposition method is suggested for
the calendar planning optimization problem decision.

The block-diagram of the problem decision algorithm which is pro-
grammed with the „ALGAMS“ language and some results of the spe-
cific example decision made in the Electronic Digital computer „Minsk-
22“ by this program are given in this work.

УДК 519.3:61—50—83

ДЕПОНИРОВАННЫЕ СТАТЬИ

АННОТАЦИЯ

К СТАТЬЕ „ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА В ЗАДАЧАХ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ“

Б. А. ЛИСТЕНГАРТЕН

Методика определения законов оптимального управления электр с приводами с распределенными параметрами основывается на при ведении системы с распределенными параметрами к эквивалентной импульс- ной и дискретизации исходных уравнений.

Для случая, когда обеспечивается максимально возможное пере- мещение исполнительного механизма за определенное время при заданном уровне потерь в якоре двигателя, исследуемый функционал

$$I^*(v) = \sum_{n=0}^{n_1} \left\{ -v[n] + \lambda_0 \left(\frac{v[n+1] - v[n]}{T} + \mu[n] \right)^2 \right\}$$

зависит от функции скорости $v[n]$ при двух значениях аргумента. На основе вариационного метода в задачах исчисления конечных разно- стей получено разностное уравнение, из которого определяется иско- мая функция $v[n]$, а тем самым и закон изменения управляющего воздействия. Рассмотрена также задача оптимального управления асин- хронным двигателем.

Предложенная методика дает возможность установить алгоритм оптимального управления электроприводами с распределенными пара- метрами.

АзНИИЭнергетики им. И. Г. Есьмана

Поступило 20. IV 1973

* Статья депонирована в ВИНТИ (Москва, А-219, ул. Балтийская, 14, отдел справочной информации ВИНТИ). Рег. № 5792—73 от 23. IV 1973 г.

МҮНДЭРИЧАТ

Э. И. Һүсөјнов. ССРИ Елмләр Академијасы вә Азәрбајҹанда физика- техника вә ријазийат елмлэри	3
Э. И. Һүсөјнов, Ф. Г. Магсүдов. Азәрбајҹанда ријазийатын инкишафы	15
Р. Һ. Фәрәчов. Бир синиф гејри-хәтти ардычылыг машыналарынын ана- лизи вә синтез мәсәләләринә даир	26
А. Х. Абрамов, Ч. С. Ағаларов, С. Л. Каплан, Һ. С. Рза- јев а. Автоматлашдырылмыш идарәетмә системләриндә мәлуматларын опти- мал ишләнмәси	33
Э. Э. Шаһбазов. Ғыздырылан чиһазла ишләјән вә хидмәт мүддәти нөвбәнин узунлуғундан асылы олан систем һаггында	39
А. Б. Гаһымов. Етибарсыз хидмәт чиһазы һалында мүхтәлиф харак- теристикаларла әвзәдичи системин тәдгиги	44
Р. А. Мустафајев. Икигәтлы фәргләр схеми илә бәзи гејри-стационар бирфазалы мүтәһәррик сәһрәдли мәсәләләрин һәлли	52
О. Г. Ханмәмәдов. Бир чоһаддымлы ахтарыш-ојун мәсәләси һаггында	57
Ч. С. Ағаларов, Р. З. Мәмәдли. Киришдә тәсадүфи сигналла- рын чыхынтыларынын нәзәрә алмагла стохастик системләрин идентификләш- дирилмәси	65
Ч. М. Чуварлы, Т. Ә. Јусифзәдә. Иткиләр нәзәрә алынмагла пајланмыш параметрли хәтләрин эәнчирвары дөврәләрлә әвзә едилмәси	70
Ш. М. Мүтәллимов. Истилик зәрбәсинин тәсириндән мүһитдә сферик далғанын јајылмасы	75
З. Б. Хәјиров. Еллиптик вә даирәви цилиндрләр арасында өзлү мәје- нин ритмик һәрәкәти	82
М. А. Гулијев, М. Ә. Мусајев, Һ. А. Парфентјев а. Локал кечиричи таваны олан сонлу лајда мәје ахыны һаггында мәсәләнин һәл- линә Гајлјоркин методунун тәбиги	90
С. А. Әләскәрова, М. И. Мустафајев. Мәркәздән кәнарда еллипсшәкилли ојуғу олан консентрик даирәви һәлгә кәсикли брусун бурулмасы.	95
З. Һ. Кәримов, Һ. Һ. Чәлилзәдә, М. А. Садыгов. Рәгс енерҗисинин сәпәләнмәсини нәзәрә алмагла газыма кәмәринин динамикасынын тәдгиги	100
М. К. Әлијев а, Һ. С. Һәсәнов, К. И. Һашымов а, А. Г. Меһтијев. Етанол-ректификатын тәдгигинә кәрә сабит тәзјигдә истилик тутумунун сыңрајышларынын тәјјини	106
Ј. Б. Гәдимов, Р. Г. Чагупов, Т. Б. Гурбанов, Х. А. Му- сајев. Пјезоелектрик чевиричиләрин тезлик тахометрләриндә истифаделунма имканы һаггында	110
А. Ә. Әфәндизәдә, Т. И. Низамов. Конденсатор импульс транс- форматоруна бошалдығы заман баш верән електромагнит просесләри һаггында	113
В. А. Атојан, И. А. Мәмәдов. Тәрәзидә чекмә методу илә јук- сәк температур вә тәзјигдә мәје вә газларын сыхлығыны тәјјин етмәк үчүн гурғу	119
Ј. С. Кәнкәрлински, Л. М. Шапиго, В. Е. Абдуллајев. Катализаторун гранулометрик тәркибинин фотоелектрон анализаторунун сигналы	124
А. А. Әләкпәров. Умумилик вә I, II икитәтлү фәза-заман континуму һаггында	129
Э. Ә. Абдуллајев, Т. Һ. Рзајев, З. Ә. Гаракәзов. Нефг е'малы истеһсалынын ишинин календар планлашдырылмасынын ријазии модели- нин гурулмасы вә оптималлашдырылмасы	134
Сифариш кәзләјән мәғаләләр	142

