

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

Кибернетика



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Кибернетика

1

1972

„ЕЛМ“ НƏШРИЈЈАТЫ—ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭЛМ“
БАКЫ — БАКУ

УДК 62—501.7:51+519.21

С. Я. ВИЛЕНКИН, Т. Г. ГЕЙДАРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ВОЛЬТЕРРА

Для широкого класса нелинейных систем связь между входом и выходом с достаточной степенью точности может быть выражена следующим образом:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad (1)$$

где a_n — постоянные числа, $x(t)$ и $y(t)$ — случайные функции времени, описывающие соответственно входной и выходной сигналы. Функциональная форма (1) называется рядом Вольтерра, а $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — ядрами Вольтерра. В данной статье рассматриваемые системы являются системами с сепарабельными ядрами:

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) \dots h_1(\tau_n). \quad (2)$$

Рассмотрим следующие две задачи:

1. Дана система с сепарабельными ядрами, состоящая из линейных инерционных и нелинейных неинерционных элементов. По корреляционной функции нормального стационарного случайного входного сигнала с нулевым математическим ожиданием нужно найти некоторые характеристики (математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию, спектральную плотность, одномерную функцию плотности и моментные функции) входного сигнала.

2. Дана система с сепарабельными ядрами, состоящая из линейных инерционных и нелинейных неинерционных элементов. Входной сигнал имеет нормальное распределение с математическим ожиданием нуль. Корреляционные функции и спектральные плотности входного и выходного сигналов известны. Найти амплитудно-частотную характеристику линейной части нелинейной системы.

Сначала рассмотрим простую нелинейную систему, состоящую из фильтра и квадратирующего устройства (рис. 1 или 2).

Функции $y_i(t)$ задаются равенствами: $y_0(t) = 1$, $y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau$,

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad \text{и} \quad y(t) = a_0 y_0(t) + a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t).$$

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: А. И. Гусейнов (редактор), Ю. А. Сеидов (зам. редактора), Г. Б. Абдуллаев, М. И. Алиев, Б. А. Азимов, Д. Э. Аллахвердиев, Ю. А. Амензаде, К. Т. Ахмедов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, Л. М. Иманов, Ф. Г. Магсудов, Ю. А. Махмудов, А. Х. Мирзаджанзаде, Р. А. Еганов (ответств. секретарь), Г. Ф. Султанов, З. И. Халилов, Т. А. Эминзаде, А. А. Эфендизаде.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“.

Сдано в набор 29/XII 1971 г. Подписано к печати 28/VI 1972 г. Формат бумаги 70×108^{1/16}. Бум. лист. 4,50. Печ. лист. 12,33. Уч.-изд. 11,93. ФГ 03221. Заказ 768. Тираж 950. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Государственного комитета Совета Министров Азербайджанской ССР по печати. Баку, Ази Асланова, 80.

Таким образом, выход $y(t)$ связан с входом соотношением

$$y(t) = a_0 + a_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

т. е. нелинейный функционал аппроксимирован многочленом.

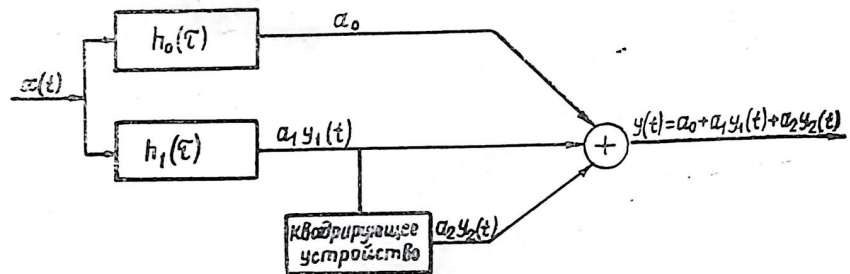


Рис. 1

Математическое ожидание $y(t)$ будем равно

$$m_y = My(t) = a_0 + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) R_x(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

где $R_x(\tau)$ — корреляционная функция процесса $x(t)$. Используя преобразование

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF_x(\lambda)$$

и предполагая, что спектральная функция $F_x(\lambda)$ дифференцируема, получим

$$m_y = a_0 + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

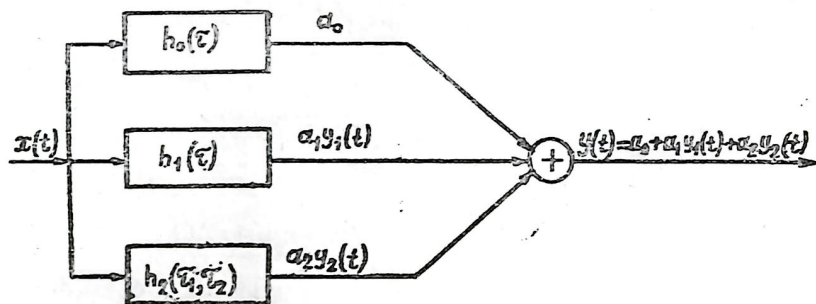


Рис. 2

где $\kappa^2(\lambda) = |\Phi(i\lambda)|^2$ — квадрат модуля амплитудно-частотной характеристики линейной части нелинейного объекта, а $f_x(\lambda)$ — спектральная плотность входного сигнала. Полагая $\tau = t_2 - t_1$, найдем корреляционную функцию процесса $y(t)$:

$$R_y(\tau) = a_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \kappa^2(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda + 2a_2^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \kappa^2(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda \right]^2. \quad (4)$$

Отсюда и из (3) находим

$$\sigma_y^2 = (m_y - a_0) \left[\frac{a_1^2}{2} + 2(m_y - a_0) \right].$$

Следовательно, дисперсия процесса $y(t)$ выражается только через математическое ожидание процесса.

