

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

— Рижизийјат вə механика



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Математика и механика

3

1972

---

„ЕЛМ“ НƏШРИЈЈАТЫ—ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЕЛМ“  
БАКЫ — БАКУ

Г. М. МƏММƏДОВ (ХƏЛЛАМИ)

### НЈУТОН БИНОМУ АДЛАНАН ДҮСТУР ИЛК ДЭФӘ ӨМƏР ХƏЛЛАМ ТƏРƏФИНДƏН ВЕРИЛМИШДИР

Нјутон биному дедикдә  $(a + b)^n$  шәклиндә олан ифадәни баша дүшүрүк. Бурада ики сәһв ишләнир. Әввәлән, бу бином дејил, чох-һәддидир. Икинчиси, бунун ачылышыны илк дэфә Нјутон дејил, Шәргин көркәмли философ, шаир вә ријазийатчысы Өмәр Хәлјам (1048-1131) вермишдир. Буну ашағыдакы изаһатла көстөрмәк олар.

Авропанын бөјүк ријазийатчысы Нјутонун (1642-1727) тәвәллүдүн-дән 190 ил габаг, јә'ни 1452-чи илдә (һичри-гәмәри тарихлә 830-чу илдә) Шәргин көркәмли ријазийатчысы Гијасәддин Чәмшид Әлкиши *مفتاح الحساب* („Һесабын ачары“) китабыны јазмышдыр. „Мүфтахил-һесаб“ын биринчи китабы-нын бешинчи фәслиндән мә'лум олур ки, Нјутонун адына дејилән бином вә Паскал (1623—1662) адына дејилән әдәлләр үчбучағы Нјутон вә Паскалдан бир нечә әср габаг Шәрг алимләринә мә'лум олмушдур.

„Мүфтахил-һесаб“ын биринчи китабынын бешинчи фәслинин тәр-чүмәси ашағыдакы кимидир („Ключ арифметики“, М, 1956, стр. 42, 43, 44, перевод с арабского прсф. Б. А. Розенфельда).

Ики әдәд чәминин квадратында әмсал бирчә әдәддир, 2-дир.<sup>1</sup>

Ики әдәд чәминин кубунда әмсаллар ики әдәддир, 3 вә 3-дүр.<sup>2</sup> Бунларын чәми 6 әдәди, ики әдәд чәминин дөрдүнчү дәрәчәдән гүв-вәсинин орта әдәди олур.

Дөрдүнчү дәрәчәдән исә әмсаллар 4, 6, 4-дүр. 4 вә 6-нын чәми 10, ики әдәд чәминин бешинчи дәрәчәсинин орта әдәдидир. 6 илә 4-үн чәми диқәр орта әдәддир. Бу үсулла сонсуз шәкилдә әмсаллар ашағыдакы мә'луматда көрүндүјү кими алыныр.

Әкәр ики ардычыл һәгиги әдәдин ејни дәрәчәдән гүввәтләринин фәргини<sup>3</sup> алмаг истәсәк, кичик әдәди биринчи гүввәт сырасында јазырыг. Квадратыны икинчи гүввәт сырасында, кубуну үчүнчү гүввәт сырасында јазар вә бу шәкилдә әмәлијјаты давам етдирәк. Сонра верилмиш гүввәтин дәрәчәсиндән бир әскик, бүтүн бу гүввәтләри ујғун әмсаллара вуруб, һасилләри чәмләјиб, бир ваһид артырсаг истәнилән фәрги аларыг. Мәсәлән,  $5^5 - 4^5$  фәргини һесабламаг истәјирик. 5-дән кичик сыралары вә оглара ујғун әмсаллары бир сүтунда јазырыг. Кичик әдәд олан 4-ү биринчи гүввәт сырасында, 4-үн квадратыны, јә'ни 16-ны икинчи гүввәт сырасында гејд едирик. Кубуну, јә'ни 64-ү

<sup>1</sup> Мәсәлән,  $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$ . Бурада  $a$ -нын әмсалы нәзәрдә тутулур.

<sup>2</sup> Мәсәлән,  $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ . Бурада  $a$  вә  $a^2$ -нын әмсаллары нәзәрдә тутулур.

<sup>3</sup> Јә'ни  $(a + 1)^n - a^n$  кими баша дүшмәк олар.

п 73104  
Центральная научная  
БИБЛИОТЕКА  
Академии наук Киргизской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: А. И. Гусейнов (редактор), Ю. А. Сеидов (зам. редактора), Г. Б. Абдуллаев, М. И. Алиев, Б. А. Азимов, Д. Э. Аллахвердиев, Ю. А. Амензаде, К. Т. Ахмедов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, Л. М. Иманов, Ф. Г. Магсудов, Ю. А. Махмудов, А. Х. Мирзаджанзаде, Р. А. Еганов (ответств. секретарь), Г. Ф. Султанов, З. И. Халилов, Т. А. Эминзаде, А. А. Эфендизаде.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“.







(2) формулунда  $x = a$ ,  $m = b$  кетүрсәк, ашағыдакы формулу ала-  
рыг:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Бу да мұасир дилдә жазылмыш Нјутон биномудур ки, ихтијари  $a$  вә  $b$  әдәлләри үчүн жазылмышдыр.

Көтүрүлмүш мисалларда анчаг бешинчи гүввәтдән дағышылыр. Лакин (C) чәдвәли илә верилмиш гајда үмуми гајдадыр вә бүтүн дәрәчәләр үчүн јарарлыдыр. Мәсәлән,  $(a + b)^6$ -ны һесабламаг лазым-дырса, онда (A) чәдвәлиндә сол тәрәфдәки бешинчи сүтун лазым олан әмсаллары верәчәк, јә’ни бу сүтунда алтынчы гүввәтин бино-миал әмсаллары јерләшир.

„Мүфтахил-һесаб“ын тә’лиминдә биномиал әмсалларын тапылмасы гајдасы:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \quad (3)$$

сөзләрлә ифадә едилир.

Мә’лумдур ки,

$$C_n^m = \frac{P_n}{P_m \cdot P_{n-m}} = \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

Чох вахт

$\frac{n!}{m! (n-m)!}$  ифадәсини  $\binom{n}{m}$  илә көстәригләр, јә’ни  $C_n^m$  чох вахт  $\binom{n}{m}$  илә ишарә едилир.

Гијасәддин Чәмшид Камаил „Мүфтахүл-һесаб“ китабынын әввә-линдә жазыр ки, (A), (B) вә (C) чәдвәлләрини өзүндән әввәл кәлән ријазийјатчылардан көтүрмүшдүр.

Демәли, әдәди үчбучаг вә бином, Гијасәддиндән габаг мә’лум имиш. Бунлары, јүксәк дәрәчәдән тәрликләри илк дәфә һәлл едән мүәллиф тапылмышдыр. Белә бир мүәллиф исә мә’лум олдуғу үзрә Өмәр Хәјјам олмушдур.

1938-чи илдә Тһһранда доктор Гулам һүсәјн Мүсаһибин нәшр етдирдији *جبر و مقابله خيام* („Чәбр вә мұгабиләји Хәјјам“—„Хәјјамын чәбр вә мұгабиләси“) китабынын 231-чи сәһифәсиндә ашағыдакы сөзләр вардыр.

„Һиндлиләр икинчи вә үчүнчү дәрәчәдән көк алмаг үчүн гајда көстәрмишләр. Мән һиндлиләрин көстәрдији нөв’иләрә башга нөв’иләр дә әләвә етмишәм, о чүмләдән дөрд, беш, алты вә ондан јухары дәрәчәдән дә көк алмағы әләвә етмишәм вә мәнән габаг һеч кәс бу мәсәләләрдән данышмајыб“.

Буна көрә дә гәти сурәтдә белә гәрара кәлирик ки, әдәд үчбучағы вә биномун үстүнүн там мүсбәт әдәд олмасыны илк дәфә Өмәр Хәјјам ихтира етмишдир. Она көрә дә  $(a + b)^n$  ифадәсинә Нјутон биному јох, Өмәр Хәјјамын чохһәдлиси демәк даһа доғрудур.

Өмәр Хәјјам 1048—1131-чи илдә, Паскал 1623—1662-чи, Нјутон исә 1642—1727-чи илләрдә јашамышлар. Ајдындыр ки, Хәјјам, Нјутон вә Паскалдан 6 әср габаг „Нјутон биному“ вә әдәдләр үчбучағы Јахын Шәрг алимләринә мә’лум имиш.

Гејд етмәк лазымдыр ки, Хәјјам биному үст там мүсбәт әдәд ол-дугда чыхармышдыр. Нјутон исә үст мәнфи вә кәср олан һаллар үчүн үмумиләшдирмишдир. Шүбһәсиз, Нјутон, Өмәр Хәјјамын бу иши илә таныш олмамышдыр вә Хәјјамын 6 әср габаг ихтира етдији формулу јенидән ихтира етмишдир.

Хәјјамын бу ишләри һаггында бә’зи Авропа алимләринин дә фи-хирләри мә’лумдур. Смит ријазийјат тарихи китабында (II чилд, сәһ. 507.) (David Eugene Smit. History of Mathematics) жазыр: „Бином мәсәләси  $(a + b)^n$ -дә  $n$  там олдугда әмсаллар Авропадан габаг шәргдә тапылмышдыр.  $n = 2$  олдугда (300 ил миладдан әввәл) бином Евкли-дә мә’лум иди. Лакин  $n$ -ин дикәр гијмәтләри үчүн әмсаллары тапмаг бизә мә’лум олан Өмәр Хәјјамын Чәбр китабында (1100-чү ил, мила-дидә) верилмишдир.

Биномда  $n$ —кәср вә мәнфи олдугда ону Нјутон үмумиләшдир-мишдир“.

Л. Һогбен „Ријазийјат һамы үчүн“ китабында жазыр: „Биному кәшф едән Өмәр Хәјјам Иманлы материалист иди ки, фәлсәфәни һәгиги аләмдә ишләтмәк вә ону өз истәдијинә ујғун јенидән гурмаг истәјирди“.

Китабын башга јериндә белә жазыр: „Шүбһәсиз әдәдләр үчбуча-ғынын алдадычы шәкли, бә’зиләринин бу үчбучағын Паскал тәрә-финдән верилмәси фикринә дүшмәләринә сәбәб олмушдур. Чүнки Паскал биринчи франсыз ријазийјатчысыдыр ки, статистика елминин јени нәзәријјәси олан ријазии еһтималлара диггәт јетирмишдир. Һәги-гәтдә исә әдәдләр үчбучағы силсиләсини Өмәр Хәјјам вермишдир“

## ӘДӘБИЈАТ

1. Гулам һүсәјн Мүсаһиб. Хәјјамын Чәбр вә Мұгабиләси, 1939, Тһһран (фарс дилиндә).
2. Розенфельд. Б. А. Ключ арифметики. Трактат об окружности. ГИИТТ Л.—М., 1956.
3. Омар Хайям. Трактаты. Изд-во восточной литературы. М., 1961.
4. З. И. Хәлилов. Нәсирәддин Тусинин ријазии әсәрләри һаггында, Бакы, 1956.
5. Г. М. Мәмәдов (Хәјјами). IX—XV әсрләрдә Јахын вә Орта Шәрг ријазийјаты һаггында. „Азәрбајҗан ССР ЕА хәбәрләри“ (физика-техника елмләри сәри-јасы), №6, 1960.
6. Г. М. Мәмәдов. Шәргин көркәмли ријазийјатчысы Өмәр Хәјјамын (1048—1131) һәјаты вә чәбрә аид ишләри һаггында. „Азәрбајҗан ССР ЕА Хәбәрләри“ (фи-зика-техника вә ријазийјат елмләри сәријасы), 1966, №3.

*Ријазийјат вә Механика  
институту*

*Алынмышдыр 16.V.1970*

К. М. Мамедов (Хайями)

## Формула бинома Ньютона, впервые изданная Омаром Хайямом

### РЕЗЮМЕ

В начале статьи дается перевод и три таблицы из пятой главы книги Джемшида Гиясадина Ал-Каши „Ключ арифметики. Трактат об окружности“.

Первая таблица является так называемым „числовым треугольником Паскаля“. Вторая таблица относится к вычислению разности между двумя последовательными рациональными степенями, третья—к вычислению разности между рациональными степенями, не являющимися последовательными.

Вычисляя выражение  $(a + b)^n - a^n$ , он получает выражение  $(a + b)^n$ , которое является биномом Ньютона.

Ал-Каши сам отмечает, что эти таблицы были взяты им из трудов предшествующих ученых, значит впервые их издал тот автор, который занимался решением уравнений с большими степенями.

Омар Хайям в своей книге „Алджабр и алмугабл“ указывает, что он первый занялся решением таких уравнений. Отсюда делается



вывод, что числовой треугольник Паскаля и бином Ньютона приблизительно 600 лет до них были известны восточным математикам, это подтверждают и некоторые европейские ученые.

K. M. Mamedov (Khayami)

For the first time the binomial theorem formula was given by Omar Khayami

#### SUMMARY

For the first time the binomial theorem formula was given for whole degrees by Omar Khayam.

М. Б. РАГИМОВ.

#### ФУНКЦИИ ПЕРМУТАБЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

1. Общие пермутабельные операторы. Пусть  $M_x$  — произвольное множество,  $E_y$  — конечномерное комплексное банахово пространство,  $L(E_y; E_y)$  — пространство линейных операторов действующих в  $E_y$ . Рассмотрим операторы  $U$ , определенные на  $M_x$ , и со значениями в  $L(E_y; E_y)$ . Обозначим совокупность всех таких операторов  $U(x)$  через  $D[M_x; E_y] = D(M_x; L(E_y; E_y))$ . Оператор  $U \in D[M_x; E_y]$  называется пермутабельным [1], если

$$U(h)U(k) = U(k)U(h) \quad (1)$$

при любых  $h, k \in M_x$ .

Пусть  $E_\lambda^*$  — совокупность всех комплекснозначных функционалов, заданных на  $M_x$ . Функционал  $\lambda \in E_\lambda^*$  называется собственным функционалом оператора  $U$ , если можно указать такой вектор  $\xi \neq 0$  ( $\xi \in E_y$ ), что при всех  $x \in M_x$

$$U(x)\xi = \lambda(x)\xi. \quad (2)$$

Совокупность всех собственных функционалов называется спектром оператора  $U$  и обозначается  $\sigma(U)$ . Спектр пермутабельного оператора  $U$  не пуст и число точек его не превышает размерности пространства  $E_y$ . Для каждого  $\lambda \in E_\lambda^*$  и произвольного неотрицательного целого  $p$  определим подпространство  $E_\lambda^p$  как совокупность всех векторов  $u \in E_y$ , удовлетворяющих соотношению

$$(\lambda(h_1) - U(h_1)) \cdots (\lambda(h_p) - U(h_p))u = 0 \quad (3)$$

при всех  $h_1, \dots, h_p \in M_x$ .  $E_\lambda^p$  является подпространством пространства  $E_y$ :

$$E_\lambda^p \subset E_\lambda^{p+1} \quad (p = 0, 1, \dots).$$

Наименьшее неотрицательное целое число  $p$ , для которого  $E_\lambda^p = E_\lambda^{p+1}$ , называется индексом  $n(\lambda)$  функционала  $\lambda$ .  $E_\lambda^{n(\lambda)}$  называется корневым подпространством оператора  $U$ , отвечающим собственному функционалу  $\lambda$ ,  $F \subset E_y$  — инвариантное множество относительно оператора  $U$ , если  $U(x)F \subset F$ .

Рассмотрим оператор индуцированный  $2L_F(x)$ , действующий только в  $F$ ,  $U_F(x) \in D[M_x; F]$ .

Оператор  $G \in D[M_x; E_y]$  называется нильпотентным, если линейный оператор  $G(x)$  является нильпотентным при любом  $x \in M_x$ . Индексом нильпотентности нильпотентного оператора  $G$  называется наименьшее натуральное число  $p$ , при котором  $G(x_1) \cdots G(x_p) = 0$  при любых  $x_1, \dots, x_p \in M_x$ .



Возьмем произвольный фиксированный вектор  $\xi \in M_x$  и построим оператор  $U(\xi)$ . Пусть  $\mu^1, \dots, \mu^t$ —собственные числа оператора, а  $\lambda^1, \dots, \lambda^s$ —его попарно различные собственные функционалы. Рассмотрим множества  $N_j = \{j: \lambda^j(\xi) = \mu^j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ ;  $N_j$  не пусты и попарно не пересекаются, в объединении  $N_j$  содержатся все числа от 1 до  $s$  (см. [2], стр. 1291).

Докажем, что

$$E_{\mu^i} = \bigoplus_{j \in N_i} E_{\lambda^j}, \quad (4)$$

$$n(\mu^i) \leq \max_{j \in N_i} n(\lambda^j). \quad (5)$$

Доказательство. Очевидно, что  $E_{\lambda^j} \subset E_{\mu^i}$ ,  $j \in N_i$ . Тогда  $\bigoplus_{j \in N_i} E_{\lambda^j} \subset E_{\mu^i}$  и по теореме о разложении [3] имеем

$$\bigcup_{i=1}^t \bigoplus_{j \in N_i} E_{\lambda^j} = E_y, \quad \bigcup_{i=1}^t \bigoplus_{j \in N_i} E_{\mu^i} = E_y.$$

Отсюда следует, что  $E_{\mu^i} = \bigoplus_{j \in N_i} E_{\lambda^j}$ .

Теперь докажем неравенство (5). В каждом подпространстве  $E_{\lambda^j}$  имеет место равенство

$$U_j(h) = \lambda^j(h) \cdot 1_j + G_j(h), \quad (6)$$

где  $1_j$ —оператор тождественного преобразования в подпространстве  $E_{\lambda^j}$ , а  $G_j$ —нильпотентный пермутабельный оператор. Индекс nilпотентности  $n(G_j)$  оператора  $G_j$  равен  $n(\lambda^j)$ . Пусть в (6)  $h = \xi$ , тогда

$$U_j(\xi) - \mu^1 \cdot 1_j = G_j(\xi),$$

$$(U_j(\xi) - \mu^1)^p y = 0, \quad y \in E_{\mu^1}.$$

Рассмотрим выражение

$$(U_j(\xi) - \mu^1 \cdot 1_j)^p = (G_j(\xi))^p; \quad (G_j(\xi))^p = 0, \text{ если } p = \max_{j \in N_i} n(\lambda^j).$$

Итак, мы показали, что  $E_{\mu^i} \subset E_{\mu^i}^p$ . С другой стороны,  $E_{\mu^i}^p \subset E_{\mu^i}$ . Отсюда  $E_{\mu^i} = E_{\mu^i}^p$ . Следовательно,  $n(\mu^i) \leq p$ .

2. Функции пермутабельного оператора. Пусть спектр оператора  $U$  имеет вид  $\sigma(U) = \{\lambda^1, \dots, \lambda^s\}$ , где  $\lambda^i$  попарно различны. Рассмотрим корневые подпространства  $E_{\lambda^1}, \dots, E_{\lambda^s}$  оператора  $U$ . По теореме о разложении [3] имеем

$$E_y = E_{\lambda^1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda^s}.$$

Пусть  $P(\lambda^j)$ —проектор на  $E_{\lambda^j}$ , параллельный  $E_{\lambda^1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda^{j-1}} \oplus \dots \oplus E_{\lambda^{j+1}} \oplus \dots \oplus E_{\lambda^s}$ . Тогда  $P(\lambda^1) + \dots + P(\lambda^s) = 1$ . Пусть  $E_\mu$  и  $E^\mu$ —два подпространства. Говорят [4], что пара подпространств  $E_\mu$  и  $E^\mu$  приводит оператор  $U$ , если  $E_\mu \oplus E^\mu = E_y$ ,  $U(x)E_\mu \subset E_\mu$ ,  $U(x)E^\mu \subset E^\mu$ , т. е.  $E_\mu$ ,  $E^\mu$  инварианты относительно оператора  $U(x)$ .

Отметим следующее утверждение. Для того чтобы  $E_\mu$  и  $E^\mu$  приводили оператор  $(\lambda(x) - U(x))$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$(\lambda(x) - U(x))^j P(\mu) = P(\mu) (\lambda(x) - U(x))^j,$$

где  $P(\mu)$ —оператор проектирования на  $E_\mu$  параллельно  $E^\mu$ .

Замечание. Если  $E_\mu$  и  $E^\mu$  приводят оператор  $(\lambda(x) - U(x))$ , то они приводят и  $(\lambda(x) - U(x))^j$ .

Пусть  $f(z)$ —целая аналитическая функция,  $f(z) = \sum a_k z^k$ . Определим функцию  $f(U)$  пермутабельного оператора  $U$ , положив [5]

$$f(U)(x) = \sum_{\lambda \in \sigma(U)} \sum_{j=0}^{n(\lambda)-1} f^{(j)}(\lambda(x)) \frac{(U(x) - \lambda(x))^j}{j!} P(\lambda). \quad (7)$$

Теорема 1. Справедливо соотношение

$$f(U)(x) = f(U(x)). \quad (8)$$

Доказательство. Так как

$$(U(h) - \lambda(h))^j P(\lambda) (U(k) - \mu(k))^i P(\mu) = (U(k) - \mu(k))^i P(\mu) (U(h) - \lambda(h))^j P(\lambda),$$

то целая функция от пермутабельных операторов есть опять-таки пермутабельный оператор.

Теперь докажем соотношение (8). Пусть  $x \in M_x$  и фиксирован

$$\sigma(U(x)) = \{\mu^1, \dots, \mu^t\}, \quad N_i = \{j: \lambda^j(x) = \mu^i\},$$

где  $N_i$ —не пустые множества и не пересекаются при разных  $i$ .  $N_1 \cup \dots \cup N_t = \{1, 2, \dots, s\}$ . Пусть  $E_1, \dots, E_t$ —корневые подпространства оператора  $U(x)$ , отвечающие числам  $\mu^1, \dots, \mu^t$ . Пусть  $Q(\mu^i)$ —проектор на  $E_i$ , параллельный  $E_1 \oplus \dots \oplus E_{i-1} \oplus E_{i+1} \oplus \dots \oplus E_t$ . Тогда из (4) пункта 1 сразу следует

$$Q(\mu^i) = \sum_{j \in N_i} P(\lambda^j). \quad (9)$$

Из nilпотентности пермутабельного оператора  $U$  следуют очевидные соотношения:

$$(U(x) - \lambda^j(x))^p P(\lambda^i) = 0, \quad p \geq n(\lambda^j), \quad (10)$$

$$(U(x) - \mu^i)^p Q(\mu^i) = 0, \quad p \geq n(\mu^i). \quad (11)$$

Из (7) получаем

$$f(U)(x) = \sum_{i=1}^t \left( \sum_{j \in N_i} \sum_{p=0}^{n(\lambda^j)-1} f^{(p)}(\lambda^j(x)) \frac{(U(x) - \lambda^j(x))^p}{p!} P(\lambda^j) \right).$$

Заменим все  $n(\lambda^j)$  на  $n^i$ . Это сделать можно, так как для  $p \geq n(\lambda^j)$   $(U(x) - \lambda^j(x))^p P(\lambda^j) = 0$ . Из последнего соотношения в силу (9), (10), (11) получаем

$$\begin{aligned} f(U)(x) &= \sum_{i=1}^t \left( \sum_{j \in N_i} \sum_{p=0}^{n^i-1} f^{(p)}(\lambda^j(x)) \frac{(U(x) - \lambda^j(x))^p}{p!} P(\lambda^j) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^t \left( \sum_{p=0}^{n^i-1} f^{(p)}(\mu^i) \frac{(U(x) - \mu^i)^p}{p!} \left( \sum_{j \in N_i} P(\lambda^j) \right) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^t \left( \sum_{p=0}^{n^i-1} f^{(p)}(\mu^i) \frac{(U(x) - \mu^i)^p}{p!} Q(\mu^i) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^t \left( \sum_{p=0}^{n(\mu^i)-1} f^{(p)}(\mu^i) \frac{(U(x) - \mu^i)^p}{p!} Q(\mu^i) \right) = f(U(x)). \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали утверждение (8).



Теорема 2. Пусть  $f, g$  — целые аналитические функции. Тогда функции  $af + bg$ ,  $(fg)(z) = f(z)g(z)$  и суперпозиция  $f \circ g(z) = f(g(z))$  также являются аналитическими и справедливы соотношения:

- 1)  $(af + bg)(U) = af(U) + bg(U)$ ,
- 2)  $(fg)(U)(x) = f(U)(x)g(U)(x)$ ,
- 3)  $(f \circ g)(U) = f(g(U))$ ,
- 4)  $f(U)(x) = \sum a_j(U(x))^j$ .

Докажем свойство (3). В силу соотношения (8) имеем

$$(f \circ g)(U)(x) = f \circ g(U(x)) = f[g(U(x))] = f[g(U)(x)] = f(g(U))(x).$$

Это верно для всех  $x \in M_y$ , поэтому  $(f \circ g)(U) = f(g(U))$ .

Теорема 3. Пусть  $f$  — целая аналитическая функция и  $\sigma(U)$ . Тогда

$$\sigma(f(U)) = f(\sigma(U)).$$

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 1.

В заключение автор приносит глубокую благодарность А. И. Перову за постановку задач и внимание к данной работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Перов А. И. „ДАН СССР“, т. 186, 1969, № 1.
2. Перов А. И. К теории многомерных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, т. 4, № 7, Минск, 1968.
3. Перов А. И. „ДАН СССР“, т. 154, 1964, № 6.
4. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. Физматгиз, М. 1963.
5. Данфорд Н. и Шварц Дж. Т. Линейные операторы, I, ИЛ. 1962.

Поступило 21. X 1970

Институт математики  
и механики АН Азерб. ССР

М. Б. Рәхимов

#### Пермутасијалы операторун функцијасы

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә  $D(M_x; L(E_y; \bar{E}_y))$  фәзасындан көтүрүлмүш ихтијари  $U$  операторунун спектра хассәләрилә  $U(x) \in L(E_y; E_y)$  операторунун спектрал хассәләри арасындакы асыллыг верилмишдир. Бу хассәләр пермутасија олуна билән  $U$  операторунун функцијасы гуруларкән истифадә едилр.

М. В. Ragimov

#### The function of the permutatiol operator

SUMMARY

In the article the function of the permutatiol operator  $u \in L(M_x; L(\bar{E}_y; \bar{E}_y))$  is being built.

УДК 539.3

Г. В. ГОНЧАРОВА

#### НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ II ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В настоящей статье рассматривается задачи типа Дирихле для систем уравнений Ламе на плоскости (в матричной записи):

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \partial' u = -f \quad (x \in D) \quad u|_{\partial D} = 0, \quad (1)$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \partial = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Основной целью является доказательство аналитической зависимости решения  $u$  этой задачи от параметра  $\lambda$ , равного  $\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}$  в круге

$|\lambda| < 1$ , что позволяет сводить нахождение ее решения (1) к решению последовательности задач Дирихле для уравнения Лапласа. В связи с этим система Ламе рассматривается при комплексных значениях параметров  $\lambda$  и  $\mu$  в предположении, что  $\lambda + 3\mu \neq 0$  и фиксировано.

Метод исследования в основном принадлежит Г. Вейлю. Возможность его переноса на несамосопряженный случай основывается на лемме, которую можно рассматривать как некоторое обобщение известной теоремы Ф. Рисса.

§ 1. Рассмотрим билинейную форму  $f$  на Гильбертовом пространстве  $H$  со свойствами:

- 1)  $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v)$ ,  $f(u, \lambda v) = \bar{\lambda} f(u, v)$ ;
- 2)  $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$ ,  $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$  ( $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$  не предполагается).

Дополнительно предполагается, что существуют такие постоянные  $m_0, m$ , что:

- 3)  $|f(u, v)| \leq m |u| |v|$  (непрерывность  $f$  по  $u, v$ );
- 4)  $|f(u, u)| \geq m_0 |u|^2$ .

Лемма 1 (Лакс—Мильграм). Пусть  $\varphi$  — произвольный линейный функционал на  $H$ . Тогда существует, притом единственный, элемент  $u \in H$  такой, что для всех  $u \in H$   $\varphi(u) = f(u, v)$ .



## § 2. Положим

$$\{u, v\} = \begin{cases} \int_D \left\{ \bar{v}' u + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\} dx = (u, v)_1 \quad (\text{diam } D < \infty), \\ \int_D \left\{ \frac{\bar{v}' u}{|x-a|^4} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\} dx \quad (\text{если } \text{diam } D = +\infty, \bar{D} \neq R^2, a \in \bar{D}). \end{cases}$$

Множество функций-столбцов, непрерывно дифференцируемых в  $D$  и с компактным носителем, лежащим в  $D$ , образует для скалярного произведения  $\{u, v\}$  предгильбертово пространство. Замыкание этого пространства по норме  $\|u\| = \sqrt{\{u, u\}}$  есть гильбертово пространство, которое обозначим временно через  $\dot{H}$ ; оно состоит из столбцов  $u$ , для которых  $\{u, u\} < \infty$  и которые являются пределами (по норме  $\|\cdot\|$ ) столбцов непрерывно дифференцируемых и с компактным носителем. В случае  $\text{diam } D < \infty$ , очевидно,  $\dot{H} = \dot{W}_2^1(D)$ .

Обозначим, наконец,

$$[u, v] = \int_D \left\{ \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\} dx, \quad \|u\| = \sqrt{[u, u]}.$$

Как известно, если  $u \in \dot{W}_2^1(D)$ ,  $\text{diam } D < \infty$ , то существует такая постоянная  $C = C_D > 0$ , что

$$\int_D |u|^2 dx \leq C \int_D \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 \right\} dx.$$

Можно полагать, например,  $C = d_1^2$ ,  $d_1 = \sup |x_1 - x'|$  (верхняя грань берется по всем точкам  $(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in D$ ). Эта же формула верна и в случае  $\text{diam } D = \infty$ , если только  $d_1 < \infty$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\text{diam } D = +\infty$ ,  $\bar{D} \neq R^2$ ,  $a \in \bar{D}$  (без ограничения общности можно положить  $a = 0$ ). Тогда существует такая постоянная  $C > 0$ , что для всякой функции  $u \in \dot{H}(D)$

$$\int_D \frac{|u|^2}{|x-a|^4} dx \leq C \int_D \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 \right\} dx.$$

Доказательство получается посредством инверсии области  $D$  в ограниченную область. При этом можно полагать  $C = 4r^2$  ( $r = \inf_{y \in D} |y|$ ).

**Лемма 3.** Для всех  $u \in \dot{H}$  справедливы неравенства:

$$\frac{1}{\sqrt{C+1}} \|u\| \leq \|u\| \leq \|u\|,$$

Доказательство элементарно. Таким образом, на  $\dot{H}$  нормы  $\|\cdot\|$  и  $\|\cdot\|$  эквивалентны.

Если  $D$  ограничено, то нормы  $|\cdot|$ ,  $\|\cdot\|$  также как известно, эквивалентны. Пространство  $\dot{H}$  с нормой  $\|\cdot\|$  есть гильбертово пространство, которое будет обозначаться через  $\dot{H}_2^1(D)$ .

## § 3. Рассмотрим систему Лапе:

$$\begin{aligned} \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \partial' u &= -f \quad (x \in D), \\ u|_{\partial D} &= 0. \end{aligned}$$

Пусть сначала  $u$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$  — непрерывно дифференцируемая вектор-функция с компактным носителем в  $\bar{D}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \int_D \bar{\varphi}' \{ \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \partial' u \} dx &= \int_D \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \bar{\varphi}' \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \right. \\ &+ \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \bar{\varphi}' \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \mu \left( \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{\varphi}_1 \partial' u) + \\ &+ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{\varphi}_2 \partial' u) - (\lambda + \mu) \partial' \bar{\varphi} \partial' u \Big\} dx = - \\ &- \int_{\partial D} \left\{ \mu \bar{\varphi}' \left( \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + (\lambda + \mu) (\nu_1 \bar{\varphi}_1 + \nu_2 \bar{\varphi}_2) \partial' u \right\} dx - \\ &- \int_D \left\{ \mu \left( \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + (\lambda + \mu) \partial' \bar{\varphi} \partial' u \right\} dx. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int_D \bar{\varphi}' \{ \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \partial' u \} dx &= - \\ &- \int_D \left\{ \mu \left( \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + (\lambda + \mu) \partial' \bar{\varphi} \partial' u \right\} dx \end{aligned} \quad (2)$$

есть первая формула Грина для задачи с заданными смещениями на границе.

**Определение.** Обобщенным решением задачи типа Дирихле (1) будем называть всякий функциональный столбец  $u \in \dot{H}_2^1(D)$ , который удовлетворяют тождеству (2) для всех функциональных столбцов  $\varphi$ , непрерывно дифференцируемых и с компактным носителем.

**Теорема.** Пусть  $\int_D |f(x)|^2 dx < +\infty$  (если  $\text{diam } D < \infty$ ), или  $\int_D |x-a|^4 |f(x)|^2 dx < \infty$  (если  $\text{diam } D = +\infty$ ,  $\bar{D} \neq R^2$ ,  $a \in \bar{D}$ ).

Пусть,  $\lambda + 3\mu \neq 0$ ,  $\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ . Тогда задача

(1) имеет, притом единственное, решение  $u \in \dot{H}_2^1(D)$ . Для решения  $u$  справедливы оценки вида:

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq C_1 \begin{cases} \left[ \int_D |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}, & \text{diam } D < +\infty \\ \left[ \int_D |x-a|^4 |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}, & \text{diam } D = +\infty, \bar{D} \neq R^2, a \in \bar{D}; \end{cases} \\ \|u\| &\leq C_2 \begin{cases} \left[ \int_D |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}, & \text{diam } D < \infty \\ \left[ \int_D |x-a|^4 |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}, & \text{diam } D = \infty, \bar{D} \neq R^2, a \in \bar{D}. \end{cases} \end{aligned}$$



**Доказательство.** Докажем прежде всего, что при сделанных предположениях  $u \rightarrow \int_D u(x) \bar{f}(x) dx$  есть линейный непрерывный

функционал на  $\dot{H}_2^1(D)$ .

Имеем:

$$\left| \int_D u(x) \bar{f}(x) dx \right| \leq \left[ \int_D |u(x)|^2 dx \right]^{1/2} \left[ \int_D |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \leq C \left[ \int_D \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 \right\} dx \right]^{1/2} \cdot \left[ \int_D |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} = C \left[ \int_D |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \|u\|$$

(diam  $D < \infty$ ),

$$\left| \int_D \bar{f}(x) u(x) dx \right| = \left| \int_D \frac{u(x)}{|x-a|^2} |x-a|^2 \bar{f}(x) dx \right| \leq \leq C \left[ \int_D |x-a|^4 |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \|u\| \text{ (если } \text{diam } D = +\infty, \bar{D} \neq R^2, a \notin \bar{D}).$$

Из формулы (2) получаем

$$\int_D \left\{ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + (\lambda + \mu) \partial' \varphi \cdot \partial' u \right\} dx = \int_D \bar{f}' \varphi dx.$$

По непрерывности обеих частей это тождество оказывается верным для всех  $\varphi \in \dot{H}_2^1(D)$ . Положим

$$F(\varphi, u) + \int_D \left\{ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + (\lambda + \mu) \partial' \varphi \partial' \bar{u} \right\} dx;$$

$$\varphi, u \in \dot{H}_2^1(D).$$

Подобно тому, как это сделано в [1], доказывается, что к функционалу  $F(\varphi, u)$  применима лемма 1; при этом за постоянные  $m_0, m$  указанной леммы в данном случае можно принять:  $m = |\mu| + 2|\lambda + \mu|$ ,  $m_0 = \frac{|\lambda + 3\mu|}{2} \eta(x)$ .

Здесь  $x = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}$ ,  $\eta(x) = \min_{0 < \xi < 1} |1 - x + 2x\xi|$ ,  $\eta(x) > 0$ , если  $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ , что предполагается.

Обобщенным решением задачи в  $\dot{H}_2^1(D)$  мы называли всякое  $u \in \dot{H}_2^1(D)$  такое, что  $F(\varphi, u) = (\varphi, f)$  для всех  $\varphi \in \dot{H}_2^1(D)$ . По сделанным предположениям,  $\varphi \rightarrow (\varphi, f)$  есть непрерывный функционал в  $\dot{H}_2^1(D)$ , тогда согласно лемме 1 существует, притом единственный, элемент  $u \in \dot{H}_2^1(D)$  такой, что  $(\varphi, f) = F(\varphi, u)$ ; это и есть требуемое решение. Полагая, в частности в этом равенстве  $\varphi = u$ , получаются требуемые в теореме оценки  $\|u\|$ . Теорема доказана.

§ 4. Для доказательства следующей теоремы проведем соответствующую подготовку. Пусть  $\gamma$  — дуга на комплексной плоскости описываемая уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad (\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = a, \\ x_2 = \varphi_2(t),$$

и  $\Phi(x)$  есть ограниченная действительная измеримая функция на дуге  $\gamma$  (дуга  $\gamma$  спрямляема). Кроме того,

$$\Phi(x) \leq A + B \int_{\gamma(x)} \Phi(y) dy S. \quad (4)$$

Тогда, как известно,  $|\Phi(x)| \leq A \exp B S(x)$  ( $S(x)$  — длина дуги  $\gamma(x)$ ).

Пусть  $T$  — некоторая область комплексной плоскости  $C$ ,  $H$  — банахово пространство,  $g: T \rightarrow H$ . Будем говорить, что  $g$  есть аналитическая функция  $z$  в точке  $a \in T$ , если существует такая окрестность  $U$  точки  $a$  и такая функция  $h: U \rightarrow H$ , что  $\sup_{z \in U} |h(z)|_H < \infty$  и

$$\left| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - h(z) \right|_H \rightarrow 0 \quad (z, z_0 \in U); \quad (5)$$

$h(z)$  называется производной  $g(z)$ .

Если  $g(a)$  дифференцируема в каждой точке  $U$ , то  $g(z)$  есть аналитическая функция  $z$  в области  $T$  (со значениями в пространстве  $H$ ). Условие (5) можно заменить другим:

$$g(z) = g(z_0) + \int_{\gamma(z)} h(\tau) d\tau S, \quad (6)$$

где  $\gamma(z)$  есть переменная точка некоторой спрямляемой дуги, соединяющей  $z_0$  с  $z$ .

Пусть  $u$  есть обобщенное решение задачи (1) в области  $D$ . Обозначим через  $T$  дополнение в  $C$  до  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ . По теореме 1 для каждого  $x \in T$  существует единственное обобщенное решение задачи (1):  $u = u(x) \in \dot{H}_2^1(D)$ .

**Теорема 2.** Решение  $u = u(x)$  задачи (1) есть аналитическая функция  $x$  в области  $T$  (со значениями в пространстве  $\dot{H}_2^1(D)$ ).

**Доказательство.** Напомним обозначения:

$$F_x(u, \varphi) = \int_D \left\{ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + (\lambda + \mu) \partial' \bar{u} \cdot \partial' u \right\} dx = \\ = \frac{\lambda + 3\mu}{2} \int_D \left\{ (1+x) \left( \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + 2x \partial' \bar{u} \partial' u \right\} dx.$$

Положим

$$F_1 x(u, \varphi) = \frac{\lambda + 3\mu}{2} \int_D \left\{ 2\partial' \bar{u} \cdot \partial' u - \left( \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right\} dx.$$

Легко проверить, что  $|F_1 x(u, \varphi)| \leq \frac{3}{2} |\lambda + 3\mu| \|u\| \cdot \|\varphi\|$ . Решение  $u(x)$  задачи (1) определяется выполнением равенства

$$F_x(u(x), \varphi) = (f, \varphi) \quad (7)$$

для всех  $\varphi \in \dot{H}_2^1(D)$ . Формально дифференцируя обе части по  $x$ , получим (полагая  $v(x) = \frac{du(x)}{dx}$ )

$$F_x(v, \varphi) = -F_1 x(u, \varphi). \quad (8)$$

Пусть  $a \in T$  и  $S$  — столь малый круг с центром в точке  $a$ , что  $\bar{S} \subset T$ . По оценке теоремы 1  $\sup_{x \in \bar{S}} \|u(x)\| + C_3 < \infty$ . Тогда согласно неравенству



$$|F_{1z}(u, \varphi)| \leq \frac{3|\lambda + 3\mu|}{2} \|u\| \cdot \|\varphi\| \leq \bar{C}_4 \|\varphi\| \quad (9)$$

$$C_4 = \frac{3|\lambda + 3\mu|}{2} C_3, \quad C_4 < \infty.$$

Следовательно,  $F_{1z}(u(x), \varphi)$  есть непрерывный линейный функционал по  $\varphi$ . Поэтому согласно лемме 1 существует  $v \in \dot{H}_2^1(D)$  (единственное!), удовлетворяющее (6) для всех  $\varphi \in \dot{H}_2^1(D)$ ; при этом в случае  $\varphi = v$  получим  $m\|v\|^2 \leq C_4\|v\|$  или  $\|v\| \leq \frac{C_4}{m}$ .

Пусть  $\gamma(x)$  — любая спрямляемая дуга в  $S$ , соединяющая точки  $x_0$  и  $x$  из  $S$ . Положим

$$w(x) = (u(x_0) + \int_{\gamma(x)} v(\sigma) d\sigma). \quad (10)$$

Очевидно,  $\|w(x)\| \leq \|u(x_0)\| + \int_{\gamma(x)} \|v(\sigma)\| |d\sigma| \leq C_3 + \frac{C_4}{m} S(x) < \infty$ . Следовательно,  $w(x) \in \dot{H}_2^1(D)$ . При этом  $\frac{dw}{dx}(x) = v(x) \left( \frac{d}{dx} \right.$  вычисляются в точке  $x$  кривой  $\gamma$  только вдоль этой кривой).

Имеем:

$$\begin{aligned} F_x(w(x), \varphi) &= F_{x_0}(w(x_0), \varphi) + \int_{\gamma(x)} \frac{d}{d\sigma} F_\sigma(w(\sigma), \varphi) d\sigma = \\ &= F_{x_0}(u(x_0), \varphi) + \int_{\gamma(x)} \{F_0(v(\sigma), \varphi) + F_{1\sigma}(w(\sigma), \varphi)\} d\sigma = \\ &= (f, \varphi) - \int_{\gamma(x)} F_{1\sigma}(u(\sigma), \varphi) d\sigma + \int_{\gamma(x)} F_{1\sigma}(w(\sigma), \varphi) d\sigma. \end{aligned}$$

Вычитая (7), получим

$$F_x(w(x) - u(x), \varphi) = \int_{\gamma(x)} F_{1\sigma}(w(\sigma) - u(\sigma), \varphi) d\sigma.$$

Положим здесь  $\varphi(x) = w(x) - u(x)$ . Тогда

$$|F_x(\varphi(x), \varphi(x))| \leq \int_{\gamma(x)} |F_{1\sigma}(\varphi(\sigma), \varphi(\sigma))| |d\sigma|,$$

$$m\|\varphi(x)\|^2 \leq \frac{3}{2} \frac{|\lambda + 3\mu|}{2} \int_{\gamma(x)} \|\varphi(\sigma)\| |d\sigma| \|\varphi(x)\| \text{ согласно (9)}$$

или

$$\|\varphi(x)\| \leq \frac{3}{2} \frac{|\lambda + 3\mu|}{m} \int_{\gamma(x)} \|\varphi(\sigma)\| |d\sigma|.$$

Как отмечалось ранее,  $\|\varphi(x)\| = 0$ , откуда следует  $w(x) = u(x)$ . Итак, из (10) следует, что  $u(x) = u(x_0) + \int_{\gamma(x)} v(\sigma) d\sigma$  — аналитическая функция  $u(x)$  в точке  $a \in T$ , т. е. аналитическая функция  $x$  во всей области  $T$ , что и требовалось доказать.

§ 5. Теорема 3.  $u(x)$  разлагается в степенной ряд по степеням  $x$  в круге  $|x| < 1$ , сходящемся по норме  $\|\cdot\|$ :  $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k u_k$ . При

этом  $u_0, u_1, u_2, \dots$  являются обобщенными решениями следующей последовательности задач Дирихле:

$$\Delta u_0 = \frac{2}{\lambda + 3\mu} f, \quad \Delta u_k = \Delta u_{k-1} - 2 \sigma \partial' u_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

при нулевых граничных значениях.

Доказательство теоремы вытекает из оценок, получаемых из представления решения задачи Дирихле для уравнения Лапе в виде

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Здесь  $C$  есть положительно ориентированная окружность радиуса  $r, |z| < r < 1$ . Из этого представления получается

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k u_k + R_n(z).$$

Отметим только оценку остаточного члена, полученную простыми преобразованиями:

$$\|R_n(z)\| \leq \frac{2\sqrt{C}|z|^n}{|\lambda + 3\mu| r^{n-1} (r - |z|) (1 - r)} L,$$

$$L = \begin{cases} \left[ \int_D |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} (\text{diam } D < \infty), \\ \left[ \int_D |x - a|^4 |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} (\text{diam } D = \infty, \bar{D} \neq R^2, a \in R^2 \setminus \bar{D}). \end{cases}$$

Подобная теорема для классических решений доказана в [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лопатинский Я. Б. Теор. и прикл. мат., вып. 1. Львов, 1962.

Институт прикладной  
математики (г. Киев)

Поступило 19. VII 1971

Г. В. Гончарова

Еластикијјет нээријјэсинин икинчи эсас мэсэлэси  
һәллинин бә'зи хүсусијјетләри

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда мүстәви еластикијјет нээријјэсинин Ләме тәнликләри үчүн Дирихле мэсэләсинә бахылмышдыр.

Еластикијјет нээријјэсинин икинчи эсас мэсэләси үчүн һәллин параметрдән аналитик асылылығы исбат едилмишдир.



М.-Б. А. БАБАЕВ

## О СВОЙСТВАХ НАИЛУЧШЕЙ ПРИБЛИЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Изучение свойств наилучшей приближающей функции в приближении функций многих переменных суммами функций меньшего числа переменных затрагивается в ряде работ [1—10].

Пусть комплексная функция  $\Phi(z_1, \dots, z_n)$  определена на множестве  $Q$   $n$ -мерного комплексного евклидова пространства  $E_n(z_1, \dots, z_n)$ . Обозначим через  $s_1, \dots, s_m$  некоторые группы чисел, составленные из натуральных чисел  $1, \dots, n$ . Приближение ведется суммами  $\sum_{v=1}^m \omega_v(z_{s_v})$ , где  $z_{s_v}$  — группы переменных, имеющих индексами натуральные числа группы  $s_v$ , а функции  $\omega_v(z_{s_v})$  определены на проекциях множества  $Q$  на пространства  $E_{s_v}(z_{s_v})$ .

Наилучшее приближение функции  $\Phi(z_1, \dots, z_n) = \Phi(P)$  посредством сумм вида  $\sum_{v=1}^m \omega_v(z_{s_v})$  определяется через

$$E_{s_{1,m}}^T(\Phi) = \inf_{\sum_{v=1}^m \omega_v} \rho \left[ \Phi(P), \sum_{v=1}^m \omega_v(z_{s_v}) \right]_T,$$

где

$$\rho[\Phi, G] = \|\Phi - G\|_T.$$

Под нормой  $\|\Phi\|_T$  будем подразумевать произвольную из норм

$$\left. \begin{aligned} \|\Phi\|_* &= \max \left\{ \sup_{P \in Q} |\operatorname{Re} \Phi|, \sup_{P \in Q} |\operatorname{Im} \Phi| \right\}, \\ \|\Phi\| &= \sup_{P \in Q} |\Phi(P)| = \sup_{P \in Q} [(\operatorname{Re} \Phi)^2 + (\operatorname{Im} \Phi)^2]^{1/2}, \\ \|\Phi\|^* &= \sup_{P \in Q} |\operatorname{Re} \Phi(P)| + \sup_{P \in Q} |\operatorname{Im} \Phi(P)|. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В пространствах с нормами (1) наилучшее приближение обозначим соответственно через  $E_{s_{1,m}}^*(\Phi)$ ,  $E_{s_{1,m}}(\Phi)$ ,  $E_{s_{1,m}}^*(\Phi)$ .

Определим модуль непрерывности функции  $f(P)$  относительно некоторой группы переменных  $z_{s_v}$  следующим образом:

$$\omega_{r_s}[f; \delta]_{T, T_1} = \sup_{\substack{P \in Q \\ \left[ \begin{smallmatrix} z'_{r_s} \\ z''_{r_s} \end{smallmatrix} \right]_T < \delta}} \|f(P/z'_{r_s}) - f(P/z''_{r_s})\|_T,$$

где индексы  $T$  и  $T_1$  независимо друг от друга указывают одну из норм  $\|\cdot\|_*$ ,  $\|\cdot\|$  и  $\|\cdot\|^*$ .

Нами изучается связь между модулями непрерывности приближаемой и наилучшей приближающей функций. Такая связь в ранее описанном нами сравнительно частном случае, когда множества переменных являющихся аргументами функций приближающей суммы, не пересекаются [7], не рассматривалась.

Обозначим через  $Q_1$  проекцию множества  $Q$  на плоскость  $z_1$ ,  $i = \overline{1, n}$  и через  $\tilde{Q} = [Q_1, \dots, Q_n]$   $n$ -мерный "параллелепипед". Пусть  $M/N$  есть разность множеств  $M$  и  $N$ ;  $(P/z_{s_v}^-)$  означает, что все переменные точки  $P$ , кроме переменных  $z_{s_v}$ , зафиксированы,  $(P/z_{s_v}^0)$  — переменные группы  $z_{s_v}$  зафиксированы.

**Теорема 1.** Пусть  $\Phi(P)$  — непрерывная ограниченная функция и выполняется одно из следующих условий:

а)  $\tilde{Q}$  — замкнутый параллелепипед пространства  $E_n$ ,  $\left\{ \sum_{v=1}^m \omega_v(z_{s_v}) \right\}$  —

класс непрерывных функций.

б)  $Q$  — произвольное замкнутое множество пространства  $E_n$ ,  $\left\{ \sum_{v=1}^m \omega_v(z_{s_v}) \right\}$  — класс равномерно ограниченных непрерывных функций.

Тогда существует наилучшая приближающая  $\sum_{v=1}^m \omega_v^*(z_{s_v}^-)$  в смысле

$\|\cdot\|_*$  такая, что модуль непрерывности каждой функции  $\omega_v^*(z_{s_v}^-)$  по произвольной группе переменных  $z_{s_v}$  ( $z_{s_v}^-$  не являющихся аргументами функций  $\sum_{v \neq \mu}^m \omega_v^*$ ), не хуже, чем  $\Phi(P)$ , т. е. справедливы соотношения

$$\omega_{\mu r}^*[\omega_{s_v}^*(z_{s_v}^-); \delta]_{T, T_*} \leq \omega_{\mu r}^*[\Phi(P); \delta]_{T, T_*}. \quad (2)$$

**Доказательство.** В силу теорем существования (теоремы 5 и 6 из [10]) имеется функция  $\sum_{v=1}^m \omega_v^*(z_{s_v}^-)$ , удовлетворяющая условию

$$\rho \left[ \Phi, \sum_{v=1}^m \omega_v^* \right]_* = E_{s_{1,m}}^*(\Phi).$$

Определим функцию

$$\omega_1^*(z_{s_1}^-) = \omega_{1,1}^*(z_{s_1}^-) + i \omega_{1,2}^*(z_{s_1}^-).$$

где

$$\omega_{1,1}^*(z_{s_1}^-) = \frac{1}{2} \left\{ \sup_{(P/z_{s_1}^-)} \operatorname{Re} \left[ \Phi - \sum_{v=2}^m \omega_v^* \right] + \inf_{(P/z_{s_1}^-)} \operatorname{Re} \left[ \Phi - \sum_{v=2}^m \omega_v^* \right] \right\},$$

$$\omega_{1,2}^*(z_{s_1}^-) = \frac{1}{2} \left\{ \sup_{(P/z_{s_1}^-)} \operatorname{Im} \left[ \Phi - \sum_{v=2}^m \omega_v^* \right] + \inf_{(P/z_{s_1}^-)} \operatorname{Im} \left[ \Phi - \sum_{v=2}^m \omega_v^* \right] \right\}.$$

Докажем, что  $\omega_1^*(z_{s_1}^-) + \sum_{v=2}^m \omega_v^*(z_{s_v}^-)$  также является наилучшей приближающей функцией  $\Phi(P)$ .

В силу определения наилучшей приближающей функции

$$N = \rho \left[ \Phi, \omega_1^* + \sum_{v=2}^m \omega_v^* \right]_* \geq E_{s_{1,m}}(\Phi). \quad (3)$$

Не умаляя общности, положим

$$N = \sup_{\rho \in Q} \left| \operatorname{Re} \left[ \Phi - \omega_1^* - \sum_{v=2}^m \omega_v^* \right] \right|.$$

Возьмем некоторую фиксированную  $z_{s_1}^{\circ}$  и введем обозначения

$$f(P/z_{s_1}^{\circ}) = \operatorname{Re} \left[ \Phi - \sum_{v=2}^m \omega_v^* \right] (P/z_{s_1}^{\circ}),$$

$$l = \sup_{\left( P/z_{s_1}^{\circ} \right)} \left| f(P/z_{s_1}^{\circ}) - \operatorname{Re} \omega_1^*(z_{s_1}^{\circ}) \right|.$$

Тогда

$$l = \sup_{\left( P/z_{s_1}^{\circ} \right)} \left| f(P/z_{s_1}^{\circ}) - \omega_{1,1}^*(z_{s_1}^{\circ}) \right|.$$

Нетрудно догадаться, что для произвольного вещественного числа  $a$

$$l \leq \sup_{\left( P/z_{s_1}^{\circ} \right)} \left| f(P/z_{s_1}^{\circ}) - a \right| = q.$$

В самом деле, при

$$a > \omega_{1,1}^*(z_{s_1}^{\circ})$$

имеем

$$q = \inf_{\left( P/z_{s_1}^{\circ} \right)} \left| f(P/z_{s_1}^{\circ}) - a \right| > l,$$

а если

$$a < \omega_{1,1}^*(z_{s_1}^{\circ}), \text{ то } q = \left| \sup_{\left( P/z_{s_1}^{\circ} \right)} f(P/z_{s_1}^{\circ}) - a \right|$$

и опять  $q > l$ .

