

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

Ријазиијјат вə механика

★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Математика и механика

2

1973

„ЕЛМ“ НƏШРИЈЈАТЫ—ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭЛМ“
БАКЫ — БАКУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: А. И. Гусейнов (редактор), Ю. А. Сеидов (зам. редактора), Г. Б. Абдуллаев, М. И. Алиев, Б. А. Азимов, Д. Э. Аллахвердиев, Ю. А. Амензаде, К. Т. Ахмедов, Н. А. Гулиев, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, Л. М. Иманов, Ф. Г. Магсудов, Ю. А. Махмудов, А. Х. Мирзаджанзаде, Р. А. Еганов (ответств. секретарь), Г. Ф. Султанов, З. И. Халилов, Т. А. Эминзаде, А. А. Эфендизаде.

УДК 517.446

А. А. ЭФЕНДИЕВА

О ПОВЕДЕНИИ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ ВОЗРАСТАНИИ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нами исследовано поведение при неограниченном возрастании времени решений смешанной задачи для некоторого класса квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными, корректных по Петровскому и параболических в абстрактном смысле. Однако уравнения указанного класса не являются параболическими ни по Петровскому, ни по Шилову.

Рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \Delta u - \Delta u + q \frac{\partial u}{\partial t} + ru = 0 \quad (1)$$

(q, r —вещественные числа) с граничным условием:

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (2)$$

и начальными условиями:

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t'(0, x) = \psi(x). \quad (3)$$

Символом Δ обозначен m -мерный оператор Лапласа с областью определения $W_{2,0}^2(\Omega)$. Задача рассматривается в цилиндре $D = [0, \infty) \times \Omega$. Ω —произвольная ограниченная односвязная область в K^m , Γ —достаточно гладкая боковая поверхность цилиндра D .

При классическом решении задачи (1)—(3) в D будем понимать такую функцию $u = (t, x) \in W_2^2(\Omega)$, которая имеет непрерывные по t производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ и удовлетворяет уравнению, условиям (2), (3) при каждом фиксированном t почти всюду по x .

Исследование проводится путем применения полученных в [2] результатов для абстрактных задач в банаховом пространстве. Для этого рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A \frac{du}{dt} + Bu = 0 \quad (4)$$

с начальными условиями:

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1; \quad (5)$$

$u(t)$ — искомая вектор-функция со значениями в некотором банаховом пространстве E ; A и B — линейные неограниченные операторы, действующие в E .

Теорема 1. Пусть удовлетворены следующие условия:

1° — A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A) = E$;

2° — оператор BA^{-1} ограничен в E ;

3° — операторы A и B коммутируют;

4° — спектры операторов $-A$ и BA^{-1} лежат вне сектора Σ ,

$$\Sigma: -\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \arg(\lambda + Q) \leq \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \text{где } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad Q > 0,$$

причем $Q \sin 2\alpha \geq \frac{k}{2q}$, $0 < q < 1$;

5° — для любого λ из сектора Σ имеет место оценка

$$\|R(\lambda, -A)\| \leq \frac{M}{d(\lambda, \Gamma)},$$

где через $d(\lambda, \Gamma)$ обозначено расстояние точки λ до границы сектора Σ , M — некоторая константа,

$$k = \|BA^{-1}\|MN, \quad \text{где } N = \sup_{\lambda \in \Sigma} \|R(\lambda, -BA^{-1})\|d(\lambda, \Gamma).$$

Тогда при $u_0, u_1 \in D(A)$ таких, что $\|Au_0\| + \|u_1\| \leq \frac{R}{C}$, существует единственное, определенное на $[0, \infty)$ классическое решение задачи (4), (5), удовлетворяющее оценке

$$\|Au\| + \left\| \frac{du}{dt} \right\| \leq Re^{-\mu t}, \quad (6)$$

где $R > 0$, $\mu > 0$ — некоторые константы.

Для задачи (1) — (3) имеет место

Теорема 2. Если $q > -\mu + \frac{1}{2}$,

$$\min \left\{ (\mu + q)^2 - \mu; \frac{1}{2} (q - \mu) \right\} \leq r < \min \{ 2(\mu + q)^2 - \mu; \mu + 2q \},$$

то для любых $\varphi(x), \psi(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$, таких, что $M\|\varphi\|_{W_{2,0}^1(\Omega)} + q\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{R}{C}$, существует единственное классическое решение задачи (1) — (3), при $t \geq 0$ удовлетворяющее оценке

$$M\|u\|_{W_{2,0}^1(\Omega)} + q\|u\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq Re^{-\nu t},$$

где ν, M, R и C — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Для любого самосопряженного оператора со спектром из промежутка (α, β) , конечного или бесконечного, имеет место следующая оценка

$$\|f(A)\| \leq \sup_{\alpha < \mu < \beta} |f(\mu)|, \quad (7)$$

где

$$f(A) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mu) dE_{\mu}.$$

Пусть в нашем случае $(\alpha, \beta) = (-\infty, -Q) = \Lambda$, где $Q > 0$.

$$R(\lambda, -A) = \int_{\Lambda} \frac{1}{\lambda + \mu} dE_{\mu}.$$

На основании (7) норма резольвенты имеет следующую оценку:

$$\|R(\lambda, -A)\| \leq \sup_{\mu \in -\Lambda} \left| \frac{1}{\lambda + \mu} \right| = \sup_{\mu \in -\Lambda} \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{Re} \lambda + \mu)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2}}.$$

Отсюда при $\operatorname{Re} \lambda \geq -Q$ имеем

$$\sup_{\mu \in -\Lambda} \frac{1}{(\operatorname{Re} \lambda + \mu)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2} = \frac{1}{(\operatorname{Re} \lambda + Q)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2} = \frac{1}{|\lambda + Q|^2}.$$

Если же $\operatorname{Re} \lambda \geq -Q$, то

$$\sup_{\mu \in -\Lambda} \frac{1}{(\operatorname{Re} \lambda + \mu)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2} = \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|^2}.$$

Таким образом,

$$\|R(\lambda, -A)\| \leq \begin{cases} \frac{1}{|\lambda + Q|} & \text{при } \operatorname{Re} \lambda \geq -Q \\ \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|} & \text{при } \operatorname{Re} \lambda < -Q \end{cases}.$$

Объединяя их, получим

$$\|R(\lambda, -A)\| \leq \frac{1}{d(\lambda, \Lambda)} \quad \text{для всех } \lambda \in \Lambda. \quad (8)$$

Из (8) и подавно вытекает оценка

$$\|R(\lambda, -A)\| \leq \frac{1}{d(\lambda, \Gamma)}, \quad \lambda \in \Sigma,$$

где Σ — любой сектор из теоремы 1, а Γ — его граница.

Таким образом, если A и AB^{-1} в теореме 1 будут самосопряженными положительно определенными операторами, то $M = N = 1$.

Задача (1) — (3) сводится к операторному уравнению (4), (5), где A и B самосопряженные положительно определенные операторы в $L_2(\Omega)$ с областями определения $D(A) = D(B) = W_{2,0}^2(\Omega)$, порожденные дифференциальными выражениями

$$Au = -\Delta u + qu, \quad Bu = -\Delta u + ru. \quad (9)$$

Как известно, операторы A и B — положительно определенные, следовательно, спектры их целиком лежат на некотором отрезке вещественной оси.

Пусть $\mu > 0$ наименьший из них. Тогда спектрами операторов $-A$ и $-B$ будут соответственно

$$\sigma(-A) = \{-\mu_i - q\}, \quad \sigma(-B) = \{-\mu_i - r\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Так как

$$BA^{-1} = B[B + (q - r)I]^{-1} = I - (q - r)[B + (q - r)L]^{-1} = I - (q - r)A^{-1},$$

то спектр оператора $-BA^{-1}$

$$\sigma(-BA^{-1}) = \left\{ \frac{q - r}{\mu_i + q} - 1 \right\} = \left\{ -\frac{\mu_i + r}{\mu_i + q} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

1. Пусть $q < r$, тогда для всех $i = 1, 2, \dots$ выполняется

$$\frac{q - r}{\mu_i + q} < 0,$$

а это значит, что спектр оператора $-BA^{-1}$

$$\sigma(-BA^{-1}) = \left\{ \frac{q-r}{\mu_1+q} - 1 \right\} < -1,$$

т. е. лежит в промежутке

$$-\frac{\mu+r}{\mu+q} < \sigma(-BA^{-1}) < -1,$$

откуда

$$\|BA^{-1}\| = \max \left\{ 1, \left| \frac{\mu+r}{\mu+q} \right| \right\} = \frac{\mu+r}{\mu+q}.$$

Из теоремы 1

$$\kappa = \|BA^{-1}\| MN = \frac{\mu+r}{\mu+q}$$

и угол α мы можем взять любым, так как спектры операторов A и B лежат на вещественной оси. Наиболее выгодным для нас будет $\alpha \geq \frac{\pi}{4}$. Теперь покажем, при каких q и r выполняется следующее условие:

$$0 < Q < \min_{\lambda \in \Lambda} \{ \sigma(A), \sigma(BA^{-1}) \}.$$

Рассмотрим два подслучая:

а) пусть $q > -\mu + 1$, тогда $\min_{\lambda \in \Lambda} \{ \sigma(A), \sigma(BA^{-1}) \} = 1$ и должно быть

$$\frac{\kappa}{2} < Q < 1; \text{ в этом случае } r < \mu + 2q;$$

б) пусть $q \leq -\mu + 1$, тогда

$$\min_{\lambda \in \Lambda} \{ \sigma(A), \sigma(BA^{-1}) \} = \mu + q,$$

и должно быть $\frac{\kappa}{2} < Q < \mu + q$. Отсюда $\frac{\kappa}{2} < \mu + q$ и $r < 2(\mu + q)^2 - \mu$.

II. В случае, когда $q \geq 0$, для всех $i = 1, 2, \dots$

$$\frac{q-r}{\mu_1+q} \geq 0,$$

а это значит, что спектр оператора $-BA^{-1}$

$$\sigma(-BA^{-1}) = \left\{ -\frac{\mu_1+r}{\mu_1+q} \right\} \geq -1,$$

т. е. лежит в промежутке

$$-1 \leq \sigma(-BA^{-1}) < -\frac{\mu+r}{\mu+q}.$$

Тогда

$$\|BA^{-1}\| = \max \left\{ 1, \left| \frac{\mu+r}{\mu+q} \right| \right\} = 1.$$

$$\kappa = \|BA^{-1}\| MN = 1, \quad Q < \frac{\kappa}{2} = \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, должно иметь место

$$0 < Q < \min_{\lambda \in \Lambda} \{ \sigma(A), \sigma(BA^{-1}) \}.$$

а) Пусть

$$\frac{\mu+r}{\mu+q} < \mu + q, \text{ откуда } r < (\mu + q)^2 - \mu,$$

тогда

$$\min_{\lambda \in \Lambda} \{ \sigma(A), \sigma(BA^{-1}) \} = \frac{\mu+r}{\mu+q} \text{ и } \frac{1}{2} < Q < \frac{\mu+r}{\mu+q},$$

а следовательно,

$$r > \frac{1}{2}(q - \mu).$$

б) Пусть теперь

$$\mu + q \leq \frac{\mu+r}{\mu+q}, \text{ откуда } r \geq (\mu + q)^2 - \mu;$$

тогда

$$\min_{\lambda \in \Lambda} \{ \sigma(A), \sigma(BA^{-1}) \} = \mu + q$$

и должно быть $\frac{\kappa}{2} < Q < \mu + q$; в этом случае $q > -\mu + \frac{1}{2}$.

Таким образом, налицо теорема 2, если иметь в виду известную (см. [2]) оценку

$$\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} \leq M \|\Delta \varphi\|_{L_2(\Omega)}. \quad (10)$$

Теперь выясним свойства решений на бесконечности смешанной задачи для квазилинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \Delta u - \Delta u + q \frac{\partial u}{\partial t} + r u = f(t, x, u) \quad (11)$$

с граничным условием (2) и начальными условиями (3).

Назовем обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3) обобщенное решение $u(t)$ задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A \frac{du}{dt} + Bu = f(t, u) \quad (12)$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad (13)$$

в банаховом пространстве $L_2(\Omega)$ с операторами (9), область определения которых состоит из всех функций пространства $W_{2,0}^2(\Omega)$, обращающихся на границе Γ в нуль.

Обобщенным решением задачи (12), (13) называется решение уравнения

$$V(t) = e^{-\mu t} V_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} F(s, V(s)) ds, \quad (14)$$

где

$$V(t) = \begin{pmatrix} Au \\ \frac{du}{dt} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ BA^{-1} & A \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} Au_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad F(t, V) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t, u) \end{pmatrix}.$$

Для задачи (12), (13) приведем теорему 1. 6. из [2].

Теорема 3. Пусть

1° — выполняются условия теоремы 1;

2° — а) в области $\{t \geq 0, u \in D(A), \|Au\| \leq R\}$,

где R — некоторая константа, оператор $f(t, u)$ непрерывен по совокупности аргументов и

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq \gamma \|Au_1 - Au_2\|;$$

б) $\|f, 0\| \leq \beta$ при $t \geq 0$.

Тогда, если γ и β достаточно малы, можно указать константы $\delta > 0$ и $\gamma < 0$ и для любого $u_0 \in D(A)$, такого, что

$$\|Au_0\| + \|u_1\| \leq \delta, \quad (15)$$

существует единственное обобщенное решение задачи (12)–(13), соответствующее (15) и удовлетворяющее при $t \geq 0$ оценке

$$\|Au\| + \left\| \frac{du}{dt} \right\| \leq Re^{-\gamma t}.$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 4. Пусть

1⁰—выполняются все условия теоремы 2;
2⁰—а) в области $\{t \geq 0, x \in \Omega, |u| \leq R\}$, где R —некоторая достаточно большая константа, $f(t, x, u)$ непрерывна по совокупности аргументов и

$$|f(t, x, u_1) - f(t, x, u_2)| \leq \gamma |u_1 - u_2|;$$

б) $\|f(t, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \beta$ при $t \geq 0$.

Тогда, если γ и β достаточно малы, то можно указать константы $\delta > 0$, $\gamma < 0$ и для любых $\varphi(x), \psi(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$, таких, что

$$M \|\varphi\|_{W_{2,0}^1(\Omega)} + q \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq \sigma, \quad (16)$$

существует единственное обобщенное решение задачи (II)–(2), (3), соответствующее (16) и удовлетворяющее при $t \geq 0$ оценке

$$M \|u\|_{W_{2,0}^1(\Omega)} + q \|u\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq Re^{-\gamma t},$$

где $M > 0$ и q —некоторые постоянные.

Доказательство. Покажем, что условия теоремы 3 удовлетворены, если удовлетворяются условия теоремы 2. Как было показано, операторы A и B таковы, что удовлетворяют всем условиям теоремы 1, следовательно, условие 1⁰ теоремы 3 справедливо. По условию

$$|f(t, x, u_1) - f(t, x, u_2)| \leq \gamma |u_1 - u_2|.$$

Возведя это неравенство в квадрат и интегрируя по Ω , получим норму пространства $L_2(\Omega)$

$$\|f(t, x, u_1) - f(t, x, u_2)\|_{L_2(\Omega)} \leq \gamma_1 \|u_1 - u_2\|_{W_{2,0}^2(\Omega)}.$$

Исходя из неравенства

$$M \|u\|_{W_{2,0}^1(\Omega)} + q \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|A\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|f(t, x, u_1) - f(t, x, u_2)\|_{L_2(\Omega)} \leq \gamma_2 \|Au_1 - Au_2\|_{L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, при условии 2⁰ теоремы 4 условие 2⁰ теоремы 3 удовлетворяется. Следовательно, при условиях теоремы 4 удовлетворяются все условия теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эфендиева А. А. Дисс. ИММ АН Азерб. ССР, 1968.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. V, М., 1959.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 19. VII 1971

А. А. Эфендиева

Бир хусуси синиф квазихатти дифференциал тэнликләр үчүн
гојулмуш гарышыг мәсәлә һәлләринин заман гејри-мәһдуд
артдыгда тәбиәтинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә бирчинсли вә сағ тәрәфи гејри-хатти олан бир синиф хусуси төрәмәли дифференциал, Петровски мә'нада коррект вә мүчәр-рәд мә'нада параболик олан тәнликләр үчүн гојулмуш гарышыг мә-сәләнин һәлләринин експотенсиал азалмасы шәрти мүәјјән олунмушдур.

A. A. EFENDIEVA

On the behaviour of a mixed problem solution on the infinity for
one class of differential equations of parabolic type

SUMMARY

In the given paper exponential decrease of the mixed problem solutions on the infinity for one class of quasi-linear differential equations of parabolic type in the abstract sense is obtained.

УДК 517.446

Г. Н. АГАЕВ, Р. И. АЛИХАНОВА

СИНГУЛЯРНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Сингулярное возмущение линейных эллиптических и параболических краевых задач исследовано М. И. Вишиком и Л. А. Люстерником [1], Д. Ние [2] и др. Нелинейные эллиптические и параболические вариационные и краевые задачи изучены Вил ап Топ [3]. В работах Г. Н. Агаева [4] рассмотрены сингулярные возмущения смешанных задач для квазилинейных уравнений при различных условиях монотонности пространственного оператора.

В данной статье исследуется сингулярное возмущение краевой задачи для эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами.

1. Пусть имеем ограниченную составную область G n -мерного евклидова пространства E_n с границей Γ . Область G состоит из двух областей G_1 и G_2 , разделенных $n-1$ -мерной поверхностью γ , гомеоморфной сферы, не имеющей общих точек с Γ (γ —граница G_1); Γ —кусочно-гладкая поверхность, γ —непрерывно дифференцируемая. Случай двух областей рассматривается для простоты формулировок.

Рассмотрим прямую сумму соболевских пространств

$$W_p^{(m)}(G_1) \dot{+} W_p^{(m)}(G_2) = W_p^{(m)}(G).$$

Пространство $W_p^{(m)}(G)$ получено замыканием в норме

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G |D^\alpha u|^p dx$$

множества функций, определенных в $\bar{G}$ и гладких в каждом из G_i ; $i = 1, 2$; $p \geq 2$. Всякую функцию $u \in W_p^{(m)}(G)$ можно представить в виде $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, где

$$u_i(x) = \begin{cases} u(x), & x \in G_i, \\ 0, & x \in G/\bar{G}_i, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

$W_q^{(-m)}(G)$ —пространство линейных функционалов над $W_p^{(m)}(G)$ с обычной нормой; (f, g) —значение функционала $f \in W_q^{(-m)}(G)$ в точке $g \in W_p^{(m)}(G)$. В частности, $(f, g) = \int_G f \cdot \bar{g} dx$ при $f \in L_q(G)$, $g \in L_p(G)$.

$W_p^{(m)}(G)$ —пространство гладких функций $u \in W_p^{(m)}(G)$, удовлетворяющих условию $[L^k u]_\Gamma = D^k u_1(x) - D^k u_2(x) = 0$, $x \in \gamma$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$,

замкнутое в норме $W_p^{(m)}(G)$ $W_p^{(m)}(G)$ —пространство функций $u \in W_p^{(m)}(G)$, удовлетворяющих нулевым граничным условиям.

В статье используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \int_G u \bar{v} dx &= (u, v); \\ \int_\Gamma \varphi \bar{v} dx &= (\varphi, v)_\Gamma; \\ \int_\Gamma \psi_1 \bar{v}_1 dx - \int_\Gamma \psi_2 \bar{v}_2 dx &= [\psi, v]_\Gamma. \end{aligned}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$A_s^i u = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_s} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{s\alpha\beta}^i(x, u, \dots, D^{m_s-1} u) D^\beta u), \quad (1)$$

$$u \in \tilde{W}^{(m_s)}(G_i), \quad i = 1, 2; \quad s = 1, 2.$$

Здесь $D_j = \partial/\partial x_j$; $j = 1, 2, \dots, n$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n); \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad |\beta| = \sum_{j=1}^n \beta_j; \quad x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Коэффициенты $a_{s\alpha\beta}^i(x, u, \dots, D^{m_s-1} u)$ удовлетворяют условиям Каратеодори в G_i . Кроме того, в G_i они имеют рост

$$|a_{s\alpha\beta}^i(x, u, \dots, D^{m_s-1} u)| \leq M_s^i \left\{ 1 + \sum_{|\alpha| \leq m_s-1} |D^\alpha u|^{p-2} \right\}, \quad (2)$$

$i = 1, 2$; $s = 1, 2$; $p \geq 2$; M_s^i —положительные постоянные.

Пусть ε —малый положительный параметр. Двум нелинейным дифференциальным операторам вида (1) с $m_2 > m_1$ мы ставим в соответствие нелинейный дифференциальный оператор вида

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^i u &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{2\alpha\beta}^i(\varepsilon, \varepsilon u, \dots, \varepsilon D^{m_2-1} u) \varepsilon D^\beta u) + \\ &+ \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{1\alpha\beta}^i(x, u, \dots, D^{m_1-1} u) D^\beta u). \end{aligned} \quad (3)$$

$$u \in W_p^{(m_2)}(G).$$

Рассмотрим уравнения

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{1\alpha\beta}^i(x, u, \dots, D^{m_1-1} u) D^\beta u) = f_i(x) \quad (4)$$

$$i = 1, 2$$

при следующих условиях:

$$\begin{aligned} D^\omega u|_\Gamma &= \varphi_\omega(x'), \quad x' \in \Gamma, \quad |\omega| \leq m_1, \\ \left[\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (-1)^{|\alpha|+|\beta|-1} D^{\alpha-\beta} (a_{1\alpha\beta}(x, u, \dots, D^{m_1-1} u) D^\beta u) \nu_\kappa \right]_\Gamma &= \psi_\kappa(x''), \end{aligned} \quad (5)$$

$$x'' \in \gamma, \quad |\kappa| \leq m_1,$$

$$[D^\omega u]_\Gamma = 0, \quad |\omega| \leq m_1, \quad (6)$$

где ν_κ —компоненты внешней относительно G_1 (G_2) нормали к γ (Γ). Здесь $f \in \tilde{W}_q^{(-m_1)}(G)$, причем условия (5), (6) понимаются в слабом смысле.

Определение. Уравнение (4) называется *сильноэллиптическим*, если для любых $u, \tau \in W_p^{(m)}(G)$ имеет место

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (a_{2\alpha\beta}^1(x, u, \dots, D^{m_1-1} u) D^\beta u -$$

$$- \bar{a}_{1\alpha\beta}^1(x, v, \dots, D^{m_1-1}v) v, D^\alpha(u-v)) \geq C_1 \|u-v\|_{m,p}^p, \quad (7)$$

где C_1 — некоторая положительная постоянная.

В соответствии с уравнением (4) рассмотрим форму

$$B_1[u; u, u] \equiv \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (a_{1\alpha\beta}^1(x, u, \dots, D^{m_1-1}u) D^\beta u, D^\alpha u) \quad (8)$$

при любых $u, v \in \widetilde{W}_p^{(m_1)}(G)$.

Определение. Уравнение (4) называется эллиптическим, если выполняется неравенство

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (a_{1\alpha\beta}^1(x, u, \dots, D^{m_1-1}u) D^\beta u, D^\alpha u) \geq C_2 \|u\|_{m,p}^p - C_3, \quad (9)$$

где $C_2, C_3 > 0$ — постоянные, не зависящие от u .

Под слабым решением задачи (4) — (6) будем понимать любую функцию $u \in \widetilde{W}_p^{(m_1)}(G)$, удовлетворяющую соотношению

$$B_1[u; u, v] = (f, v) \quad (10)$$

для любого $v \in \widetilde{W}_p^{(m_1)}(G)$.

Теорема 1. Пусть $f \in \widetilde{W}_q^{(m_1)}(G)$. Если коэффициенты в уравнении (4) удовлетворяют условиям Каратеодори и (2) и выполняются соотношения (9), то существует слабое решение $u \in \widetilde{W}_p^{(m_1)}(G)$ задачи (4) — (6) и это решение можно получить как слабый предел некоторой последовательности галеркинских приближений.

При выполнении условия (7) решение единственно. Далее рассмотрим задачу для возмущенного уравнения:

$$\varepsilon \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{2\alpha\beta}^1(x, \varepsilon u_\varepsilon, \dots, \varepsilon D^{m_2-1} u_\varepsilon) D^\beta u_\varepsilon) + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{1\alpha\beta}^1(x, u_\varepsilon, \dots, D^{m_1-1} u_\varepsilon) D^\beta u_\varepsilon) = f_\varepsilon(x), \quad (11)$$

$$\left[\varepsilon \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_2} (-1)^{|\alpha| + \kappa_1 - 1} D^{\alpha - \kappa_1} (a_{2\alpha\beta}^1(x, u_\varepsilon, \dots, D^{m_2-1} u_\varepsilon) D^\beta u_\varepsilon) \nu_{\kappa_1} + \right. \quad (12)$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (-1)^{|\alpha| + \kappa_1 - 1} D^{\alpha - \kappa_1} (a_{1\alpha\beta}^1(x, u_\varepsilon, \dots, D^{m_1-1} u_\varepsilon) D^\beta u_\varepsilon) \nu_{\kappa_1} \right]_\Gamma =$$

$$= \psi_{\varepsilon \kappa_1}(x''), \quad \kappa_1 \leq m_1, \quad x'' \in \Gamma,$$

$$\left[\varepsilon \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_2} (-1)^{|\alpha| + \kappa_1 - 1} D^{\alpha - \kappa_1} (a_{2\alpha\beta}^1(x, \varepsilon u_\varepsilon, \dots, \varepsilon D^{m_2-1} u_\varepsilon) \times \right. \quad (13)$$

$$\times D^\beta u_\varepsilon) \nu_{\kappa_1} \Big]_\Gamma = \psi_{\varepsilon \kappa_1}(x''), \quad m_1 < \kappa_1 \leq m_2, \quad x'' \in \Gamma,$$

$$[D^\omega u_\varepsilon]_\Gamma = 0, \quad |\omega| \leq m_2,$$

причем граничное условие и условие сопряжения выполняются в слабом смысле.

Рассмотрим форму

$$B_2[u; u, v] \equiv \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_2} (a_{2\alpha\beta}^1(x, u, \dots, D^{m_2-1}u) D^\beta u, D^\alpha v)$$

при любых $u, v \in \widetilde{W}_p^{(m_2)}(G)$.

Пусть выполняется условие:

$$B_2(u; u, u) \geq C_2 \|u\|_{m,p}^p - K_2, \quad (14)$$

где $C_2, K_2 > 0$ — постоянные, не зависящие от u .

Под слабым решением задачи (11) — (13) будем понимать любую функцию $u_\varepsilon \in \widetilde{W}_p^{(m_2)}(G)$, удовлетворяющую соотношению

$$B_2[\varepsilon u_\varepsilon; \varepsilon u_\varepsilon, v] + B_1[u_\varepsilon; u_\varepsilon, v] = (f_\varepsilon, v) \quad (15)$$

для любого $v \in \widetilde{W}_p^{(m_2)}(G)$.

Имеет место

Теорема II. Пусть $f_\varepsilon \in \widetilde{W}_q^{(-m_2)}(G)$. Если коэффициенты в уравнении (12) удовлетворяют условиям Каратеодори и (2) и выполняются соотношения (9) и (14), то существует слабое решение $u_\varepsilon \in \widetilde{W}_p^{(m_2)}(G)$ задачи (11) — (23) и это решение можно получить как слабый предел некоторой последовательности галеркинских приближений.

При выполнении условия (7) и условия

$$B_2[u; u, u - v] - B_2(v; v, u - v) \geq C' \|u - v\|_{m,p}^p$$

слабое решение задачи (11) — (13) единственно.

Имеет место

Теорема III. Пусть u_0 — слабое решение задачи (4) — (6), u_ε — слабое решение задачи (11) — (13). Тогда, если $f_\varepsilon \rightarrow f$ слабо в $\widetilde{W}_q^{(-m_1)}(G)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ в $\widetilde{W}_p^{(m_1)}(G)$, $\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow 0$ в $\widetilde{W}_p^{(m_2)}(G)$.

Действительно, мы имеем

$$B_2[\varepsilon u_\varepsilon; \varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon] + B_1[u_\varepsilon; u_\varepsilon, u_\varepsilon] = (f_\varepsilon, u_\varepsilon). \quad (16)$$

Оценивая левую часть соотношения (16) снизу, с использованием неравенства (9) и (14), а правую часть сверху, применяя обобщенное неравенство Шварца, получим

$$\|u_\varepsilon\|_{m,p} \leq M,$$

где M — постоянная, не зависящая от ε .

Аналогично имеем

$$\varepsilon^p \|u_\varepsilon\|_{m_2,p}^p \leq M_1,$$

где M_1 — постоянная, не зависящая от ε .

Так как любой шар в рефлексивном банаховом пространстве слабо-компактен, то

$$u_\varepsilon \rightarrow z \text{ слабо в } \widetilde{W}_p^{(m_1)}(G) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ слабо в } \widetilde{W}_p^{(m_2)}(G) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Докажем теперь, что $z = u_0$.

Ясно, что $z \in \widetilde{W}_p^{(m_1)}(G)$.

Рассмотрим

$$B_2[\varepsilon u_\varepsilon; \varepsilon u_\varepsilon, w] + B_1[u_\varepsilon; u_\varepsilon, w]$$

для всех $w \in \widetilde{W}_p^{(m_1)}(G)$.

Так как $u_\varepsilon \rightarrow z$ слабо в $\widetilde{W}_p^{(m_1)}(G)$, коэффициенты $a_{1\alpha\beta}^1(x, u_\varepsilon, \dots, D^{m_1-1} u_\varepsilon)$ в G_1 удовлетворяют условиям Каратеодори и (2), то в $B_1[u_\varepsilon; u_\varepsilon, w]$ мы можем перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и будем иметь

$$B_1[u_\varepsilon; u_\varepsilon, w] \rightarrow B_1[z; z, w] \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Аналогично получаем

$$B_2[\varepsilon u_\varepsilon; \varepsilon u_\varepsilon, w] \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$B_1[z; z, w] = (f, w)$$

для всех $w \in \widetilde{W}_p^{(m_1)}(G)$.

Из единственности решения задачи (4) — (6) следует, что $z = u_0$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. УМН, 12, 1957, вып. 5 (77).
2. Huet D. Ann. Inst. Fourier Grenoble, 10, 1960.
3. Bui An Ton. Cond. j. Math. Научный отчет 1938 г.
4. Агаев Г. Н. Некоторые результаты о разрешимости нелинейных операторных уравнений в абстрактных пространствах. Научный отчет 1968 г.
5. Вишик М. И. Тр. Моск. о-ва, т. 12, 1963.
6. Соболев С. М. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.
7. Lions J. L., Lerau J. Bull. Soc. Math. France, 93, 1965.
8. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 15. X 1971

Н. Н. Агаев, Р. И. Элиханов

Јуксак тәртибли кәсилән әмсаллы квазихәтти элементин
тәнлик үчүн сәрһәд мәсәләсинин сингулјар һәјәчанланмасы

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә С. Л. Соболев фәзаларында Галјоркин үсулу илә јуксак тәртибли кәсилән әмсаллы квазихәтти элементин тәнликләр үчүн һәјәчанланмамыш сәрһәд мәсәләләринин һәллинин варлыг вә јеканәлији арашдырылмышдыр. Ајдынлашдырылмышдыр ки, кичик параметр сыфра јакынлашдыгда һәјәчанланан мәсәләнин һәлли һәјәчанланмајан мәсәләнин һәллине јакынлашыр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ

Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1973, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Серия физико-технических и математических наук, 1973, № 2

УДК 517. 512

А. С. МАХМУДОВ и Р. Р. АХУНДОВ

О ПОЧТИ-ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

(Первое сообщение)

Пусть H — пространство Гильберта и $\{l_n\}$ — бесконечная система элементов этого пространства. Положим $(l_m, l_n) = a_{m,n}$ при $m \neq n$ и $(l_n, l_n) = l_n^2$.

Определение¹. Система $\{l_n\}$ называется почти-ортогональной, если сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{-2} \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n^2 |a_{m,n}|^2.$$

В данной статье показано, что для почти-ортогональных систем в пространстве H справедливы теоремы, аналогичные неравенству Бесселя, теореме Рисса — Фишера и теореме С. Б. Стечкина об абсолютной сходимости ортогональных рядов в пространстве $L^2(a, b)$. Доказываются следующие леммы:

Лемма 1. Пусть $s \geq 1$, $k \geq s$, $\gamma_{m,n} = \gamma_{n,m}$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$) и $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ — любые последовательности комплексных чисел. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{m=s}^k \alpha_m \cdot \sum_{n=s}^m \beta_n \cdot \gamma_{m,n} = \sum_{m=s}^k \beta_m \cdot \sum_{n=m}^k \alpha_n \cdot \gamma_{m,n}. \quad (1)$$

Доказательство. Равенство (1) доказывается методом математической индукции. Очевидно, что оно справедливо при $k = s$. Пусть равенство (1) верно для некоторого значения $k \geq s + 1$. Покажем, что оно имеет место и для $k + 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{m=s}^{k+1} \alpha_m \cdot \sum_{n=s}^m \beta_n \cdot \gamma_{m,n} &= \sum_{m=s}^k \alpha_m \cdot \sum_{n=s}^m \beta_n \cdot \gamma_{m,n} + \\ &+ \alpha_{k+1} \sum_{n=s}^{k+1} \beta_n \cdot \gamma_{k+1,n} = \sum_{m=s}^k \beta_m \cdot \sum_{n=m}^k \alpha_n \cdot \gamma_{m,n} + \sum_{m=s}^k \beta_m \cdot \gamma_{m,k+1} \cdot \alpha_{k+1} + \\ &+ \alpha_{k+1} \cdot \beta_{k+1} \cdot \gamma_{k+1,k+1} = \sum_{m=s}^{k+1} \beta_m \cdot \sum_{n=m}^{k+1} \alpha_n \gamma_{m,n}, \end{aligned}$$

¹ Это определение аналогично определению Беллмана для почти-ортогональных систем в пространстве $L^2(a, b)$ [1].

т. е.

$$\sum_{m=s}^{k+1} \alpha_m \cdot \sum_{n=s}^m \beta_n \cdot \gamma_{m,n} = \sum_{m=s}^{k+1} \beta_m \sum_{n=m}^{k+1} \alpha_n \cdot \gamma_{m,n}. \quad (1)$$

Лемма 1 доказана. Из этой леммы имеем

Следствие. Если $s \geq 1$, $k \geq s+1$ и $\beta_{m,n} = \beta_{n,m}$ при $m \neq n$, то справедливо равенство

$$\sum_{m=s+1}^k \alpha_m \sum_{n=s}^{m-1} \beta_n \cdot \beta_{m,n} = \sum_{m=s}^{k-1} \beta_m \sum_{n=m+1}^k \alpha_n \cdot \beta_{m,n}. \quad (2)$$

Доказательство. Полагая $\gamma_{m,n} = \beta_{m,n}$ при $m \neq n$, $\gamma_{n,n} = 0$ ($n, m = 1, 2, 3, \dots$), из леммы 1 имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_s \cdot \beta_s \cdot \gamma_{s,s} + \sum_{m=s+1}^k \alpha_m \left(\sum_{n=s}^{m-1} \beta_n \cdot \beta_{m,n} + \beta_m \cdot \gamma_{m,m} \right) = \\ = \beta_k \cdot \alpha_k \cdot \gamma_{k,k} + \sum_{m=s}^{k-1} \beta_m \left(\sum_{n=m+1}^k \alpha_n \cdot \beta_{m,n} + \alpha_m \cdot \gamma_{m,m} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{m=s+1}^k \alpha_m \cdot \sum_{n=s}^{m-1} \beta_n \cdot \beta_{m,n} = \sum_{m=s}^{k-1} \beta_m \cdot \sum_{n=m+1}^k \alpha_n \cdot \beta_{m,n}.$$

Равенство (2) доказано. В дальнейшем положим

$$\alpha = 1 + 2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{-2} \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n^{-2} |a_{m,n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 2. Пусть $s \geq 1$, $k \geq s$, $\{l_n\}$ — почти-ортогональная система элементов пространства H и $\{a_n\}$ — последовательность комплексных чисел. Тогда справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{n=s}^k \lambda_n^{-1} a_n l_n \right\|^2 \leq \alpha \cdot \sum_{n=s}^k |a_n|^2. \quad (3)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=s}^k \lambda_n^{-1} a_n l_n \right\|^2 &= \left(\sum_{m=s}^k \lambda_m^{-1} \cdot a_m \cdot l_m, \sum_{n=s}^k \lambda_n^{-1} a_n l_n \right) = \\ &= \sum_{m=s}^k \alpha_m \cdot \lambda_m^{-1} \cdot \sum_{n=s}^k \bar{\alpha}_n \cdot \lambda_n^{-1} \cdot (l_m, l_n) \leq \sum_{m=s}^k |a_m|^2 + \\ &+ \sum_{m=s+1}^k |a_m| \cdot \lambda_m^{-1} \cdot \sum_{n=s}^{m-1} |\alpha_n| \cdot \lambda_n^{-1} \cdot |a_{m,n}| + \\ &+ \sum_{m=s}^{k-1} |a_m| \cdot \lambda_m^{-1} \cdot \sum_{n=m+1}^k |\alpha_n| \cdot \lambda_n^{-1} |a_{m,n}|, \end{aligned}$$

откуда в силу следствия леммы 1 получаем

$$\left\| \sum_{n=s}^k \lambda_n^{-1} a_n l_n \right\|^2 \leq \sum_{n=s}^k |a_n|^2 + 2 \sum_{m=s}^{k-1} \lambda_m^{-1} |a_m| \cdot \sum_{n=m+1}^k \lambda_n^{-1} |a_n| \cdot |a_{m,n}|.$$

Применяя неравенство Шварца, будем иметь

$$\left\| \sum_{n=s}^k \lambda_n^{-1} a_n l_n \right\|^2 \leq \sum_{n=s}^k |a_n|^2 +$$

где

$$D(\sigma) = (a + \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)^{1 + \left[\frac{p(m-1)+n}{2} \right]};$$

$a > 0$ достаточно большое число. Пусть Ω_{jq_j} есть n -мерный круг с центром в стационарной точке σ^{jq_j} достаточно малого радиуса, $\Omega_{j_1 \dots j_k}$ n -мерная область (малая окрестность $S_{j_1 \dots j_k}$), содержащая поверхность $S_{j_1 \dots j_k}$, Ω_R есть n -мерный круг радиуса R (R — достаточно большое число) с центром в начале координат, а Ω_{R1} — внешность круга Ω_R . Положим

$$\Omega_R = \bigcup_{j,q_j} \Omega_{jq_j} \cup \bigcup_{j_1 \dots j_k} \Omega_{j_1 \dots j_k} = \Omega_{R2}.$$

Напишем разложение единицы:

$$1 = \sum \varphi_{jq_j} + \sum \varphi_{j_1 \dots j_k} + \varphi_{R1} + \varphi_{R2}; \quad (10)$$

здесь $\varphi_q \in C_0^\infty(\Omega_q)$, а $\varphi_{R1}(\sigma)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $|\sigma| \leq R$. Используя (10), представим $G_0(x, t)$ в виде

$$G_0(x, t) = \sum G_{jq_j}(x, t) + \sum G_{j_1 \dots j_k}(x, t) + G_{R1}(x, t) + G_{R2}(x, t), \quad (11)$$

где

$$G_q(x, t) = \int_{\Omega_q} \varphi_q(\sigma) D^{-1}(\sigma) \sum_{j=1}^m c_j(\sigma) \exp [i(t, j(\sigma) - (x, \sigma))] d\sigma.$$

$$q = jq_j; j_1 \dots j_k; R1; R2$$

Рассмотрим каждое слагаемое из (11) в отдельности. Так как при $|\sigma| \geq R$ $\lambda_j(\sigma) \neq \lambda_\nu(\sigma)$ ($j \neq \nu$), то

$$G_{R1}(x, t) = \sum_{j=1}^m \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{R < |\sigma| < R+r} f_{Rj}(x, \sigma) \exp(it \lambda_j(\sigma)) d\sigma = \quad (12)$$

$$= \sum_{j=1}^m \lim_{r \rightarrow +\infty} I_{Rj}(x, t, r),$$

где

$$f_{Rj}(x, \sigma) = D^{-1}(\sigma) c_j(\sigma) \varphi_{R1}(\sigma) \exp(i(x, \sigma)).$$

Имеет место тождество

$$\begin{aligned} f_{Rj}(x, \sigma) \exp(it \lambda_j(\sigma)) &\equiv (it)^{-1} \left\{ \operatorname{div} \left[\frac{f_{Rj}(x, \sigma) \nabla \lambda_j(\sigma)}{|\nabla \lambda_j(\sigma)|^2} \exp(it \lambda_j(\sigma)) \right] - \right. \\ &\left. - \exp(it \lambda_j(\sigma)) \operatorname{div} \left(\frac{f_{Rj}(x, \sigma) \nabla \lambda_j(\sigma)}{|\nabla \lambda_j(\sigma)|^2} \right) \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Применяя к (14) формулу Гаусса — Остроградского и учитывая, что $\varphi_{R1}(\sigma) = 0$ при $|\sigma| \leq R$ вместо со всеми производными, получаем

$$\begin{aligned} I_{Rj}(x, t) &= (it)^{-1} \left[\int_{|\sigma|=R+r} \frac{f_{Rj}(x, \sigma) \frac{\partial \lambda_j(\sigma)}{\partial n}}{|\nabla \lambda_j(\sigma)|^2} \exp(it \lambda_j(\sigma)) d\Gamma - \right. \\ &\left. - \int_{R < |\sigma| < R+r} \exp(it \lambda_j(\sigma)) \operatorname{div} \left(\frac{f_{Rj}(x, \sigma) \nabla \lambda_j(\sigma)}{|\nabla \lambda_j(\sigma)|^2} \right) d\sigma \right] \quad (14) \end{aligned}$$

Далее, применяя формулу (13) к правой части (14) последовательно $N-1$ раз, учитывая хорошее убывание подынтегральных функций и

устремив r к бесконечности, получаем

$$I_{Rj}(x, t) = (-it)^{-N} \int_{|\sigma| < R} \exp(it\lambda_j(\sigma)) \operatorname{div} \frac{h_{NRj}(x, \sigma) \nabla \lambda_j(\sigma)}{|\nabla \lambda_j(\sigma)|^2} d\sigma, \quad (15)$$

где

$$h_{IRj}(x, \sigma) = \operatorname{div} \frac{f_{Rj}(x, \sigma) \nabla \lambda_j(\sigma)}{|\nabla \lambda_j(\sigma)|^2}, \quad h_{NRj}(x, \sigma) = \operatorname{div} \frac{h_{N-IRj}(x, \sigma) \nabla \lambda_j(\sigma)}{|\nabla \lambda_j(\sigma)|^2}.$$

Полагая $N = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, из (12) и (15) получаем

$$G_{R1}(x, t) = O\left(t^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right) \quad (16)$$

равномерно по x в каждом компакте.

Аналогичным образом можно доказать, что при $t \rightarrow +\infty$

$$G_{R2}(x, t) = O\left(t^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right) \quad (17)$$

равномерно по x в каждом компакте. Так как в силу условия 4 стационарные точки σ^{jqj} не находятся на поверхностях $S_{j_1 \dots j_k}$, то, применяя к j -му слагаемому в $G_{jqj}(x, t)$ результаты работы [3], а к остальным слагаемым — формулу (16), при $N = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ и $t \rightarrow +\infty$ получим

$$G_{jqj}(x, t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{2}} \sum_{qj} |F_{jqj}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[i(t\lambda_j(\sigma^{jqj}) - (x, \sigma^{jqj}) + \frac{\pi}{4} \delta_{jqj}) \right] c_j(\sigma^{jqj}) D^{-1}(\sigma^{jqj}) + O\left(t^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right) \quad (18)$$

равномерно по x в каждом компакте.

Можно также показать, что при $t \rightarrow +\infty$

$$G_{j_1 \dots j_k}(x, t) = O\left(t^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right) \quad (19)$$

равномерно по x в каждом компакте. Действительно, разобьем область $\Omega_{j_1 \dots j_k}$ на сумму областей $\Omega_{j_1 \dots j_k}^I$ так, чтобы $S_{j_1 \dots j_k}^I \subset \Omega_{j_1 \dots j_k}^I$.

С помощью разложения

$$\varphi_{j_1 \dots j_k}(\sigma) = \sum_I \varphi_{j_1 \dots j_k}^I(\sigma)$$

представим

$$G_{j_1 \dots j_k}(x, t) = \sum_I G_{j_1 \dots j_k}^I(x, t).$$

Используя аналитичность суммы подынтегрального выражения в $G_{j_1 \dots j_k}^I(x, t)$ и условие 4, выходя по переменному σ , в комплексную плоскость в той части $\Omega_{j_1 \dots j_k}^I$, где $\varphi_{j_1 \dots j_k}^I(\sigma) \equiv 1$, интегрируя по s , по частям $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ раз каждый член суммы, затем суммируя по I при $t \rightarrow +\infty$, получаем (19).

Формулы (17)–(19) имеют место также и для $\frac{\partial^k G(x, t)}{\partial t^k}$ ($1 \leq k \leq$

$\leq m-1$) — с той лишь разницей, что выражение под знаком суммы в (19) — надо умножить на $i^k \lambda_j^k(\sigma^{jqj})$. Из вышесказанного и формулы (6) следует доказательство теоремы.

Теорема 2. Если $\lambda_j(\sigma)$ не имеют стационарных точек, выполнены условия 1, 2, 4, а $u_k(x)$ — финитные функции, дифференцируемые по переменным $x_1, \dots, x_n$ до порядка $2p(m-1)+n+2$ включительно, то при $t \rightarrow +\infty$

$$u(x, t) = O(t^{-N})$$

равномерно по x в каждом компакте, где $N > 0$ — любое целое число. Доказательство теоремы 2 следует из доказательства теоремы 1.

Замечание. В работе [4] показана, что решение задачи Коши для системы (3) получается применением некоторого линейного дифференциального оператора $D\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ с постоянными коэффициентами

к решению задачи Коши для уравнения (1), имеющего те же характеристические корни, что и система (3). Поэтому при условиях теоремы 1 и теоремы 2 их утверждения остаются в силе и для решения задачи Коши (3)–(4), лишь от начальных данных требуется больше гладкости.

5. Примеры:

$$1. \quad \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} + i \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + 1 \right) \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) u(x_1, x_2, t) = 0 \quad (20)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u(x_1, x_2, 0)}{\partial t} = u_1(x_1, x_2).$$

Характеристическими корнями уравнения (20) будет

$$\lambda_1^*(\sigma) = i(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2 - 1), \quad \lambda_2^*(\sigma) = i\sigma_1 \sigma_2.$$

Выполнены условия 1–4.

$$2. \quad \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} - \left(2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + i \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sigma i \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 1 \right) \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} + \left(i \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 3i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1^3} - 5 \frac{\partial}{\partial x_2} + 3i \frac{\partial}{\partial x_1} - 1 \right) u(x_1, x_2, t) = 0 \quad (21)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u(x_1, x_2, 0)}{\partial t} = u_1(x_1, x_2)$$

Характеристическими корнями уравнения (21) будут

$$\lambda_1^*(\sigma) = i(\sigma_1^3 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 3\sigma_1), \quad \lambda_2^*(\sigma) = i(\sigma_1^3 + 5\sigma_2^2 + 3\sigma_1 - 1).$$

Выполнены условия 1, 2, 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Искендеров Б. А. Вестн. МГУ, сер. матем. и мех., 1966, № 9.
2. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, вып. 3. М., Физматгиз, 1958.
3. Федорук М. В. Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 2, № 1, 1962.
4. Борок В. М. ДАН СССР, т. 114, 1957, № 4.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 3. IV 1972

Б. А. Искендеров

Чохөлчүлү фэзада Петровскијә көрә коррект тәнликләр
үчүн Коши мәсәләсинин $t \rightarrow +\infty$ олдугда тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1) вә (3) тәнликләринин характеристик көкләри мүй-
јән шәртләри өдәдиктә, (1)—(2) вә (3)—(4) Коши мәсәләләринин һәлли
 $t \rightarrow +\infty$ олдугда тәдгиг едилмиш вә оларын азалма сүр'әти кәстәрил-
мишдир.

В. А. Iskenderov

The behaviour of the solution of the Cauchy problem
when $t \rightarrow +\infty$ for equations correct in the sence of Petrovsky
in multidimensional space

SUMMARY

In this paper the asymptotic behavior of the solution of the Cauchy
problem for equations and systems of partial differential equations with
constant coefficients is studied. It is proved that when $t \rightarrow +\infty$ solution
of the Cauchy problem (1)—(2) and (3)—(4) decreases in the degree
way if initial data and characteristic roots of equations (1) and systems (3)
satisfy certain conditions.

АЗӘРБАЙҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1973, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1973, № 2

УДК 517.948:513.88

С. Я. ЯКУБОВ

КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Проблеме корректности задачи Коши для дифференциальных
уравнений с линейными неограниченными операторными коэффици-
ентами (эволюционные уравнения) посвящено множество работ, на-
шедших свое отражение в книге С. Г. Крейна [1]. В монографии
изучена также корректность краевых задач для уравнения второго
порядка. Как С. Г. Крейном, так и Г. И. Лаптевым [25], В. А. Тре-
ногиным [3] краевые задачи исследовались лишь для уравнения вида
 $u''(t) + A(t)u(t) = f(t)$.

Нами в данной статье рассматривается корректность краевой за-
дачи для линейных эволюционных уравнений второго порядка

$$L(u)A = u''(t) + \alpha_1 A u'(t) + \alpha_2 A^2 u(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

в банаховом пространстве E , где α_1, α_2 — комплексные числа, A , вообще
говоря, неограниченный оператор в E .

Введем в рассмотрение систему краевых условий вида

$$\begin{cases} L_1(u) = \alpha_{11} u(0) + \alpha_{12} u'(0) + \beta_{11} u(T) + \beta_{12} u'(T) = f_1, \\ L_2(u) = \alpha_{21} u(0) + \alpha_{22} u'(0) + \beta_{21} u(T) + \beta_{22} u'(T) = f_2, \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha_{ij}, \beta_{ij} (i, j = 1, 2)$ — комплексные числа, f_1, f_2 — заданные элементы
банахова пространства E . Формы $L_1(u)$ и $L_2(u)$ предполагаются ли-
нейно-независимыми.

Краевую задачу (1), (2) назовем равномерно корректной, если
при любом $f(t) \in C^\alpha([0, T], E)$ ($\alpha \in (0, 1]$) и при некоторых целых
 κ_1, κ_2 для любых $f_1 \in D(A^{\kappa_1}), f_2 \in D(A^{\kappa_2})$ существует единственное
решение $u(t) \in C^2([0, T], E) \cap C^1([0, T], E(A)) \cap C([0, T], E(A^2)) =$
 $= C(L)$ этой задачи, непрерывно зависящее в норме пространства
 $C(L)$ от $f(t) \in C^\alpha([0, T], E), f_1 \in E(A^{\kappa_1}), f_2 \in E(A^{\kappa_2})$.

Здесь $E(A^\kappa) = \{u \in D(A^\kappa); \|u\|_{E(A^\kappa)} = \|A^\kappa u\| + \|u\|\}$. Очевидно,
при любом $u(t) \in C(L)$ имеет место равенство

$$L(u) = (D_t + \alpha_1 A D_t + \alpha_2 A^2) u(t) = (D_t - \omega_2 A)(D_t - \omega_1 A) u(t),$$

где ω_1, ω_2 — корни характеристического уравнения $\omega^2 + \alpha_1 \omega + \alpha_2 = 0$.

Предположим, что выполнено условие

1. Операторы $\omega_1 A$ и $-\omega_2 A$ порождают полугруппы класса C_0 [1],
причем $\|e^{\omega_1 A t}\| \leq N_1 e^{-\nu_1 t}, \|e^{-\omega_2 A t}\| \leq N_2 e^{-\nu_2 t} (\nu_{1,2} > 0)$.

Так как $\omega_1 \neq 0$, то замена $V_1(t) = (D_t - \omega_1 A) u(t), V_2(t) = u'(t)$
имеет обратную замену $u(t) = \omega_1^{-1} A^{-1} (V_2(t) - V_1(t)), u'(t) = V_2(t)$.

Легко показать, что нахождение решения уравнения (1) в классе $C(L)$ эквивалентно нахождению решения уравнения

$$V'(t) = A V(t) + F(t) \quad (3)$$

в классе $C^1([0, T], E \times E) \cap C([0, T], E(A) \times E(A))$, где

$$A = \begin{pmatrix} \omega_2 A & 0 \\ \omega_2 A & \omega_1 A \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Так как $\rho(A) = \rho(\omega_1 A) \cap \rho(\omega_2 A)$, то $\sigma(A) = \sigma(\omega_1 A) \cup \sigma(\omega_2 A)$. Из условия I вытекает, что спектр операторов $\omega_1 A$ и $\omega_2 A$ находится соответственно в левой и правой полуплоскостях. Рассмотрим в пространстве $E^2 = E \times E$ проекторы

$$P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_2(\omega_1 - \omega_2)^{-1} I & I \end{pmatrix}, \quad P_+ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\omega_2(\omega_1 - \omega_2)^{-1} I & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что E^2 является прямой суммой подпространств $E_-^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$ и $E_+^2 = \begin{pmatrix} u \\ -\omega_2(\omega_1 - \omega_2)^{-1} u \end{pmatrix}$; операторы $A_- = P_- A = A P_-$ и $-A_+ = -P_+ A = -A P_+$ порождают сильнонепрерывные полугруппы класса C_0 соответственно в E_-^2 и E_+^2 . Уравнение (3) эквивалентно системе двух независимых уравнений

$$V_-'(t) = A_- V_-(t) + F_-(t), \quad (4)$$

$$V_+'(t) = A_+ V_+(t) + F_+(t), \quad (5)$$

где $V_{\mp}(t) = P_{\mp} V(t)$, $F_{\mp}(t) = P_{\mp} F(t)$. Так как общее решение (4) дается формулой

$$V_-(t) = e^{A_- t} V_-(0) + \int_0^t e^{A_-(t-\tau)} F_-(\tau) d\tau,$$

а общее решение (5) формулой

$$V_+(t) = e^{-A_+(T-t)} V_+(T) - \int_t^T e^{-A_+(T-\tau)} F_+(\tau) d\tau,$$

то решение уравнения (1) представляется в виде:

$$u(t) = \omega_1^{-1} A^{-1} (V_2(t) - V_1(t)) = e^{\omega_1 A t} (\omega_1 - \omega_2)^{-1} [A^{-1} u'(0) - \omega_2 u(0)] + e^{-\omega_2 A (T-t)} (\omega_1 - \omega_2)^{-1} [\omega_1 u(T) - A^{-1} u'(T)] + \int_0^T U_0(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

где

$$U_0(t) = \begin{cases} (\omega_1 - \omega_2)^{-1} e^{\omega_1 A t} A^{-1} & \text{при } t \geq 0, \\ (\omega_1 - \omega_2)^{-1} e^{\omega_2 A t} A^{-1} & \text{при } t \leq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Итак, общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$u(t) = U_1(t) g_1 + U_2(t) g_2 + \int_0^T U_0(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где

$$U_1(t) = e^{\omega_1 A t}, \quad U_2(t) = e^{-\omega_2 A (T-t)}, \\ g_1 = (\omega_1 - \omega_2)^{-1} [A^{-1} u'(0) - \omega_2 u(0)] \in D(A^2), \\ g_2 = (\omega_1 - \omega_2)^{-1} [\omega_1 u(T) - A^{-1} u'(T)] \in D(A^2).$$

Подставляя (7) при $f(t) = 0$ в граничные условия (2), доказывается следующая

Лемма 1. Пусть выполнено условие 1. Однородная краевая задача

$$L(u) = 0, \quad L_1(u) = 0, \quad L_2(u) = 0 \quad (8)$$

имеет лишь тривиальное решение $u(t) = 0$ тогда и только тогда, когда оператор

$$D = \begin{vmatrix} L_1(U_1) & L_1(U_2) \\ L_2(U_1) & L_2(U_2) \end{vmatrix}$$

в $D(A^2)$ имеет обратный D^{-1} . Решая систему

$$\begin{cases} L_1(U_1) g_1 + L_1(U_2) g_2 = f_1, \\ L_2(U_1) g_1 + L_2(U_2) g_2 = f_2 \end{cases}$$

исключением неизвестных, для решения краевой задачи

$$L(u) = 0, \quad L_1(u) = f_1, \quad L_2(u) = f_2 \quad (9)$$

получим соотношение

$$D u(t) = S_1(t) f_1 + S_2(t) f_2, \quad (10)$$

где $S_1(t) = U_1(t) L_2(U_2) - U_2(t) L_2(U_1)$,

$$S_2(t) = -U_1(t) L_1(U_2) + U_2(t) L_1(U_1).$$

Выпишем матрицу коэффициентов краевой задачи

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Минор этой матрицы, составленный из i -го и j -го столбцов ($i < j$), обозначим α_{ij} . Учитывая, что

$$\begin{aligned} L_1(U_1) &= \alpha_{11} + \alpha_{12} \omega_1 A + \beta_{11} e^{\omega_1 A t} + \beta_{12} \omega_1 A e^{\omega_1 A t}, \\ L_1(U_2) &= \alpha_{11} e^{-\omega_2 A T} + \alpha_{12} \omega_2 A e^{-\omega_2 A T} + \beta_{11} + \beta_{12} \omega_2 A, \\ L_2(U_1) &= \alpha_{21} + \alpha_{22} \omega_1 A + \beta_{21} e^{\omega_1 A T} + \beta_{22} \omega_1 A e^{\omega_1 A T}, \\ L_2(U_2) &= \alpha_{21} e^{-\omega_2 A T} + \alpha_{22} \omega_2 A e^{-\omega_2 A T} + \beta_{21} + \beta_{22} \omega_2 A, \end{aligned}$$

легко получить следующее выражение для оператора D :

$$\begin{aligned} D &= d_{24} \omega_1 \omega_2 A^2 + (d_{14} \omega_2 + d_{23} \omega_1) A + d_{13} + d_{34} (\omega_1 - \omega_2) A e^{\omega_1 A T} + \\ &+ d_{12} (\omega_2 - \omega_1) A e^{-\omega_2 A T} - [d_{24} \omega_1 \omega_2 A^2 + (d_{14} \omega_1 + \\ &+ d_{23} \omega_2) A + d_{13}] e^{\omega_1 A T} e^{-\omega_2 A T}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для равномерной корректности задачи (9) существенную роль играет свойство регулярности [1, 4]. В нашем случае краевые условия будут регулярными, лишь когда будет выполнено одно из условий:

- 1° $d_{24} \neq 0$,
- 2° $d_{24} = 0$, но $|\alpha_{12}| + |\beta_{12}| > 0$ и $d_{23} \omega_1 + d_{14} \omega_2 \neq 0$,
- 3° $\alpha_{12} = \beta_{12} = \alpha_{22} = \beta_{22} = 0$, но $d_{13} \neq 0$.