Применяя обратное преобразование к (4), находим спектральную плотность процесса $y(t)$:

$$f_y(\lambda) = a_1^2 f_x(\lambda) + 2a_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2(\lambda_1) f_x(\lambda_1) \kappa^2(\lambda - \lambda_1) f_x(\lambda - \lambda_1) d\lambda_1.$$

Напишем выражения для первых четырех моментов процесса $y(t)$:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + ca_2, \quad a_2 = a_1^2 + a_1^2 c + 2a_2^2 c^2, \\ a_3 &= a_1^3 + a_2 c^2 (6a_0 a_2 + 9a_1^2) + 14 a_2^3 c^3 + 3a_0 a_2^2 c, \\ a_4 &= a_1^4 + 6a_0^2 a_1^2 c + 3c^2 (a_1^4 + 6a_0^2 a_2^2) + \\ &+ 2a_2^2 c^3 (28a_0 a_2 + 45a_1^2) + 104 a_1^4 c^4, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } c = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda.$$

Одномерные моменты a_n могут быть вычислены по характеристической функции

$$\varphi(t) = \frac{e^{ia_0 t}}{\sqrt{1 - 2itca_2}} \exp \left\{ -\frac{t^2 ca_1^2}{2(1 - 2itca_2)} \right\}. \quad (6)$$

Из (6) видно, что одномерные моменты любого порядка процесса $y(t)$ выражают только через $c = \frac{m_y - a_0}{a_2}$ математическое ожидание

$y(t)$. Моменты (или семинварианты) позволяют найти функции плотности в виде рядов Грама—Шарльетти типа А или Эджворта. Таким образом, при условии нормальности входного сигнала $x(t)$ знание математического ожидания выходного сигнала $y(t)$ достаточно для определения одномерного распределения процесса $y(t)$.

Для нахождения многомерных законов распределения необходимо вычислить моментные, квазимоментные или обобщенные корреляционные функции (3), (5). Например, формулы для первых трех обобщенных корреляционных функций таковы:

$$\kappa_1(t) = a_0 + ca_2,$$

$$\kappa_2(t) = a_1^2 h(\tau) + 2a_2^2 h^2(\tau) = R_y(\tau), \quad (7)$$

$$\kappa_3(t) = 2a_1^2 a_2 [h(\tau_1)h(\tau_2) + h(\tau_1)h(\tau_3) + h(\tau_2)h(\tau_3)] + 8a_2^3 h(\tau_1)h(\tau_2)h(\tau_3),$$

$$\text{где } \tau_1 = t_1 - t_2, \quad \tau_2 = t_1 - t_3, \quad \tau_3 = t_2 - t_3$$

и $h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \kappa(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda$ — корреляционная функция сигнала на

выходе линейной части объекта. Нетрудно заметить, что при $t_1 = t_2 = t_3$ формулы (7) совпадают с формулами (5). Подобным образом находятся обобщенные корреляционные функции высшего порядка. Отметим, что выражения для этих характеристик содержат только c и $h(\tau)$, где $c = h(0)$.

Рассмотрим общий случай: процесс на выходе нелинейной системы представляет собой функционал, заданный на множестве возможных нормальных процессов, действующих на ее вход.

В работах [7] и [10] показано, что теорема Фреше [8] справедлива в случае, когда $x(t)$ — непрерывный в среднеквадратичном случайный процесс. Аппроксимирующую последовательность функционалов запишем в виде (рис. 3)

$$y_N(t) = a_0 + a_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$- \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots + a_N \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_N(\tau_1, \dots, \tau_N) x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_N) d\tau_1 \dots d\tau_N. \quad (8)$$

Здесь

$$y_{Nk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (k) \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k.$$

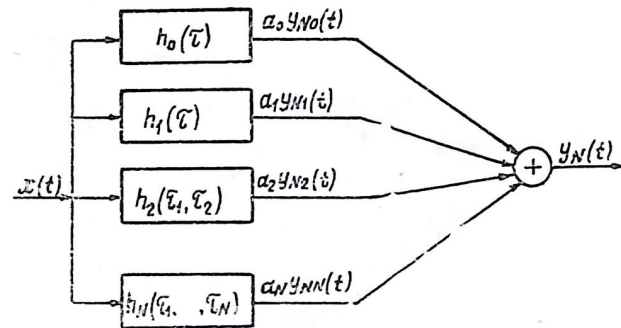


Рис. 3

Таким образом, (8) можно переписать в виде

$$y_N(t) = \sum_{k=0}^N a_k y_{Nk}(t), \quad y_{N0}(t) \equiv 1. \quad (9)$$

Известно (6), что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \int_{-\infty}^{\infty} (k) \int_{-\infty}^{\infty} |h_k(\tau_1, \dots, \tau_k)| d\tau_1 \dots d\tau_k < \infty$$

является достаточным условием сходимости в среднем суммы

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{Nk}(t).$$

Используя формулы для a_m , находим одномерные моменты функции $y_N(t)$, определяемой выражением (8). Для моментов a_m окончательно можно написать

$$a_m = \sum_{m_0, \dots, m_N=m} \frac{m! a_0^{m_0} a_1^{m_1} \dots a_N^{m_N}}{m_0! \dots m_N!} (m_1 + 2m_2 + \dots + Nm_N - 1)!! c^{\frac{m_1 + 2m_2 + \dots + Nm_N}{2}}, \quad (10)$$

где суммирование ведется по всем $m_1, m_2, \dots, m_N$, для которых удовлетворяются равенства $m_1 + 2m_2 + \dots + Nm_N = 2p$, $c = h(0)$ и $\kappa^2(\lambda) = |\Phi(i\lambda)|^2$ — квадрат модуля передаточной функции линейной части нелинейной системы.

Из формулы 10 видно, что все моменты a_m выражаются через c . Вычислив c , находим моменты a_m одномерного закона распределения $y_N(t)$ и тем самым можно найти одномерную функцию случайного процесса $y_N(t)$ в виде ряда (Грама—Шарлье типа А, Эджворта и т. п.). Таким образом, задание c является достаточной характеристикой одномерного распределения случайной функции $y_N(t)$ для любого N . Как отмечено выше, найдя моментные функции (которые содержат только интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda$ и $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \kappa^2(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda$,

т. е. корреляционную функцию и дисперсию $y_N[x(t)]$ на выходе линейного инерционного элемента), можно построить разложения для многомерных функций плотностей случайного функционала $y_N[x(t)]$. В этом случае можно использовать ортогональные разложения нелинейного функционала $y_N[x(t)]$, выраженного в (4).

Перейдем к решению второй задачи. В (9) положим $N=2$ и перепишем равенства (4):

$$R_y(\tau) = a_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \kappa^2(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda + 2a_2^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \kappa^2(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda \right]^2. \quad (4')$$

Примем обозначение

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \kappa^2(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda. \quad (11)$$

Тогда из (4') найдем

$$h(\tau) = -\frac{a_1^2}{4a_2^2} \pm \frac{\sqrt{a_1^4 + 8a_2^2 R_y(\tau)}}{4a_2^2}.$$

Используя (11), получим

$$\kappa^2(\lambda) = \frac{1}{4a_2^2 f_x(\lambda)} \left[-a_1^2 \delta(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \sqrt{a_1^4 + 8R_y(\tau) a_2^2} d\tau \right]. \quad (12)$$

Пример. Допустим, что на входе в системе (рис. 1) действует нормальный стационарный процесс со спектральной и корреляционной функцией, $f_x(\lambda) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}$ и $R_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, соответственно.