Исходя из вышеизложенного, полагая  $a = \operatorname{Re} \omega_1^*(z_{s_1}^{\circ})$ , получим

$$\begin{aligned} l &= \sup_{\left( P/z_{s_1}^{\circ} \right)} \left| \operatorname{Re} \left[ \Phi - \omega_1^* - \sum_{v=2}^m \omega_v^* \right] (P/z_{s_1}^{\circ}) \right| \leq \\ &\leq \sup_{\left( P/z_{s_1}^{\circ} \right)} \left| \operatorname{Re} \left[ \Phi - \sum_{v=1}^m \omega_v^* \right] (P/z_{s_1}^{\circ}) \right| = \\ &= \rho \left[ \operatorname{Re} \Phi(P), \operatorname{Re} \sum_{v=1}^m \omega_v^*(z_{s_v}^{\circ}) \right] \leq E_{s_{1,m}}(\Phi), \end{aligned}$$

что дает

$$N = \sup_{z_{s_1}^{\circ}} l \leq E_{s_{1,m}}(\Phi), \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получаем

$$\rho \left[ \Phi, \omega_1^* + \sum_{v=2}^m \omega_v^* \right]_* = E_{s_{1,m}}(\Phi),$$

т. е. функция

$$\omega_1^*(z_{s_1}^{\circ}) + \sum_{v=2}^m \omega_v^*(z_{s_v}^{\circ})$$

также является наилучшей приближающей функции  $\Phi(P)$ . Определим теперь последовательно функции

$$\omega_{\mu}^*(z_{s_{\mu}}^{\circ}) = \omega_{\mu,1}^*(z_{s_{\mu}}^{\circ}) + i \omega_{\mu,2}^*(z_{s_{\mu}}^{\circ}),$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{\mu,1}^*(z_{s_{\mu}}^{\circ}) &= \frac{1}{2} \left\{ \sup_{\left( P/z_{s_{\mu}}^{\circ} \right) \in Q} \operatorname{Re} \left[ \Phi - \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* - \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right] + \right. \\ &\quad \left. + \inf_{\left( P/z_{s_{\mu}}^{\circ} \right) \in \Phi} \operatorname{Re} \left[ \Phi - \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* - \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right] \right\}, \\ \omega_{\mu,2}^*(z_{s_{\mu}}^{\circ}) &= \frac{1}{2} \left\{ \sup_{\left( P/z_{s_{\mu}}^{\circ} \right) \in Q} \operatorname{Im} \left[ \Phi - \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* - \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right] + \right. \\ &\quad \left. + \inf_{\left( P/z_{s_{\mu}}^{\circ} \right) \in Q} \operatorname{Im} \left[ \Phi - \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* - \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right] \right\}. \end{aligned}$$

Проведя рассуждения, аналогичные вышеприведенному последовательно для  $\mu = 2, 3, \dots, m$ , получим функцию  $\sum_{v=1}^m \omega_v^*(z_{s_v}^{\circ})$ , также являющуюся наилучшей приближающей функции  $\Phi(P)$ .

Покажем, что каждая функция суммы  $\sum_{v=1}^m \omega_v^*(z_{s_v}^{\circ})$  имеет модуль непрерывности, обладающей свойством (2). Пусть  $z_{\mu r}^- \in z_{s_{\mu}}^-$ . Имеем

$$\omega_{\mu r}^-[\omega_{\mu}^*, \delta]_{T,*} = \sup_{\left[ z_{\mu r}^-, z_{\mu r}^- \right]_{T,*} < \delta} \left\| \omega_{\mu}^*(z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-}) - \omega_{\mu}^*(z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-}) \right\|_*.$$

Для определенности положим

$$\omega_{\mu r}^-[\omega_{\mu}^*, \delta]_{T,*} = \sup_{\left[ z_{\mu r}^{'-}, z_{\mu r}^{'-} \right]_{T,*} < \delta} \sup_{\left( z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-} \right)} \left| \operatorname{Re} \left[ \omega_{\mu}^*(z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-}) - \omega_{\mu}^*(z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-}) \right] \right|.$$

Тогда в силу определения  $\omega_{\mu}^*(z_{s_{\mu}}^-)$  будем иметь

$$\omega_{\mu r}^-[\omega_{\mu}^*, \delta]_{T,*} = \sup_{\left[ z_{\mu r}^{'-}, z_{\mu r}^{'-} \right]_{T,*} < \delta} \left\| \omega_{\mu,1}^*(z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-}) - \omega_{\mu,1}^*(z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-}) \right\|_* = \omega_{\mu r}^-[\omega_{\mu,1}^*, \delta]_{T,*}. \quad (5)$$

В силу непрерывности функций  $\Phi(P)$  и

$$\sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^*(z_{s_v}^-) + \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^*(z_{s_v}^-)$$

и замкнутости множества  $Q$  для каждой фиксированной группы  $(z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-})$  и  $(z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-})$  существуют точки  $[P^{\circ} | (z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-})]$  и  $[P^{\circ} | (z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-})]$  такие, что

$$A = A(z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-}) = \left[ P | \left( z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-} \right) \right] \operatorname{Re} \left\{ \left[ \Phi - \left( \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* + \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right) \right] \left[ P | \left( z_{s_{\mu}}^- | z_{\mu r}^{'-} \right) \right] \right\} =$$



$$= \operatorname{Re} \left\{ \left[ \Phi - \left( \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* + \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right) \right] \left[ P^0(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*) \right] \right\};$$

$$D = D(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*) = \sup_{P \left( \left| \frac{z_{s_\mu}^*}{z_{\mu_r}^*} \right| \right)} \operatorname{Re} \left\{ \left[ \Phi - \left( \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* + \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right) \right] \left[ P(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*) \right] \right\} =$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ \left[ \Phi - \left( \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* + \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right) \right] \left[ P^{\circ\circ}(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*) \right] \right\}.$$

Очевидно,

$$A \geq \operatorname{Re} \left\{ \left[ \Phi - \left( \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* + \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right) \right] \left[ P^0(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*) \right] \right\} = B(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*) = B;$$

$$C = C(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ \Phi - \left( \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* + \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right) \right] \left[ P^0(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*) \right] \right\} \leq D;$$

$$\left. \begin{matrix} A \geq B \\ D \geq C \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} A - D \leq A - C \\ A - D \geq B - D \end{matrix} \right\} \Rightarrow B - D \leq A - D \leq A - C,$$

что дает

$$|A - D| \leq \max\{|A - C|, |B - D|\}. \quad (6)$$

Учитывая особенность группы переменных  $z_{\mu_r}^* \subset z_{s_\mu}^*$ , имеем

$$|A - C| = |\operatorname{Re} \Phi[P^0(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*)] - \operatorname{Re} \Phi[P^0(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*)]|, \quad (7)$$

$$|B - D| = |\operatorname{Re} \Phi[P^{\circ\circ}(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*)] - \operatorname{Re} \Phi[P^{\circ\circ}(z_{s_\mu}^* | z_{\mu_r}^*)]|. \quad (8)$$

Таким образом, пользуясь (6)–(8), получаем, что существует фиксированная совокупность переменных  $(P^* | z_{s_\mu}^*)$  такая, что

$$\omega_{\mu_r}^- \left[ \sup_{P(z_{s_\mu}^*)} \operatorname{Re} \left( \Phi - \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* - \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right); \delta \right]_{T,*} \leq$$

$$\leq \left[ \sup_{P(z_{s_\mu}^*)} \left\| \operatorname{Re} \Phi[P^* | z_{s_\mu}^*] - \operatorname{Re} \Phi[P^* | z_{s_\mu}^*] \right\| \right]_{T,*} =$$

$$= \omega_{\mu_r}^- [\operatorname{Re} \Phi(P^* | z_{s_\mu}^*); \delta]_{T,*} \leq \omega_{\mu_r}^- [\Phi; \delta]_{T,*}. \quad (9)$$

Аналогично устанавливается

$$\omega_{\mu_r}^- \left\{ \inf_{P(z_{s_\mu}^*)} \operatorname{Re} \left[ \Phi - \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* - \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right]; \delta \right\}_{T,*} \leq \omega_{\mu_r}^- [\Phi; \delta]_{T,*}. \quad (10)$$

В силу (9)–(10)

$$\omega_{\mu_r}^- [\omega_{\mu_r}^*; \delta]_{T,*} \leq \frac{1}{2} \omega_{\mu_r}^- \left\{ \sup_{P(z_{s_\mu}^*)} \operatorname{Re} \left( \Phi - \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* - \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right); \delta \right\}_{T,*} +$$

$$+ \frac{1}{2} \omega_{\mu_r}^- \left\{ \inf_{P(z_{s_\mu}^*)} \operatorname{Re} \left( \Phi - \sum_{v=1}^{\mu-1} \omega_v^* - \sum_{v=\mu+1}^m \omega_v^* \right); \delta \right\}_{T,*} \leq \omega_{\mu_r}^- [\Phi; \delta]_{T,*}.$$

Учитывая (5), получим

$$\omega_{\mu_r}^- [\omega_{\mu_r}^*; \delta]_{T,*} \leq \omega_{\mu_r}^- [\Phi; \delta]_{T,*}.$$

В силу произвольности  $\mu = 1, 2, \dots, m$ , теорема доказана.

Следствие 1. При условиях теоремы 1 справедливо

$$\omega_{\mu_r}^- [\omega_{\mu_r}^*; \delta]_{T,*} \leq \omega[\Phi; \delta]_{T,*}, \quad \mu = 1, \dots, m,$$

где  $\omega(\Phi; \delta)$  — полный модуль непрерывности функции  $\Phi$ .

Следствие 2. При условиях теоремы 1, если аргументы некоторых функций  $\omega_r$  не являются аргументами других функций  $\omega_r \neq \omega_r$ , существует наилучшая приближающая  $\sum_{v=1}^m \omega_v^*$  такая, что модуль непрерывности этих функций  $\omega_r^*$  не хуже, чем модуль непрерывности приближаемой функции  $\Phi(P)$ .

Теорема 2. При условиях теоремы 1 существует наилучшая приближающая  $\sum_{v=1}^m \omega_v^*$  в смысле  $\|\cdot\|$  такая, что модуль непрерывности каждой функции  $\omega_{\mu_r}^*(z_{s_\mu}^*)$  по произвольной группе переменных  $z_{\mu_r}^* \subset z_{s_\mu}^*$ , не являющихся аргументами функции  $\sum_{v \neq \mu} \omega_v^*$  удовлетворяет соотношению

$$\omega_{\mu_r}^- [\omega_{\mu_r}^*; \delta]_{T,*} < \omega_{\mu_r}^- [\operatorname{Re} \Phi; \delta] + \omega_{\mu_r}^- [\operatorname{Im} \Phi; \delta]. \quad (11)$$

Объем статьи не позволяет привести доказательство теоремы 2. В частном случае, когда функции и переменные вещественны,  $m = n$  и  $s_v = v$ , из каждой из теорем 1 и 2 следует теорема А. Н. Колмогорова ([1], стр. 252, теорема 4). При условиях теоремы 2 справедливы Следствие 3.

$$\omega_{\mu_r}^- [\omega_{\mu_r}^*; \delta]_{T,*} \leq \omega[\operatorname{Re} \Phi; \delta] + \omega[\operatorname{Im} \Phi; \delta],$$

где  $\omega[f; \delta]_{T,*}$  означает полный модуль непрерывности функции  $f$ .

Следствие 4.

$$\omega_{\mu_r}^- [\omega_{\mu_r}^*; \delta]_{T,*} \leq 2\omega_{\mu_r}^- [\Phi; \delta]_{T,*} \leq 2\omega[\Phi; \delta]_{T,*}.$$

Следствие 5. Если в приближающей сумме аргументы некоторых функций  $\omega_r$  не участвуют в качестве аргументов функции  $\sum_{v \neq r} \omega_v^*(z_{s_r}^*)$ ,

то существует наилучшая приближающая  $\sum_{v=1}^m \omega_v^*$  такая, что модули непрерывности этих  $\omega_r^*$  также будут удовлетворять (11).

#### ЛИТЕРАТУРА

- Офман Ю. П. „Изв. АН СССР“, 1961, № 2.
- Бабаев М.-Б. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1962.
- Бабаев М.-Б. А. О наилучшем степенном приближении функций  $n$  переменных функциями вида  $\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n)$ . В сб. „Исследование по современным проблемам конструктивной теории функций“. Баку, 1965.
- Брудный Ю. А. Исследования по теории локального наилучшего приближения. Докт. дисс. Днепропетровск, 1965.
- Бабаев М.-Б. А. Две теоремы о свойствах наилучшей приближающей функции. В сб. „Функциональный анализ“. Баку, 1967.
- Бабаев М.-Б. А. „ДАН Азерб. ССР“, 23:2 (1967).
- Хавинсон С. Я. „Изв. АН СССР“, 33 (1969).
- Бабаев М.-Б. А. О приближении функций многих переменных суммами функций меньшего числа переменных в комплексной области. В сб. „Специальные вопросы дифференциальных уравнений и теории функций“. Баку, 1970.
- Вайндинер А. И. „ДАН СССР“, 192, 1970, № 3.

10. Бабаев М.-Б. А. Некоторые вопросы общего случая приближения функций многих переменных суммами функций меньшего числа переменных в комплексной области. В сб. "Функциональный анализ и его приложения". Баку, 1971.

Институт математики  
и механики АН Азерб. ССР

Поступило 11. XI 1971

М.-Б. Ә. Бабајев

## Эн јахшы јахынлашдыран функцијанын хассэләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда комплекс областда чоҳдәјишәнли функцијаларын дәјишәнләринин сајы аз олан функцијаларын чәмләрилә јахынлашдырылмасынын үмуми һалында эн јахшы јахынлашдыран функцијанын хассэләри өјрәнилмишдир.

Эн јахшы јахынлашдыран чәмин функцијаларынын кәсилмәзлик модулары јахынлашдырылан функцијанын кәсилмәзлик модулары илә гижмәтләндирилмишдир

М.-В. А. Babaev

## On properties of best approximating function

SUMMARY

The problem of approximating to a function of complex variables  $\Phi(z_1, \dots, z_n)$  by sums of functions of fewer variables on the set  $Q$  in  $n$ -dimensional complex Euclidean space in the sense of  $\|\cdot\|_T$  norm is considered. The  $\|\cdot\|_T$  norm includes different variations of  $C$  norm.

Connection between modulus of continuity of approximated and best approximating functions is investigated.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ  
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1972, № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
Серия физико-технических и математических наук, 1972, № 3

А. С. МАХМУДОВ И Р. Р. АХУНДОВ

## О $(\alpha_n, p)$ ПОЧТИ-ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Как известно [1], система действительных функций  $\{\Phi_n(x)\}$ , определенных на отрезке  $[a, b]$  и принадлежащих пространству  $L^2(a, b)$ , называется почти-ортогональной на отрезке  $[a, b]$ , если сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{m,n}^2,$$

где

$$a_{m,n} = \int_a^b \Phi_m(x) \Phi_n(x) dx \text{ при } m \neq n \text{ и } \int_a^b \Phi_n^2(x) dx = 1 \\ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Определение 1. Пусть  $0 < p < 2$ ,  $\alpha_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$ ,  $f_n(x) \in L^2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Положим

$$\int_a^b f_m(x) \cdot f_n(x) dx = \begin{cases} \lambda_n^2 & \text{при } m = n, \\ a_{m,n} & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Систему  $\{f_n(x)\}$  назовем  $(\alpha_n, p)$ -почти-ортогональной системой на отрезке  $[a, b]$ , если сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{2-p} \lambda_m^{-p} \cdot \left( \sum_{n=m+1}^{\infty} \alpha_n^{2-p} \lambda_n^{-p} |a_{m,n}|^p \right).$$

Очевидно, что если система функций  $\{f_n(x)\}$  почти-ортогональна на отрезке  $[a, b]$ , то она на этом отрезке  $(\alpha_n, p)$  почти-ортогональна для любой последовательности  $\alpha_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$  и для любого числа  $p$ ,  $0 < p < 2$ .

В данной статье мы рассматриваем некоторые вопросы для  $(\alpha_n, p)$  почти-ортогональных систем в случае, когда  $1 \leq p < 2$ .

## 1. Неравенство Бесселя для $(\alpha_n, p)$ почти-ортогональных систем

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть  $\alpha_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$ ,  $1 \leq p < 2$  и система



функций  $\{f_n(x)\}$  пространства  $L^2(a, l)$   $(a_n, p)$  почти-ортogonalна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда для любой функции  $f(x) \in L^2$  имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-p} \alpha_n^{2-p} |a_n|^p \leq (\beta \cdot N)^{\frac{p}{2}}, \quad (1)$$

где

$$N = \int_a^b f^2(x) dx, \quad a_n = \int_a^b f(x) f_n(x) dx, \\ \beta = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \right)^{\frac{2-p}{2}} + 2 \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{-p} \alpha_m^{2-p} \cdot \left( \sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n^{-p} \alpha_n^{2-p} |a_{m,n}|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Неравенство (1) в дальнейшем будем называть неравенством Бесселя для  $(a_n, p)$  почти-ортogonalных систем  $\{f_n(x)\}$ .

Доказательство неравенства Бесселя.

Способ 1. Случай  $1 < p < 2$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $a_n \neq 0$  для всех  $n$ . Пусть  $n \geq 1$  — любое фиксированное натуральное число. Положим

$$B_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-p} \alpha_k^{2-p} |a_k|^p.$$

Тогда в силу неравенства Гёльдера

$$B_n = \int_a^b f(x) \cdot \left[ \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-p} \alpha_k^{2-p} |a_k|^{p-2} a_k f_k(x) \right] dx \leq \\ \leq N^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-p} \alpha_k^{2-p} |a_k|^{p-2} a_k f_k(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ = N^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-(1-p)} \alpha_k^{-(2-p)} \cdot |a_k|^{2(p-1)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{s-1} \lambda_m^{-p} \alpha_m^{2-p} \cdot |a_m|^{p-2} \cdot a_m \cdot \sum_{k=m+1}^s \lambda_k^{-p} \alpha_k^{2-p} \cdot |a_k|^{p-2} \times \right. \\ \left. \times a_k \cdot a_{m,k} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq (\beta \cdot N)^{\frac{1}{2}} \cdot B_n^{\frac{p-1}{p}},$$

отсюда  $B_n \leq (N \beta)^{\frac{1}{2}}$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-p} \alpha_n^{2-p} |a_n|^p \leq (\beta \cdot N)^{\frac{p}{2}}.$$

Случай  $p=1$  доказывается аналогично.

Способ 2. При доказательстве неравенства (1) этим способом нам необходима следующая

Лемма. Пусть  $1 \leq p \leq 2$ ,  $0 \leq x < \infty$ ,  $M > 0$ ,  $R > 0$ ,

$$\psi_p(x) = 2R^{\frac{2-p}{2}} x - M^{\frac{2-p}{p}} \cdot R^{2-p} x^{\frac{2-p}{p}}.$$

Для того, чтобы имело место неравенство  $\psi_p(x_0) \leq MR$ , необходимо и достаточно, чтобы  $x_0 \leq MR^{\frac{p}{2}}$ .

Эту лемму принимаем без доказательства. Рассмотрим интеграл

$$I_n = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx,$$

где

$$S_n(x) = \beta^{-\frac{p}{2}} \cdot N^{\frac{2-p}{2}} \cdot \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-p} \alpha_k^{2-p} |a_k|^{p-2} a_k f_k(x).$$

Можно показать, что интеграл  $I_n$  удовлетворяет неравенству

$$I_n \leq N - 2\beta^{-\frac{p}{2}} \cdot N^{\frac{2-p}{2}} \cdot B_n + N^{2-p} B_n^{\frac{2-p}{p}} \beta^{1-p},$$

из которого имеем

$$2B_n N^{\frac{2-p}{2}} - N^{2-p} B_n^{\frac{2-p}{p}} \beta^{1-p} \leq N \beta^{\frac{p}{2}}. \quad (2)$$

В лемме положим  $M = \beta^{\frac{p}{2}}$ ,  $R = N$ ,  $x_0 = B_n$ . Тогда в силу (2)

$$\psi_p(B_n) \leq N \cdot \beta^{\frac{p}{2}}.$$

Поэтому в силу леммы

$$B_n \leq (\beta \cdot N)^{\frac{p}{2}}. \quad (3)$$

Неравенство (1) следует из неравенства (3) при  $n \rightarrow \infty$ . Из (1) вытекает

Следствие. Пусть система функций  $\{\Phi_n(x)\}$  пространства  $L^2(a, b)$  почти-ортogonalна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда для любой функции  $f(x) \in L^2$  имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \alpha N, \quad (4)$$

где

$$\alpha = 1 + 2 \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{m,n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Мы уже отметили, что для почти-ортogonalной системы  $\{\Phi_n(x)\}$  ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{2-p} \sum_{n=m+1}^{\infty} \alpha_n^{2-p} |a_{m,n}|^p$$

сходится для любой последовательности  $\alpha_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$  и для любого числа  $p$ ,  $0 < p < 2$ .

В силу этого, применяя неравенство Гёльдера, из (1) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{2-p} |a_n|^p \leq (\alpha N)^{\frac{p}{2}} \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \right)^{\frac{2-p}{2}} \quad (1 \leq p < 2). \quad (5)$$

Из (5) следует, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$ . Полагая в (5)  $\alpha_n = |a_n|$ , получаем неравенство (4).

II. Теорема Рисса—Фишера для  $(a_n, p)$  почти-ортogonalной системы

Теорема 2. Пусть  $1 \leq p < 2$ ,  $\alpha_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$  и система

действительных функций  $\{f_n(x)\}$  из пространства  $L^2(a, b)$   $(\alpha_n, p)$  почти-ортogonalна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда, если последовательность чисел  $\{a_k \neq 0\}$  такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-p} \alpha_n^{2-p} |a_n|^p < \infty,$$

то существует функция  $f(x) \in L^2$ , для которой справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n |\lambda_n^{2-p} \alpha_n^{2-p} |a_n|^{p-2} a_n - \int_a^b f(x) f_n(x) dx|^p \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-p} \alpha_n^{2-p} |a_n|^p \right)^{p-1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} (\lambda_m^{-p} \alpha_m^{2-p} \beta_n + \beta_m \lambda_n^{-p} \alpha_n^{2-p}) \cdot |a_{m,n}|^p$$

для всех последовательностей  $\{\beta_n\}$ ,  $\beta_n > 0$ , удовлетворяющих условию

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_n \lambda_m^{-p} \alpha_m^{2-p} + \beta_m \lambda_n^{-p} \alpha_n^{2-p} \right) |a_{m,n}|^p < \infty.$$

Эту теорему принимаем без доказательства.

Следствие. Пусть  $\{\Phi_n(x)\}$  — почти-ортogonalная система функций. Если последовательность чисел  $\{a_k\}$  такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

то существует функция  $f(x) \in L^2$ , для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n - \int_a^b f(x) \Phi_n(x) dx \right)^2 \leq 2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{m,n}^2 \right).$$

Отметим, что следствия из теорем 1 и 2 для почти-ортogonalных систем впервые были доказаны Р. Беллманом [1].

### III. $(d_n, q)$ — абсолютная сходимость $(\alpha_n, p)$ почти-ортogonalных рядов

Определение. Если  $0 < p < 2$ ,  $\alpha_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$  и система функций  $\{f_n(x)\}$   $(\alpha_n, p)$  почти-ортogonalна на отрезке  $[a, b]$ , то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (6)$$

будем называть  $(\alpha_n, p)$  — почти-ортogonalным рядом. При этом, если  $f(x) \in L^2$  и

$$a_n = \int_a^b f(x) f_n(x) dx,$$

то ряд (6) называется рядом Фурье функции  $f(x)$  по  $(\alpha_n, p)$  почти-ортogonalной системе  $\{f_n(x)\}$ .

Пусть  $1 \leq p < 2$ ,  $0 < q < 2$ ,  $d_n > 0$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty$ . Тогда из неравенства Бесселя для  $(\alpha_n, p)$  почти-ортogonalных систем следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-q} \lambda_n^{-\frac{pq}{2}} \alpha_n^{\frac{(2-p)q}{2}} |a_n|^{\frac{pq}{2}} \quad (7)$$

сходится для любой функции  $f(x) \in L^2$ , где

$$a_n = \int_a^b f(x) f_n(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Определение. Пусть  $0 < p < 2$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (8)$$

есть ряд Фурье функции  $f(x) \in L^2$  по  $(\alpha_n, p)$  почти-ортogonalной системе

$$\{f_n(x)\}, \quad 0 < q < 2, \quad d_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty.$$

Тогда, если ряд (7) сходится, то будем называть ряд (8)  $(d_n, q)$  абсолютно сходящимся.

Теорема 3. Пусть

$$1 \leq p < 2, \quad \alpha_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty, \quad 0 < q < 2, \quad d_n > 0,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$ , система  $\{f_n(x)\}$   $(\alpha_n, p)$  почти-ортogonalна на отрезке  $[a, b]$ ,  $m \geq 1$ ,  $p_n > 0$ ,  $g_n > 0$ ,

$$g_n \cdot \sum_{k=m}^{\infty} p_k > \gamma > 0,$$

$$\sum_{k=r}^{\infty} d_k^2 g_k^{\frac{2}{2-q}} \leq q_r > 0, \quad r = m, m+1, \dots,$$

$$f(x) \in L^2, \quad a_n = \int_a^b f(x) f_n(x) dx.$$

Положим

$$K_m = R_m(f) = \left\{ N^{\frac{p}{2}} - \beta^{-\frac{p}{2}} \cdot B_{m-1} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда, если величина  $K_m$  такая, что ряд

$$\sum_{k=m}^{\infty} p_k q_k^{\frac{2-q}{2}} K_k^q$$

сходится, то ряд Фурье (8) функции  $f(x)$  по  $(\alpha_n, p)$  почти-ортogonalной системе  $\{f_n(x)\}$  сходится  $(d_n, q)$  абсолютно. Из теоремы 3 получаем

Теорема 4. Пусть система функций  $\{\Phi_n(x)\}$  почти-ортogonalна на отрезке  $[a, b]$ ,  $0 < q < 2$ ,  $d_n > 0$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty, \quad m \geq 1, \quad p_n > 0, \quad g_n > 0, \quad g_n \cdot \sum_{k=m}^{\infty} p_k > \gamma > 0,$$

$$\sum_{k=r}^{\infty} d_k^2 g_k^{\frac{2}{2-q}} \leq q_r > 0, \quad r = m, m+1, \dots, \quad f(x) \in L^2 \text{ и}$$

$$a_n = \int_a^b f(x) \Phi_n(x) dx.$$

Положим

$$A_m = A_m(f) = \left\{ N - \alpha^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-1} a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$



Если величина  $A_m$  такая, что сходится ряд

$$\sum_{k=m}^{\infty} p_k q_k^{\frac{2-q}{2}} A_k^q,$$

то ряд Фурье (8) функции  $f(x)$  по почти-ортogonalной системе  $\{\Phi_n(x)\}$  сходится  $(d_n, q)$  абсолютно, т. е. сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-q} |a_n|^q.$$

Теорема 5. Пусть  $0 < q < 2$ ,  $\frac{q}{2} - 1 \leq \omega < \infty$ ,  $1 \leq p < 2$ ,

$\alpha_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$ , система  $\{f(x)\}$   $(\alpha_n, p)$  почти-ортogonalна

на отрезке  $[a, b]$ ,  $f(x) \in L^2$ ,  $a_n = \int_a^b f(x) f_n(x) dx$ . Тогда из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\omega - \frac{q}{2}} R_n^q \quad (9)$$

следует  $(n^{\frac{\omega}{2-q}}, q)$ -абсолютная сходимость ряда Фурье (8) функции  $f(x)$  по  $(\alpha_n, p)$  почти-ортogonalной системе  $\{f_n(x)\}$ , т. е. из сходимости ряда (9) следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\omega} \lambda_n^{-\frac{pq}{2}} \alpha_n^{\frac{(2-p)q}{2}} |a_n|^{\frac{pq}{2}}.$$

Теорема 6. Пусть  $0 < p < 2$ ,  $\frac{p}{2} - 1 \leq \omega < \infty$ , система функций  $\{\Phi_n(x)\}$  почти-ортogonalна на отрезке  $[a, b]$ ,  $f(x) \in L^2$ ,

$$a_n = \int_a^b f(x) \Phi_n(x) dx.$$

Тогда из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\omega - \frac{q}{2}} A_n^q$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\omega} |a_n|^q.$$

Отметим, что теорема 6 в случае, когда система  $\{\Phi_n(x)\}$  ортogonalна на отрезке  $[a, b]$ ,  $\omega = 0$ ,  $q = 1$ , была доказана С. Б. Стечкиным [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Качмаж С. и Штейнгауз Г. Теория ортogonalных рядов. ГИФМЛ, 1958.

Институт математики  
и механики АН Азерб. ССР

Поступило 15. X 1971

А. С. Махмудов, Р. Р. Ахундов

$(\alpha_n, p)$ -санки ортogonal системләр һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә  $(\alpha_n, p)$ -санки ортogonal системләрә тә'риф верилмиш, белә системләр үчүн Бессел бәрабәрсизлији, Рисс-Фишер теорем и вә  $(\alpha_n, p)$ -санки ортogonal сыраларын  $(d_n, q)$ -мүтләг жығылмасы һаггында теорем исбат олуишдур.

A. S. Makhmudov, R. R. Akhundov

ON  $(\alpha_n, p)$ -almost orthogonal systems

SUMMARY

In this paper we give the definition of  $(\alpha_n, p)$ -almost orthogonal systems and prove Bessel inequality and Riess-Fischer theorem for such systems.

Further  $(d_n, q)$ -absolute convergence of  $(\alpha_n, p)$ -almost orthogonal series is considered.

The results of the given paper are the generalizations of well-known results in this direction.

УДК 539.374

Б. М. МИРСАЛИМОВ

# О БИГАРМОНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОДНОРОДНОСТИ НАПРЯЖЕННОГО ПОЛЯ

Пусть бесконечное упруго-пластическое тело, находящееся в условиях плоской деформации, имеет круговое отверстие радиуса  $R$ , к контуру которого приложены постоянные внешние усилия:

$$\sigma_r = -p, \sigma_{\theta} = 0. \quad (1)$$

На бесконечности действуют напряжения, являющиеся полиномиальными функциями декартовых координат  $x$  и  $y$ . Под действием заданных усилий все круговое отверстие охвачено пластической зоной.

Будем считать, что в упругой зоне материал однородный, а в пластической он может быть и неоднородным, а также упрочняющимся. Напряжения в пластической зоне определяются непосредственно формой контура отверстия и граничной нагрузкой. Если функция напряжений в пластической зоне удовлетворяет бигармоническому уравнению, то наиболее общее распределение напряжений в пластической области будет иметь вид [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_r^p &= \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C, \\ \sigma_{\theta}^p &= -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + C, \\ \sigma_{r\theta}^p &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $A, B, C$  — постоянные величины.

В плоской задаче теории упругости компоненты тензора напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  определяются по формулам Колосова—Мусхелишвили [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} &= 2 [\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  — аналитические функции  $z = x + iy$ , которые в бесконечно удаленной точке ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m, \\ \Psi(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m. \end{aligned} \quad (4)$$

На неизвестном контуре  $L$ , разделяющем упругую и пластическую области, все напряжения непрерывны. Используя формулы

(2)–(4), получим граничную задачу для контура  $L$ :

$$4 \operatorname{Re} \Phi(z) = 2B \ln \bar{z} + 4(B+C), \quad (5)$$

$$\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z) = B \frac{\bar{z}}{z} - \frac{A}{z^2};$$

при  $z \rightarrow \infty$

$$\Phi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m,$$

$$\Psi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m.$$

Перейдем к параметрической плоскости комплексного переменного  $\zeta$  при помощи преобразования  $z = \omega(\zeta)$ . Аналитическая функция  $\omega(\zeta)$  задает конформное преобразование внешности единичного круга плоскости  $\zeta$  на внешность неизвестного контура  $L$  физической плоскости  $z$ ; она должна быть определена в процессе решения задачи. Обозначим

$$\Phi[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta), \quad \Psi[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta).$$

В принятых обозначениях на основании соотношений (5) краевая задача на параметрической плоскости  $\zeta$  для определения трех аналитических функций  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  и  $\omega(\zeta)$  запишется в виде:

$$4 \operatorname{Re} \varphi(\zeta) = 2B \ln \omega(\zeta) \bar{\omega}(\zeta) + 4(B+C), \quad (6)$$

$$\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = B \frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega(\zeta)} - \frac{A}{[\omega(\zeta)]^2}, \quad \text{при } |\zeta| = 1 \quad (7)$$

при  $\zeta \rightarrow \infty$

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1 c_0 \zeta + a_2 c_0^2 \zeta^2 + \dots + a_m c_0^m \zeta^m, \quad (8)$$

$$\psi(\zeta) = b_0 + b_1 c_0 \zeta + b_2 c_0^2 \zeta^2 + \dots + b_m c_0^m \zeta^m.$$

Решая задачу Дирихле (6) для функции  $\varphi(\zeta)$  и используя условие на бесконечности (8), находим

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= B \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} + B + C + a_1 c_0 \zeta - \bar{a}_1 c_0 \frac{1}{\zeta} + a_2 c_0^2 \zeta^2 - \\ &- \bar{a}_2 c_0^2 \frac{1}{\zeta^2} + \dots + a_m c_0^m \zeta^m - \bar{a}_m c_0^m \frac{1}{\zeta^m}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$c_0 = \exp \left\{ \frac{1}{B} [\operatorname{Re} a_0 - (B+C)] \right\}. \quad (10)$$

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\frac{\bar{\omega}(\zeta^{-1})}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = B \frac{\bar{\omega}(\zeta^{-1})}{\omega(\zeta)} - \frac{A}{[\omega(\zeta)]^2}, \quad (11)$$

справедливое в полной плоскости  $\zeta$  [3, 4].

Ищем решение функционального уравнения в виде

$$\omega(\zeta) = c_0 \zeta + c_1 \zeta^{-1} + c_2 \zeta^{-2} + \dots \quad (12)$$

Подставляя выражение (12) в функциональное уравнение (11), раскладывая все функции в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки и сравнивая члены с одинаковыми степенями  $\zeta$ , получим бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов  $c_k$ . После определения функции  $\omega(\zeta)$  из функционального уравнения (11) находим

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \frac{\bar{\omega}(\zeta^{-1})}{\omega'(\zeta)} \left[ \frac{B}{\zeta} - a_1 c_0 + \frac{\bar{a}_1 c_0}{\zeta^2} - 2a_2 c_0^2 \zeta + 2\bar{a}_2 \frac{c_0^2}{\zeta^2} - \right. \\ &- \dots - m a_m c_0^m \zeta^{m-1} + \left. \frac{m \bar{a}_m c_0^m}{\zeta^{m+1}} \right] - \frac{A}{[\omega(\zeta)]^2}. \end{aligned} \quad (13)$$



Граничные условия на контуре отверстия и условия текучести определяют величины  $A, B, C$ . Рассмотрим частные случаи.

Для условия пластичности Треска—Сен-Венана:  $\sigma_0 - \sigma_r = 2\kappa$  упруго-пластическая задача рассмотрена Г. Н. Савиным и О. С. Парасюком [5]. Случай чистого изгиба был рассмотрен ранее Л. А. Галиным [6]. При этом

$$A = 0, \quad B = \kappa, \quad C = -\frac{p + \kappa}{2} - \kappa \ln R.$$

Принимая, что предел текучести является функцией координат вида [7]

$$\sigma_0 - \sigma_r = \kappa(\infty) + \Delta\kappa \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

будем иметь для постоянных следующие значения:

$$A = -\Delta\kappa R^2, \quad B = \kappa(\infty), \quad C = \frac{1}{2}[\Delta\kappa - p - \kappa(\infty) - 2\kappa(\infty) \ln R].$$

Для экспоненциального условия текучести [8]:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2\kappa \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_0}{\kappa} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2\kappa}\right) \right]$$

в предположении, что  $\sigma_r = -p = 0$  при  $r = R$ , постоянные имеют вид:

$$A = -\kappa e^{-2} t^{-2} R^2, \quad B = -\kappa, \quad C = \frac{\sigma_0}{2} - \kappa \ln t R^{-1}.$$

Здесь  $t$ —постоянная, являющаяся корнем уравнения  $\kappa^{-1} \sigma_0 - 1 = 2 \ln t + e^{-2} t^{-2}$  ( $t > e^{-1}$ ).

Рассмотрим функции

$$\kappa_1 = 2 \left[ \kappa + \frac{b}{r^2} - \kappa \exp\left(-\frac{\sigma_0}{\kappa} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2\kappa}\right) \right],$$

$$\kappa_2 = 2 \left[ \kappa + \frac{b}{r^2} - \frac{\kappa}{r} \exp\left(-\frac{\sigma_0}{\kappa} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{4\kappa}\right) \right],$$

описывающие неоднородный упрочняющий материал [9]. Пусть  $\sigma_r \leq 0$ ,  $\sigma_r = -p = 0$  на контуре отверстия. Тогда для постоянных будем иметь следующие значения.

Для функции  $\kappa_1$

$$A = b - \kappa e^{-2} t^{-2} R^2, \quad B = -\kappa, \quad C = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\kappa}{2} \ln(t^{-2} R^2).$$

Здесь  $t$ —постоянная, являющаяся корнем уравнения

$$\kappa^{-1} \sigma_0 - 1 + \frac{b}{\kappa R^2} = e^{-2} t^{-2} + 2 \ln t \quad (t > e^{-1}).$$

Для функции  $\kappa_2$

$$A = b - \kappa e^{-1} t^{-2} R^2, \quad B = -\kappa, \quad C = \sigma_0 + \kappa \ln(t^{-2} R^2),$$

где  $t$ —корень уравнения

$$\kappa^{-1} \sigma_0 - 1 + \frac{b}{\kappa R^2} + 2 \ln R = 2 \ln t^2 + e^{-1} t^{-2} \quad (t > e^{-1}).$$

Выбирая полиномы (4) определенного вида, найдем решения ряда практически важных задач.

Чистый изгиб полосы (балки). В этом случае полиномы (4) имеют вид:

$$\Phi(z) = i \frac{M}{4I} z, \quad \Psi(z) = -i \frac{M}{4I} z;$$

где  $M$ —величина изгибающего момента;

$I$ —момент инерции поперечного сечения балки.

На основании (9)

$$\varphi(\zeta) = B \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} + B + C + i \frac{M}{4I} c_0 \zeta + \frac{i M}{4I} \frac{c_0}{\zeta}.$$

Сравнивая коэффициенты при положительных степенях  $\zeta$ , из функционального уравнения (11) в рассматриваемом случае получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $c_k$  функции  $\omega(\zeta)$ :

$$\begin{aligned} B \bar{c}_1 + \alpha \bar{c}_2 &= 0, \\ \alpha \bar{c}_1 - B \bar{c}_2 - \alpha \bar{c}_3 &= c_0 \sigma, \\ \alpha \bar{c}_2 - B \bar{c}_3 - \alpha \bar{c}_4 &= 0, \\ &\vdots \\ \alpha \bar{c}_n - B \bar{c}_{n+1} - \alpha \bar{c}_{n+2} &= 0 \quad (n = 2, 3, 4 \dots). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{i M}{4I} c_0.$$

Можно показать, что решение системы (14) имеет вид [5, 6]:

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= \frac{c_0}{1 + \nu_1 \lambda + \lambda^2}; \quad \bar{c}_2 = -\frac{c_0 \lambda}{1 + \nu_1 \lambda + \lambda^2}; \\ \bar{c}_3 &= \nu_1 \bar{c}_2; \quad \bar{c}_4 = \nu_1 \bar{c}_3; \quad \dots \quad \bar{c}_{n+1} = \nu_1 \bar{c}_n. \end{aligned} \quad (15)$$

При этом

$$\lambda = \frac{B}{\alpha}, \quad \nu_1 = -\frac{B}{2\alpha} + \sqrt{\frac{B^2}{4\alpha^2} + 1}.$$

Суммируя ряд (12) с учетом (15), найдем

$$z = \omega(\zeta) = c_0 \zeta + \frac{c_0}{1 + \nu_1 \lambda + \lambda^2} \frac{1}{\zeta} - \frac{c_0 \lambda}{1 + \nu_1 \lambda + \lambda^2} \frac{1}{\zeta(\zeta - \nu_1)}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М., 1961.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
3. Черепанов Г. П. ПММ, т. 27, 1963, № 3.
4. Черепанов Г. П. „ДАН СССР“, т. 362, 1965, № 2.
5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Изд-во „Наукова думка“, Киев, 1968.
6. Галин Л. А. ПММ, т. 10, 1946, № 3.
7. Кузнецов А. И. Вестник ЛГУ, 1958, № 13.
8. Аннин Б. Д. „Механика твердого тела“, 1966, № 3.
9. Рева Т. Л. „Прикладная механика“, 1971, № 4.

Институт математики  
и механики АН Азерб. ССР

Поступило 15. X 1971

В. М. Мирсалимов

Бирчинс олмајан кәркинлик сәһәсиндә еластик-пластик чисимләрин таразлыг мәсәләсинин биһармоник һәлләри һаггында

#### ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә функционал тәнликләр үсулу илә Г. Н. Савин вә О. С. Парасюкун [5] нәтичәләри үмумиләшдирилмишдир. Фәрз едилмишдир ки, материал еластик зонада бирчинс, пластик зонада исә гејри-бирчинс, һәмчинин мөһкәмләнен ола биләр.

On biharmonic Solutions of problems for elasto-plastic bodies, the strained field being non-uniform

## SUMMARY

In the paper the results of Savin G. N. and Parasyuk O. S. (5) are generalized by the functional equations method.

It is supposed that the material is uniform in the elastic zone and it may be non-uniform and hardening in the plastic zone.

Г. Н. АГАЕВ, А. М. ГУСЕЙНБЕКОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ  
СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей статье методом Галеркина исследуется сингулярное возмущение смешанной задачи для параболического уравнения с разрывными коэффициентами, доказывается сходимость решения возмущенной задачи к решению невозмущенной при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и определяется порядок сходимости в соответствующих пространствах.

Пусть  $G$  — ограниченная составная область  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  с границей  $\Gamma$ . Область  $G$  состоит из двух областей  $G_1$  и  $G_2$ , разделенных  $(n-1)$ -мерной поверхностью  $\gamma$ , не имеющей общих точек с  $\Gamma$  ( $\gamma$  — граница  $G_1$ );  $\Gamma$  — кусочно-гладкая поверхность,  $\gamma$  — непрерывно дифференцируемая. Точки  $G$  будут обозначаться через  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Вводим пространство  $W_p^{(m)}(G)$ , являющееся прямой суммой соболевских пространств  $W_p^{(m)}(G_i)$  [6]:

$$W_p^{(m)}(G_1) + W_p^{(m)}(G_2) = W_p^{(m)}(G).$$

Это есть пространство, полученное замыканием по норме

$$\|u\|_{m,p}^p = \int_G \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p dx$$

множества функций, определенных в  $\bar{G}$  и гладких в каждой из  $G_i$  ( $i = 1, 2$ )  $p \geq 2$ . Здесь  $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ,  $\alpha =$

$= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ . Если  $u$  и  $v$  суть функции, определенные на  $G$ , то обозначим через  $\langle u, v \rangle$  их скалярное произведение в  $L_p(G)$ . В  $W_p^{(m)}(G)$  скалярное произведение обозначим через  $(u, v)_m$ :

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle, \quad u, v \in W_p^{(m)}(G).$$

Далее вводится пространство  $W_p^{(-m)}(G)$  линейных непрерывных функционалов над пространством  $W_p^{(m)}(G)$ .

В дальнейшем  $(f, g)$  будет обозначать значение функционала  $f \in W_q^{(-m)}(G)$  в точке  $g \in W_p^{(m)}(G)$ . В частности,  $(f, g) = \int f g dx$  при  $f \in L_q(G)$ ,  $g \in L_p(G)$ , а  $(f, g)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle$  при  $f \in W_q^{(-m)}(G)$ ,  $g \in$



$\in W_p^{(m)}(G)$ .  $\bar{W}_p^{(m)}(G)$  — пространство гладких функций  $u \in W_p^{(m)}(G)$ , удовлетворяющих условию

$$[D^\kappa u]_1 = D^\kappa u_1(x) - D^\kappa u_2(x) = 0, \quad \kappa = 0, 1, \dots, m-1,$$

замкнутое в норме пространства  $W_p^{(m)}(G)$ .

Далее вводим пространство типа С. Л. Соболева:  $L_p(0, T; W_p^{(m)}(G)) = L_p(0, T; W_p^{(m)}(G_1)) + L_p(0, T; W_p^{(m)}(G_2))$ ;  $L_p(0, T; W_p^{(m)}(G))$  — пространство функций  $u(t, x)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $x \in \bar{G}$  с конечной нормой вида

$$\|u(t, x)\|_{m,p}^p = \int_0^T \|u(t, x)\|_{m,p}^p dt = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G |D^\alpha u|^p dx dt < +\infty,$$

где  $D^\alpha$  — операторы частных производных по одним только пространственным переменным  $x$ . Всякую функцию  $u(t, x) \in L_p(0, T; W_p^{(m)}(G))$  можно представить в виде  $u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x)$ , где

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i(t, x), & (t, x) \in \Omega_i, \\ 0 & (t, x) \in \Omega_i^c, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Пусть  $A_k^i(t)$  — дифференциальные операторы вида

$$\bar{A}_k^i(t) u^i = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_k} D^\alpha (a_{k\alpha\beta}^{(i)}(x, t, u^i, \dots, D^{m_k-1} u^i) D^\beta u^i) \quad (1)$$

для

$$u^i \in L_p(0, T; W_p^{(m_k)}(G_i)), \quad i = 1, 2, \quad \kappa = 1, 2.$$

Предполагается, что коэффициенты удовлетворяют условию Каратеодори в  $\Omega_i$  и, кроме того, имеет место оценка: существует функция  $\Phi_k^i(x, t)$  из  $L_p(\Omega_i)$  такая, что

$$|a_{k\alpha\beta}^i(x, t, u^i, \dots, D^{m_k-1} u^i)| \leq |\Phi_k^i(x, t)| + M_k^i \sum_{|\alpha| \leq m_k-1} (1 + |D^\alpha u^i|^{p-2}), \quad (2)$$

$p > 2$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\kappa = 1, 2$ , где  $M_k^i$  — положительные постоянные.

Пусть  $\varepsilon$  — малый положительный параметр. Двум нелинейным дифференциальным операторам вида (1) с  $m_2 > m_1$  ставится в соответствие нелинейный дифференциальный оператор вида

$$A_\varepsilon^i(t) u = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{2\alpha\beta}^i(x, t, \varepsilon u^i, \dots, \varepsilon D^{m_2-1} u^i) D^\beta \varepsilon u^i) + \\ + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{1\alpha\beta}^i(x, t, u^i, \dots, D^{m_1-1} u^i) D^\beta u^i),$$

$m_2 > m_1$ ,  $u^i \in L_p(0, T; W_p^{(m_2)}(G_i))$ .

Задача состоит в исследовании решения уравнения

$$\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial t} + A_\varepsilon^i(t) u_\varepsilon = f_\varepsilon^i \quad \text{в } \Omega_i = G_i \times (0 \leq t \leq T), \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

удовлетворяющего условию склейки:

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (-1)^{|\alpha|+|\beta|-1} D^{\alpha-\beta} (a_{2\alpha\beta}^{(1)}(x, t, \varepsilon u_\varepsilon^1, \dots, \varepsilon D^{m_2-1} u_\varepsilon^1) D^\beta u_\varepsilon^1) \nu_k|_{S_1} + \\ + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (-1)^{|\alpha|+|\beta|-1} D^{\alpha-\beta} (a_{1\alpha\beta}^{(1)}(x, t, u_\varepsilon^1, \dots, D^{m_1-1} u_\varepsilon^1) D^\beta u_\varepsilon^1) \nu_k|_{S_1} + \\ + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} (-1)^{|\alpha|+|\beta|-1} D^{\alpha-\beta} (a_{2\alpha\beta}^{(2)}(x, t, u_\varepsilon^2, \dots, \varepsilon D^{m_2-1} u_\varepsilon^2) D^\beta \varepsilon u_\varepsilon^2) \nu_k^2|_{S_1} + \\ + D^{\alpha-\beta} (a_{1\alpha\beta}^{(2)}(x, t, u_\varepsilon^2, \dots, D^{m_1-1} u_\varepsilon^2) D^\beta u_\varepsilon^2) \nu_k^2|_{S_1} = 0, \quad (4)$$

$$\kappa = 1, \dots, m_1$$

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_2} (-1)^{|\alpha|+|\beta|-1} D^{\alpha-\beta} (a_{2\alpha\beta}^{(2)}(x, t, \varepsilon u_\varepsilon^2, \dots, D^{m_2-1} \varepsilon u_\varepsilon^2) \nu_k|_{S_1} + \\ + (-1)^\kappa \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_2} D^{\alpha-\beta} (a_{2\alpha\beta}^{(2)}(x, t, \varepsilon u_\varepsilon^2, \dots, \varepsilon D^{m_2-1} u_\varepsilon^2) D^\beta \varepsilon u_\varepsilon^2) \nu_k^2|_{S_1} = 0, \quad (5)$$

$$\kappa = m_1 + 1, \dots, m_2,$$

$$[D^\alpha u_\varepsilon]_{S_1} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m_2 - 1, \quad (6)$$

граничному условию

$$D^\alpha u_\varepsilon|_{S_2} = g_{\varepsilon\alpha}(x''), \quad \alpha = 0, 1, \dots, m_2 - 1, \quad (6)$$

и начальному условию

$$u_\varepsilon(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x). \quad (8)$$

Здесь  $S_1 = [0, T] \times \gamma$ ,  $S_2 = [0, T] \times \Gamma$ , причем граничные условия и условия сопряжения выполняются в обобщенном смысле;  $\nu_k$  — компоненты внешней относительно  $G_1(G_2)$  нормали к  $\gamma(\Gamma)$ .  $\bar{L}_p(0, T; \bar{W}_p^{(m)}(G))$  — пространство гладких функций из  $L_p(0, T; W_p^{(m)}(G))$ , удовлетворяющих условию  $[L^\alpha u]_{S_1} = 0$ .

Обозначим через  $W_{pq}^{m,1} = W_{pq}^{m,1}(\Omega_1) + W_{pq}^{m,1}(\Omega_2)$  пространство, полученное замыканием в норме

$$\|u\|_{W_{pq}^{m,1}} = \left( \int_0^T dt \int_G \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} + \\ + \left( \int_0^T dt \int_G \sum_{|\beta| \leq 1} \left| \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} \right|^q dx \right)^{1/q}$$

множества функций, определенных в  $\Omega$  и гладких к каждой из  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ . В соответствии с нелинейным оператором  $A_k$  рассмотрим форму

$$a_k[u, v] = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_k} \langle a_{k\alpha\beta}(x, t, u, \dots, D^{m_k-1} u) D^\alpha u, D^\beta v \rangle,$$

$$b_k[u, v] = \int_0^T a_k[u, v] dt$$

для каждой пары  $u, v$  из  $\bar{L}_p(0, T; \bar{W}_p^{(m_k)})$ ,  $\kappa = 1, 2$ . Предполагается, что

$$a_k[u, u] \geq \gamma_0 \|u\|_{m_k,p}^p - K_k(t); \quad (9)$$

$\gamma_0 \geq 0$ ,  $K_k(t)$  — непрерывная на отрезке  $[0, T]$  функция и

$$a_k[u, u - v] - a_k[v, u - v] \geq \gamma_1 \|u - v\|_{m_k,p}^p, \quad (10)$$

$\gamma_1 > 0$  — некоторая постоянная.

Функция  $u(t, x) \in \bar{L}_p(0, T; \bar{W}_p^{(m_2)})$  называется слабым решением задачи (3) — (8), если для любой функции  $v \in \bar{L}_p(0, T; \bar{W}_p^{(m_2)})$  удовлетворяется соотношение

$$\left[ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v \right] + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_2} [a_{2\alpha\beta}(x, t, \varepsilon u_\varepsilon, \dots, D^{m_2-1} \varepsilon u_\varepsilon) \varepsilon D^\alpha u_\varepsilon, D^\beta v] + \\ + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} [a_{1\alpha\beta}(x, t, u_\varepsilon, \dots, D^{m_1-1} u_\varepsilon) D^\alpha u_\varepsilon, D^\beta v] = [f_\varepsilon, v]. \quad (11)$$



Здесь используются следующие обозначения:

$$\int_G u \bar{v} dx = (u, v), \quad \int_0^T dt \int_G u \bar{v} dx = [u, v],$$

$$\int_0^T dt \int_\Gamma \psi_k \bar{v} dx = [\psi_k, v]_{S_1};$$

$\tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)})$  — совокупность функций  $v(t, x) \in \tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)}(G))$ , равных нулю на границе  $\Gamma$ .

Сначала рассматривается невозмущенная задача:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} D^\alpha (a_{1\alpha\beta}^i(x, t, u^1, \dots, D^{m_1-1} u^1) D^\beta u^i) = f_i(t, x); \quad (12)$$

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} D^{\alpha-\kappa} (a_{1\alpha\beta}^i(x, t, u^1, \dots, D^{m_1-1} u^1) D^\beta u^i) v_k|_{S_1} +$$

$$+ (-1)^\kappa \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m_1} D^{\alpha-\kappa} (a_{1\alpha\beta}^i(x, t, u^2, \dots, D^{m_1-1} u^2) D^\beta u^2) v_k|_{S_1} = 0, \quad (13)$$

$$\kappa = 1, 2, \dots, m,$$

$$[D^\alpha u]_{S_2} = 0, \quad \alpha = 0, \dots, m_1 - 1; \quad (14)$$

$$D^\alpha u|_{S_2} = g_\alpha(x', t), \quad \alpha = 0, 1, \dots, m_1 - 1, \quad (15)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (16)$$

По предположению коэффициенты  $a_{1\alpha\beta}^i(x, t, u^1, \dots, D^{m_1-1} u^1)$  удовлетворяют условию Каратеодори в  $\Omega_1$  и, кроме того, для него имеет место оценка (2).

В силу (9)

$$a_1[u, u] \geq \gamma_0 \|u\|_{m,p}^p - K_1(t), \quad \gamma_0 \geq 0. \quad (17)$$

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть:

$$f(x, t) \in \tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_q^{(-m)}(G)).$$

Если коэффициенты в уравнении (12) удовлетворяют условиям Каратеодори и (2), то при условии (9) задача (12)–(16) имеет слабое решение  $u \in \tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)}(G))$  при любом  $g_\alpha, \varphi(x)$  и это решение можно получить как слабый предел некоторой последовательности галеркинских приближений.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 и условия (10) слабое решение единственно.

Теорема 3. Пусть

$$f_\varepsilon(x, t) \in \tilde{L}_q(0, T; \tilde{W}_q^{(-m)}(G)).$$

Если коэффициенты в уравнении (3) удовлетворяют условиям Каратеодори и (2), то при условии (9) задача (3)–(8) имеет слабое решение  $u \in \tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)}(G))$  при любом  $g_\alpha(x''), \varphi_\varepsilon(x)$ , которое может быть получено как слабый предел некоторой последовательности галеркинских приближений.

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 3 и (10) решение задачи (3)–(8) единственно.

Кроме того, имеет место теорема о сходимости.

Теорема 5. Пусть  $u_0$  есть слабое решение задачи (12)–(16),  $u_\varepsilon$  — слабое решение задачи (3)–(8). Тогда, если  $f_\varepsilon \rightarrow f$  слабо в  $\tilde{L}_q(0, T; \tilde{W}_q^{(-m)}(G))$ , то при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $u_\varepsilon \rightarrow u_0$  в  $\tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)}(G))$ ,  $\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow 0$  в  $\tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)}(G))$ .

Доказательство. В выражении  $[u'_\varepsilon, \tau] + b_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = [f_\varepsilon, \tau]$ , где

$$b_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = b_1(u_\varepsilon, v) + b_2(\varepsilon u_\varepsilon, v),$$

положим  $v = u_\varepsilon - h$ .

Интегрируя по частям и преобразуя полученные интегралы, будем иметь

$$|u_\varepsilon|_{m,p} \leq M, \quad \varepsilon |u_\varepsilon|_{m_1} \leq M.$$

Далее из уравнения

$$[u'_\varepsilon, \tau] + b_3(u_\varepsilon, v) = [f_\varepsilon, \tau]$$

имеем

$$\sup \frac{|[u'_\varepsilon, \tau]|}{|v|_{m_2,p}} \leq M,$$

это показывает, что  $u'_\varepsilon \in \tilde{L}_q(0, T; \tilde{W}_q^{(m)}(G))$ ,  $|u'_\varepsilon|_{m_2,p} \leq M$ . Так как любой шар в рефлексивном банаховом пространстве слабокомпактен, то получаем, что

$$u_\varepsilon \rightarrow z \quad \text{слабо в } \tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)}(G)) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{слабо в } \tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)}(G)) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$u'_\varepsilon \rightarrow z' \quad \text{слабо в } \tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)}(G)) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Докажем теперь, что  $z = u_0$ . Ясно, что  $z \in \tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)}(G))$ . Рассмотрим

$$b_\varepsilon(u_\varepsilon, w) = b_2(\varepsilon u_\varepsilon, w) + b_1(u_\varepsilon, w)$$

для всех  $w \in \tilde{W}_p^{(m)}(G)$ .