Рассмотрим эти случаи подробнее.

1°. $d_{24} \neq 0$; тогда оператор D по формуле (12) предстанет в виде $D = \gamma A^2 (I - R_1)$, где γ — число, а R_1 — некоторый ограниченный оператор. Так как операторы $L_k(U_m)$ имеют вид $L_k(U_m) = \gamma_{km} A (I + R_{km})$, где γ_{km} — числа, а R_{km} — ограниченные операторы, то, предполагая, что единица принадлежит резольвентному множеству оператора R_1 , из (10) получим

$$u(t) = \gamma_1 e^{\omega_1 A t} A^{-1} C_1 f_1 + \gamma_2 e^{-\omega_2 A (T-t)} A^{-1} C_2 f_2,$$

где γ_1, γ_2 — числа, а C_1, C_2 — ограниченные операторы в E .

Итак, в этом случае задача (9) равномерно корректна при любых $f_1, f_2 \in D(A)$.

- 2°. $d_{24} = 0$, $|\alpha_{12}| + |\beta_{12}| > 0$ и $d_{23} \omega_1 + d_{14} \omega_2 \neq 0$.

Матрицу (11) при этих условиях можно преобразовать так, чтобы $\alpha_{22} = \beta_{22} = 0$. Тогда $D = \gamma A (I - R_2)$, $L_1(U_m) = \gamma_{1m} A (I + R_{1m})$, $L_2(U_m) = R_{2m}$, где R_2 и R_{km} — ограниченные операторы в E . Предполагая,

что единица принадлежит резольвентному множеству оператора R , из (10) будем иметь

$$u(t) = (\gamma_{11} e^{\omega_1 A t} C_{11} + \gamma_{12} e^{-\omega_2 A(T-t)} C_{12}) A^{-1} f_1 + (\gamma_{21} e^{\omega_1 A t} C_{21} + \gamma_{22} e^{-\omega_2 A(T-t)} C_{22}) f_2,$$

где γ_{ik} — числа, C_{ik} — ограниченные операторы в E .

Итак, в этом случае задача (9) равномерно корректна при любых $f_1 \in D(A)$, $f_2 \in D(A^2)$.

3°. $\alpha_{12} = \beta_{12} = \alpha_{22} = \beta_{22} = 0$, но $d_{13} \neq 0$. В этом случае $D = \gamma(I - R_3)$, $L_k(U_m) = R_{km}$, где R_3 и R_{km} — ограниченные операторы в E . Предполагая, что единица принадлежит резольвентному множеству оператора R_3 , из (10) получим

$$u(t) = \gamma_1 e^{\omega_1 A t} C_1 f_1 + \gamma_2 e^{-\omega_2 A(T-t)} C_2 f_2.$$

Итак, в этом случае задача (9) равномерно корректна при любых $f_1, f_2 \in D(A^2)$.

Предположим, что выполнено условие:

II. Операторы $\omega_1 A$ и $-\omega_2 A$ порождают аналитические полугруппы, причем $\|e^{\omega_1 A t}\| \leq N_1 e^{-\nu_1 t}$, $\|e^{-\omega_2 A t}\| \leq N_2 e^{-\nu_2 t}$ ($\nu_{1,2} > 0$, $t \geq 0$) и оператор A^{-1} вполне непрерывен.

Лемма 2. Пусть выполнено условие II и краевые условия (2) регулярны. Для того чтобы краевая задача (9) была равномерно корректна в случае 1° $\forall f_1, f_2 \in D(A)$, в случае 2° $\forall f_1 \in D(A)$, $\forall f_2 \in D(A^2)$, а в случае 3° $\forall f_1, f_2 \in D(A^2)$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная краевая задача (8) имела только нулевое решение.

Доказательство. Так как операторы $e^{\omega_1 A t} = A e^{\omega_1 A t} A^{-1}$ и $e^{-\omega_2 A t} = A e^{-\omega_2 A t} A^{-1}$ являются вполне непрерывными как произведения ограниченных операторов на вполне непрерывный, то при регулярных краевых условиях

$$D = \gamma A^\alpha (I - R),$$

где α принимает одно из значений 2, 1, 0, а R — некоторый многочлен от вполне непрерывных операторов A^{-1} , $e^{\omega_1 A t}$ и $e^{-\omega_2 A t}$ и, следовательно, вполне непрерывный оператор. Значит, лемма 2 является следствием леммы 1 и вышеизложенных свойств регулярных краевых условий.

Чтобы исследовать общий случай (1), (2), предварительно найдем решение задачи

$$L(u) = f(t), \quad L_1(u) = 0, \quad L_2(u) = 0 \quad (13)$$

в виде

$$u(t) = U_1(t) g_1 + U_2(t) g_2 + \int_0^T U_0(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (14)$$

где $U_0(t)$ — функция, определенная формулой (6). Подставляя решение (14) в краевые условия (13), найдем соотношение

$$Du(t) = \int_0^T G_0(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

где

$$G_0(t, \tau) = \begin{vmatrix} U_1(t) & U_2(t) & U_0(t-\tau) \\ L_1(U_1) & L_1(U_2) & L_1(U_0)_t \\ L_2(U_1) & L_2(U_2) & L_2(U_0)_t \end{vmatrix}.$$

Легко заметить, что в случае 1° $G_0(t, \tau) = A K_1(t, \tau)$ — случае 2° $G_0(t, \tau) = K_2(t, \tau)$, а в случае 3° $G_0(t, \tau) = A^{-1} K_3(t, \tau)$, где $K_1(t, \tau)$ — оператор-функции, непрерывные при $0 \leq t, \tau \leq T$. Если

однородная краевая задача (8) имеет только тривиальное решение, то функцию $G(t, \tau) = D^{-1} G_0(t, \tau)$ естественно назвать функцией Грина краевой задачи (13).

Теорема. Пусть выполнено условие II, краевые условия (2) регулярны и однородная краевая задача (8) имеет только тривиальное решение. Тогда при всех $f(t) \in C^\alpha([0, T], E)$, где $\alpha \in (0, 1]$,

а) при всех $f_1, f_2 \in D(A)$ (в случае 1°),

б) при всех $f_1 \in D(A)$ и $f_2 \in D(A^2)$ (в случае 2°),

в) при всех $f_1, f_2 \in D(A^2)$ (в случае 3°)

краевая задача (1) — (2) равномерно корректна.

Доказательство. Покажем, что функция

$$u(t) = \int_0^T G_0(t, \tau) D^{-1} f(\tau) d\tau \quad (15)$$

является решением задачи (13). Легко заметить, что эта функция имеет вид:

$$u(t) = \int_0^T e^{\omega_1 A t} A^{-1} (\gamma_{11} e^{-\omega_2 A \tau} + \gamma_{12} e^{\omega_1 A(T-\tau)}) f(\tau) d\tau + \int_0^T e^{-\omega_2 A(T-t)} A^{-1} (\gamma_{21} e^{-\omega_2 A \tau} + \gamma_{22} e^{\omega_1 A(T-\tau)}) f(\tau) d\tau + (\omega_1 - \omega_2)^{-1} \left[\int_0^t e^{\omega_1 A(t-\tau)} A^{-1} f(\tau) d\tau + \int_t^T e^{-\omega_2 A(\tau-t)} A^{-1} f(\tau) d\tau \right],$$

где γ_{ik} — комплексные числа. Так как интегралы $\int_0^T e^{-\omega_2 A \tau} f(\tau) d\tau$ и

$\int_0^T e^{\omega_1 A(T-\tau)} f(\tau) d\tau$ принадлежат области определения $D(A)$ [1], то первое и второе слагаемые удовлетворяют уравнению $L(u) = 0$. Третье слагаемое обозначим через $u_3(t)$. Очевидно,

$$D_t^2 u_3(t) = (\omega_1 - \omega_2)^{-1} \left[\omega_1 \int_0^t e^{\omega_1 A(t-\tau)} f(\tau) d\tau + \omega_2 \int_t^T e^{-\omega_2 A(\tau-t)} f(\tau) d\tau \right],$$

$$L_t^2 u_3(t) = f(t) + (\omega_1 - \omega_2)^{-1} \left[\omega_1^2 \int_0^t A e^{\omega_1 A(t-\tau)} f(\tau) d\tau + \omega_2^2 \int_t^T A e^{-\omega_2 A(\tau-t)} f(\tau) d\tau \right],$$

откуда, в свою очередь, следует, что $L(u_3) = f(t)$. Так как $G(t, \tau)$ как функция Грина удовлетворяет по t однородным граничным условиям $L_1(G)_t = L_2(G)_t = 0$, то функция $u(t)$, определенная формулой (15), удовлетворяет и граничным условиям задачи (13). Учитывая оценки $\|A e^{\omega_1 A t}\| \leq \frac{C_1}{t}$, $\|A e^{-\omega_2 A t}\| \leq \frac{C_2}{t}$ и то, что $f(t) \in C^\alpha([0, T], E)$,

можно установить оценку

$$\|u''\|_c + \|A u'\|_c + \|A^2 u\|_c \leq C \|f\|_{c, \alpha},$$

откуда следует требуемая непрерывная зависимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
2. Лаптев Г. И. „Диф. уравн.“, 11, 9, 1966.
3. Треногин В. А. „ДАН СССР“, 170, 5, 1966.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Изд-во „Наука“, 1969.
5. Лаптев Г. И. „Литов. матем. сб.“, 1968, VIII, № 1.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 13. III 1972

С. Я. Якубов

Икинчи тәртіб еволүсион тәнликләр үчүн сәрһәд мәсәләсинин коректлїји

ХҮЛАСӘ

Тәдғигатда E банах фәзасында (1)—(2) сәрһәд мәсәләсинин мүн-тәзәм коректлїји өйрәнилir. Бурада A —гејри-мәһдуд оператор, α_1 , α_2 , α_{ij} , β_{ij} ($i, j = \overline{1, 2}$)—комплекс әдәдләр, f_1 , f_2 исә E фәзасынын еле-ментләридир. Мәғаләдә (2) сәрһәд шәртләринин регулјарлығы та-пылмыш вә (1)—(2) мәсәләсинин Грин функцијасы гурулмушдур.

S. Ya. Yakubov

The boundary value problem correctness for linear evolutionary equations of the second order

SUMMARY

The correctness of the boundary value problem (1)—(2) where α_1 , α_2 , α_{ij} , β_{ij} ($i, j = \overline{1, 2}$) are complex numbers, f_1 , f_2 are given elements, A is generally speaking unbounded operator in E is analysed in the Banach space. The regularity condition of boundary value conditions (2) is found and Green function of the problem (1)—(2) is constructed.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1973, № 2

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийјат елмләри серијасы, 1973, № 2

УДК 517. 94

Д. А. АХУНДОВ

О ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРАХ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка в гильбертовом пространстве H

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t, u(t)). \quad (1)$$

и докажем существование волновых операторов и оператора рассеяния уравнения (1) в классе сильных решений, т. е. функций $u(t) \in D(A(t))$, непрерывных в $H(A)$ ($H(A)$ —гильбертово пространство, состоящее из элементов $D(A)$ с нормой $\|u\|_A = \|A(0)u\|$ и удовлетворяющих уравнению на $T = (-\infty, +\infty)$).

Задача о существовании волновых операторов и оператора рассеяния уравнения (1) при $A(t) = A$ изучалась в работе [1], где относительно A и $f(t, u)$ предполагалось следующее:

A —замкнутый линейный оператор, порождающий равномерно ограниченную группу операторов e^{tA} ($t \in T$), $f(t, u)$ —нелинейный оператор, действующий из $T \times H$ в H и удовлетворяющий по u локальному условию Липшица равномерно на каждом конечном отрезке интервала T . Далее, задача рассеяния для уравнения (1) с постоянным оператором A исследовалась А. Бродским [2] в предположении, что A порождает унитарную группу операторов e^{tA} на T , а оператор $f(t, u)$ удовлетворяет по u условию Липшица во всем пространстве с коэффициентом $\sigma(t)$, ($\sigma(t) \in L_1(T)$, $\sigma(t) \geq 0$). В вышеупомянутых работах [1, 2] изучалась задача рассеяния в классе слабых решений, т. е. решений в интегральном смысле. В статье [3] рассматривалась задача рассеяния для уравнения (1) с постоянным оператором A в классе сильных решений.

Пусть $u(t)$ —решение задачи Коши для уравнения (1):

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0 \in D(A), \quad (2)$$

где $A(t)$ —замкнутый линейный оператор с областью определения $D(A(t)) = D(A)$, $\overline{D(A)} = H$. Тогда $u(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (см. [4])

$$u(t) = U(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau, \quad (3)$$

где $U(t, \tau)$ —эволюционный оператор, соответствующий $A(t)$. В работе [5] доказана теорема о нелокальной разрешимости задачи (2) из которой, в частности, следует

Теорема 1. Пусть: 1. Замкнутый линейный оператор $A(t)$ имеет не зависящую от $t \in T$ всюду плотную в H область определения $D(A(t)) = D(A)$ и существует $A^{-1}(t)$ ограниченный; оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $D(A)$. 2. Задача Коши для уравнения $u'(t) = A(t)u(t)$ равномерно корректна в обе стороны и $\|U(t, s)\| \leq 1$, $t, s \in T$. 3. Оператор $f(t, u)$ действует из $T \times H(A)$ в $H(A)$ и как оператор из $T \times H(A)$ в $H(A)$ имеет H -расширенную производную Фреше $\bar{D}$ и $f(t, u)$ (см. [5]) и непрерывную производную $D_t f(t, u)$, которые удовлетворяют по u условию Липшица в каждом шаре пространства $H(A)$:

$$\|\bar{D}_u f(t, u) - \bar{D}_u f(t, v)\|_{B(H)} \leq \sigma(t, R) \|u - v\|_{H(A)}$$

$$\|D_t f(t, u) - D_t f(t, v)\| \leq \sigma(t, R) \|u - v\|_{H(A)}$$

для любых $u, v \in S_{H(A)}(R)$, где $S_{H(A)}(R)$ — шар в пространстве $H(A)$ радиуса R с центром в нуле.

4. $u_0 \in D(A)$.

5. Для всех $u \in D(A)$ имеют место неравенства

$$\|D_t f(t, u)\| \leq \sigma(t) (1 + \|u\|_{H(A)}), \quad \|\bar{D}_u f(t, u)\|_{B(H)} \leq \sigma(t).$$

Тогда задача (2) или (3) имеет единственное решение:

$$u(t) \in C^1(T, H) \cap C(T, H(A)).$$

Замечание 1. В работе С. Я. Якубова [6] показано, что при выполнении условия 3 имеет место неравенство

$$\left\| \frac{d}{dt} [f(t, u(t)) - f(t, v(t))] \right\| \leq \sigma(t, R) [\|u(t) - v(t)\|_{H(A)} + \|u'(t) - v'(t)\|], \quad (14)$$

где $u(t), v(t) \in C^1(T, H) \cap C(T, H(A))$, для которых $\|u(t)\|_{H(A)} + \|u'(t)\| \leq R$, $\|v(t)\|_{H(A)} + \|v'(t)\| \leq R$. Очевидно, из 5 вытекает неравенство

$$\left\| \frac{d}{dt} f(t, u(t)) \right\| \leq \sigma(t) (1 + \|u(t)\|_{H(A)} + \|u'(t)\|) \quad (5)$$

при всех $u(t) \in C(T, H(A)) \cap C^1(T, H)$.

Пусть $u(t)$ — решение задачи (2), а $u_+(t)$, $u_-(t)$ — решения задач

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ u(t_0) = u_0^+ \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ u(t_0) = u_0^- \end{cases}$$

соответственно такие, что в метрике пространства $H(A)$ выполняются асимптотические равенства

$$u(t) = u_{\pm}(t) + o(1), \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Определение. Операторы, определяемые соотношениями

$$W_+ u(t) = u_+(t) [W_+ u_0 = u_0^+], \quad W_- u(t) = u_-(t) [W_- u_0 = u_0^-],$$

называются волновыми, а оператор $S u_-(t) = u_+(t) [S u_0^- = u_0^+]$ называется оператором рассеяния уравнения (2). D_+ , D_- обозначают области определения операторов W_+ , W_- , а R_+ , R_- — их области значений.

Замечание 2. Все доказательства будем проводить для W_- , D_- , R_- . Подобные доказательства с очевидными изменениями будут верны и для W_+ , D_+ , R_+ .

Замечание 3. Пусть для $u_0 \in D(A)$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t_0, t) u(t) = u_0^-$$

в метрике пространства $H(A)$. Тогда $U(t, t_0) u_0 - u(t)$ — решение задачи Коши:

$$u'(t) = A(t)u(t), \quad u(t_0) = u_0^- \text{ и } \|U(t, t_0) u_0^- - u(t)\|_{H(A)} \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow -\infty$, т. е. волновой оператор W_- существует. Действительно,

$$\|U(t, t_0) u_0^- - u(t)\|_{H(A)} = \|U(t, t_0) [u_0^- - U(t_0, t) u(t)]\|_{H(A)} \leq \|u_0^- - U(t_0, t) u(t)\|_{H(A)} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

Лемма. Пусть $w_0 \in H(A)$ и существует функция $V(t): T \rightarrow H(A)$ такая, что

$$a) \int_{-\infty}^{t_0} \|f(s, U(s, t_0) v(s))\|_{H(A)} ds < \infty,$$

$$b) v(t) = W_0 + \int_{-\infty}^t U(t_0, s) f(s, U(s, t_0) v(s)) ds, \quad t \leq t_0.$$

Тогда $W_0 \in R_-$, $v(t_0) \in D_-$ и $W_- v(t_0) = w_0$.

Доказательство. Положим $u(t) = U(t, t_0) v(t)$. Тогда $u(t_0) = v(t_0)$. Из б) имеем

$$u(t) = U(t, t_0) v(t) = U(t, t_0) [v(t_0) - \int_{-\infty}^{t_0} U(t_0, s) f(s, U(s, t_0) v(s)) ds] + \int_{-\infty}^t U(t, s) f(s, u(s)) ds = U(t, t_0) v(t_0) + \int_{t_0}^t U(t, s) f(s, u(s)) ds,$$

т. е. $u(t)$ — решение уравнения (3) с начальным данным $u(t_0) = v(t_0)$. Далее,

$$\|U(t_0, t) u(t) - w_0\|_{H(A)} \leq \int_{-\infty}^t \|U(t_0, s) f(s, U(s, t_0) v(s))\|_{H(A)} ds \leq \int_{-\infty}^t \|f(s, U(s, t_0) v(s))\|_{H(A)} ds \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

Следствие. Пусть $u_0 \in H(A)$ такой, что существует решение уравнения (3). Тогда, если $\int_{-\infty}^{t_0} \|f(s, u(s))\|_{H(A)} ds < \infty$, то $u_0 \in D_-$

$$\text{и } W_- u_0 = u_0 - \int_{-\infty}^{t_0} U(t_0, s) f(s, u(s)) ds.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и далее: 6. Оператор $f(t, u)$, действующий из $T \times H(A)$ в $H(A)$, удовлетворяет по u условию Липшица с коэффициентом $\sigma(t, R)$ в каждом шаре $S_{H(A)}(R)$ и $f(t, 0) = 0$, $t \in T$. Тогда $D_- = R_- = H(A)$, оператор W_- отображает $H(A)$ на $H(A)$ взаимно однозначно, удовлетворяет условию Липшица в каждом шаре $S_{H(A)}(R)$.

Доказательство. Известно [4], что если $u(t)$ — решение уравнения (3) такое, что $u(t) \in C^1(T, H) \cap C(T, H(A))$, то имеют место формулы

$$A(t)u(t) = W(t, t_0) A(t_0) u_0 + W(t, t_0) f(t_0, u(t_0)) - f(t, u(t)) - \int_{t_0}^t W(t, \tau) A'(\tau) A^{-1}(\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t W(t, \tau) \frac{d}{d\tau} f(\tau, u(\tau)) d\tau, \quad (6)$$

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t, u(t)); \quad W(t, \tau) = A(t)U(t, \tau)A^{-1}(\tau). \quad (7)$$

Возьмем произвольный элемент $u_0 \in H(A)$, и пусть $u(t)$ — решение (3) с начальным значением $u(t_0) = u_0$. Из (6) и (7) имеем

$$\begin{aligned} \|A(t)u(t)\| + \|u'(t)\| &\leq 2\|W(t, t_0)\| \|A(t_0)u_0\| + \\ &+ 2\|W(t, t_0)\| \|f(t_0, u_0)\| + \|f(t, u(t))\| + \\ &+ \int_{t_0}^t \|W(t, \tau)\| \|A'(\tau)A^{-1}(\tau)\| \|f(\tau, u(\tau))\| d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t \|W(t, \tau)\| \left\| \frac{d}{d\tau} f(\tau, u(\tau)) \right\| d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (5) получаем

$$\int_{t_0}^t \left\| \frac{d}{ds} f(s, u(s)) \right\| ds \leq \int_{t_0}^t \sigma(s) (1 + \|A(s)u(s)\| + \|u'(s)\|) ds. \quad (9)$$

Далее, в силу условия 5 теоремы 1 имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds &\leq \int_{t_0}^t \|\tilde{D}_u f(s, \bar{u})\|_{B(H)} \|u(s)\| ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \sigma(s) \|A(s)u(s)\| ds, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\|f(t, u(t))\| \leq \|f(t_0, u_0)\| + \int_{t_0}^t \left\| \frac{d}{ds} f(s, u(s)) \right\| ds. \quad (11)$$

Поэтому в силу (9)–(11), из (8) получаем

$$\|A(t)u(t)\| + \|u'(t)\| \leq C(u_0) + C_1 \int_{t_0}^t \sigma(s) [\|A(s)u(s)\| + \|u'(s)\|] ds.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\|A(t)u(t)\| + \|u'(t)\| \leq C(u_0), \quad t \leq t_0. \quad (12)$$

И потому

$$\int_{-\infty}^{t_0} \|f(s, u(s))\|_{H(A)} ds \leq \int_{-\infty}^t \sigma(s, C(u_0)) \|u(s)\|_{H(A)} ds \leq C < \infty.$$

На основании следствия из теоремы 2 имеем $u_0 \in D_-$ и оператор W_- существует. Таким образом, $H(A) \subseteq D_-$. Следовательно, $D_- = H(A)$. Пусть $u_0, v_0 \in S_{H(A)}(R)$ и $u(t), v(t)$ — соответствующие им решения уравнения (3). В силу условий 5, 6 теоремы легко получить

$$\begin{aligned} \|A(t)[u(t) - v(t)]\| + \|u'(t) - v'(t)\| &\leq C(R) \|u_0 - v_0\|_{H(A)} + \\ &+ \int_{t_0}^t \sigma(\tau, R) [\|A(\tau)[u(\tau) - v(\tau)]\| + \|u'(\tau) - v'(\tau)\|] d\tau, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\|u(t) - v(t)\|_{H(A)} \leq C(R) \|u_0 - v_0\|_{H(A)}.$$

Но

$$\|U(t_0, t)u(t) - U(t_0, t)v(t)\|_{H(A)} \leq \|u(t) - v(t)\|_{H(A)},$$

поэтому

$$\|U(t_0, t)u(t) - U(t_0, t)v(t)\|_{H(A)} \leq C(R) \|u_0 - v_0\|_{H(A)}, \quad t \leq t_0.$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow -\infty$ в последнем неравенстве получаем $\|W_- u_0 - W_- v_0\|_{H(A)} \leq C(R) \|u_0 - v_0\|_{H(A)}$. Таким образом, оператор W_- — липшицево непрерывен в каждом шаре пространства.

Пусть $W_- u_0 = W_- v_0$. Докажем, что $u_0 = v_0$. Обозначим $R_0 = \max\{\|u_0\|_{H(A)}, \|v_0\|_{H(A)}\}$. Тогда в силу неравенства (12), $\|u(t)\|_{H(A)} \leq$

$\leq C(R_0)$, $\|v(t)\|_{H(A)} \leq C(R_0)$, $t \leq t_0$. Возьмем произвольное $T < t_0$. Из уравнения (3) имеем

$$\|u(t) - v(t)\|_{H(A)} \leq C(R_0) \|u(T) - v(T)\|_{H(A)}, \quad T < t \leq t_0. \quad (13)$$

С другой стороны, $\|u(T) - v(T)\|_{H(A)} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow -\infty$. Действительно, $\|u(T) - v(T)\|_{H(A)} \leq \|v(t_0, T)u(T) - U(t_0, T)v(T)\|_{H(A)} \rightarrow \|W_- u_0 - W_- v_0\|_{H(A)} = 0$. Поэтому, переходя к пределу при $t \rightarrow -\infty$ в неравенстве (13), получаем $\|u(t) - v(t)\|_{H(A)} = 0$ для всех $t \leq t_0$ и в частности $u(t_0) = v(t_0)$.

Пусть $W_0 \in H(A)$. Определим рекуррентно $u_0(t) = w_0$,

$$u_n(t) = w_0 + \int_{-\infty}^t U(t_0, s) f(s, U(s, t_0)u_{n-1}(s)) ds, \quad t \leq N \quad (14)$$

(N — некоторое число, которое определим ниже).

Пусть $R_0 > \|w_0\|_{H(A)}$. Выберем $N_1 \leq t_0$ так, чтобы

$$C_1 = \int_{-\infty}^{N_1} \sigma(s, MR_0) ds \leq \frac{R_0 - \|W_0\|_{H(A)}}{M^2 R_0},$$

где $M = \sup_{t, s \in T} \|U(t, s)\| \leq 1$. Из (14) по индукции для любого n легко получить

$$\|u_n(t)\|_{H(A)} \leq R_0, \quad t \leq N_1. \quad (15)$$

Выберем $N_2 < t_0$ так, чтобы $\int_{-\infty}^{N_2} \sigma(s, MR_0) ds = C_2 < M^{-2}$, и определим N следующим образом: $N = \min\{N_1, N_2\}$. Тогда из (15) имеем

$$\|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|_{H(A)} \leq (M^2 C_2)^n \|w_0\|_{H(A)}, \quad t \leq N \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Из (16) следует равномерная сходимость $u_n(t)$ на интервале $(-\infty, N]$ в метрике $H(A)$ к некоторой функции $v(t)$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (15), легко видеть, что $v(t)$ — решение интегрального уравнения

$$v(t) = w_0 + \int_{-\infty}^t U(t_0, s) f(s, U(s, t_0)v(s)) ds, \quad t \leq N. \quad (17)$$

Тогда из (17) и теоремы (1) следует, что интегральное уравнение

$u(t) = U(t, t_0)v(T) + \int_{t_0}^t U(t, s) f(s, u(s)) ds$ имеет решение $u(t) \in C(T, H(A)) \cap C^1(T, H)$. Очевидно, при $t \leq T$ $U(t, t_0)v(t) = u(t)$. Положим $\tilde{v}(t) = U(t_0, t)u(t)$, $t \in T$. Тогда $\tilde{v}(t)$ будет удовлетворять условиям леммы, из которой следует, что $w_0 \in R_-$. Таким образом, $R_- = H(A)$. Используя неравенство (13), легко показать, что W_-^{-1} — липшицево непрерывен в каждом шаре $S_{H(A)}(R)$.

Следствие. Оператор рассеяния $S = W_+ W_-^{-1}$ существует, действует из $H(A)$ в $H(A)$ и удовлетворяет условию Липшица в каждом шаре $S_{H(A)}(R)$.

Теорема полностью доказана.

В заключение приношу благодарность доктору физ.-мат. наук С. Я. Якубову за полезные замечания и обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Segal J. Ann. Math., 78, 2, 1963.
2. Brodsky A. Pac. J. Math., 19, 2, 1966.
3. Ахундов Д. А. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук*, 1970, № 3.

4. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Изд-во „Наука“, 1967.

5. Якубов С. Я. Тр. Моск. матем. о-ва, т. 23, 1970.

6. Якубов С. Я. „ДАН Азерб. ССР“, XXII, 8, 1966.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 29. V 1972

Ч. Ә. Ахундов

Биринчи тәртіб дэжишән операторлу гејри-хәтти еволүсион
тәнлик үчүн далға операторлары һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә H һилберт фәзасында гејри-хәтти еволүсион (1) тән-
лији үчүн күчлү һәлләр синфиндә далға вә сәпилмә операторлары-
нын варлығы теореме исбат олунмушдур.

[D. A. Akhundov]

On wave operators for a quasi-linear evolutionary equation
of the first order with a variable operator

SUMMARY

The existence theorem of wave and scattering operators for a quasi-
linear evolutionary equation (1) in the Gilbert space in a class of strong
solutions is proved in the paper.

$$+ 2 \sum_{n=s}^{-1} \lambda_n^{-1} |a_m| \left(\sum_{n=m+1}^k |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=m+1}^k \lambda_n^{-2} |a_{m,n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{n=s}^k |a_n|^2 +$$

$$+ 2 \left(\sum_{n=s}^k |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=s}^k |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=s}^{k-1} \lambda_m^{-2} \sum_{n=m+1}^k \lambda_n^{-2} |a_{m,n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \alpha \sum_{n=s}^k |a_n|^2.$$

Неравенство (3) доказано.

Лемма 3. Пусть $x \in H$, $\{g_n\}$ — бесконечная система элементов
пространства H , $(g_m, g_n) = b_{m,n}$ при $m \neq n$, $(g_n, g_n) = \mu_n^2$ и последо-
вательность комплексных чисел $\{a_n\}$ такова, что

$$\beta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 |a_n|^2 < \infty.$$

Положим $u_k = \sum_{n=1}^k \mu_n^{-2} a_n g_n$. Тогда, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - x\| = 0, \quad (4)$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n |a_n - (x, g_n)|^2 \leq \omega^2 \quad (5)$$

для любой последовательности $\beta_n > 0$, для которой

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} (\beta_m \mu_m^{-2} + \beta_n \mu_n^{-2}) |b_{m,n}|^2 < \infty.$$

Доказательство. Пусть $k > m$. Тогда

$$(u_k, g_m) = \sum_{n=1}^k \mu_n^{-2} a_n (g_n, g_m),$$

$$|a_m - (x, g_m)| = |a_m - (u_k, g_m) + (u_k - x, g_m)| \leq$$

$$\leq \mu_m \|u_k - x\| + \beta \left(\sum_{n=1}^{m-1} \mu_n^{-2} |b_{m,n}|^2 + \sum_{n=m+1}^k \mu_n^{-2} |b_{m,n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $R < k$. Возведем обе части последнего неравенства в квадрат,
умножим на β_m и после этого просуммируем по m от 1 до R ; тогда

$$\sum_{m=1}^R \beta_m (a_m - (x, g_m))^2 \leq \beta^2 \left[\sum_{m=2}^k \beta_m \sum_{n=1}^{m-1} \mu_n^{-2} |b_{m,n}|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{k-1} \beta_m \sum_{n=m+1}^k \mu_n^{-2} |b_{m,n}|^2 \right] + \|u_k - x\|^2 \sum_{m=1}^R \beta_m \mu_m +$$

$$= 2\beta \|u_k - x\| \left(\sum_{m=1}^R \beta_m \mu_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{m=2}^k \beta_m \sum_{n=1}^{m-1} \mu_n^{-2} |b_{m,n}|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{k-1} \beta_m \sum_{n=m+1}^k \mu_n^{-2} |b_{m,n}|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

откуда в силу (2) получаем

$$\sum_{m=1}^R \beta_m |a_m - (x, g_m)|^2 \leq \beta^2 \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{n=m+1}^k (\beta_m \mu_m^{-2} + \beta_n \mu_n^{-2}) |b_{m,n}|^2 +$$

$$+ \|u_k - x\|^2 \cdot \sum_{m=1}^R \beta_m \cdot \mu_m^2 +$$

$$+ 2\beta \|u_k - x\| \left(\sum_{m=1}^R \beta_m \mu_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{m=1}^{k-1} \sum_{n=m+1}^k (\beta_n \mu_m^{-2} + \beta_m \mu_n^{-2}) |b_{m,n}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \omega \beta^2 + \|u_k - x\|^2 \cdot \sum_{m=1}^R \beta_m \mu_m^2 + 2\beta \omega^{\frac{1}{2}} \|u_k - x\| \left(\sum_{m=1}^R \beta_m \mu_m^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если возьмем $k \rightarrow \infty$, то в силу (4) получим неравенство

$$\sum_{m=1}^R \beta_m |(a_m - (x, g_m))|^2 \leq \omega \beta^2,$$

откуда при $R \rightarrow \infty$ следует неравенство (5). Лемма 3 доказана.

Неравенство Бесселя для почти-ортогональных систем пространства H

Теорема 1. Пусть $\{I_n\}$ — почти-ортогональная система элементов пространства H , $x \in H$ и $a_n = (x, I_n)$. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} |a_n|^2 \leq \alpha \|x\|^2. \quad (6)$$

Доказательство, 1-й способ. Имеем

$$\left[\sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} |a_n|^2 \right]^2 = \left[\sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} \bar{a}_n \cdot (x, I_n) \right]^2 =$$

$$= \left[\left(x, \sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} a_n I_n \right) \right]^2 \leq \|x\|^2 \cdot \left\| \sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} a_n I_n \right\|^2,$$

откуда в силу леммы 2 при $s = 1$ $a_n = \lambda_n^{-1} a_n$ получаем

$$\left[\sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} |a_n|^2 \right]^2 \leq \alpha \|x\|^2 \cdot \sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} |a_n|^2,$$

что эквивалентно неравенству (6).

2-й способ. Имеем

$$\left\| x - \alpha^{-1} \cdot \sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} a_n I_n \right\|^2 \leq \|x\|^2 - 2\alpha^{-1} \cdot \sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} |a_n|^2 + \alpha^{-2} \cdot \left\| \sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} a_n I_n \right\|^2,$$

откуда в силу леммы 2 следует

$$\left\| x - \alpha^{-1} \sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} a_n I_n \right\|^2 \leq \|x\|^2 - \alpha^{-1} \cdot \sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} |a_n|^2.$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} |a_n|^2 \leq \alpha \|x\|^2.$$

Неравенство (6) доказано.

Отметим, что если система $\{I_n\}$ ортогональна, то $\alpha = 1$ и неравенство (6) превращается в неравенство Бесселя для ортогональных систем.

Теорема Рисса—Фишера для почти-ортогональных систем пространства H

Теорема 2. Пусть $\{I_n\}$ — почти-ортогональная система элементов полного пространства H и последовательность комплексных чисел $\{a_n\}$ такова, что

$$\delta^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} |a_n|^2 < \infty. \quad (7)$$

Тогда существует элемент $x \in H$, обладающий следующими свойствами;

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n |a_n - (x, I_n)|^2 \leq \lambda \delta^2$$

для любой последовательности $\beta_n < 0$, для которой

$$\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} (\beta_n \lambda_n^{-2} + \beta_m \lambda_m^{-2}) |a_{m,n}|^2 < \infty;$$

$$2) (x, I_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} a_n (I_n, I_m) \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

$$3) \|x\|^2 \leq \alpha \delta^2.$$

Доказательство. Положим $V_k = \sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} a_n I_n$. Для $k > s \geq 1$,

в силу леммы 2 имеем

$$\|V_k - V_s\|^2 = \left\| \sum_{n=s+1}^k \lambda_n^{-2} a_n I_n \right\|^2 \leq \alpha \sum_{n=s+1}^k \lambda_n^{-2} |a_n|^2. \quad (8)$$

В силу условия (7) из неравенства (8) следует, что последовательность $\{V_k\}$ элементов пространства H фундаментальна. В силу условия полноты пространства H существует элемент $x \in H$, для которого

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|V_k - x\| = 0. \quad (9)$$

В силу леммы 3 элемент $x \in H$ удовлетворяет требованию 1) теоремы 2. Далее, пусть $y \in H$ — любой элемент.

$$|(V_k, y) - (x, y)| = |(V_k - x, y)| \leq \|y\| \|V_k - x\|,$$

откуда в силу (9) получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (V_k, y) = (x, y),$$

В частности, при $y = I_m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (V_k, I_m) = (x, I_m). \quad (10)$$

Пусть $k > m$. Тогда

$$(V_k, I_m) = \left(\sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} a_n I_n, I_m \right) = \sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} a_n (I_n, I_m). \quad (11)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} |a_n| |(I_n, I_m)|. \quad (12)$$

При $k > m$ имеем

$$\sum_{n=1}^k \lambda_n^{-2} |a_n| |(I_n, I_m)| = |a_m| + \sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n^{-2} |a_n| |a_{m,n}| + \sum_{n=m+1}^k \lambda_n^{-2} |a_n| |a_{m,n}| \leq$$

$$\leq |a_m| + \delta \left[\left(\sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n^{-2} |a_{m,n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n^{-2} |a_{m,n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq$$

$$\leq |a_m| + \delta \left[\lambda_m + \left(\sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n^{-2} |a_{m,n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

для всех $k > m > N \geq 1$. В силу этого неравенства ряд (12) сходится для любого m , $m = 1, 2, 3, \dots$. В силу сходимости ряда (12) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} a_n(l_m, l_m)$$

абсолютно сходится для любого m , $m = 1, 2, 3, \dots$

Поэтому из равенства (11) при $k \rightarrow \infty$ в силу (10) получаем

$$(x, l_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} a_n(l_m, l_m) \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Из неравенства $\|x\| \leq \|V_k - x\| + \|V_k\|$ по лемме 2 и (9) при $k \rightarrow \infty$ имеем

$$\|x\|^2 \leq \alpha \delta^2.$$

Таким образом, элемент $x \in H$ удовлетворяет требованиям 2) и 3) теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Абсолютная сходимость почти-ортогональных рядов в пространстве H

Пусть $0 < p < 2$, $d_n > 0$, $\{l_n\}$ — почти-ортогональная система элементов в пространстве H , $x \in H$ и $a_n = (x, l_n)$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n \quad (13)$$

мы будем называть почти-ортогональным и будем считать, что ряд (13) (d_n, p) абсолютно сходится, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-p} d_n^{2-p} |a_n|^p.$$

Отметим, что если $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty$, то в силу неравенства Бесселя, ряд (13) (d_n, p) абсолютно сходится для любого элемента $x \in H$.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$. Ставится вопрос: при каких ограничениях на элемент $x \in H$ почти-ортогональный ряд (13) (d_n, p) абсолютно сходится? Положим

$$A_m = A_m(x) = \left[\|x\|^2 - \alpha^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k^{-2} |a_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Покажем, что при определенных условиях на величину A_m почти-ортогональный ряд (13) (d_n, p) абсолютно сходится.

Предварительно доказываем

Лемма 4. Пусть $0 < p < 2$, $d_n > 0$, $s \geq 1$, $p_n > 0$, $t_n > 0$, $\alpha_{m,n} = \alpha_{n,m} > 0$,

$$t_m \cdot \sum_{n=s}^m p_n \alpha_{m,n} > R > 0 \quad m = s, s+1, s+2, \dots, \quad (15)$$

$\{l_n\}$ — почти-ортогональная система элементов пространства H , $x \in H$, $\{i_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $a_n = (x, l_n)$,

$$\sum_{n=m}^{\infty} d_n^2 t_n^{\frac{2}{2-p}} \alpha_{m,n}^{\frac{2}{2-p}} \leq q_m, \quad q_m > 0, \quad (16)$$

$m = s, s+1, s+2, \dots$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{m=s}^k \lambda_m^{-p} d_m^{2-p} |a_{l_m}|^p \leq R^{-1} \cdot \alpha^{\frac{p}{2}} \cdot \sum_{m=s}^k p_m q_m^{\frac{2-p}{2}} \cdot A_{l_m}^p. \quad (17)$$

Доказательство. В силу (15), неравенства Гёльдера и равенства (1) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=s}^k \lambda_m^{-p} d_m^{2-p} |a_{l_m}|^p &\leq R^{-1} \cdot \sum_{m=s}^k \lambda_m^{-p} d_m^{2-p} |a_{l_m}|^p \cdot t_m \cdot \sum_{n=s}^m p_n \alpha_{m,n} = \\ &= R^{-1} \cdot \sum_{m=s}^k p_m \cdot \sum_{n=m}^k \lambda_n^{-p} d_n^{2-p} |a_{l_n}|^p t_n \cdot \alpha_{m,n} \leq \\ &\leq R^{-1} \cdot \sum_{m=s}^k p_m \left(\sum_{n=l_m}^{\infty} \lambda_n^{-2} |a_n|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{n=m}^{\infty} d_n^2 t_n^{\frac{2}{2-p}} \alpha_{m,n}^{\frac{2}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{2}}, \end{aligned}$$

отсюда в силу неравенства Бесселя, (14) и (16), получаем

$$\sum_{m=s}^k \lambda_m^{-p} d_m^{2-p} |a_{l_m}|^p \leq R^{-1} \cdot \alpha^{\frac{p}{2}} \cdot \sum_{m=s}^k p_m A_{l_m}^p \cdot q_m^{\frac{2-p}{2}}.$$

Неравенство (17) доказано.

Из леммы 4 вытекает следующая

Теорема 3. При условиях леммы 4, если $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$, то сходимость ряда

$\sum_{n=m}^{\infty} p_n A_n^p q_n^{\frac{2-p}{2}}$ обеспечивает (d_n, p) -абсолютную сходимость почти-ортогонального ряда (13).

Из этой теоремы следуют

Теорема 4. Пусть $0 < p < 2$, $\frac{p}{2} - 1 \leq \omega < \infty$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \kappa^{\omega - \frac{p}{2}} A_n^p < \infty$. Тогда ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-p} |a_k|^p \kappa^{\omega}$ сходится*.

Теорема 5. Пусть $0 < p < 2$, $\frac{p}{2} - 1 \leq \omega < \frac{p}{2}$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n^p}{n \ln^{\frac{p}{2} - \omega} n} < \infty$. Тогда

$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^{-p} n^{\frac{p-2}{2}} |a_n|^p \ln^{\omega} n < \infty$.

* Если $H = L^2 = L^2(a, b)$ и система $\{l_n\}$ ортогональна, то из этой теоремы следует теорема С. Б. Стечкина [1].

Теорема 6. Пусть $0 < p < 2$, $\frac{p}{2} - 1 \leq \omega < \frac{p}{2}$. Тогда, если

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n^p}{n \ln n (\ln \ln n)^{\frac{p}{2}-\omega}} < \infty,$$

$$\text{то } \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^{-p} |a_n|^p n^{\frac{p-2}{2}} \ln^{\frac{p-2}{2}} n (\ln \ln n)^{\omega} < \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М. Физматгиз, 1958.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., Изд-во „Наука“ 1965.
3. Ахундов Р. Р. Тр. аспирантов, сер. физ.-матем. и техн. наук. Изд-во „Элм“, 1971.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 1. II 1972

А. С. Махмудов, Р. Р. Ахундов

Гилберт фэзасында санки ортогонал системлэр һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә гилберт фазасында санки ортогонал системләр үчүн тәриф верилмишдир.

Санки ортогонал системләр үчүн Бессел бәрәбәрсизлији, Рисс-Фишер теореме вә санки ортогонал сыраларын мүтләг жығылмасы һаггында теорем исбат олуңмушдур.

A. S. Makhmudov, R. R. Akhundov

On almost orthogonal systems in the Gilbert space

SUMMARY

In the given paper the authors introduce a definition of almost orthogonal systems of elements in the Gilbert space. This definition is analogous to the definition of almost orthogonal systems in the space $L^2(a, b)$ given by Bellman.

The following statements are proved for almost orthogonal systems for elements of the Gilbert space:

1. Bessel inequality;
2. Riss-Fischer theorem;
3. The theorem on absolute convergence of almost orthogonal series in the Gilbert space.

УДК 517.946

Х. М. НАДЖАФОВ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ

1. Постановка задачи. Единственность

Рассмотрим уравнение

$$L(z) \equiv y^m z_{xx} + z_{yy} + \left[\frac{\alpha_0}{1-\frac{m}{2}} + a(x, y) \right] z_x + \left[\frac{\beta_0}{y} + b(x, y) \right] z_y + c(x, y) z = 0 \quad (L)$$

в области Ω полуплоскости $y > 0$, ограниченной простой гладкой кривой Γ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и отрезком $\overline{AB}$ оси x . В уравнении (L) предполагается, что $\alpha_0 = \text{const}$, $\beta_0 = \text{const}$, $m = \text{const} > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$ и $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y) \in C^1(\overline{\Omega})$, причем всюду в $\overline{\Omega}$ $c(x, y) \leq 0$.

Для уравнения (L) ставится следующая краевая

Задача N. Найти решение $z(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ уравнения (L), удовлетворяющее краевым условиям

$$z|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l; \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} z_y(x, y) = \psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

где s — переменная длина дуги на Γ , отсчитываемая от точки $B(1, 0)$, l — длина Γ , причем $\varphi(s) \in C([0, l])$, $\psi(x) \in C((0, 1))$.

Решению задачи N для частных случаев уравнения (L) посвящены работы [7], [9], [3], [8], [1], [2], [5] и др. Имеет место [5] следующая

Лемма 1. Пусть непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $z(x, y)$ удовлетворяет неравенству $L(z) \geq 0$ (≤ 0), достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в некоторой точке $(x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$ и

$$c(x, y) \leq 0 \text{ в } \overline{\Omega}, \quad \alpha_0 = \text{const}, \quad \beta_0 = \text{const}, \quad m = \text{const} > 0, \quad -\frac{m}{2} < \beta_0 < 1.$$

Тогда

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} z_y(x_0, y) < 0 \quad (> 0)$$

при условии, что этот предел существует.

Доказательство леммы аналогично доказательству подобной леммы в [1] (см. также [6]) с введением вспомогательной функции

$$u(x, y) = \varepsilon \cdot z(x, y) \cdot (e^{\mu d^{1-\beta_0}} - \varepsilon e^{\mu y^{1-\beta_0}})^{-1},$$

где d — диаметр области Ω , $0 < \varepsilon < 1$, $\mu > \max_{\bar{\Omega}} |(1 - \beta_0)^{-1} \cdot y^{\beta_0} \cdot b(x, y)|$.

Теорема 1. Если существует решение задачи N для уравнения (L) в области Ω , $\alpha_0 = \text{const}$, $\beta_0 = \text{const}$, $m = \text{const} > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$,

$c(x, y) \leq 0$ в $\bar{\Omega}$, то оно единственное.

Утверждение теоремы следует из принципа максимума и леммы 1. Сначала рассмотрим уравнение

$$y^m z_{xx} + z_{yy} + \frac{\alpha_0}{1 - \frac{m}{2}} z_x + \frac{\beta_0}{y} z_y = 0. \quad (L_0)$$

Сопреженным с (L_0) будет уравнение

$$y^m z_{xx} + z_{yy} - \frac{\alpha_0}{1 - \frac{m}{2}} z_x - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta_0}{y} z \right) = 0. \quad (L_0^*)$$

§ 2. Решение задачи N для уравнения (L_0)

Относительно кривой Γ в ее параметрическом представлении $x = x(s)$, $y = y(s)$, следуя [1] (см. также [6]), предположим, что (условия Б).

1) $x(s), y(s) \in C^{2,\alpha}([0, l])$, $x'^2 + y'^2 \neq 0$;

2) в окрестности точек A и B на кривой Γ выполняется условие $\left| \frac{dx}{ds} \right| \leq \text{const} \cdot y^{m+1}(s)$, причем $y(0) = y(l) = x(l) = 0$, $x(0) = 1$.

Фундаментальное решение задачи N для уравнения (L_0) имеет вид:

$$q_1(x, y; x_0, y_0) = \kappa y^{\beta_0} r_1^{-(\alpha+\beta)} \cdot e^{(\beta-\alpha) \arccos \frac{x-x_0}{r_1}} \cdot F(\alpha_1, \beta_1, \alpha_1 + \beta_1; 1 - \sigma),$$

где

$$\alpha = \frac{\beta_1}{m+2} \left(\frac{m}{2} + \beta_0 - \alpha_0 \right), \quad \beta = \frac{1}{m+2} \left(\frac{m}{2} + \beta_0 + \alpha_0 \right),$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{m+2} \left(\frac{m}{2} + \beta_0 - i\alpha_0 \right),$$

$$\beta_1 = \frac{1}{m+2} \left(\frac{m}{2} + \beta_0 + i\alpha_0 \right), \quad F \text{ — гипергеометрическая функция,}$$

$$\left. \begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix} \right\} = (x - x_0)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} \left(y^{\frac{m+2}{2}} \mp y_0^{\frac{m+2}{2}} \right)^2, \quad \sigma = \frac{r^2}{r_1^2},$$

$$\kappa = \frac{1}{\pi} 2^{\alpha+\beta-2} \cdot \left(\frac{2}{m+2} \right)^{\alpha+\beta} \cdot e^{(\alpha-\beta)\frac{\pi}{2}} \cdot B(\alpha_1, \beta_1).$$

Рассмотрим также функцию

$$q_2(x, y; x_0, y_0) = \kappa y^{\beta_0} \cdot r_1^{-(\alpha+\beta)} \cdot e^{(\beta-\alpha) \arccos \frac{x-x_0}{r_1}} \cdot (F(\alpha_1, \beta_1, \alpha_1 + \beta_1; 1 - \sigma)).$$

Очевидно, что $q_1(x, y; x_0, y_0) = q_2(x_0, y_0; x, y)$. Введем обозначение

$$A_i(s, x_0, y_0) = y^m \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial y}, \quad (i = 1, 2)$$

где $\frac{dy}{ds} = \cos(n, x)$, $\frac{dx}{ds} = -\cos(n, y)$ — направляющие косинусы внешней нормали $\bar{n}$ к кривой Γ в точке $M(x(s), y(s))$. В случае произвольного контура Γ , удовлетворяющего условиям (Б), функция Грина задачи N для уравнения (L_0) имеет вид:

$G_1(x, y; x_0, y_0) = q_1(x, y; x_0, y_0) + p_1(x, y; x_0, y_0)$,
причем выполняются условия:

$$G_1|_{\Gamma} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +0} \left[\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\beta_0}{y} G_1 \right] = 0,$$

где

$$p_1(x, y; x_0, y_0) = 2 \int_0^l q_1(s; x_0, y_0) A_2(s, x, y) ds + \\ + 4 \int_0^l \int_0^l \Gamma_2(s, t; 2) q_1(t, x_0, y_0) A_2(s, x, y) ds dt,$$

$q_1(t; x_0, y_0) = q_1(\xi(t), \eta(t); x_0, y_0)$, $\Gamma_2(s, t; 2)$ — резольвента ядра $K_2(s, t) = A_2(t, \xi(s), \eta(s))$.

Функция Грина задачи N для уравнения (L_0^*) имеет вид:

$G_2(x, y; x_0, y_0) = q_2(x, y; x_0, y_0) + p_2(x, y; x_0, y_0)$,
причем выполняются условия:

$$G_2|_{\Gamma} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\partial G_2}{\partial y} = 0,$$

где

$$p_2(x, y; x_0, y_0) = 2 \int_0^l q_2(s; x_0, y_0) A_1(s, x, y) ds + \\ + 4 \int_0^l \int_0^l \Gamma_1(s, t; 2) q_2(t; x_0, y_0) A_1(s, x, y) ds dt,$$

$q_2(t; x_0, y_0) = q_2(\xi(t), \eta(t); x_0, y_0)$, $\Gamma_1(s, t; 2)$ — резольвента ядра $K_1(s, t) = A_1(t, \xi(s), \eta(s))$.

Легко доказать, что $G_1(x, y; x_0, y_0) = G_2(x_0, y_0; x, y)$. Введем функции

$$\lambda_i(t, x, y) = 2A_i(t, x, y) + 4 \int_0^l \Gamma_i(s, t; 2) A_i(s, x, y) ds, \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Нетрудно получить следующие представления:

$$p_1(x, y; x_0, y_0) = \int_0^l \lambda_2(t, x, y) q_1(t; x_0, y_0) dt, \quad p_2(x, y; x_0, y_0) = \\ = \int_0^l \lambda_1(t, x, y) q_2(t; x_0, y_0) dt.$$

Лемма 2. Если для кривой Γ выполняются условия (Б), $\gamma(x) \in C((0, 1))$ и абсолютно интегрируема на сегменте $[0, 1]$, то

$$z_1(x, y) = - \int_0^1 v(t) G_{10}(t, 0; x, y) dt,$$

где

$$G_{10}(t, 0; x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} v^{-\beta_0} \cdot G_1(t, v; x, y) = q_{10}(t, 0; x, y) + p_{10}(t, 0; x, y)$$

есть решение уравнения (L_0) , удовлетворяющее условиям

$$z_1|_{\Gamma} = 0, \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial z_1}{\partial y} = v(x), 0 < x < 1.$$

Доказательство. Так как функция $\eta^{-\beta_0} \cdot G_1(\xi, \eta; x, y)$ как функция от x, y есть решение уравнения (L_0) , то $z_1(x, y)$ — решение уравнения (L_0) . С другой стороны, $G_{10}(t, 0; \xi(s), \eta(s)) = 0$, то $z_1|_{\Gamma} = 0$. Функцию $z_1(x, y)$ запишем в виде:

$$z_1(x, y) = - \int_0^1 v(t) q_{10}(t, 0; x, y) dt - \int_0^1 v(t) p_{10}(t, 0; x, y) dt = \\ = z_{11}(x, y) + z_{12}(x, y).$$

Учитывая $v(t) \in C([0, 1])$ и абсолютную интегрируемость на $[0, 1]$, по-

лучим, что $\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial z_{11}}{\partial y} = v(x)$, $0 < x < 1$. Так как для $0 < x < 1$

$\frac{\partial}{\partial y} q_1(s; x, y) \rightarrow 0$ равномерно по s при $y \rightarrow +0$, то заключаем, что

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial z_{12}}{\partial y} = 0.$$

Лемма 3. Если для кривой Γ выполняются условия (Б), $\varphi(s) \in C([0, l])$ имеет нуль первого порядка в точках A и B , то функция

$$z_2(x, y) = - \int_0^l \varphi(s) \lambda_1(s, x, y) ds$$

есть решение уравнения (L_0) , удовлетворяющее условиям

$$z_2|_{\Gamma} = \varphi(s), 0 \leq s \leq l; \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial z_2}{\partial y} = 0, 0 < x < 1.$$

Доказательство. Из (1) следует, что функция $z_2(x, y)$ является решением уравнения (L_0) и что $\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial z_2}{\partial y} = 0$. Имеем

$$z_2(x, y) = - 2 \int_0^l A_1(s, x, y) \psi(s) ds,$$

где $\psi(s) = \varphi(s) + 2 \int_0^l \Gamma_1(s, t; 2) \varphi(t) dt$.

Итак, $z_2(x, y)$ — потенциал двойного слоя с непрерывной плотностью. Поэтому $\lim_{(x, y) \rightarrow (\xi_0, \eta_0)} z_2(x, y) = \varphi(s_0)$, где (ξ_0, η_0) — точка кривой Γ с дуговой координатой s_0 .

Теорема 2. Если для кривой Γ выполняются условия (Б), $\varphi(s) \in C([0, l])$ и имеет нуль первого порядка в точках A, B , $v(x) \in C([0, 1])$ и абсолютно интегрируема на сегменте $[0, 1]$,

$$\alpha_0 = \text{const}, \beta_0 = \text{const}, m = \text{const} > 0, -\frac{m}{2} < \beta_0 < 1, \text{ то функция}$$

$$z(x, y) = - \int_0^1 v(t) G_{10}(t, 0; x, y) dt - \int_0^l \varphi(s) \lambda_1(s, x, y) ds \quad (2)$$

есть решение задачи N для уравнения (L_0) в области Ω , и оно единственно.

Утверждение теоремы 2 следует из леммы 2, 3 и теоремы 1.