Проверим, каким будет квадрат модуля передаточной функции линейного динамического звена, если корреляционная функция выходного сигнала имеет вид

$$R_y(\tau) = \frac{\beta(\beta e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\beta|\tau|})}{\beta^2 - \alpha^2} + 2 \left[\frac{\beta(\beta e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\beta|\tau|})}{\beta^2 - \alpha^2} \right]^2.$$

Из (12) получим (для простоты положено $a_1 = a_2 = 1$)

$$\kappa^2(\lambda) = \frac{\beta^2}{\beta^2 + \lambda^2}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в правильности результата. Для $N=3$ находим корреляционную функцию стационарного случайного процесса $y(t)$:

$$R_y(\tau) = h(\tau) [a_1^2 + 6a_1 a_3 c + 9a_3^2 c^2] + 2a_2^2 h^2(\tau) + 6a_3^2 h^3(\tau), \quad (13)$$

где

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \kappa^2(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda, \quad (14)$$

$c = h(0)$, что определяется из выражений (13) при $\tau=0$, т. е. через дисперсии выходного сигнала:

$$R_y(0) = a_1^2 c + 2(a_2^2 + 3a_1 a_3) c^2 + 15a_3^2 c^3.$$

В данном случае $c = (m_y - a_0)/a_2$. Поэтому (13) приобретает вид

$$a_2^2 R_y(\tau) = h(\tau) [a_1^2 a_2^2 + 6a_1 a_2 a_3 (m_y - a_0) + 9a_3^2 (m_y - a_0)^2 + 2a_4^2 h(\tau) + 6a_2^2 a_3^2 h^2(\tau)]. \quad (15)$$

Из (14) и (15) находим

$$\kappa^2(\lambda) = \frac{1}{2\pi f_x(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} h(\tau) d\tau.$$

Отметим, что надо взять то решение уравнения (15), которое удовлетворяет равенству (14), т. е. является действительной положительно определенной функцией с максимумом в нуле.

Таким образом, в случае $N=3$ для нахождения квадрата модуля передаточной функции линейной части нелинейного объекта достаточно знать спектральную функцию входного сигнала и корреляционную функцию, а также математическое ожидание выходного сигнала.

Если взять N членов ряда (1), то для определения амплитудно-частотной характеристики потребуется решить алгебраическое уравнение N -го порядка с коэффициентами, содержащими корреляционные функции $R_y(\tau)$ и математическое ожидание m_y . Таким образом, при нормальном стационарном случайном сигнале на входе по спектральной плотности входного сигнала, корреляционной функции и математическому ожиданию выходного сигнала, можно оценить амплитудно-частотную характеристику линейной динамической части нелинейной системы с сепарабельным ядром N -го порядка. Точность оценки характеризуется законом распределения, приведенным в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александровский Н. М., Дейч А. М. „Автоматика и телемеханика“, 1968, № 1.
2. Виленкин С. Я., Гейдаров Т. Г. „Автоматика и телемеханика“, 1969, № 3.
3. Кузнецов П. И., Стратович Р. Л., Тихонов В. И. „Автоматика и телемеханика“, 1953, № 4.
4. Пуков К. А., Себряков Г. Г. „Изв. АН СССР, серия техн. кибернетика“, 1967, № 2.
5. Стратонович Р. Л. „Сов. радио“, 1961.
6. Техническая кибернетика за рубежом (под ред. В. В. Солодовникова). „Машиностроение“, 1968.
7. Brilliant M. B. Theory of the analysis of nonlinear systems. Technical Report 345. Research lab. of Electronics, MJT, 1958.
8. Frechet M. Sur les fonctionnelles continues, Ann de l'Ecole Normal sup. 3-rd ser. 1910.
9. Wolterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integrodifferential Equations, London, 1930.
10. Wiener N. Report—165, radiation laboratory, MJT, Cambridge, 1942.

Институт кибернетики

Поступило 5. V 1971

С. Я. Виленкин, Т. Г. Гейдаров.

Волтерра сырасынын көмәклији илэ бир синиф гејри-хэтти системин өјрәнилмәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Волтерра сырасындан истифадә етмәклә, нормал пәјланмаја малик стасионар просесин гејри-хэтти чевирмәсинин бир өлчүлү пәјланма гануну, коррелјасија функцијасы, спектрал сыхлыг функцијасы, момент функцијалары вә үмүмиләшмиш момент функцијалары тәјин едилмишдир.

Тәдгигатда Волтерра нүвәләринин сепарабел олмасы шәртиндә гејри-хэтти операторун хәтти һиссәсинин өтүрмә функцијасы гијмәтләндирилмишдир.

УДК 539. 374

В. Д. ГАДЖИЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА ПРИ НАЛИЧИИ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Известно, что (если элемент до потери устойчивости деформируется упруго-пластически) начальные напряжения существенным образом влияют на величину критической силы, при которой элемент конструкции теряет устойчивость. Причинами возникновения начальных напряжений могут быть предшествующее упруго-пластическое деформирование (прокатка, правка, технологическая обработка и т. п.), циклические изменения температуры, сварка и т. д.

В зависимости от вышеуказанного начальные напряжения $\sigma_{ij}^{(z)}$ (где z выбрана перпендикулярной касательной плоскости срединной поверхности) могут распределяться соответствующим образом. Поэтому при решении данной задачи не будем накладывать условие на форму распределения начальных напряжений (для частных видов распределения начальных напряжений устойчивость цилиндрических оболочек на основе приведенного модуля рассмотрена в работе [5], а для частичного вида начальных напряжений—на основе возрастающей нагрузки [3, 4]).