Так как  $u_\varepsilon \rightarrow z$  слабо в  $\tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)}(G))$  коэффициенты  $a_{1\alpha\beta}^i(x, t, u_\varepsilon, \dots, D^{m_1-1} u_\varepsilon)$  в  $G_i$  удовлетворяют условиям Каратеодори и (2), то в  $b_1(u_\varepsilon, w)$  мы можем перейти к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и получим  $b_1[u_\varepsilon, w] \rightarrow b_1[z, w]$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Аналогично получаем, что  $b_2(\varepsilon u_\varepsilon, w) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Следовательно, имеем  $\left[\frac{\partial z}{\partial t}, w\right] + b_1(z, w) = [f, w]$  для

всех  $w \in \tilde{L}_p(0, T; \tilde{W}_p^{(m)}(G))$ .

Из единственности решения задачи (12)–(16) следует, что  $z = u_0$ . Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. УМН, вып. 5, 1957, № 12.
2. Агаев Г. Н. О задаче Коши для нелинейных параболических операторных уравнений. Studia Mathematica, т. XXXII, 1969.
3. Hue t D. Ann Inst Faerier, Grenoble, (10) 1960.
4. Bui An Ton. Singular perturbations of nonlinear elliptic and parabolic variational boundary value problems. Bull. Amer. Math. soc., 1966, 18, № 4.
5. Вишик М. И. Матем. сб. 19 (101), 1962.
6. Соболев С. М. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.
7. Lions J. L., Lera y G. Bull. soc. Math. France, 93, 1965, p. 97.
8. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.

Институт математики  
и механики АН Азерб. ССР

Поступило 15. X 1971



Кәсилән әмсаллы параболлик дифференциал тәнлик үчүн гарышыг  
мәсәләнин сингулјар һәјәчанланмасынын арашдырылмасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә С. Л. Саболев фәзасында Галјоркин үсулу илә кәсилән әмсаллы параболлик дифференциал тәнлик үчүн гарышыг мәсәләнин сингулјар һәјәчанланмасы арашдырылмыш вә исбат едилмишдир ки, кичик параметр сыфра јакынлашдыгда һәјәчанланмыш мәсәләнин һәлли һәјәчанланмамыш мәсәләнин һәллине јакынлашыр. Мәгаләдә јакынлашмамыш тәртиб дә мүәјјәнләшдирилмишдир.

G. N. Agajev, A. M. Guseinbekova

Analysis of singular disturbance of a mixed problem for  
a parabolic differential equation with discontinuous coefficients

SUMMARY

In this paper we analyse singular disturbance of a mixed problem for a parabolic equation with discontinuous coefficients by Galerkin's method, prove convergence of a disturbed problem solution to an undisturbed problem solution with  $\varepsilon \rightarrow 0$ , and define order of convergence on corresponding spaces.

УДК 517. 946

Р. И. АЛИХАНОВА, В. А. ИБРАГИМОВ

РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ И БЫСТРОРАСТУЩИМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КЛАССАХ ОРЛИЧА

В последнее время в многочисленных работах исследовалась разрешимость краевой задачи для эллиптических и параболических квазилинейных уравнений, коэффициенты которых непрерывные и имеют полиномиальный рост. Наряду с этим М. И. Вишиком [1] исследована первая краевая задача для квазилинейного уравнения с быстро растущими непрерывными коэффициентами в классе Орлича.

В работе [2] была исследована разрешимость первой краевой задачи для эллиптических квазилинейных уравнений высшего порядка с разрывными и быстро растущими коэффициентами в классах Орлича. Настоящая статья посвящена исследованию разрешимости смешанной задачи для параболических квазилинейных уравнений высшего порядка с разрывными и быстро растущими коэффициентами в классе Орлича.

Пусть  $G$  — ограниченная составная область  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  с границей  $\Gamma$ . Область  $G$  состоит из двух областей ( $G_1$  и  $G_2$ ), разделенных  $(n-1)$ -мерной поверхностью  $\gamma$ , не имеющей общих точек с  $\Gamma$  ( $\gamma$  — граница  $G_1$ );  $\Gamma$  и  $\gamma$  — достаточно гладкие;  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ ;  $\Omega_i = G_i \times [0, T]$ ;  $S_1 = \gamma \times [0, T]$ ,  $S_2 = \Gamma \times [0, T]$ .

В области  $\Omega$  рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение порядка  $2m$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + L^i(u) &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + L_0^i(u) + \tau^i(u) \equiv \\ &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha A_\alpha^i(t, x, D^\omega u, D^\gamma u) + V^i(u) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $|\omega| < m$ ,  $|\gamma| = m$ ;  $D^\beta = D^{|\beta|} / \partial^{\beta_1} x_1 \dots \partial^{\beta_n} x_n$ ,  $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ ;  $L_0(u)$  — главная часть оператора  $L^i(u)$ ;

$$\begin{aligned} V^i(u) &= \sum_{|\beta| < m} (-1)^{|\beta|} L^\beta V_\beta^i(t, x, D^\omega u, D^\gamma u) + \\ &+ \sum_{|\beta| = m} (-1)^m L^\beta V_\beta^i(t, x, D^\omega u) \end{aligned} \quad (2)$$

\* Для простоты изложения.

—оператор порядка, не превышающего  $2m-1$ , который при формулируемых ниже условиях будем называть подчиненным.

Уравнение (1) рассматривается при следующих условиях:

$$u|_{S_2} = \varphi_0(t, x'), \quad D^\omega u|_{S_2} = \varphi_\omega(t, x'), \quad |\omega| \leq m-1, \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = g(x), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{|\alpha|=m} (-1)^{m+k-1} D^{\alpha-k} A_\alpha(t, x, D^\omega u, D^\nu u) \nu_k + \right. \\ & + \sum_{|\beta|<m} (-1)^{|\beta|+k-2} D^{\beta-k+1} V_\beta(t, x, D^\omega u, D^\nu u) \nu_k + \\ & \left. + \sum_{|\beta|=m} (-1)^{m+k-1} D^{\beta-k} V_\beta(t, x, D^\omega u) \nu_k \right]_{S_1} = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots, m,$$

$$[D^\omega u]_{S_1} = 0, \quad |\omega| \leq m-1;$$

здесь  $[\varphi(u)]_{S_1} = \varphi(u_1)|_{S_1} - \varphi(u_2)|_{S_1}$ ;  $\nu_k$  — компоненты внешней относительно  $\Omega_1(\Omega_2)$  нормали в  $S_1(S_2)$ . Условия (3)–(5) понимаются в слабом смысле.

Вводится класс  $L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$ , являющийся прямой суммой классов типа Орлича  $L_{p_1}(0, T; O_{p_1}^{(m)}(G))$  [3]:  $L_p(0, T; O_p^{(m)}(G)) = L_{p_1}(0, T; O_{p_1}^{(m)}(G_1)) + L_{p_2}(0, T; O_{p_2}^{(m)}(G_2))$ , где  $p_i(\xi)$  —  $N$ -функции. Под классом Орлича  $L_{p_1}(0, T; O_{p_1}^{(m)}(G_i))$  будем понимать совокупность функций  $u(t, x)$ , удовлетворяющих условиям (3)–(5), для которых сходятся интегралы

$$\int_0^T \int_{G_i} p_i(D^m u) dx dt < \infty, \quad D^m u = \left( \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Всякую функцию  $u(t, x) \in L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$  можно представить в виде  $u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x)$ , где

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u(t, x), & (t, x) \in \Omega_i, \\ 0, & (t, x) \in \Omega/\bar{\Omega}_i, \quad i = 1, 2; \end{cases}$$

$L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$  — совокупность функций  $u(t, x) \in L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$ , удовлетворяющих нулевым граничным условиям на  $\Gamma$ .

Сформулируем четыре условия, при которых будет доказана разрешимость задачи (1), (3)–(5).

Условие 1. Для любых  $K'$  и  $|\xi_\omega| \leq K'$ ,  $|\omega| \leq m-1$ , найдутся такие постоянные  $C_i$ ,  $c_i$  и  $N$ -функции  $p_i(\zeta)$ ,  $\zeta = \left( \sum_{|\alpha|=m} |\zeta_\alpha|^2 \right)^{1/2}$  зависящие от  $K'$ , что для больших  $\zeta$

$$c_i p_i(\zeta) \leq \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha) \zeta_\alpha \leq C_i p_i(\zeta). \quad (7)$$

Кроме того, предполагается:

с) для любого  $p \geq 2$   $p_i(\zeta) > c_p^1 |\zeta|^p - c_p^1$ ,  $p_i'(0) = 0$ ,  $\frac{d}{d\zeta} \left( \frac{p_i(\zeta)}{\zeta} \right) > 0$  для  $\zeta > 0$ ;

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & |A_\alpha^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha)| < c^1 \frac{p_i(\zeta)}{\zeta} + C_1^1 \\ & (|\xi_\omega| \leq K', \quad (t, x) \in \Omega_i); \end{aligned} \quad (8)$$

в) функции  $A_\alpha^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha)$  непрерывны по всем аргументам и непрерывно дифференцируемы по  $\zeta_\alpha$ ; относительно аргументов  $\xi_\omega$  они

непрерывны в следующем смысле:

$$\begin{aligned} & |A_\alpha^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha) - A_\alpha^i(t', x', \xi'_\omega, \zeta'_\alpha)| \leq \\ & \leq \varepsilon(|x - x'| + |t - t'| + |\xi_\omega - \xi'_\omega|) \frac{p_i(\zeta)}{\zeta}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ .

Условие 2. Для  $|\xi_\omega| \leq K'$ ,  $|\omega| \leq m-1$ , найдутся такие постоянные  $C_i = C_i(K')$  и  $c_i = c_i(K')$ , что

$$\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} A_{\alpha\beta}^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha) \eta_\beta \eta_\alpha \geq c_i \left( \frac{p_i(\zeta)}{\zeta^2 + 1} + 1 \right) \sum_{|\alpha|=m} \eta_\alpha^2, \quad (10)$$

$$|A_{\alpha\beta}^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha)| \leq C_i \left( \frac{p_i(\zeta)}{\zeta^2 + 1} + 1 \right), \quad (11)$$

$$\left| \frac{\partial A_{\alpha\beta}^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha)}{\partial x_j} \right| \leq C_i \left( \frac{p_i(\zeta)}{\zeta^2 + 1} + 1 \right), \quad (12)$$

$$\left| \frac{\partial A_{\alpha\beta}^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha)}{\partial t} \right| \leq C_i \left( \frac{p_i(\zeta)}{\zeta^2 + 1} + 1 \right), \quad (13)$$

где  $A_{\alpha\beta}^i = \partial A_{\alpha\beta}^i / \partial \zeta_\beta$ .

Условие 3. Для  $|\xi_\omega| \leq K'$ ,  $|\omega| \leq m-1$ , существуют такие функции  $f_\beta^i(t, x)$  и  $q_\beta^i(t, x)$ , зависящие от  $K'$ , что для  $|\beta| = m$

$$|V_\beta^i(t, x, \xi_\beta^i)| \leq f_\beta^i(t, x), \quad (14)$$

где  $[N_i(f_\beta^i(t, x))] \leq +\infty$ ;  $N_i(\eta)$  — дополнительные  $N$ -функции к  $p_i(\zeta)$ .

[3]. Здесь  $[\varphi] = \int_0^T dt \int_G \varphi dx$ ; для  $|\beta| < m$

$$|V_\beta^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha)| \leq q_\beta^i(t, x) p_{i1}(\zeta) + q_\beta^i(t, x) f_\beta^i(t, x), \quad (15)$$

где  $p_{i1} > 0$  для  $\zeta > 0$  и  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} p_{i1}(\zeta)/p_i(\zeta) = 0$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ ;  $q_\beta^i(t, x) \geq 0$  и может иметь особенности на  $S_2$  и  $S_1$  в конечном числе точек или многообразий.

Условие 4. Для любых  $\xi_\omega$ ,  $\zeta_\alpha$  и  $\eta_\alpha$  имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{|\beta|<m} V_\beta^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha) \eta_\beta + \sum_{|\beta|=m} V_\beta^i(t, x, \xi_\omega) \eta_\beta \leq \\ & \leq (1 - \delta) \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha) \eta_\alpha + g_i(t, x), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $g_i(t, x) \in L_1(0, T; L_1(G))$ ,  $\delta > 2$ , кроме того, предполагается, что

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha^i(t, x, \xi_\omega, \zeta_\alpha) \eta_\alpha \geq C_2^i \sum_{|\alpha|=m} |\zeta_\alpha|^{p_i + \varepsilon_0} C_{11}^i, \quad \varepsilon_1 > 0. \quad (17)$$

Пусть  $p_i(\zeta)$  отвечает постоянной  $K'$  из условий 1, 2. Функция  $u(t, x)$  называется решением задачи (1), (3)–(5) в классе  $L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$ , если  $u \in L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$ ,  $|L^\omega u| \leq K'$  для  $|\omega| \leq m-1$  и для всякой функции  $v \in L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$  (и их линейной оболочки, образующей пространство Орлича  $H_p(0, T; H_p^{(m)}(G))$  [3]) выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{du}{dt}, v \right] + \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha^i(t, x, D^\omega u, D^\nu u), L^\alpha v] + \\ & + \sum_{|\beta|<m} [V_\beta^i(t, x, D^\omega u, D^\nu u), L^\beta v] + \sum_{|\beta|=m} [V_\beta^i(t, x, D^\omega u), L^\beta v] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Теорема 1. Если функции  $A_\alpha^i(t, x, D^\omega u, D^\nu u)$ ,  $V_\beta^i(t, x, D^\omega u, D^\nu u)$  и  $V_\beta^i(t, x, D^\omega u)$  в уравнении (1) удовлетворяют условиям 1–4, то задача (1), (3)–(5) имеет решение в классе  $L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$ .



Доказательство этой теоремы ведется следующим образом.  
1. Сначала доказывается разрешимость уравнения вида

$$L^i(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m L^\alpha A_\alpha^i(t, x, D^\nu u) + h_i(t, x) = 0 \quad (19)$$

при условиях (3), (4) и

$$\left[ \sum_{|\alpha|=m} (-1)^{m+k-1} L^{\alpha-k} A_\alpha^i(t, x, D_\nu u) v_k \right]_{S_1} = 0, \quad (20)$$

$k = 1, 2, \dots, m,$

$$[D^\omega u]_{S_1} = 0, \quad |\omega| \leq m-1.$$

Здесь  $A_\alpha^i(x, t, D^\nu u)$  удовлетворяют условиям 1, 2 и  $A_\alpha^i(x, t, D^\nu u)$  дважды непрерывно дифференцируемы по  $x$  и  $t$ , причем

$$|\partial A_\alpha^i(t, x, \zeta_\nu)| \leq C^i \frac{\rho_i(\zeta)}{\zeta + 1} + C_1^i, \quad |\partial^2 A_\alpha^i(t, x, \zeta_\nu), \partial x_j^2| \leq C^i \frac{\rho_i(\zeta)}{\zeta} + C_1^i,$$

$$|\partial A_\alpha^i(t, x, \zeta_\nu), \partial t| \leq C^i \frac{\rho_i(\zeta)}{\zeta} + C_1^i, \quad |\partial^2 A_\alpha^i(t, x, \zeta_\nu), \partial t^2| \leq C^i \frac{\rho_i(\zeta)}{\zeta} + C_1^i,$$

$i = 1, 2, \quad h_i(t, x) \in L_2(0, T; L_2(G_1)).$

**Теорема 2.** Если функция  $A_\alpha^i(t, x, D^\nu u)$  в уравнении (19) удовлетворяют условиям 1, 2, 4 и  $h_i(t, x) \in L_2(0, T; L_2(G_1))$ , то задача (19), (3), (4), (20) имеет слабое решение в классе  $L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$ .

Существование решения этой задачи доказывается с помощью аналога метода Галеркина. Решение ищется в виде  $u = z + f$ ,  $k$ -ое приближение к функции  $z$  будем искать в виде

$$z_k(t, x) = \sum_{j=1}^k C_{jk}(t) v_j(x), \quad (21)$$

где  $\{v_j(x)\}$ —система гладких функций такая, что функций

$$z_j(t, x) = M_i w_j(t, x) - \psi_i(x) \Delta w_j(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} \left( (T-t) \frac{\partial w_j}{\partial t} \right) \equiv B_i w_j \quad \left( \Delta = \sum_{j=1}^n D_j^2 \right)$$

образуют полную систему в  $C_0^{(m)}(\Omega_i)$ ,  $w_j = v_j(x) d_j(t)$ , где  $d_j(t)$ —достаточно гладкие функции  $t$ ,  $d_j(0) = 0$ .

Неизвестные функции  $C_{jk}(t)$  в (21) находятся из системы нелинейных уравнений

$$[L^i(f + z_k), B_i(v_j(x) d_j(t))] + [h_i, B_i(v_j(x) d_j(t))] = 0. \quad (22)$$

Причем для дальнейшего достаточно подчинить  $C_{jk}(t)$  дополнительным условиям

$$C_{jk}(0) = 0, \quad C'_{jk}(0) = 0, \quad C_{jk}|_{t=T} \text{ ограничено}; \quad (23)$$

$C_{jk}(t)$  удовлетворяют некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, которая при краевых условиях (23) имеет по крайней мере одно решение. Это доказано в работе М. И. Вишика [4]. Таким образом, для  $z_k = \sum_{j=1}^k C_{jk}(t) v_j(x)$

имеют место соотношения (22). Положим в (22)  $d_j(t) = C_{jk}(t) e^{-\lambda t}$ , где  $\lambda$ —достаточно большая постоянная, и просуммируем обе части по  $j$  от 1 до  $k$ . Тогда получим

$$[L^i(f + z_k), B_i(z_k e^{-\lambda t})] + [h_i, B_i(z_k e^{-\lambda t})] = 0. \quad (24)$$

Имеет место следующая

**Лемма 1.** Для любых гладких функций  $f(t, x)$ , обладающих конечными нормами (\*), и любых  $z(t, x) \in L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$ , для которых  $z|_{t=0} = 0$ ,  $\frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = 0$ ,  $z|_{t=T}$  ограничено, справедливо следующее энергетическое неравенство:

$$\begin{aligned} [L^i(f + z), B_i(z e^{-\lambda t})] &\geq \frac{M_i}{2} (e^{-\lambda T} z(T, x), z(T, x)) + \frac{\lambda M_i}{4} [z, z e^{-\lambda t}] + \\ &+ C_1 \left[ ((T-t)\lambda + 1) \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} e^{-\lambda t} \right] + C_1 \sum_{j=1}^n [\psi_j(x) D_j z, D_j z e^{-\lambda t}] + \\ &+ C_1 \sum_{j=1}^n (\psi_j(x) D_j z(x, T), D_j z(x, T) e^{-\lambda T}) + \\ &+ \gamma \left[ \left( \frac{\rho_i(D^m(f+z))}{|D^m(f+z)|^2 + 1} + 1 \right) |D^{m+1}(f+z)|^2 \psi_i e^{-\lambda t} \right] + \\ &+ \gamma_1 \left[ \left( \frac{\rho_i(D^m(f+z))}{|D^m(f+z)|^2 + 1} + 1 \right) \left| D^m \frac{\partial(f+z)}{\partial t} \right|^2 \times \right. \\ &\left. \times e^{-\lambda t} (T-t) \right] + C_1 M_i [\rho_i(D^m(f+z)) e^{-\lambda t}] - K(f). \end{aligned} \quad (25)$$

На основании этой леммы получаем, что уравнения (22) имеют по крайней мере одно решение и найдутся такие подпоследовательности  $\{u_{r_i}\}$ , что  $\{u_{r_i}\}$  и  $\{D^\nu u_{r_i}\}$ ,  $|\nu| = m$ , сходятся почти всюду в  $\Omega_i$  к  $u_i$  и соответственно к  $D^\nu u_i$ . Из (25), (8) и теоремы Валле—Пуссена следует, что  $A_\alpha^i(t, x, D^\nu u_{r_i})$  равномерно (по  $r_i$ ) абсолютно непрерывные функции  $x$  и  $t$ . Переходя к пределу при  $r_i \rightarrow \infty$  в (19), получим

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha^i(t, x, D^\nu u), D^\alpha v] + [h_i, v] = 0 \quad (26)$$

для любых  $v \in C^{(m)}(\bar{\Omega}_i)$ . Далее с помощью процесса слабого замыкания по  $v$  устанавливается справедливость соотношения (26) для любых  $v \in L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$ . Доказаны

**Лемма 2.** При выполнении условий 1, 2 имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t}, u_1 - u_2 \right] + \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha^i(t, x, D^\nu u_1) - \\ - A_\alpha^i(t, x, D^\nu u_2), L^\alpha(u_1 - u_2)] \geq C^i \left[ \rho_i \left( \frac{D^m(u_1 - u_2)}{C^i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

**Теорема 3.** При выполнении условий 1, 2 слабое решение задачи (19), (3), (4), (20) единственно.

2. Устанавливается однозначная разрешимость задачи (19), (3), (4), (20), если  $A_\alpha^i(t, x, \zeta_\nu)$  лишь непрерывны по  $x, t$  и  $h^i(t, x) = \sum_{|\alpha|=m} L^\alpha h_{i\alpha}(t, x)$ ,  $|\alpha| \leq m$ , где  $[N_i(h_{i\alpha})] < +\infty$ ;  $N_i(\gamma)$ —дополнительная функция к  $\rho_i(\zeta)$ .

При доказательстве функции  $A_\alpha^i(t, x, \zeta_\nu)$  и  $h_{i\alpha}$  заменяются их усреднениями по  $x, t$  и доказывается, что решения этих усредненных уравнений сходят к искомому решению.

$\left[ \left| \Delta \left( \frac{\partial f}{\partial t}, \psi \right) \right|^2 \right] < \infty, \quad \left[ \left| \frac{\partial}{\partial t} \left( (T-t) \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right|^2 \right] < \infty, \quad \left[ \left| D^m \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 \right] < \infty$ , где  $f$ —продолжение внутрь  $\Omega_i$  условий (3)—(5).



3. Далее рассматривается общее уравнение

$$L^1(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + L_0^1(u) + V^{i\lambda}(u) = 0, \quad (28)$$

где  $L_0^1(u)$  задается формулой (1), а  $V^{i\lambda}(u)$  формулой (2), в которой функции  $V_\beta^i(u)$  заменены ограниченными функциями  $V_\beta^{i\lambda}(u)$ :

$$V_\beta^{i\lambda} = \left(1 + \lambda \sum_{|\beta| < m} V_{\beta_1}^{i2}\right)^{-1} V_\beta^i, \quad (29)$$

стремящимися при  $\lambda \rightarrow 0$  к  $V_\beta^i$ , и с помощью топологического метода доказывается, что задача (28), (3)–(5) имеет по крайней мере одно решение.

4. Наконец, докажем, что подпоследовательность решений задачи (23), (3)–(5)  $u_\mu(t, x)$  сходится к решению общей задачи (1), (3)–(5). Из условий 1 и 4 следует, что для любого  $\lambda$

$$|L^\omega u_\lambda| \leq K \text{ при } |\omega| \leq m-1, \quad [\rho_i(L^\omega u_\lambda)] \leq K_1. \quad (30)$$

Из условия 3 и леммы 2 выводится, что найдется такая подпоследовательность  $\mu \rightarrow 0$ , для которой  $D^\nu u_\mu \rightarrow D^\nu u$ ,  $|\nu| = m$ ,  $u_\mu \rightarrow u$  почти всюду в  $\Omega$ . Далее из (8), (16), (30) и теоремы Валле–Пуссена следует, что  $A_\alpha^i(t, x, D^\omega u_\mu, D^\nu u_\mu)$ ,  $V_\beta^{i\lambda}(t, x, D^\omega u_\mu, D^\nu u_\mu)$  (для  $|\beta| < m$ ),  $V_\beta^{i\lambda}(t, x, D^\omega u_\mu)$  (для  $|\beta| = m$ ) равностепенно (по  $\mu$ ) абсолютно непрерывны по  $x$  и  $t$ . Следовательно, в соотношении, которому удовлетворяют функции и  $\mu$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial u_\mu}{\partial t}, \tau \right] + \sum_{|\alpha| = m} [A_\alpha^i(t, x, D^\omega u_\mu, D^\nu u_\mu), L^\alpha \tau] + \\ & + \sum_{|\beta| < m} [V_\beta^{i\lambda}(t, x, D^\omega u_\mu, D^\nu u_\mu), D^\beta \tau] + \sum_{|\beta| = m} [V_\beta^{i\lambda}(t, x, D^\omega u_\mu), D^\beta \tau] = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

можно перейти к пределу при  $\mu \rightarrow 0$ , если  $V \in C^{(m)}(\bar{\Omega})$ . Получим, что предельная функция  $u$  удовлетворяет соотношению (18) для  $\tau \in C^{(m)}(\Omega)$ . С помощью предельного перехода по  $\tau$  устанавливаем справедливость (18) для любых  $\tau \in L_p(0, T; O_p^{(m)}(G))$ .

Таким образом, теорема (1) доказана. При дополнительных предположениях решение единственно. В заключение выражаем глубокую благодарность проф. Г. Н. Агаеву за постановку задачи и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И. „ДАН СССР“, т. 151, 1968, № 4.
  2. Алиханова Р. И., Ибрагимов В. А. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1971, №5.
  3. Красносельский М. А., Рутцкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
  4. Вишик М. И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков. Матем. сб., новая серия, т. 59 (101), 1962.
- Институт математики  
и механики АН СССР

Поступило 15. X 1971

Р. И. Әлиханова, В. А. Ибраһимов

Орлич синифләрində кәсилән вә тез артан әмсаллы жүксәк  
тәртибли квазихәтти параболик тәнлијин сәрһәд  
мәсәләсинин һәлли һаггында

#### ХҮЛАСӘ

Мәғлүдә кәсилән вә тез артан әмсаллы жүксәк тәртибли үмуми  
квазихәтти параболик тәнлијин биринчи сәрһәд мәсәләсинин һәлли  
мүәјјәнләшдирилмишдир.

R. I. Alikhanova, V. A. Ibragimov

The boundary value problem solvability for a quasi-linear  
parabolic equation of the higher order with discontinuous  
and rapidly growing coefficients in orlich classes

#### SUMMARY

In this paper solvability of the first boundary value problem for a  
quasi-linear equation of parabolic type of the order with discontinuous  
and rapidly growing coefficients in Orlichs type class is established enti-  
rely.



А. С. РУСТАМОВ

# СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Рассмотрим в квадрате

$$G = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq l\}$$

смешанную задачу:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \psi_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \psi_1(x), \dots, \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(x, 0) = \psi_n(x), \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \varphi_1(t), \dots, \frac{\partial^n}{\partial x^n} u(0, t) = \varphi_n(t), \quad (3)$$

$$u(l, t) = \varphi_{n+1}(t).$$

Будем называть уравнение (1) составным [5] (см. также [1, 2, 3, 4]). Заметим, что задача (1)–(3) в случае, когда  $n = 1$ , нами уже была рассмотрена в [5]. Здесь лишь несколько другим способом доказывается существование решения задачи (1)–(3) при любом целом  $n \geq 1$ .

Сперва заметим, что задачу (1)–(3) всегда можно привести к виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(x, t) = 0, \quad (1')$$

$$v(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} v(x, 0) = 0, \dots, \frac{\partial^n}{\partial t^n} v(x, 0) = 0, \quad (2')$$

$$v(0, t) = \varphi_0(t), \quad \frac{\partial}{\partial x} v(0, t) = \varphi_1(t), \dots, \frac{\partial^n}{\partial x^n} v(0, t) = \varphi_n(t), \quad (3')$$

$$v(l, t) = \varphi_{n+1}(t).$$

В самом деле, пусть  $\tilde{f}(x, t)$ ,  $\tilde{\psi}_0(x)$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{\psi}_n(x)$  есть продолжения функций  $f(x, t)$ ,  $\psi_0(x)$ ,  $\dots$ ,  $\psi_n(x)$  из квадрата  $G$  на бесконечную полосу

$$\tilde{G} = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq l\},$$

т. е.

$$\tilde{f}(x, t)|_G = f(x, t), \quad \tilde{\psi}_0(x)|_G = \psi_0(x), \dots, \tilde{\psi}_n(x)|_G = \psi_n(x).$$

Далее пусть  $u(x, t)$  есть решение задачи (1)–(3) на  $G$ , а  $w(x, t)$  — решение задачи Коши в  $\tilde{G}$ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w(x, t) = \tilde{f}(x, t),$$

$$w(x, 0) = \tilde{\psi}_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} w(x, 0) = \tilde{\psi}_1(x), \dots, \frac{\partial^n}{\partial t^n} w(x, 0) = \tilde{\psi}_n(x).$$

Решение  $w(x, t)$  определяется формулой:

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \tilde{\psi}_0(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} g(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$g(x, t) = F^n \tilde{f}(x, t) + F \left[ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w(x, t) \Big|_{t=0} \right] +$$

$$+ t \left\{ F \left[ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w(x, t) \Big|_{t=0} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{t^2}{2!} \left\{ F \left[ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w(x, t) \Big|_{t=0} \right] \right\} + \dots$$

$$+ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left\{ F \left[ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w(x, t) \Big|_{t=0} \right] \right\}.$$

Здесь  $F$  и  $F^n$  — операторы, определяемые равенствами

$$F \tilde{f}(x, t) = \int_0^t \tilde{f}(x+s-t, s) ds, \quad F^n a(x) = a(x-t).$$

Обозначим  $v = u - w$ . Тогда ясно, что  $v$  будет решением задачи вида (1')–(3') в квадрате  $G$ . Теперь вместо задачи (1)–(3) будем рассматривать (1')–(3'). Предположим, что

а) функции  $\varphi_0(t)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi_{n-1}(t)$ ,  $\varphi_n(t)$ ,  $\varphi_{n+1}(t)$ , соответственно,  $\kappa + n - 1$ ,  $\kappa + n - 2$ ,  $\dots$ ,  $\kappa$ ,  $\kappa - 1$ ,  $\kappa - 1$  раз непрерывно дифференцируемы при  $0 \leq t \leq l$  и выполняются условия согласования

$$\varphi_i(0) = \varphi_i^{(k)}(0) = \dots = \varphi_i^{(k-1)}(0) = \varphi_{n-1}^{(k)}(0) = \dots =$$

$$= \varphi_0^{(k)}(0) = \dots = \varphi_0^{(k+n-1)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n+1,$$

причем  $\kappa \geq n+2$ . Для определенности предположим также, что  $n = 2m$  четное (случай нечетного  $n$  рассматривается аналогично).

Решение задачи (1')–(3') будем искать в виде

$$v(x, t) = \int_0^t \theta_1(\tau) \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+ \int_0^t \theta_2(\tau) \frac{x-l}{2\sqrt{\pi(t-\tau)^3}} e^{-\frac{(x-l)^2}{4(t-\tau)}} d\tau + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{x^{k-3}}{(k-3)!} \theta_k(t-x), \quad (4)$$

причем будем считать, что  $\theta_i(\xi) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+2$ , при  $\xi < 0$ . Кроме того, предположим, что  $\theta_1(t)$  обращается в нуль при  $t = 0$  достаточного порядка.

Чтобы удовлетворить условиям (3'), получим следующую систему интегральных уравнений (уравнения в свертках):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} t_+^{-1/2} * \theta_1(t) + K_1 * \theta_2(t) + \theta_3(t) = \varphi_0(t),$$



Мы предполагали, что все полученные ядра равны нулю при  $t < 0$ .  
Здесь

и знак \* обозначает операцию свертки. Заметим, что ядра  $K_1(t), \dots, K_{n+2}(t)$  бесконечно дифференцируемы и обращаются в нуль при  $t=0$  произвольного порядка.

$$\begin{aligned} \theta_1(t) + K^* \theta_1(t) + \bar{K}^* \theta_2(i) &= \varphi(t), \\ K_{n+2}^* \theta_1(t) - \theta_2(i) &= \varphi_{n+1}(i). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее

где  $\Phi$ —некоторая линейная функция от своих аргументов и

Из системы (6) можно исключить  $\theta_2(\bar{t})$  и в результате получить уравнение вольтерровского типа второго рода относительно  $\theta_1(t)$  с ядром, обладающим слабой особенностью. Это уравнение имеет единственное решение, гладкость которого зависит только от гладкости  $\varphi_0(t), \varphi_1(\bar{t}), \dots, \varphi_n(t)$ .

$$\theta_1(0) = \theta_1'(0) = \dots = \theta_1^{(k+n-2)}(0) = 0.$$
$$\theta_2(0) = \theta_2'(0) = \dots = \theta_2^{(k-1)}(0) = 0.$$

**Предложение.** Пусть функции  $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{n-1}(t), \varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t)$ , соответственно,  $\kappa + n - 1, \kappa + n - 2, \dots, \kappa, \kappa - 1, \kappa - 1$  раз непрерывно дифференцируемы при  $0 \leq t \leq l$ , где  $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{n+1}(t)$  — правые части в системе (5) и выполняются условия

Тогда  $\theta_2(t)$ ,  $\theta_3(t)$ ,  $\theta_1(t)$  и  $\theta_4(t)$ ,  $\theta_5(t)$ ,  $\dots$ ,  $\theta_{n+2}(t)$  будут, соответственно,  $k-1$ ,  $k+n-1$ ,  $k+n-2$ ,  $k+n-3$ ,  $\dots$ ,  $k$  раз непрерывно дифференцируемыми, где  $\theta_1(t)$ ,  $\dots$ ,  $\theta_{n+2}(t)$  есть решения системы (5) и выполняются условия

Из этого предложения следует

порядка  $k-1$  по совокупности переменных, причем  $v(x, t)$  и все эти производные равны нулю при  $t = 0$ .

$$G = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T\},$$
$$v(x, t) = \int_0^t \theta_1(\tau) \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau +$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Hadamard J. Proprietes d'une equation lineaire aux derivees partielles du quatriemes ordre, Tohoku Math. Journ. 37 (1933), 133—150.
2. Sjöstrand O. Sur une equation aux derivees partielles du type composite, Arkiv for Mat., Astr. och Fysik, 25A, № 21 (1937), 1—11; 26A, № 1 (1938) 1—10.
3. Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С. К теории уравнений смешанно-составного типа, СМЖ 2, № 1, (1961), 7—19.
4. Эскин Г. И. Краевые задачи для уравнений с постоянными коэффициентами на плоскости. Матем. сб. 59 (101) (дополнительный), 1962, 67—104.
5. Рустамов А. С. Исследование смешанной задачи для одного уравнения составного типа, Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, № 5—6, 1971 г., стр. 18—24.
1. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, М., 1953.
7. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними, вып. I, М., 1959.

Поступило 15. X 1971

**А. С. РҮСТӘМОВ**

**Тэкрар характеристикалы гарышыг типли бир тэнлик үчүн  
гарышыг мәсәлә**

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә (1) тәнлији үчүн дүзбучаглы областда гојулмуш гарыш-  
шыг мәселәнин һәллинин варлығы исбат олунмушдур.



# Mixed problem for one equation of a composite type with multiple characteristics

## SUMMARY

In the article we consider a mixed problem for the equation (1) in the rectangle. Existence of a sufficiently smooth solution of such a problem has been proved.

М. А. ДЖАВАДОВ И С. С. КАСЫМОВА

## ЭРМИТОВЫ КВАЗИНЕЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА НАД АЛГЕБРОЙ КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ

В работе [1] мы определяли квазинеевклидовы пространства  ${}^{l_0 l_1}S_n^p(M^m)$  над алгеброй  $M^m$  вещественных матриц  $m$ -го порядка, являющихся матричным аналогом вещественного квазинеевклидова пространства  ${}^{l_0 l_1}S_n^p$  [2] и получаемых предельным переходом из неевклидовых пространств  ${}^l S_n(M^m)$  над алгеброй  $M^m$ , определенных М. А. Джавадовым [3]. В настоящей работе мы определяем аналогичные эрмитовы квазинеевклидовы пространства  ${}^{l_0 l_1}\tilde{S}_n^p(C^m)$  над алгеброй  $C^m$  комплексных матриц  $m$ -го порядка, получаемые предельным переходом из эрмитовых неевклидовых пространств  ${}^l \tilde{S}_n(C^m)$  над алгеброй  $C^m$ , также определенных М. А. Джавадовым [3].

### § 1. Абсолют эрмитова квазинеевклидова пространства

Будем называть  $n$ -мерным эрмитовым квазинеевклидовым пространством  ${}^{l_0 l_1}\tilde{S}_n^p(C^m)$  над алгеброй  $C^m$  комплексных матриц  $m$ -го порядка  $n$ -мерное проективное пространство  $P_n(C^m)$ , в котором определен эрмитов конус второго порядка индекса  $l_0$  с уравнением

$$\sum_{i_0} \varepsilon_{i_0} \tilde{x}^{i_0} x^{i_0} = 0, \quad (1)$$

где  $i_0, j_0, \kappa_0, \dots = 0, 1, \dots, p$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i_0} &= -1 & (0 \leq i_0 < l_0), \\ \varepsilon_{i_0} &= 1 & (l_0 \leq i_0 \leq p), \end{aligned}$$

все касательные гиперплоскости которого проходят через  $(n-p-1)$ -мерную плоскость  $x^{i_0} = 0$  и эрмитова квадрика индекса  $l_1$  на этой плоскости с уравнением

$$\sum_{i_1} \varepsilon_{i_1} \tilde{x}^{i_1} x^{i_1} = 0, \quad (2)$$

где  $i_1, j_1, \kappa_1, \dots = p+1, \dots, n$ ,  $\varepsilon_{i_1} = -1$  ( $p+1 \leq i_1 < l_1$ ),  
 $\varepsilon_{i_1} = 1$  ( $l_1 \leq i_1 \leq n$ ),

$\tilde{x}$ —матрица  $m$ -го порядка, получена из матриц  $x$  транспонированием и переходом к комплексно сопряженным элементам.

Совокупность поверхностей (1) и (2) будем называть абсолютм этого пространства. Плоскость  $x^{i_0} = 0$  будем называть абсолютной плоскостью пространства  ${}^{l_0 l_1}\tilde{S}_n^p(C^m)$ , эрмитов конус (1)—абсолютным конусом, а эрмитову квадрику (2)—абсолютной квадрикой этого пространства. При  $p = 0$  пространство  ${}^{l_0 l_1}\tilde{S}_n^p(C^m)$  совпадает с эрмитовым евклидовым пространством  ${}^l \tilde{R}_n(C^m)$ .

Если прямая, соединяющая две точки  $x(x^i)$  и  $y(y^i)$  пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$ , не пересекается с абсолютной плоскостью, на этой прямой имеет место такая же геометрия, что и на прямых неевклидова пространства  ${}^l \tilde{S}_n(C^m)$ , поэтому будем называть такие прямые неевклидовыми.

Если прямая, соединяющая точки  $x(x^i)$  и  $y(y^i)$  пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$ , пересекается с абсолютной плоскостью в одной точке, на этой прямой имеет место такая же геометрия, что и на прямых евклидова пространства  ${}^l R_n(C^m)$ , поэтому будем называть эти прямые евклидовыми.

Так как в пространстве  $P_n(C^m)$  проективные координаты точек  $x^i$  определены с точностью до преобразования  $x^i \rightarrow x^i t$ , где  $t$  — элемент из алгебры  $C^m$ , не являющийся нулем или делителем нуля, координаты  $x^i$  точек пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$ , не лежащих на абсолютном конусе, можно нормировать требованием, чтобы произведение

$\sum_{i_0} \varepsilon_{i_0} \bar{x}^{i_0} x^{i_0} = \eta$  имело бы наиболее простой вид. Поскольку матрица  $\gamma$  эрмитова, характеристические числа эрмитовой матрицы действительны, при преобразовании  $x^{i_0} \rightarrow x^{i_0} t$  матрица  $\gamma$  преобразуется по закону  $\gamma \rightarrow \bar{t} \gamma t$ , так как всякую эрмитову матрицу  $\gamma$  таким преобразованием можно привести к диагональному виду  $(\eta_\alpha \delta_\beta^\alpha)$ , где числа  $\eta_\alpha$  равны  $\pm 1$ .

Таким образом, можем нормировать координаты  $x^i$  точек пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$ , не лежащие на абсолютном конусе, условием

$$\sum_{i_0} \varepsilon_{i_0} \bar{x}^{i_0} x^{i_0} = \eta. \quad (3)$$

Абсолют пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  получается предельным переходом из абсолюта пространства  ${}^l \tilde{S}_n(C^m)$ . Отсюда следует, что и само пространство  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  можно получить предельным переходом из  ${}^l \tilde{S}_n(C^m)$ .

## § 2. Метрические инварианты

Полярной гиперплоскостью точки  $x(x^i)$  относительно абсолютного конуса (1) является гиперплоскость с тангенциальными координатами

$$u_{i_0} = \varepsilon_{i_0} \bar{x}^{i_0}, \quad u_{i_1} = 0.$$

Если точки  $x(x^i)$  и  $y(y^i)$  лежат на неевклидовых прямых, для этих точек и их полярных гиперплоскостей можно определить двойное отношение:

$$M = (\bar{Y}^0 E_0 Y^0)^{-1} (\bar{Y}^0 E_0 X^0) (\bar{X}^0 E_0 X^0)^{-1} (\bar{X}^0 E_0 Y^0), \quad (4)$$

где  $X^0 = (X^{i_0})$ ,  $Y^0 = (Y^{i_0})$ ,  $E_0 = (\varepsilon_{i_0} \delta_{i_0}^{i_0})$ .

Двойное отношение (4) двух точек, координаты которых нормированы условием (3), и их полярных гиперплоскостей является матрицей

$$M = \eta (\bar{Y}^0 E_0 X^0) \eta (\bar{X}^0 E_0 Y^0) \quad (5)$$

и

$$\eta M = (\bar{Y}^0 E_0 X^0) \eta (\bar{X}^0 E_0 Y^0). \quad (6)$$

Матрица (4) определяется с точностью до подобия  $M = t^{-1} M t$ .

Если прямая, проходящая через точки  $x(x^i)$  и  $y(y^i)$ , пересекается с абсолютной плоскостью, то имеет место равенство  $x^{i_0} = y^{i_0}$  и в

этом случае матрица  $M$  является единичной. Поэтому составим матрицу

$$N = \sum_{i_1} \varepsilon_{i_1} (\bar{x}^{i_1} - \bar{y}^{i_1}) (x^{i_1} - y^{i_1}) = (\bar{X}^1 - \bar{Y}^1) E_1 (X^1 - Y^1), \quad (7)$$

где  $X^1 = (x^{i_1})$ ,  $E_1 = (\varepsilon_{i_1} \delta_{i_1}^{i_1})$ ,  $Y^1 = (y^{i_1})$ .

При умножении координаты  $x^i$  справа комплексную матрицу  $t$  матрица  $N$  преобразуется по закону

$$N = \bar{t} N t.$$

Матрицы  $\eta M$  и  $N$ , имеющие вид (4) и (7), эрмитовы, так как

$$\overline{\eta M} = \eta M \quad \text{и} \quad \bar{N} = N.$$

Так как матрицы  $\eta M$  и  $N$  эрмитовы, их можно привести к диагональному виду. Собственные числа матрицы  $\eta M$  будем называть вещественными метрическими инвариантами двух точек, лежащих на неевклидовой прямой, а собственные числа матрицы  $N$  — вещественными метрическими инвариантами двух точек, лежащих на евклидовой прямой. Так как матрицы  $\eta M$  и  $N$   $m$ -го порядка, числа вещественных неевклидовых и евклидовых инвариантов двух точек пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  равны  $m$ .

## § 3. Комплексная интерпретация квазиевклидова пространства

Из интерпретации пространства  $P_n(C^m)$  в виде многообразия  $(m-1)$ -мерных плоскостей пространства  $P_{nm+m-1}(C)$  вытекает, что полярное преобразование относительно эрмитова конуса (1) пространства  $P_n(C^m)$  имеющее вид

$$u_{i_0} = \varepsilon_{i_0} \bar{x}^{i_0}, \quad u_{i_1} = 0,$$

изображается в пространстве  $P_{nm+m-1}(C)$  полярным преобразованием

$$u_{mi_0+\alpha} = \varepsilon_{mi_0+\alpha} \bar{X}^{mi_0+\alpha}; \quad u_{mi_1+\alpha} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1,$$

относительно эрмитова конуса индекса  $ml_0$

$$\sum_{i_0} \sum_{\alpha} \varepsilon_{mi_0+\alpha} \bar{X}^{mi_0+\alpha} X^{mi_0+\alpha} = 0, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{mi_0+\alpha} = -1 \quad (0 \leq mi_0 + \alpha < ml_0),$$

$$\varepsilon_{mi_0+\alpha} = 1 \quad (ml_0 \leq mi_0 + \alpha \leq mp + m - 1),$$

а полярное преобразование абсолютной плоскости  $X^{i_0} = 0$  пространства  $P_n(C^m)$  относительно абсолютной квадрики (2), имеющее вид  $u_{i_1} = \varepsilon_{i_1} \bar{X}^{i_1}$ , изображается в пространстве  $P_{nm+m-1}(C)$  полярным преобразованием

$$u_{mi_1+\alpha} = \varepsilon_{mi_1+\alpha} \bar{X}^{mi_1+\alpha},$$

относительно эрмитовой квадрики индекса  $ml_1$

$$\sum_{i_1} \sum_{\alpha} \varepsilon_{mi_1+\alpha} \bar{X}^{mi_1+\alpha} X^{mi_1+\alpha} = 0, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{mi_1+\alpha} = -1 \quad (mp + m \leq mi_1 + \alpha < ml_1),$$

$$\varepsilon_{mi_1+\alpha} = 1 \quad (ml_1 \leq mi_1 + \alpha \leq nm + m - 1),$$

на плоскости  $X^{mi_0+\alpha} = 0$ .

Эрмитов конус (8) и эрмитова квадрика (9) составляют абсолют комплексного эрмитова квазиевклидова пространства  ${}^{ml_0 ml_1} \tilde{S}_{nm+m-1}^{pm+m-1}(C)$ . Из этой интерпретации вытекает, что точки абсолютного конуса



(1) пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  изображаются  $(m-1)$ -мерными плоскими образующими абсолютного эрмитова конуса (8) комплексного эрмитова квазинеевклидова пространства  ${}^{m l_0 m l_1} \tilde{S}_{nm+m-1}^{pm+m-1}(C)$ , точки абсолютной квадрики (2) пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  изображаются  $(m-1)$ -мерными плоскими образующими абсолютной эрмитовой квадрики пространства  ${}^{m l_0 m l_1} \tilde{S}_{nm+m-1}^{pm+m-1}(C)$ . Тем самым мы показали, что абсолют пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  изображается абсолютом комплексного квазинеевклидова пространства  ${}^{m l_0 m l_1} \tilde{S}_{nm+m-1}^{pm+m-1}(C)$ .

Можно доказать, что неевклидовы и евклидовы метрические инварианты двух точек пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  совпадают с неевклидовыми и евклидовыми инвариантами изображающих их  $(m-1)$ -мерных плоскостей пространства  ${}^{m l_0 m l_1} \tilde{S}_{nm+m-1}^{pm+m-1}(C)$ .

Так как абсолют пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  изображается абсолютом пространства  ${}^{m l_0 m l_1} \tilde{S}_{nm+m-1}^{pm+m-1}(C)$ , метрические инварианты точек пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  совпадают с метрическими инвариантами  $(m-1)$ -мерных плоскостей пространства  ${}^{m l_0 m l_1} \tilde{S}_{nm+m-1}^{pm+m-1}(C)$ , эрмитово квазинеевклидово пространство  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  допускает комплексную интерпретацию в виде многообразия  $(m-1)$ -мерных плоскостей пространства  ${}^{m l_0 m l_1} \tilde{S}_{nm+m-1}^{pm+m-1}(C)$ .

#### § 4. Движение квазинеевклидова пространства

Будем называть движениями квазинеевклидова пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  коллинеации этого пространства, сохраняющие метрические инварианты его точек. Очевидно, что эти коллинеации должны переводить в себя абсолют пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$ .

Матрица движения в пространстве  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} U_0 & 0 \\ T & U_1 \end{pmatrix},$$

где  $U_0$  и  $U_1$  — унитарные матрицы  $(p+1)$  и  $(n-p)$ -го порядка с элементами из алгебры  $C^m$ ,  $T$  — прямоугольная матрица с произвольными элементами из алгебры  $C^m$ .

Движения пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C^m)$  образуют группу. Так как группа движений квазинеевклидова пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C)$  является квазипростой группой Ли классов  $A_n$ , группа движений квазинеевклидова пространства  ${}^{l_0 l_1} \tilde{S}_n^p(C)$ , изоморфная группе движений пространства  ${}^{m l_0 m l_1} \tilde{S}_{nm+m-1}^{pm+m-1}(C)$ , является квазипростой группой Ли класса  $A_{nm+m-1}$ .

#### § 5. Вещественная интерпретация эрмитова квазинеевклидова пространства над алгеброй комплексных матриц $m$ -го порядка

М. А. Джавадов [3] предложил интерпретацию  $n$ -мерного проективного пространства  $P_n(C^m)$  над алгеброй комплексных матриц  $m$ -го порядка в виде линейной конгруенции прямых  $(2n+1)$ -мерного проективного пространства  $P_{2n+1}(M^m)$  над вещественными матрицами  $m$ -го порядка  $M^m$ . Соответствие прямых пространства  $P_{2n+1}(M^m)$  над

вещественными матрицами и точек пространства  $P_n(C^m)$  над комплексными матрицами устанавливается таким образом, что прямой, проходящей через точку с координатами  $(X_\beta^a)^i$ , соответствует точка с координатами

$$\begin{aligned} (x_\beta^a)^i &= (X_\beta^a)^{2i} + i (X_\beta^a)^{2i+1}, \\ i, j, k, \dots &= 0, 1, \dots, n; I, J, \dots = 0, 1, \dots, 2n+1; \\ \alpha, \beta, \gamma, \dots &= 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

$(x_\beta^a), (k_\gamma^b)$  — комплексные  $m$ -мерные матрицы;

$(X_\beta^a), (K_\gamma^b), (L_\gamma^c)$  — вещественные  $m$ -мерные матрицы.

Так как точка пространства  $P_n(C^m)$  с координатами  $(x_\beta^a)^i = (X_\beta^a)^{2i} + i (X_\beta^a)^{2i+1}$  определяется также координатами  $(x_\beta^a)^i (k_\gamma^b)^j$ , где  $(k_\gamma^b) = (K_\gamma^b) + i (L_\gamma^c)$ , то этой точке пространства  $P_n(C^m)$  можно поставить в соответствие множество точек пространства  $P_{2n+1}(M^m)$ , удовлетворяющее условию

$$\begin{aligned} &[(X_\beta^a)^{2i} + i (X_\beta^a)^{2i+1}] [(K_\gamma^b) + i (L_\gamma^c)] = \\ &= [(X_\beta^a)^{2i} (K_\gamma^b) - (X_\beta^a)^{2i+1} (L_\gamma^c)] + i [(X_\beta^a)^{2i} (L_\gamma^c) + (X_\beta^a)^{2i+1} (K_\gamma^b)]. \end{aligned}$$

Поэтому точке пространства  $P_n(C^m)$  с координатами  $(x_\beta^a)^i$  соответствует прямая пространства  $P_{2n+1}(M^m)$ , точки которой имеют координаты

$$\begin{aligned} {}^1(X_\beta^a)^{2i} &= (X_\beta^a)^{2i} (K_\gamma^b) - (X_\beta^a)^{2i+1} (L_\gamma^c), \\ {}^1(X_\beta^a)^{2i+1} &= (X_\beta^a)^{2i} (L_\gamma^c) + (X_\beta^a)^{2i+1} (K_\gamma^b), \end{aligned}$$

т. е. прямая, соединяющая точку  ${}_1X$  с координатами  $({}_1X_\beta^a)^i$  и точку  ${}_2X$  с координатами  $({}_2X_\beta^a)^i$ , где

$$({}_2X_\beta^a)^{2i} = - (X_\beta^a)^{2i+1}, \quad ({}_2X_\beta^a)^{2i+1} = ({}_1X_\beta^a)^{2i}. \quad (10)$$

Переход от точки  ${}_1X$  к точке  ${}_2X$  является инволюционной коллинеацией.

Если коллинеация (10) переводит точку  ${}_1X$  пространства  $P_{2n+1}(M^m)$  в точку  ${}_2X$ , то точка  $U$  прямой  $X = {}_1X {}_2X$  переходит в некоторую точку  ${}_1U$  той же прямой, так как если точки  ${}_1X, {}_2X, U$  лежат на одной прямой и переходят соответственно в точки  ${}_2X, {}_1X, {}_1U$ , также лежащие на одной прямой, то эта прямая совпадает с прямой  $X$ . Следовательно, точки пространства  $P_n(C^m)$  изображаются прямыми линейной конгруенции прямых пространства  $P_{2n+1}(M^m)$ .

Группа коллинеаций в пространстве  $P_{2n+1}(M^m)$ , переводящих в себя каждую прямую этой конгруенции, является подгруппой группы коллинеаций пространства  $P_{2n+1}(M^m)$ .

В работе М. А. Джавадова [3] доказано также, что  $n$ -мерное проективное пространство  $P_n(M^m)$  над алгеброй вещественных матриц  $m$ -го порядка допускает вещественную интерпретацию в виде многообразия  $(m-1)$ -мерных плоскостей  $(nm+m-1)$ -мерного вещественного проективного пространства  $P_{nm+m-1}$ .

Из этих двух вышеуказанных теорем как следствие получается следующая.

**Теорема:**  $n$ -мерное проективное пространство  $P(C^m)$  над алгеброй комплексных матриц  $m$ -го порядка допускает вещественную интерпретацию в виде многообразия  $(2m-1)$ -мерных плоскостей  $(2nm+m-1)$ -мерного проективного пространства  $P_{2nm+m-1}(M^m)$ .



$+2m-1$ )-мерного вещественного проективного пространства  $P_{2nm+2m-1}$ .

Доказательство этой теоремы аналогично второй из приведенных теорем, а поэтому здесь не приводится.

Из вышеуказанных теорем следует:

1. Прямые линейной конгруенции  $(2n+1)$ -мерного квазинеевклидова пространства  ${}^{2l_0, 2l_1}S_{2n+1}^{2p+1}(M^m)$  над вещественными матрицами  $m$ -го порядка находятся во взаимно однозначном соответствии с точками  $n$ -мерного квазинеевклидова пространства  ${}^{l_0, l_1}\tilde{S}_n^p(C^m)$  над комплексными матрицами  $m$ -го порядка.

2.  $n$ -мерные эрмитовы квазинеевклидовы пространства  ${}^{l_0, l_1}\tilde{S}_n^p(C^m)$  над алгеброй комплексных матриц  $m$ -го порядка допускают вещественную интерпретацию в виде многообразия  $(2m-1)$ -мерных плоскостей  $(2nm+2m-1)$ -мерного квазинеевклидова пространства  ${}^{2m, 2l_0, 2l_1}S_{2nm+2m-1}^{2p+2-1}$ . При  $p=0$  пространство  ${}^{l_0, l_1}\tilde{S}_n^p(C^m)$  совпадает с эрмитово-евклидовым пространством  ${}^l\tilde{R}_n(C^m)$ . Поэтому аналогично можно построить и вещественную интерпретацию пространства  ${}^l\tilde{R}_n(C^m)$ .