§ 3. Решение задачи N для уравнения (L)

Изучим свойство функции

$$\varphi(x, y) = \iint_{\Omega} \mu(\xi, \eta) G_1(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta,$$

где $\mu(\xi, \eta)$ — интегрируемая функция в области Ω . Имеет место

Лемма 4. Пусть функция $\mu(x, y)$ ограничена в замкнутой области $\bar{\Omega}$ и интегрируема в области Ω . Тогда $\varphi(x, y)$ обладает в полуплоскости $y > 0$ непрерывными производными φ_x и φ_y .

Если, кроме, того, функция $\mu(x, y) \in C^1(\Omega)$, то $\varphi(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, удовлетворяет однородным краевым условиям задачи N , $\varphi(x, y) \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению $L_0(\varphi) + \mu(x, y) = 0$.

Решение задачи N для уравнения (L) будем искать в виде:

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \iint_{\Omega} \mu(\xi, \eta) G_1(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta, \quad (3)$$

где $\mu(\xi, \eta)$ — неизвестная функция, $z_0(x, y)$ — решение задачи N для уравнения (L_0) , определяемое формулой (2). Предположим, что $\mu(\xi, \eta)$ — ограниченная функция в замкнутой области $\bar{\Omega}$, имеющая непрерывные частные производные в области Ω . Для отыскания $\mu(\xi, \eta)$ продифференцируем достаточное число раз (3) и подставим в уравнение (L) . В силу леммы 4 получим интегральное уравнение

$$\mu(x, y) = f(x, y) + \iint_{\Omega} K(\xi, \eta; x, y) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (4)$$

где

$$f(x, y) = a(x, y) z_{0x} + b(x, y) z_{0y} + c(x, y) z_0, \\ K(\xi, \eta; x, y) = a(x, y) G_{1x} + b(x, y) G_{1y} + c(x, y) G_1.$$

Пусть $a(x, y), b(x, y), c(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ и при $y \rightarrow 0$ $a(x, y) = 0(1)y^{\frac{m}{2}}$.

Тогда в замкнутой области $\bar{\Omega}$ нетрудно получить оценку

$$|K(\xi, \eta; x, y)| \leq C \frac{1}{r},$$

где C — постоянная, не зависящая от ξ, η, x, y .

Лемма 5. Число 1 не является собственным значением уравнения (4).

Доказательство. Рассмотрим однородное уравнение

$$\mu(x, y) - \iint_{\Omega} K(\xi, \eta; x, y) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0, \quad (5)$$

соответствующее уравнению (4). Пусть $\mu_0(x, y)$ — непрерывное решение уравнения (5), имеющее непрерывные частные производные первого порядка в Ω . Тогда в силу леммы 4 функция

$$u(x, y) = \iint_{\Omega} \mu_0(\xi, \eta) G_1(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta$$

будет решением задачи N с нулевыми краевыми условиями.

Из теоремы единственности решения задачи N вытекает, что $u(x, y) \equiv 0$ в области $\bar{Q}$. В силу (5) имеем

$$\mu_0(x, y) = \left\{ a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + L(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y) \right\} u(x, y).$$

Так как $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{Q}$, то $\mu_0(x, y) \equiv 0$ в $\bar{Q}$.

Из теории интегральных уравнений со слабой особенностью известно, что уравнение (4) имеет единственное решение.

Лемма 6. Пусть 1) $a(x, y), b(x, y), c(x, y) \in C^1(\bar{Q})$ и при $y \rightarrow 0$

$$a(x, y) = O(1) y^{\beta_0 + \frac{m}{2}}, \quad b(x, y) = O(1) y^{\beta_0};$$

2) в окрестности точек $A(0, 0), B(1, 0)$ при $y \rightarrow 0$

$$a(x, y) = O(1) y^{\beta_0 + \frac{m}{2} + \frac{m+2}{2} \frac{1}{\delta}}, \quad b(x, y) = O(1) y^{\beta_0 + \frac{m+2}{2} \frac{1}{\delta}},$$

где

$$1 < \delta < \frac{m+2}{2} \frac{1}{1-\beta_0}, \quad \alpha_0 = \text{const}, \quad \beta_0 = \text{const}, \quad m = \text{const} > 0,$$

$$-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1;$$

3) для кривой Γ выполняются условия (Б);

4) $\psi(x) \in C((0, 1))$ и абсолютно интегрируема с показателем δ на сегменте $[0, 1]$;

5) $\varphi(s) \in C([0, 1])$ и имеет нуль первого порядка в точках A, B .

Тогда функция $\mu(x, y)$ как решение уравнения (4) будет непрерывно дифференцируемой в области Q и ограниченной в замкнутой области $\bar{Q}$.

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству подобной леммы в [5]. Из вышеизложенного следует.

Теорема 3. Пусть $c(x, y) \leq 0$ в $\bar{Q}$, выполняются условия леммы 6 и $\mu(x, y)$ — решение уравнения (4); тогда функция, определяемая формулой (3), является решением задачи N для уравнения (L), и оно единственно.

Так как для нормальной кривой

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{1}{4} \quad (6)$$

выполняются условия (Б), то утверждение теоремы 3 справедливо и для нормальной области Q_0 , ограниченной кривой (6) и отрезком $\overline{AB}$ оси x .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И. Докт. дисс. М., 1951.
2. Волкодав В. Ф. Канд. дисс. Куйбышев, 1962.
3. S. Gellersted. Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte, Thèse, Uppsala, 1935.
4. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, тт. I, II. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
5. Наджафов Х. М. Канд. дисс. Баку, 1969.
6. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., Физматгиз, 1966.
7. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. Гостехиздат, 1947.
8. Франкль Ф. И. Изв. АН СССР, сер. матем., 10, № 2, 1946.
9. E. Holmgren. Sur un problème aux limites pour l'équation $y^m = z_{xx} + z_{yy} = 0$. Arkiv Mat., Astr., och Fysik, 19B, № 14, 1926.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 16. III 1972.

Х. М. Нəcəфев

Областын сэрхэдинин бир хиссэсиндэ сингулјар
эмсаллары олан вэ сэрхэддэ чырлашан ики тэртибли
хэтти еллиптик типли тэнлик үчүн бир сэрхэд
мәсәләсинин һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә x охунун $\overline{AB}$ парчасы вэ учлары $A(0, 0), B(1, 0)$ нөг-
тәләринә сәјкәнән һамар Γ әјриси илә һүдудланмыш $y > 0$ јарыммүс-
тәвисинин Q областында (L) тәнлији үчүн N мәсәләсинин һәллини
варлығы вэ јеканәлији исбат едилмишдир.

КН. М. Najafov

One boundary value problem solution for an elliptic
type linear equation of the second order with singular
coefficients on the part of the domain bound

SUMMARY

The uniqueness and existence theorem of the problem N solution
is proved for an equation

$$y^m z_{xx} + z_{yy} + \left[\frac{\alpha_0}{1 - \frac{m}{2}} + a(x, y) \right] z_x + \left[\frac{\beta_0}{y} + L(x, y) \right] z_y + c(x, y) z = 0$$

in a domain Q of a semi-flare $y > 0$ bounded by a common smooth
curve Γ with end points $A(0, 0), B(1, 0)$ and a segment $\overline{AB}$ of the x -
axis.

Б. А. ИСКЕНДЕРОВ

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ $t \rightarrow +\infty$
ДЛЯ КОРРЕКТНОГО ПО ПЕТРОВСКОМУ УРАВНЕНИЯ
В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Рассмотрим следующие задачи Коши:

$$\frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \dots, \frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x) \quad (2)$$

и

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{v=1}^m P_{jv} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_v(x, t) \quad (3)$$

$$u_j(x, 0) = u_{j0}(x), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

где

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in R_n; \quad i \frac{\partial}{\partial x} = \left(i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, i \frac{\partial}{\partial x_n} \right); \quad P_j(\sigma)$$

и $P_{jv}(\sigma)$ суть многочлены от $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in R_n$ степени не выше p с постоянными коэффициентами, R_n — n -мерное вещественное пространство.

В работе [1] изучено при $t \rightarrow \infty$ поведение решения задачи Коши (1) — (2), когда $m=1$, $n \geq 1$ и (3) — (4), когда $n=1$. В этой статье рассматриваем случай задачи Коши (1) — (2), и (3) — (4), когда $m \geq 1$, и $n \geq 1$.

Корни уравнений

$$\lambda^m(\sigma) - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma) \lambda^k(\sigma) = 0, \quad \det \|\lambda E - P_j(\sigma)\| = 0 \quad (5)$$

называются характеристическими корнями соответственно уравнения (1) и системы (3), где E — единичная матрица. Обозначим их через $\lambda_1^*(\sigma), \dots, \lambda_m^*(\sigma)$.

2. В классе единственности решение задачи (1) — (2) представляется в виде (см. [2]):

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial t^k} + F_k(x), \quad (6)$$

где $G(x, t)$ — функция Грина уравнения (1), которая определяется по формуле:

$$G(x, t) = (2\pi)^{-n} \int_{R_n} \sum_{j=1}^m \frac{\exp [t \lambda_j^*(\sigma) - i(x, \sigma)]}{\prod_{j \neq v} (\lambda_j^*(\sigma) - \lambda_v^*(\sigma))} d\sigma \equiv \quad (7)$$

$$\equiv (2\pi)^{-n} \int_{R_n} \sum_{j=1}^m c_j(\sigma) \exp [t \lambda_j^*(\sigma) - i(x, \sigma)] d\sigma.$$

Штрих у знака произведения означает, что множитель с $j=v$ отсутствует. Функции $F_k(x)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_k(x) = & u_{m-k-1}(x) - \frac{\partial^m G(x, 0)}{\partial t^m} * u_{m-k-2}(x) + \\ & + \left[\frac{\partial^m G(x, 0)}{\partial t^m} * \frac{\partial^m G(x, 0)}{\partial t^m} - \frac{\partial^{m+1} G(x, 0)}{\partial t^{m+1}} \right] * u_{m-k-3}(x) + \dots + \\ & + (-1)^{m-k-1} \left[\underbrace{\frac{\partial^m G(x, 0)}{\partial t^m} * \dots * \frac{\partial^m G(x, 0)}{\partial t^m}}_{(m-k-1) \text{ раз}} - C_{m-k-2}^1 \frac{\partial^{m+1} G(x, 0)}{\partial t^{m+1}} * \right. \\ & \left. * \frac{\partial^m G(x, 0)}{\partial t^m} * \dots * \frac{\partial^m G(x, 0)}{\partial t^m} + \dots + (-1)^{m-k-2} \frac{\partial^{2m-k-2} G(x, 0)}{\partial t^{2m-k-2}} \right] * u_0(x), \end{aligned} \quad (8)$$

где C_{m-k-2}^1 — число сочетаний. Считая функцию Грина $G(x, t)$ функционалом над пространством K , можно показать, что

$$\frac{\partial^{m+l} G(x, 0)}{\partial t^{m+l}} = D_{p(l+1)} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(x), \quad l=0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $D_{p(l+1)} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ — дифференциальный оператор порядка $p(l+1)$.

Так как $D_{p(l+1)} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ являются свертывателями в любом пространстве, в котором определен сдвиг (в частности в пространствах K , S и др.), то по формуле дифференцирования свертки из (8) и (9) следует, что

$$\begin{aligned} F_k(x) = & u_{m-k-1}(x) + D_p \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{m-k-2}(x) + D_{2p} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{m-k-3}(x) + \\ & + \dots + D_{p(m-k-1)} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_0(x). \end{aligned}$$

3. Исследуем теперь поведение $\frac{\partial^k G(x, t)}{\partial t^k}$, $0 \leq k \leq m-1$ при

$|x| \leq A, \quad t \rightarrow \infty.$

Определение. Точка $\sigma^0 \in R_n$ называется стационарной точкой гладкой функции $f(\sigma)$, если

$$\nabla f(\sigma^0) = 0.$$

Стационарная точка σ^0 функции $f(\sigma)$ называется невырожденной, если

$$\det \left\| \frac{\partial^2 f(\sigma^0)}{\partial \sigma_\alpha \partial \sigma_\beta} \right\| \neq 0.$$

Обозначим через $S_{j_1 \dots j_k}$ поверхность размерности $\leq n-1$, на которой $\lambda_{j_1}^*(\sigma), \dots, \lambda_{j_k}^*(\sigma)$ принимают равные значения. Будем предполагать, что характеристические корни уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\lambda_j^*(\sigma) = i\lambda_j(\sigma)$, $j=1, 2, \dots, m$, где $\lambda_j(\sigma)$ принимают вещественные значения при $\sigma \in R_n$, некратные и представляют из себя многочлены от σ .

2. При $|\sigma| \geq R$

$$|\nabla \lambda_j(\sigma)| \geq c_j > 0,$$

где R — достаточно большое число.

3. $\lambda_j(\sigma)$ имеют конечное число невырожденных стационарных точек $\sigma^{jq_j} = (\sigma_1^{jq_j}, \dots, \sigma_n^{jq_j})$, $1 \leq q_j \leq \beta_j$.

4. Поверхности $S_{j_1 \dots j_k}$ ограничены, и их можно разбить на сумму конечного числа областей $S_{j_1 \dots j_k}^\gamma$ так, что

$$\frac{\partial \lambda_{j_k}(\sigma)}{\partial \sigma_\nu} \Big|_{S_{j_1 \dots j_k}^\gamma} \neq 0,$$

и

$$\text{sign} \frac{\partial \lambda_{j_1}(\sigma)}{\partial \sigma_\nu} \Big|_{S_{j_1 \dots j_k}^\gamma} = \dots = \text{sign} \frac{\partial \lambda_{j_k}(\sigma)}{\partial \sigma_\nu} \Big|_{S_{j_1 \dots j_k}^\gamma},$$

где $\nu = \nu(\gamma)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1—4, а $u_k(x)$ финитные функции, дифференцируемые по переменным $(x_1, \dots, x_n)$ до порядка $2p(m-1)+n+2$ включительно. Тогда при $t \rightarrow +\infty$ для решения задачи Коши (1)–(2) имеет место

$$u(x, t) = t^{-\frac{n}{2}} B(x, t) + O\left(t^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right),$$

где

$$B(x, t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k,j} \sum_{q_j} i^k |F_{jq_j}|^{-\frac{1}{2}} \exp[i(t\lambda_j(\sigma^{jq_j}) - (x, \sigma^{jq_j}) + \frac{\pi}{4} \delta_{jq_j})] c_j(\sigma^{jq_j}) \bar{F} = (\sigma^{jq_j});$$

δ_{jq_j} есть сигнатура квадратичной формы с матрицей

$$\left\| \frac{\partial^2 \lambda_j(\sigma^{jq_j})}{\partial \sigma_\alpha \partial \sigma_\beta} \right\|,$$

F_{jq_j} — определитель этой матрицы, а $\bar{F}_k$ — преобразование Фурье $F_k(x)$,

Доказательство. Интеграл в (7), вообще говоря, расходится. Поэтому представим $G(x, t)$ в виде:

$$G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} t^{m-1}} D\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_{R_n} D^{-1}(\sigma) \sum_{j=1}^m \frac{\exp[i(t\lambda_j(\sigma) - (x, \sigma))]}{\prod_{j \neq \nu} (\lambda_j(\sigma) - \nu_j(\sigma))} d\sigma \equiv \\ \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2} t^{m-1}} D\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) G_0(x, t),$$

УДК 517. 446

В. А. ИБРАГИМОВ

ПОВЫШЕНИЕ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ И БЫСТРОРАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе [1] автором совместно с Р. И. Алихановой исследована краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка с разрывными и быстро растущими коэффициентами в классе Орлича. Доказано существование и единственность обобщенного решения. В данной статье рассмотрено повышение гладкости решения указанной задачи.

Пусть G — ограниченная составная область n -мерного евклидова пространства E_n с границей Γ . Область G состоит из двух¹ областей G_1 и G_2 , разделенных $(n-1)$ -мерной поверхностью γ , не имеющей общих точек с Γ (γ — граница G_1); γ и Γ — достаточно гладкие. В области G дано квазилинейное эллиптическое уравнение порядка $2m$:

$$L^1(u) = L_0^1(u) + V^1(u) = \sum_{|\alpha| = m-e} (-1)^{m-e} D^\alpha A_\alpha^1(x, D^\omega u, D^\nu u) + V^1(u) = 0, \quad (1)$$

где $|\omega| < m+e$, $|\nu| = m+e$, $D^\beta = \partial^\beta / \partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \beta_n$, $L_0^1(u)$ — главная часть оператора $L^1(u)$;

$$V^1(u) = \sum_{|\beta| < m-e} (-1)^\beta D^\beta V_\beta^1(x, D^\omega u, D^\nu u) + \sum_{|\beta| = m-e} (-1)^{m-e} D^\beta V_\beta^1(x, D^\omega u), \quad (2)$$

$V^1(u)$ — операторы порядка, не превосходящие $2m-1$, которые при формулируемых ниже условиях будем называть подчиненными.

Уравнение (1) рассматривается при следующих краевых условиях:

$$u|_\Gamma = \varphi_0(x), \dots, D^\omega u|_\Gamma = \varphi_\omega(x), \quad (3)$$

$$\left[\sum_{|\alpha| = m-e} (-1)^{m-e+\alpha-1} D^{\alpha-x} A_\alpha(x, D^\omega u, D^\nu u) \nu_x + \sum_{|\beta| < m-e} (-1)^{\beta-e+\alpha-2} D^{\beta-x} V_\beta(x, D^\omega u, D^\nu u) \nu_x \right]$$

¹ Для простоты изложения.

$$+ \sum_{|\beta|=m-e} (-1)^{m-e+\alpha-1} D^{B-\alpha} V_{\beta}^{\alpha}(x, D^{\omega} u) v_{\alpha} \Big|_{\Gamma} = \chi_{\alpha}(x). \quad (4)$$

$$[D^{\omega} u]_{\Gamma} = 0; \quad |\omega| \leq m + e - 1.$$

Здесь $[D^{\omega} u]_{\Gamma} = D^{\omega} u|_{\Gamma+0} - D^{\omega} u|_{\Gamma-0}$ — символы $\gamma + 0$, $\gamma - 0$ — означают что берутся предельные значения с разных сторон γ ; v_{α} — компоненты, внешней относительно G_1 (G_2) нормали.

Введем классы $O_p^s(G)_{s=m+e}$, которые являются прямыми суммами классов типа Орлича [3]:

$$O_p^s(G)_i = O_{p_1}^s(G_1) + O_{p_2}^s(G_2),$$

где $p_i(\zeta)$ — N -функции [3]. $\left(\sum_{|\nu|=s} |\zeta_{\nu}|^2 \right)^{1/2}$.

Определение 1. Под классом Орлича $O_{p_1}^s(G_1)$ будем понимать совокупность функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям (3), (4), для которых сходится интеграл $\int_{G_1} p_1(L^s u) dx < \infty$.

Сформулируем четыре условия, при которых доказана разрешимость задачи (1) — (4).

Условие 1. Для любого K и $|\xi_{\omega}| \leq K$ найдутся такие постоянные c^1 , C^1 , C_1^1 и N -функция [3], зависящие от K , что для любых значений

$$c^1 p_1(\zeta) \leq \sum_{|\alpha|=m-e} A_{\alpha}^1(x_1, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu}) \zeta_{\alpha} \leq C^1 p_1(\zeta).$$

Кроме того, предполагается, что

$$a) \text{ для любого } p > 0 \quad p_1(\zeta) \geq c^1(\zeta)^p - C_1^1, \quad (p_1(0))' = 0, \quad \text{для } \zeta > 0$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{p_1(\zeta)}{\zeta} \right) > 0;$$

$$b) |A_{\alpha}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu})| \leq c^1 \frac{p_1(\zeta)}{\zeta} + C_1^1;$$

с) функции $A_{\alpha}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu})$ непрерывны по всем аргументам и непрерывно дифференцируемы по ζ_{ν} . Относительно x , ξ_{ω} они непрерывны в следующем смысле:

$$|A_{\alpha}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu}) - A_{\alpha}^1(x', \xi_{\omega}, \zeta_{\nu})| \leq \varepsilon (|x - x'| + |\xi_{\omega} - \xi_{\omega}'|) \frac{p_1(\zeta)}{\zeta}. \quad (6)$$

Условие 2. Для $|\xi_{\omega}| \leq K$ найдутся такие постоянные $C^1 = C^1(K)$, что

$$a) \sum_{\substack{|\alpha|=m-e \\ |\nu|=m+e}} A_{\alpha}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu}) \cdot \eta_{\alpha+2e} \eta_{\nu} \geq C^1 \left(\frac{p_1(\zeta)}{\zeta^2+1} + 1 \right) \sum_{|\nu|=m+e} |\eta_{\nu}|^2;$$

$$b) |A_{\alpha}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu})| \leq C_1^1 \left(\frac{p_1(\zeta)}{\zeta^2+1} + 1 \right).$$

Условие 3 обеспечивает подчиненность оператора V^1 [1]. Для $|\xi_{\omega}| \leq K_1$ существуют такие функции $f_1^1(x)$ и $g_1(x)$, зависящие от K_1 так, что $|V_{\alpha}^1(x, \xi_{\omega})| \leq f_1^1(x)$, где $[N_1(f_1^1(x))] < \infty$, $N_1(\eta)$ — дополнительная к $p_1(\zeta)$ [3] N -функция:

$$|V_{\alpha}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu})| \leq g_1(x) p_{1,1}(\zeta) + g_1^1(x) f_1^1(x),$$

где

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} p_{1,1}(\zeta)/p_1(\zeta) = 0 \text{ и } g_1^1(x) > 0.$$

Условие 4. Для любых ξ_{ω} , ζ_{ν} имеет место оценка

$$\sum_{|\beta| < m-e} V_{\beta}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu}) \eta_{\beta} + \sum_{|\beta|=m-e} V_{\beta}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu}) \eta_{\beta} \leq$$

$$\leq (1-\delta) \sum_{|\alpha|=m-e} A_{\alpha}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu}) \eta_{\alpha} + f_c(x),$$

где $f_c(x) \leq L_1(G_1)$, $\delta > 0$; кроме того, предполагается, что

$$\sum_{|\alpha|=m-e} A_{\alpha}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu}) \eta_{\alpha} \geq C_{\beta}^1(\zeta) L^{1+\varepsilon}, \quad \text{где } \varepsilon > 0.$$

Отметим, что из условия 4 следует равномерная ограниченность возможных решений задачи (1) — (4) и, значит, $|L^{\omega} u| \leq K$, $|\omega| \leq m + e - 1$. Чтобы в этом убедиться, достаточно скалярно умножить (1) на $v \in \tilde{O}^{(m-e)}$ и воспользоваться условием (4).

Определение 2. Пусть $p_1(\zeta)$ отвечает постоянной K . Функция $u(x)$ называется слабым решением задачи (1) — (4) в классе $O_{p_1}^{(m+e)}(G_1)$, если $u(x) \in O_{p_1}^{(m+e)}(G_1)$ и для всякой функции $v \in \tilde{O}_{p_1}^{(m-e)}(G_1)$ выполнено соотношение

$$\sum_{|\alpha|=m-e} [A_{\alpha}^1(x, D^{\omega} u, D^{\nu} u) D^{\alpha} v] + \sum_{|\beta| < m-e} [V_{\beta}^1(x, D^{\omega} u, D^{\nu} u) D^{\beta} v] +$$

$$+ \sum_{|\beta|=m-e} [V_{\beta}^1(x, D^{\omega} u) D^{\beta} v] = 0. \quad (7)$$

Отметим, что из условий (1) — (4) вытекает сходимость всех интегралов (7).

Теорема 1. Если функции $A_{\alpha}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu})$, $V_{\beta}^1(x, \xi_{\omega}, \zeta_{\nu})$, $V_{\beta}^1(x, \xi_{\omega})$ в уравнении (1) удовлетворяют условиям (1) — (4), то задача (1) — (4) разрешима в классе Орлича $O_{p_1}^{(m+e)}(G_1)$.

1. Сначала доказывается разрешимость уравнения вида

$$L^1(u) = \sum_{|\alpha|=m-e} (-1)^{m-e} D^{\alpha} A_{\alpha}^1(x, D^{\nu} u) = h_1(x) \quad (8)$$

при условиях (3) и (4). Здесь $A_{\alpha}^1(x, \xi_{\nu})$ удовлетворяют условиям 1, 2 и непрерывно дифференцируемы по x , причем

$$\left| \frac{\partial A_{\alpha}^1(x, \xi_{\nu})}{\partial x_j} \right| \leq D^1 \frac{p_1(\zeta)}{\zeta} + C_1^1, \quad h_1(x) \in L_2(\bar{G}_1).$$

Доказательство существования решения этой задачи проводим с помощью аналога метода Галеркина. Решение задачи будем искать в виде $u = f + z$, где f — непрерывное продолжение граничной функции $\varphi(x)$ внутрь области G и поэтому $z \in \tilde{O}_{p_1}^{(m+e)}(G_1)$.

Пусть теперь w_{θ} — такая система гладких функций, что функции

$$B_1 w_{\theta}^1 = \Delta^e (M_1 w_{\theta}^1 - \psi_1 \Delta w_{\theta}^1) = V_{\theta}^1 \quad (9)$$

образуют полную систему в $C^{(m+e)}(\bar{G}_1)$, где M — достаточно большие константы, $\psi_1(x) > 0$ для $x \in G_1$, $L^{\omega} \psi_1|_{\Gamma} = 0$, $|\omega_{\theta}| \leq m + e$. Прибли-

женные решения $u_k = f + z_k$, где $z_k^1 = \sum_{\theta=1}^K C_{\theta k}^1 w_{\theta}^1$, определяются из системы нелинейных уравнений

$$\sum_{|\alpha|=m-e} (-1)^{m-e} [D^{\alpha} A_{\alpha}^1(x, D^{\nu} (1 + z_k)) B_1 w_{\theta}^1] + [h_1, B_1 w_{\theta}^1]. \quad (10)$$

Из аналога леммы 1 — 4 следует разрешимость системы (10). Умножим уравнение (10) на $C_{\theta k}^1$ и просуммируем от 1 до K :

$$\sum_{|\alpha|=m-e} (-1)^{m-e} [D^{\alpha} A_{\alpha}^1(x, D^{\nu} (1 + z_k)) B_1 z_k^1] + [h_1, B_1 z_k^1]. \quad (11)$$

Доказана следующая

Лемма 1. При условиях 1 и 2 имеет место следующее основное энергетическое неравенство:

$$[L_0^1(f+z), B_1, z] \geq \varepsilon_1 \left[\psi_1 \frac{\rho_1 (D^{m+e}(1+z))}{(D^{m+e}(1+z))^2 + 1} \cdot |D^{m+e+1}(1+z)|^2 \right] + \\ + \varepsilon_2 [\rho_1 (D^{m+e}(f+z)) - K_1(f)]. \quad (12)$$

Из соотношения (11) вытекает оценка

$$[\rho_1 (D^{m+e}(f+z_k))] + \\ + \left[\psi_1 \left(\frac{\rho_1 (D^{m+e}(1+z_k))}{(D^{m+e}(1+z_k))^2 + 1} + 1 \right) |D^{m+e+1}(1+z_k)|^2 \right] \leq C^1, \quad (13)$$

где C^1 не зависит от K . Отсюда следует, что найдется такая подпоследовательность $\{u_k\}$, что u_k и $D^v u_k$, $|v| \leq m+e$ сойдутся почти всюду в G_1 к u и соответственно к $D^{m+e} u$. Из (13), (1, д) и теоремы Валле—Пуссена [3] следует, что $A_x^1(x, D^v u_k)$ равномерно (по K) абсолютно непрерывны функции x .

Переходя к пределу при $K \rightarrow \infty$, получим, используя полноту $\{B_1 w_0\}$ в $C^{m-e}(\bar{G}_1)$, что

$$\sum_{|z|=m-e} [A_x^1(x, D^v u) D^z \tau_1] + [h_1, \tau_1] = 0 \quad (14)$$

для $\tau_1 \in C^{(m-e)}(G_1)$. Далее, с помощью процесса слабого замыкания по τ_1 устанавливается справедливость соотношения (14) для любых $\tau_1 \in \dot{O}_{\tau_1}^{(m-e)}(G_1)$. Единственность найденного решения дает.

Лемма 2. При выполнении условий 1 и 2 $D^z v > 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{|z|=m-e} [A_x^1(x, D^v u_1) - A_x^1(x, D^v u_2) D^z \tau] \geq C_4^1 \left[\rho_1 \frac{D^{m+e}(u_1 - u_2)}{C_5^1} \right]. \quad (15)$$

Теорема 2. При выполнении условий 1 и 2 задача (8), (3), (4) однозначно разрешима, если $A_x^1(x, \zeta_v)$ лишь непрерывны по x и $h_1 = \sum_{|z|=m-e} D^z h_{1z}$, где $[N_1(h_{1z})] < \infty$.

Доказательство проводится методом осреднения [4].

3. Устанавливается разрешимость задачи (1)–(4) в случае, когда оператор $V_\beta^{1\lambda}(u)$ заменен ограниченным оператором $V_\beta^{1\lambda} u$, где

$$V_\beta^{1\lambda}(u) = \left(1 + \lambda \sum_{|z| < m-e} (V_\beta^1(u))^2 \right)^{-1} V_\beta^1(u),$$

которые при $\lambda \rightarrow 0$ стремятся к $V_\beta^1(u)$.

Доказательство проводится при помощи топологических методов [5] и результата предыдущего пункта.

4. Наконец, доказывается, что последовательность найденных решений $u_\lambda(x)$ при $\lambda \rightarrow 0$ сходится к решению уравнения (1).

В заключение выражаю глубокую благодарность Гашиму Низамовичу Агаеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиханова Р. И., Ибрагимов В. А. „Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук“, 1971, № 5.
2. Симонов А. С. Канд. дисс. г. Воронеж, 1966.
3. Красносельский М. Л., Рутцкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича М., 1958.

4. Вишик М. И. Тр. Моск. матем. о-ва, 1961, № 12.
5. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 29. V 1972

В. А. Ибрагимов

Квазихэтти еллиптик типли кәсилән вә сүр'әтләр артан
эмсаллы тәнликләрин һамар һәлләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Бахылан мәсәләнин һамар һәлләринин, һәммин мәсәләләрдән асылы
олараг, һансы шәртләр дахилиндә јахшылашмасы арашдырылмышдыр.

V. A. Ibragimov

Increasing of solution smoothness of quasi-linear
equations of elliptic type with discontinuous and rapidly
growing coefficients

SUMMARY

The conditions of increasing of solution smoothness of a given
problem in relation to data of the problem are found in the present
paper.

УДК 532. 546

М. Н. ВЕЛИЕВ, И. И. ДЖАББАРОВ

О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ СО СЛАБОПРОНИЦАЕМОЙ КРОВЛЕЙ

В данной статье исследуется неустановившееся движение жидкости, подчиняющееся линейному закону фильтрации, к совершенным скважинам, расположенным в бесконечном по простиранию пласте, кровля которого слабопроницаема.

В работах [1, 2] рассмотрены задачи о движении жидкости в пласте с непроницаемой кровлей и подошвой, состоящем из двух зон с различными коэффициентами проницаемости и пьезопроводности. Нами аналогичные задачи решаются для случая, когда разрабатываемый пласт включает в себя три зоны с различными коэффициентами проницаемости и пьезопроводности. Эти коэффициенты для каждой зоны считаются постоянными.

Предположим, что рассматриваемый пласт отделен от вышележащего соседнего пласта, в котором поддерживается постоянное давление

P_0 , слабопроницаемой перемычкой и в нем имеются две зоны в виде круга (I зона) и кольцевой области (II зона), границам и неоднородности которых считаются концентрические окружности (рисунок).

Коэффициенты проницаемости и пьезопроводности I и II зон обозначим соответственно через κ_1, λ_1 и κ_2, λ_2 , а для остальной части пласта (III зона) — κ_3, λ_3 .

В начальный момент времени давление во всем пласте считается постоянным и равным P_0 , и скважины, работающие с заданными деби-

тами Q_j , где j равно номеру (1, 2, 3,) зон, расположены в произвольных точках соответствующих зон пласта. Требуется определить давление в любой момент времени в произвольной точке пласта.

Математически рассматриваемая задача формулируется следующим образом: найти решение следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных, в которой учтены непроницаемость подошвы и слабопроницаемость кровли пласта,

$$\frac{\partial^2 P_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P_j}{\partial \varphi^2} - \omega_j^2 (P_j - P_0) = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial P_j}{\partial t} \quad (1)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$P_j = P_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (2)$$

$$P_3 = P_0 \quad \text{при} \quad r = \infty, \quad (3)$$

$$P_1 = P_2, \quad \kappa_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} = \kappa_2 \frac{\partial P_2}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = a, \quad (4)$$

$$P_2 = P_3, \quad \kappa_2 \frac{\partial P_2}{\partial r} = \kappa_3 \frac{\partial P_3}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = b, \quad (5)$$

$$\left(R_j \frac{\partial P_j}{\partial r} \right)_{R \rightarrow 0} = \frac{Q_j \mu}{2 \pi \kappa_j h} \equiv A_j, \quad (6)$$

$$\text{где} \quad \omega_j^2 = \frac{\kappa_{Tj}}{h h_T \kappa_j}, \quad R_j^2 = r^2 + r_j^2 - 2 r r_j \cos(\varphi - \varphi_j),$$

r, φ — цилиндрические координаты;

t — время;

(r_j, φ_j) — координаты точек, в которых находятся скважины в соответствующих зонах;

h — мощность пласта;

κ_{Tj} — коэффициент проницаемости перемычки над соответствующими зонами пласта;

μ — коэффициент вязкости жидкости.

Для решения рассматриваемой задачи воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа

$$\bar{P}(r, \varphi, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(r, \varphi, t) dt, \quad (7)$$

которое сводит задачу интегрирования уравнений (1) при условиях (2) — (6) к интегрированию следующих уравнений, учитывающих начальное условие (2):

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_j}{\partial \varphi^2} - q_j^2 U_j = 0, \quad (8)$$

где

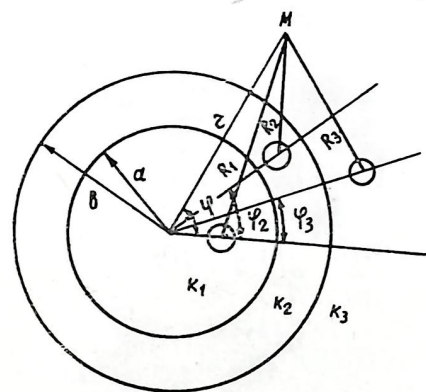
$$U_j = \frac{1}{\lambda} P_0 - \bar{P}_j, \quad q_j^2 = \frac{\lambda}{\lambda_j} + \omega_j^2.$$

Так же как в работе [2], решения уравнений (8) находим из

$$U_1 = -A_1 \left\{ \frac{1}{\lambda} K_0(q_1 R_1) + \sum_{n=0}^\infty I_n(q_1 r) [a_n^{(1)} \cos n \varphi + a_n^{(2)} \sin n \varphi] \right\}, \quad (9)$$

$$U_2 = -A_2 \left\{ \frac{1}{\lambda} K_0(q_2 R_2) + \sum_{n=0}^\infty [b_n^{(1)} I_n(q_2 r) + b_n^{(2)} K_n(q_2 r)] \cos n \varphi + \right\}, \quad (10)$$

$$U_3 = -A_3 \left\{ \frac{1}{\lambda} K_0(q_3 R_3) + \sum_{n=0}^\infty K_n(q_3 r) [c_n^{(1)} \cos n \varphi + c_n^{(2)} \sin n \varphi] \right\}. \quad (11)$$



Неизвестные коэффициенты $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, b_n^{(1)}, b_n^{(2)}, b_n^{(3)}, b_n^{(4)}, c_n^{(1)}, c_n^{(2)}$ определяются из граничных условий (3)–(6) после предварительного преобразования к ним преобразования Лапласа. Для этого используется известное разложение по произведениям цилиндрических функций:

$$K_0(q_j R_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n(\varphi - \varphi_j) I_n(q_j r_j) K_n(q_j r), \quad (12)$$

где $r > r_j$ (если $r < r_j$, то в (12) r и r_j должны меняться местами); $\epsilon_n = 1$, если $n = 0$; $\epsilon_n = 2$ если $n = 1, 2, \dots$

Учитывая формулу (12) в выражениях (9)–(11), из граничных условий сопоставлением коэффициентов при $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ можно определить неизвестные коэффициенты.

Оригиналы функций (9)–(11), с учетом в них найденных коэффициентов вышеприведенным способом, очень громоздки, и произведение расчетов по ним почти невозможно. Поэтому здесь они не приводятся. Будем рассматривать только малые значения параметра λ , которые соответствуют большим значениям времени в оригинале.

Заменяя с этой целью цилиндрические функции, входящие в (9)–(11), первыми их разложения для малых значений аргумента (кроме функции с нулевыми индексами), будем иметь:

$$U_1 = \frac{A_1}{\lambda} \left[K_0(q_1 r) - K_0(q_1 a) + \frac{1}{v_1} K_0(q_2 a) - \frac{1}{v_1} K_0(q_2 b) - \frac{1}{v_3} K_0(q_3 b) + \Phi_1 \right] + \frac{A_2}{\lambda} \left[K_0(q_2 r_2) - K_0(q_2 b) + \frac{1}{v_2} K_0(q_3 b) + \Phi_2 \right] + \frac{A_3}{\lambda} [K_0(q_3 r_3) + \Phi_3], \quad (13)$$

$$U_2 = \frac{A_1}{\lambda} \left[\frac{1}{v_1} K_0(q_2 r) - \frac{1}{v_1} K_0(q_2 b) + \frac{1}{v_3} K_0(q_3 b) + \Phi_4 \right] + \frac{A_2}{\lambda} \left[K_0(q_2 r_2) - K_0(q_2 b) + \frac{1}{v_2} K_0(q_3 b) + \Phi_5 \right] + \frac{A_3}{\lambda} \Phi_6, \quad (14)$$

$$U_3 = \frac{A_1}{\lambda} \left[\frac{1}{v_3} K_0(q_3 r) + \Phi_7 \right] + \frac{A_2}{\lambda} \left[\frac{1}{v_2} K_0(q_3 r) + \Phi_8 \right] + \frac{A_3}{\lambda} \Phi_9, \quad (15)$$

где

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2} \left[F\left(\frac{r_1}{r}, \varphi\right) + \alpha_1 F\left(\frac{rr_1}{a^2}, \varphi\right) \right] - \alpha_2^2 \alpha_3 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_7^m F\left(\frac{rr_1}{a^2} c^m, \varphi\right),$$

$$\Phi_2 = -\alpha_4 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_7^m \left[F\left(\frac{r}{r_2} c^m, \varphi - \varphi_2\right) + \alpha_3 F\left(\frac{rr_2}{b^2} c^m, \varphi - \varphi_2\right) \right],$$

$$\Phi_3 = -2\alpha_4 \alpha_5 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_7^m F\left(\frac{r}{r_3} c^m, \varphi - \varphi_3\right),$$

$$\Phi_4 = -\alpha_4 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_7^m \left[F\left(\frac{r_1}{r} c^m, \varphi\right) + \alpha_3 F\left(\frac{rr_1}{b^2} c^m, \varphi\right) \right],$$

$$\Phi_5 = -\frac{1}{2} F\left(\frac{r}{r_2}, \varphi - \varphi_2\right) - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_7^m \left\{ \alpha_3 F\left(\frac{rr_2}{b^2} c^m, \varphi - \varphi_2\right) + \alpha_1 \left[\alpha_3 F\left(\frac{a^2 r}{b^2 r_2} c^m, \varphi - \varphi_2\right) - F\left(\frac{a^2}{rr_2} c^m, \varphi - \varphi_2\right) - \alpha_3 F\left(\frac{a^2 r_2}{b^2 r} c^m, \varphi - \varphi_2\right) \right] \right\},$$

$$\Phi_6 = \alpha_5 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_7^m \left[-F\left(\frac{r}{r_3} c^m, \varphi - \varphi_3\right) + \alpha_1 F\left(\frac{a^2}{rr_3} c^m, \varphi - \varphi_3\right) \right],$$

$$\Phi_7 = -2\alpha_2 \alpha_6 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_7^m F\left(\frac{r_1}{r} c^m, \varphi\right),$$

$$\Phi_8 = \alpha_6 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_7^m \left[-F\left(\frac{r_2}{r} c^m, \varphi - \varphi_2\right) + \alpha_1 F\left(\frac{a^2}{rr_2} c^m, \varphi - \varphi_2\right) \right],$$

$$\Phi_9 = -\frac{1}{2} \left[F\left(\frac{r}{r_3}, \varphi - \varphi_3\right) - \alpha_3 F\left(\frac{b^2}{rr_3}, \varphi - \varphi_3\right) \right] + 2\alpha_1 \alpha_5 \alpha_6 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_7^m F\left(\frac{a^2}{rr_3} c^m, \varphi - \varphi_3\right),$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - v_1}{1 + v_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{1 + v_1}, \quad \alpha_3 = \frac{1 - v_2}{1 + v_2}, \quad \alpha_4 = \frac{v_1}{1 + v_1},$$

$$\alpha_5 = \frac{v_2}{1 + v_2}, \quad \alpha_6 = \frac{1}{1 + v_2}, \quad \alpha_7 = \alpha_1 \alpha_3, \quad c = \frac{a^2}{b^2}, \quad v_1 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \quad v_2 = \frac{\kappa_3}{\kappa_2},$$

$$F(z, \varphi - \varphi_j) = \ln[1 - 2z \cos(\varphi - \varphi_j) + z^2].$$

Перейдя к оригиналам в (12)–(14), для больших значений получим:

$$P_0 - P_1 = A_1 \left[L\left(\omega_1, \frac{r^2}{4x_1 t}\right) - L\left(\omega_1, \frac{a^2}{4x_1 t}\right) + \frac{1}{v_1} L\left(\omega_2, \frac{a^2}{4x_2 t}\right) - \frac{1}{v_1} L\left(\omega_2, \frac{b^2}{4x_2 t}\right) - \frac{1}{v_3} L\left(\omega_3, \frac{b^2}{4x_3 t}\right) + \Phi_1 \right] + A_2 \left[L\left(\omega_2, \frac{r_2^2}{4x_2 t}\right) - L\left(\omega_2, \frac{b^2}{4x_2 t}\right) + \frac{1}{v_2} L\left(\omega_3, \frac{b^2}{4x_3 t}\right) + \Phi_2 \right] + A_3 \left[L\left(\omega_3, \frac{r_3^2}{4x_3 t}\right) + \Phi_3 \right], \quad (16)$$

$$P_0 - P_2 = A_1 \left[\frac{1}{v_1} L\left(\omega_2, \frac{b_2}{4x_2 t}\right) + \frac{1}{v_3} L\left(\omega_3, \frac{b^2}{4x_3 t}\right) + \frac{1}{v_1} L\left(\omega_2, \frac{r^2}{4x_2 t}\right) + \Phi_4 \right] + A_2 \left[L\left(\omega_2, \frac{r_2^2}{4x_2 t}\right) - L\left(\omega_2, \frac{b^2}{4x_2 t}\right) + \frac{1}{v_1} L\left(\omega_3, \frac{b^2}{4x_3 t}\right) + \Phi_5 \right] + A_3 \Phi_6, \quad (17)$$

$$P_0 - P_3 = A_1 \left[\frac{1}{\nu_2} L \left(\omega_3, \frac{r^2}{4x_3 t} \right) + \Phi_7 \right] + A_2 \left[\frac{1}{\nu_2} L \left(\omega_3, \frac{r^2}{4x_3 t} \right) + \Phi_8 \right] + A_3 \Phi_9, \quad (18)$$

где

$$L \left(\omega_j, \frac{z^2}{4x_j t} \right) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{u} \exp \left(-\frac{z^2}{4x_j t} - \omega_j^2 x_j u \right) du$$

Для случая, когда кровля и подошва разрабатываемого пласта непроницаемы, из (15)–(17), переходя к пределу при $\omega_j = 0$, найдем

$$P_0 - P_1 = \frac{A_1}{2} \left[Ei \left(-\frac{a^2}{4x_1 t} \right) - Ei \left(-\frac{r^2}{4x_1 t} \right) - \frac{1}{\nu_1} Ei \left(-\frac{a^2}{4x_2 t} \right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{\nu_1} Ei \left(-\frac{b^2}{4x_2 t} \right) + \frac{1}{\nu_3} Ei \left(-\frac{b^2}{4x_3 t} \right) + 2\Phi_1 \right] + \\ + \frac{A_2}{2} \left[Ei \left(-\frac{b^2}{4x_2 t} \right) - Ei \left(-\frac{r^2}{4x_2 t} \right) - \frac{1}{\nu_2} Ei \left(-\frac{b^2}{4x_3 t} \right) + \right. \\ \left. + 2\Phi_2 \right] - \frac{A_3}{2} \left[Ei \left(-\frac{r^2}{4x_3 t} \right) - 2\Phi_3 \right], \quad (19)$$

$$P_0 - P_2 = \frac{A_2}{2} \left[\frac{1}{\nu_1} Ei \left(-\frac{b^2}{4x_2 t} \right) - \frac{1}{\nu_3} Ei \left(-\frac{b^2}{4x_3 t} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\nu_1} Ei \left(-\frac{r^2}{4x_2 t} \right) + 2\Phi_4 \right] + \frac{A_2}{2} \left[Ei \left(-\frac{b^2}{4x_2 t} \right) - \right. \\ \left. - Ei \left(-\frac{r^2}{4x_2 t} \right) - \frac{1}{\nu_2} Ei \left(-\frac{b^2}{4x_3 t} \right) + 2\Phi_5 \right] + A_3 \Phi_6, \quad (20)$$

$$P_0 - P_3 = \frac{A_1}{2} \left[2\Phi_7 - \frac{1}{\nu_2} Ei \left(-\frac{r^2}{4x_3 t} \right) \right] - \\ - \frac{A_2}{2} \left[Ei \left(-\frac{r^2}{4x_3 t} \right) - 2\Phi_8 \right] + A_3 \Phi_9, \quad (21)$$

где $-Ei(-x) = \int_x^\infty \frac{1}{u} \exp(-u) du$ — интегрально-показательная функция, табулированная во многих справочниках.

Как видно из выражения упрощенных формул, по ним легко можно произвести расчеты.

Отметим, что все формулы, полученные в этой работе, можно обобщить на случай, когда в каждой зоне работает по одной дуговой батарее скважин, как это было показано в работе [2]. Например, для случая, когда в каждой зоне работает по одной полной круговой батарее с числом скважин n_1, n_2 и n_3 соответственно, суммируя выражения (15)–(17), методом суперпозиции найдем:

$$P_0 - P_1 = A_1 \left\{ n_1 \left[L \left(\omega_1, \frac{r^2}{4x_1 t} \right) - L \left(\omega_1, \frac{n^2}{4x_1 t} \right) + \frac{1}{\nu_1} L \left(\omega_2, \frac{a^2}{4x_2 t} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\nu_1} L \left(\omega_2, \frac{b^2}{4x_2 t} \right) - \frac{1}{\nu_3} L \left(\omega_3, \frac{b^2}{4x_3 t} \right) \right] + \Phi_1^{n_1} \right\} + \\ + A_2 \left\{ n_2 \left[L \left(\omega_2, \frac{r^2}{4x_2 t} \right) - L \left(\omega_2, \frac{b^2}{4x_2 t} \right) + \frac{1}{\nu_1} L \left(\omega_3, \frac{b^2}{4x_3 t} \right) \right] + \Phi_2^{n_2} \right\} +$$

$$+ A_3 \left[n_3 L \left(\omega_3, \frac{r^2}{4x_3 t} \right) + \Phi_3^{n_3} \right], \quad (22)$$

$$P_0 - P_2 = A_1 \left\{ n_1 \left[\frac{1}{\nu_1} L \left(\omega_2, \frac{b^2}{4x_2 t} \right) + \frac{1}{\nu_3} L \left(\omega_3, \frac{b^2}{4x_3 t} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\nu_1} L \left(\omega_2, \frac{r^2}{4x_2 t} \right) \right] + \Phi_4^{n_1} + A_2 \left\{ n_2 \left[L \left(\omega_2, \frac{r^2}{4x_2 t} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - L \left(\omega_2, \frac{b^2}{4x_2 t} \right) + \frac{1}{\nu_2} L \left(\omega_3, \frac{b^2}{4x_3 t} \right) \right] + \Phi_5^{n_2} \right\} + A_3 \Phi_6^{n_3}, \quad (23)$$

$$P_0 - P_3 = A_1 \left[\frac{n_1}{\nu_3} L \left(\omega_3, \frac{r^2}{4x_3 t} \right) + \Phi_7^{n_1} \right] + \\ + A_2 \left[\frac{n_2}{\nu_2} L \left(\omega_3, \frac{r^2}{4x_3 t} \right) + \Phi_8^{n_2} \right] + A_3 \Phi_9^{n_3}, \quad (24)$$

где для получения $\Phi_1^{(n_1)}$ необходимо в выражениях Φ_i функцию вида $F(z, \varphi - \varphi_j) = \ln [1 - 2z \cos(\varphi - \varphi_j) + z^2]$ заменить функцией следующего вида:

$$F^{(n_j)}(z, \varphi - \varphi_j) \equiv F[z^{n_j}, n_j(\varphi - \varphi_j)] = \\ = \ln [1 - 2z^{n_j} \cos n_j(\varphi - \varphi_j) + z^{2n_j}],$$

например,

$$\Phi_1^{n_1} = -\frac{1}{2} F^{n_1} \left(\frac{r_1}{r}, \varphi \right) - \frac{\alpha_2}{2} F^{n_1} \left(\frac{rr_1}{a^2}, \varphi \right) - \\ - \alpha_2 \alpha_3 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_7^m F^{n_1} \left(\frac{rr_1}{a^2} c^m, \varphi \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чугунов В. Д. „Изв. Казан. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн.“, М, 1959, № 13.
2. Гусейнов Г. П., Велиев М. Н. Тр. АЗНИИ ДН, вып. 18, 1967.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 29. V 1972

М. Н. Вәлијев, И. И. Чаббаров

Таваны зәиф кечирән, һиссә-һиссә бирчинс ләјдә
мајенин һәрәкәти һаггында

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда кечиричилик вә тәзјигкечирмә әмсаллары мұхтәлиф олан, үч зонадан ибарәт сонсуз, зәиф кечиричилик тавана малик ләјдә мајенин гәрарлашмамыш һәрәкәти өјрәнилмишдир. Һәр зонада верилмиш сабит мәһсулдарлыглы истисмар олунан бир гујунун јерләшдији фәрз едилир. Ријазии гојулмуш мәсәлә Лапласын интеграл чевирмәси вә дәјишәнләринә ајырма методларынын көмәји илә һәлл олунмуш вә тәзјиг функцијаларынын пәјланмасы үчүн дүстурлар алынмышдыр. Һәмин дүстурлар садәләшдирилиб гидродинамик һесабат апарыла биләчәк шәклә салынмышдыр. Һәр зонада бир гујунун ишләдији фәрз олунуб, алынан дүстурлар һәр зонада мұхтәлиф сәјдә гујулардан ибарәт даирәви батареја олан һал үчүн үмумиләшдирилмишдир.

On incompressible fluid movement in a piecewise uniform layer with weak-permeable roof

SUMMARY

Unsteady fluid movement subjected to the linear law of filtration is considered in its way to perfect wells located in an infinite on the strike layer, the roof of which is weak-permeable.

It is supposed that the treated layer is separated from the above lying one in which pressure is said to be constant, by a weak-permeable cofferdam and has two zones (with different coefficients of piezoconductivity and permeability) in the form of a circle and a circular domain, the non-uniformly boundaries of which being concentric circumferences.

Mathematically set problem is solved for the case when each layer zone has one well.

УДК 518. 517. 392

Г. М. ГАСАНОВ и С. П. СУЛЕЙМАНОВ

О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ КУБАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ В КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Как известно, наиболее простой способ получения кубатурных формул для приближенного вычисления кратных интегралов вида

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

состоит в двукратном применении квадратурных формул.

Указанным способом полученные кубатурные формулы исследованы для классов непрерывных и дифференцируемых функций [1].

В данной статье рассматриваются кубатурные процессы, полученные путем двукратных формул типа Гаусса, вида:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) p(x) q(y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{in} \mu_{jm} f(x_{in}, y_{jm}) = Q_{nm}(f), \quad (1)$$

где узлы $\{x_{in}\}_1^n$ и $\{y_{jm}\}_1^m$ являются корнями ортогональных многочленов на $[-1, 1]$ с весом $p(x) \geq 0$ и $q(y) \geq 0$ соответственно, а λ_{in} , μ_{jm} — коэффициенты Кристоффеля, и исследуется порядок сходимости таких кубатурных процессов для некоторого класса ограниченных и интегрируемых на $K = [-1, 1; -1, 1]$ функций.

Формула (1) точна, когда $f(x, y)$ — многочлен степени не выше $2n - 1$ по x и $2m - 1$ по y .

Для доказательства основного факта предварительно сформулируем некоторые понятия и ряд теорем, которые приведем без доказательства.

2. Обозначим через $BH_n(K)$ класс функций $f(x, y)$, определенных на K и удовлетворяющих условиям:

$$1) \sup_{(x, y) \in K} |f(x, y)| \leq B; \quad 2) \mu(f; t, \tau) \leq \mu(t, \tau),$$

где

$$\mu(f; t, \tau) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leq t \\ |y_1 - y_2| \leq \tau}} \{ \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |f(x_1, y_1) - f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1), y_1 + \lambda(y_2 - y_1))| + |f(x_2, y_2) - f(x_1 - \lambda(x_2 - x_1), y_1 + \lambda(y_2 - y_1))| - |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \}$$

— модуль немонотонности функции $f(x, y)$ [3], а $\mu(t, \tau)$ — заданный модуль немонотонности, удовлетворяющий условию $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \mu(t, \tau) = 0$

при произвольном стремлении t, τ к нулю.

Хаусдорфово расстояние $r(f, g)$ между двумя ограниченными функциями $f(x, y)$ и $g(x, y)$, заданными на $R[a, b; c, d]$, определяется как хаусдорфово расстояние между их дополненными графиками $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ [2], т. е. $r(f, g) = r(\tilde{f}, \tilde{g})$;

$$r(\tilde{f}, \tilde{g}) = \max_{M_1 \in \tilde{f}} \left\{ \min_{M_2 \in \tilde{g}} \|M_1 - M_2\|_0, \max_{M_2 \in \tilde{g}} \left\{ \min_{M_1 \in \tilde{f}} \|M_1 - M_2\|_0 \right\} \right\},$$

где

$$\|M_1 - M_2\|_0 = \|M_1(x_1, y_1, z_1) - M_2(x_2, y_2, z_2)\|_0 = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}.$$

3. Пусть для всякой функции $f(x, y)$, определенной на K , $H_{nm}(x, y) \equiv H_{nm}(f; x, y)$ — соответствующий ей интерполяционный полином Эрмита—Фейера степени $2n-1$ по x и $2m-1$ по y вида

$$H_{nm}(f; x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{in}, y_{jm}) h_{in}(x) h_{jm}(y),$$

где

$$h_{sk}(t) = \left\{ 1 - \frac{\omega_k'(t_{sk})}{\omega_k(t_{sk})} (t - t_{sk}) \right\} \left[\frac{\omega_k(t)}{\omega_k'(t_{sk})(t - t_{sk})} \right]^2, \\ \omega_k(t) = \prod_{s=1}^k (t - t_{sk}), \quad \sum_{s=1}^k h_{sk}(t) \equiv 1.$$

Говорят, что узлы $\{t_{sk}\}_1^k$ ($k=1, 2, \dots$) образуют ρ -нормальную матрицу, если при некотором $0 < \rho \leq 1$ и $-1 \leq t \leq 1$

$$1 - \frac{\omega_k'(t_{sk})}{\omega_k(t_{sk})} (t - t_{sk}) \geq \rho \quad (s=1, 2, \dots, k; k=1, 2, \dots).$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если $f(x, y) \in BH_\mu(K)$ и узлы $\{x_{in}\}_1^n$ и $\{y_{jm}\}_1^m$ образуют ρ_1 - и ρ_2 -нормальные матрицы соответственно, то

$$r(f, H_{nm}) \leq \inf_{\delta_1, \delta_2 > 0} \max \left\{ \delta_1, \delta_2; 2\mu(4\delta_1, 4\delta_2) + C \left(\frac{1}{\delta_1^2 n^{\rho_1 - \varepsilon}} \frac{1}{\delta_2^2 m^{\rho_2 - \varepsilon}} \right) \right\}, \quad (2)$$

где C — константа, не зависящая от n, m, δ_1 и δ_2 , $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Теорема 2. Пусть удовлетворяются условия теоремы 1 и пусть модуль немонотонности $\mu(t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$\mu(t, \tau) = O(t^\alpha + \tau^\beta) \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Тогда

$$r(f, H_{nm}) = O\left(n^{-\frac{\alpha(\rho_1 - \varepsilon)}{\alpha + 2}} + m^{-\frac{\beta(\rho_2 - \varepsilon)}{\beta + 2}}\right). \quad (3)$$

Теорема 3. Пусть $f(x, y) \in BH_\mu(K)$ и пусть узлы $\{x_{in}\}_1^n$ и $\{y_{jm}\}_1^m$ составлены из корней полиномов Якоби $p_n^{(\alpha_1, \beta_1)}(x)$ ($-1 < \alpha_1, \beta_1 < 0$) и $p_m^{(\alpha_2, \beta_2)}(y)$ ($-1 < \alpha_2, \beta_2 < 0$) соответственно. Тогда неравенство (2), а если дополнительно предполагать, что $\mu(t, \tau) = O(t^\alpha + \tau^\beta)$, то и неравенство (3) верны при $\rho_1 = \min\{-\alpha_1, -\beta_1\}$, $\rho_2 = \min\{-\alpha_2, -\beta_2\}$.