Пусть круговое кольцо, имеющее по толщине начальное напряжение $\sigma_0 = \sigma_s f\left(\frac{z}{h}\right)$, $|\max \sigma^0| < \lambda \sigma_s$, находится под действием равномерного давления q . Координатная система выбрана следующим образом: u отсчитывается вдоль дуги, z —к центру. Здесь h —половина толщины, σ_s —предел текучести материала, λ —коэффициент линейного упрочнения;

$$\sigma_n = \lambda \sigma_s + E(1 - \lambda) \varepsilon_n, \quad (1)$$

где σ_n и ε_n —соответственно, интенсивность напряжений и деформаций, E —модуль упругости. Распределение напряжений до потери устойчивости в упругой области будет

$$\sigma = \sigma_s f\left(\frac{z}{h}\right) + E\varepsilon_0. \quad (2)$$

Здесь ε_0 —деформация, не зависящая от z ; в пластической области

$$\sigma = -\lambda \sigma_s + E(1 - \lambda) \varepsilon_0. \quad (3)$$

В дальнейшем будем считать, что максимум зон можем охватывать до четырех областей: две упругие и две пластические. Границы упруго-пластических областей определяются из условий непрерывности напряжений. Учитывая (2) и (3), получим

$$\sigma_s f\left(\frac{z_i}{h}\right) = \lambda \sigma_s - \lambda E \varepsilon_0, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Следовательно, в докритическом состоянии границы упруго-пластических областей известны и определяются соотношением (4), причем ε_0 связана с усилием N_0 , возникающим в кольце на единицу длины согласно очевидному соотношению

$$-N_0 = \int_{-h}^{+h} \sigma dz. \quad (5)$$

Примем следующие обозначения:

$$\bar{z} = \frac{z}{h}; \quad \bar{\varepsilon}_1 = \frac{\varepsilon_1}{h}; \quad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{\varepsilon_2}{h}; \quad \bar{\varepsilon}_0 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_s}.$$

Подставляя (2), (3) в (5), после элементарных преобразований будем иметь

$$-\frac{N_0}{\sigma_s h} = \int_{\bar{h}_l} f(\bar{z}) d\bar{z} + 2\bar{\varepsilon}_0 - \lambda \bar{h}_p (1 + \bar{\varepsilon}_0), \quad (6)$$

где $\bar{h}_l = \frac{h_l}{h}$, $\frac{h_p}{h} = \bar{h}_p$ — безразмерные величины, соответствующие упруго-пластическим зонам.

Имея в виду $-N_0 = qR$ и обозначая $\frac{qR}{2\sigma_s h}$ через q^* , можем написать:

$$q^* = \frac{1}{2} \int_{\bar{h}_l} f(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\varepsilon}_0 - \frac{1}{2} \lambda \bar{h}_p (1 + \bar{\varepsilon}_0). \quad (7)$$

Здесь R — радиус окружности, проходящий через центр тяжести сечения. Соотношение (7) имеет место, когда кольцо деформируется упруго-пластически. Из этой формулы можно получить следующие случаи:

I. Кольцо деформируется чисто упруго, если $\lambda = 0$, $\bar{h}_l = 2$,

$$\int_{\bar{h}_l} f(\bar{z}) d\bar{z} = 0, \quad \bar{\varepsilon}_0 > -\lambda - \left| \max \frac{\sigma}{\sigma_s} \right|, \quad q^* = \bar{\varepsilon}_0.$$

II. Кольцо деформируется чисто пластически. В этом случае

$$\bar{h}_p = 2, \quad \bar{h}_l = 0, \quad q^* = -\lambda + (1 - \lambda) \bar{\varepsilon}_0, \quad \bar{\varepsilon}_0 < -\lambda - f(0).$$

Отсюда вытекает, что упруго-пластическая область существует при условии

$$-\lambda - \max \left| \frac{\sigma}{\sigma_s} \right| \leq \bar{\varepsilon}_0 \leq -\lambda - f(0).$$

Теперь перейдем к устойчивости кольца (по Шенли). Величины, относящиеся к новому состоянию, представим в таком же виде, как в работах [3, 4]:

$$\begin{aligned} N &= N_0 + \alpha N', \\ M &= M_0 + \alpha M', \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \alpha \varepsilon', \\ \kappa &= \alpha \kappa'. \end{aligned}$$

Здесь κ — изменение кривизны, α — бесконечно малая величина, зависящая от координат. Будем считать, что изменение границы между упругой и пластической областями в новом состоянии равновесия не сказывается на величинах M и N [3, 4]. Для искривленного кольца деформация представляется в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha (e' + \kappa x').$$

Введя обозначения

$$\bar{e} = \frac{e}{\varepsilon_s}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\kappa h}{\varepsilon_s},$$

связь между напряжениями и деформацией в новом состоянии можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma + \alpha (1 - \lambda) (\bar{e} + \bar{\kappa} \bar{z}), \quad \bar{z} \in \bar{h}_p; \\ \sigma' &= \sigma + \alpha (\bar{e} + \bar{\kappa} \bar{z}), \quad \bar{z} \in \bar{h}_l. \end{aligned} \quad (8)$$

Момент M и усилие N вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} N' &= \sigma_s h \int_{-1}^{+1} \bar{\sigma}' d\bar{z}, \\ M' &= \sigma_s h^2 \int_{-1}^{+1} \bar{\sigma}' \bar{z} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Предполагая, что изменения границы не влияют на величины M' и N' и учитывая (8), (9), после некоторых преобразований получим:

$$N = \sigma_s h (A \bar{e} + B \bar{\kappa}), \quad (10)$$

$$M = \sigma_s h^2 (B \bar{e} + D \bar{\kappa}), \quad (11)$$

где

$$A = (1 - \lambda) \bar{h}_l + \bar{h}_p, \quad I_1 = \int_{\bar{h}_l} \bar{z} d\bar{z},$$

$$B = (1 - \lambda) I_1 + I_2, \quad I_2 = \int_{\bar{h}_p} \bar{z} d\bar{z},$$

$$D = (1 - \lambda) I_3 + I_4, \quad I_3 = \int_{\bar{h}_l} \bar{z}^2 d\bar{z},$$

$$I_4 = \int_{\bar{h}_p} \bar{z}^2 d\bar{z}.$$

Считая, что нагрузка q^* направлена вдоль нормали изогнутого кольца, уравнение равновесия элемента кольца длиной du можно записать в виде [2]:

$$\frac{dN}{d\eta} + \frac{1}{R} \frac{dM}{d\eta} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{d^2 M}{d\eta^2} + q^* - \frac{N}{R} = 0,$$

где

$$q^* = q^* \left(1 + \alpha \frac{\sigma_s}{Eh} \kappa' \right).$$

Подставляя (10), (11) в (12), получим

$$\frac{d^2 \kappa}{d\eta^2} + \kappa^2 \kappa = \frac{R}{h} \frac{1}{D - \frac{B^2}{A}} C,$$

где C — произвольная постоянная. Известным способом можем определять критическую нагрузку:

$$q_{кр}^* = (n^2 - 1) E \frac{h^3}{R^3} \left(D - \frac{B^2}{A} \right). \quad (13)$$

Здесь n — число полных волн, образующихся по окружности.