В работе [4] доказано, что евклидово пространство  ${}^lR_n(M^m)$  над алгеброй вещественных матриц  $m$ -го порядка допускает вещественную интерпретацию в виде многообразия  $(m-1)$ -мерных плоскостей квазинеевклидова пространства  ${}^{m, l}S_{nm+m-1}^{m-1}$ , не пересекающихся с его абсолютной плоскостью. В [5] доказано, что эрмитово-евклидово пространство над алгеброй комплексных матриц  $m$ -го порядка допускает интерпретацию в виде  $(m-1)$ -мерных плоскостей пространства  ${}^{m, l}S_{nm+m-1}^{m-1}(C)$ .

Таким образом, как следствие из этих теорем получается, что  $n$ -мерное эрмитово-евклидово пространство над алгеброй комплексных матриц  $m$ -го порядка допускает вещественную интерпретацию в виде  $(2m-1)$ -мерных плоскостей вещественного квазинеевклидова пространства  ${}^{2m, l}S_{2nm+2m-1}^{2m-1}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Касымова С. С. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966, № 4.
2. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., 1969.
3. Джавадов М. А. „ДАН СССР“, т. 67, 1954, № 5.
4. Касымова С. С. „Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. наук“, 1966, № 2.
5. Касымова С. С. Эрмитово-евклидовы пространства над алгеброй комплексных матриц  $m$ -го порядка. Тезисы докладов IV межвузовской конференции по геометрии. Тбилиси, 1969.

Институт математики  
и механики АН Азерб. ССР

Поступило 18. XI 1971

М. Э. Чавадов, С. С. Гасимова

#### Комплекс матрислэр чэбри үзэриндэ гурулан ермит квазигејриеувклид фэзалары

ХҮЛАСЭ

Тэдгигатда  $m$ -тэртибли комплекс матрислэр чэбри үзэриндэ гурулан  $n$ -өлчүлү ермит квазигејриеувклид фэзалары өјрөнілмишдир. Нэмин фэзаларда нөгтэлэрин метрик инвариантлары вэ һэрэкэти тэјин олунмушдур.

$m$ -тэртибли комплекс матрислэр чэбри үзэриндэ гурулан  $n$ -өлчүлү ермит квазигејриеувклид фэзаларынын нөгтэлэр чохлауу илэ  $m$ -тэртибли һэгиги матрислэр чэбри үзэриндэ гурулан  $(2n+1)$ -өлчүлү ермит квазигејриеувклид фэзаларынын хэтлэри чохлауу арасында гаршылыгылы биргигметли ујғунлуғун варлығы исбат олунмушдур.

УДК. 517. 948

Д. А. АХУНДОВ

#### О ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРАХ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка в гильбертовом пространстве  $H$ :

$$u''(t) + Au'(t) + Bu(t) = f(t, u(t), u'(t)). \quad (1)$$

Настоящая статья посвящена вопросу существования волновых операторов и оператора рассеяния для уравнения (1), в классе решений  $u(t)$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $H$  и непрерывно дифференцируемых в  $H(B^{1/2})$ . Впервые задача рассеяния для гиперболического уравнения второго порядка:

$$u''(t) + Au(t) = f(t, u(t)) \quad (2)$$

в гильбертовом пространстве  $H$  изучалась В. Штрауссом [1], который относительно  $A$  и  $f(t, u)$  предполагал следующее:  $A$  — положительный самосопряженный оператор в  $H$ ;  $f(t, u)$  — нелинейный оператор, действующий из  $T \times H(A)$  в  $H(A^{1/2})$ . Задача рассеяния была решена в предположении, что  $\|A^{1/2}[f(t, u) - f(t, v)]\| \leq \sigma(t) \|Au - Av\|$  для любых  $u, v \in D(A)$  ( $\sigma(t)$  — ограниченная, интегрируемая на  $T = (-\infty, \infty)$  функция). В дальнейшем задача рассеяния для (2) в гильбертовом пространстве  $H$  исследовалась Ф. Браудером и Е. Штрауссом [2] в предположении, что  $A$  порождает равномерно ограниченную группу операторов  $e^{tA}$ , а  $f(t, u)$  — потенциальный нелинейный оператор, действующий из  $T \times H(A^{1/2})$  в  $H$ .

В обеих вышеуказанных работах исследовалась задача рассеяния для слабых решений гиперболического уравнения (2), т. е. решений, удовлетворяющих интегральному уравнению, соответствующему (2). Пусть  $u(t)$  — решение (1) с начальными данными  $u(0) = u_0 \in D(B)$ ,

$u'(0) = u_1 \in D(B^{1/2})$ , а  $u_+(t)$ ,  $u_-(t)$  — решения задач

$$u''(t) + Au'(t) + Bu(t) = 0, \quad u(0) = u_0^\pm \in D(B), \quad u'(0) = u_1^\pm \in D(B^{1/2}),$$

$$u''(t) + Au'(t) + Bu(t) = 0, \quad u(0) = u_0^- \in D(B), \quad u'(0) = u_1^- \in D(B^{1/2})$$

\*  $H(B^{1/2})$  — гильбертово пространство, состоящее из элементов  $u \in D(B^{1/2})$  с метрикой  $\|u\|_{H(B^{1/2})} = \|B^{1/2}u\|$ .



соответственно такие, что в метрике  $H(B^{1/2})$  выполняются асимптотические равенства

$$u(t) = u_{\pm}(t) + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow \pm \infty.$$

Определение. Операторы, определяемые соотношениями

$$W_+ u(t) = u_+(t) \quad [W_+(u_0, u_1) = (u_0^+, u_1^+)],$$

$$W_- u(t) = u_-(t) \quad [W_-(u_0, u_1) = (u_0^-, u_1^-)],$$

называются волновыми, а оператор

$$S u_-(t) = u_+(t) \quad [S(u_0^-, u_1^-) = (u_0^+, u_1^+)]$$

— оператором рассеяния для уравнения (1).

Замечание. Доказательство будем вести для  $W_-$ . Подобное доказательство с очевидным изменением может быть проведено и для  $W_+$ .

Теорема 1. Пусть: 1°.  $B$  — самосопряженный, положительный оператор в  $H$ .

2°. Линейный оператор  $A$  с плотной областью определения  $D(A)$  консервативен, т. е. при любом  $u \in D(A)$  имеет место равенство  $\operatorname{Re}(Au, u) = 0$ , оператор  $A$  подчинен оператору  $B^{1/2}$ .

3°. Оператор  $f(t, u, v)$  действует из  $T \times H(B) \times H(B^{1/2})$  в  $H(B^{1/2})$  и как оператор из  $T \times H(B) \times H(B^{1/2})$  в  $H$  имеет сильно непрерывную производную Фреше  $D_u f(t, u, v)$ , сильную непрерывную  $H$ -расширенную производную Фреше  $\bar{D}_v f(t, u, v)$  (см., например, [3]) и непрерывную производную  $D_t f(t, u, v)$ , которые удовлетворяют условию Липшица с коэффициентом  $\sigma(t, R)$  в каждом шаре радиуса  $R$  пространства  $H(B) \times H(B^{1/2})$ .

4°. Для любых  $u \in D(B)$ ,  $v \in D(B^{1/2})$  имеют место оценки

$$\|D_t f(t, u, v)\| \leq \sigma(t) (1 + \|u\|_{H(B)} + \|v\|_{H(B^{1/2})}),$$

$$\|D_u f(t, u, v)\|_{H(H(B^{1/2})H)} \leq \sigma(t), \quad \|\bar{D}_v f(t, u, v)\|_{B(H)} \leq \sigma(t).$$

5°. Оператор  $f(t, u, v)$  удовлетворяет условию Липшица в каждом шаре пространства  $H(B) \times H(B^{1/2})$ ,  $f(t, 0, 0) = 0$ ,  $t \in T$ .

Тогда оператор  $W_-$  существует, отображает  $D_- = H(B) \times H(B^{1/2})$  на  $R_- = H(B) \times H(B^{1/2})$  взаимно однозначно, удовлетворяет условию Липшица в каждом шаре пространства  $H(B) \times H(B^{1/2})$ . Оператор  $W_-^{-1}$  существует и липшицево непрерывен в каждом шаре пространства  $H(B) \times H(B^{1/2})$ .

Доказательство. Заменой

$$\begin{cases} v_1(t) = \frac{1}{2} [iB^{1/2} u(t) + u'(t)], \\ v_2(t) = \frac{1}{2} [-iB^{1/2} u(t) + u'(t)], \end{cases}$$

предложенной С. Я. Якубовым [3], задачу (1) сведем к эквивалентной задаче

$$V'(t) = LV(t) + F(t, V(t)), \quad V(0) = V_0, \quad (3)$$

на топологическом произведении  $H \times H = H^2$ , где

$$L = \begin{pmatrix} iB^{1/2} - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A \\ -\frac{1}{2}A - iB^{1/2} - \frac{1}{2}A \end{pmatrix},$$

$$F(t, V) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f(t, -iB^{-1/2}(v_1 - v_2), v_1 + v_2) \\ f(t, -iB^{-1/2}(v_1 - v_2), v_1 + v_2) \end{pmatrix},$$

$$V_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} iB^{1/2} u_0 + u_1 \\ -iB^{1/2} u_0 + u_1 \end{pmatrix}.$$

В работе [4] была доказана теорема существования волновых операторов для уравнения первого порядка типа (3) в гильбертовом пространстве  $H$  в классе сильных решений. Проверив, что при предположениях нашей теоремы существуют волновые операторы для уравнения (3) в пространстве  $H^2$ , тем самым докажем теорему для (1).

Легко заметить, что оператор  $iL$  с областью определения  $D(L) = D(B^{1/2}) \times D(B^{1/2})$  является самосопряженным в пространстве  $H^2 = H \times H$  при всех  $v \in D(L)$ . Действительно, симметричность  $iL$  следует из самосопряженности  $B^{1/2}$  и консервативности  $A$ ; с другой стороны, оператор  $L$  имеет ограниченный обратный:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} -iB^{-1/2} - \frac{1}{2}B^{-1/2}AB^{-1/2} & \frac{1}{2}B^{-1/2}AB^{-1/2} \\ \frac{1}{2}B^{-1/2}AB^{-1/2} & iB^{-1/2} - \frac{1}{2}B^{-1/2}AB^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Значит в силу теоремы Стоуна  $L$  порождает сильнонепрерывную унитарную группу операторов  $e^{itL}$  ( $t \in T = (-\infty, \infty)$ ) в пространстве  $H^2$ .

Теперь покажем, что оператор  $F(t, v)$ , как оператор из  $T \times H^2(L)$  в  $H^2$ , имеет сильнонепрерывную  $H^2$ -расширенную производную Фреше  $\bar{D}_v F(t, v)$  и непрерывную производную  $D_t F(t, v)$ , которые удовлетворяют по  $v$  условию Липшица в каждом шаре пространства  $H^2(L)$  с коэффициентом  $\sigma(t, R)$ .

Пусть  $v = (v_1, v_2) \in [H(B^{1/2})]^2 = H^2(L)$ . Так как  $B^{-1/2}(v_1 - v_2) \in D(B)$ ,  $v_1 + v_2 \in D(B^{1/2})$ , то  $F(t, v)$  будет действовать из  $T \times H^2(L)$  в  $H^2(L)$ , если оператор  $f(t, u, v)$  действует из  $T \times H(B) \times H(B^{1/2})$  в  $H(B^{1/2})$ . Далее из условия 3° следует, что оператор  $F(t, v)$ , как оператор из  $T \times H^2(L)$  в  $H^2$ , имеет  $H^2$ -расширенную производную Фреше  $\bar{D}_v F(t, v)$ .

Действительно, из формулы для определения производной Фреше

$$D_v F(t, v)h = \frac{d}{ds} F(t, v + sh)|_{s=0} \quad \text{находим}$$

$$D_v F(t, v) = \frac{1}{2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -iD_u f(t, -iB^{-1/2}(v_1 - v_2), v_1 + v_2) B^{-1/2} + D_v f iD_u f B^{-1/2} + D_v f \\ -iD_u f B^{-1/2} + D_v f & iD_u f B^{-1/2} + D_v f \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Из (4) следует существование  $H^2$ -расширенной производной  $\bar{D}_v F(t, v)$ . Пусть  $v_1 = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)})$ ,  $v_2 = (v_1^{(2)}, v_2^{(2)}) \in S_{H^2(L)}(R)$ ,  $h = (h_1, h_2) \in H^2$ . Легко видеть, что

$$\|\bar{D}_v F(t, v_1) - \bar{D}_v F(t, v_2)\|_{B(H^2)} \leq \sigma(t, R) \|v_1 - v_2\|_{H^2(L)}.$$

Подобным образом легко показать, что  $\|D_t F(t, v_1) - D_t F(t, v_2)\|_{H^2} \leq \sigma(t, R) \|v_1 - v_2\|_{H^2(L)}$  для  $v_1, v_2 \in S_{H^2(L)}(R)$ .

\* Идея доказательства подобных фактов, принадлежащая С. Я. Якубову, изложена, например, в работе [5].



Используя условия 4° теоремы, можно показать, что для любого  $V \in D(\bar{L})$  имеют место неравенства

$$\|D_t F(t, V)\|_{H^2} \leq \sigma(t)(1 + \|V\|_{H^2(L)}), \|\bar{D}_V F(t, V)\|_{B(H^2)} \leq \sigma(t).$$

Наконец, в силу условий 5° теоремы имеем  $\|F(t, V_1) - F(t, V_2)\|_{H^2(L)} \leq \sigma(t, R)\|V_1 - V_2\|_{H^2(L)}$  для  $V_1, V_2 \in S_{H^2(L)}(R)$ .

Таким образом показано, что операторы  $L$  и  $F(t, V)$  удовлетворяют всем условиям теоремы 2 из работы [4] в пространстве  $H^2$  и, следовательно,  $W_-$  существует. Теорема полностью доказана.

**Следствие.** Оператор рассеяния  $S = W_+ W_-^{-1}$  для уравнения (1) существует, действует из  $H(B) \times H(B^{1/2})$  в  $H(B) \times H(B^{1/2})$  и удовлетворяет условию Липшица в каждом шаре пространства  $H(B) \times H(B^{1/2})$ .

2. В качестве приложения, полученного абстрактного результата, рассмотрим в цилиндре  $Q = T \times \Omega$  (где  $\Omega$  — ограниченная область изменения  $x \in R_n$ ,  $t \in T = (-\infty, \infty)$ ) задачу рассеяния для гиперболического уравнения

$$D_t^2 u(t, x) + \sum_{|\alpha| < m} A_\alpha(x) D^\alpha D_t u(t, x) + \sum_{|\alpha| < 2m} B_\alpha(x) D^\alpha u(t, x) = F(t, x, u(t, x), D_t u(t, x)), \quad (5)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ;  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ;  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ;

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}; \quad D_\kappa = i \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \quad (\kappa = \overline{1, n}); \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t},$$

с однородными граничными условиями

$$\left. \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial n^{j-1}} \right|_\Gamma = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \quad (6)$$

**Теорема 2.** Пусть: 1°.  $B_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$  и  $B(x, D) = \sum_{|\alpha| < 2m} B_\alpha(x) D^\alpha$

формально самосопряженный положительно эллиптический оператор в  $\Omega$ , т. е.  $B(x, D)$  совпадает с формально сопряженным оператором

$$B'(x, D)u = \sum_{|\alpha| < 2m} L^\alpha(\bar{B}_\alpha(x) u(x)) \text{ и } \sum_{|\alpha| = 2m} B_\alpha(x) r^\alpha > 0$$

для каждого вещественного  $\xi \neq 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$  при этом  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ .

2°. Оператор  $B$ , порожденный системой  $\left(B(x, D), \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m\right)$ , является самосопряженным в  $L_2(\Omega)$  с областью определения  $D(B) = W_{2,0}^{2m}(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m)^*$ , для оператора  $B$  имеет место неравенство Вишика — Гординга, т. е.  $(Bu, u) \geq c_1 \|u\|_{W_{2,0}^{2m}}^2 - c_2 \|u\|_{L_2}^2$ ,  $c_1 > 0$  при всех  $u \in W_{2,0}^{2m}(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m)$ .

\* Через  $W_2^l(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^p)$  при  $l > p$  обозначим подпространство  $W_p^l(\Omega)$ , плотным, множеством, в котором являются  $l$  раз непрерывно дифференцируемые в  $\bar{\Omega}$  функции удовлетворяющие граничным условиям  $\left.\frac{\partial^{j-1} u}{\partial n^{j-1}}\right|_\Gamma = 0, j = \overline{1, p}$ .

3°.  $A_\alpha(x) \in C(\Omega)$  и оператор  $A$ , порожденный системой  $(A(x, D) =$

$$= \sum_{|\alpha| < m} A_\alpha(x) D^\alpha, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m), \text{ совпадает с оператором } A'(x, D) \text{ и } =$$

$$= - \sum_{|\alpha| < m} D^\alpha (\bar{A}_\alpha(x) u(x)) \text{ при всех } u \in W_2^m(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m).$$

4°.  $n \leq 3, m = 2$ ; функция  $F(t, x, z_1, z_2)$  определена в области  $\{t \in T, x \in \bar{\Omega}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$  ( $\mathbb{C}$  — комплексная область), имеет непрерывные производные  $F_t, F_{x_i x_j}, F_{z_\kappa z_l}, F_{z_\kappa x_i}, F(t, x, 0, 0) = 0$ . Кроме того: а) производные  $F_{z_\kappa z_l}, F_{z_\kappa x_i}, F_{x_i x_j}$  ( $i, j = \overline{1, n}; \kappa, l = \overline{1, 2}$ ) удовлетворяют условию Липшица по  $z_\kappa$  с коэффициентом  $\sigma(t, R)$  при  $|z_\kappa| \leq R$ ; в) для любых  $z_\kappa \in \mathbb{C}$  имеют место оценки

$$|F_{z_\kappa}| \leq \sigma(t), |F_t| \leq \sigma(t)(1 + |z_1| + |z_2|) \\ (t \in T, x \in \bar{\Omega}), (\kappa = \overline{1, 2}).$$

Тогда оператор рассеяния  $S = W_+ W_-^{-1}$  для уравнения (5) существует, действует из  $W_{2,0}^{2m}(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m) \times W_2^m(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m)$  в  $W_{2,0}^{2m}(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m) \times W_2^m(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m)$  и удовлетворяет условию Липшица в каждом шаре пространства  $W_{2,0}^{2m}(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m) \times W_2^m(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m)$ .

**Доказательство.** В работе С. Я. Якубова [3] доказано, что при выполнении условий 1° — 3° теоремы оператор  $B$  является самосопряженным, положительным в  $L_2(\Omega)$ ,  $D(B^{1/2}) = W_2^m(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m)$  и

оператор  $A$  подчинен оператору  $B^{1/2}$ . Из условия 3° теоремы следует консервативность оператора  $A$  в  $L_2(\Omega)$ . Таким образом, линейная часть уравнения (5) удовлетворяет условиям 1°, 2° теоремы 1 в  $L_2(\Omega)$ .

Покажем, что оператор  $F(u, v)$ , определенный равенством

$$F(t, u, v) = F(t, x, u(x), v(x)), \quad (7)$$

удовлетворяет условиям 3° — 5° теоремы 1 в пространстве  $L_2(\Omega)$ . Так как  $F(t, x, z_1, z_2)$  имеет непрерывные производные  $F_{x_i x_j}, F_{z_\kappa z_l}, F_{z_\kappa x_i}$ ,

$F(t, x, 0, 0) = 0$  и  $n \leq 3, m = 2$  (при  $m = 2$   $W_2^m(\Omega, \left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}\right\}_1^m)$  превращается в  $W_{2,0}^2(\Omega)$ ), то  $F(t, x, u(x), v(x)) \in W_{2,0}^2$  при  $u \in W_{2,0}^2, v \in W_{2,0}^2$ .

Следовательно,  $F(t, u, v)$  действует из  $T \times W_{2,0}^2 \times W_{2,0}^2$  в  $W_{2,0}^2$ . Легко видеть, что оператор  $F(t, u, v)$ , определенный равенством (7), имеет производную  $D_t F(t, u, v) = F_t(t, x, u(x), v(x))$  и

\* функцию  $F(z)$  называем дифференцируемой по  $z$ , если она дифференцируема по  $u$  и  $v$ , где  $z = u + iv$ . При этом полагаем, что

$$F'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}, \text{ где } F(z) = F_1(u, v) + iF_2(u, v).$$



производные Фреше

$$D_u F(t, u, v) = F'_{z_1}(t, x, u(x), v(x)), D_v F(t, u, v) = F'_{z_2}(t, x, u(x), v(x)). \quad (8)$$

Из формул (8) и условия 4° теоремы следует, что  $F(t, u, v)$ , как оператор из  $T \times W_{2,0}^4 \times W_{2,0}^2$  в  $L_2$ , имеет производную Фреше  $D_u f$  и  $L_2$ —расширенную производную Фреше  $\tilde{D}_v F$ . Далее, используя формулу конечных приращений Лагранжа, из условий 4° нетрудно получить, что  $F(t, u, v)$  и производные  $D_u F, \tilde{D}_v F$  липшицево непрерывны в каждом шаре пространства  $W_{2,0}^4 \times W_{2,0}^2$ . Теорема полностью доказана.

В заключение приношу благодарность С. Я. Якубову за полезные замечания в обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Strauss W. Scattering for hyperbolic equations, M. I. T. Doctoral Dissertation, Jan., 1962.
2. Strauss W., Browder F. Pacific Journ. of Math., 13, 1 (1963).
3. Якубов Т. Я. Тр. Московского. матем. сб-ва, т. 23, (1970).
4. Ахундов Д. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1970, № 3.
5. Якубов С. Я. ДАН СССР\*, 156,5 (1964).

Институт математики  
и механики АН Азерб. ССР

Получено 18. XI 1971

Ч. Э. Ахундов

Икинчи тәртіб абстракт квазилиней гиперболических волновых операторов  
үчүн далға оператору наггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә еволүсион тәнлик (1) үчүн  $H$  гильберт фәзасында далға операторларыннан өтрү варлыг теореме исбат едилмишдир. Алынган абстракт нәтижә  $L_2(\Omega)$  фәзасында хусуси төрәмәли бир гиперболический тип тәнлик үчүн аналогичный теоремин исбат олунамасына имкан верир.

D. A. Akhundov

On wave operators for an abstract quasi-linear hyperbolic equation of the second order

SUMMARY

In the article an existence theorem of wave operators for an evolutionary equation

$$u''(t) + Au'(t) + Bu(t) = f(t, u(t), u'(t))$$

in Gilbert space  $H$  is proved. An abstract result obtained allows us to prove an analogous theorem for one partial equation of hyperbolic type in a space  $L_2(\Omega)$ .

К. А. КЕРИМОВ

#### ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НОРМАЛЬНОМ УДАРЕ ПО ГИБКОЙ МЕМБРАНЕ ПРИ УПРУГО- ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

§ 1. Постановка задачи и основные соотношения.

Определяющие соотношения между параметрами движения для постановки задачи заимствованы из [1].

Рассмотрим задачу о нормальном ударе жестким конусом по гибкой бесконечной мембране при следующих предположениях: 1) скорость ударяющего тела в процессе удара остается постоянной; 2) материал мембраны подчиняется упруго-пластическому закону деформирования с линейным упрочнением; 3) в области поперечного движения имеет место полное прилегание мембраны к поверхности ударяющего конуса с возникновением цилиндрических волн сильного разрыва.

В данном случае напряженное состояние мембраны характеризуется наличием двух областей движения: области чисто радиального и области поперечно-радиального (меридианального) движения. При этом скорость распространения цилиндрических волн сильного разрыва не превышает скорости радиальных упругих волн.

Как известно, в области радиального движения уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}, \quad (1)$$

где

$$e_r = \frac{\partial w}{\partial r},$$

$$e_\varphi = \frac{w}{r}. \quad (1')$$

В области меридианального движения

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi \cos \alpha}{r}, \quad (2)$$

где

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r} - 1, \quad e_\varphi = \frac{x(u)}{r} - 1. \quad (2')$$

Здесь  $w, u$ —компоненты смещения частицы в радиальном и меридианальном направлениях,

$\sigma_r, \sigma_\varphi$ —компоненты условных напряжений,



$e_r, e_\varphi$  — компоненты деформаций.  
Связь между напряжениями и деформациями в упруго-пластическом случае дается формулами:

$$\sigma_r = \frac{E_i}{1-\mu_i^2} [e_r + \mu_i e_\varphi],$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E_i}{1-\mu_i^2} [e_\varphi + \mu_i e_r],$$

$$\sigma_z = 0,$$

$$E_i = \left[ \frac{3e_i}{2\sigma_i} - \frac{1}{3} \left( \frac{3e_i}{2\sigma_i} - \frac{1}{3\kappa} \right) \right]^{-1},$$

$$\mu_i = \frac{E_i}{3} \left( \frac{3e_i}{2\sigma_i} - \frac{1}{3\kappa} \right),$$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_r - e_\varphi)^2 + (e_r - e_z)^2 + (e_\varphi - e_z)^2},$$

$E_i, \mu_i$  — переменные модули, характеризующие пластическое состояние материала. При упругом напряжении  $E_i = E, \mu_i = \nu$ .

В пластической области, если принять материал несжимаемым,

$$\frac{1}{3\kappa} = 0, \quad \mu_i = \frac{1}{2}, \quad E_i = E [1 - \omega(e_i)],$$

где

$$0 < \omega(e_i) < 1.$$

Для данного случая

$$\frac{d\omega}{de_i} > 0.$$

Подставляя значения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  из (3) с учетом (1''), (2'') и (5) в уравнения (1) и (2), получим:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{4E}{3} \left[ (1-\omega) - \left( e_r + \frac{1}{2} e_\varphi \right) \frac{\partial \omega}{\partial e_r} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} +$$

$$+ \frac{4E}{3r} \left[ (1-\omega) - \left( e_r + \frac{1}{2} e_\varphi \right) \frac{\partial \omega}{\partial e_\varphi} \right] \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{4E}{3r^2} \left[ (1-\omega) - \right.$$

$$\left. - \left( e_r + \frac{1}{2} e_\varphi \right) \frac{\partial \omega}{\partial e_\varphi} \right] \cdot w;$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4E}{3} \left[ (1-\omega) - \left( l_r - \frac{1}{2} l_\varphi \right) \frac{\partial \omega}{\partial e_r} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} +$$

$$+ \frac{4E}{3r} \left[ (1-\omega) - \left( e_r + \frac{1}{2} e_\varphi \right) \frac{\partial \omega}{\partial e_\varphi} \right] \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4E\lambda}{3r^2} \left[ (1-\omega) - \right.$$

$$\left. - \left( e_r + \frac{1}{2} e_\varphi \right) \frac{\partial \omega}{\partial e_\varphi} \right] u - \frac{2E}{r} (1-\lambda) (1-\omega),$$

где

$\lambda = \cos \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\alpha$  — угол между образующей конуса и начальным положением мембраны. Полученные дифференциальные уравнения (6) и (7) являются уравнениями движения в области радиального и поперечно-радиального движения, соответственно.

Если принять диаграмму ( $\sigma_i, e_i$ ) с линейным упрочнением, то при больших деформациях  $e_i$  ( $e_i \gg e_s$ ) можно полагать  $\omega(e_i) \approx \nu$ , тогда  $E_i = E(1-\nu)$ .

Возможность этого допущения вытекает из факта, доказанного в работе [2] и состоящего в том, что деформации  $e_r$  и  $e_\varphi$  растут с уменьшением  $z$ . Следовательно, при росте времени и  $r = \text{const}$   $e_r$  и  $e_\varphi$  возрастают. Таким образом, при ударе конусом разгрузки не происходит и можно пользоваться только диаграммой нагружения. Поэтому часть диаграммы  $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$  можно заменить прямой (метод секущей модуля). Обратим внимание, что на вершине конуса  $e_\varphi \rightarrow \infty$ , поэтому казалось бы, что аппроксимация  $\omega(e_i) \approx \nu$  невозможна. Однако особой точкой является только вершина конуса и малая часть мембраны прилегает к вершине, поэтому нарушением вида уравнения в этой области можно пренебречь и пользоваться нижеприведенными уравнениями во всей области движения. При этом (6) и (7) приводятся к виду:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2},$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u\lambda^2}{r^2} - \frac{3(1-\lambda)}{2r},$$

где

$$a^2 = \frac{4E(1-\nu)}{3\rho};$$

(6') и (7') являются уравнениями для упруго-пластического нагружения. Они отличаются от упругого случая скоростью звука.

В качестве дополнительных условий для решения поставленной задачи возьмем начальные и граничные условия в следующем виде

$$w_t = w_r = 0 \text{ при } t = 0,$$

на волне сильного разрыва

$$v_0 = b \lg \alpha,$$

$$\frac{b - w_t}{1 + e_{r1}} = \frac{\frac{b}{\lambda} - u_t}{1 + e_{r2}},$$

$$\rho_1 (b - w_t) (u_t - w_t \cos \alpha - v_0 \sin \alpha) = \sigma_{r2} \cos \alpha - \sigma_{r1},$$

$$\rho_1 (b - w_t) (v_0 \cos \alpha - w_t \sin \alpha) = \sigma_{r1} \sin \alpha - \frac{Q}{\delta_1}.$$

Здесь  $Q$  — сосредоточенная ударная сила воздействия мембраны на тело,

$$bt = r + w = x(u) \text{ при } r = r^*.$$

Точка удара  $u = 0$  при  $r = 0$ .

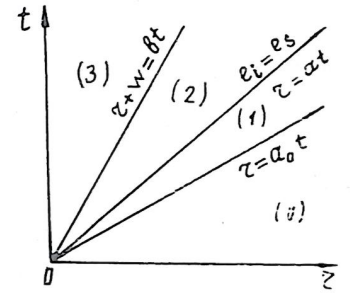
Кроме области пластических деформаций, возникает область продольных упругих деформаций, в которой на переднем фронте упругой волны имеем:

$$w_r = \frac{c}{\sqrt{r}}; \quad w_t = -\frac{ca_0}{\sqrt{r}};$$

на заднем фронте упругой волны, т. е. на переднем фронте пластической волны,

$$e_i = e_s,$$

$e_s$  — предел упругих деформаций.





Картина движения в этом случае показана на рисунке. Решение задачи в области (1) имеет вид

$$w = c_0 r \left[ \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} - \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z^2} \right]. \quad (16)$$

Пользуясь уравнением (16), найдем  $e_i$ :

$$e_r = \frac{\partial w}{\partial r} = c_0 \left[ \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} - \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z^2} \right] + \frac{2c_0 r}{a_0 t} \left[ \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z^3} \right]$$

или

$$e_r = c_0 \left[ \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} + \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z^2}; \right. \\ \left. e_\varphi = \frac{w}{r} = c_0 \left[ \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} - \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z^2} \right] \right]$$

С учетом равенства нулю нормального к плоскости пластины напряжения ( $\sigma_n = 0$ ) получим

$$e_n = - \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} (e_r + e_\varphi).$$

Тогда для интенсивности деформации  $e_i$  получим следующие выражения:

$$e_i = c_0 \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_r - e_\varphi)^2 + (e_r - e_n)^2 + (e_\varphi - e_n)^2}$$

где

$$e_r = c_0 \bar{e}_r, \quad \bar{e}_r = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} + \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z^2}, \\ e_\varphi = c_0 \bar{e}_\varphi, \quad \bar{e}_\varphi = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} - \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z^2}, \\ \bar{e}_n = - \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} (\bar{e}_r + \bar{e}_\varphi).$$

Следовательно, постоянная  $c_0$  легко определяется:

$$c_0 = \frac{e_s}{e_{i0}}; \quad \bar{e}_{i0} = \bar{e}_i^1(z_0), \quad \text{где } z_0 = \frac{a}{a_0} < 1.$$

Таким образом, в области (1) решение полностью определено. Найдем теперь решение в области (2). Если положить  $\frac{r}{at} = \xi$ , то будем иметь

$$w = c_1 r \left[ \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} - \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi^2} \right] + c_2 r.$$

Граничные условия на линии  $r = at$  непрерывности смещения дадут

$$c_2 = c_0 \left[ \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z_0^2}}{z_0} - \frac{\sqrt{1 - z_0^2}}{z_0^2} \right].$$

Таким образом,  $c_2$  определено через  $c_0$ , которая известна. Найдем теперь решение в области (3). Можно непосредственно убедиться, что решение уравнения (7'') имеет вид

$$u = c_3 \zeta s (1 + \sqrt{1 - \zeta^2})^{-\lambda} (1 + \lambda \sqrt{1 - \zeta^2}).$$

Нам остается найти произвольные постоянные  $c_1$  и  $c_3$  и величины  $Q$ ,  $b$ ,  $\zeta^*$ . Они определяются из пяти уравнений: (8), (9), (10), (11) и (12). Заметим, что предложенный метод позволяет сколь угодно уточнять решения, вводя в плоскости ( $\sigma_i$ ,  $e_i$ ) новые прямые под наклоном  $a_k$ , как в области (2) (плоскость ( $t$ ,  $r$ )), так и в области (3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.: Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. 1961.
2. Ленский Э. В. Вестник МГУ, 1968, № 5.

Институт математики  
и механики АН Азерб. ССР

Поступило 18. XI 1971

K. A. Kerimov

#### On one method of solving problem of a normal shock against a flexible diaphragm under elasto-plastic strains

#### SUMMARY

In this paper we give a method of analytical solution of a problem of a normal shock with a cone against a flexible diaphragm under elasto-plastic strains (a scheme of linear hardening).

This method allows to solve different problems of an impact against flexible diaphragms under elasto-plastic strains when corresponding elastic problems permit solutions.



УДК 517.4

А. Н. СОЛОВЬЕВ

# УСЛОВИЯ ФИНИТНОСТИ ОПЕРАТОРНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ ДАННЫЕ РАССЕЯНИЯ

Пусть  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство. Предположим, что  $S(\lambda)$  является унитарным оператором в  $H$  при всех  $\lambda$  из  $(-\infty, +\infty)$  и  $S^*(\lambda) = S(-\lambda) = S^{-1}(\lambda)$ ,  $S(0) = I$ ;  $M_1, M_2, \dots, M_k$  — неотрицательные конечномерные операторы в  $H$ . Пусть также заданы отрицательные числа  $-\lambda_1^2, -\lambda_2^2, \dots, -\lambda_k^2$ .

Ставится следующая задача: когда совокупность величин

$$\{S(\lambda); -\lambda_1^2, -\lambda_2^2, \dots, -\lambda_k^2; M_1, M_2, \dots, M_k\}$$

будет данными рассеяния граничной задачи вида

$$-y'' + Q(x)y = \lambda^2 y, \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \quad (2)$$

в пространстве  $L_2((0, \infty); H)$  с потенциальной непрерывной оператор-функцией  $Q(x)$ , обладающей свойствами:

- $Q(x)$  есть финитная оператор-функция, то есть существует число  $a$  такое, что  $Q(x) \equiv 0$  при  $x > a$ ;
- при каждом  $x \in (0, a)$  оператор  $Q(x) \in \sigma_p$  (см. [1]);
- $Q(x) = Q^*(x)$ ?

Решение этой задачи задается нижеследующей теоремой.

**Теорема.** Для того, чтобы совокупность величин

$$\{S(\lambda); -\lambda_1^2, -\lambda_2^2, \dots, -\lambda_k^2; M_1, M_2, \dots, M_k\},$$

обладающих перечисленными выше свойствами, была данными рассеяния граничной задачи вида (1)–(2) с потенциалом  $Q(x)$ , обладающим свойствами а), б) и в) необходимо и достаточно выполнения условий:

- $I - S(\lambda)$  есть преобразование Фурье оператор-функции  $F_s(x)$  и  $\|F_s(x)\|_p \in L(-\infty, \infty)$ ;
- при всех  $x > 0$  существует сильная производная  $F'_s(x)$ , причем оператор-функция  $F'_s(x) \in \sigma_p$  при каждом  $x$  из  $(0, \infty)$  и непрерывна;
- $S(\lambda)$  допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость и имеет там полюсы первого порядка в точках  $i\lambda_1, i\lambda_2, \dots, i\lambda_k$ , вычеты в этих точках соответственно равны  $-iM_1^2, -iM_2^2, \dots, -iM_k^2$ ;

- $I - S(z) \in \sigma_p$  при любом  $z$  ( $\text{Im} z \geq 0$ ) и для достаточно больших  $z$  из верхней полуплоскости выполняется неравенство

$$\|I - S(z)\|_p \leq C \cdot \frac{e^{z(\text{Im} z)a}}{1 + |z|}. \quad (3)$$

Доказательство теоремы проведем по этапам.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть оператор-функция  $Q(x) = Q^*(x)$  непрерывна и  $Q(x) \equiv 0$  при  $x > a$ . Обозначим через  $F(x, \lambda)$  решение уравнения (1), которое совпадает с  $Ie^{i\lambda x}$  при  $x > a$ . Тогда как известно (см. [2] и [3]), существует оператор-функция  $K(x, t)$  такая, что

$$F(x, \lambda) = Ie^{i\lambda x} + \int_x^{2a-x} K(x, t) e^{i\lambda t} dt. \quad (4)$$

Известно также, что  $S$  — матрица граничной задачи вида (1)–(2) определяется формулой

$$S(\lambda) = F^{-1}(0, \lambda) F(0, -\lambda) = F_1(0, -\lambda) F_1^{-1}(0, \lambda) \quad (5)$$

и ядро резольвенты задачи (1)–(2) при  $\text{Im} \lambda > 0$  равно

$$R(x, t, \lambda) = - \begin{cases} \Phi(x, \lambda) F_1^{-1}(0, \lambda) F_1(t, \lambda) & \text{при } t > x; \\ F(x, \lambda) F^{-1}(0, \lambda) \Phi_1(t, \lambda) & \text{при } t < x, \end{cases} \quad (6)$$

где  $F_1(x, \lambda)$  — решение уравнения

$$-y'' + yQ(x) = \lambda^2 y, \quad (7)$$

совпадающее с  $Ie^{i\lambda x}$  при  $x > a$ , а  $\Phi_1(x, \lambda)$  есть решение уравнения (7) с начальными условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = I, \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{1}{2i\lambda} \{ F(x, \lambda) F_1(0, -\lambda) - F(x, -\lambda) F_1(0, \lambda) \}, \quad (9)$$

Свойства 1) и 2) для  $S(\lambda)$  и  $F_s(x)$  доказаны в работе [3], а свойства 3) и 4) непосредственно вытекают из формулы (5) для  $S(\lambda)$  и формулы (6) для ядра резольвенты.

Действительно, при больших  $\lambda$  ( $\text{Im} \lambda \geq 0$ )

$$\begin{aligned} S(\lambda) - I &= I - F^{-1}(0, \lambda) F(0, -\lambda) = F^{-1}(0, \lambda) \{ F(0, \lambda) - F(0, -\lambda) \} = \\ &= F^{-1}(0, \lambda) \left\{ \int_0^{2a} K(0, t) e^{i\lambda t} dt - \int_0^{2a} K(0, t) e^{-i\lambda t} dt \right\} = \\ &= F^{-1}(0, \lambda) 2i \int_0^{2a} K(0, t) \sin \lambda t dt, \end{aligned}$$

поэтому при больших  $\lambda$  ( $\text{Im} \lambda \geq 0$ ) имеем

$$\begin{aligned} \|S(\lambda) - I\|_p &\leq c_1 \left\| \int_0^{2a} K(0, t) \sin \lambda t dt \right\|_p \leq \\ &\leq \frac{c_1}{|\lambda|} \left\{ \|K(0, 2a)\|_p e^{z|\text{Im} \lambda|a} + \|K(0, 0)\|_p e^{2|\text{Im} \lambda|a} + c_2 \int_0^{2a} e^{|\text{Im} \lambda|t} dt \right\} \leq \\ &\leq C \frac{e^{2|\text{Im} \lambda|a}}{1 + |\lambda|}. \end{aligned}$$

Далее из вывода формулы разложения для граничной задачи (1)–(2) вытекает, что

$$\text{Res } R(x, t, \lambda) \cdot 2\lambda \Big|_{\lambda=\lambda_k} = F(x, \lambda_k) M_k^2 F_1(t, \lambda_k), \quad (10)$$

С другой стороны, как видно из (5), (6) и (9),

$$\operatorname{Res} R(x, t, \lambda) \cdot 2\lambda \Big|_{\lambda=\lambda_k} = -\frac{1}{i} F(x, \lambda_k) \operatorname{Res} S(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_k} \cdot F_1(t, \lambda_k). \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), получаем

$$\operatorname{Res} S(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_k} = -i M_k^2.$$

Достаточность. Пусть выполняются условия теоремы. Положим

$$F_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [I - S(\lambda)] e^{i\lambda x} d\lambda$$

и

$$F(x) = F_s(x) + \sum_{k=1}^n M_k^2 e^{-i\lambda_k |x|}.$$

А. Используя свойства 3) и 4) функции  $S(\lambda)$ , можно вычислить  $F_s(x)$  при  $x > 2a$ . Действительно, при  $x > 2a$  и  $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$  имеем

$$\|e^{i\lambda x} [I - S(\lambda)]\|_p \leq C \cdot \frac{e^{2(a-x) \operatorname{Im} \lambda}}{1 + |\lambda|}.$$

Поэтому применение теории вычетов к вычислению несобственных интегралов показывает, что при  $x \geq 2a$

$$\begin{aligned} F_s(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \oint_{|\lambda-\lambda_k|=p} [I - S(\lambda)] e^{i\lambda x} d\lambda = -\frac{i}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \oint_{|\lambda-\lambda_k|=p} S(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= -\sum_{k=1}^n M_k^2 e^{-i\lambda_k x}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $F(x) \equiv 0$  при  $x > 2a$ .

В. Составим теперь основное уравнение типа В. А. Марченко:

$$F(x+t) + K(x, t) + \int_x^{\infty} K(x, s) F(s+t) ds = 0. \quad (12)$$

Поскольку  $F(s+t) \equiv 0$  при  $s+t > 2a$ , то для  $K(x, t)$  получаем следующее уравнение:

$$F(x+t) + K(x, t) + \int_x^{2a-t} K(x, s) F(s+t) ds = 0. \quad (13)$$

Докажем, что это уравнение имеет единственное решение при произвольном  $x \geq 0$ . Очевидно, для этого достаточно доказать, что однородное уравнение

$$f(t) + \int_x^{\infty} f(s) F(s+t) ds = 0 \quad (14)$$

имеет единственное решение из  $L_2((0, \infty); H)$ .

Предположим противное. Тогда уравнение (14) имеет ненулевое решение  $f(t)$  из  $L_2((0, \infty); H)$ . Поскольку

$$\begin{aligned} F_s(x+t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [I - S(\lambda)] e^{i\lambda(x+t)} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [I - S(\lambda)] e^{i\lambda(x+t)} d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [I - S^*(\lambda)] e^{-i\lambda(x+t)} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ [I e^{-i\lambda x} - S(\lambda) e^{i\lambda x}] [I e^{i\lambda t} - S^*(\lambda) e^{-i\lambda t}] - \\ &\quad - [I e^{-i\lambda x} - I e^{i\lambda x}] [I e^{i\lambda t} - I e^{-i\lambda t}] \} d\lambda, \end{aligned}$$

то очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} \int_x^{\infty} (F_s(t+\xi) f(\xi), f(t)) dt d\xi &= - \int_x^{\infty} (f(t), f(t)) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(-\lambda) - S(\lambda) \hat{f}(\lambda), \hat{f}(-\lambda) - S(\lambda) \hat{f}(\lambda)) d\lambda. \end{aligned}$$

Тогда, умножая однородное уравнение (14) скалярно на  $f(t)$  и интегрируя от  $x$  до  $\infty$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(-\lambda) - S(\lambda) \hat{f}(\lambda), \hat{f}(-\lambda) + S(\lambda) \hat{f}(\lambda)) d\lambda + \\ + \sum_{k=1}^n (f_k M_k^2, f) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$f_k = \int_x^{\infty} f(t) e^{-i\lambda_k t} dt, \quad \hat{f}(-\lambda) = \int_x^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Из (15) очевидным образом следует, что

$$\hat{f}(-\lambda) - S(\lambda) \hat{f}(\lambda) = 0, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

и

$$M_k f_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Из определения  $\hat{f}(-\lambda)$  вытекает, что она является аналитической функцией в нижней полуплоскости, а на вещественной оси совпадает с функцией  $S(\lambda) \hat{f}(\lambda)$ , которая имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, за исключением, быть может, точек  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Но в этих точках функция  $S(\lambda) \hat{f}(\lambda)$  может иметь полюсы первого порядка, где вычеты равны

$$\operatorname{Res} S(\lambda) \hat{f}(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_k} = -i M_k \hat{f}(\lambda_k) = -i M_k f_k = 0.$$

Следовательно,  $\hat{f}(-\lambda)$  является целой функцией, ограниченной в верхней и нижней полуплоскостях, а на вещественной оси стремится к нулю. Поэтому  $\hat{f}(-\lambda) \equiv 0$ . Тогда  $f(t) \equiv 0$  и наше предположение неверно. Значит, основное уравнение имеет единственное решение, которое, очевидно, обращается в нуль при  $x+t > 2a$ .

Аналогично можно доказать, что однородное уравнение

$$-f(t) + \int_{-\infty}^0 F(t+\xi) f(\xi) d\xi = 0, \quad t < 0, \quad (16)$$

имеет только нулевое решение в  $L_2((-\infty, 0); H)$ .

С. Из рассуждения, приведенного выше, вытекает, что если функция  $f(t)$  из  $L_2((0, \infty); H)$  является решением однородного уравнения

$$f(t) + \int_0^{\infty} F_s(t+\xi) f(\xi) d\xi = 0, \quad (17)$$

то  $\hat{f}(\lambda)$  удовлетворяет отношению

$$\hat{f}(-\lambda) = S(\lambda) \hat{f}(\lambda).$$



Отсюда очевидно, что  $f(-\lambda)$  является мероморфной функцией, стремящейся к нулю при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$f(-\lambda) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} S(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_k} \cdot f(\lambda_k) \frac{1}{\lambda - \lambda_k} = -i \sum_{k=1}^n M_k^2 f(\lambda_k) \frac{1}{\lambda - \lambda_k}. \quad (18)$$

Здесь вектор  $f(\lambda_k)$  можем задавать произвольным образом. Поэтому множество всех функций  $f(-\lambda)$ , представимых в виде (18), является конечномерным пространством, размерность которого совпадает с суммой размерностей подпространств

$$H_k^\perp = H \ominus H_k, \text{ где } H_k - \text{ядро } M_k.$$

Таким образом, совокупность величин  $\{S(\lambda); -\lambda_1^2; -\lambda_2^2, \dots, -\lambda_n^2; M_1, M_2, \dots, M_n\}$  является данными рассеяния граничной задачи вида (1)–(2), причем оператор-функция  $K(x, t) \equiv 0$  при  $x+t > 2a$ . Поэтому непрерывная оператор-функция

$$Q(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) \equiv 0$$

при  $x > a$ . Теорема полностью доказана.

Заметим, что случаи  $H=E_1$  (одномерное комплексное евклидово пространство) или  $H=E_n$  ( $n$ -мерное комплексное евклидово пространство) исследованы в работах [4] и [5], соответственно.

В заключение выражаю благодарность проф. М. Г. Гасымову за постановку задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамо-сопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
2. Агранович З. С. и Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, 1960.
3. Соловьев А. Н. Тр. летней математической школы по спектральной теории операторов и теории представления операторов, Баку, 1971.
4. Рамм А. Г. "ДАН СССР", т. 157, 1964, № 5.
5. Асланов М. А. и Соловьев А. Н. Условия finiteness потенциальной матрицы в обратной задаче теории рассеяния. Материалы республ. науч. конф. по математике и механике, посвященной XXIV съезду КПСС. Баку, 1971.

Институт математики  
и механики АН Азерб. ССР

Поступило 18. XI 1972

А. Н. Соловьев

#### Сәпилмә мә'лумлары васитәсилә потенциал оператор-функцияның финит олмасы шәртләри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә верилмиш кәмијјәтләрин  $\{S(\lambda); -\lambda_1^2; -\lambda_2^2, \dots, -\lambda_n^2; M_1, M_2, \dots, M_n\}$  тамам кәсилмәз финит оператор әмсаллары Штурм-Лиувилл типли сәрһәд мәсәләсинин сәпилмә мә'лумлары олмасы үчүн зәрури вә кафи шәртләр тапылмышдыр.

A. N. Soloviyov

#### The finiteness conditions of an operator potential function through the given scattering

SUMMARY

In the given paper the necessary and sufficient conditions of finiteness of an operator potential function for boundary value problem of Schturm—Liuvill type are found through the given scattering  $\{S(\lambda); -\lambda_1^2, -\lambda_2^2, \dots, -\lambda_n^2; M_1, M_2, \dots, M_n\}$ .

Г. А. ДЖАФАРЛИ

#### ТЕОРЕМА ФРАГМЕНА—ЛИНДЕЛЕФА ТИПА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ В КОНУСЕ

Ранее [1] была установлена теорема, являющаяся обобщением известной теоремы Фрагмена—Линделефа типа единственности для аналитических функций в угле на гармонические функции трех переменных в конусе.

Теорема 1. Пусть  $U(x, x_1, x_2)$ —гармоническая функция трех переменных в бесконечной области  $D$ , содержащей внутри себя конус  $V$ :

$$|\arg(x \pm i \sqrt{x_1^2 + x_2^2})| \leq \frac{\pi}{2h_0}, \quad r_x = \sqrt{x^2 + x_1^2 + x_2^2} > a, \\ x > 0 \quad (h_0 > 1).$$

Если внутри

$$|U(x, x_1, x_2)| \leq C \exp \{-r_x^{h_0+\eta}\} \quad (1)$$

с любыми фиксированными  $C$  и  $\eta > 0$ , то  $U(x, x_1, x_2) \equiv 0$ .

В той же работе было отмечено, что теорему 1 можно уточнить, потребовав вместо неравенства (1) выполнения более слабого условия:

$$|U(x, x_1, x_2)| \leq C \exp \{-\eta r_x^{h_0}\}. \quad (2)$$

В настоящей статье, видоизменив конструкцию метода, предложенного в [1], доказывается теорема, являющаяся не только уточнением теоремы 1 в смысле замены неравенства (1) более слабым условием (2), но и усилением этой теоремы. А именно: кроме замены условия (1) более слабым условием (2), нами установлено, что условие убывания (2) гармонической функции  $U(x, x_1, x_2)$  можно оставить только для границы конуса, а внутри можно допустить определенный рост, при котором утверждение теоремы 1 остается еще в силе.

Приведем формулировку теоремы, которая нами будет доказана ниже.

Теорема 2. Пусть  $U(x, x_1, x_2)$ —гармоническая функция в конусе  $V$ :

$$|\arg(x \pm i \rho_x)| \leq \frac{\pi}{2h_0}, \quad \rho_x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x > 0 \quad (h_0 > 1).$$

и пусть на границе  $\partial V$  этого конуса

$$|U(x, x_1, x_2)| \leq C \exp \{-\eta r_x^{h_0}\}, \quad \eta > 0, \quad (3)$$



а внутри конуса  $V$

$$|U(x, x_1, x_2)| + \left| \frac{\partial}{\partial n} U(x, x_1, x_2) \right| \leq C_1 \exp \{ \beta r_x^{h_0} \}, \quad (4)$$

Тогда  $U(x, x_1, x_2) \equiv 0$ .

Доказательство. Введем функции

$$E_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{h_n} \right) \exp \left\{ \frac{z}{h_n} \right\},$$

$$E_2(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{\lambda_n} \right) \exp \left\{ -\frac{z}{\lambda_n} \right\},$$

где

$$h_n = n^{1/h} e^{i\theta}, \quad h > h_0, \quad 3/2 < h < 2, \quad \lambda_n = n^{1/\lambda}, \quad h < \lambda < 2,$$

$\theta$  фиксировано условием  $\frac{\pi}{2} + h\theta < \frac{h\pi}{2h_0} < \pi + h\theta$ .

Легко заметить, что  $E_1(z)$  и  $E_2(z)$  являются целыми функциями порядка роста  $h$  и  $\lambda$  с индикатрисами

$$H_{E_1}(\varphi) = C_1 \cos h(\varphi - \theta), \quad C_1 = -\pi \operatorname{ctg}(h-1)\pi > 0,$$

$$H_{E_2}(\varphi) = -C_2 \cos \lambda \varphi; \quad C_2 = \frac{\pi}{\sin(\lambda-1)\pi} > 0, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2h_0}.$$

Обозначим

$$\rho = \sqrt{(t_1 - x_1)^2 + (t_2 - x_2)^2}.$$

$$E(t - i\rho s) = E_1[A(t - i\rho s)] E_2[\varepsilon(t - i\rho s)],$$

где  $\varepsilon > 0$  и  $A > 1$  — произвольное действительное число. Пусть  $T = T(t, t_1, t_2)$ ,  $X = X(x, x_1, x_2)$  — точки трехмерного пространства, где

$$x > 0, \quad |x_1| < \infty, \quad |x_2| < \infty, \quad |\arg(x \pm i\rho_x)| \leq \frac{\pi}{2h_0},$$

$$t > 0, \quad |t_1| < \infty, \quad |t_2| < \infty, \quad |\arg(t \pm i\rho_t)| \leq \frac{\pi}{2h_0}.$$

Рассмотрим функцию

$$Q(A, \varepsilon, X, T) = \frac{2}{\pi E(x)} \int_1^{+\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{E(t + i\rho s)}{x - t - i\rho s} \right] \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}}.$$

Выбор  $\lambda > h$  обеспечивает сходимость интеграла.

Отметим следующие свойства  $Q(A, \varepsilon, X, T)$ :

1.  $Q(A, \varepsilon, X, T)$  является гармонической функцией переменных  $T(t, t_1, t_2)$  во всем пространстве при любом фиксированном  $X$ ,  $X \neq T$ ,  
2.

$$Q(A, \varepsilon, X, T) - \frac{1}{r} = q(A, \varepsilon, X, T) \quad (r = r_{X-T}).$$

при любом фиксированном  $X$  является гармонической функцией переменных  $T(t, t_1, t_2)$  во всем пространстве, включая и точку  $X = T$ .