СОДЕРЖАНИЕ

А. И. Гусейнов. Академия наук СССР и физико-технические и математические науки в Азербайджане	3
А. И. Гусейнов, Ф. Г. Максудов. Развитие математических наук в Азербайджане	15
Р. Г. Фараджев. К анализу и синтезу одного класса нелинейных последовательностей машин	26
А. Х. Абрамов, Ч. С. Агаларов, С. Л. Каплан, У. С. Рзаева. Определение оптимальной последовательности переработки информации в АСУ	33
А. А. Шахбазов. Обслуживание с разогревом и зависимостью времени обслуживания от длины очереди	39
А. Б. Касумов. Исследование дублированной системы с разными характеристиками при ненадежном обслуживающем приборе	44
Р. А. Мустафаев. Двухслойная разностная схема решения некоторых нестационарных однофазных задач с подвижной границей	52
О. К. Ханмамедов. Об одной поисково-игровой многошаговой задаче	57
Ч. С. Агаларов, Р. З. Мамедли. Идентификация стохастических систем с учетом выбросов случайных сигналов на входе	65
Ч. М. Джуварлы, Т. А. Юсифзаде. Замещение линий с распределенными параметрами с учетом потерь цепными схемами	70
Ш. М. Муталлимов. Распространение сферической волны в среде, вызванной тепловым ударом	75
З. Б. Хеиров. Пульсирующее движение вязкой жидкости между эллиптическим и круговым цилиндрами	82
М. А. Гулиев, М. А. Мусаев, Н. А. Парфентьева. Применение метода Галеркина к решению задачи о течении жидкости в конечном пласте с локально-проницаемой кровлей	90
С. А. Алескерова, М. И. Мустафаев. Кручение бруса, сечение которого представляет собой концентрическое кольцо с нецентральной эллиптическим вырезом	95
З. Г. Керимов, Г. Н. Джалилзаде, М. А. Садыхов. Исследование динамики буровой колонны с учетом рассеяния энергий колебаний	100
М. А. Алиева, Н. С. Гасанов, Г. И. Гашимова, А. Г. Мехтиев. Определение скачков изохорной теплоемкости по результатам исследования этанола-ректификата	106
Я. Б. Кадымов, Р. Г. Джагунов, Т. Б. Гурбанов, Х. А. Мусаев. О возможностях применения пьезоэлектрических преобразователей в частотных тахометрах	110
А. А. Эфендизаде, Т. И. Низамов. К вопросу анализа электромагнитного процесса в импульсном трансформаторе при разрядке конденсатора	113
В. А. Атоян, И. А. Мамедов. Установка для определения плотности жидкостей и газов при высоких температурах и давлении методом взвешивания	119
Ю. С. Кенгерлинский, Л. М. Шапиро, В. Э. Абдуллаев. Сигнал фотоэлектрического анализатора гранулометрического катализатора	124
А. А. Алекперов. О всеобщности и двумерности пространственно-временного континуума, I	129
А. А. Абдуллаев, Т. Г. Рзаев, З. А. Карагезов. Построение математической модели и оптимизация календарного планирования работы нефтеперерабатывающих производств	134

Депонированные статьи

Б. А. Листенгартен. Аннотация к статье «Использование вариационного метода в задачах оптимального управления электроприводом с распределенными параметрами»	142
---	-----

Сдано в набор 18/X 1973 г. Подписано к печати 5/V 1974 г. Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бум. лист. 4,50. Печ. лист. 12,33. Уч.-изд. лист. 11,7. ФГ 07108. Заказ 420. Тираж 890. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Государственного комитета Совета Министров Азербайджанской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Баку, Ази Асланова, 80.