Из (13) нетрудно получить нижеследующие частные случаи.

I. Кольцо деформируется чисто упруго:

$$\lambda = 0, \quad \bar{h}_p = 0, \quad \bar{h}_l = 2, \quad A = 2, \quad D = \frac{2}{3}, \quad B = 0,$$

т. е.

$$q_{кр}^I = \frac{2}{3} (n^2 - 1) E \frac{h^3}{R^3}. \quad (14)$$

II. Кольцо деформируется чисто пластически:

$$\bar{h}_l = 0, \bar{h}_p = 2, A = 2(1 - \lambda), B = 0, D = \frac{2}{3}(1 - \lambda),$$

т. е.

$$q_{кр}^n = \frac{2}{3} (1 - \lambda) (n^2 - 1) E \frac{h^3}{R^3}. \quad (15)$$

III. Начальные напряжения распределены симметрично по толщине (рис. 1а):

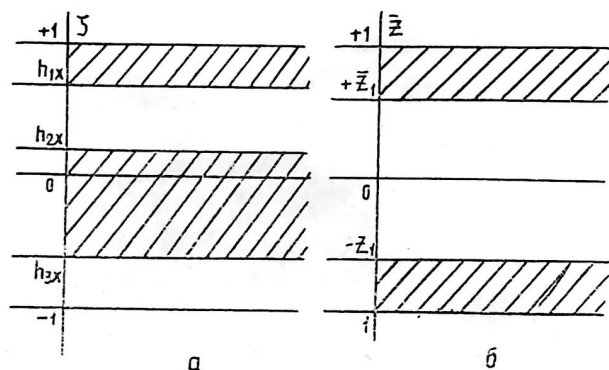


Рис. 1

$$\bar{h}_p = 2(1 - \bar{z}_1), \bar{h}_l = 2\bar{z}_1,$$

$$A = 2[1 - \lambda(1 - \bar{z}_1^3)](n^2 - 1) \frac{h^3}{R^3}, D = \frac{2}{3}[1 - \lambda(1 - \bar{z}_1^3)].$$

В этом случае критическая нагрузка вычисляется по формуле:

$$q_{кр}^c = \frac{2E}{3}[1 - \lambda(1 - \bar{z}_1^3)](n^2 - 1) \frac{h^3}{R^3}.$$

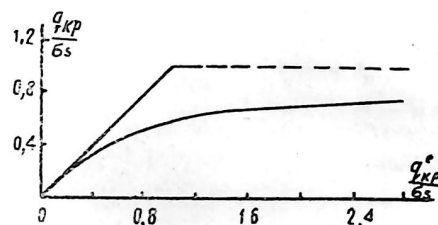


Рис. 2

IV. Начальные напряжения распределяются несимметрично по толщине, например, как в работе [3]. Чтобы получить решение работы [3] из нашей задачи, следует вычислить следующие коэффициенты (рис. 1б):

$$\begin{aligned} \bar{h}_p &= \bar{h}_{2*} + \bar{h}_{3*} + (1 - h_{1x}), A = 1 + \\ &E_{1*} + (1 - E_{1*})(h_{1*} - h_{2*} - 1), \\ h_l &= h_{1*} - h_{2*} - h_{3*} + 1, B = \\ &= \frac{1 - E_{1*}}{2}(h_{1*}^2 + h_{3*}^2 - h_{2*}^2 - 1), \end{aligned}$$

$$D = \frac{1}{3}[1 + E_{1*} - (1 - E_{1*})(h_{2*}^3 + h_{3*}^3 - h_{1*}^3)].$$

Следовательно, предлагаемое решение обобщает всевозможные существующие случаи устойчивости кругового кольца. Преимущество этого

* Эти обозначения взяты из работы [3].

решения заключается еще и в том, что не накладывается ограничение на величину начальных напряжений.

В случае $\lambda = 0,9$

$$f(\bar{z}) = \begin{cases} f_1(\bar{z}) = 1,4\bar{z} + 0,7, & -1 \leq \bar{z} \leq 0; \\ f_2(\bar{z}) = -1,4\bar{z} + 0,7, & 0 \leq \bar{z} \leq 1. \end{cases}$$

На рис. 2 представлен график зависимости между $q_{кр}$ и $q_{кр}^I$, из которого видно, что начальные напряжения существенным образом влияют на величины критических сил (в данном примере максимальная разница составляет около 40%).

ЛИТЕРАТУРА

1. Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагружениях. Изд-во МГУ, М., 1965.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М., 1966.
3. Евсеева М. М. Исследования по упругости и пластичности. Сб. № 5, Изд-во ЛГУ, 1966.
4. Евсеева М. М. Расчет пространственных конструкций, вып. 11. Стройиздат. М., 1967.
5. Гаджиев В. Д. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1966, № 6.

Институт математики
и механики

Поступило 30. III 1970

В. Ч. Начыев

Башлангыч кэркинликли еластик-пластик
налганын дајаныглыгы

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә галынлыг бојунча ихтијари пәјланан башлангыч кәркинликли нәлганын дајаныглыгы мәсәләсинә бахылмышдыр. Мәсәлә Шеплијә көрә нәлл едилмиш вә јухарыда көстәрилән нәлдә критик гүввә үчүн дүстур тапылмышдыр. Башлангыч кәркинлијин хүсуси пәјланмасында конкрет мисал нәлл едилмишдыр.

УДК 539. 375

В. М. МИРСАЛИМОВ

О ПРЕДЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ ПРИ КВАЗИХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ

В данной статье рассматривается динамическая трещина при квазихрупком разрушении. В рамках схемы Леонова—Панасюка—Дагдейла с учетом сил инерции вычисляется удельный поток диссипации энергии в конце трещины.

1. Рассмотрим трещину в сплошном деформированном теле, контур которой распространяется с произвольной скоростью, меньшей скорости распространения поперечных волн. Материал сплошного тела будем считать идеальным, упруго-пластическим, удовлетворяющим условию пластичности Треска—Сен-Венана. За некоторый достаточно малый промежуток времени, очевидно, всегда можно выбрать окрестность конца трещины настолько малую сравнительно с характерным линейным размером тела, но большую по сравнению с характерным размером пластической области, чтобы распределение напряжений и смещений тела в этой окрестности соответствовало распространению трещины с постоянной скоростью. Таким образом, распределение напряжений и смещений вблизи каждой точки контура динамической трещины в любой момент времени будет как для полубесконечного прямолинейного разреза, движущегося с постоянной скоростью v [1].