Аналогичные теоремы для функций одной переменной доказаны в работе [4].

4. Относительно оценки для $\int_a^b \int_c^d |f(x, y) - g(x, y)| dx dy$ через хаусдорфово расстояние между $f(x, y)$ и $g(x, y)$ справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ ограничены и интегрируемы на прямоугольнике R ; $f(x, y)$ имеет модуль немонотонности $\mu(\delta_1, \delta_2)$ и $0 \leq f(x, y) \leq B$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_a^b \int_c^d |f(x, y) - g(x, y)| dx dy \leq (b-a)(d-c) \left\{ \inf_{\substack{0 < \delta_1 < b-a \\ 0 < \delta_2 < d-c}} \left[6Br \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) + \mu(\delta_1, \delta_2) + r \right] \right\}, \quad (4)$$

где $r = r(f, g)$ — хаусдорфово расстояние между функциями $f(x, y)$ и $g(x, y)$.

Следствие 1. Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ ограничены и интегрируемы на R и $r = r(f, g)$. Если модуль немонотонности функции $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$\mu(f; \delta_1, \delta_2) \leq C(\delta_1^\alpha + \delta_2^\beta) \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

то

$$\int_a^b \int_c^d |f(x, y) - g(x, y)| dx dy = O\left(r^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + r^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right). \quad (5)$$

Действительно, так как функция

$$\varphi(\delta) = \frac{r}{\delta} + C\delta^\alpha; \quad \delta > 0$$

достигает своего минимума при

$$\delta = \left(\frac{r}{\alpha C} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

то (5) получается из (4).

В работе [2] доказывается, что для каждой ограниченной функции $f(x, y)$ существует многочлен $P(x, y)$ степени n , такой, что

$$r(f, P) \leq 12 \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда и из следствия 2 при $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ и $\alpha = \beta$ получаем

Следствие 2. Пусть модуль немонотонности $\mu(f; \delta_1, \delta_2)$ функции $f(x, y)$, где $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, удовлетворяет неравенству

$$\mu(f; \delta_1, \delta_2) \leq C\delta^\alpha \quad (\alpha > 0).$$

Тогда существуют константа C_1 , не зависящая от n , и многочлен $P(x, y)$ не выше n -й степени такие, что

$$\int_a^b \int_c^d |f(x, y) - P(x, y)| dx dy > C_1 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

5. Вышеуказанные теоремы позволяют доказать следующие теоремы.

Теорема 5. Пусть весовые функции $p(x) \geq 0$ и $q(y) \geq 0$ — суммируемые с квадратом на $[-1, 1]$ и пусть узлы $\{x_{in}\}_1^n$ и $\{y_{jm}\}_1^m$ являются корнями ортогональных многочленов на $[-1, 1]$ с весом $p(x)$ и $q(y)$ соответственно и образуют ρ_1 ($0 < \rho_1 \leq 1$)- и ρ_2 ($0 < \rho_2 \leq 1$)-нормальные матрицы соответственно. Тогда для всякой интегрируемой функции $f(x, y) \geq 0$ из класса $BH_\mu(K)$ имеет место

$$\left| Q_{nm}(f) - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) p(x) q(y) dx dy \right| \leq C \left\{ \inf_{\delta_1, \delta_2 > 0} \left[6B \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) r(f, H_{nm}) + \mu(\delta_1, \delta_2) + r(f, H_{nm}) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (6)$$

где C — константа, не зависящая от n, m, δ_1, δ_2 , а вместо $r(f, H_{nm})$ пишутся оценки в (2).

Доказательство. Так как интерполяционный полином $H_{nm}(x, y)$ имеет степень не выше $2n-1$ по x и $2m-1$ по y и $H_{nm}(x_{in}, y_{jm}) = f(x_{in}, y_{jm})$, то

$$Q_{nm}(f) = Q_{nm}(H_{nm}) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H_{nm}(x, y) p(x) q(y) dx dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left| Q_{nm}(f) - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) p(x) q(y) dx dy \right| \leq \\ & \leq \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |H_{nm}(x, y) - f(x, y)| p(x) q(y) dx dy. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Буняковского к последнему интегралу и, учитывая, что $0 \leq f(x, y) \leq B$ и $0 \leq H_{nm}(x, y) \leq B$, имеем

$$\begin{aligned} & \left| Q_{nm}(f) - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) p(x) q(y) dx dy \right| \leq \\ & \leq \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |H_{nm}(x, y) - f(x, y)|^2 p^2(x) q^2(y) dx dy \right\} \times \\ & \times \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |H_{nm}(x, y) - f(x, y)| dx dy \right\} \leq \\ & \leq \left\{ B \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p^2(x) q^2(y) dx dy \right\} \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |H_{nm}(x, y) - f(x, y)| dx dy \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Теперь, используя теорему 4 о связи между интегральным и хаусдорфовым расстояниями, получим

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |H_{nm}(x, y) - f(x, y)| dx dy \leq \\ & \leq 4 \left\{ \inf_{0 < \delta_1, \delta_2 < 2} \left[6B \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) r(f, H_{nm}) + \mu(\delta_1, \delta_2) \right] + r(f, H_{nm}) \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая последние неравенства из (7), получим (6).

Далее, учитывая оценки (2) для $r(f, H_{nm})$ в (6), находим порядок сходимости кубатурных процессов для интегрируемых функций из класса $BH_p(K)$.

Следствие 3. Если выполняются условия теоремы 5 и если функция $\mu(\delta_1, \delta_2)$ удовлетворяет условию

$$\mu(\delta_1, \delta_2) = O(\delta_1^\alpha + \delta_2^\beta) \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

то

$$\begin{aligned} & \left| Q_{nm}(f) - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) p(x) q(y) dx dy \right| = \\ & = O \left\{ \left[n^{-\frac{\alpha(\rho_1 - \varepsilon)}{\alpha + 2}} + m^{-\frac{\beta(\rho_2 - \varepsilon)}{\beta + 2}} \right]^{\frac{s}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$s = \min \left\{ \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \frac{\beta}{\beta + 1} \right\}.$$

Действительно, так как функция $\varphi(\delta) = \frac{a}{\delta} + b\delta^\alpha$ ($\delta > 0$) достигает

своего минимума при $\delta = \left(\frac{a}{\alpha b} \right)^{\frac{1}{\alpha + 2}}$, то из (6) получим

$$\left| Q_{nm}(f) - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) p(x) q(y) dx dy \right| = O \left\{ [r(f, H_{nm})]^{\frac{s}{2}} \right\},$$

где

$$s = \min \left\{ \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \frac{\beta}{\beta + 1} \right\}.$$

С другой стороны, в силу теоремы 2

$$r(f, H_{nm}) = O \left(n^{-\frac{\alpha(\rho_1 - \varepsilon)}{\alpha + 2}} + m^{-\frac{\beta(\rho_2 - \varepsilon)}{\beta + 2}} \right).$$

Теорема 6. Пусть выполняются условия теоремы 5 и пусть узлы $\{x_{in}\}_1^n$ и $\{y_{jm}\}_1^m$ являются корнями полиномов Якоби

$$P_n^{(\alpha_1, \beta_1)}(x) \left(-\frac{1}{2} < \alpha_1, \beta_1 < 0 \right) \text{ и } P_m^{(\alpha_2, \beta_2)}(y) \left(-\frac{1}{2} < \alpha_2, \beta_2 < 0 \right)$$

соответственно. Тогда справедливо неравенство (6) при

$$\rho_1 = \min \{ -\alpha_1, -\beta_1 \} \text{ и } \rho_2 = \min \{ -\alpha_2, -\beta_2 \},$$

где

$$p(x) = (1-x)^{\alpha_1} (1+x)^{\beta_1}, \quad q(y) = (1-y)^{\alpha_2} (1+y)^{\beta_2}.$$

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 5, ибо корни полиномов $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ образуют ρ -нормальную матрицу при $-1 < \alpha, \beta < 0$, но весовая функция $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, интегрируемая с квадратом на $[-1, 1]$, — только при $\alpha, \beta > -\frac{1}{2}$.

Следствие 4. Если выполняются условия теоремы 6 и если функция $\mu(\delta_1, \delta_2)$ удовлетворяет условию

$$\mu(\delta_1, \delta_2) = O(\delta_1^\alpha + \delta_2^\beta) \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

то справедливо неравенство (8) при

$$\rho_1 = \min \{ -\alpha_1, -\beta_1 \}, \rho_2 = \min \{ -\alpha_2, -\beta_2 \} \left(-\frac{1}{2} < \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 < 0 \right),$$

где

$$p(x) = (1-x)^{\alpha_1} (1+y)^{\beta_1}, \quad q(y) = (1-y)^{\alpha_2} (1+y)^{\beta_2}.$$

Аналогичные результаты для квадратных процессов получены ранее Г. М. Гасановым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М., Физматгиз, 1958.
2. Сеидов Б. Л. Год. Соф. ун-та, физ.-матем. фак., 1968/69 г., № 3.
3. Мартынюк В. Т. Изв. вузов, Математика, 1968, № 7.
4. Гасанов Г. М. Изв. АН Азерб. ССР, физ.-техн. и матем. наук, 1970, № 3.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 23. IV 1972

Мәндуд функцијалар синфиндә кубатур просесләрин
јығылма тәртиби һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $BH_\mu(K)$ функцијалар синфиндә интеграл вә хаусдорф мәсафәләри арасындакы әлағә вә p -нун нормал дүјүн нөгтәләри үчүн гурулмуш Ермит-Фејер интерполјасија просесләринин јығылма тәртиби верилмишдир. Алынај нәтичәләрин көмәји илә һәмин синифдә кубатур просесләрин јығылма тәртиби тәдгиг олушмушдур.

G. M. Gasanov, S. P. Sulejmanov

On the convergence order of cubature processes in
a class of bounded functions

SUMMARY

In the given paper the convergence order of cubature processes is established for the $BH_\mu(K)$ class of $f(x, y)$ functions. With this purpose the connection between integral and Hausdorff distances is given in the class $BH_\mu(K)$ and we also give the convergence order of Hermite—Fejer interpolating processes with respect to the Hausdorff metric.

Р. А. МУСТАФАЕВ, Ш. А. ЭФЕНДИЕВА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ
ТЕМПЕРАТУРЫ ПЛАСТА ПРИ ПРОГРЕВЕ ЗАБОЯ
ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ СКВАЖИНЫ ЭЛЕКТРОНАГРЕВАТЕЛЕМ

Одним из основных показателей при прогреве призабойной зоны эксплуатационной скважины является температурное поле. Этот фактор состоит из двух характеристик: степени прогрева призабойной зоны и радиуса его влияния. Если известно поле температуры в различные моменты времени, то тем самым имеем характеристику изменения этих показателей. Вопрос об определении поля температуры при прогреве призабойной зоны изучен недостаточно. Имеются лишь исследования некоторых частных случаев и приближенные решения [1—4], в которых естественный геостермический градиент температуры, имеющий место в нефтяных залежах, не учитывается.

В настоящей статье рассматривается численное решение одной задачи распределения температуры в пласте при прогреве призабойной зоны непрерывно работающей эксплуатационной скважины электронагревателем. Решение этой задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа:

$$(c\gamma)_{\text{нп}} \frac{\partial T}{\partial t} - (c\gamma)_{\text{ж}} \frac{Q}{2\pi hr} \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_{\text{нп}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$(c\gamma)_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$(c\gamma)_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

при следующих начальном и граничных условиях:

$$T_1(r, z, 0) = T_{\text{пов}} + \frac{z}{\Gamma}; \quad H_1 \leq z \leq H_2; \quad T(r, z, 0) = T_{\text{пов}} + \frac{z}{\Gamma}, \quad (4)$$

$$T_2(r, z, 0) = T_{\text{пов}} + \frac{z}{\Gamma}, \quad H_3 \leq z \leq H_4, \quad \frac{\partial T_1(r, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_c} = 0, \quad (5)$$

$$T_1(R_c, z, t) = T_n(t), \quad H_2 \leq z \leq H_3, \quad \frac{\partial T_2(r, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_c} = 0,$$

$$H_3 < z \leq H_4, \quad (6)$$

$$T_1(\infty, z, t) = T_{\text{пов}} + \frac{z}{\Gamma}, \quad H_1 \leq z \leq H_2, \quad T(\infty, z, t) = T_{\text{пов}} + \frac{z}{\Gamma},$$

$$H_2 \leq z \leq H_3, \quad (7)$$

$$T_2(\infty, z, t) = T_{\text{пов}} + \frac{z}{\Gamma}, \quad H_3 \leq z \leq H_4, \quad T_1(z, H_1, t) = T_{\text{пов}} + \frac{H_1}{\Gamma},$$

$$R_c \leq z < \infty, \quad (8)$$

$$T_2(r, H_4, t) = T_{\text{пов}} + \frac{H_4}{\Gamma}, \quad R_c \leq r < \infty, \quad T_1(r, H_2, t) = T(r, H_2, t),$$

$$R_c \leq r < \infty, \quad (9)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H_2} = \lambda_{\text{нп}} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H_2}, \quad R_c \leq r < \infty. \quad (10)$$

$$T(r, H_3, t) = T_2(r, H_3, t), \quad R_c \leq r < \infty, \quad (11)$$

$$\lambda_{\text{нп}} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{z=H_3} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H_3}, \quad R_c \leq r < \infty, \quad (12)$$

где $T_{\text{пов}}$ — средняя температура на поверхности земли; $T_{\text{н}}$ — температура на забое эксплуатационной скважины; Γ — геотермическая ступень (м/с); H_1 — расстояние от поверхности земли до кровли покрывающего пласта; H_2 — расстояние от поверхности земли до кровли нефтяного пласта; H_3 — расстояние от поверхности земли до подошвы нефтяного пласта; H_4 — расстояние от поверхности земли до подошвы подстилающего пласта; H_1, H_4 — представляют глубины, на которых принимается, что температура практически не изменяется от термодействия; T, T_1, T_2 — температуры в нефтяном, покрывающем и подстилающем пластах соответственно.

Если теплофизические свойства покрывающего и подстилающего пластов принять одинаковыми, задача (1) — (12) в безразмерных переменных примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+q_0}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial W_i}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right), \quad (i=1, 2), \quad (14)$$

($i=1$ относится к покрывающему, $i=2$ — к подстилающему пласту)

$$u(x, y, 0) = \frac{y}{\beta} + \theta, \quad H_2 \leq y \leq H_3, \quad 1 \leq x \leq x_1, \quad (15)$$

$$W_1(x, y, 0) = \frac{y}{\beta} + \theta, \quad H_1 \leq y \leq H_2, \quad 1 \leq x \leq x_1, \quad (16)$$

$$W_2(x, y, 0) = \frac{y}{\beta} + \theta, \quad H_3 \leq y \leq H_4, \quad 1 \leq x \leq x_1, \quad (17)$$

$$u(1, y, \tau) = f(\tau), \quad H_2 \leq y \leq H_3, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (18)$$

$$u(x_1, y, \tau) = \frac{y}{\beta} + \theta, \quad H_2 \leq y \leq H_3, \quad 0 < \tau \leq T. \quad (19)$$

$$\frac{\partial W_1(1, y, \tau)}{\partial x} = 0, \quad H_1 \leq y \leq H_2, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (20)$$

$$W_1(x_1, y, \tau) = \frac{y}{\beta} + \theta, \quad H_1 \leq y \leq H_2, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (21)$$

$$\frac{\partial W_2(1, y, \tau)}{\partial x} = 0, \quad H_3 \leq y \leq H_4, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (22)$$

$$W_2(x_1, y, \tau) = \frac{y}{\beta} + \theta, \quad H_3 \leq y \leq H_4, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (23)$$

$$u(x, H_2, \tau) = W_1(x, H_2, \tau), \quad 1 \leq x \leq x_1, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (24)$$

$$u(x, H_3, \tau) = W_2(x, H_3, \tau), \quad 1 \leq x \leq x_1, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u(x, H_2, \tau)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial W_1(x, H_2, \tau)}{\partial y}, \quad 1 \leq x \leq x_1, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (26)$$

$$\frac{\partial u(x, H_3, \tau)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial W_2(x, H_3, \tau)}{\partial y}, \quad 1 \leq x \leq x_1, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (27)$$

$$W_1(x, H_1, \tau) = \theta + \frac{H_1}{\beta}, \quad 1 \leq x \leq x_1, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (28)$$

$$W_2(x, H_4, \tau) = \theta + \frac{H_4}{\beta}, \quad 1 \leq x \leq x_1, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (29)$$

где

$$u = \frac{T - T_{\text{пов}}}{T_{\text{н}} - T_{\text{пов}}}, \quad W_i = \frac{T_i - T_{\text{пов}}}{T_{\text{н}} - T_{\text{пов}}} \quad (i=1, 2), \quad x = \frac{r}{R_c},$$

$$y = \frac{z}{R_c}, \quad \tau = \frac{\lambda_{\text{нп}} t}{(c\gamma)_{\text{нп}} R_c^2}, \quad a_i^2 = \frac{(c\gamma)_{\text{нп}} \cdot \lambda_i}{(c\gamma)_{\text{нп}} \cdot \lambda_{\text{нп}}}, \quad x_1 = \frac{L}{R_c},$$

$$q_0 = \frac{Q(c\gamma)_{\text{нп}}}{2\pi h \lambda_{\text{нп}}}, \quad \lambda = \frac{\lambda_i}{\lambda_{\text{нп}}}, \quad \beta = \frac{\Gamma(T_{\text{н}} - T_{\text{пов}})}{R_c}, \quad \theta = \frac{T_0 - T_{\text{пов}}}{T_{\text{н}} - T_{\text{пов}}}.$$

Решение задачи (13) — (29) ищется методом конечных разностей. Для этого заменим производные разностными соотношениями и введем пространственно-временную сетку узлов $\omega_{i,j,n} = \{(x_i, y_j, t_n); 1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_k, y_0 < y_1 < \dots < y_l, t_n = n\tau, n=0, M, M\tau=T\}$ с переменными шагами по каждому из направлений x и y и применим неявную схему переменных направлений [5, 6]. По этой схеме наряду с основными значениями искомой функции $u(x, t)$, т. е. с τ_n, τ_{n+1} , вводится промежуточное значение $\tau = \tau_{n+1/2}$, которое лишено физического смысла и формально рассматривается как значение τ при $t = t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$. Переход от слоя n к слою $n+1$ совершается в два этапа с шагами $0,5\tau$:

$$\frac{\tau_{n+1/2} - \tau_n}{0,5\tau} = \Lambda_1 \tau_{n+1/2}; \quad \frac{\tau_{n+1} - \tau_{n+1/2}}{0,5\tau} = \Lambda_2 \tau_{n+1/2},$$

где операторы Λ_1, Λ_2 обозначают соответствующую часть уравнений (13), (14), зависящую только от x и только от y . Полученные системы алгебраических уравнений решались методом прогонки. В качестве примера численных расчетов задачи (13) — (29), решенной на ЭЦВМ „М-220 А“, укажем следующие случаи:

$$f(\tau) = 1; \quad a_1^2 = a_2^2 = 1; \quad \lambda = 0,75; \quad \theta = 0; \quad \beta = 0,9975 \cdot 10^5; \\ r_c = 0,1 \text{ м}; \quad q_0 = 0,5 \text{ и } 2; \quad h = 10 \text{ и } 20 \text{ м}; \quad L = 1 \text{ км}.$$

Результаты численных расчетов отражены на рис. 1—2.

На рис. 1 приведены кривые изменения температуры по простиранию нефтяного пласта на глубине 1005 м при дебите $q_0 = 0,5$ (сплошные линии) и $q_0 = 2$ (пунктир) для продуктивного пласта мощностью 10 м. Как видно из рисунка, с удалением от источника нагрева на расстояние порядка 1,5—2 м изменения температуры прак-

тически не наблюдается, причем с увеличением q_0 зона прогрева значительно уменьшается. Так, кривые при $\tau = 30$ и 500 для $q_0 = 2$ фактически совпадают.

На рис. 2 дано сравнение изменения температуры на глубине 1005 м для пласта мощностью 10 м в различные моменты времени при $q_0 = 0,5$ (сплошные линии) и $q_0 = 2$ (пунктир). Как следует из рисунка, наиболее резкое изменение температуры происходит до значения безразмерного времени $\tau = 90 - 100$. В последующем существенного изменения температуры не наблюдается, причем с увеличением q_0 температура устанавливается уже при $\tau = 35 - 40$. Изменение

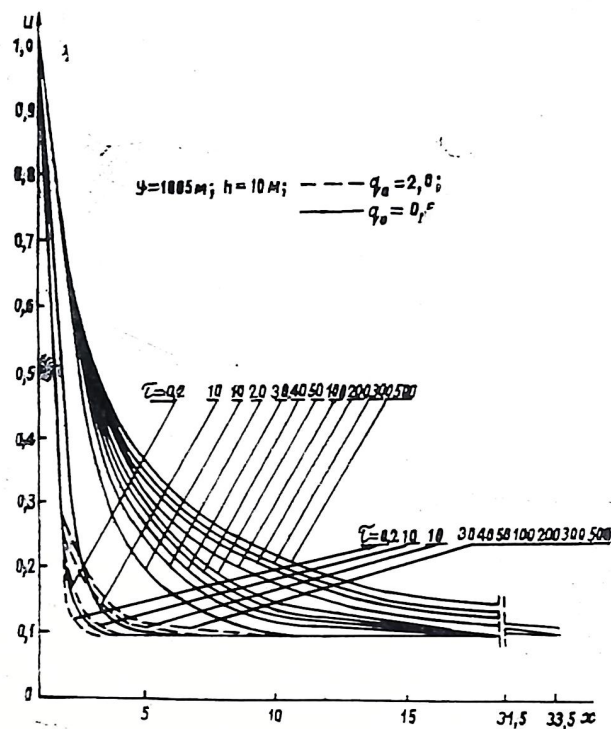


Рис. 1

температуры происходит во всех рассматриваемых случаях практически до расстояния 1—2 м от эксплуатационной скважины. Расчеты

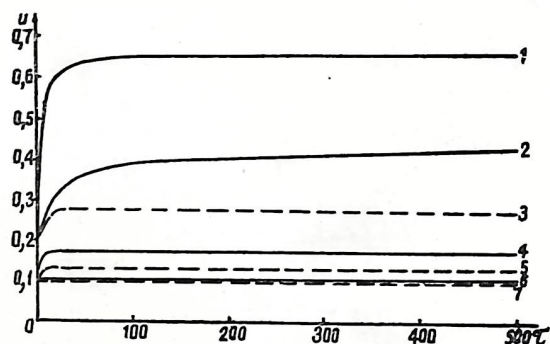


Рис. 2.

показали, что мощность продуктивного пласта не оказывает существенного влияния на распределение температуры, так как кривые изменения температуры в одних и тех же точках ($x = 2, 4, 10$) практически совпадают.

Аналогично рассмотрена задача в случае предположения о симметричном распределении температурного поля. В этом случае уравнение (3) и соответствующие условия отбрасываются, а добавляется условие

$$\frac{\partial T(r, z, t)}{\partial z} = 0; R_c \leq r < \infty; z = H_1 + \frac{h}{2}; 0 < t \leq T.$$

Расчеты проведены при

$$f(\tau) = 1; a_1^2 = a_2^2 = 1; \lambda = 0,75; \beta = \frac{1}{2}; \theta = 0,122807018; \\ h = 10 \text{ м}; q_0 = 0,5 \text{ и } 2; L = 1 \text{ км}; r_c^* = 0,1 \text{ м}.$$

Результаты расчетов этих двух случаев сведены в таблицу, где даны значения функции в точке продуктивного пласта, расположенной на глубине 1005 м на расстоянии 0,1 м от скважины. Как видно из таблицы, с увеличением q_0 в 4 раза значение температуры уменьшается более чем в 2 раза. Отметим, что увеличение мощности продуктивного пласта вдвое не оказывает практического влияния на величину температуры. Аналогичные обстоятельства имеют место и при симметричном случае. При этом соответствующие значения завышены в пределах 1,5—2% (при $q_0 = 0,5$); до 7% (при $q_0 = 2$) и до 6,5% (при $q_0 = 2; h = 20 \text{ м}$).

Авторы выражают благодарность проф. А. А. Аббасову за постановку задачи, советы и внимание к работе.

τ	$q_0 = 0,5;$	$h = 10 \text{ м}$	$q_0 = 2;$	$h = 10 \text{ м}$	$q_0 = 2;$	$h = 20 \text{ м}$
	$u_{\text{несим.}}$	$u_{\text{сим.}}$	$u_{\text{несим.}}$	$u_{\text{сим.}}$	$u_{\text{несим.}}$	$u_{\text{сим.}}$
0	0,100751	0,122807	0,100751	0,122807	0,101504	0,122807
10	0,564031	0,574724	0,261674	0,279783	0,262498	0,279783
20	0,595888	0,605799	0,264833	0,282864	0,265653	0,282864
30	0,610492	0,620045	0,265640	0,283651	0,266459	0,283651
50	0,625351	0,634540	0,266057	0,284058	0,266875	0,284057
100	0,641165	0,649966	0,266231	0,284227	0,267048	0,284277
200	0,652576	0,661097	0,266265	0,284261	0,267079	0,284256
300	0,657865	0,666256	0,266280	0,284275	0,267086	0,284263
400	0,661010	0,669324	0,266296	0,284291	0,267094	0,284270
500	0,663105	0,671367	0,266313	0,284307	0,267102	0,284227

ЛИТЕРАТУРА

1. Шейнман А. Б., Сергеев А. И., Малофеев Г. Е. Электротепловая обработка призабойной зоны нефтяных скважин. Гостоптехиздат, 1962.
2. Шейнман А. Б., Малофеев Г. Е., Сергеев А. И. Воздействие на пласт тепло при добыче нефти. Изд-во "Недра", 1969.
3. Аббасов А. А. Вопросы нефтяной гидродинамики. Азербнепр, 1968.
4. Джамалов И. М. Электротепловая обработка призабойной зоны скважин на промыслах Азербайджана. Азербнепр, 1971.
5. Peaceman D. U., Rachford H. H. J. soc. Ind. and Appl. Math., 3, № 1, 1955.
6. Douglas J. J. soc. Ind. and Appl. Math., 3, № 1, 1955.

Институт кибернетики
АН Азерб. ССР

Поступила 7. VII 1974

Истисмар гујусунун гујудиби зонасынын электрик гыздырычысы илэ гыздырылмасында лајда температур саһәсинин тә'јини мәсәләсинин әдәди һәлли

ХҮЛАСӘ

Гујудиби саһәсинин электрик гыздырычысы илэ гыздырылмасында әсас кәстәричиләрдән бири лајда температур пајланмасынын тә'јинидир. Мәгаләдә лајда температур саһәсинин тә'јининә аид бир мәсәләнин әдәди һәлли верилмишдир. Истисмар гујусунун фәсиләсиз ишләдијини нәзәр аларат, температурун симметрик вә гејри-симметрик һалларда пајланмасы мәсәләсинин әдәди һәллине бахылмышдыр. Гојулмуш мәсәләнин һәлли үчүн сонлу фәргләр үсулундан истифадә олунмушдур. Әдәди һесабат „М-220А“ ЕҢМ-да апарылмыш вә тәтбиғи әһәмијјәти олан нәтичәләр әлдә едилмишдир.

R. A. Mustafaev, Sh. A. Efendieva

Numerical solution of the problem of definition of field temperature of the reservoir at the warming—up of the exploratory well bottom hole by electroheater.

SUMMARY

This paper treats the numerical solution of one two—dimensional problem of the temperature distribution in the reservoir at the warming—up of near bottom hole zone of continuous working exploratory well by electroheater. It is considered asymmetric and symmetric cases of temperature field distribution. Finite differences method is used for the solution. The examples of numerical calculations carried out on the „M-220A“ computer are given.

УДК. 519. 45

Р. Б. ФЕЙЗУЛЛАЕВ

ЧАСТИЧНЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ ГРАФОВ

В предшествующих исследованиях графов посредством алгебраических систем их полных гомоморфизмов [5, 3] показано, что область применения скрещенной полугруды $\bar{S}p(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ к графам $(\mathcal{Q}_i, \rho_i)$ ($i = 1, 2$) исчерпывается случаями, когда ρ_i являются отношениями квазипорядка или квазиэквивалентности, а также отмечено, что полугруды гомоморфизмов могут иметь значительно большие возможности для изучения графов. Решение этой задачи и приводится в настоящей статье. Нами посредством некоторых типов плотных вложений полугруд [7] получена характеристика более широких классов графов с помощью скрещенных полугруд частичных гомоморфизмов исходной пары графов друг в друга.

1. Полугрудой называется непустое множество S с одной, есоду определенной на нем тернарной алгебраической операцией

$$[s_1 s_2 s_3] = s \quad (s_i \in S),$$

удовлетворяющей закону типа ассоциативности:

$$[[s_1 s_2 s_3] s_4 s_5] = [s_1 [s_4 s_3 s_2] s_5] = [s_1 s_2 [s_3 s_4 s_5]].$$

Пусть $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ —некоторые два множества. Срезом бинарного отношения ρ через элемент $a \in \mathcal{Q}_1$ называется подмножество $\rho < a > \subseteq \mathcal{Q}_2$, состоящее из всех элементов $b \in \mathcal{Q}_2$ таких, что $(a, b) \in \rho$. Если $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$, то через $\rho < \mathcal{Q}' >$ обозначают $\bigcup_{a \in \mathcal{Q}'} \rho < a >$. Если σ, ρ —бинарные отношения из $\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2$ и соответственно $\mathcal{Q}_2 \times \mathcal{Q}_3$, то произведением их называется следующее бинарное отношение $\rho \sigma \subseteq \mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_3$:

$$(a, c) \in \rho \sigma \leftrightarrow \exists_{b \in \mathcal{Q}_2} (a, b) \in \sigma \wedge (b, c) \in \rho.$$

Пусть, далее, $P(\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2)$ —множество всех бинарных отношений $\varphi \subseteq \mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2$. Обозначим через $W(\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2)$ и $V(\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2)$ подмножества $P(\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2)$, состоящие из всех частичных отображений и соответственно из всех обратимых частичных отображений множества $\mathcal{Q}_1$ в $\mathcal{Q}_2$. Множество $\bar{P}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) = P(\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2) \times P(\mathcal{Q}_2 \times \mathcal{Q}_1)$ является, как известно [1, 2], полугрудой относительно действия

$$[(\psi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2)(\varphi_3, \psi_3)] = (\varphi_3 \circ \psi_2 \circ \varphi_1, \psi_1 \circ \varphi_2 \circ \psi_3) \quad (1)$$

и называется скрещенной полугрудой пар бинарных отношений; пусть $\bar{W}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) = W(\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2) \times W(\mathcal{Q}_2 \times \mathcal{Q}_1)$ и $\bar{V}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) = V(\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2) \times V(\mathcal{Q}_2 \times \mathcal{Q}_1)$. $\bar{W}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ и $\bar{V}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ —подполугруды относительно действия (1).

Пусть ρ —бинарное отношение на множестве $\mathcal{Q}$; для всякого подмножества $\Sigma \subseteq \mathcal{Q}$ обозначим $\rho|_{\Sigma} = (\Sigma \times \Sigma) \cap \rho$. Отношения ρ_i на множе-

ствах Ω_i назовем однотипными, если для каждого двухэлементного подмножества $\Sigma_1 \subseteq \Omega_1$ ($\Sigma_2 \subseteq \Omega_2$) найдется такое подмножество $\Sigma_2 \subseteq \Omega_2$ ($\Sigma_1 \subseteq \Omega_1$), что графы $(\Sigma_1, \rho_1|_{\Sigma_1})$ и $(\Sigma_2, \rho_2|_{\Sigma_2})$ будут изоморфны. Если

через $\overset{\Delta}{\rho}$ обозначим дополнение бинарного отношения ρ в $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$, т. е. $\overset{\Delta}{\rho} = \Omega^2 \setminus \rho$, то граф $(\Omega, \overset{\Delta}{\rho})$ называется дополнительным к (Ω, ρ) [4].

2. Пусть (Ω_1, ρ_1) , (Ω_2, ρ_2) — некоторые графы. Бинарное отношение $\varphi \in P(\Omega_1 \times \Omega_2)$ называется (многозначным) частичным гомоморфизмом графа (Ω_1, ρ_1) в граф (Ω_2, ρ_2) или короче — p -гомоморфизмом, если для любых $a_1, b_1 \in \Omega_1$

$$(a_1, b_1) \in \rho_1 \longrightarrow \varphi \langle a_1 \rangle \times \varphi \langle b_1 \rangle \subseteq \rho_2. \quad (2)$$

Множество всех p -гомоморфизмов графа (Ω_1, ρ_1) в (Ω_2, ρ_2) обозначим через $P\rho(\Omega_1 \times \Omega_2)$; пусть, кроме того,

$$W\rho(\Omega_1 \times \Omega_2) = W(\Omega_1 \times \Omega_2) \cap P\rho(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

$$V\rho(\Omega_1 \times \Omega_2) = V(\Omega_1 \times \Omega_2) \cap P\rho(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Отображения из $W\rho(\Omega_1 \times \Omega_2)$ называются частичными (однозначными) гомоморфизмами (ω -гомоморфизмами) графа (Ω_1, ρ_1) в граф (Ω_2, ρ_2) ; из $S\rho(\Omega_1 \times \Omega_2)$ — полными гомоморфизмами (гомоморфизмами) графа (Ω_1, ρ_1) ; из $V\rho(\Omega_1 \times \Omega_2)$ — взаимно однозначными частичными гомоморфизмами (сокращенно, ν -гомоморфизмами).

Суперпозиция p -гомоморфизмов графов дает снова, как это не трудно проверить, p -гомоморфизм; поэтому множество

$$\overline{P\rho}(\Omega_1, \Omega_2) = P\rho(\Omega_1 \times \Omega_2) \times P\rho(\Omega_2 \times \Omega_1)$$

является подполугрудой скрещенной полугруды $\overline{P}(\Omega_1, \Omega_2)$. Обозначим

$$\overline{W\rho}(\Omega_1, \Omega_2) = W\rho(\Omega_1 \times \Omega_2) \times W\rho(\Omega_2 \times \Omega_1),$$

$$\overline{V\rho}(\Omega_1, \Omega_2) = V\rho(\Omega_1 \times \Omega_2) \times V\rho(\Omega_2 \times \Omega_1).$$

Поскольку пересечение двух подполугруд — снова полугруда, то все множества

$$\overline{W\rho}(\Omega_1, \Omega_2) = \overline{W}(\Omega_1, \Omega_2) \cap \overline{P\rho}(\Omega_1, \Omega_2),$$

$$\overline{V\rho}(\Omega_1, \Omega_2) = \overline{V}(\Omega_1, \Omega_2) \cap \overline{P\rho}(\Omega_1, \Omega_2)$$

являются полугрудами относительно действия (1); кроме того, очевидно,

$$\overline{S\rho}(\Omega_1, \Omega_2) = \overline{S}(\Omega_1, \Omega_2) \cap \overline{P\rho}(\Omega_1, \Omega_2).$$

Наконец, обозначим

$$X_{\text{мр}}^{\text{нв}}(\Omega_1, \Omega_2) = \overline{P}_{\text{мр}}^{\text{нв}}(\Omega_1, \Omega_2) \cap \overline{X\rho}(\Omega_1, \Omega_2)$$

(см. п. 7 [6]), где $X = P, W, V$. Все $\overline{X}_{\text{мр}}^{\text{нв}}(\Omega_1, \Omega_2)$ являются, как не трудно проверить, подполугрудами полугруды $\overline{X\rho}(\Omega_1, \Omega_2)$.

Элемент x^* полугруды S называется регулярно сопряженным с элементом x , если

$$[xx^*x] = x, \quad [x^*xx^*] = x^*.$$

Полугруду S назовем инверсной, если для каждого ее элемента x существует единственный регулярно сопряженный с ним элемент x^* .

Пусть S — некоторая полугруда с нулем 0 , Q — ее подполугруда. Назовем Q ω -подполугрудой в S , если полугруда Q инверсна и

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in S [x_1 x_2 x_3] = 0 \longleftrightarrow \forall q_1 \in Q [x_1 q_1 q_1^* x_2 q_2 q_2^* x_3] = 0.$$

Непустое подмножество A полугруды S называется ее бидеалом, если $[ASA] \subseteq A$. Введем бинарное отношение ρ_b в классе Z_{τ_0} всех полугруд с нулем: $S \in \rho_b \langle A \rangle$, тогда и только тогда, когда 1) A яв-

ляется бидеалом полугруды S и 2) всякая ω -подполугруда полугруды A является ω -подполугрудой в S .

Пусть E — подполугруда полугруды $\overline{P}(\Omega_1, \Omega_2) = \overline{P}$. Обозначим через $\{\overline{P}, \overline{E}\}_b$ подмножество $\overline{P}$, состоящее из всех элементов $\rho \in \overline{P}$ таких, что $\{E\rho E\} \subseteq E$.

Все не приведенные здесь определения см. в [1, 5, 7].

3. Пусть (Ω, ρ) — произвольный граф. Обозначим через $\overline{P\rho}(\Omega_2, \Omega_1) = P\rho(\Omega_2 \times \Omega_1) \times (P\rho(\Omega_1 \times \Omega_2))$ скрещенную полугруду гомоморфизмов графов (Ω_2, ρ_2) и (Ω_1, ρ_1) , аналогичную полугруде $\overline{P\rho}(\Omega_1, \Omega_2)$.

3. 1. Теорема. Полугруды $\overline{P\rho}(\Omega_1, \Omega_2)$ и $\overline{P\rho}(\Omega_2, \Omega_1)$ антиизоморфны.

Доказательство. Пусть φ — произвольный элемент из $P(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Из определения $P\rho(\Omega_1 \times \Omega_2)$ следует, что $\varphi \in P\rho(\Omega_1 \times \Omega_2)$ тогда и только тогда, когда для любых $a_i, b_i \in \Omega_i$ ($i=1, 2$) выполняется одно из соотношений:

$$(a_2, b_2) \in \rho_2 \cap \rho_2^{-1}, \quad (3)$$

$$(a_1, b_1) \in \rho_1 \setminus \rho_1^{-1} \wedge (a_2, b_2) \in \rho_2 \setminus \rho_2^{-1}, \quad (4)$$

$$(a_1, b_1) \in \rho_1^{-1} \setminus \rho_1 \wedge (a_2, b_2) \in \rho_2^{-1} \setminus \rho_2, \quad (5)$$

$$(a_1, b_1) \in \rho_1 \wedge (a_1, b_1) \in \rho_1^{-1}. \quad (6)$$

Аналогично $\varphi^{-1} \in P\rho(\Omega_2 \times \Omega_1)$ в следующих случаях

$$(a_1, b_1) \in \rho_1 \cap \rho_1^{-1}, \quad (7)$$

$$(a_1, b_1) \in \rho_1 \setminus \rho_1^{-1} \wedge (a_2, b_2) \in \rho_2 \setminus \rho_2^{-1}, \quad (8)$$

$$(a_1, b_1) \in \rho_1^{-1} \setminus \rho_1 \wedge (a_2, b_2) \in \rho_2^{-1} \setminus \rho_2, \quad (9)$$

$$(a_2, b_2) \in \rho_2 \wedge (a_2, b_2) \in \rho_2^{-1}. \quad (10)$$

Так как $\overset{\Delta}{\rho}_i = \Omega_i^2 \setminus \rho_i$, то из (3) следует (10) и из (4) следует (9), из (5) следует (8), из (6) — (7), и наоборот.

Таким образом, для любого $\varphi \in P(\Omega_1 \times \Omega_2)$

$$\varphi \in P\rho(\Omega_1 \times \Omega_2) \longleftrightarrow \varphi^{-1} \in P\rho(\Omega_2 \times \Omega_1). \quad (11)$$

Точно так же для любого $\psi \in P(\Omega_2 \times \Omega_1)$

$$\psi \in P\rho(\Omega_2 \times \Omega_1) \longleftrightarrow \psi^{-1} \in P\rho(\Omega_1 \times \Omega_2). \quad (12)$$

Отображение $f(\varphi, \psi) = (\varphi^{-1}, \psi^{-1})$ в силу (11), (12) и (1) является антиизоморфизмом $\overline{P\rho}(\Omega_1, \Omega_2)$ на $\overline{P\rho}(\Omega_2, \Omega_1)$:

$$\begin{aligned} f[(\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2)(\varphi_3, \psi_3)] &= f(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1, \psi_1 \circ \psi_2 \circ \psi_3) = \\ &= ((\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1}, (\psi_1 \circ \psi_2 \circ \psi_3)^{-1}) = (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_3^{-1}, \psi_3^{-1} \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_1^{-1}) = \\ &= (\varphi_3^{-1}, \psi_3^{-1})(\varphi_2^{-1}, \psi_2^{-1})(\varphi_1^{-1}, \psi_1^{-1}) = f(\varphi_3, \psi_3) \cdot f(\varphi_2, \psi_2) \cdot f(\varphi_1, \psi_1). \end{aligned}$$

3. 1. 1. Аналогично для любых кардинальных чисел m, n, μ, ν доказывается следующая

Теорема. Полугруды $\overline{P}_{\text{мр}}^{\text{нв}}(\Omega_1, \Omega_2)$ и $\overline{P}_{\text{нв}}^{\text{мр}}(\Omega_2, \Omega_1)$ антиизоморфны.

3. 2. Как и в п. 3. 1, доказана

Теорема. Полугруды $\overline{P}_{\text{мр}}^{\text{нв}}(\Omega_1, \Omega_2)$ и $\overline{P}_{\text{нв}}^{\text{мр}}(\Omega_2, \Omega_1)$ антиизоморфны.

3. 3. Основной в данной статье является следующая

Теорема. Пусть ρ_1, ρ_2 — несимметричные рефлексивные (или антирефлексивные) отношения на множествах Ω_1, Ω_2 ; σ_1, σ_2 — произвольные отношения на множествах Σ_1, Σ_2 . Полугруды $\overline{W}_{\rho_{33}}(\Omega_1, \Omega_2)$ и $\overline{W}_{\sigma_{33}}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда:

- 1) графы (Ω_i, ρ_i) изоморфны графам (Σ_i, σ_i) при $(i=1, 2)$ или
- 2) графы (Ω_i, ρ_i) изоморфны графам $(\Sigma_i, \sigma_i^{-1})$ $(i=1, 2)$.

Всякий изоморфизм f полугруды $\overline{W}_{\rho_{33}}(\Omega_1, \Omega_2)$ на полугруды $\overline{W}_{\sigma_{33}}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ имеет вид:

$$V_{(\varphi, \psi) \in \overline{W}_{\rho_{33}}(\Omega_1, \Omega_2)} f(\varphi, \psi) = (\xi_2 \circ \xi_1^{-1}, \xi_1 \psi \xi_2^{-1}),$$

где ξ_i — изоморфизм графа (Ω_i, ρ_i) (или соответственно (Ω_i, ρ_i^{-1})) на граф (Σ_i, σ_i) при $(i=1, 2)$.

Доказательство теоремы ведется, как и в [5]. Роль отображений θ п. 2 [5] будут в нем играть отображения $\vartheta = \vartheta[a_i, b_i]$, где $a_i, b_i \in \Omega$ $(i=1, 2)$:

$$V_{x_i \in \Omega_i} (x_1, x_2) \in \vartheta \leftrightarrow ((x_1 = a_1 \wedge x_2 = a_2) \vee (x_1 = b_1 \wedge (x_2 = b_2))).$$

Если $a_1 = b_1, a_2 = b_2$, то $\vartheta \in W_{\rho_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ так как оба графа (Ω_i, ρ_i) рефлексивны (или оба антирефлексивны). Если же $a_2 \neq b_2$, то $\vartheta \in W_{\rho_3}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ тогда и только тогда, когда для элементов a_i, b_i выполняется одно из соотношений (3) — (6).

3. 3. 1. Аналогичные характеристики пары несимметрических рефлексивных или антирефлексивных графов возможно получить в терминах полугруд $\overline{P}_{\rho_{33}}(\Omega_1, \Omega_2), \overline{V}_{\rho_{33}}(\Omega_1, \Omega_2)$.

С помощью полугруд частичных гомоморфизмов можно, как и в [3], рассмотреть пару графов (Ω_i, ρ_i) , где ρ_i — рефлексивны или антирефлексивны, а одно из соотношений ρ_i — симметрично.

Формулировки соответствующих теорем нами опущены.

3. 4. Теорема. Пусть ρ_i — однотипные отношения на множествах Ω_i $(i=1, 2)$. При $\mu, t, \nu, n \geq 3$ все $\overline{P}_{\rho_{\mu\nu}}^{nt}(\Omega_1, \Omega_2)$ являются ρ_b -плотными подполугрудами полугруды $\overline{P}(\Omega_1, \Omega_2)$.

Доказательство. Пусть $E = \overline{P}_{\rho_{\mu\nu}}^{nt}(\Omega_1, \Omega_2)$, где $\mu, t, \nu, n \geq 3$ и $E' = \{\overline{P}(\Omega_1, \Omega_2), E\}_b$; покажем, что $E' = \overline{P}_\rho(\Omega_1, \Omega_2)$ и воспользуемся затем теоремой п. 6 [6].

Если φ — какое-либо бинарное отношение из $P(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus P_\rho(\Omega_1 \times \Omega_2)$, то существуют элементы $a_i, b_i \in \Omega_i$ такие, что $a_2 \in \varphi < a_1 >, b_2 \in \varphi < b_1 >$ и $(a_1, b_1) \in \rho_1, (a_2, b_2) \in \rho_2$.

Допустим, что $(\varphi, \psi) \in E'$ при некотором $\psi \in P(\Omega_2 \times \Omega_1)$. По условию теоремы найдутся элементы $c_i, d_i \in \Omega_i$ и отображения $\varphi_1 \in P_{\rho_3}(\Omega_1 \times \Omega_2), \psi_2 \in P_{\rho_3}(\Omega_2 \times \Omega_1)$ такие, что $\psi_1 a_2 = c_1, \psi_2 c_2 = a_1, \psi_1 b_2 = d_1, \psi_2 d_2 = b_1, (c_1, d_1) \in \rho_1, (c_2, d_2) \in \rho_2$. Тогда $(\varphi_1, \theta), (\theta, \psi_2) \in E$ и в силу $(\varphi, \psi) \in E'$ имеем

$$(O, \psi_1 \circ \psi_2) = (O, \psi_1)(\varphi, \psi)(O, \psi_2) \in E,$$

и, следовательно, $\psi' = \psi_1 \circ \psi_2 \in P_{\rho_3}(\Omega_2 \times \Omega_1)$. Но по построению $c_1 \in \psi' < c_2 >, d_1 \in \psi' < d_2 >, (c_2, d_2) \in \rho_2, (c_1, d_1) \in \rho_1$. Аналогичные рассуждения для $\psi \in P(\Omega_2 \times \Omega_1) \setminus P_\rho(\Omega_2 \times \Omega_1)$. Полученное противоречие показывает, что $E' \subseteq \overline{P}_\rho(\Omega_1, \Omega_2)$. С другой стороны, очевидно, что $\overline{P}_\rho(\Omega_1, \Omega_2) \subseteq E'$ и, следовательно, $E' = \overline{P}_\rho(\Omega_1, \Omega_2)$.

3. 4. 1. Теорема. Пусть ρ_i — однотипные отношения на множествах Ω_i $(i=1, 2)$. При $\mu, t, \nu, n \geq 3$ все $\overline{W}_{\rho_{\mu\nu}}^{nt}(\Omega_1, \Omega_2)$ являются ρ_b -плотными подполугрудами полугруды $\overline{W}_\rho(\Omega_1, \Omega_2)$, а $\overline{V}_{\rho_{\mu\nu}}(\Omega_1, \Omega_2)$ — ρ_b -плотными подполугрудами полугруды $\overline{V}_\rho(\Omega_1, \Omega_2)$.

Доказательство теоремы — как и в п. 3. 3.

3. 5. Аналогично п. п. 3. 4 — 3. 4. 1 из теорем п. п. 2. 5, 2. 6, 2. 6. 1 [7] вытекает еще одна теорема, позволяющая продолжить произвольный изоморфизм полугруды $\overline{P}_{\rho_{33}}(\Omega_1, \Omega_2)$ (соответственно $\overline{W}_{\rho_{33}}(\Omega_1, \Omega_2), \overline{V}_{\rho_{33}}(\Omega_1, \Omega_2)$) до изоморфизма полугруды $\overline{P}_\rho(\Omega_1, \Omega_2), \overline{W}_\rho(\Omega_1, \Omega_2)$ или $\overline{V}_\rho(\Omega_1, \Omega_2)$.

Теорема. Пусть ρ_i — однотипные отношения на множествах Ω_i $(i=1, 2)$. При $\mu, \nu, n, \nu \geq 3$ все $\overline{P}_{\rho_{\mu\nu}}^{nt}(\Omega_1, \Omega_2)$ (соответственно $\overline{W}_{\rho_{\mu\nu}}^{nt}(\Omega_1, \Omega_2), \overline{V}_{\rho_{\mu\nu}}^{nt}(\Omega_1, \Omega_2)$) являются i -плотными и j -плотными подполугрудами полугруды $\overline{P}_\rho(\Omega_1, \Omega_2)$ (соответственно $\overline{W}_\rho(\Omega_1, \Omega_2), \overline{V}_\rho(\Omega_1, \Omega_2)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вагнер В. В. Теория обобщенных груд и обобщенных групп. Матем. сб. 1953, 32 (74), № 3.
2. Глушкин Л. М. Идеалы полугруд. Сб. "Теория полугрупп и ее приложения", вып. 1. Изд-во Саратовск. гос. ун-та им. Н. Г. Чернышевского, 1965.
3. Глушкин Л. М., Фейзуллаев Р. Б. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1969, № 5.
4. Оре О. Теория графов. М., 1968. Изд-во "Наука".
5. Фейзуллаев Р. Б. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1969, № 4.
6. Фейзуллаев Р. Б. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1970, № 3.
7. Фейзуллаев Р. Б. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1972, № 4.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 10. III 1972

Р. Б. Фейзуллаев

Графларын там олмајан һомоморфизмләри һағында

ХУЛАСӘ

Мәғаләдә җарымгрудларын бә'зи тип сых даһил едилмәси вәситә-силә бири о бириндән бир чүт графларын чарпаз җарымгрудларынның там олмајан һомоморфизмләринин көмәји илә әввәлләр өјрәнилмиш синифләрдән даһа кениш синифләрин һағаризә олунмасы верил-мишдир.

R. B. Feizullaev

Partial homomorphisms of graphs

SUMMARY

In the paper the characteristic of more wide classes of graphs than in previous studies in which it has been shown that the sphere of applying of a crossed semi-heap of homomorphisms of original graphs is limited by cases when binary relations are relations of quasi-order or quasi-equivalence is given by means of some types of dense embeddings of semi-heaps with the help of crossed semi-heaps of partial homomorphisms of the pair of graphs one into another.

УДК 518. 517

А. М. ГУСЕЙНБЕКОВА

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В статье методом Л. А. Люстерника и М. И. Вишика получена асимптотика по малому параметру решения смешанной задачи для параболического псевдодифференциального уравнения в ограниченной области. При этом асимптотика содержит функции типа погранслоя, однако они не имеют вида $\exp\left(-\frac{\lambda x_n}{\varepsilon}\right)$ ($\lambda > 0$), но сохраняют свойство экспоненциального убывания по x_n для $x_n > 0$.

В цилиндрической области $\Omega_T = G \times (0 < t < T)$, где $0 < T \leq +\infty$, рассматривается уравнение

$$P^+ A_\varepsilon u = f(x, t). \quad (1)$$

На боковой поверхности $\Omega_T = (\Gamma \times (0 < t < T))$ области Ω_t задаются граничные условия:

$$P^+ \frac{\partial^j u}{\partial \rho^j} \Big|_{\Omega_T} = g_j(x', t), \quad j = 0, 1, \dots, \kappa - 1. \quad (2)$$

К этим условиям добавляется начальное условие:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in G. \quad (3)$$

Здесь $A_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon^m A(x, D)$, $A(x, D)$ — эллиптический псевдодифференциальный оператор, P^+ — оператор сужения на область $\Omega_T \in \{0 < t < T, -\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2, \dots, n\}$, ρ — внутренняя нормаль к Γ , κ — индекс факторизации. Функция u обращается в нуль вне Ω_T при $t < T$.

Обозначим через $H_s(R^n)$ пополнение по норме

$$\|u\|_s = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|^2)^s |u(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

пространства $S(R^n)^1$, а через $\dot{H}_s^+(R^n)$ подпространство $H_s(R^n)$, сос-

¹ Пространство $S(R^n)$ состоит из тех и только тех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $u(x)$ переменной $x \in R^n$, для которых при любых k и α

$$(1 + |x|^k) |D^\alpha u(x)| \leq C_{k,\alpha}. \quad \text{Здесь } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

стоящее из функций, равных нулю при $x_n < 0$. Если s — целое положительное число, функции из $\dot{H}_s^+(R^n)$ обращаются в нуль при $x_n = 0$ вместе с производными по x_n до порядка $s-1$. Рассматривается также пространство $H_s(R^n)$ функций $f(x)$, являющихся сужениями на R^n функций $ef(x)$ с $H_s(R^n)$. Пространство $\dot{H}_s^+$ при $s \geq \frac{1}{2}$ состоит из

функций $u(x) \in H_s(R^n)$, продолженных нулем для $x_n < 0$, а при $s < \frac{1}{2}$ совпадает с $\dot{H}_s^+(R^n)$. Пространства: $H_\alpha(I)$, $H_{s,\alpha}(\Omega)$, $E_s(\gamma)$, $P_{s,\alpha}(e^{-\gamma t})$, $E_{s,\alpha}(\gamma)$.

Пусть α — дробное число и I — любой интервал на числовой оси t , конечный или бесконечный. Пространство $H_\alpha(I)$ определяется как пополнение по норме

$$\|u\|_\alpha = \left(\sum_{k=0}^{[|\alpha|]} \int_I |u^{(k)}(t)|^2 dt + \int_I \int_I \frac{|u(t) - u(\theta)|^2}{|t - \theta|^{2\alpha - 2[|\alpha|] - 1}} dt d\theta \right)^{1/2}$$

пространства сужений на I финитных бесконечно гладких на всей числовой оси R^1 .

Пусть G — ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве R^n точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ гладкой $(n-1)$ -мерной поверхностью.

Пусть I — некоторый интервал оси t . Обозначим через Ω_1 цилиндрическую область $G \times I$ и через Ω_1' — боковую часть ее границы $\Gamma \times I$.

Пространство $H_{s,\alpha}(\Omega_1)$ состоит из всех функций $u(x, t)$, которые при почти всех $x \in G$ принадлежат $H_\alpha(I)$ и при почти всех $t \in I$ принадлежат $H_s(\Omega)$. В этом пространстве норма определяется по формуле:

$$\|u\|_{s,\alpha,\Omega_1}^2 = \|u(x, t)\|_{s,\alpha}^2 = \int_I \|u(x, t)\|_{s,G}^2 dt + \int_G \|u(x, t)\|_{\alpha,1}^2 dx$$

Пространство $P_s(e^{-\gamma t})$ (s, γ — фиксированные неотрицательные числа) состоит из всех функций $u(t)$, определенных на всей оси R^1 , равных нулю при $t < 0$ и таких, что функция $e^{-\gamma t} u(t)$ принадлежит пространству $H_s(R^1)$. Если $\gamma > 0$, то пространство $P_s(e^{-\gamma t})$ содержит экспоненциально-растущие функции. Зафиксируем $s \geq 0$ и $\gamma \geq 0$. Пространство $E_s(\gamma)$ определяется как совокупность всех функций $V(p) = V(\sigma + i\tau)$, заданных и голоморфных в полуплоскости $\text{Re } p > \gamma$ и обладающих следующим свойством:

$$\|V(p)\|_s^2 = \sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(\sigma + i\tau)|^2 (\sigma + i\tau)^{2s} d\tau < +\infty.$$

Пространство $P_{s,\alpha}(e^{-\gamma t})$ состоит из всех функций $u(x, t)$, определенных в области Ω , равных нулю при $t < 0$ и таких, что $e^{-\gamma t} u \in H_{s,\alpha}(\Omega)$. За норму $u(x, t)$ в $P_{s,\alpha}(e^{-\gamma t})$ примем норму $\|e^{-\gamma t} u\|_{s,\alpha}$ функции $e^{-\gamma t} u$ в $H_{s,\alpha}(\Omega)$. Отметим, что функция $u(x, t) \in P_{s,\alpha}(e^{-\gamma t})$ при почти всех $x \in G$ принадлежит пространству $P_s(e^{-\gamma t})$ по t , при почти всех t принадлежит $H_s(G)$ по x и норма $\|e^{-\gamma t} u(x, t)\|_{s,\alpha}$ конечна.