Докажем свойство 1. Очевидно, достаточно доказать гармоничность функции

$$K = \int_1^{+\infty} \frac{E(t + i\rho s)}{x - t - i\rho s} \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} \quad (\rho \neq 0).$$

С этой целью рассмотрим функцию

$$f(t + i\rho s) = \frac{E(t + i\rho t)}{x - t - i\rho s} = f(z).$$

Пусть  $\rho \neq 0$ . Имеем:

$$f'_t(z) = is \frac{t_1 - x_1}{\rho} f'(z),$$

$$f'_t(z) = -s^2 f''(z) \frac{(t_1 - x_1)^2}{\rho^2} + is \frac{(t_2 - x_2)^2}{\rho^3} f'(z).$$

Аналогично

$$f'_t(z) = -s^2 f''(z) \frac{(t_2 - x_2)^2}{\rho^2} + is \frac{(t_1 - x_1)^2}{\rho^3} f'(z),$$

$$f'_t(z) = x''(z).$$

Следовательно,

$$\Delta_t f = (1 - s^2) f''(z) + is \frac{f'(z)}{\rho},$$

$$\Delta_t K = - \int_1^{+\infty} f''(z) \sqrt{s^2 - 1} ds + \frac{i}{\rho} \int_1^{+\infty} f'(z) d\sqrt{s^2 - 1}.$$

Поскольку

$$\int_1^{+\infty} f'(z) d\sqrt{s^2 - 1} = -i\rho \int_1^{+\infty} \sqrt{s^2 - 1} f''(z) ds,$$

имеем

$$\Delta_t K = -i \int_1^{+\infty} f''(z) \sqrt{s^2 - 1} ds + \frac{i}{\rho} (-i\rho) \int_1^{+\infty} f''(z) \sqrt{s^2 - 1} ds.$$

Дифференцирование под знаком интеграла законно при  $\rho > 0$ , так как при этом все эти полученные интегралы равномерно сходятся. Поскольку  $\Delta_t K = \operatorname{Im} K$ , то  $\Delta_t(A, \varepsilon, X, T)$  является гармонической функцией переменных  $T(t, t_1, t_2)$ , за исключением точки прямой

$$t_1 = x_1, \quad t_2 = x_2.$$

Покажем, что функция  $Q(A, \varepsilon, X, T)$  гармонически продолжается в точках прямой  $t_1 = x_1, t_2 = x_2$ .

Положив  $\rho > 0$ , преобразуем интеграл с помощью подстановки

$$\rho^2 s^2 = u^2 + \rho^2, \quad ds = \frac{1}{\rho} \frac{u du}{\sqrt{u^2 + \rho^2}}$$

к виду

$$Q(A, \varepsilon, X, T) = \frac{2}{\pi E(x)} \int_1^{+\infty} E(t + i\sqrt{u^2 + \rho^2}) \left[ \cos \psi + \frac{(x - t) \sin \psi}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} \right] \frac{du}{u^2 + \rho^2},$$

где  $\psi$  — аргумент комплекснозначной функции  $E(t + i\sqrt{u^2 + \rho^2})$ . Так как

$$\left| \frac{\sin \psi}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} \right| \leq \operatorname{const} < \infty$$

при любом фиксированном  $X(x, x_1, x_2)$  и  $0 \leq u < \infty$ , то интеграл равномерно сходится в окрестности точки прямой  $t_1 = x_1, t_2 = x_2$  при  $t \neq x$ , поэтому  $\Delta_t(A, \varepsilon, X, T)$  непрерывна в этих точках. Тогда на основании известного свойства [3] гармонической функции функция  $Q(A, \varepsilon, X, T)$  гармонически продолжается в точках прямой  $t_1 = x_1, t_2 = x_2$ .



Теперь докажем свойство 2. Покажем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} r Q(A, \varepsilon, X, T) = 1.$$

Для этого положим

$$t = x + \alpha r, \quad t_1 = x_1 + \beta r, \quad t_2 = x_2 + \gamma r.$$

Отсюда  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ . Сделаем замену  $u = \tau r$  в интеграле

$$Q(A, \varepsilon, X, T) = \frac{2}{\pi E(x)} \int_0^{+\infty} |E(t + i\sqrt{u^2 + \rho^2})| \left[ \cos \psi + \frac{(x-t) \sin \psi}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} \right] \frac{du}{u^2 + r^2}.$$

Тогда получим

$$r Q(A, \varepsilon, X, T) = \frac{2}{\pi E(x)} \int_0^{+\infty} \left( \cos \psi - \frac{\alpha \sin \psi}{\sqrt{v^2 + \alpha^2 + \gamma^2}} \right) |E(x + \alpha r + i r \sqrt{v^2 + \alpha^2 + \gamma^2})| \frac{dv}{1 + v^2}.$$

Интеграл равномерно сходится в достаточно малой окрестности точки  $r=0$ , так как мажорируется сходящимся интегралом

$$\int_0^{+\infty} \frac{dv}{1 + v^2}$$

при любом фиксированном  $X(x, x_1, x_2)$ . Это следует из того, что

$$\begin{aligned} |E(x + \alpha r + i r \sqrt{v^2 + \alpha^2 + \gamma^2})| &\rightarrow |E(x)| \quad (r \rightarrow 0), \\ \left| \frac{\alpha \sin \psi}{\sqrt{v^2 + \alpha^2 + \gamma^2}} \right| &\leq \text{const} < \infty \quad (0 \leq v < \infty). \end{aligned}$$

Таким образом, в интеграле можно положить  $r=0$  и мы получим

$$\lim_{r \rightarrow 0} r Q(A, \varepsilon, X, T) = \frac{2}{\pi E(x)} \int_0^{+\infty} \frac{E(x)}{1 + v^2} dv = 1.$$

Что и требовалось.

Из доказанного следует, что если

$$Q(A, \varepsilon, X, T) - \frac{1}{r} = q(A, \varepsilon, X, T),$$

то  $q(A, \varepsilon, X, T)$  гармонична всюду. Причем

$$q(A, \varepsilon, X, T) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r \rightarrow 0).$$

Тогда на основании теоремы о стирании особенности гармонических функций  $q(A, \varepsilon, X, T)$  гармонична в точке  $X=T$ .

Напомним, что если  $q(X, T)$  гармоническая по  $T$  во всем пространстве  $n$  при любом фиксированном  $X$ , то функция

$$Q(X, T) = \frac{1}{r} + q(X, T), \quad r = \sqrt{(x-t)^2 + (x_1-t_1)^2 + (x_2-t_2)^2},$$

есть ядро уравнения Лапласа. Это значит, что если  $V$  — произвольная конечная область с границей  $S$  и  $U(X)$  — гармоническая функция в

$\bar{V}$ , то для любой фиксированной точки  $X \in V$  имеет место представление

$$U(X) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ Q(X, T) \frac{\partial U(T)}{\partial n} - U(T) \frac{\partial Q(X, T)}{\partial n} \right] dS.$$

Рассмотрим часть конуса  $V$  с вершиной в начале координат. Обозначим ее через  $V_R$ , причем ее сферическую часть обозначим через  $S_R$ , а коническую через  $\tau_R$ . Если  $X$  — фиксированная точка области  $V_R$ , то, учитывая, что  $Q(A, \varepsilon, X, T)$  есть ядро уравнения Лапласа, получим

$$U(X) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_R} \left( Q \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial Q}{\partial n} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_R} \left( Q \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial Q}{\partial n} \right) dS. \quad (5)$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, оценим ядро  $Q(A, \varepsilon, X, T)$ . Имеем

$$Q(A, \varepsilon, X, T) = \frac{2}{\pi E(x)} \int_0^{+\infty} \left[ \cos \psi + \frac{(x-t) \sin \psi}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} \right] |E(t + i\rho\sqrt{u^2 + \rho^2})| \frac{du}{u^2 + r^2},$$

откуда

$$|Q(A, \varepsilon, X, T)| \leq \frac{C}{|E(x)|} |E(t + i\rho)| \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + r^2} = \frac{C}{|E(x)|} |E(t + i\rho)| \frac{1}{r} \left( |\arg(t + i\rho)| \leq \frac{\pi}{2h_0} \right).$$

Или

$$|Q(A, \varepsilon, X, T)| \leq \frac{C}{|E(x)|} \exp \{ C_1 A^h (t^2 + \rho^2)^{h/2} - C_2 \varepsilon^\lambda (t^2 + \rho^2)^{\lambda/2} \} \frac{1}{r}.$$

Аналогично получим

$$|\text{grad}_T Q| \leq \frac{C}{|E(x)|} \exp \{ C_1 A^h (t^2 + \rho^2)^{h/2} - C_2 \varepsilon^\lambda (t^2 + \rho^2)^{\lambda/2} \} \frac{1}{r^2}.$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} E(x) Q(A, \varepsilon, X, T) &= \int_0^{+\infty} \left[ \cos \psi + \frac{(x-t) \sin \psi}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} \right] \times \\ &\times |E(t + i\sqrt{u^2 + \rho^2})| \frac{du}{u^2 + r^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} E(x) \frac{\partial Q}{\partial n} &= \int_0^{+\infty} \left[ \cos \psi + \frac{(x-t) \sin \psi}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} \right] |E(t + i\sqrt{u^2 + \rho^2})| \times \\ &\times \left( \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{u^2 + r^2} \right) du + \int_0^{+\infty} \left[ \cos \psi + \frac{(x-t) \sin \psi}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} \right] \times \end{aligned}$$



SUMMARY

In the communication the Fragmen—Lindelef theorem of the uniqueness type for harmonic functions of three variables in a cone is proved which is a generalization of the known theorem about decreasing of the analical functions in the angle on the harmonic of the three variables in a cone.

$$\times \left( \frac{\partial}{\partial n} |E(t + i\sqrt{u^2 + r^2})| \right) \frac{\partial u}{u^2 + r^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial n} \times \\ \times \left[ \cos \psi + \frac{(x-t) \sin \psi}{\sqrt{u^2 + r^2}} \right] |E(t + i\sqrt{u^2 + r^2})| \frac{\partial u}{u^2 + r^2} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Рассмотрим, например,  $I_1$ :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \left[ \cos \psi + \frac{(x-t) \sin \psi}{\sqrt{u^2 + r^2}} \right] |E(t + i\sqrt{u^2 + r^2})| \times \\ \times 2r \frac{\frac{t-x}{r} \cos(t, r) + \frac{t_1-x_1}{r} \cos(t_1, r) + \frac{t_2-x_2}{r} \cos(t_2, r)}{(u^2 + r^2)^2} du = \\ = 2 \int_0^{+\infty} \left[ \cos \psi + \frac{(x-t) \sin \psi}{\sqrt{u^2 + r^2}} \right] |E(t + i\sqrt{u^2 + r^2})| \frac{r \cos \omega}{(u^2 + r^2)^2} du.$$

То есть

$$|I_1| \leq \text{const} |E(t + i\rho)| \int_0^{+\infty} \frac{r du}{(u^2 + r^2)^2} = \text{const} |E(t + i\rho)| \frac{1}{r^2}$$

Такую же оценку получим для  $I_2$  и  $I_3$ .

Учитывая оценки для  $Q(A, \varepsilon, X, T)$  и  $\text{grad} Q$ , также условия (3) и (4) теоремы 2, легко получаем, что интеграл по  $S_R$  в формуле (5) стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$U(x) = \frac{1}{4\pi} \iint \left[ Q(A, X, T) \frac{\partial U(T)}{\partial n} - U(T) \frac{\partial Q(A, X, T)}{\partial n} \right] dT \quad (T \in \partial V)$$

Оценка на границе конуса  $|\arg(x \pm i\rho_x)| \leq \frac{\pi}{2h_0}$  дает

$$|U(X)| \leq \frac{C}{|E(x)|} \sim C e^{-\lambda x^h} \quad (x > 0),$$

где  $C$  не зависит от  $A$ . Устремив  $A \rightarrow +\infty$ , получаем  $U(X) \equiv 0$ . Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аршон И. С. Изв. АН СССР, серия матем., 29 (1965).
  2. Келдыш М. В. УМН, 8, (1941).
  3. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, 1962.
  4. Ярмухамедов Ш. О росте гармонических функций в полупространстве. Канд. дисс. МГУ, 1968.
  5. Аршон И. С., Джафарли Г. А. Представление функции, гармонических в полупространстве, формулой Коши. Матем. заметки, т. 4, № 4 (1968).
- Азербайджанский политехнический институт  
Поступило 14. XII 1970

К. Э. Чәфәрли

Конусда үчдәјишәнли гармоник функцијалар үчүн  
Фрагмен—Линделјоф типли јеканәлик теорем

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә конусда үчдәјишәнли гармоник функцијаларын азалма сүрәтини тәјин едән бир теорем исбат олунмушдур. Һәмин теорем бучагда аналитик функцијалар һаггында мәлүм олан бир теоремин һармоник функцијалара үмумиләшмәсидир.



Н. Т. АББАСОВ и М. П. ЗАМАХОВСКИЙ

## ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА НАД КВАЗИПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ

Настоящая статья посвящена определению эллиптических пространств над квазипростыми алгебрами квазиматриц и квазиальтернионов и построению вещественных, комплексных, двойных, дуальных, кватернионных, дикватернионных, полукватернионных, дуокватернионных, диполукватернионных интерпретаций этих пространств. § 1 и 4 написаны Н. Т. Аббасовым, а § 2 и 3—М. П. Замаховским.

### § 1. Общие свойства эллиптических пространств

Эллиптическое пространство  $\bar{S}_n(A)$  над произвольной алгеброй  $A$  с инволютивным антиавтоморфизмом  $x \rightarrow \bar{x}$  было определено М. А. Джавадовым [1] как проективное пространство  $P_n(A)$  над этой алгеброй, в котором задана инволюционная корреляция

$$u_i = \bar{x}^i, \quad (1)$$

называемая абсолютным поляритетом пространства  $\bar{S}_n(A)$ . Мы будем рассматривать пространства  $P_n(A)$  в том случае, когда алгебра  $A$  квазипростая [2]. Пространства  $P_n(A)$  в этом случае изучались нами ранее [3]. заданием корреляции (1) в  $P_n(A)$  задается эрмитова квадратика

$$\sum_i \bar{x}^i x^i = 0, \quad (2)$$

называемая абсолютным пространством  $\bar{S}_n(A)$ ; корреляция (1) является поляритетом относительно этой эрмитовой квадратки. Всякие две точки  $x$  и  $y$  пространства  $\bar{S}_n(A)$  обладают метрическими инвариантами — проективными инвариантами этих точек и гиперплоскостей  $u$  и  $v$ , в которые эти точки переводятся абсолютным поляритетом. За эти инварианты можно принять собственные числа матрицы, представляющей элемент алгебры  $A$ , являющийся двойным отношением точек  $x$  и  $y$  и гиперплоскостей  $u$  и  $v$ ; это двойное отношение имеет вид

$$M = \left( \sum_i \bar{y}^i y^i \right)^{-1} \left( \sum_i \bar{y}^i x^i \right) \left( \sum_i \bar{x}^i x^i \right)^{-1} \left( \sum_i \bar{x}^i y^i \right). \quad (3)$$

В случае, когда элемент  $M$  представляется матрицей с собственными числами  $\pm 1$ , точки  $x$  и  $y$  обладают дополнительными метрическими инвариантами.

Коллинеации пространства  $\bar{S}_n(A)$ , сохраняющие их метрические инварианты, называются движениями: движение является частным

случаем подобий коллинеаций, переводящих в себя абсолют. Подобие пространства  $\bar{S}_n(A)$  имеет вид

$$x^i = a_j^i f(x^j), \quad (4)$$

где  $x \rightarrow f(x)$  — непрерывный автоморфизм алгебры  $A$ , а матрица  $(a_j^i)$  удовлетворяет условию унитарности:

$$\sum_i \bar{a}_j^i a_k^i = \delta_{jk}.$$

Как показано в [3], всякая квазипростая алгебра, получаемая предельным переходом из простой, изоморфна алгебрам  $R_n^m$ ,  $R_n^m(i)$  и  $R_n^m(i, j)$  вещественных, комплексных и кватернионных квазиматриц и алгебрам  $R_n(\varepsilon)$ ,  $R_n(i, \varepsilon)$  и  $R_n(i, j, \varepsilon)$  дуальных, полукватернионных и дуокватернионных (дуальных кватернионных) матриц. И если записать элементы алгебр  $R_n(\varepsilon)$ ,  $R_n(i, \varepsilon)$ ,  $R_n(i, j, \varepsilon)$ ,  $R_n^m$ ,  $R_n^m(i)$  и  $R_n^m(i, j)$  в виде  $a = a + \varepsilon b$ , где  $\varepsilon$  — дуальная или полукватернионная единица алгебр  $R(\varepsilon)$ ,  $R(i, \varepsilon)$ ,  $R(i, j, \varepsilon)$ , над которыми построены алгебры  $R_n(\varepsilon)$ ,  $R_n(i, \varepsilon)$ ,  $R_n(i, j, \varepsilon)$ , подалгебрами которых являются алгебры  $R_n^m$ ,  $R_n^m(i)$  и  $R_n^m(i, j)$ , то, обозначая через  $f_t(a)$  элемент  $a + t\varepsilon b$ , где  $t$  — вещественное число, всякий непрерывный автоморфизм этих алгебр имеет вид

$$a \rightarrow \rho f_t(a) \rho^{-1}, \quad (6)$$

или в случае алгебр  $R_n(\varepsilon)$  и  $R_n^m(i)$

$$a \rightarrow \rho f_t(\bar{a}) \rho^{-1}, \quad (7)$$

где  $(a \rightarrow \bar{a})$  — переход к дуальной матрице или комплексной квазиматрице с сопряженным элементом, а в случае алгебр  $R_n(i, \varepsilon)$  и  $R_n(i, j, \varepsilon)$

$$a \rightarrow \rho f_t(\tilde{a}) \rho^{-1}, \quad (8)$$

где  $(a \rightarrow \tilde{a})$  — переход от полукватерниона  $a + bi + c\varepsilon + d\eta$  к полукватерниону  $a - bi + c\varepsilon - d\eta$  или переход у дуального кватерниона  $a + \varepsilon b$  к дуальному кватерниону  $a - \varepsilon b$ .

Движение пространства  $\bar{S}_n(A)$  имеет вид (4), где матрица  $(a_j^i)$  удовлетворяет условию (5), а непрерывный автоморфизм  $x \rightarrow f(x)$  имеет вид (6), (7) или (8), где  $t = \pm 1$  (такие автоморфизмы квазипростых называются метрическими автоморфизмами этих алгебр).

### § 2. Эллиптические пространства над алгебрами вещественных квазиматриц

В случаях алгебр  $R_p^q$  вещественных квазиматриц, так же как в случае алгебр  $R_p$  вещественных матриц  $p$ -го порядка, роль инволюционного антиавтоморфизма  $a \rightarrow \bar{a}$  играет транспонирование  $a \rightarrow a^T$ . Как показал М. А. Джавадов [4], пространство  $P_n(R_p)$  над алгеброй вещественных матриц  $p$ -го порядка допускает интерпретацию в проективном пространстве  $P_{p(n+1)-1}$  в виде многообразия  $(p-1)$ -плоскостей, причем точка пространства  $P_n(R_p)$  с координатами  $x^i = (X_i^x)^i$  изображается  $(p-1)$ -плоскостью пространства  $P_{p(n+1)-1}$  с базисными точками  $x_\lambda$ , имеющими координаты  $x_\lambda^i$ , совпадающими с элементами матриц  $x^i = (X_i^x)^i$ , а гиперплоскость пространства  $P_n(R_p)$  с тангенциальными координатами  $u_i = (u_x^i)_i$  изображается  $(pn-1)$ -плоскостью пространства  $P_{p(n+1)-1}$ , являющейся пересечением гиперплоскостей  $u^\lambda$  с тангенциальными координатами  $u_\lambda^i$ , совпадающими с элементами



матриц  $u_i = (u_{xi}^\lambda)$ . Из этого следует, что корреляция (1), которая здесь имеет вид

$$u_i = (x^i)^T \quad (8)$$

или

$$(u_x^\lambda)_i = [(x_x^\lambda)^i]^T, \quad (10)$$

в этой интерпретации изображается корреляцией пространства  $S_{p(n+1)-1}$ :

$$u_{xi} = x^{xi}. \quad (11)$$

Отсюда вытекает, что пространства  $\bar{S}_n(R_p)$  допускают интерпретацию в эллиптических пространствах  $S_{p(n+1)-1}$  в виде многообразия  $(p-1)$ -плоскостей, т. е. абсолютным поляритетом пространства  $S_{p(n+1)-1}$ . При этом метрические инварианты точек пространства  $\bar{S}_n(R_p)$  являются квадратами косинусов стационарных расстояний соответствующих  $(p-1)$ -плоскостей пространства  $S_{p(n+1)-1}$ , а движения пространства  $\bar{S}_n(R_p)$  изображаются движениями пространства  $S_{p(n+1)-1}$ .

Покажем, что пространство  $\bar{S}_n(R_p^q)$  допускает интерпретацию в квазиэллиптическом пространстве  $S_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}$  в виде многообразия поляризованных  $(p-1)$ -плоскостей этого пространства, пересекающихся с его абсолютной  $[(p-q)(n+1)-1]$ -плоскостью по  $(p-q-1)$ -плоскости. В самом деле, пространство  $\bar{S}_n(R_p^m)$  можно рассматривать как подпространство пространства  $\bar{S}_n(R_p(\epsilon))$ , для которого так же, как для  $\bar{S}_n(R_p)$ , строится интерпретация в виде многообразия  $(p-1)$ -плоскостей пространства  $S_{p(n+1)-1}(\epsilon)$ , причем точке пространства  $\bar{S}_n(R_p)$  с координатами  $x^i = (x_\lambda^i)^T$  соответствует  $(p-1)$ -плоскость пространства  $S_{p(n+1)-1}$  с базисными точками  $x_\lambda$ , имеющая координаты  $x_\lambda^{xi}$ , а гиперплоскости пространства  $\bar{S}_n(R_p)$  с тангенциальными координатами  $u_i = (u_x^\lambda)_i$  соответствует  $(pn-1)$ -плоскость пространства  $S_{p(n+1)-1}$ , являющаяся пересечением гиперплоскостей  $u_\lambda$  с тангенциальными координатами  $u_{xi}^\lambda$ .

В том случае, когда подматрицы  $(X_\beta^a)^i$  и  $(X_\alpha^a)^i$  матрицы  $(X_\lambda^a)^i$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, q$ ;  $\varphi, \chi = q+1, \dots, p$ ) являются вещественными матрицами  $q$ -го и  $(p-q)$ -го порядков, а подматрицы  $(X_\alpha^a)^i$  и  $(X_\beta^a)^i$  матрицы  $(X_\lambda^a)^i$  являются произведениями вещественных прямоугольных матриц соответствующих размеров на  $\epsilon$ , соответствующие точки  $x_\beta$  пространства  $S_{p(n+1)-1}(\epsilon)$  выделяются условиями

$$X_\beta^{ai} = \bar{X}_\beta^{ai}, \quad X_\beta^{\varphi i} = -\bar{X}_\beta^{\varphi i}, \quad (12)$$

а соответствующие точки  $X_\alpha$  этого пространства — условиями

$$X_\alpha^{ai} = -\bar{X}_\alpha^{ai}, \quad X_\alpha^{\varphi i} = \bar{X}_\alpha^{\varphi i}. \quad (13)$$

Но, как показала Н. Д. Пецко [5], условия  $x^a = \bar{x}^a$ ,  $x^u = -\bar{x}^u$  выделяют из пространства  $S_n(\epsilon)$  квазиэллиптическое пространство  $S_n^m$ . Поэтому условия (12) выделяют из пространства  $S_{p(n+1)-1}(\epsilon)$  квазиэллиптическое пространство  $S_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}$ , а условия (13) — квазиэллиптическое пространство  $S_{p(n+1)-1}^{(p-q)(n+1)-1}$ , соответствующее ему по принципу двойственности, которое можно рассматривать как многообразие гиперплоскостей пространства  $S_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}$ .

Каждой точке  $x_\beta$  пространства  $S_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}$ , не лежащей на его абсолютной  $[(p-q)(n+1)-1]$ -плоскости, соответствует полярная гиперплоскость  $u^\beta$ , проходящая через эту плоскость и имеющая тангенциальные координаты  $u_{xi}^\beta = x_\beta^{xi}$ ,  $u_{\varphi i}^\beta = 0$ , а каждой гиперплоскости  $u^\alpha$  пространства  $S_{p(n+1)-1}^{(p-q)(n+1)-1}$  с тангенциальными координатами  $u_{xi}^\alpha = x_\alpha^{xi}$ ,  $u_{\varphi i}^\alpha = x_\alpha^{\varphi i}$ ,

не проходящей через его абсолютную  $[(p-q)(n+1)-1]$ -плоскость, соответствует полюс  $x_\alpha$  в той плоскости, имеющей координаты  $x_\alpha^{xi} = 0$ ,  $x_\alpha^{\varphi i} = u_{\varphi i}^\alpha$ . Точки  $x_\beta$  и  $x_\alpha$  являются базисными точками  $(p-1)$ -плоскости пространства  $S_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}$ , пересекающей абсолютную плоскость этого пространства по  $(p-q-1)$ -плоскости, порождаемой точками  $x_\alpha$ , а гиперплоскости  $u^\beta$  и  $u^\alpha$  пересекаются  $(p-1)$ -плоскостью.

Случаю, когда квазиматрица  $M$  представляется матрицей с собственными числами  $\pm 1$ , соответствует специальное расположение поляризованных  $(p-1)$ -плоскостей пространства  $S_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}$ , пересекающихся с его абсолютной  $[(p-q)(n+1)-1]$ -плоскостью по  $(p-q-1)$ -плоскости. На прямой  $\bar{S}_1(R_1^1)$ , точки которой изображаются поляризованными евклидовыми прямыми квазиэллиптического пространства  $S_n^1$ , этому случаю соответствуют такие две пары поляризованных евклидовых прямых, что и сами эти прямые и их попарно пересекаются на абсолютной прямой и лежат в плоскостях, проходящих через эту прямую; этому случаю в интерпретации пространства  $S_n^1$  на паре плоскостей  $R_2$  ([6], стр. 378) соответствуют две пары параллельных прямых на каждой из плоскостей  $R_2$ . Нетрудно проверить, что группы движений пространств  $\bar{S}_n(R_p^q)$  и  $S_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}$  изоморфны между собой.

### § 3. Эллиптические пространства над алгебрами комплексных и кватернионных квазиматриц

Аналогично  $\bar{S}_n(R_p^q)$  определяются эллиптические пространства

$$\bar{S}_n[R_p^q(i)], \bar{S}_n[R_p^q(e)], \bar{S}_n[R_p^q(i)], \bar{S}_n[R_p^q(e)], \bar{S}[R_p^q(i, j)], \\ \bar{S}_n[R_p^q(i, j, E)] \text{ и } \bar{S}_n[K_p^q(i, j, E)]$$

над алгебрами комплексных, двойных, кватернионных и двойных кватернионных квазиматриц, первое и второе из которых обладают абсолютным поляритетом (1), а третье, четвертое, пятое и шестое — абсолютным поляритетом

$$u_i = (\bar{x}^i)^T, \quad (14)$$

седьмое — абсолютным поляритетом

$$u_i = (\bar{x}^i)^T, \quad (15)$$

где  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  — переход от двойного кватерниона  $\alpha = a + Eb$  к двойному кватерниону  $\bar{\alpha} = \bar{a} - E\bar{b}$ .

Совершенно аналогично теореме, доказанной в § 2, доказывается, что пространства

$$\bar{S}_n[R_p^q(i)], \bar{S}_n[R_p^q(e)], \bar{S}_n[R_p^q(i)], \bar{S}_n[R_p^q(e)], \\ \bar{S}_n[R_p^q(i, j)], \bar{S}_n[R_p^q(i, j, E)] \text{ и } \bar{S}_n[R_p^q(i, j, E)]$$

допускают интерпретации соответственно в комплексном и двойном квазиэллиптических пространствах  $S_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}(i)$  и  $S_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}(e)$ , а также в комплексных, двойных, кватернионных и двойных кватернионных эрмитовых квазиэллиптических пространствах  $\bar{S}_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}(i)$  [7],  $\bar{S}_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}(e)$  [8],  $\bar{S}_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}(i, j)$ ,  $\bar{S}_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}(i, j, E)$  и  $\bar{S}_{p(n+1)-1}^{q(n+1)-1}(i, j, E)$  [9] в виде многообразий поляризованных  $(p-1)$ -плоскостей этих пространств, пересекающихся с их абсолютной  $[(p-q)(n+1)-1]$ -плоскостью по  $(p-q-1)$ -плоскости. Нетрудно также проверить, что группы движений пространств



$\bar{S}_n [R_p^a(i)], \bar{S}_n [R_p^a(e)], \bar{S}_n [R_p^a(i)],$   
 $\bar{S}_n [R_p^a(e)], \bar{S}_n [R_p^a(i, j)], \bar{S}_n [R_p^a(i, j, E)]$  и  $\bar{S}_n [R_p^a(i, j, E)]$   
 соответственно изоморфны группам движений пространств  
 $S_{p(n+1)-1}^{a(n+1)-1}(i), S_{p(n+1)-1}^{a(n+1)-1}(e), S_{p(n+1)-1}^{a(n+1)-1}(i), S_{p(n+1)-1}^{a(n+1)-1}(e), S_{p(n+1)-1}^{a(n+1)-1}(i, j),$   
 $S_{p(n+1)-1}^{a(n+1)-1}(i, j, E)$  и  $S_{p(n+1)-1}^{a(n+1)-1}(i, j, E).$

Заметим также, что аналогично интерпретации эллиптического пространства  $\bar{S}_n(R_p)$  в виде многообразия  $(p-1)$ -плоскости пространства  $S_{p(n+1)-1}$  строятся интерпретации эллиптических пространств

$\bar{S}_n [R_p(\varepsilon)], \bar{S}_n [R_p(\varepsilon)], \bar{S}_n [R_p(i, \varepsilon)], \bar{S}_n [R_p(i, j, \varepsilon)], \bar{S}_n [R_p(i, j, \varepsilon)]$   
 и  $\bar{S}_n [R_p(i, \varepsilon, E)]$  в виде многообразий  $(p-1)$ -плоскости дуально квадратичного эллиптического пространства  $S_{p(n+1)-1}(\varepsilon)$  и дуально эрмитова эллиптического пространства  $S_{p(n+1)-1}(\varepsilon)$  [10], полукватернионно эрмитова эллиптического пространства  $S_{p(n+1)-1}(i, \varepsilon)$  [11], дуально кватернионно эллиптических пространств  $S_{p(n+1)-1}(i, j, \varepsilon)$  и  $S_{p(n+1)-1}(i, j, \varepsilon)$  [9]. Аналогично  $\bar{S}P_n(i, \varepsilon)$  можно определить симплектические пространства

$\bar{S}P_n [R_p(i, \varepsilon)], \bar{S}P_n [R_p(i, \varepsilon, E)]$  и  $\bar{S}P_n [R_p(i, j, \varepsilon)]$   
 как проективные пространства

$P_n [R_p(i, \varepsilon)], P_n [R_p(i, \varepsilon, E)]$   
 и  $P_n [R_p(i, j, \varepsilon)],$  в первых двух из которых удовлетворяется инволюция

$$u_i = i \bar{x}^i i^{-1}, \quad (16)$$

а в третьем — инволюция

$$u_i = i \tilde{x}^i i^{-1}. \quad (17)$$

Аналогично интерпретации эллиптических пространств строятся интерпретации симплектических пространств  $\bar{S}P_n [R_p(i, \varepsilon)], \bar{S}P_n [R_p(i, \varepsilon, E)]$  и  $\bar{S}P_n [R_p(i, j, \varepsilon)]$  в виде многообразий поляризованных  $(p-1)$ -плоскостей пространств

$$\bar{S}P_{p(n+1)-1}(i, \varepsilon), \bar{S}P_{p(n+1)-1}(i, \varepsilon, E) \text{ и } \bar{S}P_{p(n+1)-1}(i, j, \varepsilon).$$

#### § 4. Эллиптические пространства над алгебрами квазиальтернионов

Эллиптические пространства  $\bar{S}_n(A_p^a)$  над алгебрами квазиальтернионов определим с помощью абсолютного поляритета (1), где  $a \rightarrow \bar{a}$  — основная инволюция алгебр  $A_p^a$ . Из структуры алгебр  $A_p^a$  и вида основной инволюции в этих алгебрах, найденных в работе [12], а также из результатов этой работы вытекает:

эллиптические пространства  $\bar{S}_n(A_{8p+1}^{4a})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+1}^{4a+3})$  допускают интерпретации в виде многообразия поляризованных  $(2^p-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p-1}(n+1)-1}^{2^{4p-1}(n+1)-1}$ , пересекающихся с его абсолютной  $[(2^{4p}-2^{4p-1})(n+1)-1]$ -плоскостью по  $(n-2^{4p-1}-1)$ -плоскости;

эллиптические пространства  $\bar{S}_n(A_{8p+1}^{4a+1})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+1}^{4a+2})$  допускают интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p-1}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p-1}(n+1)-1}(i, \varepsilon);$

эллиптическое пространство  $\bar{S}(A_{8p+2}^{4a})$  допускает интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p}(n+1)-1}(\varepsilon),$  а

$\bar{S}_n(A_{8p+2}^{4a+1})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+2}^{4a+3})$  допускают интерпретации в виде многообразия поляризованных  $(2^{4p}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p}(n+1)-1}^{2^{4p}(n+1)-1}(i),$  пересекающихся с его абсолютной  $[(2^{4p}-2^{4p-1})(n+1)-1]$ -плоскостью по  $(n-2^{4p-1}-1)$ -плоскости;

эллиптическое пространство  $\bar{S}_n(A_{8p+2}^{4a+2})$  допускает интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p-1}-1)$ -плоскостей пространства

$$\bar{S}P_{2^{4p-1}(n+1)-1}(i, j, \varepsilon);$$

эллиптические пространства  $\bar{S}_n(A_{8p+3}^{4a})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+3}^{4a+1})$  допускают интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p}(n+1)-1}(i, \varepsilon);$   $\bar{S}_n(A_{8p+3}^{4a+2})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+3}^{4a+3})$  допускают интерпретации в виде многообразия поляризованных  $(2^{4p}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p}(n+1)-1}^{2^{4p}(n+1)-1}(i, j),$  пересекающихся с абсолютной  $[(2^{4p}-2^{4p-1})(n+1)-1]$ -плоскостью по  $(n-2^{4p-1}-1)$ -плоскости;

эллиптические пространства  $\bar{S}_n(A_{8p+4}^{4a})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+4}^{4a+2})$  допускают интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p}(n+1)-1}(i, j, \varepsilon);$   $\bar{S}_n(A_{8p+4}^{4a+1})$  допускает интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p}(n+1)-1}(i, \varepsilon, E);$   $\bar{S}_n(A_{8p+4}^{4a+3})$  допускает интерпретации в виде многообразия поляризованных  $(2^{4p}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p}(n+1)-1}^{2^{4p}(n+1)-1}(i, j, E),$  пересекающихся с его абсолютной  $[(2^{4p}-2^{4p-1})(n+1)-1]$ -плоскостью по  $(n-2^{4p-1}-1)$ -плоскости;

$\bar{S}_n(A_{8p+5}^{4a})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+5}^{4a+3})$  допускают интерпретации в виде многообразия поляризованных  $(2^{4p+1}-1)$ -плоскостей пространства

$$S_{2^{4p+1}(n+1)-1}^{2^{4p+1}(n+1)-1}(i, j),$$

пересекающихся с его абсолютной  $[(2^{4p+1}-2^{4p})(n+1)-1]$ -плоскостью по  $(n-2^{4p}-1)$ -плоскости;  $\bar{S}_n(A_{8p+5}^{4a+1})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+5}^{4a+2})$  допускают интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p+1}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p+1}(n+1)-1}(i, \varepsilon);$   $\bar{S}_n(A_{8p+5}^{4a+3})$  допускает интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p+1}-1)$ -плоскостей пространства  $\bar{S}P_{2^{4p+1}(n+1)-1}(i, j, \varepsilon);$

$\bar{S}_n(A_{8p+6}^{4a+1})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+6}^{4a+3})$  допускают интерпретации в виде многообразия поляризованных  $(2^{4p+2}-1)$ -плоскостей пространства

$$S_{2^{4p+2}(n+1)-1}^{2^{4p+2}(n+1)-1}(i),$$

пересекающихся с его абсолютной  $[(2^{4p+2}-2^{4p+1})(n+1)-1]$ -плоскостью по  $(n-2^{4p+1}-1)$ -плоскости;

$\bar{S}_n(A_{8p+6}^{4a+2})$  допускает интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p+2}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p+2}(n+1)-1}(\varepsilon);$

$S(A_{8p+7}^{4a})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+7}^{4a+8})$  допускают интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p+2}-1)$ -плоскостей пространства  $\bar{S}P_{2^{4p+2}(n+1)-1}(i, \varepsilon);$   $\bar{S}_n(A_{8p+7}^{4a+2})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+7}^{4a+3})$  допускают интерпретации в виде многообразия поляризованных  $(2^{4p+3}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p+3}(n+1)-1}^{2^{4p+3}(n+1)-1},$  пересекающихся с его абсолютной  $[(2^{4p+3}-2^{4p+2})(n+1)-1]$ -плоскостью по  $(n-2^{4p+2}-1)$ -плоскости;

$\bar{S}_n(A_{8p+8}^{4a})$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+8}^{4a+2})$  допускают интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p+3}-1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p+3}(n+1)-1}(\varepsilon);$   $\bar{S}_n(A_{8p+8}^{4a+1})$



допускает интерпретации в виде многообразия  $(2^{4p+2} - 1)$ -плоскостей пространства  $\bar{S}P_{2^{4p+2}(n+1)-1}(i, \epsilon, E)$ ;  $\bar{S}_n(A_{8p+8}^{4q+3})$  допускает интерпретации в виде многообразия поляризованных  $(2^{4p+3} - 1)$ -плоскостей пространства  $S_{2^{4p+2}(n+1)-1}^{2^{4p+2}(n+1)-1}(e)$ , пересекающихся с его абсолютной  $[(2^{4p+3} - 2^{4p+2})(n+1) - 1]$ -плоскостью по  $(n - 2^{4p+2} - 1)$ -плоскости. Заметим, что группы движений пространств  $\bar{S}_n(A_{8p+1}^Q)$ ,  $\bar{S}_n(A_{8p+2}^Q)$ ,  $\bar{S}_n(A_{8p+3}^Q)$ ,  $\bar{S}_n(A_{8p+4}^Q)$ ,  $\bar{S}_n(A_{8p+5}^Q)$ ,  $\bar{S}_n(A_{8p+6}^Q)$ ,  $\bar{S}_n(A_{8p+7}^Q)$  и  $\bar{S}_n(A_{8p+8}^Q)$  ( $C = 4q, 4q + 1, 4q + 2, 4q + 3$ ) соответственно изоморфны квазипростым группам Ли, получаемым предельными переходами из простых групп Ли классов  $D_{2^{4p-1}(n+1)}$ ,  $A_{2^{4p}(n+1)-1}$ ,  $C_{2^{4p}(n+1)}$ ,  $C_{2^{4p}(n+1)}(i)$  или  $C_{2^{4p}(n+1)}(e)$ ,  $C_{2^{4p+1}(n+1)}$ ,  $A_{2^{4p+2}(n+1)-1}$ ,  $D_{2^{4p+2}(n+1)}$ ,  $D_{2^{4p+2}(n+1)}(i)$  или  $D_{2^{4p+2}(n+1)}(e)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Джавадов М. А. „Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. наук“, 1957, № 4.
2. Розенфельд Б. А., Лушницкая И. Г., Маркина Л. М., Никитина Л. С. Тр. семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, вып. 15, 1969.
3. Розенфельд Б. А., Замаховский М. П., Орловская Т. Г., Семенова И. Н. „Изв. вузов, математика“, 1960, № 4 (83).
4. Джавадов М. А. „Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. наук“, 1957, № 2.
5. Пецко Н. Д. „Уч. зап. Коломенского пед. ин-та“, т. 9, 1965.
6. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства М., 1969.
7. Климанова Т. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1963, № 3.
8. Семенова И. Н. „Уч. зап. Коломенского пед. ин-та“, т. 8, 1965.
9. Пецко Н. Д. „Уч. зап. Коломенского пед. ин-та“, т. 8, 1965.
10. Карпова Л. М. и Макарова И. И. „Уч. зап. Коломенского пед. ин-та“, т. 8, 1965.
11. Андреева Л. П. и Шестырева Л. В. „Уч. зап. Коломенского пед. ин-та“, т. 8, 1965.
12. Аббасов Н. Б. и Орловская Т. Г. „Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. наук“, 1970, № 1.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступило 15. X 1970

Н. Т. Аббасов, М. П. Замаховски

#### Квазисадэ чэбрлэр үзэриндэ эллиптик фэзалар

#### ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ квазисадэ чэбрлэр үзэриндэ гурулмуш эллиптик фэзалар тэриф олунмуш вэ бу фэзаларын бир сыра хассэлэринин өйрөнүлмөсүндэн бэхс едилмишдир. Сонра һэгиги, комплекс вэ кватернион квазиматрис, квазиалтернионлар чэбрлэри үзэриндэ фэзалара бахылмышдыр. Бундан элавэ, квазиалтернионлар чэбрлэринин эсас инволүсияларына эсасланараг, бахылан фэзаларын һэгиги, комплекс икигат кватернион, жарымкватернион, дуал кватернион вэ икигат жарымкватернион интерпретациялары верилмишдир.

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛЭР АКАДЕМИЯСЫНЫН ХЭБЭРЛЭРИ  
Физика-техника вэ рифазият елмлэри сериясы, 1972, № 3.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
Серия физико-технических и математических наук, 1972, № 3.

Г. Т. ГАСАНОВ, Б. О. САДЫХОВ А. К. МЕХТИЕВ

#### ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Экспериментальное исследование вязкой жидкости в трубе с проницаемой стенкой показало [1], что гидравлические сопротивления с увеличением перепада давления заметно уменьшаются. Это объясняется образованием пристенного слоя вязкой жидкости у проницаемой стенки при движении вязко-пластичной жидкости. Та им образом, одним из путей уменьшения гидравлических сопротивлений при движении вязко-пластичных сред является регулирование пристенного слоя.

Задача формулируется следующим образом: при известных параметрах системы необходимо найти размер пристенного слоя, при котором гидравлическое сопротивление будет минимальным. Эта задача может быть решена двумя способами: 1) путем применения вариационных методов; 2) путем подбора.

В связи с указанным в данной статье рассматривается нестационарное прямолинейно-параллельное движение двух вязких жидкостей между двумя коаксиальными цилиндрическими трубами. Предполагается, что в цилиндрическую трубу радиусом  $R_2$ , заполненную вязкой жидкостью, с заданной скоростью концентрично погружается цилиндрическая труба меньшего радиуса  $R_1$ .

При известной скорости погружения требуется найти изменение давления на торце погружаемого цилиндра при наличии пристенного слоя. При этих предположениях решение поставленной задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$p_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial t} = p_1 \left( \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_1}{\partial r} \right) + \frac{\Delta p(r)}{l}, \quad R_1 \leq r \leq r_1, \quad (1)$$

$$p_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial t} = p_2 \left( \frac{\partial^2 \tau_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_2}{\partial r} \right) + \frac{\Delta p(r)}{l}, \quad r_1 \leq r \leq R_2, \quad (2)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$\tau_1(r, 0) = \tau_2(r, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\tau_1(r_1, t) = \tau_2(r_1, t), \quad (4)$$

$$\tau_1(R_1, t) = u \sin \omega t, \quad (5)$$

$$\tau_2(R_2, t) = 0,$$



$$\rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial r}(r_1 t) = \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial r}(r_1 t), \quad (7)$$

$$Q = R_1^2 u \sin \omega t = 2 \int_{R_1}^{r_1} v_1 r dr + 2 \int_{r_1}^{R_2} v_2 r dr; \quad (8)$$

$u \sin \omega t$  — заданная скорость погружения внутреннего цилиндра,  $\Delta p$  — перепад давления,  $l$  — длина трубы,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — соответственно, коэффициенты жидкостей.

Учитывая трудность получения точного решения уравнений (1) и (2) при условиях (3) — (8), в статье приводится приближенное решение этой задачи по способу Н. А. Слезкина и С. М. Тарга (2).

Принимая во внимание плавность течения,  $\rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t}$  и  $\rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial t}$  в уравнениях (1) и (2) заменяются средними значениями по радиусу:

$$\varphi_1(t) = \frac{\rho_1}{r_1 - R_1} \int_{R_1}^{r_1} \frac{\partial v_1}{\partial t} dr, \quad (9)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\rho_2}{R_2 - r_1} \int_{r_1}^{R_2} \frac{\partial v_2}{\partial t} dr. \quad (10)$$

При этих предположениях решения приближенных уравнений с учетом граничных условий (4) — (7) будут иметь вид:

$$v_1(r, t) = \frac{r^2}{4\mu_1} \Phi_1(t) + [b_1 \Phi_1(t) + b_2 \Phi_2(t) + b_3 F(t) + b_4 \sin \omega t] \ln r + [d_1 \Phi_1(t) + d_2 \Phi_2(t) + d_3 F(t) + d_4 \sin \omega t], \quad (11)$$

$$v_2(r, t) = \frac{r^2}{4\mu_2} \Phi_2(t) + [a_1 \Phi_1(t) + a_2 \Phi_2(t) + a_3 F(t) + a_4 \sin \omega t] \ln r + [h_1 \Phi_1(t) + h_2 \Phi_2(t) + h_3 F(t) + h_4 \sin \omega t]. \quad (12)$$

где

$$\Phi_1(t) = \varphi_1(t) - \frac{\Delta p}{l}, \quad \Phi_2(t) = \varphi_2(t) - \frac{\Delta p}{l}; \quad F(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t);$$

$$b_1 = \kappa \frac{\mu_2}{4\mu_1} (r_1^2 - R_1^2), \quad b_2 = \frac{\kappa}{4} (\kappa_2^2 - r_1^2), \quad b_3 = \frac{r_1^2}{2\mu_1} + \kappa \frac{\mu_1 r_1^2}{2\mu_2} \ln \frac{r_1}{R_1},$$

$$b_4 = \kappa \mu_2 u;$$

$$d_1 = -\frac{R_1^2}{4\mu_1} - \kappa \frac{\mu_2}{4\mu_1} (r_1^2 - R_1^2) \ln R_1, \quad d_2 = -\frac{\kappa}{4} (R_2^2 - r_1^2) \ln R_1, \quad d_3 = -\left(\frac{r_1^2}{2\mu_1} + \kappa \frac{\mu_2 r_1^2}{2\mu_1} \ln \frac{r_1}{R_1}\right) \ln R_1, \quad d_4 = u(1 - \kappa \mu_2 \ln R_1);$$

$$a_1 = \frac{\kappa}{4} (r_1^2 - R_1^2), \quad a_2 = \kappa \frac{\mu_1}{4\mu_2} (R_2^2 - r_1^2), \quad a_3 = \kappa \frac{r_1^2}{2} \ln \frac{r_1}{R_1}, \quad a_4 = \kappa \mu_1 u;$$

$$h_1 = -\frac{\kappa}{4} (r_1^2 - R_1^2) \ln R_2, \quad h_2 = -\frac{R_2^2}{4\mu_2} - \kappa \frac{\mu_1}{4\mu_2} (R_2^2 - r_1^2) \ln R_2, \quad h_3 = -\frac{\kappa_1}{2} r_1^2 \ln \frac{r_1}{R_1} \ln R_2, \quad h_4 = -\kappa \mu_1 u \ln R_2;$$

$$\kappa = -\frac{1}{\mu_2 \ln \frac{r_1}{R_1} + \mu_1 \ln \frac{R_2}{r_1}}.$$

Определив  $\frac{\partial v_1}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v_2}{\partial t}$ , подставив в правую часть (9) — (10) и интегрируя, а также пользуясь условием, (6), получим:

$$\varphi_1(t) = \kappa_1 \Phi_1'(t) + \kappa_2 \Phi_2'(t) + \kappa_3 F'(t) + \kappa_4 \cos \omega t, \quad (13)$$

$$\varphi_2(t) = \kappa_5 \Phi_1'(t) + \kappa_6 \Phi_2'(t) + \kappa_7 F'(t) + \kappa_8 \cos \omega t, \quad (14)$$

$$\frac{\Delta p}{l} = a_1 \varphi_1(t) + a_2 \varphi_2(t) + c_3 \sin \omega t,$$

где

$$\kappa_1 = \frac{\rho_1}{r_1 - R_1} \left[ \frac{r_1^3 - R_1^3}{12\mu_1} + b_1 (r_1 \ln r_1 - r_1 - R_1 \ln R_1 + R_1) + d_1 (r_1 - R_1) \right],$$

$$\kappa_2 = \frac{\rho_1}{r_1 - R_1} [b_2 (r_1 \ln r_1 - r_1 - R_1 \ln R_1 + R_1) + d_2 (r_1 - R_1)],$$

$$\kappa_3 = \frac{\rho_1}{r_1 - R_1} [b_3 (r_1 \ln r_1 - r_1 - R_1 \ln R_1 + R_1) + d_3 (r_1 - R_1)],$$

$$\kappa_4 = \frac{\omega \rho_1}{r_1 - R_1} [b_4 (r_1 \ln r_1 - r_1 - R_1 \ln R_1 + R_1) + d_4 (r_1 - R_1)],$$

$$\kappa_5 = \frac{\rho_2}{R_2 - r_1} [a_1 (R_2 \ln R_2 - R_2 - r_1 \ln r_1 + r_1) + h_1 (R_2 - r_1)],$$

$$\kappa_6 = \frac{\rho_2}{R_2 - r_1} \left[ \frac{R_2^3 - r_1^3}{12\mu_2} + a_2 (R_2 \ln R_2 - R_2 - r_1 \ln r_1 + r_1) + h_2 (R_2 - r_1) \right],$$

$$\kappa_7 = \frac{\rho_2}{R_2 - r_1} [a_3 (R_2 \ln R_2 - R_2 - r_1 \ln r_1 + r_1) + h_3 (R_2 - r_1)],$$

$$\kappa_8 = \frac{\omega \rho_2}{R_2 - r_1} [a_4 (R_2 \ln R_2 - R_2 - r_1 \ln r_1 + r_1) + h_4 (R_2 - r_1)],$$

$$a_1 = \frac{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3}{a_1 + a_2}, \quad a_2 = \frac{\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3}{a_1 + a_2},$$

$$a_3 = \frac{\bar{\sigma}_4 - \pi K_1^2 \omega}{a_1 + a_2}, \quad a_4 = \frac{\pi (r_1^4 - R_1^4)}{8\mu_1} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} (2r_1^2 \ln r_1 - r_1^2 - 2R_1^2 \ln R_1 + R_1^2) b_1 + \pi (r_1^2 - R_1^2) d_1 +$$

$$+ \frac{\pi}{2} (2R_2^2 \ln R_2 - R_2^2 - 2r_1^2 \ln r_1 + r_1^2) a_1 + \pi (R_2^2 - r_1^2) h_1,$$

$$\bar{a}_2 = \frac{\pi (R_2^4 - r_1^4)}{8\mu_2} + \frac{\pi}{2} (2r_1^2 \ln r_1 - r_1^2 - 2R_2^2 \ln R_1 + R_1^2) b_2 +$$

$$+ \pi (r_1^2 - R_1^2) d_2 + \frac{\pi}{2} (2R_2^2 \ln R_2 - R_2^2 - 2r_1^2 \ln r_1 + r_1^2) a_2 + \pi (R_2^2 - r_1^2) h_2,$$

$$\bar{a}_3 = \frac{\pi}{2} (2r_1^2 \ln r_1 - r_1^2 - 2K_1^2 \ln R_1 + R_1^2) b_3 +$$

$$+ \pi (r_1^2 - R_1^2) d_3 + \frac{\pi}{2} (2R_2^2 \ln R_2 - R_2^2 - 2r_1^2 \ln r_1 + r_1^2) a_3 + \pi (R_2^2 - r_1^2) h_3,$$

$$\bar{a}_4 = \frac{\pi}{2} (2r_1^2 \ln r_1 - r_1^2 - 2R_1^2 \ln R_1 + R_1^2) b_4 + \pi (r_1^2 - R_1^2) d_4 +$$

$$+ \frac{\pi}{2} (2R_2^2 \ln R_2 - R_2^2 - 2r_1^2 \ln r_1 + r_1^2) a_4 + \pi (R_2^2 - r_1^2) h_4.$$



Решая систему обыкновенных дифференциальных уравнений (18)–(15), находим неизвестные функции  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ , а также перепад давлений на единицу длины  $\frac{\Delta p}{l}$ :

$$\varphi_1(t) = c_1 e^{\kappa_1^* t} + c_2 e^{\kappa_2^* t} + M \cos \omega t + N \sin \omega t; \quad (16)$$

$$\varphi_2(t) = A c_1 e^{\kappa_1^* t} + B c_2 e^{\kappa_2^* t} + H_1 \cos \omega t + H_2 \sin \omega t, \quad (17)$$

$$\frac{\Delta p}{l} = (\alpha_1 + \alpha_2 A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (\alpha_1 + \alpha_2 B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (\alpha_1 M + \alpha_2 H_1) \cos \omega t + (\alpha_1 N + \alpha_2 H_2) \sin \omega t, \quad (18)$$

где  $A = \frac{\beta_5 + \kappa_1^* (\beta_2 \beta_4 - \beta_1 \beta_5)}{\beta_2}$ ,  $B = \frac{\beta_5 + \kappa_2^* (\beta_2 \beta_4 - \beta_1 \beta_5)}{\beta_2}$ ,

$$M = \frac{(\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4) \{ \beta_3 [\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4 - \omega^2 (\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4)^2] - \omega^2 (\beta_1 + \beta_5) (\beta_2 \beta_6 - \beta_3 \beta_5) (\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4) \}}{\omega^2 (\beta_1 + \beta_5)^2 (\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4)^2 + [\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4 - \omega^2 (\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4)^2]^2},$$

$$N = - \frac{(\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4) \{ \omega (\beta_2 \beta_6 - \beta_3 \beta_5) [\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4 - \omega^2 (\beta_1 + \beta_5) (\beta_2 \beta_6 - \beta_3 \beta_5) (\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4)] - \omega^2 (\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4)^2 \}}{\omega^2 (\beta_1 + \beta_5)^2 (\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4)^2 + [\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4 - \omega^2 (\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4)^2]^2},$$

$$H_1 = - \frac{\omega (\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4) N - \beta_5 M - \beta_2 \beta_6 + \beta_3 \beta_5}{\beta_2},$$

$$H_2 = \frac{\omega (\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4) M - \beta_5 N}{\beta_2},$$

$$\beta_1 = \kappa_1 (1 - \alpha_1) - \kappa_2 \alpha_1 - \kappa_3, \quad \beta_2 = -\kappa_1 \alpha_2 + \kappa_2 (1 - \alpha_2) + \kappa_3, \\ \beta_3 = -\kappa_1 \omega \alpha_3 - \kappa_2 \omega \alpha_3 + \kappa_4, \quad \beta_4 = \kappa_5 (1 - \alpha_1) - \alpha_1 \kappa_6 - \kappa_7, \\ \beta_5 = -\alpha_2 \kappa_5 + \kappa_6 (1 - \alpha_2) + \kappa_7, \quad \beta_6 = -\kappa_5 \omega \alpha_3 - \kappa_6 \omega \alpha_3 + \kappa_8;$$

$\kappa_1^*$  и  $\kappa_2^*$  являются корнями характеристического уравнения:

$$\kappa^{*2} + \frac{\beta_1 + \beta_5}{\beta_2 \beta_4 - \beta_1 \beta_5} \kappa^* + \frac{\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4}{(\beta_1 \beta_5 - \beta_2 \beta_4)^2} = 0,$$

т. е.

$$\kappa_{1,2}^* = \frac{\beta_4 + \beta_5}{2 (\beta_2 \beta_4 - \beta_1 \beta_5)} \pm \sqrt{\frac{(\beta_1 - \beta_5)^2 + 4 \beta_2 \beta_4}{2 (\beta_2 \beta_4 - \beta_1 \beta_5)}}.$$

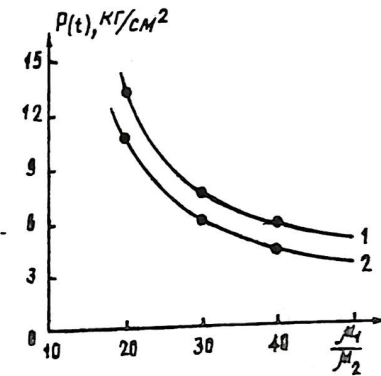
Требуя выполнения начальных условий  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ , находим постоянные интегрирования:

$$c_1 = \frac{BM - H_1}{A - B}, \quad c_2 = \frac{AM - H_1}{B - A}.$$

Таким образом, учитывая (16)–(18) в (11)–(12), окончательно для скоростей жидкости имеем:

$$v_1(r, t) = [(1 - \alpha_1 - \alpha_2 A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (M - \alpha_1 M - \alpha_2 H_1) \cos \omega t + (N - \alpha_1 N - \alpha_2 H_2) \sin \omega t] \frac{r^2}{4\mu_1} +$$

$$+ \{ b_1 [(1 - \alpha_1 - \alpha_2 A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (M - \alpha_1 M - \alpha_2 H_1) \cos \omega t + (N - \alpha_1 N - \alpha_2 H_2) \sin \omega t] + \\ + b_2 [(A - \alpha_1 - \alpha_2 A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (\beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2 B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (H_1 - \alpha_1 M - \alpha_2 H_1) \cos \omega t + (H_2 - \alpha_1 N - \alpha_2 H_2) \sin \omega t] + \\ + b_3 [(1 - A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (1 - B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (M - H_1) \cos \omega t + (N - H_2) \sin \omega t] + b_4 \sin \omega t \} \ln r + \{ d_1 [(1 - \alpha_1 - \alpha_2 A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (M - \alpha_1 M - \alpha_2 H_1) \cos \omega t + (N - \alpha_1 N - \alpha_2 H_2) \sin \omega t] + \\ + d_2 [(A - \alpha_1 - \alpha_2 A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (\beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2 B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (H_1 - \alpha_1 M - \alpha_2 H_1) \cos \omega t + (H_2 - \alpha_1 N - \alpha_2 H_2) \sin \omega t] + \\ + d_3 [(1 - A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (1 - B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (M - H_1) \cos \omega t + (N - H_2) \sin \omega t] + d_4 \sin \omega t \}; \\ v_2(r, t) = [(A - \alpha_1 - \alpha_2 A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (B_2 - \alpha_1 - \alpha_2 B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (H_1 - \alpha_1 M - \alpha_2 H_1) \cos \omega t + (H_2 - \alpha_1 N - \alpha_2 H_2) \sin \omega t] \frac{r^3}{4\mu_2} + \\ + \{ a_1 [(1 - \alpha_1 - \alpha_2 A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (M - \alpha_1 M - \alpha_2 H_1) \cos \omega t + (N - \alpha_1 N - \alpha_2 H_2) \sin \omega t] + \\ + a_2 [(A - \alpha_1 - \alpha_2 A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (\beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2 B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (H_1 - \alpha_1 M - \alpha_2 H_1) \cos \omega t + (H_2 - \alpha_1 N - \alpha_2 H_2) \sin \omega t] +$$



1.  $\frac{R_2}{r_1} = 1,01$  при  $\begin{cases} R_2 = 0,1345 \text{ м.} \\ r_1 = 0,1318 \text{ м.} \end{cases}$
2.  $\frac{R_2}{r_1} = 1,12$  при  $\begin{cases} R_2 = 0,1345 \text{ м.} \\ r_1 = 0,12 \text{ м.} \end{cases}$

$$+ \alpha_3 [(1 - A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (1 - B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (M - H_1) \cos \omega t + (N - H_2) \sin \omega t] + c_4 \sin \omega t \ln r + \\ + \{ h_1 [(1 - \alpha_1 - \alpha_2 A) c_1 e^{\kappa_1^* t} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 B) c_2 e^{\kappa_2^* t} + (M - \alpha_1 M - \alpha_2 H_1) \cos \omega t + (N - \alpha_1 N - \alpha_2 H_2) \sin \omega t] +$$



$$+ h_2 [(A - \alpha_1 - \alpha_2 A) c_1 e^{k_1 t} + (B_2 - \alpha_1 - \alpha_2 B) c_2 e^{k_2 t} + \\ + (H_1 - \alpha_1 M - \alpha_2 H_1) \cos \omega t + (H_2 - \alpha_1 N - \alpha_2 H_2) \sin \omega t] + \\ + h_3 [(1 - A) c_1 e^{k_1 t} + (1 - B) c_2 e^{k_2 t} + \\ + (M - H_1) \cos \omega t + (N - H_2) \sin \omega t] + h_4 \sin \omega t].$$

На рисунке представлены кривые зависимости перепада давления от отношений  $\frac{p_1}{p_2}$ , полученных на основе формулы (18), при заданных различных значениях  $\frac{R_2}{r_1}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзаджанзаде А. Х. и др. ДАН СССР, т. 178, 1968, № 1.
2. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений, ГИТТЛ, М., 1951.