В соответствии со схемой Леонова—Панасюка—Дагдейла пластическая область будет представлять собой узкий слой на продолжении трещины, толщина которого равна нулю в рамках применяемой теории малых деформаций. Напряжения и смещения в стационарной динамической задаче теории упругости для полубесконечного прямолинейного разреза можно найти, используя метод Галина [2]. Согласно этому методу напряжения и смещения для рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{\pi R(m, \nu)} \operatorname{Im} [A \omega_1(z_1) - B \omega_1(z_2)], \\ \sigma_y &= \frac{1}{\pi R(m, \nu)} \operatorname{Im} [C \omega_1(z_1) - D \omega_1(z_2)], \\ \tau_{xy} &= -\frac{T}{\pi R(m, \nu)} \operatorname{Re} [\omega_1(z_1) - \omega_1(z_2)], \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\operatorname{Im} [F \omega_1(z_1) - D \omega_1(z_2)]}{\pi (1 - \nu) ER(m, \nu)},\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\operatorname{Re} [M \omega_1(z_1) - H \omega_1(z_2)]}{\pi (1 - \nu) ER(m, \nu)}, \\ \omega_1(z) &= -i\pi\sigma_s \left(1 - \frac{1}{\pi i} \ln \frac{i\sqrt{a} - \sqrt{z-a}}{i\sqrt{a} + \sqrt{z-a}} \right), \\ z_1 &= x + i\kappa_1 y, \quad z_2 = x + i\kappa_2 y, \\ A &= -\left(1 - \frac{1}{2} m^2 \right) \left(1 + \frac{\nu m^2}{2 - 2\nu} \right), \quad M = T = \left(1 - \frac{1}{2} m^2 \right) \sqrt{1 - \kappa^2 m^2}, \\ B &= -D = -\sqrt{(1 - m^2)(1 - \kappa^2 m^2)}, \quad H = \sqrt{1 - \kappa^2 m^2}, \quad F = \left(1 - \frac{1}{2} m^2 \right), \\ C &= \left(1 - \frac{1}{2} m^2 \right)^2, \quad R(m, \nu) = \sqrt{(1 - m^2)(1 - \kappa^2 m^2)} - \left(1 - \frac{1}{2} m^2 \right)^2, \\ \kappa_1^2 &= 1 - \frac{v^2}{c_1^2}, \quad \kappa_2^2 = 1 - \frac{v^2}{c_2^2}, \quad m = \frac{v}{c_2}, \quad \kappa^2 = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}, \\ c_1^2 &= \frac{(1 - \nu) E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)\rho}, \quad c_2^2 = \frac{E}{2(1 + \nu)\rho}, \\ d &= \frac{\pi^2 N^2}{4\sigma_s^2}, \quad (N = \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x} \sigma_y]).\end{aligned}$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ —напряжения; u, v —составляющие вектора смещения по осям x и y ; σ_s —предел текучести; E —модуль Юнга; ρ —плотность; ν —коэффициент Пуассона; a —ширина пластической области; N —коэффициент интенсивности напряжений; $\omega_1(z)$ —потенциал Галина [2]. Функция $\sqrt{z-a}$ аналитична вне полубесконечного разреза $x < a$ вдоль действительной оси и положительна на продолжении разреза при $x > a$. Начало прямоугольной декартовой системы координат xu выбрано в конце трещины, ось y направлена по нормали к поверхности трещины.

Используем упруго-пластическое решение (1) для вычисления энергии γ_* , диссипируемой при образовании единицы новой поверхности тела:

$$\begin{aligned}\gamma_* &= \lim_{\Delta S \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sigma_s}{\Delta S} \int_0^d [v(x - \Delta S, N + \Delta N) - v(x, N)] dx \right\} = \\ &= \frac{N^2 \Phi(m, \nu)}{ER(m, \nu)} + \frac{\pi^2 N^3 \Phi(m, \nu)}{3\sigma_s^2 ER(m, \nu)} \frac{dN}{dl}, \\ \Phi(m, \nu) &= \frac{\pi m^2 \sqrt{1 - \kappa^2 m^2}}{4(1 - \nu)}.\end{aligned}\quad (2)$$

Выражение (2) удобно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}dl &= \frac{\pi^2 N^3 \varphi(m, \nu) dN}{3\sigma_s^2 [E\gamma_* - \varphi(m, \nu)N^2]}, \\ \varphi(m, \nu) &= \frac{\pi m^2 \sqrt{1 - \kappa^2 m^2}}{[4\sqrt{(1 - m^2)(1 - \kappa^2 m^2)} - (2 - m^2)^2](1 - \nu)}.\end{aligned}\quad (3)$$

При дополнительных сведениях относительно зависимости γ_* от скорости роста трещины и от времени в случае неустановившегося движения условие (3) играет роль дополнительного условия на контуре динамической трещины в упруго-пластическом теле.

2. Из выражения (2) следует, что, если $N \neq 0$, то релеевская скорость m_R , являющаяся корнем уравнения $R(m_R, \nu) = 0$, представляет собой недостижимую границу скоростей распространения тре-

щины, так как для поддержания роста трещины с такой скоростью требуется подвод бесконечно большого потока энергии к концу трещины (аналогично для идеально хрупкого тела).

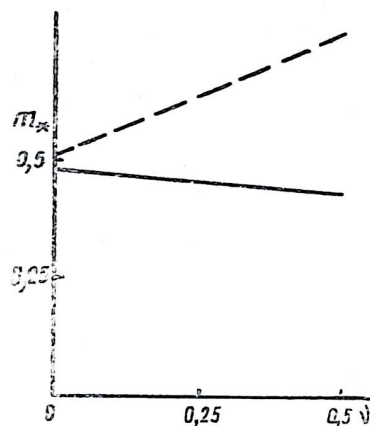


Рис.

В однородных материалах максимальная скорость ограничена еще раньше величиной m_* , при которой наступает ветвление трещины. Значение предельной скорости роста трещины в однородных материалах m_* определим из следующих соображений. По формулам (1) можно найти напряжение σ_θ вблизи конца трещины при $|z| \ll d$. Естественно, что трещина должна распространяться по направлению максимума σ_θ [1]. Анализ функции $\sigma_\theta(\theta, m, \nu)$ показывает, что существует наименьшее значение скорости $m = m_*$ такое, что при $m > m_*$ у этой функции примерно при $\theta \approx \pi/3$ имеется максимум. Зависимость $m_*(\nu)$ показана на рисунке. Здесь же штрихом для сравнения приведена соответствующая кривая для идеально хрупкого тела [1].