Пространство $E_{s,\alpha}(\gamma)$ состоит из всех функций $u(x, p)$, заданных для почти всех $x \in G$ и p , $\text{Re } p > \gamma$, принадлежащих пространству $H_s(G)$ при всех p , $\text{Re } p > \gamma$ и почти всех p с $\text{Re } p = \gamma$ и пространству $E_s(\gamma)$ при почти всех $x \in G$.

Асимптотика решения получена сперва в бесконечном цилиндре при $\varphi(x) = 0$. В этом случае задача (1) — (3) связана преоб-

разованием Лапласа с двойственной задачей:

$$p^+(p - \varepsilon^m A(x, D)) v(x, p) = F(x, p),$$

$$p^+ \frac{\partial^j v(x, p)}{\partial p^j} \Big|_{\Gamma} = G_j(x', p), \quad x' = x_1 \dots x_n, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $v(x, p)$, $F(x, p)$ и $G_j(x', p)$ — преобразование Лапласа для функций $u(x, t)$, $f(x, t)$, $g_j(x', t)$ соответственно; p — комплексный параметр. Очевидно, что p должен меняться в правой полуплоскости комплексной плоскости. Обозначим $p = q^m$. q должен меняться в некотором угле, или более точно, нужно, чтобы некоторая степень q пробегала правую полуплоскость комплексной плоскости, когда q изменяется в угле Q . Очевидно, что q^m пробегает правую полуплоскость $\operatorname{Re} p \geq 0$, когда q пробегает угол

$$Q: |\arg q| \leq \frac{\pi}{2m}.$$

Предполагается, что $\tilde{a}(x, \xi, q) = q^m - a(x, \xi)$, где $a(x, \xi)$ — символ эллиптического псевдодифференциального оператора $A(x, D)$ — удовлетворяет следующим условиям:

1. $\tilde{a}(x, \xi, q)$ — положительно-однородная функция переменных ξ , q порядка m ;
2. $\tilde{a}(x, \xi, q) = a^0(\xi, q) + a'(x, \xi, q)$, где $a'(x, \xi, q)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция x , $a'(x, \xi, q) \in C_0^\infty$ по x ;
3. Функция $L^\alpha \tilde{a}(x, \xi, q)$ при любом α обладает производными по ξ и по q до порядка γ , непрерывными на единичной сфере $(|q|^2 + |\xi|^2)^{1/2} = 1$.
4. $\tilde{a}(x, \xi, q)$ — эллиптический символ, т. е. $\tilde{a}(x, \xi, q) \neq 0$ при $|q| + |\xi| \neq 0$.
5. Символ $\tilde{a}(x, \xi, q)$ удовлетворяет условию D_1 , т. е. для функции $a(x, \xi, q)$ при α и β (α -мультиндекс) справедливы соотношения:

$$\partial_{\xi}^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial q^\beta} a(x, 0, 1, 0) = (-1)^{|\alpha| + \beta - i m} \partial_{\xi}^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial q^\beta} a(x, 0, -1, 0).$$

6. Символ $\tilde{a}(x, \xi, q)$ оператора A при $|q| \geq q_0 > 0$ является аналитической и отличной от нуля функцией комплексной переменной ξ_n в полосе $-\lambda q_0 \leq \xi_n \leq \lambda q_0$ при $q \in Q$, $|q| \geq q_0 > 0$ при всех $x \in R_x^n$ и $\xi' \in K_{\xi}$. Числа $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ не зависят от x , ξ' и q .

Доказывается следующая

Теорема 1. Пусть s — целое число, $s \geq \gamma$. Тогда существует такая $\gamma > 0$, что задача

$$p^+(p - A(x, D)) v(x, p) = F(x, p), \quad (4)$$

$$p^+ \frac{\partial^j v(x, p)}{\partial p^j} \Big|_{\Gamma} = G_j(x', p), \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad x' = x_1, \dots, x_{n-1}. \quad (5)$$

имеет единственное решение $v(x, p) \in E_{s, \frac{s}{m}}(\gamma)$ для любых функций

$$F(x, p) \in E_{s-m, \frac{s-m}{m}}(\gamma) \quad \text{и} \quad G_j(x', p) \in E_{s-j-\frac{1}{2}, \frac{s-j-1}{m}}(\gamma)$$

при достаточно больших значениях p .

При этом справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s, \frac{s}{m}} \leq C_1 \left\{ \|F\|_{s-m, \frac{s-m}{m}} + \sum_{j=0}^{n-1} \|G_j\|_{s-j-\frac{1}{2}, \frac{s-j-1}{m}} \right\} \leq C_2 \|v\|_{s, \frac{s}{m}}. \quad (6)$$

Перейдем к вопросу построения приближенного решения задачи (4), (5). Следуя общей схеме, задача сначала рассматривается в полупространстве, а затем в ограниченной области. В полупространстве $x_n \geq 0$ рассматривается следующая задача:

$$p^+ A_\varepsilon v_+(x, p) = F(x, p), \quad x_n > 0, \quad (7)$$

$$A_\varepsilon = q^m + \varepsilon^m A(x, D), \quad (8)$$

$$p^+ \frac{\partial^j v_+}{\partial x_n^j} \Big|_{x_n=0} = G_j(x', p), \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad x' = x_1, \dots, x_{n-1}. \quad (9)$$

Дополнительно предполагается, что $F(x, p)$ при $x_n = 0$ обращается в нуль вместе с производными достаточно высокого порядка по x_n . В силу теоремы 1 (для случая полупространства), задача (7)–(9) однозначно разрешима при достаточно малых значениях ε . Решение задачи (7)–(9) находится в виде:

$$v(x, \varepsilon, p) = W_0^+(x, p) + \varepsilon W_1^+(x, p) + \dots$$

где $W_k^+(x, p)$ равны нулю при $x_n < 0$.

Разлагая символ $q^m - \varepsilon^m a(x, \xi)$ по степеням по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, и сопоставляя отдельным членам разложения псевдодифференциальные операторы, получаем первое расщепление для оператора A_ε , которое дает первый итерационный процесс, откуда определяются функции W_k^+ , $k = 0, 1, \dots$

Функции W_k^+ не удовлетворяют, вообще говоря, граничным условиям. Поэтому для того, чтобы получить равномерную вплоть до границы асимптотику, прибавляем к функциям W_k^+ некоторые функции v_k^+ , называемые функциями типа пограничного слоя, так, чтобы сумма $v_k^+ + W_k^+$ удовлетворяла граничным условиям. Функции $\sum \varepsilon^k W_k^+$ дают некоторое приближение к решению неоднородного уравнения, поэтому, естественно, функции v_k^+ ищутся таким образом, чтобы $\sum \varepsilon^k V_k^+$ являлось приближенным решением соответствующего однородного уравнения. Далее требуется, чтобы функции v_k^+ ($k = 0, 1, \dots$) были заметно отличны от нуля лишь вблизи границы $x_n = 0$, поэтому, естественно, делается замена переменных $x_n \rightarrow t_n = \frac{x_n}{\varepsilon}$, что означает

растяжение масштаба в направлении нормали к границе.

В результате получим новое разложение оператора A_ε по степеням ε , причем главная часть его является оператором свертки. Это разложение дает второй итерационный процесс, с помощью которого определяются так называемые функции типа погранслоя. Эти функции не имеют, вообще говоря, вида $\left(-\frac{\lambda x_n}{\varepsilon}\right)$ ($\lambda > 0$). Однако мы можем доказать следующую лемму, утверждающую экспоненциальное убывание функции v_k^+ .

Лемма. Пусть символ $a(x, \xi, q) = q^m - a(x, \xi)$ удовлетворяет условиям 1)–6). Тогда для функций типа погранслоя v_ε^+ справедливы оценки

$$|D^{\gamma\beta} v_\varepsilon| \leq \alpha_{\gamma\beta}(x', p) e^{-(\lambda - \delta_1) t_n},$$

где $\delta_1 > 0$ — сколь угодно малое число, причем

$$\alpha_{\gamma\beta}(x', p) < C_\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|p| < \beta} |D^{|p|} \kappa^{(0)}(x', p)|$$

$$D^{\beta} = (-i)^{|\beta|} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_{n-1}}}{\partial x_{n-1}^{\beta_{n-1}}} \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}.$$

Утверждение леммы мы получаем из теоремы Пэли—Виаера, используя свойства функций τ_e^+ .

Далее, с помощью разбиения единицы строится асимптотика решения задачи (4), (5) и доказывается лемма, удовлетворяющая экспоненциальное убывание функции типа пограничного слоя. При этом задача нахождения функций τ_e сводится к аналогичной задаче в полупространстве.

Оценку остаточного члена дает следующая.

Теорема. Решение задачи (4), (5) представимо в виде

$$v = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k W_k^+ + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k V_k + Z_{N+1}.$$

Для остаточного члена Z_{N+1} справедливы соотношения:

$$\|Z_{N+1}\|_{L_2(G)} = O(\varepsilon^{N+1}), \\ \|D_x^\Gamma Z_{N+1}\|_{L_2(G)} = O(\varepsilon^{N+1-|\Gamma|}).$$

Эта теорема доказывается сперва для полупространства, а потом с помощью разбиения единицы—для задачи (4), (5). Затем, применяя обратное преобразование Лапласа, получаем асимптотическое разложение решения смешанной задачи для параболического псевдодифференциального уравнения в бесконечном цилиндре при нулевом начальном условии.

Далее находим асимптотику для общего случая неоднородного начального условия и, используя полученные результаты, строим асимптотику решения исходной задачи, т. е. асимптотику решения смешанной задачи для параболического псевдодифференциального уравнения в конечном цилиндре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович М. С., Вишик М. И. УМН, т. XIX, вып. 3, 1964.
2. Вишик М. И. и Эскин Г. И. Матем. сб., т. 71, 2, 1966.
3. Кон Дж. Дж., Ниренберг Л. Сб., „Псевдодифференциальные операторы“, М., 1967.
4. Покровский Л. Д. Канд. Дисс. М., 1969.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 18. VII 1972

А. М. Гусейнбэкова

Мәһдуд облаstda параболнк псевдодифференциал
тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәлә һәллинин
кичик параметрә көрә тәфриги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә параболнк псевдодифференциал тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәлә һәллинин кичик параметрә көрә ајрылышы верилмишдир.

А. М. Guseinbekova

Asymptotics of a solution of a mixed problem for
a parabolic pseudo-differential equation by
a small parameter in a bounded domain

SUMMARY

In the given paper asymptotics is obtained by a small parameter of a solution of a mixed problem for a parabolic pseudo-differential equation in a cylindrical domain.

УДК. 517. 947. 63

М. БАЙРАМОГЛЫ, Р. З. ХАЛИЛОВА

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТИПА ФРАГМЕНА—ЛИНДЕЛЕФА ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обозначим через $L_2(0, \infty; H)$ гильбертово пространство сильно-измеренных функций $f(t)$ со значениями из гильбертова пространства H такими, что

$$\int_0^\infty \|f(t)\|_H^2 dt < \infty.$$

В пространстве $L_2(0, \infty; H)$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P(A, d/dt) u(t) = \sum_{j=0}^n a_j A^j (d/dt)^{n-j} u(t) = 0. \quad (1)$$

Здесь A —положительный самосопряженный оператор в H , с разложением единицы E_s , a_j —комплексные числа. Функцию $u(t) \in L_2(0, \infty; H)$ назовем регулярным решением (определение регулярного решения см. [1]) уравнения (1), если:

1) $u(t)$ имеет абсолютно непрерывные производные до $(n-1)$ -го порядка включительно и $A^{n-j} u_t^{(j)}(t) \in L_2(0, \infty; H)$; $j=0, \dots, n$; $u_t^{(j)}(+0) = \varphi_j \in D(A^{n-j-1})$;

3) $P(A, d/dt) u(t) \equiv 0$.

Пусть $D_j \subset D(A^{n-j-1})$, $j=0, \kappa-1$ —подмножества из H . Обозначим через S_α множество всех вектор-функций $u(t)$ со значениями из H такими, что

$$\|u^{(j)}(t)\| \leq C_\alpha e^{-\alpha t} \quad \text{и} \quad \varphi_j = u_t^{(j)}(+0) \in D_j, \quad j=0, \kappa-1,$$

где число $\alpha > 0$. Очевидно, что $S_\alpha \subset L_2(0, \infty; H)$.

Определение. Класс S_α назовем классом α -тривиальности уравнения (1), если всякое регулярное решение его из S_α равняется тождественному нулю.

В данной статье, предполагая, что корни $\lambda_0(s), \lambda_1(s), \dots, \lambda_{n-1}(s)$ характеристического уравнения $P(s, \lambda) = 0$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \lambda_j(s) < 0, \quad j=0, 1, \dots, \kappa-1$$

$$\operatorname{Re} \lambda_j(s) > 0, \quad j=\kappa, \dots, n-1$$

при $s \in \sigma(A)$, находится класс α -тривиальности уравнения (1). Для простоты изложения пусть еще выполняются условия:

$$\min_{\substack{0 \leq i, j \leq \kappa-1 \\ i \neq j}} (\inf |\lambda_i(s) - \lambda_j(s)|) > 0.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть выполнены приведенные выше условия. Тогда для того, чтобы множество S_α было классом α -тривиальности уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы из соотношения $(E_s \varphi_j, \varphi_j) = 0$, которое имеет место для всех s , таких, что $0 \leq \operatorname{Re} \lambda_j(s) < \alpha$, $j = 0, 1, \dots, \kappa - 1$ вытекало $\varphi_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, \kappa - 1$.

Доказательство. По предположению, корни характеристического уравнения $P(s, \lambda) = 0$ строго p разделены мнимой осью. Поэтому,

$$\text{полагая } P_+(s, \lambda) = \prod_{j=\kappa}^{n-1} (\lambda - \lambda_j(s)), \quad P_-(s, \lambda) = \prod_{j=0}^{\kappa-1} (\lambda - \lambda_j(s)),$$

получаем, что операторный пучок $P(A, \lambda)$ допускает факторизацию:

$$P(A, \lambda) = P_+(A, \lambda) P_-(A, \lambda).$$

Пусть $u(t)$ — экспоненциально-убывающее регулярное решение уравнения (1). Тогда

$$v(t) = P_-(A, d/dt) u(t)$$

будет экспоненциально-убывающей функцией и $P_+(A, d/dt) v(t) \equiv 0$.

Отсюда вытекает, что $v(t) \equiv 0$. Обозначим через $\hat{v}(\lambda)$ преобразование Лапласа функции $v(t)$. Тогда

$$\hat{v}(\lambda) = P_+^{-1}(A, \lambda) \left\{ \sum_{j=0}^{n-\kappa-1} Q_{j+1}(A, \lambda) v^{(j)}(+0) \right\},$$

где $Q_{j+1}(A, \lambda) = \frac{d^j}{d\lambda^j} P_+(A, \lambda)$ при условии, что $\frac{d}{d\lambda}(\lambda^e) = \lambda^{e-1}$. Функ-

ция $\hat{v}(\lambda)$ голоморфна в правой полуплоскости, так как она является преобразованием Лапласа экспоненциально-убывающей функции, и в левой, потому что $P_+^{-1}(A, \lambda)$ существует для всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Следовательно, $\hat{v}(\lambda)$ — целая функция, ограниченная на всей комплексной плоскости и $\hat{v}(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что $\hat{v}(\lambda) \equiv 0$ и $v(t) \equiv 0$. Таким образом, $P_-(A, d/dt) u(t) = 0$. Поэтому теорему достаточно доказать для задачи вида:

$$\left. \begin{aligned} P_-(A, d/dt) u(t) &= 0, \\ u_t^{(j)}(+0) &= \varphi_j, \quad j = 0, 1, \dots, \kappa - 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$P_-(A, d/dt) u(t) \equiv \sum_{j=0}^{\kappa-1} \beta_j A^j (d/dt)^{\kappa-j} u(t).$$

Пусть $\hat{u}(\lambda)$ — преобразование Лапласа функции $u(t)$. Тогда из (2) имеем

$$P_-(A, \lambda) \hat{u}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\kappa-1} Q_{j+1}(A, \lambda) \varphi_j, \quad (3)$$

где

$$Q_{j+1}(A, \lambda) = \frac{d^j}{d\lambda^j} P_-(A, \lambda) \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\lambda}(\lambda^e) = \lambda^{e-1}.$$

Из соотношения (3) вытекает, что

$$\begin{aligned} \hat{u}(\lambda) &= P_-^{-1}(A, \lambda) \sum_{j=0}^{\kappa-1} Q_{j+1}(A, \lambda) \varphi_j = \\ &= \int_0^\infty P_-^{-1}(s, \lambda) \sum_{j=0}^{\kappa-1} Q_{j+1}(s, \lambda) \cdot dE_s \varphi_j. \end{aligned}$$

Очевидно, $\hat{u}(\lambda)$ должна быть аналитической вектор-функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > -\alpha$. А для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\Gamma_m} \sum_{j=0}^{\kappa-1} Q_{j+1}(s, \lambda_m(s)) dE_s \varphi_j \equiv 0, \quad m = 0, 1, \dots, \kappa - 1,$$

где Γ_m — множество всех s таких, что $0 \leq \operatorname{Re} \lambda_j(s) < \alpha$. Отсюда непосредственно вытекает, что $E_s \varphi_j = \operatorname{const}$ для всех s таких, что $0 \leq \operatorname{Re} \lambda_j(s) < \alpha$, $j = 0, 1, \dots, \kappa - 1$, и поскольку $E_{+0} \varphi_j = 0$, то $E_s \varphi_j = 0$. Таким образом, условия

$$\|u^{(j)}(t)\| \leq C_\alpha e^{-\alpha t}, \quad u_t^{(j)}(+0) = \varphi_j, \quad j = 0, 1, \dots, \kappa - 1$$

эквивалентны условиям $(E_s \varphi_j, \varphi_j) = 0$ при $0 \leq \operatorname{Re} \lambda_j(s) < \alpha$, $j = 0, 1, \dots, \kappa - 1$, откуда получаем, что для α -тривиальности искомого решения необходимо и достаточно, чтобы из

$$(E_s \varphi_j, \varphi_j) = 0, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \lambda_j(s) < \alpha, \quad j = 0, 1, \dots, \kappa - 1$$

следовало $\varphi_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, \kappa - 1$.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение Шредингера в полупространстве пространства R_{2n} :

$$-\frac{d^2 u}{dt^2} + Au = 0, \quad (1)$$

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{2n-1}^2} + q(x), \quad q(x) = \overline{q(x)},$$

и

$$|q(x)| \leq C e^{-\varepsilon |x|}, \quad C, \varepsilon > 0.$$

Находим решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$\|u\| = \sqrt{\int_{R_{2n-1}} |u(t, x)|^2 dx} \leq C e^{-\alpha t}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \quad (2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x) \in H = L_2(E_{2n-1}), \quad \int_{R_{2n-1}} e^{\delta |x|} |\varphi(x)|^2 dx < \infty, \quad \delta > 0. \quad (3)$$

Известно [2], [3], что ядро $\theta(x, y; s)$ разложения единицы E_s оператора A аналитически продолжается по s на полосу $|\operatorname{Im} s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Поэтому

$$E_s \varphi = \int_{R_{2n-1}} \theta(x, y; s) \varphi(y) dy$$

является аналитической функцией в полосе $|\operatorname{Im} s| < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 = \min(\delta, \varepsilon)$) и из $E_s \varphi = 0$ при $0 \leq s < \alpha$ следует, что $\varphi(x) \equiv 0$. Таким образом, всякое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3), тождественно равно нулю.

Легко видеть, что условие (2) выполняется, например, если функция $u(t, x_1, \dots, x_{2n-1})$ экспоненциально убывает:

$$|u(t, x)| \leq C e^{-\alpha(t+|x|)}, \quad C > 0, \quad \alpha > 0.$$

Замечание. В примере (1) в качестве оператора A можно было взять произвольный самосопряженный эллиптический оператор с финитными коэффициентами.

Различным аспектам теорем типа Фрагмена—Линделефа для операторно-дифференциальных уравнений посвящены работы П. Лакса [4], М. А. Евграфова [5], Е. М. Ландиса [6], Г. А. Джафарли [7] и др.

В заключение авторы приносят благодарность проф. М. Г. Гасымову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М. Г. „ДАН СССР“, т. 200, 1971, № 1.
2. Гасымов М. Г. „ДАН СССР“, т. 179, 1968, № 3.
3. Гасымов М. Г. „Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук“, 1970, № 1—2.
4. Лакс П. Математика (сборник переводов), 1959, 3, 4.
5. Евграфов М. А. Тр. Матем ин-та им. Стеклова, т. 60. М., 1961.
6. Ландис Е. М. „ДАН СССР“, т. 193, 1970, № 1.
7. Джафарли Г. А. „Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук“, 1971, № 5.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 18. VII 1972

М. Байрамоглу, Р. З. Халилова

Оператор эсаллы дифференциал тэнлик үчүн
Фрагмен-Линделёф типли бир теорем наггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1) тәнлији үчүн елә функцијалар синфи тапылмышдыр ки, һәммин тәнлијин һәллинин бу синфә дахил олмасындан онун ејнилик кими сыфра бәрабәр олмасы алыныр.

M. Bajramogly, R. Z. Khalilova

On one theorem of the Fragmen—Lindeleff type for operator—
differential equations

SUMMARY

In the given paper the class of triviality of the solution is pointed for one class of operator—differential equations.

Abstract results are applied to the self—conjugate Shredinger equation with an exponentially decreasing potential in a half—space.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1973, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1973, № 2

УДК 517. 5

Б. А. ХАЛИЛОВА

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ—ЯКОБИ И О ПРИБЛИЖЕНИИ
ФУНКЦИЙ УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Рассмотрим пространство $L_{2,\alpha}$ функций, суммируемых с квадратом на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x^2)^\alpha$. Через $E_n(f)_{2,\alpha}$ обозначим наилучшее приближение в метрике $L_{2,\alpha}$ функции $f(x) \in L_{2,\alpha}$ при помощи алгебраических многочленов степени не выше n .

Пусть известно, что

$$E_n(f)_{2,\alpha} \leq \frac{M}{n^{s+\gamma}}, \quad (1)$$

где $0 < \gamma < 1$, s —неотрицательное число.

Возникает задача выяснить структурные свойства функции $f(x)$, эквивалентные условию (1).

В случае $\alpha = 0$ эта задача рассматривалась Г. В. Жидковым [1], который показал, что условие (1) эквивалентно тому, что $f(x)$ имеет s -ю производную, удовлетворяющую условию

$$\|f_h^{(s)}(x) - f^{(s)}(x)\|_{L_{2,(1-x^2)^s}} \leq C|h|^\gamma,$$

где C —постоянная, не зависящая от h и

$$f_h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h \cos \theta) d\theta.$$

Затем результат Г. В. Жидкова был распространен С. З. Рафальсоном и на другие $\alpha \left(\alpha > -\frac{1}{2} \right)$.

Но для $s > 0$ ответ на поставленную задачу дан в работах [1] и [2] не в той метрике $L_{2,\alpha}$, в какой задано наилучшее приближение, а в метрике $L_{2,\alpha+s}$, связанной с. Поэтому оставался открытым вопрос о выяснении в метрике того же самого пространства $L_{2,\alpha}$ структурных свойств функции $f(x)$, эквивалентных условию (1).

Нами дан ответ на этот вопрос для случая, когда наилучшее приближение удовлетворяет более общему условию, чем условие (1) (см. ниже теорему). Заметим, что доказательство результатов Г. В. Жидкова, С. З. Рафальсона, а также приводимой ниже теоремы становятся более или менее стандартным, если известна связь между коэффициентами Фурье функций, участвующих в формулировке результатов. Поэтому основная трудность заключается в выяснении этих связей.

В данной работе для выяснения этих необходимых связей применен новый метод.

Через $\{\hat{P}_n^{(\alpha, \alpha)}(x)\}$ обозначим множество всех ортонормированных с весом $(1-x^2)^\alpha$ ($\alpha > -\frac{1}{2}$) на отрезке $[-1, 1]$ многочленов, т. е. множество всех ортонормированных ультрасферических многочленов.

Пусть коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L_{2, \alpha}$ по этой системе вычислены по формуле

$$a_k(f) = \int_{-1}^1 f(x) P_k^{(\alpha, \alpha)}(x) (1-x^2)^\alpha dx.$$

Обозначим еще

$$f_{h, \alpha}(x) = \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{2^{2\alpha} \left[\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \right]^2} \int_{-1}^1 f(x \cos h + y \sqrt{1-x^2} \sin h) (1-y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dy.$$

Будем говорить, что функция $\psi(x)$ принадлежит классу B , если выполнены следующие условия:

1. $\psi(t)$ — неотрицательна и непрерывна на $[0, 1]$;
2. $\psi(t_1) \leq C_1 \psi(t_2)$ ($0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$);
3. $\psi(2t) \leq C_2 \psi(t)$ ($0 \leq t \leq \frac{1}{2}$);

$$4. \left\{ \sum_{v=1}^n v \psi^2\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^{1/2} \leq C_3 n \psi\left(\frac{1}{2}\right);$$

$$5. \left\{ \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{1}{v} \psi\left(\frac{1}{v}\right) \right\}^{1/2} \leq C_4 \psi\left(\frac{1}{n}\right),$$

где константы C_1, C_2, C_3 и C_4 не зависят от t_1, t_2 и n .

Функция $f(x)$ имеет r -ю производную внутри интервала $(-1, 1)$, если на любом фиксированном сегменте $[a, b] \subset (-1, 1)$ она имеет абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$. Из последнего условия вытекает, что почти в каждой точке сегмента $[a, b]$ существует конечная производная порядка r , которая будет суммируемой функцией на этом сегменте.

Пусть $f(x) \in L_{2, \alpha}$ и имеет $2r$ -ю производную внутри интервала $(-1, 1)$; из условия вытекает, что почти в каждой точке интервала $(-1, 1)$ существуют конечные функции:

$$f_i(x) = (1-x^2) f_{i-1}'(x) - 2(\alpha+1) x f_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

где $f_0(x) = f(x)$.

Отметим, наконец, что ниже мы не будем различать эквивалентные функции, отличающиеся друг от друга на множестве меры нуль.

В статье доказывается следующая

Теорема. Пусть $f(x) \in L_{2, \alpha}$ ($\alpha > -\frac{1}{2}$). Функция $\psi(t) \in B$. s — целое неотрицательное число, $r = \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$.

Для того, чтобы

$$E_\alpha(f)_{2, \alpha} = O\left[\frac{1}{n^s} \psi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) функция $f(x)$ имела внутри интервала $(-1, 1)$ $2r$ -ю производную, т. е. чтобы функция $f^{(2r-1)}(x)$ была абсолютно непрерывной на любом фиксированном сегменте $[a, b] \subset (-1, 1)$;

2) функция $f_r(x) \in L_{2, \alpha}$;

3) $\|f_r(x) - f_{r, h, \alpha}(x)\|_{2, \alpha} = O[|h|^{s-2r} \psi(|h|)]$.

Лемма 1. Пусть в области $D = (-1 < R < 1; -1 < t < 1)$ заданы функции

$$\begin{cases} x = R \cos h + t \sqrt{1-R^2} \sin h = x(R, t), \\ y = \frac{R \sin h - t \sqrt{1-R^2} \cos h}{(R \sin h - t \sqrt{1-R^2} \cos h)^2 + (1-R^2)(1-t^2)} = y(R, t). \end{cases} \quad (3)$$

Тогда

1) функции $x(R, t)$, $y(R, t)$ и их первые частные производные $\frac{\partial x}{\partial R}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial R}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ непрерывны в области D ;

2) функциональный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = - \frac{\sqrt{1-R^2}}{(R \sin h - t \sqrt{1-R^2} \cos h)^2 + (1-R^2)(1-t^2)}$$

(откуда, в частности, следует, что Δ не меняет знака в области D)

3) функции (3) отображают область D на область $D_1 = (-1 < x < 1; -1 < y < 1)$ взаимно однозначно;

$$4. a. (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} |\Delta| = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$б. (1-x^2)(1-y^2) = (1-R^2)(1-t^2).$$

Лемма 2. Пусть $f(x) \in L_{2, \alpha}[-1, 1]$ ($\alpha > -\frac{1}{2}$). Тогда

$$f_{h, \alpha}(x) \in L_{2, \alpha}[-1, 1] \text{ и } \|f_{h, \alpha}(x)\|_{L_{2, \alpha}} \leq C \|f\|_{L_{2, \alpha}}.$$

Мы опускаем доказательство лемм 1 и 2, ибо справедливость их проверяется весьма просто.

Лемма 3. Если $f(x) \in L_{2, \alpha}[-1, 1]$ ($\alpha > -\frac{1}{2}$), то

$$a_k(f_{h, \alpha}) = \frac{\kappa! \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_\kappa^{(\alpha, \alpha)}(\cos h) a_\kappa(f).$$

Доказательство. Заменив переменные по формулам (3) и пользуясь теоремой о замене переменных в двойных интегралах, в силу леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} a_k(f_{h, \alpha}) &= \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{2^{2\alpha} \Gamma^2\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x \cos h + \\ &+ y \sqrt{1-x^2} \sin h) (1-x^2)^\alpha (1-y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} P_k^{(\alpha, \alpha)}(x) dx dy = \\ &= \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{2^{2\alpha} \Gamma^2\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(R) (1-R^2)^\alpha (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} P_\kappa^{(\alpha, \alpha)}(R \cos h + \end{aligned}$$

$$+ t\sqrt{1-R^2}\sinh)dRdt = \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{2^{2\alpha}\Gamma^2\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 f(R)(1-R^2)^\alpha dR \int_{-1}^1 R_k^{(\alpha,\alpha)}(R\cosh + \\ + t\sqrt{1-R^2}\sin)(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dt.$$

Далее, воспользовавшись теоремой сложения для ультрасферических многочленов, ортогональностью многочленов $\{\hat{P}_k^{(\alpha,\alpha)}(x)\}_0^\infty$ с весом, $(1-x^2)^\alpha$, равенствами $P_0^{(\alpha)}(x) \equiv 1$ и $\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dt = 2^{2\alpha} \frac{\Gamma^2\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha+1)}$,

получим:

$$a_k(f_{h,\alpha}) = \frac{\kappa! \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) \int_{-1}^1 f(R)(1-R^2)^\alpha P_k^{(\alpha,\alpha)}(R) dR = \\ + \frac{\kappa! \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) a_k(f).$$

Лемма 4. Пусть $f(x) \in L_{2,\alpha}$ и $f_r(x) \in L_{r,\alpha}$. Тогда

$$a_k(f_r) = [-\kappa(\kappa+2\alpha+1)]^r a_k(f).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала

$$a_k(f_1) = \int_{-1}^1 [(1-x^2)f''(x) - 2(\alpha+1)xf'(x)](1-x^2)^\alpha P_k^{(\alpha,\alpha)}(x) dx = \\ = \int_{-1}^1 [(1-x^2)^{\alpha+1}f'(x)]' P_k^{(\alpha,\alpha)}(x) dx.$$

Дважды воспользовавшись формулой интегрирования по частям и применяя затем дифференциальное уравнение для ультрасферических полиномов (см. [3]), будем иметь

$$a_k(f_1) = \int_{-1}^1 [(1-x^2)P_k^{(\alpha,\alpha)}(x) - 2(\alpha+1)xP_k^{(\alpha,\alpha)}(x)](1-x^2)f(x) dx = \\ = -\kappa(\kappa+2\alpha+1) \int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^\alpha P_k^{(\alpha,\alpha)}(x) dx = -\kappa(\kappa+2\alpha+1)a_k(f).$$

Применяя r^{-1} раз оценку (2), легко получить справедливость леммы.

Лемма 5. Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, то при любых h и $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

$$0 \leq 1 - \frac{\Gamma(\alpha+1)\kappa!}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) \leq C_\alpha \kappa^2 h^2. \quad (5)$$

Лемма 6. Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, то при $0 \leq \kappa|h| \leq \pi$

$$1 - \frac{\Gamma(\alpha+1)\kappa!}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) \geq C_\alpha \kappa^2 h^3.$$

Леммы 5, 6 для $\alpha = 0$ доказаны в работе [1], а в работе [2] показана их справедливость и для других $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $s = 2r$. Пусть даны условия 1), 2), 3) теоремы. Докажем справедливость условия 5). Оче-

видно, что при любом n и h , учитывая условие 3) теоремы и применяя равенство Парсеваля, получим

$$\sum_{\kappa=n+1}^{2n} |a_\kappa(f_r)|^2 \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\kappa!}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) - 1 \right]^2 \leq \\ \leq \sum_{\kappa=1}^\infty |a_\kappa(f_r)|^2 \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\kappa!}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) - 1 \right]^2 = \\ = \|f_r(x) - f_{r,h,\alpha}(x)\|_{2,\alpha}^2 \leq C_1 \psi^2(|h|).$$

Для любого данного n выберем h так, чтобы было справедливо неравенство

$$\frac{1}{n+1} \leq |h| < \frac{1}{n}.$$

Тогда, учитывая, что $1 \leq \kappa|h| \leq 2$ при $n+1 \leq \kappa \leq 2n$ в силу леммы 6 будем иметь

$$\sum_{\kappa=n+1}^{2n} |a_\kappa(f_r)|^2 \leq C_2 \sum_{\kappa=n+1}^{2n} |a_\kappa(f_r)|^2 \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\kappa!}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) - 1 \right]^2 \frac{1}{\kappa^4 h^4} \leq \\ \leq C_2 \frac{1}{(n+1)^4 h^4} \sum_{\kappa=n+1}^{2n} |a_\kappa(f_r)|^2 \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\kappa!}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) - 1 \right]^2 \leq \\ \leq C_3 \psi^2\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Отсюда

$$\sum_{\kappa=n+1}^\infty |a_\kappa(f_r)|^2 = \sum_{j=1}^\infty \sum_{\kappa=2^{j-1}n+1}^{2^j n+1} |a_\kappa(f_r)|^2 \leq C_4 \sum_{j=0}^\infty \psi^2\left(\frac{1}{2^j n+1}\right) \quad (6)$$

Далее, так как

$$\psi^2\left(\frac{1}{2^j n+1}\right) \leq 2 \sum_{\kappa=2^{j-1}n+2}^{2^j n+1} \frac{1}{\kappa} \psi^2\left(\frac{1}{\kappa}\right),$$

то, учитывая последнее неравенство, в силу свойств функции $\psi'(t)$ из (6) получим

$$\sum_{\kappa=n+1}^\infty |a_\kappa(f_r)|^2 \leq C_4 \psi^2\left(\frac{1}{n+1}\right) + 2C_4 \sum_{j=1}^\infty \sum_{\kappa=2^{j-1}n+2}^{2^j n+1} \frac{1}{\kappa} \psi^2\left(\frac{1}{\kappa}\right) \leq \\ \leq C_4 \psi^2\left(\frac{1}{n+1}\right) + C_5 \sum_{\kappa=n+2}^\infty \frac{1}{\kappa} \psi^2\left(\frac{1}{\kappa}\right) \leq C_6 \psi^2\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7)$$

Очевидно, что

$$E_n^2(f)_{2,\alpha} = \sum_{\kappa=n+1}^\infty |a_\kappa(f)|^2. \quad (8)$$

По лемме 5,

$$a_\kappa(f_r) = [-\kappa(\kappa+2\alpha+1)]^r a_\kappa(f).$$

Далее, учитывая оценку (7), найдем, что

$$\sum_{\kappa=n+1}^\infty |a_\kappa(f)|^2 \leq [n(n+2\alpha+1)]^{-2r} \sum_{\kappa=n+1}^\infty [\kappa(\kappa+2\alpha+1)]^{2r} |a_\kappa(f)|^2 =$$

$$= [n(n+2\alpha+1)]^{-2r} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f_r)|^2 \leq \frac{C_6}{n^{2r}(n+2\alpha+1)^{2r}} \psi^2\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{C_7}{n^{4r}} \psi^2\left(\frac{1}{n}\right).$$

Тогда из равенства (8) следует:

$$E_n(f)_{2,\alpha} = O\left[\frac{1}{n^{2r}} \psi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Теперь докажем обратное. Пусть

$$E_n(f)_{2,\alpha} = O\left[\frac{1}{n^{2r}} \psi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Докажем справедливость условий 1), 2), 3) теоремы. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} [\kappa(\kappa+2\alpha+1)]^{2r} |a_k(f)|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \kappa^{2r} (\kappa+2\alpha+1)^{2r} (\gamma_k - \gamma_{k+1});$$

где

$$\gamma_k = \sum_{m=k}^{\infty} |a_m(f)|^2.$$

Из равенства (8) и условия теоремы имеем

$$\gamma_k \leq C_k \frac{1}{\kappa^{4r}} \psi^2\left(\frac{1}{\kappa}\right). \quad (9)$$

Тогда, используя оценку (9), в силу свойств функции $\psi(t)$ имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \kappa^{2r} (\kappa+2\alpha+1)^{2r} |a_k(f)|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k \kappa^{2r-1} (\kappa+2\alpha+1)^{2r} + \gamma_{n+1} n^{2r} (n+2\alpha+1)^{2r} \leq C_8 \psi^2\left(\frac{1}{n}\right). \quad (10)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \kappa^{2r} (\kappa+2\alpha+1)^{2r} |a_k(f)|^2 < \infty.$$

Тогда в силу известной теоремы Рисса—Фишера существует такая функция $F(x) \in L_{2,\alpha}$, для которой числа $[-\kappa(\kappa+2\alpha+1)]^{2r} a_k(f) = A_k(F)$ являются ее коэффициентами Фурье. Далее, применяя стандартный метод разложения функции $f(x) \in L_{2,\alpha}$ в ряд по алгебраическим многочленам наилучшего приближения, оценку для нормы производной алгебраического многочлена, можно показать, что ряд, получаемый p -кратным ($p \leq 2r$) почленным дифференцированием ряда функции $f(x)$ по алгебраическим многочленам наилучшего приближения, сходится в смысле $L_2[a, b]$, где $[a, b]$ — произвольный фиксированный сегмент из интервала $(-1, 1)$.

Из теоремы С. М. Никольского ([4], стр. 260) следует, что в этом случае функцию $f(x)$ можно так видоизменить на множестве меры нуль, что после этого она будет иметь почти везде на $(-1, 1)$ конечную производную $f_{(x)}^{(2r)}$. Тогда можно утверждать, что почти везде на $(-1, 1)$ имеет смысл функция $f_r(x)$. Поскольку $a_k(f_r) = a_k(F)$ для всех k и мы не различаем эквивалентных функций, то это означает, что $f_r = F$. Итак, мы показали, что $f_r(x) \in L_{2,\alpha}$.

Обозначим $\Phi(x, h) = f_{r,h,\alpha}(x) - f_r(x)$. По лемме 3,

$$a_k(\Phi, h, x) = \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\kappa!}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) - 1 \right] a_k(f_r).$$

Применяя равенство Парсеваля, имеем

$$I = \int_{-1}^1 |f_{r,h,\alpha}(x) - f_r(x)|^2 (1-x^2)^{\alpha} dx = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f_r)|^2 \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\kappa!}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) - 1 \right]^2. \quad (11)$$

Пусть дано некоторое число h ($|h| \leq 1$); выберем для него натуральное число n так, что

$$\frac{1}{n+1} \leq |h| < \frac{1}{n}.$$

Тогда в силу леммы 5 используя оценку (10), имеем

$$I = \sum_{k=1}^n |a_k(f_r)|^2 \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\kappa!}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) - 1 \right]^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f_r)|^2 \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\kappa!}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)} P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos h) - 1 \right]^2 \leq C_9 h^4 \sum_{k=1}^n \kappa^4 |a_k(f_r)|^2 + C_{10} \psi^2\left(\frac{1}{n}\right). \quad (12)$$

Оценим первое слагаемое в неравенстве (12):

$$I_1 \leq C_9 h^4 \sum_{k=1}^n \kappa^4 |a_k(f_r)|^2 = C_9 h^4 \sum_{k=1}^n \kappa^4 (\gamma_k^* - \gamma_{k+1}^*),$$

где

$$\gamma_k^* = \sum_{m=k}^{\infty} |a_m(f_r)|^2.$$

Из оценки (10) в силу леммы 3 получим

$$\gamma_k^* \leq C_8 \psi^2\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда, используя свойство 4) функции $\psi(t)$, найдем

$$I_1 \leq C_9 h^4 \sum_{k=1}^n \gamma_k^* [\kappa^4 - (\kappa-1)^4] \leq C_{10} h^4 \sum_{k=1}^n \kappa^3 \gamma_k^* \leq C_{11} h^4 n^4 \psi^2\left(\frac{1}{n}\right).$$

Так как $|h| < \frac{1}{n}$, то

$$I_1 \leq C_{12} \psi^2\left(\frac{1}{n}\right). \quad (13)$$

Учитывая (13), из (12) получим

$$I^{1/2} \leq C_{13} \psi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Далее, в силу свойств функции $\psi(t)$,

$$I^{1/2} = C_{13} \psi\left(\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}\right) \leq C_{14} \psi\left(\frac{2}{n+1}\right) \leq C \psi(|h|).$$

Таким образом, мы показали, что

$$\|f_{r,h,\alpha}(x) - f_r(x)\|_{2,\alpha} = O[\psi(|h|)].$$

Случай $s = 2r + 1$ доказывается аналогично.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидков Г. В. ДАН СССР, т. 169, № 5, 1966.
2. Рафальсон С. З. Изв. вузов, Математика, 1968, № 4, 71.
3. Градштейн И. З., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
4. Никольский С. М. Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 38, 1951.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 15. IX 1972

Б. А. Халилова

Фурье-Якоби эмсаллары вэ функцијаларын ултрасферик
чоҳддилерлэ јахынлашмасы наггында

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә L_2 -дә ән јахшы јахынлашма тәртиби $\frac{1}{n^s} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ олан функ-
сијалар синфинин структурив характеристиксына аид теорем исбат
едилмишдир.

Бундан эләвә, теоремин ифадәсиндә иштирак едән функцијаларын
Фурье эмсаллары арасындакы эләгә тәјин олунмушдур.

B. A. Khalilova

Fourier—jacobi's coefficient and approximation
of functions to ultraspherical polynomials

SUMMARY

The theorem is proved which gives answer to the question about
structural character of the class of functions having in the metric $L_{2,\alpha}$ the
order $n^{-s} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ of the best approximation.

Besides that, the connection is found among Fourier's coefficients of
the functions which are used in results.

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вэ рижизјат елмлери серијасы, 1973, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1973, № 2

УДК 517.946

М. Д. МАХМУДОВ

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ
ФУНКЦИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА
В ТОНКИХ ОБЛАСТЯХ

Пусть Q —цилиндр в n -мерном пространстве с высотой h , доста-
точно малой в сравнении с другими измерениями. Боковую поверх-
ность Q обозначим через F .

Предположим, что ось x_n направлена по выоте h . В цилиндре
 Q рассматривается следующая задача:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - bu = \lambda u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} u = \begin{cases} 0, & x_n = 0, \\ 0, & x_n = h. \end{cases} \quad (2)$$

$$\left[h \frac{\partial u}{\partial \nu} + Au \right]_F = 0, \quad (3)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$; $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum \xi_i^2$; $\alpha = \text{const} > 0$; $A = 0$; $b > 0$; $\frac{\partial u}{\partial \nu} =$

$$= \sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\bar{n}, x_j); \quad h \text{—малый параметр.}$$

Предполагается, что все коэффициенты уравнения суть постоян-
ные. Цель заключается в том, чтобы построить асимптотику по мало-
му параметру h собственных чисел и собственных функций задачи
(1)–(3).

Сделаем замену переменных $x_n = th$. После этого умножим обе
части задачи на h^2 и обозначим $h^2 \lambda$ через $\lambda_h^{(1)}$.

Разложение собственного значения и соответствующей собствен-
ной функции ищем в виде:

$$\lambda_h^{(1)} = \mu_0 + h^{\frac{1}{n}} \mu_1 + h^{\frac{2}{n}} \mu_2 + \dots \quad (4)$$

$$\omega_h = \omega_0 + h^{\frac{1}{n}} \omega_1 + h^{\frac{2}{n}} \omega_2 + \dots \quad (5)$$

Подставив (4), (5) в задачу, которую получили после замены переменных и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях по h имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial t^2} = \mu_0 \omega_0, \\ \frac{\partial \omega_0}{\partial t} \Big|_{t=0, t=1} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} - \mu_0 \omega_1 = \mu_1 \omega_0, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial t} \Big|_{t=0, t=1} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} - \mu_0 \omega_2 = \mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_0, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \Big|_{t=0, t=1} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

и, наконец,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega_{n-1}}{\partial t^2} - \mu_0 \omega_{n-1} = \mu_1 \omega_{n-2} + \dots + \mu_{n-1} \omega_0, \\ \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial t} \Big|_{t=0, t=1} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial t^2} - \mu_0 \omega_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_i \partial t} - a_n \frac{\partial \omega_0}{\partial t} + \mu_1 \omega_{n-1} + \dots + \mu_n \omega_0, \\ \frac{\partial \omega_n}{\partial t} \Big|_{t=0, t=1} = - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial \omega_0}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} \omega_0 \right), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega_{2n-1}}{\partial t^2} - \mu_0 \omega_{2n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial^2 \omega_{n-1}}{\partial x_i \partial t} - a_n \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial t} + \mu_1 \omega_{2n-2} + \dots + \mu_{2n-1} \omega_0, \\ \frac{\partial \omega_{2n-1}}{\partial t} \Big|_{t=0, t=1} = - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} \omega_{n-1} \right), \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_{2n}}{\partial t^2} - \mu_0 \omega_{2n} = & - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial x_i \partial t} + a_n \frac{\partial \omega_n}{\partial t} \right) - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_i \partial x_j} - \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial \omega_0}{\partial x_i} + b \omega_0 + \mu_1 \omega_{2n-1} + \dots + \mu_{2n} \omega_0, \\ \frac{\partial \omega_{2n}}{\partial t} \Big|_{t=0, t=1} = & - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial \omega_n}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} \omega_n \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим задачу (6). Из (6) получаем, что $\mu_0 = -\kappa^2 \Pi^2$ $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Отметим, что с точки зрения физики интересен случай $\mu_0 = 0$. Поэтому разложение проведем подробно для случая $\mu_0 = 0$. Если $\mu_0 = 0$, то из (6)–(9) имеем

$$\omega_0 = \bar{\omega}_0(x), \omega_1 = \bar{\omega}_1(x), \dots, \omega_{n-1} = \bar{\omega}_{n-1}(x).$$

Далее, из (10) и (11) следует, что $\mu_n = 0, \mu_{n+1} = 0, \dots, \mu_{2n-1} = 0$. Учитывая задачи (10) и (11), находим что

$$\omega_n = \bar{\omega}_n(x) - t \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} \bar{\omega}_0 \right),$$

$$\omega_{n+1} = \bar{\omega}_{n+1}(x) - t \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} \bar{\omega}_1 \right),$$

$$\omega_{2n-1} = \bar{\omega}_{2n-1}(x) - t \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{jn} \frac{\partial \bar{\omega}_{n-1}}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} \bar{\omega}_{n-1} \right).$$

Отметим, что функции $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{2n-1}$ не зависят от t и пока — неизвестные произвольные функции.

Представляя выражение для ω_n из (10) в уравнение (12), получаем следующую задачу для

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_{2n}}{\partial t^2} = & \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{in} a_{jn} \frac{\partial^2 \bar{\omega}_0}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in} a_n}{2} \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} a_n \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial x_i} + \\ & + \frac{a_n^2}{2} \bar{\omega}_0 - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\partial^2 \bar{\omega}_0}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial x_i} + b \bar{\omega}_0 + \mu_{2n} \bar{\omega}_0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \omega_{2n}}{\partial t} \Big|_{t=0} = - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial \bar{\omega}_n}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} \bar{\omega}_n \right), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{2n}}{\partial t} \Big|_{t=1} = & \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{in} a_{jn} \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial x_i} + \frac{a_n^2}{4} \bar{\omega}_0 - \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial \bar{\omega}_n}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} \bar{\omega}_n. \end{aligned}$$

Так как соответствующая задаче (13), (14) однородная задача имеет отличие от нуля решения, для разрешимости ее необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 \omega_{2n}}{\partial t^2} dt = \frac{\partial \omega_{2n}}{\partial t} \Big|_{t=1} - \frac{\partial \omega_{2n}}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad (15)$$

которое получается из формулы Грина, примененной к искомому решению ω_{2n} и к решению сопряженной однородной задачи, соответствующей задаче (13), (14).

Учитывая (13) и (14), из условия (15) получаем уравнение для определения функции ω_0 в виде:

$$-\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\partial^2 \bar{\omega}_0}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_i - \frac{3a_{in} a_n}{2} + a_{in} \right) \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial x_i} + \left(b + \frac{a_n^2}{4} + \mu_{2n} \right) \bar{\omega}_0 = 0. \quad (16)$$

Граничные условия для определения не известной нам функции $\bar{\omega}_0$ выведем в дальнейшем. Если мы определим $\bar{\omega}_0$ как решение уравнения (16), то задача (13), (14) становится разрешимой. Решая ее, находим ω_{2n} в виде:

$$\omega_{2n} = \bar{\omega}_{2n} - t \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial \bar{\omega}_n}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} \bar{\omega}_n \right) + \frac{t^2}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{in} a_{jn} \frac{\partial^2 \bar{\omega}_0}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} a_n \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial x_i} \right).$$

Здесь $\bar{\omega}_{2n}$ — также произвольная неизвестная функция, не зависящая от t .

Следовательно, продолжая процесс, можно найти рекуррентные задачи для определения функций ω_j ($j = 1, 2, \dots$), а из условия разрешимости этих задач получить уравнения для определения функции $\bar{\omega}_k$ в виде:

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\partial^2 \bar{\omega}_k}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_i - \frac{3a_{in} a_n}{2} + a_{in} \right) \frac{\partial \bar{\omega}_k}{\partial x_i} + \left(b + \frac{a_n^2}{4} + \mu_{2n} \right) \bar{\omega}_k = \mu_{2n+1} \bar{\omega}_{k-1} + \dots + \mu_{2n+k} \bar{\omega}_0 = \delta_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

граничные условия для функции $\bar{\omega}_k$, $k = n, n+1, \dots$ будут сформулированы ниже.

Уместно отметить, что $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{n-1}$ удовлетворяют граничному условию (3), а функции $\omega_n, \omega_{n+1}, \dots$, которые определяются первым итерационным процессом, не удовлетворяют ему. Поэтому к функциям ω_k , $k = n, n+1, \dots$, прибавляются функции типа погранслоя v_k так, чтобы полученная сумма $\omega_k + v_k$ удовлетворяла бы всем граничным условиям.

Для того чтобы построить эти функции, в достаточно малой окрестности F введем локальные координаты (ρ, y) , где ρ — расстояние по нормали к F , а $y = y(y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, t)$ — координаты точки на F .

Поставленную задачу напишем в новых переменных и сделаем замену F .

Решение уравнения ищем в виде:

$$v_h = v_0 + h^{\frac{1}{n}} v_1 + h^{\frac{2}{n}} v_2 + \dots + h h^{\frac{1}{n}} v_{n+1} + h h^{\frac{2}{n}} v_{n+2} + \dots, \quad (16)$$

так, чтобы сумма $\omega_h + v_h$ удовлетворяла всем граничным условиям.

Подставляя выражение v_h в задачу и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях по h , для определения v_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ получим следующие задачи:

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + 2A \frac{\partial^2 v_k}{\partial t \partial \tau} + B \frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} = 0, \quad \left[\frac{\partial v_k}{\partial t} + 4A \frac{\partial v_k}{\partial \tau} \right]_{t=0, t=1} = 0, \quad (17)$$

$$\left[c \frac{\partial v_k}{\partial \tau} + A v_k \right]_{\tau=0} = -\omega_k|_F = \varphi_k(t), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Отметим, чтобы задача (17) имела решения типа пограничного слоя при $\tau = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^1 \varphi_k(t) dt = 0. \quad \text{Тогда}$$

$$v_k = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^k e^{\alpha_j \tau} \psi_j(t), \quad \alpha_j < 0, \quad (18)$$

где $\psi_j(t)$ — собственные функции задачи

$$\begin{aligned} \psi_j''(t) + \alpha_j \psi_j'(t) + \alpha_j^2 \psi_j(t) &= 0, \\ \psi_j(0) + 2A \alpha_j \psi_j(0) &= 0, \\ \psi_j'(1) &= 2A \alpha_j \psi_j(1) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

отвечающие неположительным собственным значениям. Так как при $k = 0, n-1$ от t не зависит, то из (18) получаем

$$\bar{\omega}_k|_F = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (20)$$

т. е. граничные условия для нахождения функций $\bar{\omega}_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Таким образом, для определения v_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ получим задачу, для которой $v_k = 0$ при $k = 0, 1, \dots, n-1$. Учитывая, что $v_k = 0$ при $k = 0, 1, \dots, n-1$, для определения v_k , $k = n, n+1, \dots, 2n-1$ будем иметь задачу, для которой необходимы и достаточны условия убывания; на бесконечности решением задачи является

$$\int_0^1 \left(A \omega_k + \frac{\partial \omega_{k-n}}{\partial y} \right) dt = 0.$$

Зная функции $v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n-1}$, мы можем найти $v_{2n}, v_{2n+1}, v_{2n+2}, \dots$.

Существование решений задачи (17) при $k = 2n+1, 2n+2, \dots$ типа пограничного слоя доказывается методом математической индукции.

Таким образом, определение в малой полоске вблизи границы функции v_j распространяется на всю область с помощью сглаживающих функций.

Далее, решая уравнение (14) при условии (20), находим μ_{2n} и $\bar{\omega}_0$. Применяя метод М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [1], определяем $\mu_{2n+1}, \mu_{2n+2}, \dots$.

Имеет место следующая:

Теорема. На данные собственные значения задачи (1)–(3) представляются в виде сходящегося ряда

$$\lambda_h^{(1)} = \mu_{2n} + h^{\frac{1}{n}} \mu_{2n+1} + \dots + h^{\frac{n-1}{n}} \mu_{2n+n-1} + \dots,$$

а соответствующая собственная фракция в виде:

$$\omega_h = \omega_{N,h} + z_N, \quad \|z_N\|_{L_2(Q)} = O(\varepsilon^{s+1}),$$

где $\omega_{N,h}$ — отрезок построенного ряда, прерванный на $N = ns$ шаге, т. е.

$$\omega_{N,h} = \omega_0 + h^{\frac{1}{n}} \omega_1 + \dots + h^s \omega_N + h^{\frac{1}{n}} v_1 + \dots + h^s v_{2N}.$$

Здесь ω_1 определяется первым итерационным процессом, а ν_1 — вторым; они являются функциями типа погранслоя и компенсируют неувязку в граничных условиях.
В заключение выражаю глубокую благодарность А. М. Гусейнбековой и руководителю Ф. Максудову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. УМН, XII, вып. 5, 1957.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. Д. УМН т. XV, вып. 3 (93), 1960.
3. Джавадов М. Г. „ДАН СССР“, т. 160, № 3, 1961.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступила 15. IX 1972

М. Ч. МАХМУДОВ

Бир өлчүсү галан өлчүлөрө нисбәтән чох кичик
олан. областларда ики тәртибли, сабит әмсаллы,
еллиптик типли тәнлик үчүн гојулмуш сәрһәд мәсәләсинин
кичик параметрә көрә тәфриги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ашағыдакы мәсәлә арашдырылмышдыр: h өлчүлү фә-
зада һүндүрлүјү h олан цилиндри Q , онун јан сәтһини исә F илә
ишарә едәк. Фәрз олунур ки, координат охларындан бири цилиндрин
һүндүрлүјүнүн үстүнә дүшүр. Бундан башга, фәрз олунур ки, h си-
линдрин дикәр өлчүләринә нәзәрән кичикдир. Q цилиндриндә

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - bu = \lambda u, \quad (1)$$

тәнлијинин

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} u = \begin{cases} 0, & x_n = 0, \\ 0, & x_n = h. \end{cases} \quad (2)$$

$$\left[h \frac{\partial u}{\partial \nu} + Au \right]_F = 0 \quad (3)$$

шәртләрини өдәјән мәхсуси әдәд вә мәхсуси функцијаларынын кичик
параметрә көрә ајрылышы тапылмышдыр. Исбат олунмушдур ки, (1),
(2), (3) мәсәләсинин мәхсуси әдәдләри вә мәхсуси функцијалары
ашағыдакы ајрылыша маликдир:

$$\lambda_h^{(1)} = \mu_{2n} + h^{\frac{1}{n}} \mu_{2n+1} + \dots + h \mu_{3n} + \dots$$

$$\omega_h = \omega_{h,N} + z_N, \quad \|z_N\|_{L_2(Q)} = O(\varepsilon^{s+1}).$$

һарада

$$\omega_{hN} = \omega_0 + h^{\frac{1}{n}} \omega_1 + \dots + h^s \omega_N + h^{\frac{1}{n}} \nu_1 + \dots + h^s \nu_N \text{—дирсә,}$$

орада ω_N —биринчи итерасија, ν_N —ләр исә икинчи итерасија просесин-
дән тапылыр.