Азербайджанский политехнический институт

Поступило 9. XII 1970

Г. Т. Насанов, Б. О. Садыгов, Э. Г. Мехдижев

Сыхылмажан өзлү мајенин гејри-стационар һәрәкәтинә аид бир мәсәлә

#### КҮЛАСӘ

Мәһәләдә ики коаксиал цилиндр бору арасында ики өзлү мајенин гејри-стационар һәрәкәтинә бахылмышдыр. Бахылган мәсәлә ријазәтләрдә (1, 2) тәңликләринин (3, 8) шәртләри дахилиндә һәлләһә кәтәр әһ шдир.

Нәт-һәд, мајеләрин өзлүјүндән вә онларын ајрылма сәһнәдидән, сыхылма олараг һидравлик муғавимәт тәјин едилмишдир.

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫҢ ХӘБӘРЛӘРИ  
Физика-техника вә ријазийат елмләри сәријасы, 1972, № 3.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
Серия физико-технических и математических наук, 1972, № 3.

Ф. Г. НАСИБОВ

### ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ОПРЕДЕЛЕННЫХ КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ. I.

#### § 1. Постановка задачи

Следуя И. И. Ибрагимову ([1], стр. 63—64), определим классы целых функций:

1. К классу  $D_{\frac{1}{m}, p}(\sigma)$  относятся целые функции  $f(z)$ , удовлетворяющие одному из условий:

а)  $f(z)$  имеет порядок  $\rho = \frac{1}{m}$  и тип  $\sigma$ , где  $m > 1$  — любое четное число, причем существует интеграл

$$\|f\|_{p, m} = \left( \int_0^\infty |f(t)|^p \cdot t^{-\frac{p-1}{m}} dt \right)^{1/p} < +\infty; \quad (1)$$

б)  $f(z)$  четная, имеет порядок  $\rho = \frac{1}{m}$  ( $m \geq 1$  нечетное) и тип  $\sigma$ , причем для нее существует интеграл (1).

2. Класс  $L_{\frac{1}{m}, p}^*(\sigma)$  состоит из всех нечетных целых функций  $f(z)$  порядка  $\rho = \frac{1}{m}$  ( $m \geq 1$  нечетное) и типа  $\sigma$ , для которых существует интеграл (1).

3. В класс  $B_{\frac{1}{m}, p}(\sigma)$  включаются все целые функции  $f(z)$  порядка  $\rho = \frac{1}{m}$  и типа  $\sigma$ , для которых

$$\|f\|_{p, m}^* = \left( \int_0^\infty |f(t)|^p \cdot t^{\frac{(p-1)(m-1)}{m}} dt \right)^{1/p} < +\infty, \quad (2)$$

и кроме того, удовлетворяется одно из следующих условий:

- а) когда  $m > 1$  четное,  $f(z)$  произвольная;
- б) когда  $m \geq 1$  нечетное,  $f(z)$  также нечетная.

4. Наконец, в класс  $B_{\frac{1}{m}, p}^*(\sigma)$  включаются все четные целые

функции порядка  $\rho = \frac{1}{m}$  ( $m \geq 1$  нечетное) и типа  $\sigma$ , для которых выполняется условие (2).



Нетрудно проверить, что  $D_{1,p}(\sigma) \equiv B_{1,p}^*(\sigma)$ ,  $L_{1,p}^*(\sigma) \equiv B_{1,p}(\sigma)$ ,  $W_{\sigma}^{(p)}$  (четн.  $\cup$  нечетн.)  $\equiv D_{1,p}(\sigma) \cup D_{1,p}^*(\sigma) \equiv B_{1,p}(\sigma) \cup B_{1,p}^*(\sigma)$ , где  $W_{\sigma}^{(p)}$  (четн.  $\cup$  нечетн.) — множество четных и нечетных функций, входящих в известное пространство  $W_{\sigma}^{(p)}$  (см. [1], стр. 38),

$$\|f\|_{p,1}^p = \frac{1}{2} \cdot \|f\|_p^p, (\|f\|_{p,1}^*)^p = \frac{1}{2} \cdot \|f\|_p^p; \quad \|f\|_{1,m}^* = \frac{1}{2} \|f\|_1,$$

$$\|f\|_p^p = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < +\infty.$$

Класс  $D_{1,\frac{1}{m},p}(\sigma)$  впервые рассмотрен, по-видимому, С. Н. Бернштейном (см. [5]), а класс  $L_{1,\frac{1}{m},p}(\sigma)$  — в работе [2].

Далее через  $D_{1,\frac{1}{m},p}(\sigma; 1)$ ,  $L_{1,\frac{1}{m},p}^*(\sigma; 1)$ ,  $B_{1,\frac{1}{m},p}(\sigma; 1)$  и  $B_{1,\frac{1}{m},p}^*(\sigma; 1)$  будем обозначать единичные сферы соответственно в классах  $D_{1,\frac{1}{m},p}(\sigma)$ ,  $D_{1,\frac{1}{m},p}^*(\sigma)$ ,  $B_{1,\frac{1}{m},p}(\sigma)$  и  $B_{1,\frac{1}{m},p}^*(\sigma)$ .  $M_p(D)$  обозначает класс функций  $K(z)$ , регулярных вне односвязной области  $G$  с границей  $\Gamma$  (внутри области  $G$  она может иметь конечное число полюсов) для которых функции

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K(\xi) \cos [t(\xi + x)]^{\frac{1}{m}} d\xi \quad (3)$$

удовлетворяют условию

$$\|\Phi\|_{p,m}^0 = \|\Phi(x, t)\|_{p,m}^0 = \left( \int_0^{\sigma^m} |\Phi(x, t)|^p \cdot t^{-\frac{m-1}{m}} dt \right)^{1/p} < +\infty, \quad (4)$$

где  $p > 1$ ,  $0 < x < \infty$ ,  $\Gamma$  — замкнутый спрямляемый контур.

Через  $M_p(D^*)$  обозначим подобный класс функций  $K(z)$ , для которых

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K(\xi) \sin [t(\xi + x)]^{\frac{1}{m}} d\xi \quad (5)$$

удовлетворяют условию (4).

Аналогично определяются классы  $M_p(B)$  и  $M_p(B^*)$  (см. § 5).

Рассмотрим интегральный оператор:

$$U(f; x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi + x) K(\xi) d\xi, \quad (6)$$

где  $f(z)$  принадлежит одному из классов  $D_{1,\frac{1}{m},p}(\sigma)$ ,  $D_{1,\frac{1}{m},p}^*(\sigma)$ ,  $B_{1,\frac{1}{m},p}(\sigma)$ ,  $B_{1,\frac{1}{m},p}^*(\sigma)$ , а  $K(z)$  — одному из соответствующих классов  $M_p$ .

Требуется найти

$$\sup_{f \in A_1} \left\{ \sup_{0 < x < \infty} |U(f; x)| \right\} \equiv \|U\|_{A,p}^{(m)} \quad (7)$$

при заданном  $K(z)$  из соответствующего класса  $M_p$ ,  $A_1$  — одна из определенных выше единичных сфер.

В работе наряду с оператором (6) рассматривается функционал (см. [7])

$$L(f) = U(f; 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) K(\xi) d\xi \quad (8)$$

и задача о нахождении его нормы

$$L\|_{A,p}^{(m)} = \sup_{f \in A_1} |L(f)|. \quad (9)$$

В данной статье, исходя из интегральных представлений функций, принадлежащих одному из определенных выше классов, получены оценки для  $\|U\|_{A,p}^{(m)}$  и  $\|L\|_{A,p}^{(m)}$ ; в ряде случаев найдены точные значения этих величин; построены экстремальные функции, для которых достигаются верхние грани в (7) и (9), с указанием их единственности. Аналогичные задачи в известном классе  $W_{\sigma}^{(p)}$  (см. [1], стр. 38) были рассмотрены нами ранее [3].

## § 2. Экстремальные задачи в классе $D_{1,\frac{1}{m},p}(\sigma)$

Пусть  $f(z)$  — любая функция из класса  $D_{1,\frac{1}{m},p}(\sigma)$ . Тогда по теореме И. И. Ибрагимова (см. [1], стр. 67) при  $1 \leq p \leq 2$  она представляется в виде

$$f(z) = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\sigma^m} \varphi(t) \cdot t^{-\frac{m-1}{m}} \cdot \cos(\varepsilon t)^{1/m} dt, \quad (10)$$

причем

$$\varphi(t) = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} f(x) \cdot \cos(xt)^{1/m} \cdot x^{-\frac{m-1}{m}} dx. \quad (11)$$

Кроме того, в случае  $1 < p \leq 2$  справедливо неравенство (причем константа здесь написана из неравенства К. И. Бабенко [4], а не из неравенства Титчмарша (см. [1], стр. 19)):

$$\|\varphi\|_{q,m}^0 = \left( \int_0^{\sigma^m} |\varphi(x)|^q \cdot x^{-\frac{m-1}{m}} dx \right)^{1/q} \leq \left( \frac{2}{m} \right)^{\frac{2-p}{p}} \cdot B(p, q) \cdot \|f\|_{p,m}, \quad (12)$$

где  $B(p, q) = \left( \frac{2\pi}{q} \right)^{1/2q} \cdot \left( \frac{p}{2\pi} \right)^{1/2p}$ , неравенство (12) обращается в равенство при  $p = q = 2$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

В силу (10) оператор (6) можно представить в виде

$$U(f; x) = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\sigma^m} \varphi(t) \cdot \Phi(x, t) \cdot t^{-\frac{m-1}{m}} dt, \quad (13)$$

где  $\Phi(x, t)$  определяется равенством (3).

Из (13), применяя сначала неравенство Гельдера, а затем (12), получаем оценку ( $1 < p \leq 2$ ):

$$|U(f; x)| \leq \frac{1}{m} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left( \frac{2}{m} \right)^{\frac{2-p}{p}} \cdot B(p, q) \cdot \|\Phi(x, t)\|_{p,m}^0 \cdot \|f\|_{p,m}. \quad (14)$$

Покажем, что (14) справедливо и в случае  $p = 1$ . На самом деле, из равенства (13) имеем

$$|U(f; x)| \leq \left( \frac{2}{\pi m^2} \right)^{1/2} \cdot \sup_t |\varphi(t)| \cdot \int_0^{\sigma^m} |\Phi(x, t)| \cdot t^{-\frac{m-1}{m}} dt. \quad (15)$$



С другой стороны, из (11) получаем

$$\sup_t |\varphi(t)| \leq \left(\frac{2}{\pi m^2}\right)^{1/2} \cdot \int_0^\infty |f(x)| \cdot x^{-\frac{m-1}{m}} dx = \left(\frac{2}{\pi m^2}\right)^{1/2} \|f\|_{1,m}.$$

Учитывая последнее в (15), находим, что

$$|U(f; x)| \leq \frac{2}{\pi m^2} \cdot \|f\|_{1,m} \cdot \|\Phi(x, t)\|_{1,m}^0,$$

которое совпадает с (14) при  $p = 1$ . Таким образом, доказана

**Теорема 1.** В классе  $D_{\frac{1}{m}, p}(\sigma)$  ( $1 \leq p \leq 2$ ) справедливо неравенство

$$|U(f; x)| \leq \left(\frac{2}{\pi m^2}\right)^{1/p} \cdot \sqrt[p]{p^{1/p} \cdot q^{-1/q}} \cdot \|f\|_{p,m} \times \\ \times \|\Phi(x, t)\|_{p,m}^0 \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \quad (16)$$

Из этой теоремы выведем ряд следствий, представляющих самостоятельный интерес. Для этого область  $G$  выберем так, чтобы точка  $z = -x$  ( $x > 0$ ) осталась вне  $G$ . С этой целью достаточно из круга  $|z| \leq \lambda$  отрезать левый сегмент с вертикальной хордой  $\overline{AB}$ , где  $-x < \operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B < 0$ ,  $|A| = |B| = \lambda$ ,  $\operatorname{Im} A < 0$ ,  $\operatorname{Im} B > 0$  (или наоборот:  $\operatorname{Im} A > 0$ ,  $\operatorname{Im} B < 0$ ). Оставшуюся часть круга возьмем в качестве  $G$ . А для классов  $D_{\frac{1}{2}, p}(\sigma)$ ,  $D_{1, p}(\sigma)$  и  $L_{1, p}^*(\sigma)$  в качестве  $G$

можно взять просто круг  $|z| \leq \lambda$  (так и будем поступать в дальнейшем, как только речь пойдет об этих классах, может быть, даже не упоминая об этом каждый раз).

**Следствие 1.** Для любой функции  $f(z) \in D_{\frac{1}{m}, p}(\sigma)$  справедливо неравенство:

$$|f(x)| \leq \begin{cases} \left(\frac{2\sigma}{\pi m}\right)^{1/p} \cdot p^{1/2p} \cdot q^{-1/2q} \cdot \|f\|_{p,m}, & 1 \leq p \leq 2; \\ \left(\frac{2p\sigma}{\pi m}\right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m}, & p > 2. \end{cases} \quad (17)$$

$$(18)$$

**Доказательство.** Пусть в теореме 1  $K(z) = \frac{1}{z}$ . Ясно, что при этом

$U(f; x) \equiv f(x)$ ,  $\Phi(x, t) = \cos(xt)^{1/m}$ ,  $\|\Phi(x, t)\|_{p,m}^0 \leq (m\sigma)^{1/p}$ . Поэтому из (16) получаем (17). Пусть теперь  $p > 2$ . Тогда для некоторого натурального  $k$  будем иметь  $2^k < p \leq 2^{k+1}$ . Следуя [1], положим  $r = p \cdot 2^{-k}$ . Ясно, что  $1 < r \leq 2$ . Применяя (17) к функции  $g(z) = [f(z)]^{2^k}$  с индексом  $r$ , находим

$$|f(x)|^{2^k} \leq \left(\frac{2 \cdot \sigma \cdot 2^k}{\pi \cdot m}\right)^{1/r} \cdot r^{1/2r} \cdot r_1^{-1/2r_1} \cdot \|f\|_{p,m}^{2^k/r}; \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = 1.$$

Отсюда

$$|f(x)| \leq \left(\frac{2 \cdot \sigma \cdot 2^k}{\pi \cdot m}\right)^{1/r} \cdot r^{1/2r} \cdot r_1^{-1/2r_1} \cdot \|f\|_{p,m}. \quad (19)$$

Заметим, что если  $r = p \cdot 2^{-k}$ , то  $r_1 = \frac{p}{p-2^k}$ . Кроме того,

$$\left(\frac{p}{2^k}\right)^{\frac{1}{2p}} \cdot \left(\frac{p-2^k}{p}\right)^{\frac{1}{2p} \cdot \frac{p-2^k}{2^k}} < \left(\frac{p}{2^k}\right)^{\frac{1}{2p}} \cdot \left(\frac{2^k}{p}\right)^{\frac{1}{2p} \cdot \frac{p-2^k}{2^k}} = \left(\frac{p}{2^k}\right)^{1/p} \cdot \left(\frac{2^k}{p}\right)^{1/2^{k+1}} < \\ < \left(\frac{p}{2^k}\right)^{1/p} \cdot \left(\frac{2^k}{p}\right)^{1/2p} = \left(\sqrt[p]{\frac{p}{2^k}}\right)^{1/p},$$

$$\text{ибо } 0 < \frac{p-2^k}{p} \leq \frac{2^k}{p}, \quad \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2p}.$$

Учитывая все это в (19), находим

$$|f(x)| \leq \left(\frac{2\sigma \cdot 2^k}{\pi m}\right)^{1/p} \cdot \left(\sqrt[p]{\frac{p}{2^k}}\right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m} = \left[\frac{2\sigma \cdot 2^k}{\pi m} \cdot \sqrt[p]{\frac{p}{2^k}}\right]^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m} = \\ = \left[\frac{2\sigma}{\pi m} \cdot \sqrt[p]{2^k \cdot p}\right]^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m} < \left[\frac{2\sigma}{\pi m} \cdot \sqrt[p]{p \cdot p}\right]^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m} = \left(\frac{2p \cdot \sigma}{\pi m}\right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m}.$$

Неравенство (18) установлено (случай  $m = 2$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , см. [7]).

**Следствие 2.** В классе  $L_{1, p}(\sigma)$  ( $1 \leq p \leq 2$ ) справедливо неравенство

$$|f'(x)| \leq \sigma \left[\frac{2\sigma}{\pi(p+1)}\right]^{1/p} \cdot p^{1/2p} \cdot q^{-1/2q} \cdot \|f\|_{p,1}. \quad (20)$$

**Доказательство.** Положим  $K(\xi) = \xi^{-2}$ . Тогда будем иметь

$$U(f; x) \equiv f'(x), \quad \Phi(x, t) = -\frac{(xt)^{1/m}}{m \cdot x} \cdot \sin(xt)^{1/m},$$

$$\|\Phi(x, t)\|_{p,m}^0 \leq x^{\frac{1}{m}-1} \cdot \frac{\frac{p+1}{\sigma}}{m^{1/q} \cdot (p+1)^{1/p}}.$$

При  $m = 1$  из последнего вытекает, что

$$\|\Phi(x, t)\|_{p,1}^0 \leq \sigma^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p}} \cdot (p+1)^{-\frac{1}{p}}.$$

Учитывая все это в (16), получаем (20).

**Замечание 1.** Полагая в (20) формально  $p = \infty$ , получим известное неравенство С. Н. Бернштейна (см. [1], стр. 74); [5], стр. 154):

$$|f'(x)| \leq \sigma \|f\|_{\infty}. \quad (21)$$

**Замечание 2.** Ниже покажем, что неравенство (17) при  $m=2$ ,  $p=q=2$  точное и приведем соответствующую экстремальную функцию.

**Следствие 3.** В классе  $D_{\frac{1}{2}, p}(\sigma)$  ( $1 \leq p \leq 2$ ) справедливо неравенство

$$|f'(x)| \leq \sigma^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot p^{1/p} \cdot q^{-1/q} \cdot 2^{-1/q}} \cdot \left(\frac{\sigma}{2p+1}\right)^{1/p} \times \\ \times \|f\|_{p,2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \quad (22)$$

**Доказательство.** Пусть  $K(\xi) = \xi^{-2}$ , и  $m=2$ . Тогда  $U(f; x) \equiv f'(x)$ ,

$$\Phi(x, t) = -\frac{t}{2} \cdot \frac{\sin \sqrt{xt}}{\sqrt{xt}}; \quad |\Phi(x, t)| \leq \frac{t}{2};$$

$$\|\Phi\|_{p,2}^0 \leq 2^{-\frac{1}{q}} \cdot \left(\frac{\sigma^{2p+1}}{2p+1}\right)^{1/p}.$$



Остается учесть все это в (16), чем и завершается доказательство неравенства (22).

Замечание 3. Исходя из оценки

$$|\Phi(x, t)| \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{t}{x}},$$

для производной  $f'(x)$  функции  $f(x)$  конечной полустепени  $\sigma$  получим следующее (интересно ее сравнить с [1], стр. 123—124):

Следствие 4. В классе  $D_{\frac{1}{2}, p}(\sigma)$  ( $1 \leq p \leq 2$ ) справедливо неравенство

$$|f'(x)| \leq \frac{\sigma}{2\sqrt{x}} \cdot \left[ \frac{\sigma}{\pi(p+1)} \right]^{1/p} \cdot \sqrt{p^{1/p} \cdot q^{-1/q}} \cdot \|f\|_{p,2}. \quad (23)$$

Замечание 4. При  $p = q = 2$  неравенство (22) примет вид

$$|f'(x)| \leq \frac{\sigma^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{5\pi}} \cdot \|f\|_{2,2}. \quad (24)$$

Ниже покажем, что неравенство (24) точное и укажем экстремальную функцию  $f_0(z)$ , для которой оно обращается в равенство при  $x = 0$ .

Теорема 2. Если  $1 \leq p \leq p_1 \leq \infty$ , то для целой функции  $f(z) \in D_{\frac{1}{m}, p}(\sigma)$  справедливо неравенство:

$$\|f\|_{p,m} \leq \begin{cases} \left( \frac{2\sigma\sqrt{p}}{\pi m} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \cdot q^{\frac{p-p_1}{2p_1q}} \cdot \|f\|_{p,m}, & \text{если } 1 \leq p \leq 2; \\ \left( \frac{2\sigma p}{\pi m} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \cdot \|f\|_{p,m}, & \text{если } p > 2. \end{cases} \quad (25)$$

$$\left( \frac{2\sigma p}{\pi m} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \cdot \|f\|_{p,m}, \text{ если } p > 2. \quad (26)$$

Доказательство следует немедленно из (17) и (18), так как при  $p_1 > p$  имеем

$$\|f\|_{p,m} \leq [\max_x |f(x)|]^{\frac{p_1-p}{p_1}} \cdot \|f\|_{p_1, p_1}^{\frac{p}{p_1}},$$

Теорема 2 является аналогом соответствующих результатов С. М. Никольского [6] и И. И. Ибрагимова ([1], стр. 155; см. также [7], неравенство (2.12)).

Теорема 3. В классе  $D_{\frac{1}{m}, p}(\sigma)$  ( $p \geq 1$ ) справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq \left( \frac{p}{2} \cdot \frac{2\sigma}{\pi m} \right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m}, \quad (27)$$

где  $\overline{a}$  — наименьшее целое число не меньшее  $a$ .

Доказательство. Пусть  $s = \frac{p}{2}$ ,  $p > 2$ . Тогда  $2s - 2 < p \leq 2s$ .

Положим  $r = \frac{p}{s}$ . Ясно, что  $1 < r \leq 2$  и  $[f(z)]^s \in D_{\frac{1}{m}, p}(\sigma)$ . Поэтому к  $[f(z)]^s$ , применяя (17) с индексом  $r$ , получим (предварительно положив  $p^{1/2q} \cdot q^{-1/2q} \leq 1$ )

$$|f(x)|^s \leq \left( \frac{2s\sigma}{\pi m} \right)^{1/r} \cdot \left( \int_0^\infty |f(x)|^{s \cdot r} \cdot x^{-\frac{m-1}{m}} dx \right)^{1/r}.$$

Отсюда, извлекая корень степени  $s$  из обеих частей находим

$$|f(x)| \leq \left( \frac{2s\sigma}{\pi m} \right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m} = \left( \frac{p}{2} \cdot \frac{2\sigma}{\pi m} \right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m}.$$

В случае  $1 \leq p \leq 2$  неравенство (27) следует из (17), ибо при этом и  $p^{1/2q} \cdot q^{-1/2q} \leq 1$ .

Теорема 3 доказана полностью.

В частности, для четных  $p$  из (27) имеем

$$|f(x)| \leq \left( \frac{p}{2} \cdot \frac{2\sigma}{\pi m} \right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m} = \left( \frac{p\sigma}{\pi m} \right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m}. \quad (28)$$

Если же  $p$  нечетное ( $p = 2k + 1$ ), то

$$|f(x)| \leq \left[ \frac{(p+1) \cdot \sigma}{\pi m} \right]^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m}. \quad (29)$$

Заметим, что неравенства (27), (28) и (29) улучшают неравенство (18).

Следствие. В классе  $D_{\frac{1}{2}, p}(\sigma)$  имеет место неравенство

$$|f(x)| \leq \left( \frac{p}{2} \cdot \frac{\sigma}{\pi} \right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,2} \quad (p \geq 1). \quad (30)$$

Пользуясь теоремой 3, можно объединить (25) и (26). Например, при  $m = 2$  имеет место

Теорема 2<sup>bis</sup>. Если  $1 \leq p \leq p_1 \leq \infty$ , то для целой функции  $f(z) \in D_{\frac{1}{2}, p}(\sigma)$  справедливо неравенство.

$$\|f\|_{p,2} = \left( \int_0^\infty |f(x)|^{p_1} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx \right)^{1/p_1} \leq \left( \frac{p}{2} \cdot \frac{\sigma}{\pi} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \cdot \|f\|_{p,2}. \quad (31)$$

### § 3. Экстремальные задачи в классе $D_{\frac{1}{m}, p}^*(\sigma)$

Известно, что (см. [1], стр. 68) любая функция  $f(z) \in D_{\frac{1}{m}, p}^*(\sigma)$

( $0 < p \leq 2$ ) допускает представление

$$f(z) = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty \varphi(t) \cdot t^{-\frac{m-1}{m}} \cdot \sin(zt)^{\frac{1}{m}} dt, \quad (32)$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty f(x) \cdot x^{-\frac{m-1}{m}} \cdot \sin(xt)^{\frac{1}{m}} dx. \quad (33)$$

Кроме того, при  $1 < p \leq 2$  справедливо неравенство (и здесь константа в правой части изменена в соответствии с неравенством К. И. Бабенко)

$$\left( \int_0^\infty |\varphi(t)|^q \cdot t^{-\frac{m-1}{m}} dt \right)^{1/q} \leq \left( \frac{2\pi}{q} \right)^{1/2q} \cdot \left( \frac{p}{2\pi} \right)^{1/2p} \cdot \left( \frac{2}{m} \right)^{\frac{2-p}{p}} \cdot \|f\|_{p,m} =$$



$$= B(p, q) \cdot \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2-p}{p}} \cdot \|f\|_{p,m}, \quad (34)$$

которое обращается в равенство при  $p = q = 2$ .  
Пользуясь представлением (32), оператору  $U(f; x)$  можно придать вид:

$$U(f; x) = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\sigma m} \varphi(t) F(x, t) \cdot t^{-\frac{m-1}{m}} dt, \quad (35)$$

где  $F(x, t)$  определяется равенством (5) и  $K(z) \in M_p(D^*)$ .  
Повторяя все рассуждения из § 2, для нового класса  $D_{\frac{1}{m}, p}^*$  (σ) доказываются следующие утверждения. В общем случае справедлива

Теорема 4. В классе  $D_{\frac{1}{m}, p}^*$  (σ) ( $1 \leq p \leq 2$ ) справедливо неравенство

$$|U(f; x)| \leq \left(\frac{2}{\pi m^2}\right)^{1/p} \cdot \sqrt{p^{1/p} \cdot q^{-1/q}} \cdot \|F(x, t)\|_{p,m}^0 \cdot \|f\|_{p,m}, \quad (36)$$

где  $F(x, t)$  определяется равенством (5),  $\|F(x, t)\|_{p,m}^0$  — в смысле (4).  
Выбирая область  $G$  так, как после формулировки теоремы 1, получаем:

Следствие 1. Для любой функции  $f(z) \in D_{\frac{1}{m}, p}^*$  (σ) ( $p \geq 1$ ) справедливо неравенство:

$$|f(x)| \leq \begin{cases} \left(\frac{2\sigma}{\pi m}\right)^{1/p} \cdot \sqrt{p^{1/p} \cdot q^{-1/q}} \cdot \|f\|_{p,m}, & \text{если } 1 \leq p \leq 2; \\ \left(\frac{2p\sigma}{\pi m}\right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m}, & \text{если } p > 2. \end{cases} \quad (37)$$

$$|f(x)| \leq \begin{cases} \left(\frac{2\sigma}{\pi m}\right)^{1/p} \cdot \sqrt{p^{1/p} \cdot q^{-1/q}} \cdot \|f\|_{p,m}, & \text{если } 1 \leq p \leq 2; \\ \left(\frac{2p\sigma}{\pi m}\right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m}, & \text{если } p > 2. \end{cases} \quad (38)$$

Следствие 2. В классе  $D_{1,p}^*$  (σ) ( $1 \leq p \leq 2$ ) справедливо неравенство

$$|f'(x)| \leq \sigma^{1+\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/p} \cdot \sqrt{p^{1/p} \cdot q^{-1/q}} \cdot \frac{\|f\|_{p,1}}{(p+1)^{1/p}}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \quad (39)$$

Это получается из (36) сразу, если полагать там, что  $K(\xi) = \xi^{-2}$ .  
В частности, при  $p = q = 2$  (39) примет вид

$$|f'(x)| \leq \sigma \cdot \sqrt{\frac{2\sigma}{3\pi}} \cdot \|f\|_{2,1}. \quad (40)$$

Ниже (см. замечание 7) покажем, что неравенство (40) точное, и укажем экстремальную функцию, для которой оно обращается в равенство.

Следствие 3. Для производной  $f'(x)$  функции  $f(z) \in D_{\frac{1}{2}, p}^*$  (σ), ( $1 \leq p \leq 2$ ) справедливо неравенство

$$|f'(x)| \leq \frac{\sigma}{2\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{\sigma}{\pi(p+1)}\right]^{1/p} \cdot \sqrt{p^{1/p} \cdot q^{-1/q}} \cdot \|f\|_{p,2}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \quad (41)$$

В самом деле, если в теореме 4 положить, что  $m = 2$ ,  $K(\xi) = \xi^{-2}$ , то, учитывая, что при этом

$$U(f; x) = f'(x); \quad F(x, t) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{t}{x}} \cdot \cos \sqrt{xt};$$

$$|F(x, t)| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t}{x}\right)^{1/2},$$

получаем (41).

Связь между различными нормами функции  $f(x) \in D_{\frac{1}{m}, p}^*$  (σ) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 5. Если  $1 \leq p \leq p_1 < \infty$ , то для целой функции  $f(z) \in D_{\frac{1}{m}, p}^*$  (σ) имеем:

$$\|f\|_{p,m} \leq \begin{cases} \left(\frac{2\sigma\sqrt{p}}{\pi m}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \cdot q^{\frac{p-p_1}{2p_1q}} \cdot \|f\|_{p_1,m}, & \text{если } 1 \leq p \leq 2; \\ \left(\frac{2p\sigma}{\pi m}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \cdot \|f\|_{p_1,m}, & \text{если } p > 2. \end{cases} \quad (42)$$

$$\|f\|_{p,m} \leq \begin{cases} \left(\frac{2\sigma\sqrt{p}}{\pi m}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \cdot q^{\frac{p-p_1}{2p_1q}} \cdot \|f\|_{p_1,m}, & \text{если } 1 \leq p \leq 2; \\ \left(\frac{2p\sigma}{\pi m}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \cdot \|f\|_{p_1,m}, & \text{если } p > 2. \end{cases} \quad (43)$$

Теорема 6. Для любой функции  $f(z) \in D_{\frac{1}{m}, p}^*$  (σ) справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq \left(\frac{2s\sigma}{\pi m}\right)^{1/p} \cdot \|f\|_{p,m} \quad (1 \leq p \leq \infty), \quad (44)$$

где  $s = 1$  для  $1 \leq p \leq 2$  и  $s = \frac{p}{2}$  при  $p > 2$ .

Теорема 6 доказывается так же, как и теорема 3.

С помощью (44) неравенства (42) и (43) также можно объединить:

$$\|f\|_{p,m} \leq \left(\frac{2s\sigma}{\pi m}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \cdot \|f\|_{p_1,m} \quad (1 \leq p \leq p_1 < \infty). \quad (45)$$

В частности для класса  $D_{\frac{1}{2}, p}^*$  (σ) имеем

$$\|f\|_{p,2} \leq \left(\frac{s\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \cdot \|f\|_{p_1,2}. \quad (46)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов И. И. Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Баку, 1962.
2. Джрбашян М. М. и Тавадян А. Б. Изв. АН Арм. ССР\*, т. 7, 1954, №5.
3. Ибрагимов И. И. и Насибов Ф. Г. Сибирский матем. ж., т. 7, 1956, № 2.
4. Бабенко К. И. Изв. АН СССР, серия матем., 25, № 4, (1961).
5. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Изд-во "Наука", М., 1965.
6. Никольский С. М. Тр. матем. ин-та В. А. Стеклова АН СССР, т. 38, 1951.
7. Ибрагимов И. И. Экстремальные задачи в классе целых функций. В сб. Исследования по современным проблемам ТФКП\* (под ред. А. И. Маркушевича), М., 1961.

АЗИНЕФТЕХИМ им. М. Азизбекова

Поступило 20. I 1971



## Там функцијаларын мүүжэн синифләриндә экстремал

## мәсәләләр 1.

## ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда  $D_{\frac{1}{m}, p}(\sigma)$  вә  $D_{\frac{1}{m}, p}^*(\sigma)$  синифләриндә тә'јин олуңмуш-  
дур

$$U(f; x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi + x) K(\xi) d\xi$$

оператору үчүн экстремал мәсәлә арашдырылып. Бурада  $\Gamma$ —дүзлән-  
дирилә билән гапалы әри,  $K(\xi)$ —мүүжән шәртләрә табе едилмиш  
верилән функциядыр.  $U(f; x)$  оператору үчүн бир үмуми бәрәбәр-  
сизлик исбат олуңмуш (1-чи теорем) вә бу бәрәбәрсизликдән  $f(x)$   
үчүн мүхтәлиф бәрәбәрсизликләр чыхарылмышдыр.

F. N. Nasibov

## Extremal problems in definite classes of the entire functions, I

## SUMMARY

In the present work in classes  $D_{\frac{1}{m}, p}(\sigma)$ ,  $D_{\frac{1}{m}, p}^*(\sigma)$  is considered the  
operator

$$U(f; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi + z) K(\xi) d\xi,$$

where some conditions are put on  $K(z)$ ,  $\Gamma$ —straightened closed line  
(Definition of classes  $D_{p,p}(\sigma)$ ,  $L_{p,p}^*(\sigma)$  ( $p = \frac{1}{m}$ ) see: I. I. IBRAHIMOV.

„EXTREMAL PROPERTIES OF ENTIRE FUNCTIONS OF FINITE  
DEGREE“, BAKU, 1962, p. 63). Here a task is put to find the above-  
mentioned operator. In the 1-st report various common theorems are  
proved in this direction. And because of the considerable volume of  
the work, its continuation constitutes the content of the next report,  
report II.

А. Х. ШАМИЛОВ, К. Т. АХМЕДОВ

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ К ОДНОЙ СИСТЕМЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим краевую задачу:

$$\left. \begin{aligned} u'' &= f(t, u, u', v); \\ v' &= \varphi(t, u, u', v); \\ g_1(u(0), u'(0)) &= 0; \\ g_2(u(b), u'(b)) &= 0, \\ v(0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $f$  и  $\varphi$  непрерывны по совокупности переменных и имеют непре-  
рывные производные до второго порядка включительно по  $u, u', v$   
на  $D\{(t, u, u', v) : 0 \leq t \leq b, |u| \leq R, |u'| \leq R, |v| \leq R\}$ , а функции  
 $g_1(u, u')$ ,  $g_2(u, u')$  имеют непрерывные вторые производные на  
 $D_1\{(u, u') : |u| \leq R, |u'| \leq R\}$ . Необходимо отметить, что исследова-  
нию системы (1) с условиями более простыми, чем (1'), посвящены  
работы [3, 4]. Применяя метод квазилинеаризации [1, 2] как к си-  
стеме, так и к граничным условиям, нами доказана

Теорема. Пусть функции  $f(t, u, u', v)$ ,  $\varphi(t, u, u', v)$ ,  $g_1(u, u')$   
и  $g_2(u, u')$  обладают вышеуказанными свойствами, кроме того,  
определитель  $|\Delta(b, u, u', \bar{u}, \bar{u}')|$ , составленный из частных произ-  
водных функций  $g_1, g_2$ , отличен от нуля, т. е.

$$|\Delta(b, u, u', \bar{u}, \bar{u}')| = \det(\Delta(b, u, u', \bar{u}, \bar{u}')) \neq 0;$$

$$(\Delta(b, u, u', \bar{u}, \bar{u}')) = \begin{pmatrix} g'_{1u}(u, u') & g'_{1u'}(u, u') \\ g'_{2u}(\bar{u}, \bar{u}') + bg'_{2u}(u, u') & g'_{2u'}(\bar{u}, \bar{u}') \end{pmatrix},$$

где  $|u| \leq R, |u'| \leq R, |\bar{u}| \leq R, |\bar{u}'| \leq R$ .

Тогда при достаточно малых  $b$  и отклонении первого приближе-  
ния от нулевого существует последовательность  $\{u_n, v_n\}$ , квадра-  
тично сходящаяся к решению задачи (1)–(1').

Доказательству этой теоремы предположим лемму.

Лемма. Если  $|\delta| = \det \begin{pmatrix} \beta_0 & \alpha_0 \\ \beta_b + \alpha_b b & \alpha_b \end{pmatrix} \neq 0$ , то решение задачи

$$\left. \begin{aligned} x'' &= \omega(t), & \alpha_0 x(0) + \beta_0 x'(0) &= \gamma_0, \\ & & \alpha_b x(b) + \beta_b x'(b) &= \gamma_b \end{aligned} \right\}$$

представляется формулой

$$x = \bar{x} + \int_0^b G(t, s) \omega(s) ds,$$



где

$$\bar{x} = -|\delta|^{-1} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ \beta_0 & \alpha_0 & \gamma_0 \\ \beta_b + \alpha_b b & \alpha_b & \gamma_b \end{vmatrix};$$

$$G(t, s) = |\delta|^{-1} \begin{vmatrix} t & 1 & g(t, s) \\ \alpha_0 \frac{s}{2} - \frac{\beta_0}{2} \\ \alpha_b \frac{(b-s)}{2} + \frac{\beta_b}{2} \end{vmatrix};$$

$$g(t, s) = \frac{1}{2} \begin{cases} t-s & \text{при } 0 \leq s \leq t \leq b, \\ -(t-s) & \text{при } 0 \leq t \leq s \leq b, \end{cases}$$

$\omega(t)$  — непрерывная функция на отрезке  $0 \leq t \leq b$ .

Лемма доказывается с помощью метода вариации произвольных постоянных.

Доказательство теоремы. Построим приближения следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u_n' &= \tilde{f} + \tilde{f}_u' \cdot (u_n - u_{n-1}) + \tilde{f}_{u'}' \cdot (u_n' - u_{n-1}') + \\ &\quad + \tilde{f}_v' \cdot (v_n - v_{n-1}) \equiv f_n, \\ v_n' &= \tilde{\varphi} + \tilde{f}_u' \cdot (u_n - u_{n-1}) + \tilde{\varphi}_{u'}' \cdot (u_n' - u_{n-1}') + \\ &\quad + \tilde{\varphi}_v' \cdot (v_n - v_{n-1}) \equiv \varphi_n, \end{aligned} \right\} \quad (1_n)$$

где  $\tilde{f} = \psi(t, u_{n-1}, u_{n-1}', v_{n-1})$ , с условиями

$$\left. \begin{aligned} g_1(u_{n-1}(0), u_{n-1}'(0)) - g_{1u}'(u_{n-1}(0), u_{n-1}'(0)) + \\ + u_n(0) - u_{n-1}(0) + \\ + g_{1u'}'(u_{n-1}(0), u_{n-1}'(0)) (u_n'(0) - u_{n-1}'(0)) = 0, \\ g_2(u_{n-1}(b), u_{n-1}'(b)) + g_{2u}'(u_{n-1}(b), u_{n-1}'(b)) \times \\ \times (u_n(b) - u_{n-1}(b)) + g_{2u'}'(u_{n-1}(b), u_{n-1}'(b)) \times \\ \times (u_n'(b) - u_{n-1}'(b)) = 0, \\ v_n(0) = 0, \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1_n')$$

За  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{f}_u'$ ,  $\tilde{f}_{u'}'$ ,  $\tilde{f}_v'$ ,  $\tilde{\varphi}_{u'}'$ ,  $\tilde{\varphi}_v'$  можно взять произвольные, соответственно, непрерывно дифференцируемую и непрерывную функции, для которых на отрезке  $[0, b]$   $|u_0(t)| \leq R$ ,  $|u_0'(t)| \leq R$ ,  $|v_0(t)| \leq R$ . С целью доказательства допустимости построенных приближений используем лемму и приведем систему  $(1_n) - (1_n')$  к системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \bar{u}_n + \int_0^b G_n(t, s) f_n(s) ds, \\ v_n &= \int_0^t \varphi_n(s) ds, \end{aligned} \right\} \quad (2_n)$$

где  $G_n(t, s)$  — функция Грина задачи  $(1_n) - (1_n')$  (см. лемму).

Из системы легко определить верхнюю грань для  $|u_1|$ ,  $|u_1'|$ ,  $|v_1|$ . Сначала введем обозначения:  $G = \max |G(t, s, u, u', \bar{u}, \bar{u}')|$ ,

$$G' = \max |G_t'(t, s, u, u', \bar{u}, \bar{u}')| \text{ при } t \neq s; \|x\| = \max_{0 \leq t \leq b} |x(t)|,$$

$$m_0 = \max \{ |y_1(t, u, u', \bar{u}, \bar{u}')| + |y_2(t, u, u', \bar{u}, \bar{u}')| \} m_g,$$

где

$$m_0 = \max \{ |y_1'(t, u, u', \bar{u}, \bar{u}')| + |y_2'(t, u, u', \bar{u}, \bar{u}')| \} m_g,$$

$$\times \begin{vmatrix} t & 1 & g(t, s) \\ g_{1u}'(u, u') \frac{s}{2} - \frac{1}{2} g_{1u'}'(u, u') \\ g_{2u}'(\bar{u}, \bar{u}') \frac{(b-s)}{2} + \frac{1}{2} g_{2u'}'(\bar{u}, \bar{u}') \end{vmatrix};$$

$$y_1(t, u, u', \bar{u}, \bar{u}') = -|\Delta(b, u, u', \bar{u}, \bar{u}')|^{-1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} t & 1 \\ g_{2u'}'(\bar{u}, \bar{u}') + b g_{2u}'(\bar{u}, \bar{u}') & g_{2u'}'(\bar{u}, \bar{u}') \end{vmatrix},$$

$$y_2(t, u, u', \bar{u}, \bar{u}') = -|\Delta(b, u, u', \bar{u}, \bar{u}')| \begin{vmatrix} t & 1 \\ g_{1u}'(u, u') & g_{1u}'(u, u') \end{vmatrix};$$

$m$  и  $m_g$  означают максимумы абсолютных величин функций  $f$ ,  $\varphi$  и  $g_1$ ,  $g_2$ , их производных и половины частных производных второго порядка. Из системы  $(2_1)$  после элементарных вычислений получим, что если

$$b < [m(1+4R)(1+G+G')]^{-1} [R - (m_0 + m'_0)(1+2R)], \quad (2)$$

то  $u_1$ ,  $u_1'$ ,  $v_1$  будут допустимыми. Методом полной математической индукции убедимся в допустимости всех остальных приближений, когда  $b$  удовлетворяет неравенству (2).

Теперь приступим к доказательству квадратичной сходимости.

Определение. Последовательность  $\{u_n(t), u_n'(t), v_n(t)\}$  назовем квадратично сходящейся, если выполнено неравенство

$$\|u_{n-1} - u_n\| + \|u_{n-1}' - u_n'\| + \|v_{n-1} - v_n\| \leq K(\|u_n - u_{n-1}\| + \|u_n' - u_{n-1}'\| + \|v_n - v_{n-1}\|)^2, \quad (3)$$

где

$$0 < K(\|u_1 - u_0\| + \|u_1' - u_0'\| + \|v_1 - v_0\|) < 1. \quad (3')$$

Докажем, что построенные нами последовательности  $\{u_n(t)\}$ ,  $\{u_n'(t)\}$ ,  $\{v_n(t)\}$  обладают свойством (3). Из системы  $(1_{n-1})$  и  $(1_n)$  получим

$$(u_{n+1} - u_n)'' = \tilde{f} + \tilde{f}_u' \cdot (u_{n+1} - u_n) + \tilde{f}_{u'}' \cdot (u_{n+1}' - u_n') + \tilde{f}_v' \cdot (v_{n+1} - v_n) -$$

$$- \tilde{f} - \tilde{f}_u' \cdot (u_n - u_{n-1}) - \tilde{f}_{u'}' \cdot (u_n' - u_{n-1}') - \tilde{f}_v' \cdot (v_n - v_{n-1}),$$

где  $\tilde{\varphi} = \psi(t, u_n, u_n', v_n)$ .

Применяя формулу Тейлора, из последнего соотношения легко вывести следующее:

$$(u_{n+1} - u_n)'' = \frac{1}{2} \{ \tilde{f}_{uu}'' \cdot (u_n - u_{n-1})^2 + \tilde{f}_{u'u'}'' \cdot (u_n' - u_{n-1}')^2 +$$

$$+ \tilde{f}_{vv}'' \cdot (v_n - v_{n-1})^2 + \tilde{f}_{uu'}'' \cdot (u_n - u_{n-1})(u_n' - u_{n-1}') +$$

$$+ 2 \tilde{f}_{uv}'' \cdot (u_n - u_{n-1})(v_n - v_{n-1}) + 2 \tilde{f}_{u'v}'' \cdot (u_n' - u_{n-1}')(v_n - v_{n-1}) +$$

$$+ \tilde{f}_u' (u_{n+1} - u_n) + \tilde{f}_{u'}' (u_{n+1}' - u_n') + \tilde{f}_v' (v_{n+1} - v_n) \} = F_n,$$

где  $\tilde{\varphi} = \psi(t, u_{n-1} + \theta(u_n - u_{n-1}), u_{n-1}' + \theta(u_n' - u_{n-1}'), v_{n-1} + \theta(v_n - v_{n-1}))$ ,  $0 < \theta < 1$ . Аналогичное выражение получается и для  $(v_{n+1} - v_n)''$ .



Таким образом, для разностей  $u_{n+1} - u_n$  и  $\tau_{n+1} - \tau_n$  получаем систему

$$\begin{cases} (u_{n+1} - u_n)'' = F_n, \\ (\tau_{n+1} - \tau_n)' = \Phi_n \end{cases} \quad (2_n)$$

с условиями

$$\left. \begin{aligned} g'_{1u}(u_n(0), u'_n(0)) (u_{n+1}(0) - u_n(0)) + g'_{1u'}(u_n(0), u'_n(0)) \times \\ \times (u'_{n+1}(0) - u'_n(0)) + L_1 = 0, \\ g'_{2u}(u_n(b), u'_n(b)) (u_{n+1}(b) - u_n(b)) + g'_{2u'}(u_n(b), u'_n(b)) \times \\ \times (u'_{n+1}(b) - u'_n(b)) + L_2 = 0, \\ \tau_{n+1}(0) - \tau_n(0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2'_n)$$

где

$$L_1 = \frac{1}{2} \{ \bar{g}'_{1uu} \cdot (u_n(0) - u_{n-1}(0))^2 + 2 \bar{g}'_{1uu'} \cdot (u_n(0) - u_{n-1}(0)) \times$$

$$\times (u'_n(0) - u'_{n-1}(0)) + \bar{g}'_{1u'u'} \cdot (u'_n(0) - u'_{n-1}(0))^2 \};$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \{ \bar{g}'_{2uu} \cdot (u_n(b) - u_{n-1}(b))^2 + 2 \bar{g}'_{2uu'} (u_n(b) - u_{n-1}(b)) \times$$

$$\times (u'_n(b) - u'_{n-1}(b)) + \bar{g}'_{2u'u'} (u'_n(b) - u'_{n-1}(b))^2 \};$$

$$\bar{\psi}_1 = \psi_1(u_{n-1}(0) + \theta_1(u_n(0) - u_{n-1}(0)), u'_{n-1}(0) + \theta_1(u'_n(0) - u'_{n-1}(0)), \\ 0 < \theta_1 < 1;$$

$$\bar{\psi}_2 = \psi_2(u_{n-1}(b) + \theta_2(u_n(b) - u_{n-1}(b)), u'_{n-1}(b) + \theta_2(u'_n(b) - u'_{n-1}(b)), \\ 0 < \theta_2 < 1.$$

Условия  $(2'_n)$  получены почленным вычитанием условий  $(1'_{n+1})$  и  $(1'_n)$  и применением формулы Тейлора. По доказанной лемме система  $(2_n)$  с условиями  $(2'_n)$  эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = -|\Delta_{n+1}|^{-1} \left| \begin{array}{cc} t & 1 \\ (\Delta_{n+1}) & -L_1 \\ & -L_2 \end{array} \right| + \int_0^b G_{n+1}(t, s) F_n(s) ds, \\ \tau_{n+1} - \tau_n = \int_0^t \Phi_n(s) ds. \end{aligned} \quad (4_n)$$

Присоединяя к системе  $(4_n)$  соотношение, полученное дифференцированием по  $t$  первого уравнения, получим новую систему, из которой переходом к норме и почленным сложением приходим к неравенству (3), в котором

$$\kappa = [m_0 + m'_0 + mb(1 + G + G')] [1 - mb(1 + G + G')]^{-1}.$$

Теперь, если потребовать, чтобы  $b$  удовлетворяло неравенству  $0 < b < r$ , где  $r = \min(r_1, r_2)$ ,  $r_2 = [1 - U_0(m_0 + m'_0)] [m(1 + G + G') (1 + U_0)]^{-1}$ ,  $U_0 = \|u_1 - u_0\| + \|u'_1 - u'_0\| + \|\tau_1 - \tau_0\|$ , то тем самым обеспечится и допустимость построенных приближений, и квадратичная сходимость их.

В силу неравенства  $(3')$  последовательности  $\{u_n(t)\}$ ,  $\{u'_n(t)\}$ ,  $\{\tau_n(t)\}$  равномерно сходятся соответственно к функциям  $u(t)$ ,  $u'(t)$ ,  $\tau(t)$ . Предельные функции  $u(t)$  и  $\tau(t)$  удовлетворяют условиям  $(1')$  и являются решением системы нагруженных интегро-дифференциальных уравнений, которая получается с помощью леммы переходом от системы  $(1_n)-(1'_n)$  к системе интегро-дифференциальных

уравнений и переходом к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Можно проверить, что каждое решение полученной системы интегро-дифференциальных уравнений удовлетворяет системе (1). Теорема доказана.

Следствие. Построенная нами последовательность  $\{u_n, u'_n, \tau_n\}$  удовлетворяет неравенству

$$\|u - u_n\| + \|u' - u'_n\| + \|\tau - \tau_n\| \leq K (\|u - u_{n-1}\| + \|u' - u'_{n-1}\| + \|\tau - \tau_{n-1}\|)^2.$$

Здесь  $(u(t), \tau(t))$  — любое решение системы  $(1)-(1')$ . Следствие 1 доказывается подобно доказательству неравенства (3).

Замечание. Вместо системы (1) можно рассматривать более общую систему, где  $u$  и  $\tau$  являются векторами с нелинейными многоточечными условиями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., 1968.
2. Kala b a R. On nonlinear differential equations, the maximum operation and monotone convergence. J. Math. Mech., 8 (1959), 519—514.
3. Шафиев Р. А., Керимова Д. Н. Докл. АН Азерб. ССР, 1965, № 5, 6.
4. Бекташи Т. Г. Уч. зап. АГУ им. С. М. Кирова, 1957, № 4, 5.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступило 20. V 1971

Э. Х. Шамилов, Г. Т. Эмёдов

## Гејри-хэтти сэрһэд шэртлэри олан бир системэ квазихэттиләшдирмэ методунун тэтбиги

### ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә квазихэттиләшдирмэ методу илә  $(1)-(1)'$  мәсәләсинин һәллинә квадратик јығылан ардычыллыг гурулмушдур. Ајдылашдырылмышдыр ки, исбат олунмуш теоремин шэртлэри өдәнилдикдә  $(1)-(1)'$  мәсәләсинин һәлли  $(1_n)-(1'_n)$  мәсәләсинә эквивалент олан системдә  $n \rightarrow \infty$  шэртиндә лимитә кечмәклә алынған јүкләнмиш интегродифференциал тәнликләр системини дә өдәјир.