Таким образом, влияние пластичности [сказывается в снижении скорости ветвления трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. Р. [Cracks in solids. Int. j. Solids structures, 1968, v. 4, pp. 811—831.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. [М., 1953.

Институт математики
и механики

Поступило 10. IV 1970

В. М. Мирсалимов

Квазикөврәк дағылма заманы жарығын жаылмасынын
лимит сүр'әти һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгәләдә квазикөврәк дағылма заманы динамик жарығын жаылмасына бахылмышдыр. Эталәт гүввәләрини нәзәрә алмагла (Дагдәйл гојулушунда) жарығын сонунда енержинин пәјланмасынын хусуси ахыны һасабланмышдыр. Мә'лум олмушдур ки, пластиклијин нәзәрә алынмасы јухары нәзәри лимитин гијмәтинә—Релеј сүр'әтинә тә'сир етмир, шахәләнмә сүр'әтини исә хејли азалдыр. Бирчынс материаллар үчүн шахәләнмә сүр'әтинин Пуассон әмсалындан асылылығы тә'јин едилмишдир.

УДК 533.6,011.08

И. М. МИРЗОЕВ

РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ СТРУИ, ИСТЕКАЮЩЕЙ В СПУТНЫЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК И ОБТЕКАЮЩЕЙ ЗАДАННОЕ ТЕЛО С ПОДВОДОМ ТЕПЛА

В работе [1] рассмотрен случай, когда газовая струя плоская и подвод тепла отсутствует. Установившееся осесимметричное движение газа, истекающего в спутный осесимметричный поток с подводом тепла, описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} \right) &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\gamma_b P}{\rho} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\rho v}{y} \right) &= (\gamma_b - 1) \rho \frac{dQ}{dt}. \end{aligned} \quad (1)$$

Первое уравнение системы (1) есть уравнение неразрывности, второе и третье—уравнения движения, четвертое—уравнение энергии, которое учитывает подвод тепла к газу. Здесь u и v —компоненты скорости вдоль x и y (рис. 1), ρ —плотность, P —давление, dQ/dt —тепло, выделяемое единицей массы газа в единицу времени, γ_b —показатель адиабаты. Закон выделения тепла $Q(x, y)$ считаем известным и зададим его позже. Все параметры на выходе из сопла обозначим индексом b .

Вводим безразмерные величины:

$$x^* = x/r, \quad y^* = y/r, \quad P^* = P/P_b, \quad \rho^* = \rho/\rho_b, \quad \zeta = \tan \theta = v/u, \quad \xi = \tan \mu. \quad (2)$$

Здесь r —радиус сопла, θ —угол между радиусом-вектором скорости и положительным направлением оси x , μ —угол Маха. В дальнейшем звездочки над безразмерными величинами будут опущены.

Уравнения характеристик системы (1) и условия вдоль них имеют соответственно следующий вид:

$$dy = \frac{\xi \pm 1}{\xi \mp \zeta} dx \quad (3)$$

$$\frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta \pm \frac{\xi}{\rho\tau^2} dP \mp \frac{(\gamma_B - 1) \rho_B Q_{\max} (1 + \xi^2) dQ}{P_B v^2 (\xi \mp \zeta)} \pm \frac{\zeta}{(\xi \pm 1) y} dy. \quad (4)$$

А условия вдоль линии тока ($udy = vdx$) будут:

$$dP = \frac{\gamma_B P}{\rho} d\rho = (\gamma_B - 1) \frac{\rho_B Q_{\max}}{P_B} \rho dQ, \quad (5)$$

$$[\gamma_B (1 + \xi^2) + 2] dP - \frac{\gamma_B P}{\rho} (1 + \xi^2) d\rho + 2\gamma_B P \xi d\xi = 0. \quad (6)$$

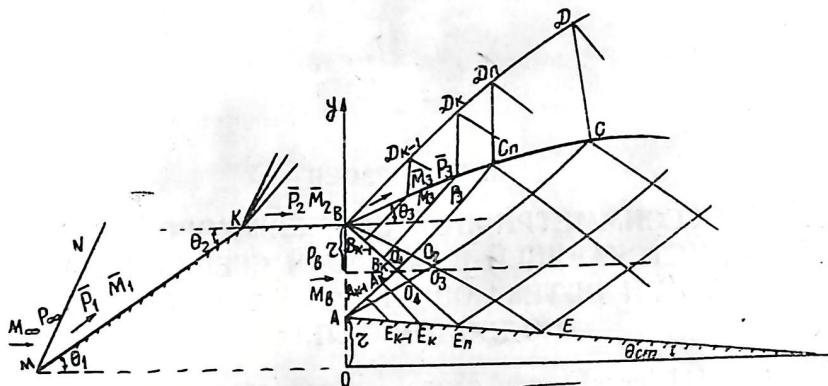


Рис. 1

Изменения функции тока вдоль характеристик (3) определяются из выражения

$$d\psi = \pm \rho v y \frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{\xi\zeta \pm 1} dy. \quad (7)$$

В уравнениях (4)–(7) верхний знак соответствует характеристикам первого семейства, нижний — характеристикам второго семейства, $Q_{\max}$ — максимально выделяемое тепло. Истекающий газ считаем совершенным, подчиняющимся закону

$$P = R \rho T. \quad (8)$$

Здесь R — газовая постоянная, T — температура.

Тепло, которое выделяется в струе, уменьшается по мере удаления от выхода из сопла. Если расстояние от начального сечения обозначим через l , то можно написать

$$Q(x, y) \sim e^{-q \cdot l(x, y)}. \quad (9)$$

Очевидно, что когда $l(x, y) = 0$, то $Q(x, y) \equiv 0$. Зная $Q_{\max}$, значение которого зависят от недогоревшей части горючего, можно записать закон тепловыделения в окончательном виде:

$$Q(x, y) = Q_{\max} (1 - e^{-q \cdot l(x, y)}).$$

Введя безразмерную величину $Q^* = Q/Q_{\max}$, получим

$$Q(x, y) = 1 - e^{-q \cdot l(x, y)}. \quad (10)$$

Задавая $l(x, y)$, где нужно закончить расчет, можем определить коэффициент q . Положив во всех уравнениях $Q(x, y) \equiv 0$ и заменяя γ_B на γ_∞ , получим уравнения, описывающие движение внешнего спутного потока.

2. Картина течения в большом масштабе показана на рис. 1. По известным формулам [2] численным методом определяем параметры внешнего потока после ударной волны MN и волны разрежения в точке K .