M. J. Makhmudov

Asymptotics of proper numbers and eigenfunctions of an elliptical operator of the second order in thin domains

SUMMARY

The following problem is studied in the given paper: a cylinder with the height, lateral surface has been taken. One coordinate axis is supposed to coincide with the height of the cylinder. Further more it is assumed that is small in comparison with other cylinder measures. There are eigenvalue and eigenfunction expansions in by a small parameter of the following equation

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - bu = \lambda u, \quad (1)$$

under the conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} u = \begin{cases} 0, & x_n = 0, \\ 0, & x_n = h, \end{cases} \quad (2)$$

$$\left[h \frac{\partial u}{\partial \nu} + Au \right]_F = 0. \quad (3)$$

It has been proved that eigenvalue and eigenfunction expansions of the problems (1), (2), (3) will be the following

$$\lambda_h^{(1)} = \mu_{2n} + h^{\frac{1}{n}} \mu_{2n+1} + \dots + h \mu_{3n} + \dots$$

$$\omega_h = \omega_{hN} + z_N, \quad \|z_N\|_{L_2(Q)} = O(\varepsilon^{s+1}).$$

where

$$\omega_{hN} = \omega_0 + h^{\frac{1}{n}} \omega_1 + \dots + h^s \omega_N + h^{\frac{1}{n}} \nu_1 + \dots + h^s \nu_N$$

ω_N —is found from the I iteration process,

ν_N —is found from the II iteration process.

С. И. ИБРАГИМОВ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДОВ НЬЮТОНА—ДИРИХЛЕ

В статье изучается распределение нулей последовательности частных сумм $s_n(z)$ лакунарного ряда Ньютона—Дирихле:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \prod_{k=1}^{m_n} (z - z_k), \quad (1)$$

где $\{\lambda_n\}$ и $\{m_n\}$ — некоторые последовательности натуральных чисел.

§ 1. Рассмотрим случай, тогда последовательность узлов имеет конечный предел:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z'. \quad (2)$$

Не нарушая общности рассуждения, положим $z' = 0$, $|z_k| \leq \rho$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и для любого n ,

$$\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \quad (\lambda_0 \geq 0) \quad m_n - m_{n-1} \geq 1. \quad (3)$$

Кроме того, положим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{m_n - m_{n-1}} = \sigma_1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{m_n - m_{n-1}} = \sigma_2. \quad (4)$$

Очевидно, в случае, когда $0 \leq \sigma_1 < \infty$, $0 \leq \sigma_2 < \infty$ из условия (4) следует, что существуют числа α_1 и α_2 ($0 \leq \alpha_1 < \infty$, $0 \leq \alpha_2 < \infty$), такие, что

$$\alpha_1 \leq \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{m_n - m_{n-1}} \leq \alpha_2 \quad (5)$$

при любом n . Из последнего неравенства следует, что при любом n и $v \leq n$ справедливы неравенства:

$$\alpha_1 \leq \frac{\lambda_n - \lambda_{n-v}}{m_n - m_{n-v}} \leq \alpha_2.$$

Пусть далее

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{m_n - m_{n-1}} = c < \infty; \quad (6)$$

обозначим через G_1 и G_2 соответственно следующие множества точек плоскости (z):

$$G_1 = \{x > 0, |z| > \rho + (c + \delta) \exp \alpha_2 x\},$$

$$G_2 = \{x \leq 0, |z| > \rho + (c + \delta) \exp \alpha_1 x\},$$

где δ — некоторое фиксированное положительное число.

Отметим, что при любом $\delta > 0$ области G_1 и G_2 лежат в области расходимости ряда (1). Действительно, при условиях (2)–(4), (6), применяя признак сходимости Даламбера, можно показать, что ряд (1) расходится в областях

$$D_1 = \{x > 0, ||z| - \rho| > c \exp \alpha_2 x\},$$

$$D_2 = \{x \leq 0, ||z| - \rho| > c \exp \alpha_1 x\},$$

Так как $\sigma_1 \geq \alpha_1$ и $\sigma_2 \leq \alpha_2$ получим, что при любом $\delta > 0$ $G_1 \subset D_1$ и $G_2 \subset D_2$. Заметим, что круг $|z| < \rho$ целиком расположен вне области $G_1 \cup G_2$.

Рассмотрим в области $G_1 \cup G_2$ семейство функций

$$L_n(z) = \left\{ \frac{s_n(z)}{a_n e^{-\lambda_n z} \prod_{k=0}^{m_n} (z - z_k)} \right\}.$$

В самом деле, учитывая (3)–(5), при $z \in G_1$ получаем неравенство:

$$|L_n(z)| < 1 + A \exp \{(m_n - m_{n-1}) [\ln(c + \varepsilon) - \ln(|z| - \rho) + \alpha_2 x] + \dots$$

$$\dots A \exp \{(m_n - m_0) [\ln(c + \varepsilon) - \ln(|z| - \rho) +$$

$$+ \alpha_2 x] \leq 1 + A \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c + \varepsilon}{c + \delta} \right)^n.$$

Следовательно, взяв $\varepsilon > \delta$, приходим к выводу, что при $z \in G_1$ имеем $|L_n(z)| < M_1$, где M_1 не зависит от z и n . Аналогично при $z \in G_2$ $|L_n(z)| < M_2$.

Таким образом, получаем, что семейство функций $\{L_n(z)\}$ равномерно ограничено в области $G_1 \cup G_2$, а из этого следует нормальность данной системы функций.

Обозначим через $E(R)$ круг радиуса R с центром в начале координат. Под $F[\psi(r), \alpha_1]$ и $F[\psi(r), \alpha_2]$ соответственно будем понимать множество

$$F_1 = F[\psi(r), \alpha_1] = \{x \leq 0, \alpha_1 x - \ln(|z| - \rho) < -\psi(r)\},$$

$$F_2 = F[\psi(r), \alpha_2] = \{x > 0, \alpha_2 x - \ln(|z| - \rho) < -\psi(r)\},$$

где $\psi(r)$ — произвольно заданная функция такая, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \infty \quad (r = |z|). \quad (7)$$

Далее, положим $F_R = \{[F_1 \cup F_2] \cap [G_1 \cup G_2] \cap E(R)\}$.

Очевидно, что при достаточно большом R для всех точек $z \in F_R$, для которых $x \leq 0$, справедливо неравенство $\alpha_1 x - \ln(|z| - \rho) < -\psi(r)$, а для тех $z \in F_R$, для которых $x > 0$, справедливо неравенство $\alpha_2 x - \ln(|z| - \rho) < -\psi(r)$.

Из свойства (7) функции $\psi(r)$ следует, что при достаточно больших R имеем

$$F = F_R \cup \{E(R) \cap [G_1 \cup G_2]\} \subset G_1 \cup G_2 \quad (8)$$

и границы областей F и $G_1 \cup G_2$ совпадают внутри круга $E(R)$. Пусть $z \in F_R$ и $x > 0$, тогда при достаточно большом R в силу (2), (3), (5)–(7) имеем

$$|L_n(z)| > 1 - A \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c + \varepsilon}{e^{\psi(r)}} \right)^n = 1 - A \left(\frac{c + \varepsilon}{e^{\psi(r)}} \right) \frac{1}{1 - \frac{c + \varepsilon}{e^{\psi(r)}}} = \gamma > 0. \quad (9)$$

Подобное неравенство наблюдается при достаточно большом R , $z \in F_R$ и $x \leq 0$. Таким образом, получаем, что в области F_R все $s_n(z)$ не имеют нулей.

Теперь покажем, что число нулей функции $f_n(z)$ ограничено в области $\bar{E} = E(R) \cap [G_1 \cup G_2]$ одним и тем же числом, не зависящим от n .

Предположим противное. Выберем возрастающую последовательности положительных чисел $\{m_{j_k}\}$ и положим, что $L_{n_k}(z)$ — функция, число нулей которой не меньше m_{j_k} ($k = 1, 2, \dots$). Из последовательности $\{Z_{n_k}(z)$, можно выделить подпоследовательность $\{L_{p_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся в области $\bar{E}$ к аналитической функции $\varphi(z)$, которая в силу (9) не равна тождественно нулю. Применяя к последовательности $\{L_{p_k}(z)\}$ теорему Гурвица, придем к противоречию. Итак, доказана следующая

Теорема 1. Пусть последовательности $\{\lambda_n\}$, $\{z_n\}$, $\{m_n\}$ и $\{a_n\}$ удовлетворяют условиям:

- 1) $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$; 2) $m_n - m_{n-1} \geq 1$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{m_n - m_{n-1}} = \sigma_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{m_n - m_{n-1}} = \sigma_2$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$; 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{\frac{1}{m_n - m_{n-1}}} = c < \infty$;

тогда числа нулей любой функции из последовательности частных сумм $R_n(z)$ ряда (1) ограничено во всякой области F , определяемой равенством (3).

Замечание. Утверждение теоремы остается в силе, если числа m_n и λ_n ($n = 0, 1, \dots$) удовлетворяют условиям: $m_0 \geq 0$, $m_n \geq m_{n-1}$, $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq 1$, ($n = 1, 2, \dots$). В этом случае равенства (4) и (6) заменяются соответственно следующими неравенствами:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n - m_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = \sigma_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n - m_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = \sigma_2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{\frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}} = c < \infty.$$

Из нашей теоремы при $z_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) вытекает аналогичное утверждение, доказанное в работе [3]. При $m_n = 0$ мы получаем теорему, доказанную в [2] для рядов Дирихле. При $z_n = 0$, $\lambda_n = 0$, $m_n = n$ мы получаем утверждение, доказанное в [1] для степенных рядов. Из теоремы 1 можно вывести и ряд других следствий.

§ 2. Исследуем нули последовательности частных сумм ряда (1) при

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_k| = \infty. \quad (10)$$

Пусть для ряда (1), удовлетворяющего условию (10), имеет место неравенство

$$\sigma_1 \leq \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n} \ln |z_k|} \leq \sigma_2. \quad (11)$$

Из условия (11) при любом $v \leq n$ имеем

$$\sigma \leq \frac{\lambda_n - \lambda_{n-v}}{\sum_{k=m_{n-v}}^{m_n} \ln |z_k|} \leq \sigma_2.$$

Выберем узлы z_k так, чтобы для любого n

$$\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n} \ln |z_k| \geq 1. \quad (12)$$

Теперь положим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{\frac{1}{\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n} \ln |z_k|}} = c < \infty. \quad (13)$$

Рассмотрим полуплоскости $\operatorname{Re} z < \frac{1 - \ln(c + \delta)}{\sigma_1}$, $\delta > 0$, $x \leq 0$ и

$\operatorname{Re} z < \frac{1 - \ln(c + \delta)}{\sigma_2}$, $\delta > 0$, $x > 0$ и выберем в них соответственно

области G_1 и G_2 , удовлетворяющие следующему условию: если z стремится к бесконечности вдоль границы области $G_1 \cup G_2$, то $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$. Области G_1 и G_2 лежат в области расходимости ряда (1), при условиях (10)–(13) ряд (1) расходится в областях

$$D_1 = \left\{ \operatorname{Re} z < \frac{1 - \ln c}{\sigma_1}, x \leq 0 \right\}; \quad D_2 = \left\{ \operatorname{Re} z < \frac{1 - \ln c}{\sigma_2}, x > 0 \right\}.$$

Для функции $L_n(z)$ при $x \leq 0$ находим

$$|L_n(z)| \leq 1 + A \exp \left\{ \left(\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n} \ln |z_k| \right) \ln \frac{c + \varepsilon}{c + \delta} \right\} + \dots$$

$$\dots + A \exp \left\{ \left(\sum_{k=m_0}^{m_n} \ln |z_k| \right) \ln \frac{c + \varepsilon}{c + \delta} \right\} \leq 1 + A \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c + \varepsilon}{c + \delta} \right)^n.$$

Следовательно, взяв $\varepsilon < \delta$, приходим к выводу, что при $z \in G_1$ $|L_n(z)| < M_1$ при $z \in G_2$ $|L_n(z)| < M_2$.

Таким образом, получаем, что семейство функций $\{L_n(z)\}$ равномерно ограничено в области $G_1 \cup G_2$, а из этого следует нормальность данной системы функций.

Отсечем от области $G_1 \cup G_2$ ту часть G^* , для всех точек которой выполняется условие $\operatorname{Re} z < \frac{1 - 2R}{\sigma_1}$ (R — достаточно большое число).

В области G^* справедливо неравенство

$$|L_n(z)| > 1 - A \sum_{k=1}^n \left(\frac{c + \varepsilon}{e^{2R}} \right)^n > 1 - A \left(\frac{c + \varepsilon}{e^{2R}} \right) \frac{1}{1 - \left(\frac{c + \varepsilon}{e^{2R}} \right)} > 1 - c_1 > 0$$

при достаточно большом R . Следовательно, $L_n(z)$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \frac{1 - 2R}{\sigma}$. И, наконец, аналогично § 1 можно

доказать, что число нулей $S_n(z)$ ограничено (числом, не зависящим от n) в области $\Phi = [G_1 \cup G_2] / G^*$. Итак, нами доказана следующая

Теорема 2. Пусть последовательность чисел $\{\lambda_n\}$, $\{z_n\}$, $\{m_n\}$ и $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям:

- 1) $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$; 2) $\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n} \ln |z_k| \geq 1$;

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty; \quad 4) \sigma_1 \leq \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\sum_{k=m_n-1}^{m_n} \ln |z_k|} \leq \sigma_2;$$

$$5) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{1/\sum_{k=m_n-1}^{m_n} \ln |z_k|} = c < \infty; \quad 6) \operatorname{Re} z_k > \frac{1 - \ln c}{\sigma_1}.$$

Тогда число нулей любой функции $S_n(z)$ из последовательности частных сумм $\{S_n(z)\}$ ряда (1) ограничено во всякой области $G_1 \cup G_2$, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \frac{1 - \ln c}{\sigma_1}$ и удовлетворяющей условию: если $z \rightarrow \infty$ вдоль границы области $G_1 \cup G_2$, то $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$.

Замечание. Аналогичными рассуждениями для ряда (1) можно доказать нашу теорему при следующих предположениях относительно последовательности чисел $\{\lambda_n\}$, $\{z_n\}$, $\{m_n\}$, $\{a_n\}$:

$$1) \lambda_n - \lambda_{n-1} > 1; \quad 2) m_0 \geq 0, \quad m_n \geq m_{n-1};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty; \quad 4) \sigma_1 \leq \frac{\sum_{k=m_n-1}^{m_n} \ln |z_k|}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \leq \sigma_2.$$

$$5) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{\frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}} = c < \infty; \quad 6) \operatorname{Re} z_k > \frac{1}{\sigma_1} - \ln c.$$

Из теоремы 2 при $\lambda_n = 0$ получим аналогичное утверждение для лакунарного ряда Ньютона, а при $\lambda_n = 0$, $m_n = n$ — для интерполяционного ряда Ньютона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснощекова Т. И. Тр. МАИ, вып. 61, 1956.
2. Фоменко С. В. „Изв. вузов, Математика“, № 1 (38), 1964.
3. Ибрагимов И. И. и Мехтиев И. Г. „ДАН СССР“, т. 199, № 3, 1971.

Ин-т кибернетики АН Азерб. ССР

Поступила 28. III 1972

С. И. Ибрагимов

Нјутон-Дирихле сырасынын хусуси чэмлэри сыфырларынын пайланмасы

ХҮЛАСЭ

Тэдгигатда Нјутон-Дирихле сырасы адланан,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \prod_{k=0}^{m_n} (z - z_k) \quad (*)$$

сырасынын хусуси чэмлэри сыфырларынын пайланмасы мәсэләси өјрәнилмишдир. Бу мәсәләнин һәлли a_n әмсалларындан, λ_n үстләриндән вә z_n әдәлләринин пайланмасы ганунундан асылыдыр.

(*) сырасынын дағылма областында јерләшән елә област тапылмышдыр ки, онун дахилиндә сыранын хусуси чэмлэри сыфырларынын сајы бир сонлу әдәди ашмыр.

Хусуси һалда Тејлор сырасы, Дирихле сырасы вә Тејлор-Дирихле сырасы һаггында мәлүм нәтичәләр алынмышдыр.

S. I. Ibragimov

On zero distribution of Newton-Dirichlet series particular sums

SUMMARY

In the article we consider the series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \prod_{k=0}^{m_n} (z - z_k)$$

which is named a Newton-Dirichlet series. Depending on the properties of consequences $\{a_n\}$, $\{\lambda_n\}$, $\{m_n\}$, $\{z_{m_n}\}$ there are found infinite domains situated in the domains of series divergence where number of zeros of even sums consequences is uniformly bounded by the same number.

УДК—

М. Х. НАСИБОВ

О СУММИРОВАНИИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ МЕТОДОМ ЛЕБЕГА

Изучением вопроса о суммировании двойных числовых рядов методом Лебега занимался Н. Р. Тевзадзе [1, 2]. В настоящей статье устанавливаются некоторые условия суммируемости двойных числовых рядов методом Лебега.

Пусть дан двойной числовой ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}. \quad (1)$$

Определение. Ряд (1) называется суммируемым методом Лебега, или L-суммируемым к числу s, если функциональный ряд

$$f(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \cdot \frac{\sin mu}{mu} \cdot \frac{\sin nv}{nv} \quad (2)$$

сходится в окрестности точки (0, 0) и

$$\lim_{u,v \rightarrow 0} f(u, v) = s.$$

Теорема 1. Если ряд (1) сходится к числу s и, кроме того, выполняются условия:

$$n^2 \cdot \sum_{k=1}^m \kappa |a_{k,n}| = o(m) \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ для каждого } n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$m^2 \cdot \sum_{v=1}^n \nu |a_{m,v}| = o(n) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для каждого } m = 1, 2, \dots \quad (4), \text{ то ряд} \\ (1) \text{ L-суммируем к числу } s.$$

Доказательство. Пусть $m = \left[\frac{1}{u} \right]$ и $n = \left[\frac{1}{v} \right]$. Тогда достаточно показать, что

$$\lim_{u,v \rightarrow 0} [f(u, v) - s_{m,n}] = 0,$$

где $s_{m,n}$ — частичная сумма ряда (1).

В силу условий (3) и (4) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что

$$\frac{n^2}{m} \cdot \sum_{k=1}^m \kappa |a_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \frac{m^2}{n} \cdot \sum_{v=1}^n \nu |a_{m,v}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и тем более

$$\frac{n^2}{m} \cdot \kappa |a_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{m^2}{n} \cdot \nu |a_{m,v}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $m, n > N$, $\kappa, \nu = 1, 2, \dots$.
В частности,

$$n^2 \cdot |a_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m^2 \cdot |a_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } m, n > N$$

и, значит,

$$(m^2 + n^2) a_{m,n} < \varepsilon,$$

т. е.

$$a_{m,n} = o\left(\frac{1}{m^2 + n^2}\right).$$

Отсюда следует, что ряд (2) абсолютно сходится для любых u и v. Так как сумма ряда (2) представляет четную функцию f(u, v) от u и v, то достаточно рассмотреть только положительные значения u и v. Итак, имеем

$$f(u, v) - s_{m,n} = \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^n a_{k,v} \left(\frac{\sin ku}{ku} \cdot \frac{\sin \nu v}{\nu v} - 1 \right) + \\ + \left(\sum_{k=1}^m \sum_{v=n+1}^{\infty} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{v=1}^n \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{v=n+1}^{\infty} \right) a_{k,v} \cdot \frac{\sin ku}{ku} \cdot \frac{\sin \nu v}{\nu v} - \sum_{i=1}^4 I_i.$$

Далее, так как $\frac{\sin t}{t} - 1 = o(t)$ при $|t| \leq 1$, то легко видеть, что

$$\left| \frac{\sin ku}{ku} \cdot \frac{\sin \nu v}{\nu v} - 1 \right| \leq \kappa u + \nu v.$$

В силу условий (3) и (4) имеем

$$|I_1| \leq \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^n |a_{k,v}| \cdot (\kappa u + \nu v) \leq \\ \leq \sum_{v=1}^n \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \kappa |a_{k,v}| + \sum_{k=1}^m \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \nu |a_{k,v}| < \\ < \sum_{v=1}^n \varepsilon \frac{1}{v^2} + \sum_{k=1}^m \varepsilon \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3} \cdot \varepsilon.$$

Далее, полагая $\sum_{k=1}^m \kappa |a_{k,n}| = P_{m,n}$, оцениваем I_2 .

$$|I_2| \leq \sum_{k=1}^m \sum_{v=n+1}^{\infty} |a_{k,v}| \cdot \frac{1}{\nu v} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{v} \sum_{v=n+1}^{\infty} \nu |a_{k,v}| \cdot \frac{1}{v^2} \leq \\ \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{v} \sum_{v=n+1}^{\infty} P_{k,v} \cdot \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(v+1)^2} \right) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \cdot 0(1) = o(1).$$

Аналогично получим

$$|I_3| \leq o(1)$$

и, наконец,

$$|I_4| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{v=n+1}^{\infty} |a_{k,v}| \cdot \frac{1}{\nu v} \leq \\ \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{v} \sum_{v=n+1}^{\infty} P_{k,v} \cdot \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(v+1)^2} \right) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot 0(1) = o(1).$$

Следовательно,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} [f(u, v) - s_{m, n}] = \lim_{u, v \rightarrow 0} [f(u, v) - s_{m, n}] = 0.$$

Теорема доказана.

Лемма. Пусть частичные суммы ряда (1) удовлетворяют условиям $s_{m, n} = O(m^\alpha)$ при $m \rightarrow \infty$ для любого фиксированного n , (5)

$s_{m, n} = O(n^\beta)$ при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного m , (6)

$s_{m, n} = O(m^{-\alpha} n^{-\beta})$ при $m, n \rightarrow \infty$, $0 < \alpha, \beta < 1$. (7)

Тогда из сходимости ряда (2) следует равенство

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} a_{m, n} \cdot \frac{\sin mu}{mn} \cdot \frac{\sin nv}{nv} = \sum_{m, n=1}^{\infty} s_{m, n} \cdot \omega_m(u) \omega_n(v), \quad (8)$$

где

$$\omega_m(u) = \frac{\sin mu}{mu} - \frac{\sin(m+1)u}{(m+1)u}.$$

Доказательство. В силу условия (5) — (7) можно определить такое целое число p и такое постоянное число $c > 0$, что

$$|s_{m, n}| < cm^\alpha \text{ при } m > p, n = 1, 2, \dots, p, \quad (9)$$

$$|s_{m, n}| < cn^\beta \text{ при } n > p, m = 1, 2, \dots, p, \quad (10)$$

$$|s_{m, n}| < \frac{c}{m^\alpha n^\beta} \text{ при } m > p, n > p. \quad (11)$$

Далее легко видеть, что

$$|\omega_m(u)| = \left| \frac{\sin(m+1)u}{m(m+1)u} - \frac{2}{mu} \sin \frac{u}{2} \cos \frac{(2m+1)u}{2} \right| < \frac{2}{m}. \quad (12)$$

Пусть ряд (2) сходится. Возьмем произвольные числа $M > p$ и $N > p$. Применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{m, n} \cdot \frac{\sin mu}{mu} \cdot \frac{\sin nv}{nv} &= \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} s_{m, n} \cdot \omega_m(u) \omega_n(v) + \\ &+ \frac{\sin Mu}{Mu} \sum_{n=1}^{N-1} s_{M, n} \cdot \omega_n(v) + \frac{\sin Nv}{Nv} \sum_{m=1}^{M-1} s_{m, N} \cdot \omega_m(u) + \\ &+ s_{M, N} \cdot \frac{\sin Mu}{Mu} \cdot \frac{\sin Nv}{Nv} = \sum_{i=1}^4 I_i. \end{aligned}$$

На основании (9), (10), (12) имеем

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{Mu} \left[\left(\sum_{n=1}^p + \sum_{n=p+1}^{N-1} \right) |s_{M, n}| \cdot |\omega_n(v)| \right] < \\ &< \frac{1}{Mu} \sum_{n=1}^p cm^\alpha \cdot \frac{2}{n} + \frac{1}{Mu} \sum_{n=p+1}^{N-1} \frac{c}{M^\alpha n^\beta} \cdot \frac{2}{n} \rightarrow 0 \text{ при } M, N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Значит,

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} I_2 = 0.$$

Аналогично покажем, что

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} I_3 = 0,$$

откуда ясно, что

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} I_4 = 0.$$

Следовательно, так как существует предел

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{m, n} \cdot \frac{\sin mu}{mu} \cdot \frac{\sin nv}{nv},$$

получаем равенство (8).

Теорема 2. Если частичные суммы ряда (1) удовлетворяют условиям:

$s_{m, n} = O(m^{-\alpha})$ при $m \rightarrow \infty$ для любого фиксированного n , (13)

$s_{m, n} = O(n^{-\beta})$ при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного m , (14)

$s_{m, n} = O(m^{-\alpha} n^{-\beta})$ при $m, n \rightarrow \infty$, (15)

то ряд (1) L -суммируем к числу 0.

Доказательство. Возьмем сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$. Из условий (13) — (15) следует, что можно определить такое целое число $p(\varepsilon)$ и постоянное число $c^* > 0$, что

$$|s_{m, n}| < \frac{c^*}{m^\alpha} \text{ при } m > p \text{ для любого фиксированного } n, \quad (16)$$

$$|s_{m, n}| < \frac{c^*}{n^\beta} \text{ при } n > p \text{ для любого фиксированного } m, \quad (17)$$

$$|s_{m, n}| < \frac{\varepsilon}{m^\alpha n^\beta} \text{ при } m, n > p. \quad (18)$$

Пусть $N \geq p$ — фиксированное целое число. Заметим, что ряд (5) абсолютно сходится для любых u и v . Кроме того, так как все условия леммы удовлетворены, будем иметь

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N + \sum_{m=1}^N \sum_{n=N+1}^{\infty} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=1}^N + \right. \\ &\left. + \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \right) s_{m, n} \cdot \omega_m(u) \cdot \omega_n(v) = \sum_{i=1}^4 F_i(u, v). \end{aligned}$$

Но если

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega_k(t) = 0, \text{ то}$$

$$\lim_{u, v \rightarrow 0} F_1(u, v) = 0.$$

Легко видеть, что для любого фиксированного m сумма ряда

$\sum_{n=N+1}^{\infty} |s_{m, n}| \cdot |\omega_n(v)|$ равномерно ограничена относительно v . Поэтому

имеем

$$\begin{aligned} |F_2(u, v)| &\leq \sum_{m=1}^N |\omega_m(u)| \cdot \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} s_{m, n} \cdot \omega_n(v) \right| < \\ &< \sum_{m=1}^N |\omega_m(u)| \cdot c_m, \quad 0 < u < \eta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{u, v \rightarrow 0} F_2(u, v) = 0.$$

Аналогично получим

$$\lim_{u, v \rightarrow 0} F_4(u, v) = 0.$$

Далее, в силу (18) и (12) имеем

$$|F_4(u, v)| < 4\varepsilon \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\alpha} n^{1+\beta}}$$

Таким образом, мы получим

$$\lim_{u, v \rightarrow 0} f(u, v) = 0.$$

Теорема 3. Если для ряда (1) выполнены условия:

$s_{m,n} = O(m^{-\alpha})$ при $m \rightarrow \infty$ для любого фиксированного n ,

$s_{m,n} = O(n^{-\beta})$ при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного m ,

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{|a_{k,v}|}{kv} = O\left(\frac{1}{m^{1+\alpha} n^{1+\beta}}\right) \text{ при } m, n \rightarrow \infty,$$

то ряд (1) L -суммируем к числу 0.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{|a_{k,v}|}{kv} = r_{m,n}.$$

Так как

$$|a_{m,n}| - mn(r_{m,n} - r_{m+1,n} - r_{m,n+1} + r_{m+1,n+1}),$$

то имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^n |a_{k,v}| &= \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^n kv(r_{k,v} - r_{k+1,v} - \\ &- r_{k,v+1} + r_{k+1,v+1}) = \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^n r_{k,v} - n \sum_{k=1}^m r_{k,v+1} - \\ &- m \sum_{v=1}^n r_{m+1,v} + mn r_{m+1,n+1} = O(m^{-\alpha} n^{-\beta}). \end{aligned}$$

Значит,

$$s_{m,n} = O(m^{-\alpha} n^{-\beta}).$$

Отсюда видно, что все условия теоремы 2 выполнены, поэтому ряд (1) L -суммируем к числу 0.

Эта теорема является обобщением теоремы Суноути [3] для случая двойных рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тевзадзе Н. Р. „Сообщ. АН Груз. ССР“, 14, 1953.
2. Тевзадзе П. Р. Тр. Тбилис. ун-та, 52, 1954.
3. Sunouchi J. G. Tohoku math. j., v, 5, 1953.
4. Насибов М. Х. „Уч. зап. АГУ им. С. М. Кирова, сер. физ.-матем.“. 1966,

№ 6.

АзПИ

Поступила 30. XII 1970

М. Kh. Nasibov

On the summability of double series of Lebeg's method

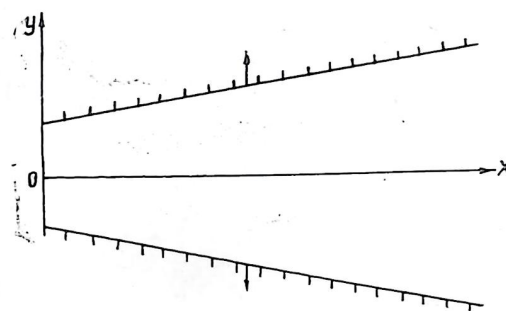
SUMMARY

This paper deals with a sufficient condition of a summability of the double numeral series of Lebeg's method.

К. С. АХВЕРДИЕВ, А. К. НИКИТИН

ОБ ОДНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОГО ГАЗА

Рассматривается неустановившееся движение вязкого газа в плоском диффузоре, стенки которого движутся поступательно перпендикулярно к его оси. Исходными являются уравнения тонкого слоя для вязкого газа [1]. Получено точное автомодельное решение задачи в общем случае движения стенок диффузора и приводится решение для частного случая гармонического колебания их.



§ 1. Рассмотрим плоскую задачу о неустановившемся изотермическом движении вязкого газа в плоском диффузоре (рисунок). Будем исходить из уравнений движения для тонкого слоя —

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \\ - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0, \quad p = \rho RT, \quad (1)$$

где оси x и y указаны на рисунке, v_x и v_y — соответственно проекции скорости на оси x и y , ρ — плотность газа, p — давление, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура.

Уравнения стенок диффузора в рассматриваемом случае запишем следующим образом:

$$y = \pm [\varphi(x) + \Phi(t)], \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ и $\Phi(t)$ — пока произвольные дифференцируемые функции своих аргументов.

По аналогии с функцией тока введем функцию ψ следующими соотношениями:

$$\rho v_x = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3)$$

Тогда уравнение неразрывности удовлетворится тождественно, а первое уравнение этой системы примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} +$$

$$+ y \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \rho \frac{d\rho}{dx} - \mu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (4)$$

Будем предполагать, что газ прилипает к стенкам, и отыскивать решение уравнения (4) в таком виде:

$$\psi(x, y) = \Psi(\xi), \quad \xi = \frac{y}{\varphi(x) + \Phi(t)}, \quad p = \frac{c}{\varphi(x) + \Phi(t)}, \quad (5)$$

где c — некоторая постоянная.

Далее находим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{c}{RT} \frac{\Phi'(t)}{[\varphi(x) + \Phi(t)]^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{\varphi(x) + \Phi(t)} \frac{d\Psi}{d\xi},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{[\varphi(x) + \Phi(t)]^2} \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{1}{[\varphi(x) + \Phi(t)]^3} \frac{d^3 \Psi}{d\xi^3}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\xi \varphi'(x)}{[\varphi(x) + \Phi(t)]} \frac{d\Psi}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = - \frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x) + \Phi(t)]^2} \left(\frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} \xi + \frac{d\Psi}{d\xi} \right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\xi \Phi'(t)}{[\varphi(x) + \Phi(t)]} \frac{d\Psi}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} = - \frac{\Phi'(t)}{[\varphi(x) + \Phi(t)]^2} \left(\frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} \xi + \frac{d\Psi}{d\xi} \right).$$

Подставляя значения (6) в уравнение (4), приходим к уравнению

$$\frac{d^3 \Psi}{d\xi^3} = \frac{c^2 \varphi'(x)}{\mu RT} \quad (7)$$

Как видим, инерционные члены в уравнении (4) полностью выпадают. Левая часть уравнения (7) зависит только от ξ , а правая — от x . Поэтому левая и правая части указанного уравнения должны быть постоянными. Отсюда для определения $\varphi(x)$ получаем уравнение

$$\varphi'(x) = c_1 = \text{const}, \quad (8)$$

а для функции Ψ —

$$\frac{d^3 \Psi}{d\xi^3} = \frac{c^2 c_1}{\mu RT}. \quad (9)$$

При интегрировании уравнения (9) учтем условия прилипания на стенке

$$\text{при } \xi = \pm 1: \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{[\varphi(x) + \Phi(t)]} \frac{d\Psi}{d\xi} = - \rho v_x = 0$$

и условия симметрии относительно оси:

$$\Psi(\xi) = - \Psi(-\xi).$$

С учетом этих условий находим

$$\Psi = \frac{c^2 c_1}{2\mu RT} \left(\frac{\xi^3}{3} - \xi \right), \quad v_x = - \frac{c_1 c}{2\mu} (\xi^2 - 1),$$

$$v_y = - \frac{c_1^2 c}{2\mu} (\xi^2 - 1) \xi + \xi \Phi'(t), \quad (10)$$

Для φ и p получаем выражения

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2, \quad p = \frac{c}{c_1 x + c_2 + \Phi(t)}. \quad (11)$$

Здесь c_1 — безразмерная постоянная, c_2 и $\Phi(t)$ имеют размерность длины, c имеют размерность ML^{-2} .

На стенках при $\xi = \pm 1$ получим

$$v_x = 0, \quad v_y = \pm \Phi'(t).$$

Рассмотрим частный случай, когда стенки диффузора совершают гармонические колебания по закону:

$$y = \pm (c_1 x + c_2 + A \sin \omega t). \quad (12)$$

$$\text{Тогда } \Phi(t) = A \sin \omega t, \quad \xi = \frac{y}{c_1 x + c_2 + A \sin \omega t}, \quad (12)$$

$$v_x = - \frac{c_1 c}{2\mu} (\xi^2 - 1), \quad v_y = \frac{c c_1^2}{2\mu} (\xi^2 - 1) \xi + A \omega \xi \cos \omega t. \quad (13)$$

Таким образом получено точное автомодельное изотермическое решение для неустановившегося движения в диффузоре с подвижными стенками вблизи установившегося движения [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., ГИТТЛ, 1957.
2. Снопов А. И. Изв. вузов. Нефть и газ.

РИИЖТ

Поступила 1. VII 1971

К. С. Хагвердиев, А. К. Никитин

Өзлү газын гејри-стационар автомодел һәрәкәти һаггында

ХҮЛАСЭ

Тәдгигатда өзлү газын кенишләнән боруда һәрарлашмамыш һәрәкәти мәсәләсинә бахылмышдыр. Мәсәләннн һәллиндә диффузорун сәрһәддиннн өз охуна перпендикулјар олараг һәрәкәт едилмәси нәзәрдә тутулмушдур.

Буҗада бахылан сәрһәд мәсәләси мҗәјҗән әвәзләмәләрдән сонра ади дифференциал тәнлијә кәтирилир вә хусуси һәлли дегиг сурәтдә тәјјин олунур.

К. S. hakhverdiyev, A. K. Nikeetin

About one unstationary automodel motion of viscous gas

SUMMARY

The authors consider the unstationary motion of viscous gas in a flat diffuser the walls of which moves progressively perpendicular to the axis of the diffuser.

It is found the solution of the problem for common case and for particular case of harmonious oscillation of the walls.

УДК 517.926.4.

С. С. АХИЕВ, К. Т. АХМЕДОВ

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей статье введено новое сопряженное уравнение, для линейных гиперболических уравнений второго порядка, позволившее получить интегральное представление решений неоднородного уравнения в более общем случае. Этот метод применим также для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка.

Следует отметить, что данный метод в некотором смысле можно рассмотреть как обобщение метода из [3], предложенного для дифференциальных уравнений нейтрального типа.

Задана система дифференциальных уравнений $\dot{z}_t = a(t, x)z + b(t, x)z_t + c(t, x)z_x + f(t, x)$, $(t, x) \in D_{TX} = J_T \times I_X$; (1) условия Гурса:

$z|_{t=t_0} = \varphi(x)$, $x \in I_X = [x_0, X]$, $z|_{x=x_0} = \psi(t)$, $t \in J_T = [t_0, T]$ (2) и условие Коши:

$$z|_{x=l(t)} = \Phi_0(t), \quad z_x|_{x=l(t)} = \Phi_1(t), \quad t \in J_T. \quad (3)$$

Здесь: $z = z(t, x)$ — n -мерная неизвестная вектор-функция; $a(t, x)$, $b(t, x)$ и $c(t, x)$ — заданные непрерывные матрицы размерностью $n \times n$; $f(t, x)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$, $\Phi_0(t)$ и $\Phi_1(t)$ — заданные непрерывные n -мерные вектор-функции, причем существуют непрерывные производные $\varphi'(x)$, $\psi'(t)$ и $\Phi_0'(t)$, и $\varphi(x_0) = \psi(t_0)$; $x = l(t)$ — непрерывно дифференцируемая заданная функция такая, что $l'(t) < 0$, $l(t_0) = X$ и $l(T) = x_0$.

Основная цель, преследуемая в нашей статье, — это нахождение интегрального представления решений задач (1), (2) и (1), (3).

Основные результаты

Введем в рассмотрение матричное уравнение

$$L(p, q) \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} [p_\tau + (p + q)b(\tau, \xi)] + \frac{\partial}{\partial \xi} [q_\tau + (p + q)c(\tau, \xi)] - (p + q)a(\tau, \xi) = 0, \quad (\tau, \xi) \in D_{TX} \quad (4)$$

со следующими условиями:

$$\begin{aligned} p_\tau + q_\tau + (p + q)c(\tau, \xi) &= 0, \quad \xi = x, \quad \tau \in J, \\ p_\xi + q_\xi + (p + q)b(\tau, \xi) &= 0, \quad \tau = t, \quad \xi \in I_x, \\ p + q &= E, \quad \tau = t, \quad \xi = x, \end{aligned} \quad (5)$$

где $p = p(\tau, \xi; t, x)$ и $q = q(\tau, \xi; t, x)$, $(\tau, \xi, t, x) \in \Omega = (t_0 \leq \tau \leq t \leq T, x_0 \leq \xi \leq x \leq X)$, — неизвестные матрицы размерностью $n \times n$, а E — единичная матрица размерностью $n \times n$.

Рассмотрим также следующее матричное уравнение:

$$\begin{aligned} L^*(v) &\equiv v_\tau - a(\tau, \xi)v - b(\tau, \xi)v_\tau - c(\tau, \xi)v_\xi = 0, \\ (\tau, \xi) &\in D_{\alpha\beta}^* = J_\alpha^* \times I_\beta^*, \quad J_\alpha^* = [\alpha, T], \quad I_\beta^* = [\beta, X] \end{aligned} \quad (6)$$

с условиями:

$$\begin{aligned} v_\tau - c(\tau, \xi)v &= 0, \quad \xi = \beta, \quad \tau \in J_\alpha^*, \\ v_\xi - b(\tau, \xi)v &= 0, \quad \tau = \alpha, \quad \xi \in I_\beta^*, \\ v &= E, \quad \tau = \alpha, \quad \xi = \beta, \end{aligned} \quad (7)$$

где $v = v(\tau, \xi; \alpha, \beta)$, $(\tau, \xi, \alpha, \beta) \in \Omega^* = (t_0 \leq \alpha \leq \tau \leq T, x_0 \leq \beta \leq \xi \leq X)$, — неизвестная матрица размерностью $n \times n$.

Задачи (4), (5) и (6), (7) будем называть взаимно сопряженными.

Теорема 1. При каждом заданном $(t, x) \in D_{TX}$ задача (4), (5) имеет бесконечное число непрерывных на D_{TX} решений $(p(\tau, \xi; t, x), q(\tau, \xi; t, x))$, но для всех решений его матрица $u(\tau, \xi; t, x) = p(\tau, \xi; t, x) + q(\tau, \xi; t, x)$ одинакова и является единственным непрерывным на D_{TX} решением матричного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} u(\tau, \xi; t, x) &= E - \int_t^\tau u(\tau_1, \xi; t, x) c(\tau_1, \xi) d\tau_1 - \int_x^\xi u(\tau, \xi_1; t, x) b(\tau, \xi_1) d\xi_1 + \\ &+ \int_t^\tau \int_x^\xi u(\tau_1, \xi_1; t, x) a(\tau_1, \xi_1) d\tau_1 d\xi_1, \quad (\tau, \xi) \in D_{TX}. \end{aligned} \quad (8)$$

В дальнейшем матрицу $u(\tau, \xi; t, x)$, определенную в теореме 1 и являющуюся единственным непрерывным на D_{TX} решением уравнения (8), будем называть единственным формальным решением задачи (4), (5). Для этой матрицы можно гарантировать лишь только непрерывность на D_{TX} . Далее, если рассмотрим скалярный пример $\dot{z}_t = l(t)z_t$, где $l(t)$ — любая непрерывная, но не дифференцируемая на J_T функция, для которой $u(\tau, \xi; t, x) = \exp[-l(\tau)(\xi - x)]$, то можем утверждать, что в общем случае формальное решение задачи (4), (5) в D_{TX} может и не иметь частных производных по τ и ξ . А это свидетельствует о достаточной причудливости области определения дифференциального выражения $L(p, q)$, которую можно рассматривать как сопряженное выражение дифференциального выражения $L^*(v)$ на $D_{TX} \cap D_{\alpha\beta}^*$, $\alpha < t$, $\beta < x$.

Следующая теорема связывает решения задач (4), (5) и (6), (7).

Теорема 2. Пусть $u(\tau, \xi; t, x)$ — формальное решение задачи (4), (5), а $v(\tau, \xi; \alpha, \beta)$ — единственное непрерывное на $D_{\alpha\beta}^*$ решение задачи (6), (7). Тогда имеет место

$$u(\alpha, \beta; t, x) = v(t, x; \alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta, t, x) \in \Omega.$$

Приведенные выше теоремы позволяют получить интегральные представления решений задач (1), (2) и (1), (3).

Теорема 3. Пусть $u(\tau, \xi; t, x)$ — формальное решение задачи (4), (5). Тогда единственные, непрерывные на D_{TX} решения задач (1), (2) и (1), (3) соответственно имеют виды:

$$\begin{aligned} z(t, x) &= u(t_0, x_0; t, x) \varphi(x_0) + \int_{t_0}^t u(\tau, x_0; t, x_0) [\psi'(\tau) - c(\tau, x_0) \psi(\tau)] d\tau + \\ &+ \int_{x_0}^x u(t_0, \xi; t, x) [\varphi'(\xi) - b(t_0, \xi) \varphi(\xi)] d\xi + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x u(\tau, \xi; t, x) f(\tau, \xi) d\tau d\xi \\ \text{и} \\ z(t, x) &= \Phi_0(t) + (x - l(t)) \Phi_1(t) + \int_{l(x)}^t d\tau \int_{l(\tau)}^x u(\tau, \xi; t, x) f(\tau, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения второго порядка, явно не содержащие вторую производную неизвестных

Ясно, что уравнение (4) не является уравнением такого классического типа, как уравнение (6). Дело в том, что в уравнение (4) производные от выражений, стоящих в квадратных скобках, нельзя записать в виде суммы производных слагаемых. Отдельные слагаемые этих выражений для всех решений задачи (4), (5) в общем случае, не могут и не имеют производных по соответствующим аргументам, несмотря на то, что сами эти выражения имеют непрерывную на D_{TX} производную по соответствующим аргументам. Далее, из рассуждения, проведенного в предыдущем параграфе, вытекает, что формальное решение задачи (4), (5) нельзя определять как решение некоторого уравнения, порожденного дифференциальным выражением такого типа, как $L^*(\tau)$. Поэтому, учитывая это, уравнение (4) целесообразно называть дифференциальным уравнением второго порядка, явно не содержащим вторую производную неизвестных.

Приведем один частный случай, когда уравнение (4) переходит в дифференциальное уравнение второго порядка, явно содержащее вторую производную неизвестного.

Теорема 4. Пусть $p = p(\tau, \xi; t, x)$, $q = q(\tau, \xi; t, x)$, — какое-нибудь непрерывное на D_{TX} решение задачи (4), (5). Тогда существуют непрерывные на D_{TX} производные $p_\tau, p_\xi, p_{\tau\xi}$ ($p_{\tau\xi} = p_{\xi\tau}$), если матрица $b(\tau, \xi)$ имеет непрерывную на D_{TX} производную $b_\tau(\tau, \xi)$, и $q_\xi, q_{\tau\xi}, q_{\xi\xi}$ ($q_{\tau\xi} = q_{\xi\tau}$), если матрица $c(\tau, \xi)$ имеет непрерывную на D_{TX} производную $c_\xi(\tau, \xi)$.

Следствие. Если существуют непрерывные на D_{TX} производные $b_\tau(\tau, \xi)$ и $c_\xi(\tau, \xi)$, то формальное решение задачи (4), (5) является единственным непрерывным на D_{TX} решением матричного уравнения

$$L(u) \equiv u_{\tau\xi} + \frac{\partial}{\partial \tau} [u \cdot b(\tau, \xi)] + \frac{\partial}{\partial \xi} [u \cdot c(\tau, \xi)] - u \cdot a(\tau, \xi) = 0, \quad (\tau, \xi) \in D_{TX}. \quad (9)$$

удовлетворяющим условиям:

$$\begin{aligned} u_\tau + u \cdot c(\tau, \xi) &= 0, \quad \xi = x, \quad \tau \in J_t, \\ u_\xi + u \cdot b(\tau, \xi) &= 0, \quad \tau = t, \quad \xi \in I_x, \\ u &= E, \quad \tau = t, \quad \xi = x^1. \end{aligned} \quad (10)$$

Обобщенная формула Грина

Теперь приведем обобщенную формулу Грина для прямоугольных областей, которая играет ведущую роль при получении основных результатов данной статьи.

¹ Задача (9), (10) совпадает с ранее известной для (1) сопряженной задачей [1].

Лемма. Пусть

1) матрицы $a(\tau, \xi)$, $b(\tau, \xi)$ и $c(\tau, \xi)$ непрерывны на D_{TX} , а для непрерывных на D_{TX} матриц $\tau(\tau, \xi)$, $p(\tau, \xi)$ и $q(\tau, \xi)$ существуют непрерывные на D_{TX} производные $\tau_\tau(\tau, \xi)$, $p_\tau(\tau, \xi)$ и $q_\tau(\tau, \xi)$;

2) матрицы $p(\tau, \xi)$ и $q(\tau, \xi)$ такие, что существуют непрерывные на D_{TX} производные $\partial[p_\tau + (p+q)b(\tau, \xi)]/\partial \xi$ и непрерывные, соответственно на J_T и на I_X производные $p_\tau(\tau, X)$ и $q_\xi(T, \xi)$.

Тогда имеет место

$$\begin{aligned} \int_{D_{TX}} [uL^*(\tau) - L(p, q)\tau] d\tau d\xi &= u(T, X)\tau(T, X) - u(t_0, x_0)\tau(t_0, x) - \\ &- \int_{J_T} \{ [u_\tau + uc]\tau \}_{\xi=x} + [u(\tau - c\tau)]_{\xi=x_0} d\tau - \int_{I_X} \{ [u_\xi - ub]\tau \}_{\tau=T} + \\ &+ [u(\tau - b\tau)]_{\tau=t_0} d\xi, \quad u = p + q. \end{aligned}$$

Во втором условии этой леммы не содержится никакого ограничения на матрицы $b(\tau, \xi)$ и $c(\tau, \xi)$, хотя они входят в его формулировку. Это условие является ограничением только на пару матриц $(p(\tau, \xi), q(\tau, \xi))$ и гарантирует попадание этой пары на область определения дифференциального выражения $L(p, q)$, которая при каждой тройке непрерывных на D_{TX} матриц $(a(\tau, \xi), b(\tau, \xi), c(\tau, \xi))$ образует бесконечное множество.

Эта лемма является более общей, чем ранее известная. Потому что при условии ее для матрицы $u(\tau, \xi)$ на открытом ядре прямоугольника D_{TX} можно гарантировать лишь только непрерывность.

Система линейных дифференциальных уравнений высокого порядка

Пусть задана система n -линейных дифференциальных уравнений

$$l_k^*(y) \equiv y^{(k)} + a_1(\tau)y^{(k-1)} + \dots + a_k(\tau)y = f(\tau), \quad \tau \in J_T. \quad (11)$$

Рассмотрим матричное уравнение

$$l_k(z) \equiv z a_k(\tau) - l'_{k-1}(z) = 0, \quad \tau \in J_t, \quad (12)^2$$

$$l_i(z) = z a_i(\tau) - l'_{i-1}(z), \quad i = \overline{1, k-1}, \quad l_0(z) = z.$$

Дифференциальное выражение $l_k(z)$ назовем сопряженным к матричному дифференциальному выражению $l_k^*(\tau)$ на $J_t \cap J_\tau$, $\alpha < t$. Область определения дифференциального выражения $l_k(z)$ в общем случае, когда матрицы $a_i(\tau)$, $i = \overline{1, k}$ непрерывны, образует бесконечное множество в $C_1(J_t)$, в пространстве $n \times n$ -мерных непрерывно дифференцируемых матриц. А сопряженное уравнение (12) имеет единственное в $C_1(J_t)$ решение $z(\tau; t)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$l_i(z)|_{\tau=t} = 0, \quad i = \overline{0, k-2}, \quad l_{k-1}(z)|_{\tau=t} = E, \quad (13)$$

и являющееся также единственным непрерывным на J_t решением уравнения

$$z(\tau; t) = \varphi(\tau, t) + \int_t^\tau z(\xi; t) K(\tau, \xi) d\xi,$$

$$\varphi(\tau, t) = (-1)^{k-1} \frac{(\tau-t)^{k-1}}{(k-1)!} E, \quad K(\tau, \xi) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \frac{(\tau-\xi)^{i-1}}{(i-1)!} a_i(\xi).$$

² Уравнение (12) содержит явно только первую производную неизвестного.

Пусть матрица $a_i(\tau)$, $i = \overline{1, k}$ непрерывна на J_T , матрица $\tau(\tau; \alpha)$ имеет непрерывные на J_α^* производные до k -го порядка включительно, а матрица $z(\tau, t)$ такая, что существуют непрерывные на J_t производные $l_0(z)$, ..., $l_{k-1}(z)$, иначе говоря, $z(\tau; t)$ принадлежит области определения дифференциального выражения $l_k(z)$ на J_t . Тогда имеет место

$$\int_{\alpha}^t [z l_k^*(v) - l_k(z)v] d\tau = \sum_{i=0}^{k-1} [l_i(z)v^{[k-(i+1)]}]_{\tau=\alpha}^{\tau=t}, \quad \alpha < t. \quad (14)$$

Эта формула является обобщением формулы Лагранжа, которая раньше, как нам известно, рассчитывалась только для случая, когда матрица $a_i(\tau)$ имеет непрерывную производную до $(k-i)$ -го порядка включительно [2].

Теперь из формулы (14) следует, что если $z(\tau; t)$ и $\tau(\tau, \alpha)$ являются единственными решениями задач (12), (13) и

$$l_k^*(\tau) = 0, \quad \tau \in J_\alpha^*, \quad \tau^{(i)}|_{\tau=\alpha} = 0, \quad i = \overline{0, k-2}, \quad v^{(k-1)}|_{\tau=\alpha} = E,$$

то имеет место $z(\alpha; t) = \tau(t; \alpha)$. А это позволяет найти решение уравнения (11), удовлетворяющее нулевому начальному условию в виде:

$$y(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} z(\xi; \tau) f(\xi) d\xi = \int_{t_0}^{\tau} v(\tau; \xi) f(\xi) d\xi.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., 1954.
2. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М., 1971.
3. Ахиев С. С., Ахмедов К. Т. „Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук“, № 3, 1972.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступила 9. XII 1971

С. С. Нахыјев, Г. Т. Әһмәдов

Бә'зи дифференциал тәнликләрин һәллинин интеграл шәкли

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда бә'зи дифференциал тәнликләрин һәллинин интеграл шәклини даһа үмуми һалда тапмаға имкан верән јени бир үсул тәғдим едилмишдир.

S. S. Akhiev, K. T. Akhmedov

About integral representation of solution some differential equations

SUMMARY

In this paper introduced more general idea (notion) of adjoint matrix equations for the system hyperbolic equations of the second order and for the system differential equation of the high order.

Г. Г. АЛИЕВ

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В практике часто встречаются тепловые процессы с внутренним источником тепла рассматриваемого тела, образующимся в результате различных явлений, — при пропускании электрического тока через тело, радиоактивном распаде в нем, за счет излучения, при химической реакции и т. д.

При этом количество тепла, образованное за счет источника внутри тела, может быть нелинейно зависящим от температуры рассматриваемого тела. В качестве примера можно привести формулу Аррениуса, выражающую нелинейную зависимость между количеством тепла, образованном внутри тела, и температурой при химической реакции. Эта формула имеет вид:

$$F_0 = A_0 e^{-\frac{K}{u}},$$

где A_0 и K — положительные постоянные числа, u — температура. Кроме того, существуют тепловые процессы, в которых искомая функция известна по измерениям на некоторых участках рассматриваемого тела, а коэффициент теплообмена неизвестен. Отмечаются также случаи, когда тепловой поток измеряют экспериментальным путем, но для расчета требуется знание коэффициента теплообмена. Для определения последнего при нестационарном процессе теплообмена стержня с нелинейным тепловым источником необходимо иметь математическую схему.

С этой целью рассмотрим следующую задачу.

Пусть имеем нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t, u) \quad (1)$$

в области

$$G = \{0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x < \infty\};$$

граничное условие

$$C \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + \alpha(t) u(0, t) = f[t, \alpha(t)], \quad (2)$$

начальное —

$$u(x, 0) = 0 \quad (3)$$

и дополнительное —

$$u(x_0, t) = \frac{1}{\alpha(t)} \cdot \psi(t) - u_1. \quad (4)$$

$\psi(t)$ здесь положительна и непрерывна на отрезке $[0, T]$, а функция $f(t, \alpha)$ — неотрицательна, непрерывна в области $[0, T] \times [0, \infty)$ и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу; $F(x, t, u)$ — функция теплового источника, которая является неотрицательной, непрерывной, ограниченной функцией и удовлетворяет условию Липшица относительно третьего аргумента; $x_0 > 0, c > 0, u_0 > 0, a \neq 0$ — постоянные числа. Решением задачи (1)–(4) будем называть функции $\alpha(t)$ и $u(x, t)$, где $u(x, t)$ — функция распространения тепла внутри тела, а $\alpha(t)$ — коэффициент теплообмена с окружающей средой, при этом $0 < \alpha(t) \in c[0, T]$; $u(x, t) \geq 0, u'_x(x, t), u'_t(x, t), u''_{xx}(x, t) \in c(G)$, для которых удовлетворяются условия (1)–(4) в обычном смысле. Известно, что решение задачи (1), (3) эквивалентно интегральному уравнению

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \frac{F[\tau, \tau, u(\xi, \tau)]}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau d\xi, \quad (5)$$

где $\psi(t) = u(0, t)$.

Выберем функцию $\varphi(t)$ так, чтобы она удовлетворяла граничному условию (2). Тогда получаем следующую задачу Коши для определения $\varphi(t)$:

$$\varphi'(t) + \frac{a^2}{c} \alpha(t) \varphi(t) = f_1[t, \alpha(t), u(0, t)], \quad \varphi(0) = 0, \quad (6)$$

где $f_1[t, \alpha(t), u(0, t)] = \frac{a^2}{c} f[t, \alpha(t)] + F[0, t, u(0, t)]$ — неотрицательная, непрерывная, ограниченная функция, и удовлетворяющая условию Липшица относительно аргументов α , u в области $G_1 = G \times [0, \infty)$. Решив задачу (6), получим

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1[\tau, \alpha(\tau), u(0, \tau)] e^{-\frac{a^2}{c} \int_\tau^t \alpha(\theta) d\theta} d\tau \quad (7)$$

Подставив это значение $\varphi(t)$ в (5), найдем

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[\int_0^\tau f_1[s, \alpha(s), u(0, s)] e^{-\frac{a^2}{c} \int_s^\tau \alpha(\theta) d\theta} ds \right] d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] F[\xi, \tau, u(\xi, \tau)] d\tau d\xi. \quad (8)$$

Учитывая дополнительное условие (4), будем иметь:

$$\frac{1}{\alpha(t)} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\psi(t)} \int_0^t \frac{x_0}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x_0^2}{4a^2(t-\tau)}} \times \left[\int_0^\tau f[s, \alpha(s), u(0, s)] e^{-\frac{a^2}{c} \int_s^\tau \alpha(\theta) d\theta} ds \right] d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\psi(t)} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \times$$

$$\times \left[e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x_0+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] F[\xi, \tau, u(\xi, \tau)] d\tau d\xi + \frac{u_0}{\psi(t)}. \quad (9)$$

Таким образом, решение нелинейной обратной задачи (1)–(4) сведено к системе нелинейных интегральных уравнений вида:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \times \left[\int_0^\tau f_1[s, z^{-1}(s), u(0, s)] e^{-\frac{a^2}{c} \int_s^\tau z^{-1}(\theta) d\theta} ds \right] d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] F[\xi, \tau, u(\xi, \tau)] d\tau d\xi, \quad (10)$$

где $z(t) = \frac{1}{\alpha(t)}$.