М. Дж. МАРДАНОВ, К. К. ГАСАНОВ

## УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В статье рассматривается задача оптимального управления для процессов, поведение которых описывается системой интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами.

В первой части доказывается необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина. При доказательстве используется правило абстрактных множителей Хестенса [1]. В работе А. Хеланя [2] получены необходимые условия оптимальности для управляемых систем, описываемых интегральными уравнениями с запаздывающими аргументами.

Во второй части статьи для некоторого класса систем получены достаточные условия оптимальности, которые включают в себя необходимые условия, доказанные вначале. В литературе известно несколько работ, посвященных достаточным условиям оптимальности (см. [3—5]). Однако проводимые здесь условия отличаются от описанных ранее.

### 1. Постановка задачи

Пусть состояние системы управления описывается системой

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t)), u(t), u(t-\tau(t)), b) + \int_{t_0}^t K(t, s, x(s), x(s-\tau(s)), u(s), u(s-\tau(s)), b) ds \quad (1)$$

с условиями

$$x(t) = \varphi(t), u(t) = \eta(t) \text{ при } t \in E_0 = \{t : t - \tau(t) \leq t_0\}, \quad (2)$$

$$x(T) = \omega(b). \quad (3)$$

Здесь  $f(t, x, u, \tau, b)$ ,  $K(t, s, x, u, \tau, b)$ ,  $\omega(b)$  —  $n$ -мерные заданные векторы, которые предполагаются непрерывными по совокупности аргументов и имеют непрерывные частные производные по аргументам  $(x, u, b)$ ,  $u$  —  $r$ -мерная управляющая вектор-функция,  $b$  —  $l$ -мерный управляющий параметр,  $\varphi(t)$  — заданный  $n$ -мерный непрерывный вектор,  $\eta(t)$  — заданный  $r$ -мерный непрерывный вектор. Функция  $\tau(t) > 0$  при  $t \in [t_0, T]$  имеет непрерывную производную  $\tau(t) < 1$ . Последнее условие обеспечивает существование обратной функции  $\gamma(t)$  к функции  $\beta(t) = t - \tau(t)$ . Определим  $\delta(t) = \gamma(t)$  при  $\beta(t_0) \leq t \leq \beta(T)$ ,  $\delta(t) = T$  при  $\beta(T) < t \leq T$ .

Пару  $(u, b)$  назовем допустимой, если  $u(t)$  при  $t \in [t_0, T]$  кусочно-непрерывна, принимает значения из  $U(E)$ , а  $b$  принимает значения из некоторого открытого множества  $B(E)$ , где  $E_m$  —  $m$ -мерное евклидово пространство.

Пусть также заданы функционалы

$$I_\gamma(u, b) = g_\gamma(b) + \int_{t_0}^T L_\gamma(t, x(t), x(t-\tau(t)), u(t), u(t-\tau(t)), b) dt, \quad (4)$$

$$\gamma = 0, 1, 2, \dots, m,$$

где  $g_\gamma(b)$ ,  $L_\gamma(t, x, u, \tau, b)$  ( $\gamma = 0, 1, 2, \dots, m$ ) — заданные скалярные функции, непрерывные и имеющие непрерывные частные производные по аргументам  $(x, u, b)$ .

Требуется среди допустимых пар  $(u, b)$  найти такую пару  $(u_0(t), b_0)$ , чтобы в силу задачи (1)–(3)  $I_\gamma(u_0(t), b_0) \leq 0$  ( $\gamma = 1, 2, \dots, m'$ ),  $L_\gamma(u_0(t), b_0) = 0$  ( $\gamma = m' + 1, m' + 2, \dots, m$ ), а  $I_0(u, b)$  принимало бы минимальное значение в точке  $(u_0(t), b_0)$ . Такую пару  $(u_0(t), b_0)$  будем называть оптимальной.

### 2. Необходимые условия

Нижеприведенная теорема дает необходимое условие оптимальности.

Теорема 1. Если пара  $(u_0(t), b_0)$  оптимальна, то существуют такие постоянные  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+n}$  и такая абсолютно непрерывная  $n$ -мерная вектор-функция  $\psi(t)$ , которые удовлетворяют условиям:

$$a) \sum_{p=0}^{m+n} \lambda_p^2 \neq 0, \lambda_p \geq 0 \text{ для } 0 \leq p \leq m', \lambda_p = 0, \text{ если } I_p(u_0(t), b_0) < 0;$$

$$b) \begin{aligned} \dot{\psi}(t) = & -H_x(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u_0(t), u_0(\beta(t)), \psi(t), b_0) - \\ & - \delta(t) H_y(\delta(t), x_0(\delta(t)), x_0(t), u_0(\delta(t)), u_0(t), \psi(\delta(t)), b_0), \\ \psi_j(T) = & -\lambda_{m+j}, \psi(t) \equiv 0 \text{ при } t > T \quad (j = 1, 2, \dots, n); \\ v) & H(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u, u_0(\beta(t)), \psi(t), b_0) + \\ & + \delta(t) H(\delta(t), x_0(\delta(t)), x_0(t), u_0(\delta(t)), u, \psi(\delta(t)), b_0) \leq \\ & \leq H(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u_0(t), u_0(\beta(t)), \psi(t), b_0) + \\ & + \delta(t) H(\delta(t), x_0(\delta(t)), x_0(t), u_0(\delta(t)), u(t), \psi(\delta(t)), b_0), \end{aligned}$$

для всех  $u \in U$  и почти всюду  $t \in [t_0, T]$ ;

$$r) \sum_{a=0}^m \lambda_a g_{ab}(b_0) - \int_{t_0}^T H_b(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u_0(t), u_0(\beta(t)), \psi(t), b_0) dt + \psi(T) \omega_b(b_0) = 0,$$

где

$$H(t, x, u, \tau, \psi, b) = - \sum_{a=0}^m \lambda_a L_a(t, x, u, \tau, b) + \psi f(t, x, u, \tau, b) + \int_{t_0}^t \psi(s) K(s, t, x, u, \tau, b) ds,$$

$$H_x = \frac{\partial H}{\partial x}, H_y = \frac{\partial H}{\partial y}, H_b = \frac{\partial H}{\partial b}.$$



Доказательство. Пусть  $(u_0(t), b_0)$  — оптимальная пара, а  $x_0(t)$  — соответствующая оптимальная траектория. В дальнейшем вместо

$$f_x(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u_0(t), u_0(\beta(t)), b_0), \\ K_x(t, s, x_0(s), x_0(\beta(s)), u_0(s), u_0(\beta(s)), b_0),$$

$$L_{\gamma x}(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u_0(t), u_0(\beta(t)), b_0) \quad (\gamma = 0, 1, \dots, m)$$

и т. д. будем писать, соответственно,  $f_x(t)$ ,  $K_x(t, s)$ ,  $L_{\gamma x}(t)$  ( $\gamma = 0, 1, \dots, m$ ) и т. д.

Определим векторные функции  $q_\alpha(t)$  ( $\alpha = 0, 1, \dots, m$ ) и  $p_l(t)$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) при  $t_0 \leq t < T$ , соответственно, как решения следующих задач:

$$\dot{q}_\alpha(t) = -q_\alpha(t) f_x(t) - \delta(t) q_\alpha(\delta(t)) f_y(\delta(t)) - \int_t^T q_\alpha(s) K_x(s, t) ds - \\ - \delta(t) \int_{\delta(t)}^T q_\alpha(s) K_y(s, \delta(t)) ds - L_{\alpha x}(t) - \delta(t) L_{\alpha y}(\delta(t)), \quad (5)$$

$$q_\alpha(t) \equiv 0 \text{ при } t \geq T; \\ p_l(t) = p_l(t) f_x(t) - \delta(t) p_l(\delta(t)) f_y(\delta(t)) - \\ - \int_t^T p_l(s) K_x(s, t) ds - \delta(t) \int_{\delta(t)}^T p_l(s) K_y(s, \delta(t)) ds, \quad (6)$$

$$p_l(T) = \begin{cases} 0, & l \neq j, \\ 1, & l = j, \end{cases} \quad p_l(t) \equiv 0 \text{ при } t > T \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

С помощью этих решений определим функции:

$$F_\alpha(t, x, y, u, v, b) = L_\alpha(t, x, y, u, v, b) - L_{\alpha x}(t) x - L_{\alpha y}(t) y + \\ + q_\alpha(t) f(t, x, y, u, v, b) - q_\alpha(t) f_x(t) x - q_\alpha(t) f_y(t) y - \\ - \int_t^T q_\alpha(s) K_x(s, t) x ds - \int_t^T q_\alpha(s) K_y(s, t) y ds + \\ + \int_t^T q_\alpha(s) K(s, t, x, y, u, v, b) ds; \quad (7)$$

$$F_{m+1}(t, x, y, u, v, b) = p_l(t) f(t, x, y, u, v, b) - p_l(t) f_x(t) x - \\ - p_l(t) f_y(t) y + \int_t^T p_l(s) K(s, t, x, y, u, v, b) ds - \\ - \int_t^T p_l(s) K_x(s, t) x ds - \int_t^T p_l(s) K_y(s, t) y ds; \quad (8)$$

$$G_\alpha(b) = g_\alpha(b) + q_\alpha(t_0) \varphi(t_0) + \\ + \int_{t_0}^{\delta(t_0)} [L_{\alpha y}(t) + q_\alpha(t) f_y(t) + \int_t^T p_l(s) K_y(s, t) ds] \varphi(\beta(t)) dt, \quad (9)$$

$$G_{m+1}(v) = -\omega_l(v) - p_l(t_0) \varphi(t_0) + \\ + \int_{t_0}^{\delta(t_0)} \left[ p_l(t) f_y(t) + \int_t^T p_l(s) K_y(s, t) ds \right] \varphi(\beta(t)) dt \quad (10)$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, m, m+1, \dots, m+n).$$

Далее определяем функционалы

$$J_p(u, b) = G_p(b) + \int_0^T F_p(t, x, y, u, v, b) dt \\ (\rho = 0, 1, \dots, m, m+1, \dots, m+n). \quad (11)$$

Отсюда с учетом соотношений (5), (6), (7), (8), (9), (10) имеем

$$J_p(u, b) = I_p(u, b) \text{ при } \rho = 0, 1, \dots, m$$

и

$$J_p(u, b) = x_p(T) - \omega_p(b) \text{ при } \rho = m+1, m+2, \dots, m+n.$$

Кроме того,

$$F_{\rho x}(t) = 0, \quad F_{\rho y}(t) = 0, \quad \rho = 0, 1, \dots, m+n. \quad (12)$$

Таким образом, поставленную задачу привели к следующей.

Найти такую пару  $(u_0(t), b_0)$ , чтобы  $J_p(u_0(t), b_0) \leq 0$  при  $\rho = 1, 2, \dots, m'$ ,  $J_p(u_0(t), b_0) = 0$  при  $\rho = m'+1, m'+2, \dots, m+n$  и  $J_0(u_0(t), b_0) = \min_{(u,b) \in U \times B} J_0(u, b)$ .

Обозначим через  $M$  множество  $(n+m+1)$ -мерных векторов координаты которых определяются из соотношений

$$\kappa^\rho = F_\rho(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u, u_0(\beta(t)), b_0) - \\ - F_\rho(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u_0(t), u_0(\beta(t)), b_0) + \\ + \delta(t) [F_\rho(\delta(t), x_0(\delta(t)), x_0(t), u_0(\delta(t)), u, b_0) - \\ - F_\rho(\delta(t), x_0(\delta(t)), x_0(t), u_0(\delta(t)), u_0(t), b_0)], \quad (13)$$

$\rho = 0, 1, \dots, m+n$ , для всех  $u \in U$  и для всех точек  $t \in [t_0, T]$ , в которых  $u_0(t)$  непрерывна.

Прибавим к этому множеству векторы с координатами

$$\kappa_0^\rho = \left[ G_{\rho b}(b_0) + \int_{t_0}^T F_{\rho b}(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u_0(t), u_0(\beta(t)), b_0) dt \right] h, \quad (14)$$

где  $h$  — произвольный  $l$ -мерный вектор ( $\rho = 0, 1, \dots, m+n$ ).

Пусть  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N$  — произвольные векторы из множества  $M$ . Тогда из определения множества  $M$  следует, что для каждого вектора  $\kappa_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) существуют такие  $u_j \in U$ ,  $t_j \in [t_0, T]$ , где  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) являются точками непрерывности  $u_0(t)$ , координаты которых определяются из следующих соотношений:

$$\kappa_j^\rho = F_\rho(t_j, x_0(t_j), x_0(\beta(t_j)), u_j, u_0(\beta(t_j)), b_0) - \\ - F_\rho(t_j, x_0(t_j), x_0(\beta(t_j)), u_0(t_j), u_0(\beta(t_j)), b_0) + \\ + \delta(t) [F_\rho(\delta(t_j), x_0(\delta(t_j)), x_0(t_j), u_0(\delta(t_j)), u_j, b_0) - \\ - F_\rho(\delta(t_j), x_0(\delta(t_j)), x_0(t_j), u_0(\delta(t_j)), u_0(t_j), b_0)], \quad (15)$$

где  $u_j \in U$ ,  $t_j \in [t_0, T]$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ;  $\rho = 0, 1, \dots, m+n$ ) являются точками непрерывности  $u_0(t)$ . Не умаляя общности, можно предположить, что  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N \leq T$ . Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы лагать, что  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N \leq T$ . Выберем  $\delta = t_1$ ,  $T_2 = t_2 + \varepsilon_1, \dots$ ,  $t_1 + \Lambda \delta < t_{i+1}$ , если  $t_i < t_{i+1}$ , и положим  $T_1 = t_1$ ,  $T_2 = t_2 + \varepsilon_1, \dots$ ,  $T_j = t_j + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{j-1}$ ,  $A_j = [T_j, T_j + \varepsilon_j]$  и  $\Phi(\varepsilon) = [t_0, T] \setminus \bigcup_j A_j$ , где

$0 \leq \varepsilon_j \leq \delta' < \delta$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Определим приращение оптимальной пары  $(u_0(t), b_0)$  следующим образом:

$$b(\varepsilon) = b_0 + \varepsilon_0 h, \quad u(t, \varepsilon) = u_j \text{ при } t \in A_j \text{ и } u(t, \varepsilon) = u_0(t) \text{ при } t \in \Phi(\varepsilon). \quad (16)$$

Обозначим через  $x(t, \varepsilon)$  решение задачи (1)–(3), соответствующее паре  $(u(t, \varepsilon), b(\varepsilon))$ . Тогда можно показать, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t)$ .

Пологая  $f_p(\varepsilon) = J_p(u(t, \varepsilon), b(\varepsilon)) - J_p(u_0(t), b_0)$  ( $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N)$ ;  $\rho = 0, 1, \dots, m+n$ ) и учитывая соотношение (11), (12), после некоторых преобразований получим  $K_j^\rho = f_{\rho j}^\rho(0)$  ( $j = 0, \dots, N$ ,  $\rho = 0, \dots, m+n$ ). А это означает, что множество  $M$  является производным множеством для функционалов  $J_p(u, b)$  ( $\rho = 0, \dots, m+n$ ) в точке  $(u_0(t), b_0)$ . Тогда согласно теореме Хестенса [1] существуют такие множители  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+n}$ , которые удовлетворяют условиям



$$\sum_{p=0}^{m+n} \lambda_p^2 \neq 0, \lambda_p \geq 0 \text{ при } p=0, \dots, m', \lambda_p = 0, \text{ если } J_p(u_0(t), b_0) < 0, \quad (18)$$

$$\sum_{p=0}^{m+n} \lambda_p \kappa^p \geq 0 \text{ для любого } \kappa \in M. \quad (19)$$

Учитывая (13) и (14) в этом неравенстве, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{m+n} \lambda_p \{F_p(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u, u_0(\beta(t)), b_0) - \\ & - F_p(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u_0(t), u_0(\beta(t)), b_0) + \\ & + \delta(t) [F_p(\delta(t), x_0(\delta(t)), x_0(t), u_0(\delta(t)), u, b_0) - \\ & - F_p(\delta(t), x_0(\delta(t)), x_0(t), u_0(\delta(t)), u_0(t), b_0)]\} \geq 0, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\sum_{p=0}^{m+n} \lambda_p \left[ G_{pb}(b_0) + \int_{t_0}^T F_{pb}(t, x_0(t), x_0(\beta(t)), u_0(t), u_0(\beta(t)), b_0) dt \right] h \geq 0. \quad (21)$$

Пусть

$$\psi(t) = - \sum_{\alpha=0}^m \lambda_{\alpha} q_{\alpha}(t) - \sum_{l=1}^n \lambda_{m+l} p_l(t).$$

Тогда из (5), (6) получим условие б) теоремы 1, а из (7), (8), (20) следует условие в) и, наконец, условие г) в силу открытости множества  $B$  следует из неравенства (21).

### 3. Достаточные условия

Кроме наложенных выше условий на функции

$$f_i(t, x, u, v, b), K_j(t, s, x, u, v, b), L_{\alpha}(t, x, u, v, b), \\ g_{\alpha}(b) \quad (i=1, \dots, n; \alpha=0, \dots, m),$$

предполагается, что они выпуклы по  $(x, u, v, b)$  и имеют непрерывные частные производные по  $(u, v, b)$ , а  $\omega(b)$  дифференцируема и вогнута по  $b$ . Доказана теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $(u_0(t), b_0)$  — допустимая пара, а  $x_0(t)$  — соответствующее решение задачи (1)–(3). Если существуют такая неположительная вектор-функция  $\psi(t)$  и такие постоянные  $\lambda_0 = 1, \lambda_{\alpha} \geq 0, \alpha=1, \dots, m+n$ , которые удовлетворяют условиям а), б), г) теоремы 1, и

$$\begin{aligned} & H_u(t, x_0(t), x_0(\beta(t, u_0(t))), u_0(\beta(t), \psi(t), b_0) + \\ & + \delta(t) H_y(\delta(t), x_0(\delta(t)), x_0(t), u_0(\delta(t), u_0(t), \psi(\delta(t)), b_0) = 0, \quad (22) \end{aligned}$$

о пара  $(u_0(t), b_0)$  оптимальна.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Magnus R. Hestenes, On variational theory and optimal control theory. SIAM J. Control 3 (1965), № 1, pp. 23–48.
2. Holanay A. Optimal controls for systems with time lag, SIAM J. control, vol. 6, № 2 (1968) pp. 215–234.
3. Розоноер Л. И. ДАН СССР, 127, 1959, № 3.
4. Mangasarian O. L. Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems. SIAM, J. control, vol. 4, № 1, 1966, pp. 139–152.
5. Габасов Р., Чуракова С. В. Автоматика и телемеханика. 1968, № 2.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступило 3. VI 1971

М. Ч. Мәрданов, К. Г. Нәсанов

Кечикән аргументли интегро-дифференциал тәнликләр  
системи үчүн оптималлыг шәрти

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда кечикән аргументли интегро-дифференциал тәнликләр системи илә характеризә олунаң объектләр үчүн гојулмуш оптимал идәрәтмә мәсәләсинә бахылмышдыр. Белә ки, кечикмә идәрәдичи функцијалара да дахилдир. Әввәлчә гојулмуш мәсәлә үчүн әгури шәрт исбат олунмушдур. һәмин шәртин алынмасында һестенсин [1] абстракт вуруг гәјдасындан истифадә едилмишдир. Бундан башга, бә'зи әлавә шәртләр дахилиндә оптималлыг үчүн кафи шәрт исбат олунмушдур.



А. Р. МАГОМЕДОВ

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

В данной статье рассматривается система дифференциальных уравнений (в векторной форме) с отклоняющимся аргументом вида

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t), \max_{t-h \leq \tau \leq t} y(\tau)), \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

в которых запаздывание  $\tau$  в общем случае зависит от искомой функции  $y(t)$ , здесь  $h > 0$  — малая постоянная. Это так называемые дифференциальные уравнения с максимумами.

Пусть функция  $F(t, y(t), \max_{t-h \leq \tau \leq t} y(\tau))$  непрерывна по аргументу  $t$  в некоторой области

$$L: \{|y(t)| \leq K, |u| \leq K; t \in [t_0 + (j-1)h, t_0 + jh]\},$$

где  $u = \max_{t-h \leq \tau \leq t} y(\tau)$  и, ограничена, т. е.  $|F(t, y(t), u)| \leq M$ , кроме того удовлетворяют условию Липшица по аргументам  $y(t)$  и  $u$ , т. е.

$$|F(t, y_1(t), u_1) - F(t, y_2(t), u_2)| \leq R(t) (|y_1 - y_2| + |u_1 - u_2|), \quad (2)$$

где  $R(t)$  голожительна, монотонно не убывает и непрерывна по  $t$  данной области  $L$ .

Ставим вопрос о непрерывности решений такой системы по начальным условиям и по правой части.

1. Построим решения системы (1) методом последовательного интегрирования или методом шагов. Пусть на отрезке  $[t_0 - h, t_0]$ , т. е. на так называемом начальном множестве, дана непрерывная функция  $\varphi_0(t)$ , играющая роль начальной функции. Рассмотрим систему

$$\dot{\varphi}_1(t) = F(t, \varphi_1(t), \max_{t_0-h \leq \tau \leq t} \varphi_0(\tau)) \quad (3)$$

и ее решение на отрезке  $[t_0, t_0 + h]$ , определяемое начальным условием  $\varphi_1(t_0) = \varphi_0(t_0)$ . Это решение соответствует обычной задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений без отклонений в аргументах, так как  $\max_{t_0-h \leq \tau \leq t} \varphi_0(\tau)$  играет в уравнении (3) роль постоянного параметра, определяемого свойствами функции  $\varphi_0(t)$ . Следовательно,  $\varphi_1(t)$  определяется однозначно.

Рассмотрим далее систему

$$\dot{\varphi}_2(t) = F(t, \varphi_2(t), \max_{t_0 \leq \tau \leq t_0+h} \varphi_1(\tau)) \quad (4)$$

и ее решение на отрезке  $[t_0 + h, t_0 + 2h]$ , определяемое начальным условием  $\varphi_2(t_0 + h) = \varphi_1(t_0 + h)$ . Это уравнение имеет такой же ха-

рактер, что и (3), и его решение также определяется однозначно (но вообще зависит как от  $\varphi_0$ , так и от  $\varphi_1$ ).

Аналогично определим функцию  $\varphi_k(t)$  на отрезке  $[t_0 + (k-1)h, t_0 + kh]$  как решение системы

$$\dot{\varphi}_k(t) = F(t, \varphi_k(t), \max_{t_0+(k-2)h \leq \tau \leq t_0+(k-1)h} \varphi_{k-1}(\tau))$$

при начальном условии  $\varphi_k[t_0 + (k-1)h] = \varphi_{k-1}[t_0 + (k-1)h]$ . Продолжая процесс, получим таким образом решение системы (1):

$$y(t) = \varphi_j(t) \text{ для } t_0 + (j-1)h \leq t \leq t_0 + jh \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

при начальном условии

$$y(t) = \varphi_0(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0. \quad (5)$$

Очевидно, что построенная функция  $y(t)$  непрерывна и дифференцируема во внутренних точках отрезков  $t_0 + (j-1)h \leq t \leq t_0 + jh$ ,  $j \geq 1$ , и в точках  $t_0 + jh$ ,  $j \geq 1$ . В точке  $t_0$  существует только правая производная.

В силу предположения о свойствах функции  $F(t, y(t), u)$  все  $\varphi_j(t)$ ,  $j \geq 1$ , а вместе с тем и рассматриваемое решение  $y(t)$  исходного уравнения определяются единственным образом. Тем самым доказаны не только существование и единственность решения исходного уравнения при начальном условии (5) (этот результат получен в [1]), но и возможность применения метода шагов для построения этого решения.

II. В дальнейшем нам придется пользоваться леммой Гронуолла ([2], стр. 46—47).

Лемма Если  $c \geq 0$  — постоянная, функция  $u(t)$ ,  $\tau(t) \geq 0$  непрерывны и

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t u(s) \tau(s) ds, \quad t \geq t_0,$$

то для  $t \geq t_0$

$$u(t) \leq c \exp \left( \int_{t_0}^t \tau(s) ds \right).$$

Докажем теперь непрерывность решения исходной системы (1) по начальным условиям (5). Пусть  $y_1(t)$  — решение системы (1), определяемое начальным условием  $y_1(t) = \varphi_0(t)$ ,  $t_0 - h \leq t \leq t_0$ , и  $y_2(t)$  — решение системы (1), определяемое начальным условием  $y_2(t) = \varphi_0(t)$ ,  $t_0 - h \leq t \leq t_0$ .

Введем следующие обозначения:  $y_1(t) = \varphi_1(t)$  и  $y_2(t) = \varphi_2(t)$ ,  $t_0 + (j-1)h \leq t \leq t_0 + jh$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ). Предположим, что  $F(t, y(t), u)$  удовлетворяет условию Липшица (2) в области

$$D: \{|y_i(t)| \leq K, |u_i| \leq K; t_0 \leq t \leq T, i = 1, 2.$$

Сопоставим решения  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  системы (1) в этой области. Для функции  $\psi_1(t)$ , определяемой на отрезке  $[t_0, t_0 + h]$ , имеем уравнение

$$\dot{\psi}_1(t) = F(t, \psi_1(t), \max_{t_0-h \leq \tau \leq t_0} \varphi_0(\tau)) \quad (6)$$

с начальным условием  $\psi_1(t_0) = \varphi_0(t_0)$ . Для простоты обозначим  $\max_{t_0-h \leq \tau \leq t_0} \varphi_0(\tau)$  через  $u_0$ ,  $\max_{t_0-h \leq \tau \leq t_0} \varphi_0(\tau)$  через  $u_0$ . Заменяя (3) и (6) соответствующими интегральными уравнениями, получим

$$\varphi_1(t) = \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, \varphi_1(s), u_0) ds, \quad (7)$$

$$\psi_1(t) = \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, \psi_1(s), u_0) ds. \quad (8)$$



Рассмотрим разность (8) и (7):

$$\psi_1(t) - \varphi_1(t) = \psi_0(t_0) - \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^t \{F(s, \psi_1(s), \bar{u}_0) - F(s, \varphi_1(s), u_0)\} ds.$$

В качестве нормы  $\|\psi_j(t) - \varphi_j(t)\|$  для разности всех рассматриваемых функций  $\psi_j(t)$  и  $\varphi_j(t)$  на соответствующих отрезках  $[t_0 + (j-1)h; t_0 + jh]$  принимаем  $t \sup |\psi_j - \varphi_j|$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Учитывая, что  $|\bar{u}_0 - u_0| = \|\psi_0\| - \|\varphi_0\|$  и что функция  $F(t, y(t), u)$  удовлетворяет условию Липшица, находим

$$\|\psi_1(t) - \varphi_1(t)\| \leq \|\psi_0 - \varphi_0\| + \int_{t_0}^t R(s) \{|\psi_1(s) - \varphi_1(s)| + |\bar{u}_0 - u_0|\} ds$$

Далее имеем

$$|\psi_1(t) - \varphi_1(t)| \leq M_1 \|\psi_0 - \varphi_0\| + \int_{t_0}^t R(s) |\psi_1(s) - \varphi_1(s)| ds,$$

где  $M_1 = \left(1 + \int_{t_0}^{t_0+h} R(s) ds\right)$ . Следовательно, согласно лемме Гроулла

$$\|\psi_1 - \varphi_1\| \leq A_1 \|\psi_0 - \varphi_0\|,$$

где  $A_1 = M_1 \exp \left( \int_{t_0}^{t_0+h} R(s) ds \right)$ . Далее функция  $\psi_2(t)$ , определяемая на отрезке  $[t_0 + h, t_0 + 2h]$ , удовлетворяет уравнению

$$\dot{\psi}_2(t) = F(t, \psi_2(t), \bar{u}_1) \quad (9)$$

и начальному условию

$$\psi_2(t_0 + h) = \psi_1(t_0 + h).$$

Заменяя (4) и (9) соответствующими интегральными уравнениями, получим

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t_0 + h) + \int_{t_0}^t F(s, \varphi_2(s), u_1) ds, \quad (10)$$

$$\psi_2(t) = \psi_1(t_0 + h) + \int_{t_0}^t F(s, \psi_2(s), \bar{u}_1) ds. \quad (11)$$

Рассмотрим разность (11) и (10):

$$\begin{aligned} \psi_2(t) - \varphi_2(t) &= \psi_1(t_0 + h) - \varphi_1(t_0 + h) + \\ &+ \int_{t_0+h}^t \{F(s, \psi_2(s), \bar{u}_1) - F(s, \varphi_2(s), u_1)\} ds, \end{aligned}$$

$$\text{где } u_1 = \max_{t_0 < \tau < t_0+h} \varphi_1(\tau), \quad \bar{u}_1 = \max_{t_0 < \tau < t_0+h} \psi_1(\tau).$$

Учитывая, что

$$|\bar{u}_1 - u_1| = \|\psi_1\| - \|\varphi_1\| \leq \|\psi_1 - \varphi_1\|$$

и функции  $\varphi_2(t)$  и  $\psi_2(t)$  определены в области  $D$ , снова будем иметь

$$|\psi_2(t) - \varphi_2(t)| \leq \|\psi_1 - \varphi_1\| + \int_{t_0+h}^t R(s) \{|\psi_2(s) - \varphi_2(s)| + |\bar{u}_1 - u_1|\} ds.$$

Следовательно,

$$\|\psi_2(t) - \varphi_2(t)\| \leq M_2 \|\psi_1 - \varphi_1\| + \int_{t_0+h}^t R(s) |\psi_1(s) - \varphi_1(s)| ds,$$

где

$$M_2 = \left(1 + \int_{t_0+h}^{t_0+2h} R(s) ds\right).$$

Применяя уже известную лемму, получим

$$\|\psi_2(t) - \varphi_2(t)\| \leq A_2 \|\psi_1 - \varphi_1\|,$$

где

$$A_2 = M_2 \exp \left( \int_{t_0+h}^{t_0+2h} R(s) ds \right).$$

Отсюда

$$\|\psi_2(t) - \varphi_2(t)\| \leq A_2 \cdot A_1 \|\psi_0 - \varphi_0\|.$$

Таким образом, продолжая процесс аналогично, получим

$$\|\psi_j(t) - \varphi_j(t)\| \leq A_j \cdot A_{j-1} \cdots A_1 \|\psi_0 - \varphi_0\|,$$

где

$$A_j = M_j \exp \left( \int_{t_0+(j-1)h}^{t_0+jh} R(s) ds \right),$$

$$M_j = \left(1 + \int_{t_0+(j-1)h}^{t_0+jh} R(s) ds\right), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, при всех  $t_0 \leq t \leq t_0 + \kappa h = t_0 + T$  будем иметь

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq A_k \cdot A_{k-1} \cdots A_1 \|\psi_0 - \varphi_0\|$$

или

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq B \|\psi_0 - \varphi_0\|,$$

где  $B$  зависит от  $R(t)$  и  $T$ .

Основной результат этого пункта можно сформулировать так: если функция  $F(t, y(t), u)$  удовлетворяет условию Липшица, то решение нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом непрерывно зависит от начальных данных (начальных функций).

III Пусть дана более сложная система:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), \max_{t-h \leq \tau < t} x(\tau)) + G(t, x(t), \max_{t-h \leq \tau < t} x(\tau)), \quad (13)$$

где функция

$$G(t, x(t), \max_{t-h \leq \tau < t} x(\tau))$$

достаточно мала, т. е.

$$|G(t, x(t), \max_{t-h \leq \tau < t} x(\tau))| < \varepsilon.$$

Рассмотрим решение системы (13) при начальном условии:

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0$$

и решение системы (3) при том же начальном условии. Пусть  $\xi_1(t)$  — решение системы:

$$\dot{\xi}_1(t) = F(t, \xi_1(t), \max_{t_0-h \leq \tau < t_0} \xi_0(\tau)) + G(t, \xi_1(t), \max_{t_0-h \leq \tau < t_0} \xi_0(\tau)) \quad (14)$$

на отрезке  $[t_0, t_0 + h]$ , определяемое начальным условием  $\xi_1(t_0) = \varphi_0(t_0)$ . Заменяя (14) соответствующим интегральным уравнением, получим

$$\xi_1(t) = \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^t \{F(s, \xi_1(s), u_0) + G(s, \xi_1(s), u_0)\} ds. \quad (15)$$

Рассмотрим разность (7) и (15):

$$\begin{aligned} |\xi_1(t) - \varphi_1(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t \{F(s, \xi_1(s), u_0) - F(s, \varphi_1(s), u_0)\} ds \right| + \\ &+ \left| \int_{t_0}^t G(s, \xi_1(s), u_0) ds \right| \end{aligned}$$



где

$$u_0 = \max_{t_0-h \leq \tau \leq t_0} \xi_0(\tau) = \max_{t_0-h \leq \tau \leq t_0} \varphi_0(\tau).$$

Учитывая наложенное условие на функцию  $G(t, x(t), \max_{t-h \leq \tau \leq t} x(\tau))$ ,

имеем

$$|\xi_1(t) - \varphi_1(t)| \leq \varepsilon h + \int_{t_0}^t R(s) |\xi_1(s) - \varphi_1(s)| ds.$$

Применяя известную лемму Гронуолла, при любом  $t$  получим

$$\|\xi_1(t) - \varphi_1(t)\| \leq \varepsilon h \exp\left(\int_{t_0}^t R(s) ds\right) \leq \varepsilon h \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+h} R(s) ds\right) = \varepsilon h N_1,$$

$$\|\xi_1(t) - \varphi_1(t)\| \leq \varepsilon h N_1, \quad \text{где } N_1 = \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+h} R(s) ds\right).$$

Пусть функция  $\xi_2(t)$  — решение уравнения:

$$\xi_2(t) = F(t, \xi_2(t), \max_{t_0 \leq \tau \leq t_0+h} \xi_1(\tau)) + G(t, \xi_2(t), (t), \max_{t_0 \leq \tau \leq t_0+h} \xi_1(\tau)), \quad (16)$$

определяемое на отрезке  $[t_0+h, t_0+2h]$  начальным условием  $\xi_2(t_0+h) = \varphi_1(t_0+h)$ . Заменяем (16) соответствующим интегральным уравнением

$$\xi_2(t) = \varphi_1(t_0+h) + \int_{t_0+h}^t \{F(s, \xi_2(s), \bar{u}_1) + G(s, \xi_2(s), \bar{u}_1)\} ds,$$

где  $\bar{u}_1 = \max_{t_0 \leq \tau \leq t_0+h} \xi_1(\tau)$ .

Рассмотрим разность (16) и (10):

$$|\xi_2(t) - \varphi_2(t)| \leq \left| \int_{t_0+h}^t \{F(s, \xi_2(s), \bar{u}_1) - F(s, \varphi_2(s), u_1)\} ds \right| + \left| \int_{t_0+h}^t G(s, \xi_2(s), \bar{u}_1) ds \right| \leq \varepsilon h + \int_{t_0+h}^t R(s) \{|\xi_2(s) - \varphi_2(s)| + |\bar{u}_1 - u_1|\} ds =$$

$$= \varepsilon h + \int_{t_0+h}^t R(s) |\xi_2(s) - \varphi_2(s)| ds + \int_{t_0+h}^t R(s) |\bar{u}_1 - u_1| ds \leq$$

$$\leq \varepsilon h + \int_{t_0+h}^t R(s) |\xi_2(s) - \varphi_2(s)| ds + \|\xi_1 - \varphi_1\| \int_{t_0+h}^t R(s) ds \leq$$

$$\leq \varepsilon h + \varepsilon h N_1 \cdot M_2 + \int_{t_0+h}^{t_0+2h} R(s) |\xi_2(s) - \varphi_2(s)| ds,$$

$$\text{где } N_1 = \exp\left(\int_{t_0+h}^{t_0+2h} R(s) ds\right), \quad M_2 = \int_{t_0+h}^{t_0+2h} R(s) ds.$$

На основании леммы Гронуолла  $\|\xi_2 - \varphi_2\| \leq \varepsilon h N_2$ ,

$$\text{где } N_2 = (1 + N_1 \cdot M_2) \exp\left(\int_{t_0+h}^{t_0+2h} R(s) ds\right).$$

Аналогичным путем получим, что на отрезке  $[t_0+2h, t_0+3h]$

$$\|\xi_3 - \varphi_3\| \leq \varepsilon h N_3,$$

$$\text{где } N_3 = (1 + N_2 \cdot M_3) \exp\left(\int_{t_0+2h}^{t_0+3h} R(s) ds\right), \quad M_3 = \int_{t_0+2h}^{t_0+3h} R(s) ds,$$

и т. д.

Таким образом, продолжая этот процесс, аналогично получим при всех  $t_0 \leq t \leq t_0 + kh = t_0 + T$  неравенство  $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon h N$ , в котором  $N$  зависит от  $R(t)$  и  $T$ . Следовательно,  $|x(t) - y(t)| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  на отрезке  $[t_0, t_0 + 1]$ . Так что решение системы (1) непрерывно по правой части.

В заключение автор считает приятным долгом выразить благодарность проф. Ю. А. Рябову за помощь при написании данной статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Магомедов А. Р. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук\*, 1971, № 2.
2. Беллмен Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954.
3. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., 1954.
4. Эльсгольц Л. Э., Нуркин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Изд. "Наука", М., 1971.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступило 2. VII 1971

Э. Р. Мəһəммəдов

Кечикэн аргументли бир синиф гејри-хэтти дифференсиал тэнликлəрин хəллəринин бə'зи кејфијјəт мəсəлəлəри

ХҮЛАСƏ

Мəгалəдə бир синиф

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t), \max_{t-h \leq \tau \leq t} y(\tau)), \quad t \geq t_0$$

типли кечикэн иргументли систем (вектор формасында) дифференсиал тэнликлəрə бəхылмышдыр.

Нəтицəдə, хəм хəллин варлыгы вə јеканəлији, хəм дə бəшлангыч шəртиндəн вə сəғ тəрəфиндəн асылы кəсилмəз хəллəр алынмышдыр.



С. С. АХИЕВ, К. Т. АХМЕДОВ

# К БОЛЕЕ ОБЩЕМУ ПОНЯТИЮ СОПРЯЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В данной статье рассматривается новая сопряженная система уравнений для системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа (ДУ с ЗАНТ). Она является более общей, чем ранее известная [1], и дает возможность получить представления решения и его производной, что играет важную роль при исследовании его устойчивости, для широкого круга систем линейных ДУ с ЗАНТ.

1. Система линейных ДУ с ЗАНТ. Пусть задана система уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau(t)) + C(t)\dot{x}(t - \tau(t)) + \omega(t), \quad t > t_0, \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t) = \eta(t), \quad h(t_0) \leq t \leq t_0, \quad (2)$$

где  $x(t)$  —  $n$ -мерная неизвестная вектор-функция;  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $C(t)$  — заданные непрерывные для  $t \geq t_0$  матрицы размерностью  $n \times n$ ;  $h(t) = t - \tau(t)$  — заданная непрерывно дифференцируемая на  $t \geq t_0$  функция, такая, что  $\tau(t) > 0$ ,  $\dot{\tau}(t) < 1$ ;  $\eta(t)$  и  $\omega(t)$  — заданные  $n$ -мерные вектор-функции, из которых  $\eta(t)$  непрерывно дифференцируема на  $h(t_0) \leq t \leq t_0$ , а  $\omega(t)$  непрерывна для  $t \geq t_0$ , при возможном исключении разрывов первого рода в точках  $t = t_i(t_0)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , причем функции  $t = t_i(r)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , определяются равенствами  $t_0(r) = r$ ,  $t_{i+1}(r) = \gamma(t_i(r))$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , а  $t = \gamma(r)$ ,  $r \geq h(t_0)$ , есть функция, обратная к  $r = h(t)$ ,  $t \geq t_0$ .

При наложенных выше условиях задача (1), (2) имеет единственное непрерывное на  $t \geq t_0$  решение  $x(t)$ , которое обладает непрерывной производной в каждом интервале  $(t_i(t_0), t_{i+1}(t_0))$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , а в точках  $t = t_i(t_0)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , — конечными левой и правой производными.

2. Сопряженная задача. Рассмотрим матричное интегральное уравнение

$$p(s, t) = I + \delta(s, t)p(\gamma(s), t)C(\gamma(s))\dot{\gamma}(s) - \int_t^s [p(\xi, t)A(\xi) + \\ + \delta(\xi, t)p(\gamma(\xi), t)B(\dot{\gamma}(\xi))\dot{\gamma}(\xi)] d\xi, \quad t_0 \leq s \leq t, \quad (3)$$

где  $p(s, t)$  — неизвестная матрица размерностью  $n \times n$ ;  $I$  — единичная матрица;  $\delta(s, t)$  — функция, определяемая формулой  $\delta(s, t) = 0$  при  $h(t) \leq s \leq t$ ;  $\delta(s, t) = 1$  при  $t_0 \leq s < h(t)$ .

Система интегральных уравнений (3) при каждом  $t \geq t_0$  имеет единственное непрерывное для  $t_0 \leq s \leq t$  решение, за возможным исключением разрывов первого рода в точках  $s = s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m(t)$ , где функции  $s = s_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , определяются равенствами  $s_0(t) = t$ ,  $s_{i+1}(t) = h(s_i(t))$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , а  $m(t)$  есть целое число, удовлетворяющее условию  $s_{m(t)+1}(t) \leq t_0 < s_{m(t)}(t)$ .

Далее решение системы интегральных уравнений (3) эквивалентно решению матричного дифференциального уравнения

$$L^* p(s, t) = - \frac{\partial}{\partial s} [p(s, t) - \delta(s, t)p(\gamma(s), t)C(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)] - \\ - p(s, t)A(s) - \delta(s, t)p(\gamma(s), t)B(\dot{\gamma}(s))\dot{\gamma}(s) = 0, \quad (4)$$

$$t_0 \leq s \leq t, \quad s \neq s_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m(t),$$

с начальным условием:

$$p(t, t) = I, \quad \Delta p(s_i(t), t) = \dot{\gamma}(s_i(t))C(s_0(t)), \\ \Delta p(s_i(t), t) = \dot{\gamma}(s_i(t))\Delta p(s_{i-1}(t), t)C(s_{i-1}(t)), \quad (5)$$

$$i = 2, 3, \dots, m(t),$$

где

$$\Delta p(s_i(t), t) = p(s_i(t) - 0, t) - p(s_i(t) + 0, t).$$

Заметим, что производную от выражения, стоящего в квадратной скобке формулы (4), нельзя записать в виде суммы производных слагаемых, так как слагаемые этого выражения могут и не иметь производной по  $s$  несмотря на то, что само это выражение непрерывно по  $s$  на  $t_0 \leq s \leq t$  и имеет производную по  $s$  для  $s_0 \leq s \leq t$ ,  $s \neq s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m(t)$ , а в точках  $s = s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m(t)$ , — конечные левую и правую производные.

Теперь рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$L\tau(s, r) = \frac{\partial \tau(s, r)}{\partial s} - A(s)\tau(s, r) - B(s)\tau(h(s), r) - \\ - C(s)\frac{\partial \tau(h(s), r)}{\partial s}, \quad s > r, \quad s \neq t_i(r), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

с начальным условием:

$$\tau(s, r) = \begin{cases} 0, & h(r) \leq s < r, \\ I, & s = r, \end{cases}$$

$$\nabla \tau(t_1(r), r) = \dot{\gamma}(t_0(r))C(t_1(r)),$$

$$\nabla \tau(t_i(r), r) = \dot{\gamma}(t_{i-1}(r))C(t_i(r))\nabla \tau(t_{i-1}(r), r), \quad i = 2, 3, \dots, \quad (7)$$

где

$$\nabla \tau(t_i(r), r) = \tau(t_i(r) + 0, r) - \tau(t_i(r) - 0, r) \quad \text{и} \quad r \geq t_0.$$

Система уравнений (6) имеет единственное решение  $\tau(s, r)$ , удовлетворяющее условию (7), которое непрерывно для  $s \geq h(r)$  за возможным исключением точек  $s = t_i(r)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , в которых оно может иметь разрывы первого рода, кроме того, это решение имеет непрерывную производную (по  $s$ ) для  $s \geq h(r)$ , за возможным исключением точек  $s = t_i(r)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , в которых оно, вообще говоря, не имеет производной, а имеет конечные левую и правую производные.

Задачи (4), (5) и (6), (7) будем называть взаимно сопряженными. Теорема 1. Пусть  $p(s, t)$  и  $\tau(s, r)$ , определенные выше, — единственные решения задач (4), (5) и (6), (7), соответственно. Тогда имеет место двойственное соотношение

$$p(r, t) = \tau(t, r), \quad t_0 \leq r \leq t, \quad r \neq s_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m(t),$$

\* В точках  $s = t_0$  и  $s = t$  берутся односторонние производные.



более того, производная  $\partial p(s, t)/\partial t$  существует для  $t_0 \leq s \leq t$ ,  $s \neq s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m(t)$ , и определяется равенством

$$\frac{\partial p(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(r, s)}{\partial r}, \quad t_0 \leq s \leq t, \quad s \neq s_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m(t). \quad (8)$$

3. Представления решения и производной решения для задачи (1), (2). С помощью решения задачи (3) найдем решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее нулевому начальному условию.

Умножив обе части равенства (1), слева, на матрицу  $p(s, r)$ , проинтегрировав по  $s$  на  $[t_0, r]$ , после некоторых преобразований, будем иметь

$$x(t) = \int_{t_0}^t p(s, t) \omega(s) ds, \quad s \geq t_0. \quad (9)$$

Используя равенства (8) и (9), получим

Теорема 2. Пусть  $p(s, t)$  и  $v(s, r)$  означают определенные выше решения взаимно сопряженных задач (4), (5) и (6), (7). Тогда единственное непрерывное решение  $x(t)$  уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2), имеет вид

$$x(t) = y(t) + \int_{t_0}^t p(s, t) \omega(s) ds, \quad t \geq t_0, \quad (10)$$

кроме того, производная этого решения определяется формулой

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t) + \omega(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial p(s, t)}{\partial t} \omega(s) ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m(t)} \Delta p(s_i(t), t) \omega(s_i(t)) \dot{s}_i(t), \quad t > t_0, \quad t \neq t_1(t_0), \quad i = 1, 2, \dots,$$

где  $y(t)$  является решением однородного уравнения (1), в котором  $\omega(t) \equiv 0$ , удовлетворяющим начальному условию (2).

4. О сопряженной системе. Пусть  $p(s, r)$  — единственное определенное выше решение сопряженной к системе (6) системы (4), удовлетворяющее условию (5). Тогда матрица

$$[p(s, t) - \delta(s, r) p(\gamma(s), r) C(\gamma(s)) \dot{\gamma}(s)]$$

будет непрерывна по  $s$  на  $t_0 \leq s \leq t$ , кроме того, она будет иметь непрерывную производную по  $s$  для  $t_0 \leq s \leq t$ ,  $s \neq s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m(t)$ . Однако при этом матрица  $p(s, t)$  может и не иметь производной по  $s$  для  $t_0 \leq s < s_1(t)$  (на  $s_1(t) < s < t$  матрица  $p(s, t)$  всегда имеет непрерывную производную по  $s$ ). Это означает следующее: несмотря на то, что (4) на  $t_0 \leq s \leq t$ ,  $s \neq s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m(t)$ , представляет собою дифференциальное уравнение, неизвестная  $p(s, r)$ , входящая в него, всюду в области его определения, т.е. на  $t_0 \leq s \leq t$ ,  $s \neq s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m(t)$ , вообще говоря, недифференцируема. Поэтому уравнение (4) будем называть дифференциальным уравнением первого порядка, явно не содержащим производной неизвестного.

Рассмотрим пример:

$$\dot{x}(t) = \sqrt[3]{t-2.5} x(t-1) + 1, \quad t > 1; \quad x(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (11)$$

где  $x(t)$  — скалярная функция. Для этого примера единственное решение задачи (4), (5) на  $1 \leq s \leq t \leq 4$  имеет вид:

$$p(s, t) = \begin{cases} 1, & t-1 \leq s \leq t, \\ 1 + \sqrt[3]{s-1.5}, & t-2 \leq s < t-1, \quad 1 \leq s \leq t \leq 4, \\ 1 + \sqrt[3]{s-1.5} + \sqrt[3]{(s-0.5)(s-1.5)}, & 1 \leq s < t-2. \end{cases} \quad (12)$$

Для примера (11) функция  $p(s, t)$ , определяемая формулой (12) на линии  $s = 1.5$ , где совпадающей с линиями  $s = s_i(t) = t - i$ , недифференцируема по  $s$ .

Приведем один частный случай, когда решение  $p(s, t)$  задачи (4), (5) непрерывно дифференцируемо по  $s$  для  $t_0 \leq s \leq t$ ,  $s \neq s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m(t)$ . Предположим, что матрица  $C(t)$  на  $t \geq \gamma(t_0)$  и функция  $\gamma(t)$  на  $t \geq h(t_0)$  имеют непрерывные производные. Тогда из эквивалентности задач (3) и (4), (5) легко получаем, что в этом случае решение  $p(s, t)$  сопряженной системы (4), удовлетворяющей условию (5), будет иметь непрерывную производную по  $s$  для  $t_0 \leq s \leq t$ ,  $s \neq s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m(t)$ . Поэтому производную от выражения, стоящего в квадратной скобке (4), можно записать в виде суммы производных слагаемых. Следовательно, в этом случае уравнение (4) будет дифференциальным уравнением первого порядка, явно содержащим производную неизвестного. Кроме того, в этом случае будет существовать и производная  $\partial v(s, r)/\partial r$  для  $t_0 \leq r \leq s$ ,  $r \neq s_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m(s)$ , определяемая формулой

$$\frac{\partial v(s, r)}{\partial r} = \frac{\partial p(r, s)}{\partial r}, \quad t_0 \leq r \leq s, \quad r \neq s_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, m(s).$$

5. Об одной формуле из [1]\*. В работе [1] выведена формула (10.12.10) (стр. 344, § 12, X глава), связывающая решения уравнений (10.12.3) и (10.12.4), соответственно, удовлетворяющие условиям (в) и (с). Эта формула имеет обманчивый характер. Так, из нее вытекает, будто для доказательства непрерывной дифференцируемости функции  $v(r, z)$  по  $z$  на функцию  $a(z)$  должна налагаться непрерывная дифференцируемость. Однако в действительности это не так. Преобразуя (10.12.10) к виду

$$v(r, z) = u(z+h, r) - \sum_{j=1}^M u(z-jh+h, r) \{v(z-jh+0, z) - \\ - v(z-jh-0, z)\} + a(z-jh+h) [v(z-jh+h+0, z) - \\ - v(z-jh+h-0, z)] - u(z-Mh, r) a(z-Mh) [v(z-Mh+0, z) - v(z-Mh-0, z)],$$

учитывая  $r < z - Mh < r + h$  на основе пункта (в) условия (10.12.3) и пункта (с) условия (10.12.4) имеем

$$v(r, z) = u(z+h, r). \quad (13)$$

Итак, в действительности формулы (10.12.10) и (10.12.11) имеют вид (13). А формула (13) показывает, что при доказательстве непрерывной дифференцируемости функции  $v(r, z)$  по  $z$  или функции  $u(z+h, r)$  по  $r$  на  $t_0 < r < z$ ,  $r \neq z - nh$ ,  $n = 1, 2, \dots, M$ , ограничения непрерывной дифференцируемости на  $a(z)$  можно избежать.

Однако непрерывная дифференцируемость функции  $a(z)$  в [1] необходима для того, чтобы сопряженное уравнение (10.12.4) имело смысл. А этого ограничения, как показано выше, можно избежать заменой уравнения (10.12.4) на соответствующее уравнение типа (4), выведенное в данной статье.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Беляман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения, ИЛ, 1967.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступило 13. VII 1971

\*) В этом пункте сохраняются обозначения [1].



С. С. Нахидов, Г. Т. Әмәдов

# Нейтрал типли кечикән аргументли дифференциал тәнликләр системи үчүн даһа үмуми гошма тәнлик анлајышы

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда нейтрал типли кечикән аргументли дифференциал тәнликләр системинә јени гошма тәнлик анлајышы дахил едилір. Бу гошма тәнлик әввәлкиндән даһа үмумидир вә хәтти гејри-бирчине тәнликләрин даһа кениш синфи үчүн һәллин үмуми шәклини тапмаға имкан верир.

АЗӘРБАЈҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ  
Физика-техника вә ријазийјат елмләри серијасы, 1972, № 3.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
Серия физико-технических и математических наук, 1972, № 3.

М. А. АБДУРАГИМОВ

## НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ, СОДЕРЖАЩИМ ПРОИЗВОДНЫЕ

Линейная задача сопряжения с краевым условием, содержащим производные, впервые была рассмотрена Л. Г. Магнарадзе. Впоследствии такого вида обобщенные задачи изучались в работах Ю. М. Крикунова, Н. П. Векуа, В. С. Рогожина, Н. П. Ганина, Р. С. Исаханова, Н. Усманова и др.

Нелинейным обобщенным краевым задачам посвящено несколько работ. Они освещают в основном общие вопросы существования решения.

Настоящая статья посвящена одной нелинейной задаче сопряжения, в краевом условии которой допускаются также значения производных искомой функции. Наряду с вопросом о разрешимости задачи выясняется зависимость решения от входящих в него свободных параметров (их число зависит от порядка высшей производной в краевом условии и от так называемого индекса задачи). С этой целью задача поставлена подобно задаче Коши для дифференциального уравнения и исследована.

§ 1. Дан простой замкнутый контур Ляпунова  $L$ , делящий комплексную плоскость на внутреннюю область  $D^+$  и внешнюю  $D^-$ ; для удобства будем считать, что начало координат расположено в  $D^+$ . Обозначим через  $E_n^+$  множество аналитических функций в  $D^+$ , граничные значения производных  $n$ -го порядка которых удовлетворяют условию Гельдера;  $E^-$  — множество аналитических функций в  $D^-$ .

Требуется найти функции  $\Phi^+(z) \in E^+$  и  $\Phi^-(z) \in E^-$  по граничному условию

$$\frac{d^n \Phi^+(t)}{dt^n} + \lambda F \left( t, \Phi^+, \frac{d\Phi^+}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}\Phi^+}{dt^{n-1}} \right) = G(t) \Phi^-(t), \quad (1)$$

где  $G(t)$  — заданная функция класса  $H(\omega)$  на  $L$  [4, 5] и  $G(t) \neq 0$  всюду на  $L$ ; функция  $F(t, u_0, \dots, u_{n-1})$  определена при  $t \in L$ ,  $u_i \in E_{n-1}^+$ , аналитически распространяема на область  $R(n+1)$ -мерного комплексного пространства  $(z, u_0, \dots, u_{n-1})$ ,  $z \in D^+$  и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} |F(t, u_0, \dots, u_{n-1}) - F(t', u'_0, \dots, u'_{n-1})| &\leq A[\omega(|t - t'|) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} |u_i - u'_i|], \end{aligned} \quad (2)$$

$$t, t' \in L; \quad u_i, u'_i \in E_{n-1}^+.$$



Посредством замены

$$\frac{d_n \Phi^+(z)}{dz_n} + \lambda E \left( z, \Phi^+(z), \dots, \frac{d^{n-1} \Phi^+(z)}{dz^{n-1}} \right) = \Phi_1^+(z), \quad z \in D^+, \quad (3)$$

задача (1) приводится к линейной задаче сопряжения:

$$\Phi_1^+(t) = G(t) \Phi^-(t). \quad (1')$$

Согласно теории линейной задаче сопряжения [1, 2] имеем:

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} P_*(z), \quad z \in D^+; \quad (4)$$

$$\Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} z^{-x} P_*(z), \quad z \in D^-, \quad (4')$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-x} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

$P_*(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_x z^x$  — полином степени не выше  $x$  с произвольными комплексными коэффициентами,  $\alpha = \text{ind } G(t) \geq 0$ . Учитывая (3), находим

$$\frac{d_n \Phi^+(z)}{dz_n} = e^{\Gamma^+(z)} P_*(z) - \lambda F \left( z, \Phi^+(z), \dots, \frac{d^{n-1} \Phi^+(z)}{dz^{n-1}} \right). \quad (5)$$

Очевидно, задачи (1) и (4), (5) эквивалентны. Представим аналитическую в  $D^+$  функцию  $\frac{d^n \Phi^+(z)}{dz^n}$  интегралом типа Коши:

$$\frac{d^n \Phi^+(z)}{dz^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (6)$$

Как известно, плотность интеграла типа Коши  $\mu(t)$  определяется краевым значением аналитической в области  $D^-$  функции  $\psi^-(z)$ , подчиненно единственному ограничению  $\psi^-(\infty) = 0$ :

$$\mu(t) = \psi^+(t) - \psi^-(t), \quad \psi^+(z) = \frac{d^n \Phi^+(z)}{dz^n}. \quad (6')$$

Представления для производных меньших порядков и самой функции  $\Phi^+(z)$  получим путем последовательного интегрирования по  $z$ . Известно [2], что

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_L \mu(\tau) (\tau - z)^{n-1} \ln \left( 1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{k!} z^k. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя выражение для функции  $\Phi^+(z)$  и ее производных в (5), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau &= e^{\Gamma^+(z)} P_*(z) - \lambda F \left( z, \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mu(\tau) \times \right. \\ &\times (\tau - z)^{n-1} \ln \left( 1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{k!} z^k, \dots, - \\ &\left. - \frac{1}{2\pi i} \int_L \mu(\tau) \ln \left( 1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau + c_{n-1} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Задачи (5) и (8) равносильны в том смысле, что каждому решению уравнения (8) соответствует решение уравнения (5) по формуле (6) и наоборот; каждому решению уравнения (5) согласно (6') соответствует решение уравнения (8), причем последнее определяется с точностью до слагаемого  $\psi^-(t)$ , представляющего краевое значение аналитической функции в  $D^-$ . Скажем [4, 5], что

$$\begin{aligned} \mu(t) &\in H_N(\omega), \quad t \in L, \text{ если } |\mu(t)| \leq N, \quad t \in L, \\ |\mu(t_1) - \mu(t_2)| &\leq N \omega(|t_1 - t_2|), \quad t_1, t_2 \in L. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Если  $F$  удовлетворяет условию (2) и  $N > N_0$ ,  $N_0$  — определенная постоянная, то уравнение (3) при малых  $|\lambda|$  разрешимо.

**Теорема 2.** Если  $F$  удовлетворяет условию (2) и  $x \geq 0$ , то задача (1) разрешима.

§ 2. Решение задачи (1) зависит от  $n+x+1$  свободных параметров. Поэтому после того, как установлена разрешимость задачи, естественно возникает вопрос о характере произвола этих параметров, т. е. необходимо выяснить вопрос зависимости решения задачи (1) от входящих в него свободных  $n+x+1$  параметров. С этой целью аналогично тому, как ставится задача Коши для дифференциального уравнения, поставим следующую задачу. Найти решение задачи (1), удовлетворяющее условиям

$$\left. \frac{d^k \Phi^+(z)}{dz^k} \right|_{z=z_0} = a_k, \quad k = \overline{0, n+x}, \quad z_0 \in D^+. \quad (9)$$

Не нарушая общности рассуждений, можно принять  $z_0 = 0$ . Нелинейные краевые задачи теории аналитических функций с некоторыми дополнительными условиями рассматривались ранее в работах [6, 7].

Удовлетворения решения  $\Phi^+$  условиям

$$\left. \frac{d^k \Phi^+(z)}{dz^k} \right|_{z=0} = a_k, \quad k = \overline{0, n-1},$$

можно добиться выбором параметров  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ .

Для этого достаточно положить

$$c_k = a_k + \frac{(-1)^n k!}{(n-1)!} \frac{\beta_k}{2\pi i} \int_L \mu(\tau) \tau^{n-k-1} d\tau, \quad (10)$$

где

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_k = \frac{1}{k} - \frac{C_{n-1}^1}{k-1} + \frac{C_{n-1}^2}{k-2} - \dots + \frac{(-1)^{k-1} C_{n-1}^{k-1}}{1}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Тогда представление  $\Phi^+(z)$  примет вид [2]:

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mu(\tau) [(\tau - z)^{n-1} \ln \left( 1 - \frac{z}{\tau} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \tau^{n-k-1} z^k] d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!} z^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая последнее уравнение (8) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau = Q_*(z) - \lambda F \left( z, \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mu(\tau) \times \right.$$



$$\times \left[ (\tau - z)^{n-1} \ln \left( 1 - \frac{z}{\tau} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \tau^{n-k-1} z_k \right] d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!} z^k, \dots \quad (12)$$

где

$$Q_*(z) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(z), \quad \varphi_i(z) = e^{\tau^+(z)} z^i.$$

Под  $\ln \left( 1 - \frac{z}{\tau} \right)$  поднимается ветвь, исчезающая при  $z=0$ .

Для удобства оператор, определяемый функцией

$$F \left( z, \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mu(\tau) \left[ (\tau - z)^{n-1} \ln \left( 1 - \frac{z}{\tau} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \tau^{n-1-k} z^k \right] d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!} z^k, \dots \right),$$

обозначим  $F$ .

Таким образом, задача (5), (9) переходит в следующую задачу. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau = Q_*(z) - \lambda F_*, \quad z \in D^+, \quad (12')$$

удовлетворяющее условиям

$$\frac{\kappa!}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau^{\kappa+1}} d\tau = a_{n+\kappa}, \quad \kappa = \overline{0, n}. \quad (13)$$

Или, что то же, требуется найти функцию  $\mu(t)$  и обобщенный полином  $Q_*(z)$ , удовлетворяющие соотношению

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau = Q(z) - \lambda F_*, \quad z \in D^+,$$

и условиям

$$\frac{d^\kappa Q_*(z)}{dz^\kappa} \Big|_{z=0} = a_{n+\kappa}^*, \quad (13')$$

где

$$a_{n+\kappa}^* = a_{n+\kappa} + \lambda \frac{d^{n+\kappa}}{dz^{n+\kappa}} F_* \Big|_{z=0}, \quad \kappa = \overline{0, n}.$$

**Лемма 1.** Система функций  $\varphi_i(z)$ ,  $i = \overline{0, n}$  — фундаментальная система решений.

Учитывая лемму 1, условия (13) позволяют по функции построить обобщенный полином. Обозначим его через  $Q_*(z, \mu)$ .

**Лемма 2.** Если  $\mu(t) \in H_N(\omega)$ , то

$$\max_{z \in D^+} |Q_*(z, \mu)| \leq B \left\{ \max_{\kappa = \overline{0, n}} \frac{a_{n+\kappa}}{k!} + |\lambda| AN(A_1 + B \max_k |a_k|) \right\},$$

где  $B$  и  $A$  — постоянные, независимые от  $N$ . Постоянная  $B$  полностью определяется областью  $D^+$ ,

**Лемма 3.**

$$\|Q(z, \mu_1) - Q(z, \mu_2)\|_C \leq |\lambda| A A_2 \|\mu_1 - \mu_2\|_C, \quad A_2 = \text{const}.$$

По функции  $\mu(t) \in H_N(\omega)$  построим полином  $Q_*(z, \mu)$ . Принимая во внимание (12') и формулы Сохоцкого, находим

$$\mu(t) = Q_*(t, \mu) - \lambda F(t) \mu - \psi_1(t), \quad t \in L, \quad (14)$$

где  $F(t) \mu$  означает значение преобразованной функции в точке  $t \in L$ ,  $\psi_1(t)$  — краевое значение аналитической в области  $D^-$  функции, подчиненной единственному ограничению  $\psi_1^-(\infty) = 0$ . Произвольно фиксируем  $\psi_1^-(t)$  и рассмотрим оператор

$$A_\mu \equiv Q_*(t, \mu) - \lambda F(t) \mu - \psi_1^-(t).$$

Здесь же отметим одно важное свойство оператора  $A$ . Согласно построению функции

$$\psi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\nu(t)}{t - z} dz, \quad \nu(t) = A_\mu(t),$$

удовлетворяет условиям (13). На основе принципа сжатых отображений доказывается утверждение.

**Теорема 3.** Если  $F$  удовлетворяет условию (2)  $N \geq N_1$  ( $N_1$  — вполне определенная постоянная), то при малых  $|\lambda|$  существует решение уравнения (14), которое определяется с точностью до слагаемого, являющегося краевым значением аналитической в области  $D^-$  функции, обращающейся на бесконечности в нуль.

Опираясь на теорему 3, можно установить справедливость основного утверждения.

**Теорема 4.** Если функция  $F(t, u_0, \dots, u_{n-1})$  удовлетворяет условию (2), то при малых  $|\lambda|$  существует единственное решение задачи (1), удовлетворяющее условиям

$$\frac{d^\kappa \Phi^+(z)}{dz^\kappa} \Big|_{z=z_0} = a_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, n}, \quad z_0 \in D^+.$$

**Замечание 1.** Предположение  $\kappa = \text{ind } G(t) \geq 0$  в наших рассуждениях существенно. В случае  $\kappa < 0$  вопрос остается открытым.

**Замечание 2.** Задача:

$$P(t) \frac{d\Phi^+}{dz} + q(t) \Phi^+ + q(t) = \Phi^-(t), \quad (*)$$

где функции  $P(t)$  и  $q(t)$  аналитически продолжимы на область  $D^+$ , является частным случаем задачи (1) и ее исследование может быть проведено непосредственно. Заметим, что в работе [8] рассматривался частный случай задачи (\*), когда  $p(t) = t^n$ ,  $q(t) = t^m$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. Н. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
3. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964.
4. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Тр. Московского матем. об-ва, 5, 1956.
5. Бабаев А. А. Уч. зап. АГУ им. С. М. Кирова, серия физ.-матем. наук, 1963, № 4.
6. Аржанов Г. В. Сибирский матем. ж., т. 2, 1961, № 4.
7. Абдурагимов М. А. Уч. зап. АГУ им. С. М. Кирова, серия физ.-матем. наук, 1967, № 5.
8. Усманов Н. ДАН Таджик. ССР, 11, 1968, № 9.

Поступило 1. XII 1971

Дагестанский госуниверситет  
им. В. И. Ленина



Ф. А. ТАГИЕВ, А. М. ГУСЕЙНОВ

# ОБ ОДНОМ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛАВРЕНТЬЕВА—БИЦАДЗЕ

Рассмотрим для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \theta(x_2) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\theta(x_2)=1$  при  $x_2>0$  и  $\theta(x_2)=-1$  при  $x_2<0$  в области  $D$ , ограниченной в верхней полуплоскости (при  $x_2 \geq 0$ ) гладкой линией  $\Gamma$  с концами  $A(0, 0)$  и  $B(1, 0)$ , а в нижней—кусками характеристик  $L_1: x_1 + x_2=0$  и  $L_2: x_1 - x_2=1$ , задачу о нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям:

$$u|_{\Gamma} = \varphi, \quad (2)$$

$$u|_{L_i} = \psi. \quad (3)$$

Функция  $\tau(x_1)=u(x_1, 0)$  должна быть непрерывной на отрезке  $0 \leq x_1 \leq 1$ .

Кроме того, функции  $v(x_1) = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0}$  и  $\frac{d\tau}{dx_1}$  должны быть

непрерывны и дифференцируемы на открытом отрезке  $0 < x_1 < 1$ . Существование и единственность точного решения предполагаются.

Прежде всего легко видеть, что (1) и (3) непосредственно определяют в нижней части области  $D(D')$  значение  $\frac{\partial u}{\partial l}$ , где  $\vec{l}(-1, 1)$ . В частности, находится

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\varphi_1 \quad (4)$$

и поэтому для определения  $u(x_1, x_2)$  в верхней части области  $D(D')$  имеют место условия (1), (2) и (4).

Если из них найдем  $u(x_1, x_2)$  в  $D'$ , то по значениям  $u(x_1, 0)$ , очевидно, определим  $u(x_1, x_2)$  в  $D''$  квадратурой.

Для решения применим метод конечных разностей.

Проведем два семейства параллельных прямых:  $x_1=i_1h_1$  и  $x_2=i_2h_2$ . Обозначим через  $\omega_h^0$  множество всех регулярных узлов, а через  $\omega_h$ —множество всех нерегулярных узлов полученной сети. Обозначим  $\gamma_h$  множество узлов, расположенных на линии  $\gamma$ . Точки пересечения прямых  $x_1=i_1h_1$ ,  $x_2=i_2h_2$  с границей  $\Gamma$  обозначим через  $\Gamma_h$ . Таким образом, области  $D'+\Gamma+\gamma$  ставится в соответствие сетка  $\bar{\omega}_h = \omega_h^0 + \omega_h + \Gamma_h + \gamma_h$ .

Перейдем теперь к построению разностного аналога задачи (1), (2) и (4). Оператор Лапласа  $\Delta u$  в регулярных узлах заменим разностным оператором:

$$\Delta u = \Delta_1 u + \Delta_2 u. \quad (5)$$

Здесь  $\Delta_1 u$  и  $\Delta_2 u$ —соответственно, аппроксимации частных производных  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ :

$$\Delta_1 u = \frac{u(x_1 + h_1, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 - h_1, x_2))}{h_1^2} \sim \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

$$\Delta_2 u = \frac{u(x_1, x_2 + h_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 - h_2))}{h_2^2} \sim \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

А в нерегулярных узлах оператор Лапласа  $\Delta u$  заменим другим разностным оператором:

$$\Lambda^* u = \Lambda_1^* u + \Lambda_2^* u. \quad (6)$$

Здесь

$$\Lambda_1^* u = \frac{1}{h_1^*} \left[ \frac{u(x_1 + h_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{h_1} - \frac{u(x_1, x_2) - u(x_1 - h_1^-, x_2)}{h_1^-} \right],$$

$$\Lambda_2^* u = \frac{1}{h_2^*} \left[ \frac{u(x_1, x_2 + h_2^-) - u(x_1, x_2)}{h_2^-} - \frac{u(x_1, x_2) - u(x_1, x_2 - h_2)}{h_2} \right],$$

В этих выражениях  $h_1^-$ ,  $h_2^-$  обозначают соответственно расстояния между узлами 0 и 3, 0 и 2;

$$h_1^* = 0,5(h_1 + h_1^-), \quad h_2^* = 0,5(h_2 + h_2^-).$$

Возьмем разностные операторы:

$$\lambda_1 u = \frac{1}{h_1} [u(x_1, 0) - u(x_1 - h_1, 0)] \quad \lambda_2 u = \frac{1}{h_2} [u(x_1, h_2) - u(x_1, 0)].$$

Используя теорему Шварца и уравнение (4), можно показать, что

$$\Lambda' u = \bar{\varphi}_1 + O(h^2). \quad (7)$$

Здесь

$$\Lambda' u = \lambda_2 u - \lambda_1 u - \frac{h_1 + h_2}{2} \lambda_1 \lambda_2 u \quad \text{и} \quad \bar{\varphi}_1 = \varphi_1, \quad h^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

Легко можно показать, что

$$|\Lambda u - \Delta u| = O(h^2), \quad |\Lambda^* u - \Delta u| = O(h). \quad (8)$$

Сформулируем разностную задачу, соответствующую задаче (1), (2) и (4). Приближенное решение обозначим через  $y$ . Учитывая (5), (6) и (7), получим разностные задачи соответствующих задач (1), (2) и (4):

$$\left. \begin{aligned} \Lambda y &= 0, & x \in \omega_h^0 \\ \Lambda^* y &= 0, & x \in \omega_h^* \\ \Lambda' y &= \bar{\varphi}_1, & x \in \gamma_h \\ y|_{\Gamma_h} &= \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Возникают два вопроса:

1) о разрешимости задачи, т. е. о существовании решения системы алгебраических уравнений (9);

2) о сходимости и точности схемы (9).

Рассмотрим задачу (9). Пусть  $O$ —регулярный узел. Тогда из уравнения  $\Delta u=0$  следует

$$2 \left[ \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right] y_0 = \frac{1}{h_1^2} (y_1 + y_2) + \frac{1}{h_2^2} (y_3 + y_4). \quad (10)$$



Допустим  $O$  — нерегулярный узел. Тогда из уравнения  $\Delta^* u = 0$  будем иметь

$$2 \left[ \frac{1}{h_1 h_1^-} + \frac{1}{h_2 h_2^-} \right] y^0 = \frac{1}{h_1^* h_1} y_1 + \frac{1}{h_2^* h_2} y_4 + \varphi_0, \quad (11)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{1}{h_1^* h_1^-} \varphi(3) + \frac{1}{h_2^* h_2^-} \varphi(2).$$

Допустим, что  $h_1 = h_2 = h$ . Тогда из третьего уравнения (9) получим следующее:

$$\frac{1}{h} y_0 = \frac{1}{h} y_1 - \bar{\varphi}_1. \quad (12)$$

Согласно (10) и (11) обе формулы могут быть записаны в виде

$$A(x) y(x) = \sum_{\xi \in T(x)} B(x, \xi) y(\xi) + F(x)$$

для всех  $x \in \omega_h^0 + \omega_h^*$ , где суммирование проводится по всем узлам шаблона с центром в узле  $x$ , исключая сам узел.

Коэффициенты  $A(x)$  и  $B(x, \xi)$  удовлетворяют условиям

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad \sum_{\xi \in T(x)} B(x, \xi) = A(x), \quad x \in \omega_h^0.$$

Если  $y|_{\Gamma_h} = 0$ , то по крайней мере один из коэффициентов  $B(x, \xi)$  в пограничной зоне  $\omega_h^*$  можно формально положить равным нулю, так что

$$\sum_{\xi} B(x, \xi) = A(x) - D(x), \quad D(x) > 0.$$

Можно проверить, что если  $y|_{\Gamma_h} = 0$ , то в  $\omega_h^*$  всегда выполняется условие

$$D(x) \geq \frac{1}{h^2}. \quad (13)$$

Таким образом, получаем следующую задачу, которая эквивалентна разностной задаче (9):

$$\left. \begin{aligned} A(x) y(x) &= \sum_{\xi \in T(x)} B(x, \xi) y(\xi) + F(x), \\ A(x) &> 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad \sum_{\xi} B(x, \xi) \leq A(x), \\ \frac{1}{h} y_0(x) &= \frac{1}{h} y_1(x) + F_1(x), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$F_1(x) = -\bar{\varphi}_1(x).$$

Если  $F(x) \leq 0$ ,  $x \in \omega_h = \omega_h^0 + \omega_h^*$  и  $F_1(x) \leq 0$ ,  $x \in \Gamma_h$ , то решение задачи (14) (не равное постоянной) не может принимать наибольшего положительного значения в узлах сетки  $\omega_h + \Gamma_h$ . Если же  $y(x) \neq \text{const}$  и  $F(x) \geq 0$ ,  $x \in \omega_h$ ;  $F_1(x) \geq 0$ ,  $x \in \Gamma_h$ , то  $y(x)$  не может принимать в  $\omega_h + \Gamma_h$  наименьшего отрицательного значения.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы.

Допустим обратное. Пусть  $\exists \bar{x} \in \omega_h + \Gamma_h$ ,  $y(\bar{x}) = \max y(x)$ .

1.  $\bar{x} \in \omega_h$ . Тогда  $\exists \bar{\xi} \in T(\bar{x})$ ,  $y(\bar{\xi}) < y(\bar{x}) = M_0$ .

Первое уравнение (14) в узле  $\bar{x}$  перепишем в виде

$$[A(\bar{x}) - \sum_{\xi \in T(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)] y(\bar{x}) + \sum_{\xi \in T(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi) [y(\bar{x}) - y(\bar{\xi})] = F(\bar{x}). \quad (15)$$

Так как

$$\sum_{\xi} B(\bar{x}, \xi) [y(\bar{x}) - y(\bar{\xi})] \geq B(\bar{x}, \bar{\xi}) [y(\bar{x}) - y(\bar{\xi})] > 0,$$

то из (14) и (15) следует  $F(\bar{x}) > 0$ , что противоречит условию  $F(x) \leq 0$ .

2.  $\bar{x} \in \Gamma_h$ . Тогда  $y_1(\bar{x}) < y_0(\bar{x})$ .

Из последнего уравнения (14) получим

$$0 < \frac{1}{h} y_0(\bar{x}) - \frac{1}{h} y_1(\bar{x}) = F_1(\bar{x}),$$

а это противоречит условию  $F_1(x) \leq 0$ .

Вторая часть доказывается аналогично.

Следствие 1. Если  $F(x) \geq 0$ ,  $x \in \omega_h$ ;  $F_1(x) \geq 0$ ,  $x \in \Gamma_h$  и  $y|_{\Gamma_h} \geq 0$ ,

то решение задачи (14) неотрицательно.

Следствие 2. Если  $F(x) \leq 0$ ,  $x \in \omega_h$ ;  $F_1(x) \leq 0$ ,  $x \in \Gamma_h$  и  $y|_{\Gamma_h} \leq 0$ ,

то  $y(x) \leq 0$  для всех  $x \in \omega_h$ .

Следствие 3. Однородная задача:

$$\left. \begin{aligned} A(x) y(x) &= \sum_{\xi \in T(x)} B(x, \xi) y(\xi), \quad x \in \omega_h \\ \frac{1}{h} y_0(x) &= \frac{1}{h} y_1(x), \quad x \in \Gamma_h \\ y|_{\Gamma_h} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

имеет только тривиальное решение.

Таким образом, разностная задача (14) имеет единственное решение.

Следствие 4. Для решения однородной задачи (16) верна оценка

$$\|y\|_0 \leq \|y\|_{0,\Gamma}$$

где

$$\|y\|_0 = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|, \quad \|y\|_{0,\Gamma} = \max_{x \in \Gamma_h} |y(x)|.$$

Теорема 2. Пусть  $y(x)$  — решение уравнения (14), а  $\bar{y}(x)$  — решение того же уравнения с правой частью  $\bar{F}(x) \geq 0$ ,  $\bar{F}_1(x) \geq 0$  и граничным значением  $\bar{y}|_{\Gamma_h} \geq 0$ . Если выполнены условия

$$|F(x)| \leq \bar{F}(x), \quad x \in \omega_h; \quad |F_1(x)| \leq \bar{F}_1(x), \quad x \in \Gamma_h \text{ и } |y(x)| \leq \bar{y}(x), \quad x \in \Gamma_h,$$

то  $|y(x)| \leq \bar{y}(x)$  для всех  $x \in \omega_h$ .

Доказательство. Следствие 1 сразу дает  $y(\bar{x}) \geq 0$ ,  $\forall x \in \omega_h$ . Функции  $u = \bar{y} + y$ ,  $v = \bar{y} - y$  удовлетворяют уравнению (14) с правыми частями  $F_u = \bar{F} + F$ ,  $F_{1u} = \bar{F}_1 + F_1$ ;  $F_v = \bar{F} - F$ ,  $F_{1v} = \bar{F}_1 - F_1$  и граничными значениями  $u|_{\Gamma_h} = (\bar{y} + y)|_{\Gamma_h}$ ,  $v = (\bar{y} - y)|_{\Gamma_h}$ . Очевидно, что  $F_u \geq 0$ ,  $F_{1u} \geq 0$ ,  $u|_{\Gamma_h} \geq 0$  и  $F_v \geq 0$ ,  $F_{1v} \geq 0$ ,  $v|_{\Gamma_h} \geq 0$ , тогда в силу следствия 1  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$ . Отсюда видно, что  $|y(x)| \leq \bar{y}(x)$  при  $x \in \omega_h$ .



Рассмотрим следующую задачу:

$$\left. \begin{aligned} A(x)y(x) &= \sum_{\xi \in T(x)} B(x, \xi) y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h^* \\ A(x)y(x) &= \sum_{\xi \in T(x)} B(x, \xi) y(\xi), \quad x \in \omega_h^0 \\ \frac{1}{h} y_0(x) &= \frac{1}{h} y_{01}(x), \quad x \in \gamma_h \\ y|_{\Gamma_h} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Покажем, что если выполняются условия

$$B(x, \xi) > 0, \quad \sum_{\xi \in T(x)} B(x, \xi) = A(x) - D(x), \quad x \in \omega_h$$

и

$$D(x) \geq \delta > 0, \quad x \in \omega_h^*; \quad D(x) \geq 0, \quad x \in \omega_h^0,$$

то для решения задачи (17) верна оценка

$$\|y\|_0 \leq \frac{1}{\delta} \|F\|_0. \quad (17')$$

В силу теоремы сравнения  $|y| \leq \bar{y}$ , где  $\bar{y}(x)$  — решение задачи (17) с правой частью  $\bar{F} = |F|$ . Пусть  $\bar{y}(x)$  принимает наибольшее значение в узле  $\bar{x}$ . Легко видеть, что  $\bar{x} \in \omega_h^*$ . Из первого уравнения (17) получим

$$A(\bar{x})\bar{y}(\bar{x}) \leq [A(\bar{x}) - D(\bar{x})]\bar{y}(\bar{x}) + \bar{F}(\bar{x}),$$

$$\|y\|_0 \leq \bar{y}(\bar{x}) \leq \frac{|F(\bar{x})|}{D(\bar{x})} \leq \frac{1}{\delta} \|F\|_0.$$

А теперь оценим погрешность приближенного решения задачи. Для отыскания  $z(x) = y(x) - u(x)$  из (9) получаем следующую задачу:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda z &= -\psi, \quad \psi = \Lambda u, \quad x \in \omega_h^0 \\ \Lambda^* z &= -\psi^*, \quad \psi^* = \Lambda^* u, \quad x \in \omega_h^* \\ \Lambda' z &= -\psi'; \quad \psi' = \Lambda' u - \varphi_1, \quad x \in \gamma_h \\ z|_{\Gamma_h} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Представим  $z(x)$  в виде суммы:  $z(x) = z^*(x) + z^0(x)$ , где  $z^*$  и  $z^0$  — решение задачи

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^* z^* &= -\psi^*, \quad x \in \omega_h^* \\ \Lambda z^* &= 0, \quad x \in \omega_h^0 \\ \Lambda' z^* &= 0, \quad x \in \gamma_h \\ z^*|_{\Gamma_h} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \Lambda^* z^0 &= 0, \quad x \in \omega_h^* \\ \Lambda z^0 &= -\psi, \quad x \in \omega_h^0 \\ \Lambda' z^0 &= -\psi', \quad x \in \gamma_h \\ z^0|_{\Gamma_h} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Очевидно, что для первой задачи выполняются условия

$$D(x) \geq \frac{1}{h^2} = \delta > 0, \quad x \in \omega_h^* \text{ и } D(x) \geq 0, \quad x \in \omega_h^0.$$

Пользуясь (17'), получаем

$$\|z^*\|_0 \leq h^2 \|\psi^*\|_0. \quad (19)$$

Для оценки решения второй задачи воспользуемся теоремой сравнения. Построим мажорантную функцию

$$U(x_1, x_2) = \kappa_1(l^2 - x_2^2) + \kappa_2 x_1,$$

где

$$l = \sup_{x_2 \in D'} \{x_2\}, \quad \kappa_1 = \text{const} > 0, \quad \kappa_2 = \text{const} > 0.$$

Легко проверить, что

$$\Lambda U = \Lambda^* U = -2\kappa_1, \quad x \in \omega_h$$

и

$$\Lambda' U = -(h\kappa_1 + \kappa_2), \quad x \in \gamma_h.$$

Выберем  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  так, чтобы было

$$2\kappa_1 \geq \|\psi\|_0 \text{ и } h\kappa_1 + \kappa_2 \geq \|\psi'\|_0.$$

Для этого достаточно положить

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \|\psi\|_0 \text{ и } \kappa_2 = \|\psi'\|_0.$$

Учитывая, что  $U(x_1, x_2) \geq 0$  при  $x \in \Gamma_h$ ,  $U \leq \kappa_1 \cdot l^2 + \kappa_2$  и пользуясь теоремой сравнения, находим

$$\|z^0\|_0 \leq \frac{l^2}{2} \|\psi\|_0 + \|\psi'\|_0. \quad (20)$$

Объединяя неравенства (19) и (20) и учитывая, что

$$\|z\|_0 \leq \|z^0\|_0 + \|z^*\|_0,$$

получаем

$$\|z\|_0 \leq h^2 \|\psi^*\|_0 + \frac{l^2}{2} \|\psi\|_0 + \|\psi'\|_0. \quad (21)$$

Учитывая (7) и (8), получим

$$\|z\|_0 = O(h^2). \quad (22)$$

Теорема 3. При  $m \rightarrow \infty$  и при достаточно малом  $h > 0$  и произвольном  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_p^0$

$$y_i^{(m)} \rightarrow y_i, \quad i = \overline{1, p}.$$

Доказательство. Ошибку для  $m$ -го приближения обозначим через

$$V_i^{(m)} = y_i - y_i^{(m)}$$

Очевидно, что  $V_i^{(m)}$  удовлетворяет однородному уравнению

$$V^{(m)} = \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} V_j^{(m)} + \sum_{j=1+i}^p r_{ij} V_j^{(m-1)}.$$

Обозначим

$$\max \{ |V_1^{(0)}|, |V_2^{(0)}|, \dots, |V_p^{(0)}| \} = A. \quad (23)$$

Учитывая (9), для регулярных и нерегулярных узлов в силу (23) будем иметь:

$$\begin{aligned} |V_i^{(1)}| &\leq \left(1 - \frac{1}{4^p}\right) \cdot A, \\ |V_i^{(m)}| &\leq \left(1 - \frac{1}{4^p}\right)^m \cdot A. \end{aligned} \quad (24)$$

А для узлов, находящихся на линии вырождения, учитывая (9), в силу (24) получим

$$|V_i^{(m)}| \leq \left(1 - \frac{1}{4^p}\right)^m \cdot A.$$

Следовательно, для всех узлов  $\omega_h^0 + \omega_h^* + \gamma_h$  будет

$$|V_i^{(m)}| \leq \left(1 - \frac{1}{4^p}\right)^m \cdot A.$$

Отсюда при

$$m \rightarrow \infty \quad V_i^{(m)} \rightarrow 0.$$



# ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. „Уравнения математической физики“, Изд-во „Наука“, 1966.
2. Бицадзе А. В. „Уравнения смешанного типа“. Изд-во „Мир“, 1959.

АГУ ил. С. М. Кирова

Поступило 16. XII 1970

Ф. Э. Тагыйев, А. М. Нусеинов

## Бир сонлу фэргли үсул илэ Лаврентијев-Битсадзе мәсәләсинин һәлли

### ХУЛАСӘ

Ишдә Лаврентјев—Битсадзе мәсәләси јүксәк оппроксимасијалы сонлу фэргләр үсулу илэ һәлл едилмишдир. Тәғриби һәллин варлығы, јекәнәлији вә онун дәгиг һәллә  $O(h^k)$  тәртибдән јығылмасы исбат слунмушдур.

Алынмыш сонлу фэргли тәнликләрин Зейдел үсулу илэ һәлли әсәсләндирилмышдыр.

Ф. А. Tagiyev, А. М. Nuseynov

## On one difference method for the solution of a Lavrentyev Bitsadze problem

### SUMMARY

The purpose of this paper is the approximate solution of a Lavrentyev—Bitsadze problem for the partial differential equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \theta(x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.$$

Thus the equation is elliptic parabolic or hyperbolic according  $x_2 > 0$ ,  $x_2 = 0$  or  $x_2 < 0$ .

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ  
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1972, № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
Серия физико-технических и математических наук, 1972, № 3

УДК 51

А. М. ГУСЕЙНОВ

## ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ К РАСЧЕТУ ПЛИТ-ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Плиты переменной толщины в последние годы широко применяются в качестве междуэтажных перекрытий. Расчет таких плит-оболочек имеет большое практическое значение.

Применяя метод начальных функций и используя основные уравнения теории упругости, В. З. Власов получил приближенные выражения компонентов перемещений и напряжений через начальные функции перемещений  $U_0(x, y)$ ,  $V_0(x, y)$  и  $W_0(x, y)$  [1]. В полученных формулах начальные статические величины  $X_0$ ,  $Y_0$  и  $Z_0$  считаются заданными в плоскости  $z = 0$ .

Предположим, что плита-оболочка свободна от внешних нагрузок на криволинейной поверхности, а в плоскости  $z = 0$  действует равномерно распределенная нормальная нагрузка интенсивностью  $Z_0 = -q = \text{const}$ ,  $X_0 = 0$ ,  $Y_0 = 0$ . Подставляя выражения напряжений, приведенные в [2], в дифференциальные уравнения [1], получим систему разрешающих дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно искомых функций  $U_0(x, y)$ ,  $V_0(x, y)$ ,  $W_0(x, y)$ .

Точное решение этой краевой задачи для плит произвольно заданной переменной толщины  $h = h(x, y)$  представляет весьма сложную математическую проблему. Поэтому для решения исходной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами используем метод малого параметра.

Пусть функция толщины меняется по закону

$$h(x, y) = h_0 [1 + \varepsilon f(x, y)], \quad (1)$$

где

$$h_0 \text{ — средняя толщина } \left( y_0 = \frac{h_{\max} + h_{\min}}{2} \right),$$

$$\varepsilon \text{ — малый параметр } \left( \varepsilon = \frac{h_{\max} - h_{\min}}{h_{\max} + h_{\min}} \right),$$

$f(x, y)$  — безразмерная функция.

Решение исходной системы принято в виде разложений по малому параметру:

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= U_0^{(0)} + \varepsilon U_0^{(1)} + \varepsilon^2 U_0^{(2)} + \dots + \varepsilon^n U_0^{(n)}, \\ V_0 &= V_0^{(0)} + \varepsilon V_0^{(1)} + \varepsilon^2 V_0^{(2)} + \dots + \varepsilon^n V_0^{(n)}, \\ W_0 &= W_0^{(0)} + \varepsilon W_0^{(1)} + \varepsilon^2 W_0^{(2)} + \dots + \varepsilon^n W_0^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Подставляя (2) в исходную систему [2] и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим бесконечную систему зацепляющихся дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Далее, вводя обобщенные функции перемещений  $\varphi_n^I(x, y)$ ,  $\varphi_n^{II}(x, y)$  и  $\varphi_n^{III}(x, y)$ , систему зацепляющихся дифференциальных уравнений преобразуем к виду:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \varphi_n^I &= \frac{3(1-\nu)^2}{h_0^2} F_1^{(n)}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \varphi_n^{II} &= \frac{3(1-\nu)^2}{h_0^2} F_2^{(n)}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \varphi_n^{III} &= \frac{3(1-\nu)^2}{h_0^2} F_3^{(n)}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Выражения функции  $F_1^{(n)}$ ,  $F_2^{(n)}$ ,  $F_3^{(n)}$ , входящих в правые части системы (3), приведены в работе [2].

Начальные функции перемещений определяются через  $\varphi_n^I$ ,  $\varphi_n^{II}$  и  $\varphi_n^{III}$  посредством соотношений:

$$\left. \begin{aligned} U_0^{(n)} &= \frac{h_0}{3(1-\nu)^2} \nabla^2 \nabla^2 \left[ \frac{\partial^2 \varphi_n^I}{\partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \varphi_n^I}{\partial x^2} + (\nu-2) \frac{\partial^2 \varphi_n^{III}}{\partial x \partial y} + \right. \\ &\quad \left. + 3(1-\nu) \frac{\partial \varphi_n^{III}}{\partial x} \right], \\ U_0^{(n)} &= \frac{h_0}{3(1-\nu)^2} \nabla^2 \nabla^2 \left[ \frac{\partial^2 \varphi_n^I}{\partial x \partial y} (\nu-2) + \frac{\partial^2 \varphi_n^{II}}{\partial x^2} - (1-\nu) \frac{\partial^2 \varphi_n^{II}}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + 3(1-\nu) \frac{\partial \varphi_n^{III}}{\partial y} \right], \\ W_0^{(n)} &= \frac{1}{(1-\nu)} \nabla^2 \nabla^2 \left[ -\frac{\partial \varphi_n^I}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_n^{II}}{\partial y} + 2\varphi_n^{III} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Тогда решениями  $n$ -ой системы (3), удовлетворяющими шарнирному опиранию по всему контуру, соответственно будут:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n^I &= \sum_m \sum_n A_{mn}^I \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \varphi_n^{II} &= \sum_m \sum_n A_{mn}^{II} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ \varphi_n^{III} &= \sum_m \sum_n A_{mn}^{III} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$A_{mn}^I = \frac{C_{mn}^I}{\Delta}, \quad A_{mn}^{II} = \frac{C_{mn}^{II}}{\Delta}, \quad A_{mn}^{III} = \frac{C_{mn}^{III}}{\Delta};$$

$$C_{mn}^I = \frac{12(1-\nu)^2}{h_0^2 ab} \int_0^a \int_0^b F_1^{(n)} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy,$$

$$C_{mn}^{II} = \frac{12(1-\nu)^2}{h_0^2 ab} \int_0^a \int_0^b F_2^{(n)} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy,$$

$$C_{mn}^{III} = \frac{12(1-\nu)^2}{h_0^2 ab} \int_0^a \int_0^b F_3^{(n)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy,$$

$$\Delta = \frac{\pi^8}{a^8} (m^2 + c^2 n^2)^4, \quad c = \frac{a}{b}.$$

После определения обобщенных функций  $\varphi_n^I$ ,  $\varphi_n^{II}$  и  $\varphi_n^{III}$  находим начальные функции перемещений по формулам (4), а толщину плиты-оболочки в любом сечении, перемещение и напряжение можно найти по формулам, приведенным в работе [2].

Числовой расчет плиты-оболочки произведен для следующих геометрических параметров:

$$\text{отношение стороны в плите } \frac{a}{b} = \frac{1}{2};$$

$$\text{толщина плиты } h_0 = \frac{a}{8}; \quad h_{\max} = 2h_{\min}; \quad \varepsilon = \frac{1}{3}.$$

Безразмерную функцию толщины можно принять в виде

$$f(x, y) = 1 - \frac{32}{a^2 b^2} (ax - x^2)(by - y^2).$$

Значения перемещений, вычисленных для сечения  $y = \frac{b}{2}$  в трех

приближениях, приведены в таблице в долях  $\frac{qa}{G}$ .

| $x/a$ | $W_0 = W_0^0$ | $W_0 = W_0^0 + \varepsilon W_0^1$ | $W_0 = W_0^{(0)} + \varepsilon W_0^{(1)} + \varepsilon^2 W_0^{(2)}$ |
|-------|---------------|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 0,1   | 8,177481439   | 13,374370388                      | 13,957801568                                                        |
| 0,2   | 15,452713409  | 25,074356460                      | 26,220461129                                                        |
| 0,3   | 21,114409399  | 34,320909222                      | 35,856263303                                                        |
| 0,4   | 24,702615225  | 40,076867611                      | 42,027050982                                                        |
| 0,5   | 25,930023595  | 41,841265904                      | 43,903759409                                                        |

#### ЛИТЕРАТУРА

- Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. Физматгиз, 1960.
- Ахундзаде М. Ю., Гусейнов А. М. Уч. зап. АзСХИ, 1972, № 5.

Азербайджанский политехнический институт

Поступило 4. V 1971

Э. М. Гусейнов

Дәјишән галынлыгы тава—габыгларын икигат тригонометрик сыралар үсүлү илэ һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә дәјишән галынлыгы тава—габыглары үчүн В. З. Власовун дәјишән әмсаллы дефференциал тәнликләри кичик параметрләр үсүлү илэ сабит әмсаллы сонсуз дефференциал тәнликләр системинә кәтирилир. Нәмин систем дефференциал тәнликләрин һәлли икигат тригонометрик сыралар үсүлү илэ ахтарылыр.



УДК 517.948:513.88:518

# АННОТАЦИЯ

К СТАТЬЕ „НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ БУБНОВА—ГАЛЕРКИНА ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА“

М. А. Велиев

Рассматривается предельная задача Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка:

$$A_0(t)u' = A_1(t)u + f(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

где  $A_0(t)$ ,  $A_1(t)$  суть самосопряженные положительно определенные операторы, действующие в вещественном гильбертовом пространстве. Предполагается, что области определения  $D(A_i)$  ( $i = 0, 1$ ) операторов  $A_i(t)$  ( $i = 0, 1$ ) не зависят от  $t$ , причем  $D(A_1) \subseteq D(A_0)$ . Нелинейный оператор  $f(t, u)$  определен на топологическом произведении  $[0, \infty) \times H$  и удовлетворяет некоторому условию  $(p)$  типа монотонности, но является более общим.

Доказывается, что процесс определения приближенного решения по методу Бубнова—Галеркина устойчив, если координатная система  $\{\varphi_k\} \subset D(A_1^{1/2})$  сильно минимальна в энергетическом пространстве оператора  $A_0(t)$ .

Результаты распространяются на более общие уравнения, содержащие самосопряженные линейные, а также нелинейные потенциальные операторы, и формулируются соответствующие теоремы об устойчивости процесса Бубнова—Галеркина.

Утверждается, что достаточные условия устойчивости процесса Бубнова—Галеркина, полученные ранее автором для начальной задачи Коши, справедливы и для сильноминимальных координатных систем.

Поступило 12. II 1972

Статья депонирована в ВИНТИ (Москва. А—219, ул. Балтийская, 14, отдел справочной информации ВИНТИ).

## ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

1. Рукопись представляется в редакцию в двух экземплярах, отпечатанная на машинке (не портативной) через два интервала, на белой бумаге, черной лентой. Страницы должны быть стандартного формата ( $21 \times 30$  см) и иметь четыре поля: верхнее и два боковых по 2,5 см, нижнее—3,0 см. Экземпляры машинописи через копировальную бумагу и плохо оформленные не принимаются. Объем статей в журнал не должен превышать 10 страниц машинописного текста и 3-х рисунков. К статьям, являющимся результатами работ, проведенных в институтах, обязательно должны быть приложены рекомендации соответствующих учреждений.

2. Формулы и обозначения следует вписывать от руки, четкими чернилами, тщательно, разборчиво и крупно (не следует печатывать буквы, сходные с русскими). Громоздкие и заумеренные формулы выделяются в отдельные строки, при этом номер ставится у правого края страницы. Желательно, чтобы нумеровались только те формулы, на которые имеются ссылки. Дроби в формулах, не выделяемых в отдельные строки, пишутся через косую черту ( $\frac{a}{b}$ ).

3. Во избежание недоразумений и ошибок следует ясное различие между заглавными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию, но отличающимися размером ( $P$  и  $p$ ,  $U$  и  $u$ ,  $W$ ,  $w$ ,  $K$  и  $k$ ,  $S$  и  $s$ ), для чего необходимо заглавные буквы подчеркнуть карандашом снизу двумя черточками (напр.  $\underline{\underline{S}}$ ), а строчные—двумя черточками сверху (напр.  $\overline{\overline{s}}$ ). Особое внимание следует обращать на аккуратное вписывание сходных по написанию латинских букв:  $h$  и  $n$ ,  $g$  и  $q$ ,  $l$  и  $a$ ,  $i$  и  $u$  и других. В рукописи букву  $J$  рекомендуется писать как римскую единицу (без точки над ней). Следует делать различие между буквами  $O$  большое,  $o$  малое и нулем, для чего буквы  $O$  и  $o$  подчеркивать двумя черточками:  $\underline{\underline{O}}$  и  $\underline{\underline{o}}$ . Штрихи необходимо четко отличать от единицы, а в нижних индексах—единицу от запятой. Особое внимание следует обращать на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: индексы помещать выше или ниже основной буквы и соответственно помечать дугами  $\frown$  и  $\smile$ . Трудноразличимые в рукописном обозначении буквы и знаки обязательно надо пояснить на полях. Векторы не помечать стрелкой сверху, а подчеркивать снизу жирной чертой. Греческие буквы следует сводить красным карандашом. Нумерация формул должна быть во всей статье сквозная.

4. Инициалы и фамилия автора указываются над заголовком статьи, название которой должно точно отражать содержание работы. В статье должно быть кратко изложено то новое и оригинальное, что получено авторами в их работе. Следует избегать повторений, излишних подробностей и известных положений (на которые можно сослаться в библиографии), промежуточных выводов формул и урав-



нений (приводить лишь окончательные формулы, пояснив, как они получены). Ссылки на опубликованные работы в тексте заключаются в квадратные скобки [ ]. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки прилагаются в двух экземплярах форматом не более  $13 \times 18$  см. Графики должны быть выполнены на кальке тушью, с минимальным количеством надписей (пояснения выносятся в подписи). Фотографии должны быть отпечатаны на глянцевой бумаге, контрастно, четко. Фоторепродукции из ранее изданных работ не принимаются. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи, номер рисунка и сделаны пометки „верх“, „низ“. Следует ограничиваться минимальным числом рисунков и фотографий, без которых невозможно понимание текста.

6. Цитируемая литература помещается в конце статьи с обязательным соблюдением следующего условия: для книг должны быть указаны фамилия автора, инициалы, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—фамилия автора, инициалы, название статей, журнал, том, номер, выпуск (или номер), год издания.

7. К статье необходимо приложить:

а) акт экспертизы,  
б) справку об авторе,  
в) авторскую справку,  
г) резюме на азербайджанском и английском языках, в которых предельно кратко должно быть изложено основное содержание работы (особенность постановки задачи, методика проведения исследований и основные результаты).

д) реферат.

8. В реферате должно быть изложено содержание статьи на 1,5—2 страницах машинописного текста, печатается в двух экземплярах в следующем порядке: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами только во второй экземпляр. В конце реферата сообщается о наличии таблиц и рисунков, в квадратных скобках указывается название учреждения, подпись автора и дата ставятся в левом углу на обоих экземплярах. В левом верхнем углу статьи и реферата следует указать индекс УДК.

9. Автору высылается одна корректура. Дополнения в тексте и исправления рисунков не допускаются. Исправленная корректура должна быть возвращена автором в редакцию в максимально короткий срок.

10. В случае одновременного представления двух и более статей необходимо указать порядок их опубликования.

11. При возвращении статьи автору для переработки, датой поступления считается дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати: после переработки она вновь рассматривается редколлегией. Редколлегия не сообщает мотивов отказа в публикации работы и оставляет за собой право не возвращать автору один экземпляр рукописи.

## МҮНДӘРИЧАТ

|                                                                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Г. М. Мəммədov (Хəјјами). Нјутон биному адланан дүстүр илк дəфə                                                                                                    | 3   |
| Өмər Хəјјам тəрəфиндэн верилмишдир                                                                                                                                 |     |
| М. Б. Рəһимov. Пермутасиялы операторун функцијасы . . . . .                                                                                                        | 9   |
| Г. В. Гончарова. Эластикијет нəзəријəсинин икинчи əсəс мəсəлəsi                                                                                                    | 13  |
| Һəллинин бəзи хүсүсийəтлəri                                                                                                                                        |     |
| М.-Б. Ə. Бабəјев. Əн җахшы җахынлашдыран функцијанын хəссəлəri һаггында                                                                                            | 20  |
| А. С. Маһмудов, Р. Р. Ахундов ( $a_n$ )—санки ортогонал системлэр һаггында                                                                                         | 27  |
| В. М. Мирсəлимov. Бирчинс олмајан кəркинлик сəһəсиндə эластик-пластик чисимлəрин тарəзлыг мəсəлəсинин биһармоник һəллəri һаггында . . . . .                        | 34  |
| Һ. Н. Ағəјев, А. М. Нүсəјнбəјова. Кəсилən əмсаллы параболлик диференциал тəнлик үчүн җарышыг мəсəлəнин сингуляр һəјəчанланмасынын арашдырылмасы                    | 39  |
| Р. Ə. Əлиханова, В. А. Ибраһимov. Орлич синифлəриндə кəсилən вə тез артан əмсаллы јүксəк тəртибли квазихəтти параболлик тəнлијин сəрһəd мəсəлəсинин һəлли һаггында | 45  |
| А. С. Рүстəмов. Тəкрар характеристикалы җарышыг типли бир тəнлик үчүн җарышыг мəсəлə                                                                               | 52  |
| М. Ə. Чəвадов, С. Р. Гəсымова. Комплекс матрислэр чəбри үзəриндə гурулан ермит квазигејриевклид фəзалары                                                           | 57  |
| Ч. Ə. Ахундов. Икинчи тəртиб абстракт квазихəтти гиперболик тəнлик үчүн далға оператору һаггында                                                                   | 63  |
| К. Ə. Кəримov. Эластик-пластик деформасияја уғрајан чевик мембрана нормал зəрбə мəсəлəсинин һəлли үчүн бир үсул . . . . .                                          | 69  |
| А. Н. Соловјов. Сəпилмə мəлуматлары васитəсилə потенциал оператор-функцијанын финит олмасы шəртлəri                                                                | 74  |
| К. Ə. Чəфəрли. Конусда үдəјишəнли һармоник функцијалар үчүн Фрагмент-Линделјоф типли јеканəлик теоремы                                                             | 79  |
| Н. Т. Аббасов, М. П. Зəмаховски. Квазисадə чəбрлэр үзəриндə эллиптик фəзалар                                                                                       | 86  |
| Г. Т. Нəсəнов, Б. О. Сəдыгов, Ə. Г. Мəһдијев. Сыхылмајан өзлү мајенин гејри-стационар һəрəкəтинə аид бир мəсəлə                                                    | 93  |
| Ф. Һ. Нəсибов. Там функцијаларын мүəјјан синифлəриндə экстремал мəсəлэлэр                                                                                          | 99  |
| Ə. Х. Шəмилов, Г. Т. Əһмədov. Гејри-хəтти сəрһəd шəртлəri олан бир системə квазихəттилəшдирмə методунун тəتبиги                                                    | 109 |
| М. Ч. Мəрданов, К. Г. Нəсəнов. Кечикən аргументли интеграл-дифференциал тəнликлэр системи үчүн оптималлыг шəрти                                                    | 114 |
| Ə. Р. Мəһəммədov. Кечикən аргументли бир синиф гејри-хəтти диференциал тəнликлəрин һəллəринин бəзи кејфијет мəсəлэлəri                                             | 120 |
| С. С. Нəхијев, Г. Т. Əһмədov. Нейтрал типли кечикən аргументли дифференциал тəнликлэр системи үчүн даһа үмуми җошма тəнлик аңлајышы                                | 126 |
| М. А. Əбдүрəһимov. Тəркибиндə тəрəмə олан сəрһəd шəрантли җошма гејри-хəтти мəсəлə                                                                                 | 131 |
| Ф. Ə. Тағыјев, А. М. Нүсəјнов. Бир сонлу фəргли үсул илə Лаврентијев—Битсадзе мəсəлəсинин һəлли                                                                    | 136 |
| Ə. М. Нүсəјнов. Дəјишəн гəлынлыглы тава-җабыгларын икингат тригонометрик сырлар үсулу илə һəлли                                                                    | 143 |
| М. А. Вəлијев. Аннотасия                                                                                                                                           | 146 |
| Мүəллифлəрин нəзəринə                                                                                                                                              | 147 |



## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| К. М. Мамедов (Хайями). Формула бинума Ньютона, впервые изданная Омаром Хайямом                                                                                                           | 3   |
| М. Б. Рагимов. Функции пермутабельного оператора                                                                                                                                          | 9   |
| Г. В. Гончарова. Некоторые свойства решений II основной задачи теории упругости                                                                                                           | 13  |
| М.-Б. А. Бабаев. О свойствах наилучшей приближающей функции                                                                                                                               | 20  |
| А. С. Махмудов и Р. Р. Ахундов. О $(\alpha_n, p)$ почти-ортогональных систем                                                                                                              | 27  |
| Б. М. Мирсалимов. О бигармонических решениях задач для упруго-пластических тел при наличии неоднородности напряженного поля                                                               | 34  |
| Г. Н. Агаев, А. М. Гусейнбекова. Исследование сингулярного возмущения смешанной задачи для параболического дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами                        | 39  |
| Р. И. Алиханова, В. А. Ибрагимов. Разрешимость смешанной задачи для параболических квазилинейных уравнений высшего порядка с разрывными и быстрорастущими коэффициентами в классах Облича | 45  |
| А. С. Рустамов. Смешанная задача для одного уравнения составного типа с кратными характеристиками                                                                                         | 52  |
| М. А. Джавадов и С. С. Касымова. Эрмитовы квазинеевклидовы пространства над алгеброй комплексных матриц                                                                                   | 57  |
| Д. А. Ахундов. О волновых операторах для абстрактного квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка                                                                           | 63  |
| К. А. Керимов. Об одном методе решения задачи о нормальном ударе по гибкой мембране при упруго-пластических деформациях                                                                   | 69  |
| А. Н. Соловьев. Условия финитности операторной потенциальной функции через данные рассеяния                                                                                               | 74  |
| Г. Д. Джафарли. Теорема Фрагмена—Линделефа типа единственности для гармонических функций трех переменных в конусе                                                                         | 79  |
| Н. Т. Аббасов и М. П. Замаховский. Эллиптические пространства над квазипростыми алгебрами                                                                                                 | 86  |
| Г. Т. Гасанов, Б. О. Садыгов, А. М. Мехтиева. Об одной задаче нестационарного движения вязкой жидкости                                                                                    | 93  |
| Ф. Г. Насибов. Экстремальные задачи в определенных классах целых функций                                                                                                                  | 99  |
| А. Х. Шамилов, К. Т. Ахмедов. Применение метода квазилинеаризации к одной системе с нелинейными условиями                                                                                 | 109 |
| М. Дж. Марданов, К. К. Гасанов. Условия оптимальности для систем интегродифференциальных уравнений с запаздыванием                                                                        | 114 |
| А. Р. Магомедов. Некоторые вопросы качественного поведения решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом                                         | 120 |
| С. С. Ахиев, К. Т. Ахмедов. К более общему понятию сопряженного уравнения для системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа                             | 126 |
| М. А. Абдурагимов. Нелинейная задача сопряжения с краевым условием, содержащим производные                                                                                                | 131 |
| Ф. А. Тагиев, А. М. Гусейнов. Об одном конечно-разностном способе решения задачи Лаврентьева—Бицадзе                                                                                      | 136 |
| А. М. Гусейнов. Применение двойных тригонометрических рядов к расчету плит-оболочек переменной толщины                                                                                    | 143 |

### Депонированные статьи

|                                                                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| М. А. Веллев. К статье «Некоторые условия устойчивости приближенного решения методом Бубнова—Галеркина предельной задачи Коши для уравнений первого порядка» | 146 |
| Вниманию авторов                                                                                                                                             | 147 |

Сдано в набор 13.VI-1972 г. Подписано к печати 26.IX-1972 г. Формат бумаги 70×105<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. лист. 4,75 Печ. лист. 13,02. Уч.-изд. 12,2. ФГ 03817. Заказ 306. Тираж 950. Цена 80 коп.

Типография «Красный Восток» Государственного комитета Совета Министров Азербайджанской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Баку, Ази Асланова, 80.