Решим эту систему нелинейных интегральных уравнений методом последовательных приближений. За нулевые приближения возьмем постоянные числа $z_0(t) = \frac{u_0}{q} > 0$ и $u_0(x, t) = u^* > 0$, где $q = \max_{0 \leq t \leq T} \psi(t)$. Тогда для последующих приближений будем иметь рекуррентные формулы вида:

$$u_{n+1}(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \times \left[\int_0^\tau f_1[s, z_n^{-1}(s), u_n(0, s)] e^{-\frac{a^2}{c} \int_s^\tau z_n^{-1}(\theta) d\theta} ds \right] d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] F[\xi, \tau, u_n(\xi, \tau)] d\tau d\xi, \quad (11)$$

$$z_{n+1}(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\psi(t)} \int_0^t \frac{x_0}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x_0^2}{4a^2(t-\tau)}} \times \left[\int_0^\tau f_1[s, z_n^{-1}(s), u_n(0, s)] e^{-\frac{a^2}{c} \int_s^\tau z_n^{-1}(\theta) d\theta} ds \right] d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\psi(t)} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x_0+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] F[\xi, \tau, u_n(\xi, \tau)] d\tau d\xi + \frac{u_0}{\psi(t)}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом получаем последовательности приближений $\{u_n(x, t)\}$ и $\{z_n(t)\}$.

Теперь докажем сходимость этих последовательностей. Так как

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{q} \leq z_{n+1}(t) &\leq \frac{M}{2ab\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x_0}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x_0^2}{4a^2(t-\tau)}} \tau d\tau + \\ &+ \frac{N}{2ab\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \left[e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x_0+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \frac{d\tau d\xi}{(t-\tau)^{1/2}} + \frac{u_0}{b} \leq \frac{MPT^2}{4ab\sqrt{\pi}} + \\ &+ \frac{NQ}{2ab\sqrt{\pi}} + \frac{u_0}{b} = H, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{n+1}(x, t) &\leq \frac{M}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}} \tau d\tau + \\ &+ \frac{N}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \frac{d\tau d\xi}{(t-\tau)^{1/2}} \leq \frac{MPT^2}{4a\sqrt{\pi}} + \frac{NQ}{2a\sqrt{\pi}} = \\ &= \frac{1}{4a\sqrt{\pi}} (MPT^2 + 2NQ) = K, \end{aligned}$$

то имеем $\frac{u_0}{q} \leq z_{n+1}(t) \leq H$ и $0 \leq u_{n+1}(x, t) \leq K$

для всех n и для любой точки $(x, t) \in G$.

Здесь

$$\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \leq P, \quad \int_0^\infty \int_0^t \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \frac{d\tau d\xi}{(t-\tau)^{1/2}} \leq Q,$$

$$F(x, t, u) \leq N, \quad f_1(t, z^{-1}, u) \leq M, \quad b = \min_{0 \leq t \leq T} \psi(t).$$

Оценим следующую разность:

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(t) - z_n(t)| &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\psi(t)} \left| \int_0^t \frac{x_0}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x_0^2}{4a^2(t-\tau)}} \times \right. \\ &\times \left[\int_0^t f_1[s, z_n^{-1}(s), u_n(0, s)] e^{-\frac{a^2}{c} \int_s^t z_n^{-1}(\theta) d\theta} ds \right] d\tau + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x_0+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] F[\xi, \tau, u_n(\xi, \tau)] d\tau d\xi - \\ &- \int_0^t \frac{x_0}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x_0^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[\int_0^t f_1[s, z_{n-1}^{-1}(s), u_{n-1}(0, s)] e^{-\frac{a^2}{c} \int_s^t z_{n-1}^{-1}(\theta) d\theta} ds \right] d\tau - \\ &- \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x_0+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] F[\xi, \tau, u_{n-1}(\xi, \tau)] d\tau d\xi \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{PM}{2ab\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[\int_0^t \left| e^{-\frac{a^2}{c} \int_s^t z_n^{-1}(\theta) d\theta} - e^{-\frac{a^2}{c} \int_s^t z_{n-1}^{-1}(\theta) d\theta} \right| ds \right] d\tau + \\ &+ \frac{P}{2ab\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[\int_0^t |f_1(s, z_n^{-1}, u_n) - f_1(s, z_{n-1}^{-1}, u_n)| ds \right] d\tau + \\ &+ \frac{1}{2ab\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x_0+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] |F(\xi, \tau, u_n) - \\ &- F(\xi, \tau, u_{n-1})| d\tau d\xi \leq \frac{PMa}{2cb\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[\int_0^t \left| \frac{1}{z_{n-1}(\theta)} - \frac{1}{z_n(\theta)} \right| d\theta \right] e^{-\tau} ds d\tau + \\ &+ \frac{PTc}{2ab\sqrt{\pi}} \int_0^t \{ |z_n(\tau) - z_{n-1}(\tau)| + |u_n(0, \tau) - u_{n-1}(0, \tau)| \} d\tau + \\ &+ \frac{C_2}{2ab\sqrt{\pi}} \int_0^t 2a\sqrt{\pi} \cdot \sup_{0 \leq x < \infty} |u_n(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau)| d\tau \leq \\ &\leq \frac{PMT^2 q^2 a}{4cbu_1^2 \sqrt{\pi}} \int_0^t |z_n(\tau) - z_{n-1}(\tau)| d\tau + \frac{PTC_1}{2a\psi \sqrt{\pi}} \int_0^t |z_n(\tau) - z_{n-1}(\tau)| d\tau + \\ &+ \frac{PTC_1}{2ab\sqrt{\pi}} \int_0^t \sup_{0 \leq x < \infty} |u_n(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau)| d\tau + \frac{C_2}{b} \int_0^t \sup_{0 \leq x < \infty} |u_n(x, \tau) - \\ &- u_{n-1}(x, \tau)| d\tau = \left(\frac{PMT^2 q^2 a}{4cbu_1^2 \sqrt{\pi}} + \frac{PTC_1}{2ta\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t |z_n(\tau) - z_{n-1}(\tau)| d\tau + \\ &+ \left(\frac{PTC_1}{2ab\sqrt{\pi}} + \frac{C_2}{b} \right) \int_0^t \sup_{0 \leq x < \infty} |u_n(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau)| d\tau \leq \\ &\leq A \int_0^t \{ |z_n(\tau) - z_{n-1}(\tau)| + \sup_{0 \leq x < \infty} |u_n(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau)| \} d\tau. \end{aligned}$$

В результате получаем, что

$$|z_{n+1}(t) - z_n(t)| \leq A \int_0^t \{ |z_n(\tau) - z_{n-1}(\tau)| + \sup_{0 \leq x < \infty} |u_n(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau)| \} d\tau, \quad (12)$$

$$\text{где } A = \max \left\{ \left(\frac{PMT^2 q^2 a}{4cbu_1^2 \sqrt{\pi}} + \frac{PTC_1}{2ab\sqrt{\pi}} \right); \left(\frac{PTC_1}{2ab\sqrt{\pi}} + \frac{C_2}{b} \right) \right\},$$

$$|f_1[s, z_n^{-1}(s), u_n(0, s)] - f_1[s, z_{n-1}^{-1}(s), u_{n-1}(0, s)]| \leq C_1 \{ |z_n(s) - z_{n-1}(s)| + |u_n(0, s) - u_{n-1}(0, s)| \},$$

$$|F[\xi, \tau, u_n(\xi, \tau)] - F[\xi, \tau, u_{n-1}(\xi, \tau)]| \leq C_2 |u_n(\xi, \tau) - u_{n-1}(\xi, \tau)|,$$

$$\frac{a^2}{c} \int_0^t z_n^{-1}(\theta) d\theta \leq \gamma \leq \frac{a^2}{c} \int_0^t z_{n-1}^{-1}(\theta) d\theta, \quad e^{-\gamma} \leq 1,$$

$$\int_0^\infty \left[e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \frac{d\xi}{(t-\tau)^{1/2}} = 2a\sqrt{\pi} \Phi\left(\frac{x_0}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) \leq 2a\sqrt{\pi},$$

так как $\Phi\left(\frac{x_0}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) \leq 1$,

C_1, C_2 — постоянные числа.
Точно так же

$$\sup_{0 \leq x < \infty} |u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)| \leq Ab \int_0^t \{ |z_n(\tau) - z_{n-1}(\tau)| + \sup_{0 \leq x < \infty} |u_n(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau)| \} d\tau. \quad (13)$$

Складывая неравенства (12) и (13), найдем

$$|z_{n+1}(t) - z_n(t)| + \sup_{0 \leq x < \infty} |u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)| \leq Ab_1 \int_0^t \{ |z_n(\tau) - z_{n-1}(\tau)| + \sup_{0 \leq x < \infty} |u_n(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau)| \} d\tau, \quad (14)$$

где $b_1 = b + 1$.

Из неравенства (14) будем иметь

$$|z_{n+1}(t) - z_n(t)| + \sup_{0 \leq x < \infty} |u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)| \leq (H + K) \frac{A^n b_1^n T^n}{n!} \quad (15)$$

Из неравенства (15) получаем, что

$$|u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)| \leq (H + K) \frac{A^n b_1^n T^n}{n!}, \quad (16)$$

$$|z_{n+1}(t) - z_n(t)| \leq (H + K) \frac{A^n b_1^n T^n}{n!} \quad (17)$$

для всех n и любой точки $(x, t) \in G$.

Из неравенства (16) следует, что последовательность $\{u_n(x, t)\}$ фундаментальна в $C(G)$. В силу полноты $C(G)$ последовательность $\{u_n(x, t)\}$ сходится по метрике $C(G)$, т. е. в области G равномерно сходится к некоторой функции $u(x, t) \in C(G)$. А из неравенства (17) следует фундаментальность $\{z_n(t)\}$ в $C[0, T]$. Следовательно, в силу полноты $C[0, T]$ последовательность $\{z_n(t)\}$ сходится равномерно на отрезке $[0, T]$ к некоторой функции $z(t) \in C[0, T]$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, из (11) получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \times \\ \times \left[\int_0^\tau f_1[s, z^{-1}(s), u(0, s)] e^{-\frac{a^2}{c} \int_s^\tau z^{-1}(\theta) d\theta} ds \right] d\tau + \\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] F[\xi, \tau, u(\xi, \tau)] d\tau d\xi \\ z(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\psi(t)} \int_0^t \frac{x_0}{(x-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x_0^2}{4a^2(t-\tau)}} \times$$

$$\left[\int_0^\tau f_1[s, z^{-1}(s), u(0, s)] e^{-\frac{a^2}{c} \int_s^\tau z^{-1}(\theta) d\theta} ds \right] d\tau + \\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\psi(t)} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x_0+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] F[\xi, \tau, u(\xi, \tau)] d\tau d\xi + \frac{u_0}{\psi(t)}.$$

Значит, функция $u(x, t)$ и $z(t) = \frac{1}{\psi(t)}$ являются решением системы (10), т. е. решением задачи (1)–(4).

Теперь докажем единственность решения этой системы. Предположим, что существуют два решения: $[u(x, t), z(t)]$ и $[v(x, t), y(t)]$. Оценивая следующую разность, найдем

$$\sup_{0 \leq x < \infty} |u(x, t) - v(x, t)| \leq Ab \int_0^t \{ |z(\tau) - y(\tau)| + \sup_{0 \leq x < \infty} |u(x, \tau) - v(x, \tau)| \} d\tau, \quad (18)$$

Так же получается

$$|z(t) - y(t)| \leq A \int_0^t \{ |z(\tau) - y(\tau)| + \sup_{0 \leq x < \infty} |u(x, \tau) - v(x, \tau)| \} d\tau. \quad (19)$$

На основании неравенств (18) и (19) будем иметь

$$\sup_{0 \leq x < \infty} |u(x, t) - v(x, t)| + |z(t) - y(t)| \leq Ab_1 \int_0^t \{ \sup_{0 \leq x < \infty} |u(x, \tau) - v(x, \tau)| + |z(\tau) - y(\tau)| \} d\tau. \quad (20)$$

Применяя лемму Гронуолла к неравенству (20), получаем, что

$$\sup_{0 \leq x < \infty} |u(x, t) - v(x, t)| + |z(t) - y(t)| = 0$$

для любых $x, t \in G$. Отсюда следует, что $|u(x, t) - v(x, t)| \equiv 0$, т. е. $u(x, t) \equiv v(x, t)$, а также $|z(t) - y(t)| \equiv 0$, т. е. $z(t) \equiv y(t)$. Значит система нелинейных интегральных уравнений (10) имеет единственное решение $[u(x, t), z(x)]$. Иначе говоря задача (1)–(4) имеет единственное решение.

Исследуя скорость сходимости последовательностей $\{u_n(x, t)\}$ и $\{z_n(t)\}$, получим

$$\sup_{0 \leq x < \infty} |u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)| + |z_{n+1}(t) - z_n(t)| \leq Ab_1 \int_0^t \{ \sup_{0 \leq x < \infty} |u_n(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau)| + |z_n(\tau) - z_{n-1}(\tau)| \} d\tau. \quad (21)$$

Из неравенства (21) вытекает, что

$$\sup_{0 \leq x < \infty} |u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)| + |z_{n+1}(t) - z_n(t)| \leq (H + K) \frac{A^n b_1^n T^n}{n!}. \quad (22)$$

Из неравенства (22) следует, что

$$|u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)| \leq (H + K) \frac{A^n b_1^n T^n}{n!}, \quad (23)$$

а также

$$|z_{n+1}(t) - z_n(t)| \leq (H + K) \frac{A^n b_1^n T^n}{n!} \quad (24)$$

для всех n и любой точки $(x, t) \in G$.

Неравенства (23) и (24) показывают, что последовательности $\{u_n(x, t)\}$ и $\{z_n(t)\}$ сходятся соответственно к функциям $u(x, t)$ и $z(t) = \frac{1}{\alpha(t)}$ с факториальной скоростью, причем равномерно относительно x и t .

Исследуем зависимость решения задачи (1)–(4) от данных поставленной задачи. Пусть данным $f^{(1)}[t, \alpha(t)]$, $F_1[\tau, t, u_1(x, t)]$, $\psi(t)$ и $f^{(2)}[t, \alpha(t)]$, $F_2[x, t, u(x, t)]$, $\psi_2(t)$ соответствуют решения $[u_1(x, t), \alpha_1(t)]$ и $[u_2(x, t), \alpha_2(t)]$, где $f^{(i)}(t, \alpha)$, $F_i(x, t, u)$, $\psi_i(t)$ ($i=1, 2$) удовлетворяют тем же условиям, которым выше удовлетворяли функции f , F , ψ соответственно. После некоторых преобразований будем иметь

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq e^{WT(l_1+1)} \left[\frac{PT^2(l_1+1)}{2al_1\sqrt{\pi}} \sup_{a_1} |f_1^{(1)}(t, z_1^{-1}, u_2) - f_1^{(2)}(t, z_1^{-1}, u_2)| + \frac{T(l_1+1)}{e_1} \sup_{G_1} |F_1(x, t, u_2) - F_2(x, t, u_2)| + \frac{u_0}{l_1^2} \max_{0 \leq t \leq T} |\psi_2(t) - \psi_1(t)| \right], \quad (25)$$

а также

$$|z_1(t) - z_2(t)| \leq e^{WT(l_1+1)} \left[\frac{PT^2(l_1+1)}{2al_1\sqrt{\pi}} \sup_{G_1} |f_1^{(1)}(t, z_1^{-1}, u_1) - f_1^{(2)}(t, z_1^{-1}, u_2)| + \frac{T(l_1+1)}{l_1} \sup_{G_1} |F(x, t, u_1) - F_2(x, t, u_2)| + \frac{u_0}{l_1^2} \max_{0 \leq t \leq T} |\psi_2(t) - \psi_1(t)| \right], \quad (26)$$

где

$$W = \frac{Ab}{l_1}; \quad l_1 = \min \left\{ \min_{0 \leq t \leq T} \psi_1(t), \min_{0 \leq t \leq T} \psi_2(t) \right\}; \quad f_1^{(i)}(t, z_1^{-1}, u_i) = f^{(i)}(t, z_1^{-1}) + F_i(0, t, u_i), \quad i = 1, 2$$

Неравенства (25) и (26) показывают непрерывную зависимость решения $z(t) = \frac{1}{\alpha(t)}$ и $u(x, t)$ от данных задачи. Значит, малое изменение в данных задачи влечет за собой малое изменение в решении. Таким образом доказана корректность поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Г. Г. „Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук“, 1970. № 6.
2. Тихонов А. О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения. „Матем. сб.“, т. 26 (68), № 1, 1950.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Изд-во „Наука“, 1964.

АзПИ

Поступила 10. XII 1971

Н. Г. Әлиев

Гәрарлашмамыш истиликкечирмә үчүн бир гејри-хәтти тәрс мәсәлә һаггында

ХҮЛАСӘ

Ишдә (1)–(4) гејри-хәтти тәрс мәсәлә тәдгиг олунмушдур. Мәсәлә, онунла эквивалент олан интеграл тәнликләр системинә кәтирилмиш, һәллин варлыгы, јеканәлији вә вериләнләрден кәсилмәз асылылыгы өстәрилмишдир.

УДК 517.949.2

З. Б. СЕИДОВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

В работе ищутся такие значения параметра λ ($|\lambda| \leq \rho$), при которых уравнение

$$x'(t) = f(t, x(t-\tau)), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

имеет решение, удовлетворяющее условиям:

$$x(t) = \varphi(t, \lambda), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2)$$

$$\alpha\lambda + \Phi(\lambda, x(T)) = \beta. \quad (3)$$

Методами последовательных приближений и Ньютона–Канторовича доказывается существование и единственность решения и предлагается способ построения приближенного решения краевой задачи (1)–(3). Отметим, что в случае $\alpha = 0$, $\Phi(\lambda, u) = u$ задача (1)–(3) в ином плане изучена в [3].

Для задачи (1)–(3) построим сначала следующий итерационный процесс:

$$x_{n+1}(t) = \begin{cases} x_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s-\tau, \lambda_{n+1})) ds + \int_{-\tau}^t f(s, x_n(s-\tau)) ds, & 0 \leq t \leq T, \\ \varphi(t, \lambda_{n+1}), & -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\lambda_{n+1} = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \Phi(\lambda_n, x_n(T)),$$

где $|\lambda_0| \leq \rho$, $x_0 = \varphi(0, \lambda)$, $|x_0(t) - x_0| \leq r$.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(t, \lambda)$ непрерывна при $t \in [-\tau, 0]$, $|\lambda| \leq \rho$, $|\varphi(t, \lambda_1) - \varphi(t, \lambda_2)| \leq N|\lambda_1 - \lambda_2|$.

Функция $f(t, x)$ непрерывна в области $R = [0, T] \times [x_0 - r, x_0 + r]$ и $|f(t, x)| \leq M$, $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$.

Далее, функция $\Phi(t, u)$ непрерывна в области R и

$$|\Phi(\lambda_1, u_1) - \Phi(\lambda_2, u_2)| \leq L_1(|\lambda_1 - \lambda_2| + |u_1 - u_2|).$$

Наконец,

$$|\beta| + \max_R |\Phi(t, u)| \leq \rho, \quad q = \frac{L_1}{|\alpha|} (1 + LN\tau) + L(T - \tau) < 1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)–(3) и последовательные приближения (3), (4) сходятся к этому решению со

УДК 517.949.2

З. Б. СЕИДОВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

В работе ищутся такие значения параметра λ ($|\lambda| \leq \rho$), при которых уравнение

$$x'(t) = f(t, x(t-\tau)), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

имеет решение, удовлетворяющее условиям:

$$x(t) = \varphi(t, \lambda), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2)$$

$$\alpha\lambda + \Phi(\lambda, x(T)) = \beta. \quad (3)$$

Методами последовательных приближений и Ньютона—Канторовича доказывается существование и единственность решения и предлагается способ построения приближенного решения краевой задачи (1)—(3). Отметим, что в случае $\alpha = 0$, $\Phi(\lambda, u) = u$ задача (1)—(3) в ином плане изучена в [3].

Для задачи (1)—(3) построим сначала следующий итерационный процесс:

$$x_{n+1}(t) = \begin{cases} x_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s-\tau, \lambda_{n+1})) ds + \int_{-\tau}^0 f(s, x_n(s-\tau)) ds, & 0 \leq t \leq T, \\ \varphi(t, \lambda_{n+1}), & -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\lambda_{n+1} = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \Phi(\lambda_n, x_n(T)),$$

где $|\lambda_0| \leq \rho$, $x_0 = \varphi(0, \lambda)$, $|x_0(t) - x_0| \leq r$.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(t, \lambda)$ непрерывна при

$$t \in [-\tau, 0], \quad |\lambda| \leq \rho, \quad |\varphi(t, \lambda_1) - \varphi(t, \lambda_2)| \leq N|\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Функция $f(t, x)$ непрерывна в области $R = [0, T] \times [x_0 - r, x_0 + r]$ и $|f(t, x)| \leq M$, $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$.

Далее, функция $\Phi(t, u)$ непрерывна в области R и

$$|\Phi(\lambda_1, u_1) - \Phi(\lambda_2, u_2)| \leq L_1(|\lambda_1 - \lambda_2| + |u_1 - u_2|).$$

Наконец,

$$MT \leq r, \quad \frac{|\beta| + \max_R |\Phi(t, u)|}{|\alpha|} \leq \rho, \quad q = \frac{L_1}{|\alpha|} (1 + LN\tau) + L(T - \tau) < 1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)—(3) и последовательные приближения (3), (4) сходятся к этому решению со

129

Неравенства (23) и (24) показывают, что последовательности $\{u_n(x, t)\}$ и $\{z_n(t)\}$ сходятся соответственно к функциям $u(x, t)$ и $z(t) = \frac{1}{\alpha(t)}$ с факториальной скоростью, причем равномерно относительно x и t .

Исследуем зависимость решения задачи (1)—(4) от данных поставленной задачи. Пусть данным $f^{(1)}[t, \alpha_1(t)]$, $F_1[\tau, t, u_1(x, t)]$, $\psi(t)$ и $f^{(2)}[t, \alpha(t)]$, $F_2[x, t, u(x, t)]$, $\psi_2(t)$ соответствуют решения $[u_1(x, t), \alpha_1(t)]$ и $[u_2(x, t), \alpha_2(t)]$, где $f^{(i)}(t, \alpha)$, $F_i(x, t, u)$, $\psi_i(t)$ ($i=1, 2$) удовлетворяют тем же условиям, которым выше удовлетворяли функции f , F , ψ соответственно. После некоторых преобразований будем иметь

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq e^{WT(u_1+1)} \left[\frac{PT^2(l_1+1)}{2al_1\sqrt{\pi}} \sup_{G_1} |f_1^{(1)}(t, z_1^{-1}, u_2) - f_1^{(2)}(t, z_1^{-1}, u_2)| + \frac{T(l_1+1)}{e_1} \sup_{G_1} |F_1(x, t, u_2) - F_2(x, t, u_2)| + \frac{u_0}{l_1^2} \max_{0 \leq t \leq T} |\psi_2(t) - \psi_1(t)| \right], \quad (25)$$

а также

$$|z_1(t) - z_2(t)| \leq e^{WT(u_1+1)} \left[\frac{PT^2(l_1+1)}{2al_1\sqrt{\pi}} \sup_{G_1} |f_1^{(1)}(t, z_1^{-1}, u_1) - f_1^{(2)}(t, z_1^{-1}, u_2)| + \frac{T(l_1+1)}{l_1} \sup_{G_1} |F(x, t, u_1) - F_2(x, t, u_2)| + \frac{u_0}{l_1^2} \max_{0 \leq t \leq T} |\psi_2(t) - \psi_1(t)| \right], \quad (26)$$

где

$$W = \frac{Ab}{l_1}; \quad l_1 = \min \left\{ \min_{0 \leq t \leq T} \psi_1(t), \min_{0 \leq t \leq T} \psi_2(t) \right\}; \quad f_1^{(i)}(t, z_i^{-1}, u_i) = f^{(i)}(t, z_i^{-1}) + F_i(0, t, u_i), \quad i = 1, 2$$

Неравенства (25) и (26) показывают непрерывную зависимость решения $z(t) = \frac{1}{\alpha(t)}$ и $u(x, t)$ от данных задачи. Значит, малое изменение в данных задачи влечет за собой малое изменение в решении. Таким образом доказана корректность поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алцев Г. Г. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук*, 1970, № 6.
2. Тихонов А. О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения. Матем. сб., т. 26 (68), № 1, 1950.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Изд-во "Наука", 1964.

АзПИ

Поступила 10. XII 1971

Н. Г. Әлијев

Гәрарлашмамыш истиликкечирмә үчүн бир гејри-хәтти тәрс мәсәлә һаггында

ХҮЛАСӘ

Ишдә (1)—(4) гејри-хәтти тәрс мәсәлә тәдгиг олунмушдур. Мәсәлә, онунла эквивалент олан интеграл тәнликләр системинә кәтирилмиш, һәллин варлығы, јеканәлији вә вериләнләрден кәсилмәз асыллығы өстәрилмишдир.

скоростью:

$$\max_{0 \leq t \leq T} |x(t) - x_n(t)| + |\lambda - \lambda_n| \leq \frac{2q^n}{1-q} (\rho + r).$$

Доказательство. Легко видеть, что $|x_{n+1}(t) - x_0| \leq r$, $|\lambda_{n+1}| \leq \rho$. Далее, в силу условий теоремы имеем

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq L \int_0^t |\varphi(s - \tau, \lambda_{n+1}) - \varphi(s - \tau, \lambda)| ds +$$

$$+ L \int_{\tau}^t |x_n(s - \tau) - x_{n-1}(s - \tau)| ds \leq LN\tau |\lambda_{n+1} - \lambda_n| +$$

$$+ L(T - \tau) \max_{0 \leq t \leq T} |x_n(t) - x_{n-1}(t)|,$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq LN\tau |\lambda_{n+1} - \lambda_n| + L(T - \tau) \max_{0 \leq t \leq T} |x_n(t) - x_{n-1}(t)|.$$

Аналогично этому из неравенства (5) следует

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leq \frac{L_1}{|\alpha|} (|\lambda_n - \lambda_{n-1}| + \max_{0 \leq t \leq T} |x_n(t) - x_{n-1}(t)|). \quad (6)$$

Сравнивая два последних неравенства, получим:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| &\leq \frac{LL_1N\tau}{|\alpha|} |\lambda_n - \lambda_{n-1}| + \\ &+ \left[L(T - \tau) + \frac{LL_1N\tau}{|\alpha|} \right] \max_{0 \leq t \leq T} |x_n(t) - x_{n-1}(t)|. \end{aligned} \quad (7)$$

Складывая неравенства (6) и (7) и обозначая через

$$V_{n+1} = \max_{0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|, \text{ имеем} \quad (8)$$

$$V_{n+1} \leq qV_n \leq \dots \leq q^n V_1.$$

Так как $q = \frac{L_1}{|\alpha|} (1 + LN\tau) + L(T - \tau) < 1$, то последовательности $\{x_n(t)\}$ и $\{\lambda_n\}$ сходятся.

$$\text{Пусть } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda.$$

Переходя к пределу в равенствах (4), (5) при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s - \tau, \lambda)) ds + \int_{\tau}^t f(s, x(s - \tau)) ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$x(t) = \varphi(t, \lambda), \quad -\tau \leq t \leq 0,$$

$$\alpha\lambda + \Phi(\lambda, x(T)) = \beta.$$

Последние равенства означают, что $(\lambda, x(t))$ есть решение задачи (1)–(3). Нетрудно видеть, что это решение единственно.

Теперь оценим быстроту сходимости последовательных приближений (4), (5). В силу неравенства (8) для любого $k \geq 1$ имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} |x_{n+k}(t) - x_n(t)| + |\lambda_{n+k} - \lambda_n| \leq V_{n+k} + V_{n+k-1} + \dots$$

$$\dots + V_{n+1} \leq (q^k + \dots + q) V_n \leq \frac{2q^n}{1-q} (\rho + r).$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\max_{0 \leq t \leq T} |x(t) - x_n(t)| + |\lambda - \lambda_n| \leq \frac{2q^n}{1-q} (\rho + r).$$

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что из доказанной теоремы, в частности, следует разрешимость следующей краевой задачи:

$$x'(t) = f(t, x(t - \tau)), \quad x(t) = \varphi(t, \lambda) \quad (t \in [-\tau, 0]), \quad |x(T)| = \gamma.$$

Теперь, пользуясь одним вариантом метода Ньютона—Канторовича (см. [2]) докажем существование решения задачи (1)–(3).

Будем предполагать, что решение $x(t, \lambda)$ начальной задачи (1), (2) для каждого λ продолжаемо на весь отрезок $[0, T]$ и

$$|x(t, \lambda) - x_0| \leq r.$$

Лемма 1. Пусть $f(t, x)$ в области R имеет непрерывную производную до второго порядка по λ и

$$|f_\lambda(t, \lambda)| \leq M_1, \quad |f_{\lambda^2}(t, \lambda)| \leq M_2.$$

Функция $\varphi(t, \lambda)$ при $t \in [-\tau, 0]$, $|\lambda| \leq \rho$ имеет непрерывные производные до второго порядка по λ и

$$|\varphi'_\lambda(t, \lambda)| \leq N_1, \quad |\varphi''_{\lambda^2}(t, \lambda)| \leq N_2.$$

Тогда справедливы оценки

$$|x'_\lambda(t, \lambda)| \leq \delta_1 = M_1 N_1 \tau e^{M_1 T},$$

$$|x''_{\lambda^2}(t, \lambda)| \leq \delta_2 = e^{M_1 T} [(M_2 N_1^2 + M_1 N_2) \tau + M_2 \delta_1^2 (T - \tau)].$$

Доказательство этой леммы очевидно.

Лемма 2. Пусть выполнены все условия леммы 1 и

$$|\Phi'_\lambda|, |\Phi'_x| \leq K_1, \quad |\Phi''_{\lambda^2}|, |\Phi''_{\lambda x}|, |\Phi''_{x^2}| \leq K_2.$$

Тогда для функции $\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \Phi(\lambda, x(T, \lambda))$, где $x(t, \lambda)$ есть решение задачи (1), (2), справедливы оценки

$$|\psi'(\lambda)| \geq a = |\alpha| - K_1 - K_2 \delta_1,$$

$$|\psi''(\lambda)| \leq b = K_2 (1 + \delta_1)^2 + K_1 \delta_2.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\psi'(\lambda) = \alpha + \Phi'_\lambda(\lambda, x(T, \lambda)) + \Phi'_x(\lambda, x(T, \lambda)) x'_\lambda(T, \lambda),$$

$$|\psi'(\lambda)| \geq |\alpha| - |\Phi'_\lambda(\lambda, x(T, \lambda)) + \Phi'_x(\lambda, x(T, \lambda)) x'_\lambda(T, \lambda)| \geq$$

$$\geq |\alpha| - K_1 - K_2 \delta_1 = a.$$

Далее,

$$\psi''(\lambda) = \Phi''_{\lambda^2}(\lambda, x(T, \lambda)) + 2\Phi''_{\lambda x}(\lambda, x(T, \lambda)) x'_\lambda(T, \lambda) +$$

$$+ \Phi''_{x^2}(\lambda, x(T, \lambda)) x_{\lambda}''(T, \lambda) + \Phi'_x(\lambda, x(T, \lambda)) x_{\lambda}''(T, \lambda),$$

$$|\psi''(\lambda)| \leq K_2 (1 + \delta_1)^2 + K_1 \delta_2 = b.$$

Лемма доказана.

Теперь итерационный процесс построим так:

$$x_{n+1}(t) = \begin{cases} x_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s - \tau, \lambda_{n+1})) ds + \int_{\tau}^t f(s, x_{n+1}(s - \tau)) ds, & 0 \leq t \leq T, \\ \varphi(t, \lambda_{n+1}), & -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\lambda_{n+1} = \frac{\psi(\lambda_n) - \beta}{\psi'(\lambda_n)}, \quad (n = 0, 1, \dots), \quad \lambda_0 = 0. \quad (10)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия лемм 1 и 2. Далее,

$$\gamma_1 = \frac{2b}{a^2} (\max_u |\Phi(0, u)| + |\beta|) < 1, \quad \frac{a\gamma_1(1 + 2\gamma_1 + \gamma_1^3)}{2b(1 - \gamma_1)} \leq \rho.$$

Тогда существует решение задачи (1)–(3) и итерационный процесс (9), (10) сходится к решению со скоростью

$$|\lambda - \lambda_n| \leq \frac{a}{2b} \cdot \frac{\gamma^{2^n}}{1 - \gamma^{2^n}}, \quad (11)$$

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \frac{M_1 N_1 a \tau e^{M_1 T}}{2b} \cdot \frac{\gamma^{2^n}}{1 - \gamma^{2^n}}, \quad (12)$$

здесь

$$\gamma = \frac{2b}{a} \cdot \frac{|\psi(0) - \beta|}{|\psi'(0)|}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы имеем

$$\gamma = \frac{2b}{a} \cdot \frac{|\psi(0) - \beta|}{|\psi'(0)|} \leq \frac{2b}{a^2} (\max_u |\Phi(0, u)| + |\beta|) = \gamma_1 \leq 1.$$

Так как $\gamma < \gamma_1 < 1$ и $\frac{a \gamma_1 (1 + 2\gamma_1 + \gamma_1^3)}{2b(1 - \gamma_1)} \leq \rho$, то $\frac{a \gamma (1 + 2\gamma + \gamma^3)}{2b(1 - \gamma^4)} \leq \rho$.

Следовательно, на основании соответствующих условий сходимости одного варианта метода Ньютона–Канторовича (см. [2], стр. 50) следует сходимость последовательности $\{\lambda_n\}$ и справедливость оценки (11).

Далее,

$$\begin{aligned} |x_{n+p}(t) - x_n(t)| &\leq M_1 \int_0^t |\varphi(s - \tau, \lambda_{n+p}) - \varphi(s - \tau, \lambda_n)| ds + \\ &+ M_1 \int_0^t |x_{n+p}(s - \tau) - x_n(s - \tau)| ds \leq M_1 N_1 \tau |\lambda_{n+p} - \lambda_n| + \\ &+ M_1 \int_0^t |x_{n+p}(s) - x_n(s)| ds. \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла–Беллмана (см. [1]) имеем

$$|x_{n+p}(t) - x_n(t)| \leq M_1 N_1 \tau e^{M_1 T} |\lambda_{n+p} - \lambda_n|.$$

Из сходимости последовательности $\{\lambda_n\}$ и из последнего соотношения следует также сходимость последовательности $\{x_n(t)\}$ и справедливость оценки (12).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Изд-во иностр. лит., 1954.
2. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. II. „Наукова думка“, 1966.
3. Сеидов З. Б. „Сибир. матем. ж.“, 1968, № 1.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступила 21. I 1972

УИЕ. 417.949.2

З. Б. Сеидов

Кечикэн аргументли дифференциал тэнликлэр үчүн сэрһэд
мэсэлэси

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ (1)–(3) мэсэлэсинин хэлинин варлығы вэ јеканэлији ардычыл јахынлашма, Нјутон-Канторович үсуллары илэ тэдгиг олун-муш вэ тэгриби хэллин јығылмасы үчүн кафи шэртлэр верилмишдир.

Z. B. Seidov

The boundary value problem for differential equations with argument.

SUMMARY

The article deals with the following boundary value problem

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t - \tau)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x(t) &= \varphi(t, \lambda), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad |\lambda| \leq \rho, \\ a\lambda + \Phi(\lambda, x(T)) &= \beta. \end{aligned}$$

Т. Г. БЕКТАШИ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n -ГО ПОРЯДКА

1. Задача. Определить достаточные условия единственности решения $y = y(x)$ уравнения

$$y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1)$$

удовлетворяющего $n+1$ краевым условиям:

$$y(a_i) = A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, n+1, \quad (2)$$

пользуясь произвольностью параметра λ , где f —заданная функция на области

$$D: a \leq x \leq b, -\infty < y, y', \dots, y^{(n-1)} < +\infty.$$

a_1 —заданные определенные точки из отрезка $[a, b]$ оси x , причем

$$a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < b,$$

а $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ —любые числа.

Для решения этой задачи из произвольного частного решения $y = y(x)$ уравнения (1) составим новое уравнение по формуле:

$$Y^{(n)} = \lambda f(x, y(x) + Y, y'(x) + Y', \dots, y^{(n-1)}(x) + Y^{(n-1)}) - \\ - Y f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = \lambda F(x, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}) \quad (3)$$

и будем искать такое решение $Y = Y(x)$ уравнения (3), которое обращается в нуль в n заданных точках оси

$$Y(a_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Задачу $\{(1), (2)\}$ будем называть неоднородной краевой задачей, а задачу $\{(3), (4)\}$ —однородной.

2. Основная теорема. Пусть на области D правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям:

1) она непрерывна по совокупности своих переменных;

2) не обращается в нуль на области D ;

3) ограничена: $m \leq |f| \leq M$;

4) удовлетворяет условиям Липшица относительно переменных $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, т. е.

$$|f(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq \sum_{k=1}^n L_k |\bar{y}^{(n-k)} - y^{(n-k)}|;$$

5) длина $h = a_{n+1} - a_1$ отрезка $[a_1, a_{n+1}]$ меньше наименьшего положительного корня $z = z_0$ уравнения

$$\frac{L_n \theta^n}{n!} z^n + \frac{L_{n-1} \theta^{n-1}}{(n-1)!} z^{n-1} + \dots + \frac{L_1 \theta}{1!} z - 1 = 0, \quad (5)$$

т. е. $h < z_0$, где $0 < \theta < 1$ —некоторое число. Тогда неоднородная краевая задача $\{(1), (2)\}$ имеет единственное решение.

Доказательство. Не рассматривая последнюю точку (a_{n+1}, A_{n+1}) в краевых условиях (2) и считая, что λ —фиксированное число, будем искать решение уравнения (1), проходящее через данные n первых точек. Если при этом взять $\lambda = 1$, то получим краевые задачи

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(a_i) = A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases} \quad (1')$$

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}), \\ Y(a_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases} \quad (2')$$

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}), \\ Y(a_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases} \quad (3')$$

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}), \\ Y(a_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases} \quad (4')$$

которые подробно исследованы автором¹; при этом доказана серия теорем и следствий, сохраняющих силы для краевых задач $\{(1), (2')\}$ и $\{(3), (4)\}$ при произвольно фиксированном значении параметра $\lambda \neq 0$. И в условиях основной теоремы для каждого значения параметра $\lambda \neq 0$ уравнение (1) будет иметь единственное решение $y = y(x, \lambda)$, зависящее от значения параметра λ и удовлетворяющее краевым условиям (2').

Покажем, что при $\lambda = 0$ задача $\{(1), (2')\}$ также имеет единственное решение $y = y(x, 0)$.

Общее решение уравнения $y^{(n)} = 0$ представится формулой

$$y = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{(n-k)!} x^{(n-k)}, \quad (6)$$

где C_k —произвольные постоянные. Потребуем, чтобы оно удовлетворяло краевым условиям (2'):

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{a_i^{n-k}}{(n-k)!} C_k = A_i \right\} \quad (7)$$

Так как определитель системы уравнений (7)

$$\left| \frac{a_i^{n-k}}{(n-k)!} \right| = \frac{1}{(n-1)!(n-2)! \dots 1!} \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \\ = \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) \dots (a_{n-1} - a_n)}{1! 2! \dots (n-1)!} \neq 0,$$

то система уравнений (7) при любых значениях A_i его правых частей однозначно определяет произвольные постоянные $C_k = C_k^{(0)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и из общего решения (6) выделяется единственное решение

$$y = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{C_k^{(0)}}{(n-k)!} x^{(n-k)} \equiv y(x, 0)$$

задачи $\{(1), (2')\}$ при $\lambda = 0$. Таким образом, допустимые значения параметра λ входят в интервал $(-\infty, +\infty)$, и мы имеем семейство решений $y = y(x, \lambda)$ уравнения (1), проходящих через данные n первых точек $(a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_n, A_n)$ краевых условий (2).

Утверждаем, что из этого семейства решений всегда можно выделить одно решение, проходящее и через последнюю граничную

¹ Бекташи Т. Г. Граничная задача для нормального обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1969, № 6.

(a_{n+1}, A_{n+1}) , т. е. задача $\{(1), (2)\}$ имеет единственное решение при некотором значении λ . Тогда будем иметь уравнение

$$A_{n+1} = y(a_{n+1}, \lambda), \quad (8)$$

которое должно определить одно значение $\lambda = \lambda^*$ — нулевое, положительное или отрицательное.

3. Докажем, что такое значение λ^* существует и задача $\{(1), (2)\}$ имеет единственное решение. Будем исходить из того, что в условиях основной теоремы задача $\{(1), (2')\}$ имеет единственное решение при каждом значении параметра λ из интервала $(-\infty, +\infty)$. Преобразуем существующее единственное решение $y = y(x, 0)$ задачи $\{(1), (2')\}$ при $\lambda = 0$, воспользуясь его значением $y(a_n, 0) = A_n$ и значениями производных $y^{(n-k)}(a_n, 0)$ в точке a_n , как начальными данными, где $k = 1, 2, \dots, (n-1)$. Тогда, интегрируя тождество $y^{(n)}(x, 0) = 0$, получим

$$y(x, 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(n-k)}(x, 0)}{(n-k)!} (x - a_n)^{n-k} + A_n. \quad (9)$$

Преобразуем также вид существующего единственного решения $y = y(x, \lambda)$ задачи (1), (2') для случая $\lambda \neq 0$, воспользуясь его значением $y(a_n, \lambda) = A_n$ и значениями производных $y^{(n-k)}(a_n, \lambda)$ в точке a_n , как начальными данными, где $k = 1, 2, \dots, (n-1)$. С этой целью интегрируем тождество

$$y^{(n)}(x, \lambda) = \lambda f(x, y(x, \lambda), y'(x, \lambda), \dots, y^{(n-1)}(x, \lambda)),$$

что дает

$$y(x, \lambda) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{a_n}^x (x-t)^{n-1} f(t, y(t, \lambda), y'(t, \lambda), \dots, y^{(n-1)}(t, \lambda)) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(n-k)}(a_n, \lambda)}{(n-k)!} (x - a_n)^{n-k} + A_n. \quad (10)$$

Так как правая часть (1) не обращается в нуль на полосе D и параметр меняется в интервале $(-\infty, +\infty)$, то достаточно рассмотреть случай, когда $f > 0$ на D и, следовательно, по условию теоремы имеют место неравенства

$$0 < m \leq f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \leq M. \quad (11)$$

Будем рассматривать два случая:

а) $\lambda > 0$, б) $-\lambda < 0$.

Случай а) $\lambda > 0$. В силу (11) имеем $\lambda m \leq \lambda f \leq \lambda M$. Возьмем те же самые начальные данные $y^{(n-k)}(a_n, \lambda)$ в точке a_n , где $k = 1, 2, \dots, n-1, n$, которые входят в решение (10), и в этих условиях проинтегрируем на отрезке $[a_n, a_{n+1}]$ уравнение $z^{(n)} = \lambda m$. Тогда получим

$$z(x, \lambda) = \frac{\lambda m}{n!} (x - a_n)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(n-k)}(a_n, \lambda)}{(n-k)!} (x - a_n)^{n-k} + A_n. \quad (12)$$

Сравнивая (12) и (10) с учетом неравенства $\lambda m \leq \lambda f$, имеем очевидные соотношения на отрезке $(a_n, a_{n+1}]$ для случая $\lambda > 0$:

$$z(x, \lambda) \leq y(x, \lambda). \quad (13_1)$$

Случай б): $-\lambda < 0$. В силу (11) имеем $-\lambda M \leq -\lambda f \leq -\lambda m$. Интегрируя уравнения $z^{(n)} = -\lambda M$ при начальных условиях $y^{(n-k)}(a_n, -\lambda)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) решения $y(x, -\lambda)$, полученного из (10), когда $\lambda > 0$ заменяется на $(-\lambda)$, получим неравенство

$$z(x, -\lambda) \leq y(x, -\lambda). \quad (13_2)$$

Чтобы вычислить неизвестные значения $y^{(n-k)}(a_n, 0)$ производных в точке a_n , подставим в решение (9) краевые условия (2'):

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(a_i - a_n)^{n-k}}{(n-k)!} y^{(n-k)}(a_n, 0) = A_i - A_n. \right. \quad (14)$$

Так как определитель этой системы

$$\Delta = \left| \frac{(a_i - a_n)^{n-k}}{(n-k)!} \right| = \frac{(a_1 - a_n)(a_2 - a_n) \dots (a_{n-1} - a_n)}{(n-1)!(n-2)! \dots 1!} \times \begin{vmatrix} (a_1 - a_n)^{n-2} & (a_1 - a_n)^{n-3} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n-1} - a_n)^{n-2} & (a_{n-1} - a_n)^{n-3} & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (14) однозначно определяет производные

$$y^{(n-k)}(a_n, 0) = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad (k = 1, 2, \dots, (n-1)), \quad (15)$$

где определить Δ_k получается из определителя Δ , когда k -й столбец последнего заменяется правой частью системы (14). Чтобы вычислить неизвестные значения производных $y^{(n-k)}(a_n, \lambda)$, входящих в (12), поступим аналогично вышеуказанному. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(a_i - a_n)^{n-k}}{(n-k)!} y^{(n-k)}(a_n, \lambda) = (A_i - A_n) - \lambda m \frac{(a_i - a_n)^n}{n!}. \right. \quad (16)$$

Рассмотрим еще одну систему алгебраических уравнений:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(a_i - a_n)^{n-k}}{(n-k)!} u^{(n-k)}(a_n, \lambda) = -\lambda m \frac{(a_i - a_n)^n}{n!}. \right. \quad (17)$$

Системы уравнений (15)–(17) имеют один и тот же определитель Δ . Решением системы (17) будет

$$\left\{ u^{(n-k)}(a_n, \lambda) = -\lambda m \frac{D_k}{\Delta}, \right. \quad (18)$$

где D_k есть определитель, полученный из определителя Δ , когда в последнем элементы его k -го столбца заменяются соответственно числами в правых частях (17) без учета общего множителя $(-\lambda m)$.

Очевидно, решение системы уравнений (16) получается из суммы решений системы уравнений (14) и (17), т. е.

$$\left\{ y^{(n-k)}(a_n, \lambda) = y^{(n-k)}(a_n, 0) + u^{(n-k)}(a_n, \lambda) = \frac{1}{\Delta} (\Delta_k - \lambda m D_k). \right. \quad (19)$$

Воспользуясь вычисленными значениями производных (15) и (19), перепишем решения (9) и (12). Тогда (9) примет вид:

$$y(x, 0) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Delta_k}{(n-k)!} (x - a_n)^{n-k} + A_n. \quad (9')$$

Коэффициенты этого полинома определяются данными краевыми условиями (2'). А (12) перепишется так:

$$z(x, \lambda) = y(x, 0) + m \lambda \varphi(x), \quad (12')$$

где

$$\varphi(x) = \frac{(x - a_n)^n}{n!} - \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k}{(n-k)!} (x - a_n)^{n-k}$$

(a_{n+1}, A_{n+1}) , т. е. задача $\{(1), (2)\}$ имеет единственное решение при некотором значении λ . Тогда будем иметь уравнение

$$A_{n+1} = y(a_{n+1}, \lambda), \quad (8)$$

которое должно определить одно значение $\lambda = \lambda^*$ — нулевое, положительное или отрицательное.

3. Докажем, что такое значение λ^* существует и задача $\{(1), (2)\}$ имеет единственное решение. Будем исходить из того, что в условиях основной теоремы задача $\{(1), (2')\}$ имеет единственное решение при каждом значении параметра λ из интервала $(-\infty, +\infty)$. Преобразуем существующее единственное решение $y = y(x, 0)$ задачи $\{(1), (2')\}$ при $\lambda = 0$, воспользуясь его значением $y(a_n, 0) = A_n$ и значениями производных $y^{(n-k)}(a_n, 0)$ в точке a_n , как начальными данными, где $k = 1, 2, \dots, (n-1)$. Тогда, интегрируя тождество $y^{(n)}(x, 0) = 0$, получим

$$y(x, 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(n-k)}(a_n, 0)}{(n-k)!} (x - a_n)^{n-k} + A_n. \quad (9)$$

Преобразуем также вид существующего единственного решения $y = y(x, \lambda)$ задачи (1), (2') для случая $\lambda \neq 0$, воспользуясь его значением $y(a_n, \lambda) = A_n$ и значениями производных $y^{(n-k)}(a_n, \lambda)$ в точке a_n , как начальными данными, где $k = 1, 2, \dots, (n-1)$. С этой целью интегрируем тождество

$$y^{(n)}(x, \lambda) = \lambda f(x, y(x, \lambda), y'(x, \lambda), \dots, y^{(n-1)}(x, \lambda)),$$

что дает

$$y(x, \lambda) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{a_n}^x (x-t)^{n-1} f(t, y(t, \lambda), y'(t, \lambda), \dots, y^{(n-1)}(t, \lambda)) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(n-k)}(a_n, \lambda)}{(n-k)!} (x - a_n)^{n-k} + A_n. \quad (10)$$

Так как правая часть (1) не обращается в нуль на полосе D и параметр меняется в интервале $(-\infty, +\infty)$, то достаточно рассмотреть случай, когда $f > 0$ на D и, следовательно, по условию теоремы имеют место неравенства

$$0 < m \leq f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \leq M. \quad (11)$$

Будем рассматривать два случая:

а) $\lambda > 0$, б) $-\lambda < 0$.

Случай а) $\lambda > 0$. В силу (11) имеем $\lambda m \leq \lambda f \leq \lambda M$. Возьмем те же самые начальные данные $y^{(n-k)}(a_n, \lambda)$ в точке a_n , где $k = 1, 2, \dots, n-1, n$, которые входят в решение (10), и в этих условиях проинтегрируем на отрезке $[a_n, a_{n+1}]$ уравнение $z^{(n)} = \lambda m$. Тогда получим

$$z(x, \lambda) = \frac{\lambda m}{n!} (x - a_n)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(n-k)}(a_n, \lambda)}{(n-k)!} (x - a_n)^{n-k} + A_n. \quad (12)$$

Сравнивая (12) и (10) с учетом неравенства $\lambda m \leq \lambda f$, имеем очевидные соотношения на отрезке (a_n, a_{n+1}) для случая $\lambda > 0$:

$$z(x, \lambda) \leq y(x, \lambda). \quad (13')$$

Случай б) $-\lambda < 0$. В силу (11) имеем $-\lambda M \leq -\lambda f \leq -\lambda m$. Интегрируя уравнения $z^{(n)} = -\lambda M$ при начальных условиях $y^{(n-k)}(a_n, -\lambda)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) решения $y(x, -\lambda)$, полученного из (10), когда $\lambda > 0$ заменяется на $(-\lambda)$, получим неравенство

$$z(x, -\lambda) \leq y(x, -\lambda). \quad (13'')$$

Чтобы вычислить неизвестные значения $y^{(n-k)}(a_n, 0)$ производных в точке a_n , подставим в решение (9) краевые условия (2'):

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(a_i - a_n)^{n-k}}{(n-k)!} y^{(n-k)}(a_n, 0) = A_i - A_n. \right. \quad (14)$$

Так как определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{(a_1 - a_n)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(a_1 - a_n)^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \frac{(a_1 - a_n)^1}{1!} \\ \frac{(a_2 - a_n)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(a_2 - a_n)^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \frac{(a_2 - a_n)^1}{1!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(a_{n-1} - a_n)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(a_{n-1} - a_n)^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \frac{(a_{n-1} - a_n)^1}{1!} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (14) однозначно определяет производные

$$y^{(n-k)}(a_n, 0) = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad (k = 1, 2, \dots, (n-1)), \quad (15)$$

где определить Δ_k получается из определителя Δ , когда k -й столбец последнего заменяется правой частью системы (14). Чтобы вычислить неизвестные значения производных $y^{(n-k)}(a_n, \lambda)$, входящих в (12), поступим аналогично вышеуказанному. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(a_i - a_n)^{n-k}}{(n-k)!} y^{(n-k)}(a_n, \lambda) = (A_i - A_n) - \lambda m \frac{(a_i - a_n)^n}{n!}. \right. \quad (16)$$

Рассмотрим еще одну систему алгебраических уравнений:

$$\left\{ \sum_{i=k}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-k} \frac{(a_i - a_n)^{n-k}}{(n-k)!} u^{(n-k)}(a_n, \lambda) = -\lambda m \frac{(a_i - a_n)^n}{n!}. \right. \quad (17)$$

Системы уравнений (15)–(17) имеют один и тот же определитель Δ . Решением системы (17) будет

$$\left\{ u^{(n-k)}(a_n, \lambda) = -\lambda m \frac{D_k}{\Delta}, \right. \quad (18)$$

где D_k есть определитель, полученный из определителя Δ , когда в последнем элементы его k -го столбца заменяются соответственно числами в правых частях (17) без учета общего множителя $(-\lambda m)$.

Очевидно, решение системы уравнений (16) получается из суммы решений системы уравнений (14) и (17), т. е.

$$\left\{ y^{(n-k)}(a_n, \lambda) = y^{(n-k)}(a_n, 0) + u^{(n-k)}(a_n, \lambda) = \frac{1}{\Delta} (\Delta_k - \lambda m D_k). \right. \quad (19)$$

Воспользуясь вычисленными значениями производных (15) и (19), перепишем решения (9) и (12). Тогда (9) примет вид:

$$y(x, 0) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Delta_k}{(n-k)!} (x - a_n)^{n-k} + A_n. \quad (9')$$

Коэффициенты этого полинома определяются данными краевыми условиями (2'). А (12) переписывается так:

$$z(x, \lambda) = y(x, 0) + m \lambda \varphi(x), \quad (12')$$

где

$$\varphi(x) = \frac{(x - a_n)^n}{n!} - \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k}{(n-k)!} (x - a_n)^{n-k}$$

есть полином, коэффициенты которого также зависят только от данных краевых условий (2').

Итак, для $\lambda > 0$ на отрезке $[a_n, a_{n+1}]$ выполняются

$$z(x, \lambda) = y(x, 0) + m\lambda\varphi(\tau) \leq y(x, \lambda). \quad (13'_1)$$

Для $-\lambda < 0$ в проведенных рассуждениях в роли m выступает M , и мы имеем соотношение

$$z(x, -\lambda) = y(x, 0) - \lambda M\varphi(x) \leq y(x, -\lambda). \quad (13'_2)$$

Теперь покажем, что уравнение (8) имеет единственное решение. Вычислим соотношения (13'_1) и (13'_2) в точке a_{n+1} :

$$z(a_{n+1}, \lambda) = y(a_{n+1}, 0) + \lambda m\varphi(a_{n+1}) \leq y(a_{n+1}, \lambda), \quad (13''_1)$$

$$z(a_{n+1}, -\lambda) = y(a_{n+1}, 0) - \lambda M\varphi(a_{n+1}) \leq y(a_{n+1}, -\lambda). \quad (13''_2)$$

Рассмотрим могущих иметь место три соотношения:

а) $y(a_{n+1}, 0) = A_{n+1}$, б) $y(a_{n+1}, 0) < A_{n+1}$, в) $y(a_{n+1}, 0) > A_{n+1}$.

Если имеет место случай а), то это означает, что $y = y(x, 0)$ есть решение граничной задачи {(1), (2)}, так как при $\lambda = 0$ в соотношениях (13'_1) и (13'_2) знак неравенства переходит в равенство, причем решение будет единственным.

Пусть имеет место случай б), который распадается на два подслучая:

$$\delta_1) \begin{cases} y(a_{n+1}, 0) < A_{n+1}, \\ \varphi(a_{n+1}) > 0, \end{cases} \quad \delta_2) \begin{cases} y(a_{n+1}, 0) < A_{n+1}, \\ \varphi(a_{n+1}) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, для функции $\varphi(x)$ не может иметь место $\varphi(a_{n+1}) = 0$, иначе из (12') мы получили бы $z^{(n)}(a_{n+1}, \lambda) = 0$ вопреки $z^{(n)} = \lambda m > 0$.

Рассмотрим подслучай δ_1). Так как решение непрерывно зависит от λ и из (13'_1) при $\lambda \neq 0$ имеем

$$z(a_{n+1}, 0) = y(a_{n+1}, 0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} y(a_{n+1}, \lambda) < A_{n+1}$$

и

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} z(a_{n+1}, \lambda) \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} y(a_{n+1}, \lambda) = +\infty,$$

то найдется одно значения $\lambda = \lambda_*$ из интервала $(-\infty, +\infty)$ такое, что

$$y(a_{n+1}, \lambda_*) = A_{n+1}.$$

Если имеет место подслучай δ_2), то рассуждения нужно повторить исходя из соотношения (13'_2), при этом получим

$$y(a_{n+1}, -\lambda_*) = A_{n+1}.$$

Аналогично можно рассматривать случай в) и доказать, что уравнение (8) имеет единственный корень $\lambda = \lambda_*$, а это доказывает существование единственного решения $y = y(x, \lambda_*)$ неоднородной краевой задачи {(1), (2)}.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступили 17. II 1972

Т. Н. Бэкташи

Нормал n тэртибли $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ади дифференциал тэнлији үчүн гојулмуш сэрхэд мәсэләси

ХҮЛАСӘ

Мәсәлә. Ашағыдакы

$$y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

тэнлижинин, буна дахил олан λ параметринин ихтијарилијиндән исти-

фада едәрәк, кафи шәртләрдә елә јеканә $y = y(x)$ һәллини тапмаг лазымдыр ки, бу һәлл $n+1$ дәнә

$$y(a_i) = A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1) \quad (2)$$

сәрхэд шәртләрини өдәсин.

Бурада f функцијасы

$$(D): a \leq x \leq b, -\infty < y, y', \dots, y^{(n-1)} < +\infty$$

областында тәјин едилмишдир. a_i әдәдләри $[a, b]$ парчасы дахилин-дән көтүрүлүр вә

$$a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} \leq b$$

бәрабәрсизликләрини өдәјир. $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ исә ихтијари һәги-ги әдәдләрдир.

Мәгаләдә {(1), (2)} сәрхэд мәсәләсинин јеканә һәлл варлығынын кафи шәртләри көстәриләрәк теорем исбат едилмишдир.

УДК 517.95

К. К. ГАСАНОВ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПОЛУГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Пусть Ω —ограниченная область в пространстве R^n переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ с гладкой границей S . Рассмотрим в цилиндре $Q = (0, T) \times \Omega$ ($T < \infty$) задачу о нахождении решения уравнения

$$u_{tt}(t, x) + Lu(t, x) = f(t, x) + \\ + F(t, x, \dots, D^\alpha u(t, x), \dots, u_t(t, x), \dots, D^\alpha u(t - \omega), x), \dots, u_t(t - \omega), x)) \quad (|\alpha| \leq m) \quad (1)$$

при ограничениях

$$l_1 u = u(t, x) = \varphi(t, x), l_2 u = u_t(t, x) = \psi(t, x) \quad \text{при } (t, x) \in E, \quad (2) \\ B_j u(t, x) = \sum_{|\beta| \leq k_j} b_{j\beta}(t, x) D^\beta u(t, x)|_\Gamma = 0 \quad (j = 1, \dots, m; k_j \leq 2m - 1). \quad (3)$$

Здесь

$$\Gamma = [0, T] \times S; \omega = \omega(t) \geq 0; E = \{(t, x) : t \in E^*, x \in \bar{\Omega}\}; \\ E^* = \{t : t = \tau - \omega(\tau) \leq 0, \tau \in [0, T]\} \cup \{0\}; Lu = \\ = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(t, x) D^\beta u); D = (D_1, \dots, D_n); \\ D_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}; \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n); |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

В случае $F \equiv 0$ задача (1)–(3) изучена в работах [1], [2].

В данной статье предполагается, что уравнение (1) является полугиперболическим и для операторов L и B_j ($j = 1, \dots, m$) выполняются условия I и II работы [1]. Функцию $u(t, x)$ назовем обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3), если $u(t, x)$, принадлежащая $L_{2,\infty}^{0,1}(Q, B)$, принимает начальные функции $\varphi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ в смысле $H^{m,0}(E)$ и $L_2(E)$ соответственно и удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \rangle + \int_0^T a(u, \Phi) dt = \langle f + F, \Phi \rangle + (\psi(0, \cdot), \Phi(0, \cdot)) \quad (4)$$

для всех $\Phi \in H^{0,1}(Q, B)$ таких, что $\Phi(T, \cdot) = 0$, где

$$a(u, v) \equiv a(t; u, v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_\Omega \tilde{a}_{\alpha\beta}(t, x) D^\alpha u D^\beta v dx. \quad (5)$$

Для доказательства существования решения этой задачи применен метод Галеркина. В случае, когда коэффициенты операторов L и B_j ($j = 1, \dots, m$) не зависят от аргумента t и краевая задача $(L, \{B_j\}_1^m)$ является самосопряженной, разрешимость доказана методом Фурье.

Теорема 1. Пусть 1) $\varphi \in H^{m,0}(E, B)$, 2) $\psi \in L_2(E)$, 3) $f \in L_{2,1}(Q)$, 4) функция $F(t, x, u_0, \dots, u_n, \dots, v, \dots, \tilde{u}_n, \dots, \tilde{v})$ в области $G = \{(t, x) \in Q, |u_\alpha| < \infty, |v| < \infty, |\tilde{u}_\alpha| < \infty, |\tilde{v}| < \infty\}$ является линейной функцией от аргументов $u_\alpha, \tilde{u}_\alpha$ для $|\alpha| = m$ и $v, \tilde{v}$ с коэффициентами, зависящими от $t, x, u_0, \dots, u_n, \dots, \tilde{u}_n$ для $|\alpha| < m$. Кроме того, пусть в области G функция F удовлетворяет условию:

$$|F(t, x, \dots, u_\alpha, \dots, v, \dots, \tilde{u}_\alpha, \dots, \tilde{v})| \leq \\ \leq \mu_1(t) \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} (|u_\alpha| + |\tilde{u}_\alpha|) + |v| + |\tilde{v}| \right\} + \mu_2(t, x), \quad (7)$$

$$\mu_1(t) \in L_2(0, T), \mu_2(t, x) \in L_2(G).$$

Тогда существует обобщенное решение смешанной задачи.

Доказательство. Пусть $\{v_k(x)\}$ есть последовательность линейно-независимых элементов из $W^m(Q, B)$ и ортонормальный базис пространства $L_2(Q)$, причем $|v_k(x)| \leq M_k$, где M_k —некоторое число. Приближенное решение будем искать в виде:

$$u_p(t, x) = \sum_{k=1}^p u_{pk}(t) v_k(x),$$

где неизвестные коэффициенты $u_{pk}(t)$ ($k = 1, \dots, p$) определяются как решение следующей системы уравнений:

$$u_{pk}''(t) + \sum_{l=1}^p A_{ek}(t) u_{pl}(t) = f_k(t) + F_k(t, u_{p1}, \dots, u_{pp}); \quad (8)$$

здесь

$$A_{ek}(t) = a(v_l, v_k), f_k(t) = (f, v_k), \\ F_k(t, u_{p1}, \dots) = (F(t, x, u_p(t, x), \dots), v_k(x)), \\ k, l = 1, \dots, p.$$

За начальные функции для этой системы выбираем следующие

$$u_{ek}(t) = u_{pk}^{(0)}(t), u_{pk}'(t) = u_{pk}^{(1)}(t) \quad \text{при } t \in E^*, \quad (9)$$

которые обеспечивают условие, что последовательности $\{l_1 u_p(t, x)\}$ и $\{l_2 u_p(t, x)\}$ сходятся равномерно $t \in E^*$ к φ и ψ при $p \rightarrow \infty$ в сильных топологиях пространств $W^m(Q, B)$ и $L_2(Q)$ соответственно. Так как коэффициенты $A_{ek}(t)$ системы (8) измеримы, ограниченные функции $f_k(t) \in L_1(0, T)$ и $F_k(t, u_{p1}, \dots)$ удовлетворяют условиям Каратеодори и имеют линейный рост, то задача (8), (9) имеет, по крайней мере, одно решение в $W^2(0, T)$.

Оценим функцию $u_p(t, x)$ при любом $p \geq 1$. Аналогичным путем, как в работе [2], из (8) получаем

$$\left(\frac{\partial u_p(\tau, \cdot)}{\partial \tau}, \frac{\partial u_p(\tau, \cdot)}{\partial \tau} \right) + a(u_p(\tau, \cdot), u_p(\tau, \cdot)) = \\ = \left[\left(\frac{\partial u_p(t, \cdot)}{\partial t}, \frac{\partial u_p(t, \cdot)}{\partial t} \right) + a(u_p(t, \cdot), u_p(t, \cdot)) \right] \Big|_{t=0} + \\ + \int_0^\tau a'(u_p(t, \cdot), u_p(t, \cdot)) dt + \int_0^\tau 2 \operatorname{Re} \left(f(t, \cdot), \frac{\partial u_p(t, \cdot)}{\partial t} \right) dt + \\ + \int_0^\tau 2 \operatorname{Re} \left(F(t, \cdot, u_p(t, \cdot), \dots), \frac{\partial u_p(t, \cdot)}{\partial t} \right) dt, \quad (10)$$

где $a'(u, v)$ — форма вида (5), коэффициенты которой являются первыми производными по t от коэффициентов формы $a(u, v)$.

Оценим левую часть этого равенства с помощью условия коэрцитивности квадратичной формы $a(t; u, u): a(t; u, u) \geq c_1 \|u\|_{L_2}^2$, $u \in W^m(\Omega, B)$; в правой части на основании неравенства Коши—Буняковского и условия (7) будем иметь

$$\|u_p(\tau, \cdot)\|_{0,1}^2 \leq N \left\{ \int_0^\tau [\mu_3(t) (\|u_p(t, \cdot)\|_{0,1}^2 + \|u_p(t - \omega, \cdot)\|_{0,1}^2) + \mu_4(t)] dt + \|f\|_1 \|u_p\|_{0,1;\infty} + \|l_1 u_p\|_{L_2}^2 + \|l_2 u_p\|_{L_2}^2 \right\}, \quad (11)$$

где $N, \mu_3(t), \mu_4(t)$ не зависят от $u_p(t, x)$.

Последовательно применяя неравенство Гронуолла и неравенство Коши с параметрами, получим

$$\|u_p\|_{0,1;\infty}^2 \leq N_1 \left(1 + \sup_{t \in E^*} \|l_1 u_p\|_{L_2}^2 + \sup_{t \in E^*} \|l_2 u_p\|_{L_2}^2 \right).$$

Отсюда, вследствие выбора функций $u_{pl}^{(0)}(t)$ и $u_{pl}^{(1)}(t)$ следует ограниченность последовательности $\{u_p(t, x)\}$ в пространстве $L_{2,\infty}^{0,1}(Q, B)$.

Так как пространство $L_{2,\infty}^{0,1}(Q, B)$ является сопряженным сепарабельному банахову пространству $L_{2,1}^{0,1}(Q, B)$, каждый шар, замкнутый в $L_{2,\infty}^{0,1}(Q, B)$ и наделенный слабой топологией $\sigma(L_{2,\infty}^{0,1}(Q, B), L_{2,1}^{0,1}(Q, B))$, является компактным (см. [3], стр. 264). Следовательно, существует функция $u(t, x) \in L_{2,\infty}^{0,1}(Q, B)$ и такая подпоследовательность $\{u_{p_s}(t, x)\}$, что $\{u_{p_{s_i}}(t, x)\}$ сходится в слабой топологии пространства $L_{2,\infty}^{0,1}(Q, B)$ к $u(t, x)$, причем последовательность $\{D^\alpha u_{p_s}(t, x)\}$ для $|\alpha| \leq m-1$ равномерно по t сходится к $D^\alpha u(t, x)$ в сильных топологиях пространства $L_2(\Omega)$.

Для того чтобы показать, что найденная функция $u(t, x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (4), умножим k -е уравнения (8) на произвольную достаточно гладкую в $[0, T]$ функцию $g_k(t)$, удовлетворяющую условию $g_k(T) = 0$ и результат проинтегрируем на $(0, T)$; тогда получим

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial u_p}{\partial t}, g_k v_k \right\rangle + \int_0^T a(u_p(t, \cdot), g_k(t) v_k(\cdot)) dt = \\ & = \langle f(t, x) + F(t, x, u_p(t, x), \dots), g_k(t) v_k(x) \rangle + \\ & + (l_2 u_p = (0, \cdot), g_k(0) v_k(\cdot)). \end{aligned}$$

Заменим в этом равенстве $u_p(t, x)$ на $u_{p_s}(t, x)$ и перейдем к пределу при $s \rightarrow \infty$. Получаем, что $u(t, x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (8) для множества $\{g_k(t) v_k(x)\}$. Так как подпространство, порожденное множеством $\{g_k(t) v_k(x)\}$, всюду плотно в пространстве $H^{0,1}(Q, B)$, тождество (8) выполняется для любого Φ из $H^{0,1}(Q, B)$, удовлетворяющего условию $\Phi(T, x) = 0$.

Для единственности решения доказывается следующая

Теорема 2. Пусть функции f, φ, ψ удовлетворяют условиям теоремы 1, а функция F имеет вид:

$$\begin{aligned} F(t, x, u, \dots) = & g(t, x, u, \bar{u}) + \sum_{|\alpha| \leq m} [b_\alpha(t, x) D^\alpha u + \\ & + \bar{b}_\alpha(t, x) D^\alpha \bar{u} + b(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{b}(t, x) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}], \end{aligned}$$

где $\bar{u} = u(t - \omega, x)$; коэффициенты $b(t, x), \bar{b}_\alpha(t, x), b(t, x), \bar{b}(t, x)$

имеют ограниченные первые производные по t , а функция $g(t, x, u, \bar{u})$ удовлетворяет в $G_1 = \{(t, x) \in Q, |u| < \infty, |\bar{u}| < \infty\}$ условию: $|g(t, x, u_2, \bar{u}_2) - g(t, x, u_1, \bar{u}_1)| \leq \mu(t) (|u_2 - u_1| + |\bar{u}_2 - \bar{u}_1|)$, $\mu(t) \in L_2(0, T), g(t, x, 0, 0) \in L_2(G)$;

тогда существует единственное обобщенное решение задачи.

Пусть коэффициенты операторов L и $B_j (j = 1, 2, \dots, m)$ не зависят от аргумента t и краевая задача $(L, \{B_j\}_1^m)$ является самосопряженной. Тогда, применяя формально метод Фурье, получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение вида:

$$u(t, x) = v(t, x) + \int_0^t d\tau \int_\Omega G(t - \tau; x, \xi) F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), \dots) d\xi \quad (12)$$

при начальных условиях (2), где

$$\begin{aligned} v(t, x) = & \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \left(\varphi_k(0) \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\psi_k(0)}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$G(t - \tau; x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x) \bar{v}_k(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau)}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Если $\varphi \in H^{m,0}(E, B), \psi \in L_2(E), f \in L_2, F(t, x, 0, \dots) \in L_2(Q)$ и F удовлетворяет условию Липшица начиная от аргумента u и дальше, то доказывается существование и единственность решения интегро-дифференциального уравнения (12) при условиях (2) в пространстве $L_{2,\infty}^{0,1}(Q, B)$. Далее доказывается, что эта функция является обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бриш Н. И. „Диф. уравн.“, 5, № 12, 1969.
2. Бриш Н. И. „Диф. уравн.“, 6, № 4, 1970.
3. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., Изд-во иностр. лит. 1959.
4. Вишик М. И. Матем. сб., т. 59 (101), 1962.
5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.

Поступила 17. II 1972

АГУ им. С. М. Кирова

К. Г. Насанов

Кечикэн аргументли квазихэти жарымгиперболик тэнлик үчүн гарышыг мээсэлэ

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ Галжеркин вэ Фурье үсуллары илэ кечикэн аргументли гэјри-хэти хиссэјэ малик жарымгиперболик тэнлик үчүн гарышыг мэсэлэнин үмүмлэшмиш һэллинин варлыгы вэ јеканэлији кестэрилмиш-дир.

К. К. Gasanov

Mixed Problems of nonlinear semihyperbolic equations with retarded argument in time

SUMMARY

In this paper the theorems of the existence and uniqueness of the generalized solutions are proved for the Mixed Problems of the nonlinear semihyperbolic equations by the method of Galerkin and Fourier.

УДК 5393

А. Н. ГУЗЬ, Р. Ю. КЕРИМОВ, С. Ю. КЕРИМОВ

О ДИФФРАКЦИИ ВОЛН КРУЧЕНИЯ НА КОНЕЧНЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

При исследовании задач дифракции волн на конечных телах вращения результаты получены для сферических и сфероидальных тел [5], для тел другой формы результаты отсутствуют. В настоящей статье предлагается приближенный метод исследования задач дифракции волн кручения на произвольных телах вращения, основанный на одном варианте [1] метода „возмущения формы границы“ [6], при этом используются результаты работ [2, 4]. Сущность метода заключается в том, что в каждом из приближений получаем задачу в сферической системе координат с однородными дифференциальными уравнениями и с измененными правыми частями граничных условий.

Рассмотрим бесконечное пространство, которое имеет неоднородность в виде тела вращения, ограниченного поверхностью (рисунок). Поверхность получена в результате вращения вокруг оси ox_3 плоскости с отверстием, для которого известна конформно-отображающая функция. Введем три системы координат с центром в точке o : прямоугольную (x_1, x_2, x_3) , сферическую (r, θ, φ) и криволинейную ортогональную (ρ, γ, κ) , где $\kappa \equiv \varphi$. Все координаты будем считать безразмерными, отнесенными к r_0 . В плоскости $x_3 o r_1$ (рисунок) отображающую функцию представим в форме

$$x_3 + ir_1 = \omega(\zeta); \quad \omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta); \\ \zeta = \rho \exp i\gamma; \quad x_3 + ir_1 = r \exp i\theta.$$

По построению координатная поверхность $\rho = 1$ совпадает с поверхностью s . Будем требовать, чтобы отображающая функция удовлетворяла условиям взаимно-однозначного соответствия. Из рисунка следует, что

$$r = \sqrt{\omega(\zeta) \cdot \overline{\omega(\zeta)}}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \omega(\zeta)}{\operatorname{Re} \omega(\zeta)}, \quad \varphi \equiv \kappa, \quad e^{i\varphi} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \cdot \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{|\overline{\omega(\zeta)}|} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}. \quad (2)$$

Запишем основные соотношения для волн кручения в сферической системе координат. При установившихся движениях, выделив множи-

тель $\exp(-i\omega t)$ для упругих, вязкоупругих, термоупругих и термо-вязкоупругих волн [3], получаем

$$u_\varphi = -\frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_1, \quad \Psi_1 = \Psi_1(r, \theta), \quad (3)$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{\mu^*}{r_0} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Psi_1, \quad \sigma_{\theta\varphi} = -\frac{\mu^*}{r_0} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Psi_1. \quad (4)$$

В случае упругих волн величина μ^* совпадает с параметром Ляме, в случае вязкоупругих волн она представляет собой комплексную величину, которая получается из принципа соответствия. Потенциал определяется из уравнения

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \beta^2 \right] \Psi_1 = 0;$$

$$\beta = r_0 \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu^*}} \quad (5)$$

Решение уравнения (5) можно определить в виде

$$\Psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n C_n(\beta r) P_n(\cos \theta); \quad A = \text{const}, \quad (6)$$

где $C_n(\beta r)$ — одна из сферических функций Бесселя; $P_n(\cos \theta)$ — полный Лежандра. Для отраженных волн следует в качестве $C_n(\beta r)$ выбирать сферическую функцию Ханкеля первого рода $h_n^{(1)}(\beta r)$, так как она удовлетворяет условию излучения.

В дальнейшем не будем уделять внимания источникам образования падающих волн, а рассмотрим задачи только для отраженных и излучаемых волн, так как все величины падающей волны вычисляются по (3) и (4) через потенциал падающей волны. Учитывая эти обстоятельства, можно сформулировать граничные условия для тела вращения в случае первой задачи:

$$\sigma_{r\varphi}|_{\rho=1} = g_1(\gamma, \varepsilon) \quad (7)$$

и второй:

$$u_\varphi|_{\rho=1} = g_2(\gamma, \varepsilon). \quad (8)$$

Справа в выражениях (7) и (8) $g_1(\gamma, \varepsilon)$ и $g_2(\gamma, \varepsilon)$ — известные функции.

Для удовлетворения граничным условиям на поверхности тела вращения, отличной от сферической, необходимо вычислить в системе координат (ρ, γ, κ) компоненты $\sigma_{r\varphi}$ и u_φ через потенциал. Следуя [1, 2, 4], поступим следующим образом: представим все величины в виде рядов по:

$$u_\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (u_\varphi)^j; \quad \sigma_{r\varphi} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sigma_{r\varphi}^{(j)}; \quad \sigma_{\theta\varphi} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sigma_{\theta\varphi}^{(j)}; \quad \Psi_1(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Psi_1^{(j)}(r, \theta). \quad (9)$$

Из выражений (5) и (9) получим

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \beta^2 \right] \Psi_1^{(j)}(r, \theta). \quad (10)$$

Решение уравнения (10) согласно (6) можем записать в форме

$$\Psi_1^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(j)} h_n^{(j)}(\beta r) P_n(\cos \theta). \quad (11)$$

Для определения величин $\sigma_{r\varphi}^{(j)}$, $\sigma_{\theta\varphi}^{(j)}$ и $(u_\varphi)^{(j)}$ согласно [1]—[4] получаем

$$(u_\varphi)^{(j)} = u_\varphi^{(j)}(\rho, \gamma) + \sum_{m=0}^{j-1} L_1^{(j-m)} \cdot u_\varphi^{(m)}(\rho, \gamma),$$

$$\sigma_{\rho z}^{(j)} = \sigma_{\rho z}^{(j)}(\rho, \gamma) + \sum_{m=0}^{j-1} [L_5^{(j-m)} \sigma_{\rho z}^{(m)}(\rho, \gamma) + L_6^{(j-m)} \sigma_{\theta \varphi}^{(m)}(\rho, \gamma)], \quad (12)$$

$$\sigma_{\tau z} = \sigma_{\theta \varphi}^{(j)}(\rho, \gamma) + \sum_{m=0}^{j-1} [L_5^{(j-m)} \sigma_{\theta \varphi}^{(m)}(\rho, \gamma) - L_6^{(j-m)} \sigma_{\rho z}^{(m)}(\rho, \gamma)].$$

В выражениях (12) через $L_k^{(j-m)}$ обозначены дифференциальные операторы, которые приведены в работе [3]. Величины $u_\varphi^{(j)}(\rho, \gamma)$, $\sigma_{\rho z}^{(j)}(\rho, \gamma)$, $\sigma_{\theta \varphi}^{(j)}(\rho, \gamma)$ вычисляются по (3) и (4) через функцию (11), являющуюся решением уравнения (10) в сферической системе координат, и потом переменные r и θ формально, а не по формулам (2) заменяются на ρ и γ .

Разложим левые и правые части граничных условий (7) и (8) по ε , в результате получим

$$\sigma_{\rho z} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sigma_{\rho z}^{(j)}|_{\rho=1}, \quad g_1(\gamma, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j g_1^{(j)}(\gamma), \quad (13)$$

$$u_x|_{\rho=1} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_x^{(j)}|_{\rho=1}, \quad g_2(\gamma, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j g_2^{(j)}(\gamma).$$

Из выражений (9), (12) и (13) получаем в j -ом приближении граничные условия для первой задачи:

$$\sigma_{\rho z}^{(j)}(\rho, \gamma)|_{\rho=1} = g_1^{(j)}(\gamma) - \sum_{m=0}^{j-1} [L_5^{(j-m)} \sigma_{\rho z}^{(m)}(\rho, \gamma) + L_6^{(j-m)} \sigma_{\theta \varphi}^{(m)}(\rho, \gamma)]|_{\rho=1} \quad (14)$$

и второй:

$$u_\varphi^{(j)}(\rho, \gamma)|_{\rho=1} = g_2^{(j)}(\gamma) - \sum_{m=0}^{j-1} L_1^{(j-m)} u_\varphi^{(m)}(\rho, \gamma). \quad (15)$$

Заметим, что функцию $F(\gamma)$, удовлетворяющую определенным требованиям, можем представить в виде ряда

$$F(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{d}{d\gamma} P_n(\cos \gamma);$$

$$F_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^\pi E(\gamma) \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \sin \gamma d\gamma. \quad (16)$$

Учитывая выражения (14)–(16), правила вычисления величин $\sigma_{\rho z}^{(j)}(\rho, \gamma)$, $\sigma_{\theta \varphi}^{(j)}(\rho, \gamma)$ и $u_\varphi^{(j)}(\rho, \gamma)$, выражения (3) и (4), получаем граничные условия в j -ом приближении для первой задачи:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \Psi_1^{(j)}(\rho, \gamma)|_{\rho=1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(j)(1)} \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \quad (17)$$

и второй:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \Psi_1^{(j)}(\rho, \gamma)|_{\rho=1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(j)(2)} \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma}. \quad (18)$$

В граничных условиях (7) и (8) введены обозначения:

$$F_u^{(j)(1)} = -\frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^\pi \left\{ \frac{r_0}{\mu^*} g_1^{(j)}(\gamma) + \sum_{m=0}^{j-1} \left[L_5^{(j-m)} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + L_6^{(j-m)} \frac{\sin \gamma}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \right] \Psi_1^{(m)}(\rho, \gamma) \Big|_{\rho=1} \right\} \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \sin \gamma d\gamma, \quad (19)$$

$$F_n^{(j)(2)} = -\frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^\pi \left\{ g_2^{(j)}(\gamma) + \sum_{m=0}^{j-1} L_1^{(j-1)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \Psi_1^{(m)}(\rho, \gamma) \Big|_{\rho=1} \right\} \times \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \sin \gamma d\gamma. \quad (20)$$

Сравнивая выражения (17) и (18) с выражениями (4) и (3), а также учитывая то обстоятельство, что под $\Psi_1^{(j)}(\rho, \gamma)$ в (17) и (18) следует понимать решение (11) уравнения (10) в сферической системе координат, в котором формально, а не [1] заменены r и θ на ρ и γ , приходим к задаче, что в j -ом приближении первая и вторая задача сведены к задачам для сферической системы координат с однородным дифференциальным уравнением и измененными правыми частями граничных условий.

Подставляя решение (11) в граничные условия (17) и (18), определим значения постоянных $A_n^{(j)}$. В результате вычислений значения компонент напряженно-деформированного состояния в j -ом приближении для первой задачи:

$$\begin{aligned} -(u_x)^{(j)} &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(j)(1)} [\beta h_n^{(1)'}(\beta) - h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} \cdot h_n^{(1)}(\beta \rho) \frac{d}{d\gamma} P_n(\cos \gamma) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{j-1} F_n^{(m)(1)} [\beta h_n^{(1)'}(\beta) - h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} \cdot L_1^{(j-m)} h_n^{(1)}(\beta \rho) \frac{d}{d\gamma} P_n(\cos \gamma), \\ -\frac{\sigma_{\rho z}^{(j)}}{\mu^*} r_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(j)(1)} [\beta h_n^{(1)'}(\beta) - h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) h_n^{(1)}(\beta \rho) P_n(\cos \gamma) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{j-1} F_n^{(m)(1)} [\beta h_n^{(1)'}(\beta) - h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} \times \\ &\times \left[L_5^{(j-m)} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} - L_6^{(j-m)} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \rho^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] h_n^{(1)}(\beta \rho) P_n(\cos \gamma), \\ -\frac{\sigma_{\tau z}^{(j)}}{\mu^*} r_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(j)(1)} [\beta h_n^{(1)'}(\beta) - h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \rho^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} h_n^{(1)}(\beta \rho) P_n(\cos \gamma) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{j-1} F_n^{(m)(1)} [\beta h_n^{(1)'}(\beta) - h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} \times \\ &\times \left[L_5^{(j-m)} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \rho^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} + L_6^{(j-m)} \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] h_n^{(1)}(\beta \rho) P_n(\cos \gamma). \end{aligned}$$

Соотношения (9) и (21) дают решение первой задачи. Заметим, что величины $F_n^{(j)(1)}$ определяются из рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} F_n^{(j)(1)} &= -\frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^\pi \left\{ \frac{r_0}{\mu^*} g_1^{(j)}(\gamma) + \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{(m)(1)} [\beta h_k^{(1)'}(\beta) - h_k^{(1)}(\beta)]^{-1} \times \right. \\ &\times \left[L_5^{(j-m)} \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} - L_6^{(j-m)} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \rho^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] h_k^{(1)}(\beta \rho) \Big|_{\rho=1} P_n(\cos \gamma) \Big\} \times \\ &\times \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \sin \gamma d\gamma. \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогичным образом получаем формулы для определения компонент напряженно-деформированного состояния в j -ом приближении для второй задачи:

$$\begin{aligned} - (u_z)^{(j)} = & \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(j)(2)} [h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} h_n^{(1)}(\beta \rho) \frac{d}{d\gamma} P_n(\cos \gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{j-1} F_n^{(m)(2)} \times \\ & \times [h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} L_n^{(j-m)} \cdot h_n^{(1)}(\beta \rho) \frac{d}{d\gamma} P_n(\cos \gamma) - \frac{\sigma_{pz}^{(j)}}{\mu^*} r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(j)(2)} \times \\ & \times [h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} h_n^{(1)}(\beta \rho) P_n(\cos \gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{j-1} F_n^{(m)(2)} [h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} \times \\ & \times \left[L_n^{(j-m)} \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} - L_n^{(j-m)} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \rho^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \right] h_n^{(1)}(\beta \rho) P_n(\cos \gamma), \quad (23) \\ \frac{\sigma_{rz}^{(j)}}{\mu^*} r_0 = & F_n^{(j)(2)} [h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \rho^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} h_n^{(1)}(\beta \rho) P_n(\cos \gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{j-1} \times \\ & [h_n^{(1)}(\beta)]^{-1} \left[L_n^{(j-m)} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \rho^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + L_n^{(j-m)} \cdot \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] h_n^{(1)}(\beta \rho) P_n(\cos \gamma). \end{aligned}$$

Соотношения (9) и (23) дают решение второй задачи. Заметим, что величины $F_n^{(j)(2)}$ определяются из рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} F_n^{(j)(2)} = & - \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^\pi \left\{ g_2^{(j)}(\gamma) + \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{(m)(2)} [h_k^{(1)}(\beta)]^{-1} L_k^{(j-m)} \frac{\partial}{\partial \gamma} h_k^{(1)}(\beta \rho) \times \right. \\ & \times P_k(\cos \gamma) \Big|_{\rho=1} \Big\} \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \sin \gamma d\gamma. \quad (24) \end{aligned}$$

Таким образом, решение первой и второй задач в j -ом приближении свелось соответственно к вычислению величин $F_k^{(j)(1)}$ и $F_k^{(j)(2)}$ из рекуррентных соотношений (22) и (24). Следовательно, задачи в j -ом приближении можно считать решенными, если известны операторы $L_k^{(j-m)}$ для j -го приближения, поскольку в этом случае интегралы в правых частях (22) и (24) вычисляются с использованием рекуррентных соотношений для функции Лежандра. Поскольку эти операторы известны для нулевого, первого, второго и третьего приближений (см., например, [3]), то можно считать, что выражения (9), (21)–(24) представляют собой решения четырех приближений.

В качестве примера рассмотрим случай, когда абсолютно жесткое тело вращения спаяно с упругим пространством и совершает малые колебания вокруг оси вращения. В этом случае имеем вторую задачу, и правые части граничных условий (13) в перемещениях принимают вид:

$$g_2(\gamma, \varepsilon) = A r_0 \frac{f(\omega(\zeta)) - \overline{f(\omega(\zeta))}}{2i} \Big|_{\rho=1}, \quad A - \text{const.} \quad (25)$$

Учитывая (1), (13) и (25), получаем в j -ом приближении правые части граничных условий в следующем виде:

$$g_2^{(j)}(\gamma) = r_0 A \left[\delta_j^0 \sin \gamma + \delta_j^1 \frac{f(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{2i} \Big|_{\rho=1} \right], \quad j = 0, 1, \dots, \infty. \quad (26)$$

Подставляя выражения (26) в рекуррентные соотношения (24), получаем значения $F_n^{(j)(2)}$.

Нулевое приближение совпадает с решением задачи о колебаниях вращения в случае абсолютно жесткого шара в упругой среде. Из (24) и (26) в нулевом приближении получаем после ряда преобразований

$$F_n^{(0)(2)} = \delta_n^1 A r_0. \quad (27)$$

Последующие приближения вычисляются с учетом вида функции $f(\zeta)$. Согласно (24), (26) и (27) в первом приближении получаем

$$\begin{aligned} F_n^{(1)(2)} = & - \frac{2n+1}{2n(n+1)} A r_0 \int_0^\pi \left\{ \frac{f(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{2i} \Big|_{\rho=1} + h_1^{(1)}(\beta) \right]^{-1} L_n^{(1)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \times \\ & \times h_1^{(1)}(\beta \rho) P_1(\cos \gamma) \Big|_{\rho=1} \Big\} \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \sin \gamma d\gamma, \quad (28) \end{aligned}$$

Компонент напряженно-деформированного состояния вычисляются согласно формулам (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Прикл. мех., вып. 6, 1962.
2. Гузь А. Н. ДАН УССР, сер. А, 1970, № 4.
3. Гузь А. Н., Головчан В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Изд-во „Наукова думка“, 1972.
4. Гузь А. Н. Прикл. мех., вып. 6, 1973.
5. Сб.: „Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения“. М., Изд-во „Сов. радио“, 1957.
6. Морс Ф. М., Фетбах Г. Методы теоретической физики, т. т. 1, 2. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

Азерб. ин-т народного хозяйства

Поступила 28. III 1972

А. Н. Гуз, Р. Ј. Кәримов, С. Ј. Кәримов

Сонлу ғырланма чисимләринин бурулмасында далға дифраксиясы ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә „сәрһәд формасынын һәҗәчанландырылмасы“ үсулундан истифадә едиләрәк, сонлу ғырланма чисимләринин бурулмасы заманы далға дифраксияларындан бәһс едилмишдир.

Јахынлашма үсулу илә мәсәләнин һәлли сферик координатларда бирчинс диференсиал тәнлијин сағ тәрәфи дәјишән олан сәрһәд шәртләри дахилиндә һәллине кәтирилмишдир.

УДК 518.517:944/947

А. М. МАМЕДОВ, А. Х. АЛЛАХКУЛИЕВ

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ СЕТОК К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В последнее время с применением теоретико-числовых соображений найдено приближенное решение некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. В данной статье исследуется применимость теоретико-числовых методов к приближенному решению дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений параболического типа.

Решается смешанная задача в классе функций $E_s^{\alpha}(c)$.

§ 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x_1, \dots, x_s, t) \quad (1)$$

в области $Q_T = G_r \times [0, T]$.

Границы G_s обозначим через Γ , а часть границы ζ_T — через Γ_1 , где Γ_1 — боковая поверхность $\zeta_T + \Gamma$.

$$\zeta_T = (0 \leq x_i \leq 1, 0 \leq t \leq T, i = \overline{1, s}).$$

Пусть

$$u(x_1, \dots, x_s, t)|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

$$u(x_1, \dots, x_s, t)|_{t=0} = \varphi(x_1, \dots, x_s). \quad (3)$$

Требуется найти приближенное решение задачи (1) при условии (2) и (3) в классе $E_s^{\alpha}(c)$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_s, t) \in E_s^{\alpha}(c)$, $\varphi(x_1, \dots, x_s) \in E_s^{\alpha}(c)$ — нечетные по каждому переменному при $0 \leq t \leq T$, $\alpha > 3$.

Решение уравнения (1) ищется в виде:

$$u(x_1, \dots, x_s, t) = \sum_{m_1, \dots, m_s=1}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_s}(t) \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j. \quad (4)$$

Так как f и φ принадлежат к классу $E_s^{\alpha}(c)$, то эти функции разлагаются в ряд Фурье:

$$f(x_1, \dots, x_s, t) = \sum_{m_1, \dots, m_s=1}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_s}^f(t) \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j, \quad (5)$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s=1}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_s}^{\varphi} \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j. \quad (6)$$

Подставив (4) в (1) и учитывая (5), получим

$$a'_{m_1, \dots, m_s}(t) + 4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2) \bar{a}_{m_1, \dots, m_s}(t) = c_{m_1, \dots, m_s}^f(t).$$

Решая последнее и подставляя полученное решение в (4), имеем

$$u(x_1, \dots, x_s, t) = \sum_{m_1, \dots, m_s=1}^{\infty} \left[c_{m_1, \dots, m_s}^{\varphi} e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)t} + \int_0^t c_{m_1, \dots, m_s}^f(\tau) e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)(t-\tau)} d\tau \right] \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j. \quad (7)$$

Докажем, что ряды для $u(x_1, \dots, x_s, t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ и Δu сходятся равномерно. Действительно, если

$$|a_{m_1, m_1, \dots, m_s}(t)| \leq |c_{m_1, \dots, m_s}^{\varphi}| + |c_{m_1, \dots, m_s}^f|(t) \leq \frac{c}{(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_s)^{\alpha}},$$

то ряд для $u(x_1, \dots, x_s, t)$ сходится равномерно.

Аналогичным образом доказывается равномерная сходимость ряда для $\frac{\partial u}{\partial t}$ и Δu .

Далее переходим к приближенному решению поставленной задачи. Пусть

$$u_n(x_1, \dots, x_s, t) = \sum_{m_1, \dots, m_s=1}^n \left[c_{m_1, \dots, m_s}^{\varphi} e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)t} + \int_0^t c_{m_1, \dots, m_s}^f(\tau) e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)(t-\tau)} d\tau \right] \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j.$$

Рассматривая разности $u(x_1, \dots, x_s, t)$ и $u_n(x_1, \dots, x_s, t)$ и оценивая их, получим

$$u(x_1, \dots, x_s, t) = u_n(x_1, \dots, x_s, t) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

Теперь, применяя квадратурные формулы с теоретико-числовыми сетками, вычислим интегралы, входящие в сумму $u_n(x_1, \dots, x_s, t)$:

$$u_n(x_1, \dots, x_s, t) = \frac{2^s}{N} \sum_{m_1, \dots, m_s=1}^n \sum_{k=1}^N \left[\varphi(M_k) \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j \left\{ \frac{\kappa a_j}{N} \right\} + \int_0^t f(M_k, \tau) \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j \left\{ \frac{\kappa a_j}{N} \right\} e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)(t-\tau)} d\tau \right] \times \\ \times \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j \left\{ \frac{\kappa a_j}{N} \right\} + O(\ln^{\alpha s} N / N^{\alpha}).$$

Таким образом получим, что

$$u_n(x_1, \dots, x_s, t) = u_n^*(x_1, \dots, x_s, t) + O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right)$$

и

$$u(x_1, \dots, x_s, t) = u_n^*(x_1, \dots, x_s, t) + O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

§ 2. Рассмотрим приближенное решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x_1, \dots, x_s, t) + \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s, t) \times \\ \times u(y_1, \dots, y_s, t) dy_1 \dots dy_s \quad (8)$$

при условии

$$u(x_1, \dots, x_s, t)|_{\Gamma} = 0, \quad (9)$$

$$u(x_1, \dots, x_s, t)|_{t=0} = \varphi(x_1, \dots, x_s), \quad (10)$$

где

$$f, \varphi \in E_s^2(c/2) \text{ и } K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s, t) \in E_{2s}^2(c).$$

За нулевые приближения берем решение задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= a^2 \Delta u_0 + f(x_1, \dots, x_s, t), \\ u_0|_{\Gamma} &= 0, \quad u_0|_{t=0} = \varphi(x_1, \dots, x_s) \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

которое найдено нами

$$u_0(x_1, \dots, x_s, t) = \sum_{m_1, \dots, m_s=1}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_s}^{(0)}(t) \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j,$$

где $a_{m_1, \dots, m_s}^{(0)}(t)$ имеет аналогичный (6) вид.

Первое приближение находим из задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a^2 \Delta u_1 + f(x_1, \dots, x_s, t) + \\ &+ \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s, t) \times \\ &\times u_0(y_1, \dots, y_s, t) dy_1 \dots dy_s, \\ u_1|_{\Gamma} &= 0, \quad u_1|_{t=0} = \varphi(x_1, \dots, x_s) \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Пусть

$$\psi_0(x_1, \dots, x_s, t) = \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s, t) \times \\ \times u_0(y_1, \dots, y_s, t) dy_1 \dots dy_s.$$

Из последнего находим коэффициенты Фурье функции $\psi_0(x_1, \dots, x_s, t)$.

$$\begin{aligned} c_{m_1, \dots, m_s}^{\psi_0}(t) &= 2^s \int_0^1 \dots \int_0^1 \psi_0(x_1, \dots, x_s, t) \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j dx_1 \dots dx_s = \\ &= 2^s \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{m_1, \dots, m_s}^{1, \infty} \left(c_{m_1, \dots, m_s, q_1, \dots, q_s}^K(t) \prod_{j=1}^s \sin 2\pi n_j x_j \prod_{j=1}^s \sin 2\pi q_j y_j \times \right. \\ &\quad \left. \times u_0(y_1, \dots, y_s, t) dy_1 \dots dy_s \right) \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j. \end{aligned}$$

После преобразований получим

$$c_{m_1, \dots, m_s}^{\psi_0}(t) = \sum_{q_1, \dots, q_s=1}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_s, q_1, \dots, q_s}^K(t) A_{q_1, \dots, q_s}^{(0)}(t), \quad (13)$$

где

$$A_{q_1, \dots, q_s}^{(0)}(t) = \int_0^1 \dots \int_0^1 u_0(y_1, \dots, y_s, t) \prod_{j=1}^s \sin 2\pi q_j y_j dy_1 \dots dy_s.$$

Таким образом, задача (12) приводится к задаче

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a^2 \Delta u_1 + f(x_1, \dots, x_s, t) + \lambda \psi_0(x_1, \dots, x_s, t), \\ u_1|_{\Gamma} &= 0, \quad u_1|_{t=0} = \varphi(x_1, \dots, x_s) \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Первое приближение будет иметь вид:

$$u_1(x_1, \dots, x_s, t) = \sum_{m_1, \dots, m_s}^{1, \infty} a_{m_1, \dots, m_s}^{(1)}(t) \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} a_{m_1, \dots, m_s}^{(1)}(t) &= c_{m_1, \dots, m_s}^{\psi_0} e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)t} + \int_0^t [c_{m_1, \dots, m_s}^f(\tau) + \\ &+ \lambda c_{m_1, \dots, m_s}^{\psi_0}(\tau)] e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Продолжая процесс, n -ое приближение находим из задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} &= a^2 \Delta u_n + f + \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s, t) \times \\ &\times u_{n-1}(y_1, \dots, y_s, t) dy_1 \dots dy_s, \\ u_n|_{\Gamma} &= 0, \quad u_n|_{t=0} = \varphi(x_1, \dots, x_s) \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

но будет иметь вид:

$$u_n(x_1, \dots, x_s, t) = \sum_{m_1, \dots, m_s=1}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_s}^{(n)}(t) \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} a_{m_1, \dots, m_s}^{(n)}(t) &= c_{m_1, \dots, m_s}^{\psi_{n-1}} e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)t} + \int_0^t [c_{m_1, \dots, m_s}^f(\tau) + \\ &+ \lambda c_{m_1, \dots, m_s}^{\psi_{n-1}}(\tau)] e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим n -ое приближение в виде:

$$\begin{aligned} u_n(x_1, \dots, x_s, t) &= F(x_1, \dots, x_s, t) + \\ &+ \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K^*(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s, t) u_{n-1} dy_1 \dots dy_s, \end{aligned} \quad (19')$$

где

$$\begin{aligned} K^*(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s, t) &= \int_0^t \sum_{m_1, \dots, m_s}^{1, \infty} c_{m_1, \dots, m_s, q_1, \dots, q_s}^K(\tau) \times \\ &\times e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)(t-\tau)} d\tau \times \prod_{j=1}^s \sin 2\pi q_j y_j \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j. \end{aligned}$$

Теперь докажем, что последовательности $\{u_n\}$, $\{\Delta u_n\}$ и $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\}$ сходятся равномерно. Рассмотрим разности

$$\begin{aligned} u_n(x_1, \dots, x_s, t) - u_{n-1}(x_1, \dots, x_s, t) &= \\ &= \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K^*(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s, t) [u_{n-1} - u_{n-2}] dy_j. \end{aligned}$$

Так как

$$v_n = \max_{\substack{x_1, \dots, x_s \in G_s \\ 0 \leq t \leq T}} |u_n - u_{n-1}| \leq \\ \leq |\lambda| \int_0^1 \dots \int_0^1 K^*(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s, t) \max_{\substack{x_1, \dots, x_s \in G_s \\ 0 \leq t \leq T}} |u_{n-1} - u_n| dy_j,$$

получим

$$v_n \leq |\lambda| M v_{n-1} \quad (n = \overline{1, \infty}).$$

Составляя последовательности при $n = 1, 2, \dots$, имеем

$$v_1 \leq |\lambda| M v_0, \quad v_2 \leq |\lambda| M v_1 \leq (|\lambda| M)^2 v_0, \dots, v_n \leq (|\lambda| M)^n v_0.$$

Пусть

$$|\lambda| M = q < 1.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (|\lambda| M)^n v_0 = v_0 \sum_{n=1}^{\infty} q^n < +\infty.$$

Значит, ряд сходится равномерно при $q < 1$, откуда вытекает, что и последовательность $\{u_n\}$ сходится равномерно.

Находим выражение M из обозначения и оценивая его:

$$|M| \leq \left| \int_0^t \sum_{m_1, \dots, m_s} c_{m_1, \dots, m_s, q_1, \dots, q_s}^K(\tau) e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)(\tau-t)} \prod_{j=1}^s \sin 2\pi q_j y_j \times \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^s \sin 2\pi m_j x_j d\tau \right| \leq \\ \leq \sum_{m_1, \dots, m_s, q_1, \dots, q_s} \frac{c}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s \bar{q}_1 \dots \bar{q}_s)^{\alpha}} \int_0^t e^{-4\pi^2 a^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)(\tau-t)} d\tau.$$

В последнем при $t \geq \tau$ интеграл сходится. Тогда получим

$$|M| \leq c \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^{2s} T.$$

Если выберем λ из условия:

$$|\lambda| c \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^{2s} T < 1,$$

то $\{u_n\}$ сходится равномерно. Так же доказывается равномерная сходимость $\{\Delta u_n\}$ и $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\}$.

Таким образом, получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_1, \dots, x_s, t) = u(x_1, \dots, x_s, t).$$

Доказывается, что при любом n и при любом $0 \leq t \leq T$ $u_n(x_1, \dots, x_s, t)$ принадлежит классу $E_s^{\alpha}(c)$.

Пусть $v_n = \max_{\substack{x_1, \dots, x_s \in G_s \\ 0 \leq t \leq T}} |u_n|$. Тогда получим

$$v_n = |F| + |\lambda| c \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^{2s} T v_{n-1}$$

при $n = 1$. Из последнего имеем

$$v_1 = |F| + |\lambda| c \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^{2s} T v_0, \quad (20)$$

где $v_0 = |u_0|$,

откуда находим, что

$$|u_0| \leq \sum_{m_1, \dots, m_s}^{1, \infty} [|c_{m_1, \dots, m_s}^{\bar{}}| + |c_{m_1, \dots, m_s}^f(t)| T] \leq c \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^s (1 + T).$$

Учитывая последнее в (20), будем иметь

$$v_1 \leq |F| + q v_0 \leq |F| + q (1 + T) c \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right),$$

где

$$q = |\lambda| c \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^{2s} T < 1.$$

Продолжая процесс при $n = 2, 3, \dots$, получим

$$v_n \leq |F| (1 + q + \dots + q^{n-1}) + q^n (1 + T) c \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^s < \\ < \frac{|F|}{1 - q} + \left[|\lambda| \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^{2s} c T\right]^n (1 + T) \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^s.$$

Таким образом доказали, что

$$|c_{m_1, \dots, m_s}^{\bar{}}(t)| \leq \sum_{q_1, \dots, q_s=1}^{\infty} |c_{m_1, \dots, m_s, q_1, \dots, q_s}^K(t)| \times \\ \times \left\{ \frac{|F|}{1 - q} + q^n (1 + T) c \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^s \right\} \leq \\ \leq \frac{c \left[\frac{|F|}{1 - q} + q^n (1 + T) c \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^s \right] \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^s}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{\alpha}} \leq \frac{c \cdot c_1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{\alpha}}.$$

Из доказанного вытекает, что коэффициенты Фурье функции $u_n(x_1, \dots, x_s, t)$ удовлетворяют условию:

$$|c_{m_1, \dots, m_s}^u(t)| \leq \frac{c \cdot c_1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{\alpha}},$$

где $c_1 = c_1(\alpha, s)$,

откуда следует, что $u_n(x_1, \dots, x_s, t) \in E_s^{\alpha}(c \cdot c_1)$.

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ из интегро-дифференциальных уравнений получили интегральное уравнение Фредгольма второго рода в виде:

$$u(x_1, \dots, x_s, t) = F(x_1, \dots, x_s, t) + \\ + \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K^*(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s, t) u(y_1, \dots, y_s, t) dy_1 \dots dy_s.$$

Далее применением квадратурных формул, построенных с помощью теоретико-числовых сеток, получено приближенное решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.
2. Мамедов А. М., Алиева З. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1969, № 4.

Поступила 28. III 1972

АПИ им. В. И. Ленина

Әдәди нәзәри шәбәкә үсулунун парабolik тәнлијин
тәгриби һәллине тәтбиги һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $E_s^x(c)$ синфиндә [(1), (2), (3)] вә [(8), (9), (10)] мәсәләләринин квадратик дүстурларын көмәји илә тәгриби һәлли верилмиш, тәгриби һәлл илә дәгиг һәлл арасындакы хәта гијмәтләндирилмишдир.

A. M. Mamedov, A. Kh. Allakhguliev

SUMMARY

On the method of numerical theoretical grid given on the approximate solving of the parabolic equation.

In the work in the class $E_s^x(c)$, the approximate solving is given with the aid of quadratic symbols of the problems [(1), (2), (3)] and [(8), (9), (9)].

The difference between exact and approximate solvings is marked.

МҮНДӘРИЧАТ

А. А. Әфәндијев а. Бир хусуси синиф квазихәтти диференциал тәнликләр үчүн гојулмуш гарышыг мәсәлә һәлләринин заман гејри-мәһдуд артдыгда тәбнәтинә даир	3
Һ. Н. Ағајев, Р. И. Әлиханов. Јүксәк тәртибли кәсилән әмсаллы квазихәтти элементин тәнлик үчүн сәрһәд мәсәләсинин сингулар һәјәчәланмасы	10
А. С. Маһмудов, Р. Р. Ахундов. Һилберт фәзасында санки ортогонал системләр һаггында	15
Х. М. Нәчәфов. Областын сәрһәддинин бир һиссәсиндә сингулар әмсаллары олан вә сәрһәддә чырлашан ики тәртибли хәтти еллиптик типли тәнлик үчүн бир сәрһәд мәсәләсинин һәлли	23
Б. А. Искәндәров. Чохөлчүлү фәзада Петровскијә көрә коррект тәнликләр үчүн Коши мәсәләсинин $t \rightarrow -\infty$ олдугда тәдгиги	30
С. Ј. Јагубов. Икинчи тәртиб еволүсион тәнликләр үчүн сәрһәд мәсәләсинин корректлији	37
Ч. Ә. Ахундов. Биринчи тәртиб дәјишән операторлу гејри-хәтти еволүсион тәнлик үчүн далға операторлары һаггында	43
В. А. Ибраһимов. Квазихәтти еллиптик типли кәсилән вә сүрәтлә артан әмсаллы тәнликләрин һамаһ һәлләри һаггында	49
М. Н. Вәлијев, И. И. Чаббаров. Таваны эәиф кечирән, һиссә-һиссә биринчи лајда мајенин һәрәкәти һаггында	54
Һ. М. Һәсәнов, С. П. Сүлейманов. Мәһдуд функцијалар синфиндә кубатур просесләрин јыгылма тәртиби һаггында	61
Р. А. Мустафајев, Ш. А. Әфәндијев а. Истисмар гујусунун гујудиби зонасының електрик гыздырычысы илә гыздырымасында лајда температур саһәсинин тәјини мәсәләсинин әдәди һәлли	67
Р. Б. Фејзуллајев. Графларың там олмајан һомоморфизмләри һаггында	73
А. М. Һүсәјнбәјов а. Мәһдуд областда парабolik псеводдиференциал тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәлә һәллинин кичик параметрә көрә тәфриги	78
М. Бајрамоғлу, Р. З. Хәлилова. Оператор әмсаллы диференциал тәнлик үчүн Фрагмен-Линделјоф типли бир теорем һаггында	83
Б. А. Хәлилова. Фурје-Јакоби әмсаллары вә функцијаларын ултрасферик чохәддиләрлә јахынлашмасы һаггында	87
М. Ч. Маһмудов. Бир өлчүсү галан өлчүләре һисбәтән чох кичик олан областларда ики тәртибли, сабит әмсаллы, еллиптик типли тәнлик үчүн гојулмуш сәрһәд мәсәләсинин кичик параметрә көрә тәфриги	95
С. И. Ибраһимов. Нјутон-Дирихле сырасының хусуси чәмләри сыфрларының пәјланмасы	102
М. Х. Нәсибов. Лебег методу илә икигәт сыранын һесаблашмасына даир	108
К. С. Һагвердијев, А. К. Никитин. Өзлү газын гејри-стансионар автотомдел һәрәкәти һаггында	113
С. С. Һахыјев, Г. Т. Әһмәдов. Бәзи диференциал тәнликләр һәллинин интеграл шәкли	116
Һ. Г. Әлијев. Гәрарлашмамыш истиликкечирмә үчүн бир гејри-хәтти тәрс мәсәлә һаггында	121
З. Б. Сејидов. Кечикән аргументли диференциал тәнликләр үчүн сәрһәд мәсәләси	129

Т. Н. Бэкташи. Нормал и тәртибли $(y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}))$	134
ади дифференциал тәнлик үчүн гојулмуш сәрһәд мәсәләси	
К. Г. Нәсәнов. Кечикән аргументли квазхәтти јарымһиперболик тәнлик	140
үчүн гарышыг мәсәлә	
А. Н. Гуз, Р. Ј. Керимов, С. Ј. Керимов. Сонлу фырланма	144
чисимләринин бурулмасында далға дифраксиясы	
Ә. М. Мәмәдов, Ә. Т. Аллахгулијев. Әдәди нәзәри шәбәкә	150
үсулунун параболик тәнлијин тәгриби һәллине тәтбиғи һаггында	

СОДЕРЖАНИЕ

А. А. Эфендиева. О проведении при неограниченном возрастании времени решений смешанной задачи для одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений	3
Г. Н. Агаев, Р. И. Алиханова. Сингулярное возмущение краевой задачи для квазилинейного эллиптического уравнения высшего порядка с разрывными коэффициентами	10
А. С. Махмудов и Р. Р. Ахундов. О почти ортогональных системах	15
Х. М. Наджафов. Решение одной краевой задачи для вырождающегося линейного уравнения второго порядка эллиптического типа с сингулярными коэффициентами на части границы области	23
В. А. Искендеров. Поведение решения задачи Коши при $t \rightarrow +\infty$ для корректного по петровскому уравнения в многомерном пространстве	30
С. Я. Якубов. Корректность краевой задачи для линейных эволюционных уравнений второго порядка	37
Д. А. Ахундов. О волновых операторах для квазилинейного эволюционного уравнения первого порядка с переменным оператором	43
В. А. Ибрагимов. Повышение гладкости решений квазилинейных уравнений эллиптического типа с разрывными и быстрорастущими коэффициентами	49
М. Н. Велиев, И. И. Джаббаров. О движении жидкости в кусочно-однородном пласте со слабопроницаемой кровлей	54
Г. М. Гасанов и С. П. Сулейманов. О порядке сходимости кубатурных процессов в классе ограниченных функций	61
Р. А. Мустафаев, Ш. А. Эфендиев. Численное решение задачи определения поля температуры пласта при прогреве забоя эксплуатационной скважины электронагревателем	67
Р. Б. Фейзуллаев. Частичные гомоморфизмы графов	73
А. М. Гусейнбекова. Асимптотика решения смешанной задачи для параболического псевдодифференциального уравнения по малому параметру в ограниченной области	78
М. Байрамоглу, Р. З. Халилова. Об одной теореме типа Фрагмента—Линделефа для операторно-дифференциальных уравнений	83
Б. А. Халилова. О коэффициентах Фурье—Якоби и о приближении функций ультрасферическими многочленами	87
М. Д. Махмудов. Асимптотика собственных чисел и собственных функций эллиптического оператора второго порядка в тонких областях	95
С. И. Ибрагимов. О распределении нулей частных сумм рядов Ньютона—Дирихле	102
М. Х. Насибов. О суммировании двойных рядов методом Лебега	108
К. С. Ахвердиев, А. К. Никитин. Об одном нестационарном автомодельном движении вязкого газа	108
С. С. Ахиев, К. Т. Ахмедов. Об интегральном представлении решений некоторых систем дифференциальных уравнений	116
Г. Г. Алиев. Об одной нелинейной обратной задаче нестационарной теплопроводности	121
З. В. Сеидов. Краевая задача для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом	129
Т. Г. Бэкташи. Краевая задача для нормального обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка	134
К. К. Гасанов. Смешанная задача для квазилинейного полугиперболического уравнения с запаздывающим аргументом	140
А. Н. Гуз, Р. Ю. Керимов, С. Ю. Керимов. О дифференции волн кручения на конечных телах вращения	144
А. М. Мамедов, А. Х. Аллахкулиев. О применении теоретико-числовых сеток к приближенному решению параболического уравнения	150

Сдано в набор 19/I-1973 г. Подписано к печати 2/IV-1973 г. Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бум. лист. 5,00. Печ. лист. 13,70. Уч-изд. лист. 12,85. ФГ 16527. Заказ 30. Тираж 920. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Государственного Комитета Совета Министров Азербайджанской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Баку, Ази Асланова, 80.