Расчет ведется по характеристикам первого семейства $B_{k-1}, D_{k-1}, B_k D_k, \dots, O_1 C_n D_n$. Сначала производится расчет начальных данных на BO_1 и AO_1 , затем методом последовательных приближений определяются параметры в узловой точке B : со стороны струи после

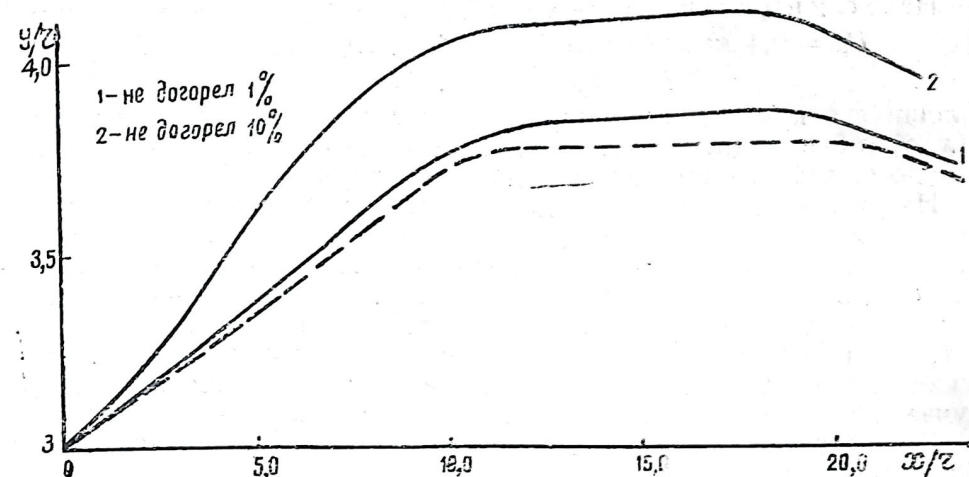


Рис. 2

волны разрежения и со стороны внешнего потока после ударной волны BD . Процесс последовательных приближений строится по ве-

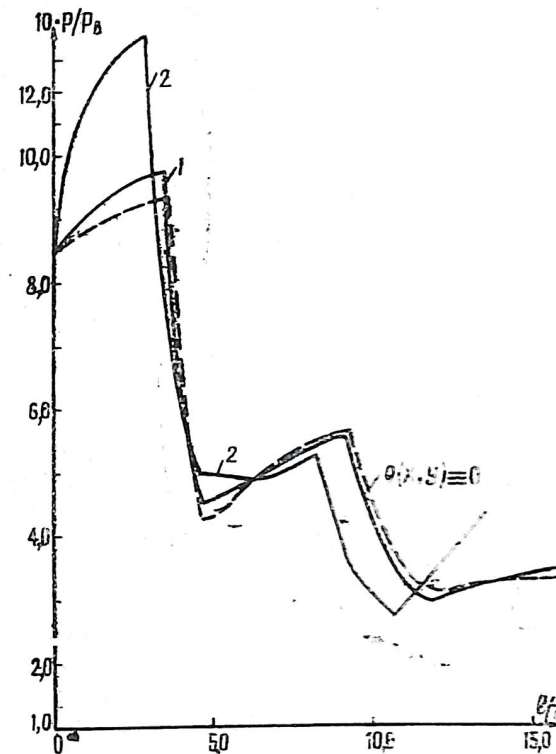


Рис. 3. 1 — не догорел 1%; 2 — не догорел 10%.

личине $\zeta = \tan \theta$ (θ — угол наклона скорости к оси x , направленной по оси симметрии, рис. 1) с целью получения равенства давлений на BC , т. е. по направлению θ_3 в точке B . Методика вычисления точки в поле течения и на твердой стенке почти такая же, как в [3]. После

нахождения координаты точки в поле течения надо определить $Q(x, y)$ для данной точки. В области BD_nC_n , BC_nO_1 и AO_1E_n решаем смешанную задачу, а в области $O_1O_2O_3O_4$ —задачу Гурса. При дальнейших расчетах вниз по течению эти области повторяются.

На рис. 2 представлены результаты расчетов, когда $M_\infty=3$, $\gamma_\infty=1,4$,

$$P_\infty = 0,4 \text{ кг/см}^2, \theta_1 = O_2 = 11^\circ 44', M_b = 2, \gamma_b = 1,33,$$

$$P_b = 0,65 \text{ кг/см}^2, \theta_{ст} = 3^\circ.$$

Сплошная и пунктирная линии—контуры струи, соответственно, когда $Q(x, y) \neq 0$ и $Q(x, y) \equiv 0$. Для баллистит-ракетного пороха JPN считалось, что при выходе из сопла не догорел 1 и 10%.

На рис. 3 показано распределение давления вдоль стенки после расширения в точке А. Результаты расчетов свидетельствуют, что чем больше тепловыделение в струе, тем выше давление на заданное тело, а также увеличивается сила тяги. Сравнение распределения давления вдоль стенки для плоской и осесимметричной задач показывает, что в плоском случае после каждого отражения волны разрежения давление остается почти постоянным, а в осесимметричном случае давление в таких областях увеличивается.

В заключение хочу выразить благодарность Х. А. Рахматулину за ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзоев И. М. |Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1969, № 1.
2. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. Гостехиздат, 1953.
3. Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. ВЦ АН СССР, 1961.

Институт математики и механики

Поступило 16. V 1970

И. М. Мирзэјев

Өзүндөн истилик верән вә верилән чисим бојунча ахан сәс
сүр'этиндән јүксәк сүр'этли оха [симметрик газ
шырнағынын ејни истигамәтли газ селинә ахмасынын
һесабаты

ХҮЛАСӘ

Һесабат характеристика методу илә апарылмышдыр. Нәтичәдә зәрбә далғаларынын вә ики мүхтәлиф газы бир-бириндән ајыран ајрычы сәтһин формалары, газ селини мәһдудлашдыран мүтләг дивар вә сел бојунча газ параметрләри тә'јин едилмишдыр.

УДК 539.3

Г. А. МАМЕДОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ НАПРЯЖЕНИЕ— ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ

На базе теории распространения упруго-пластических волн в гибких нитях при поперечном ударе разработан ряд методов исследования механических свойств материалов и определения их динамических-ударных диаграмм $\sigma = \sigma(\epsilon)$, которые нашли свое отражение в работах [1,2]. Позднее аналогичные исследования в несколько иной постановке были повторены в США [3] для случая ударного нагружения металлических проволок.

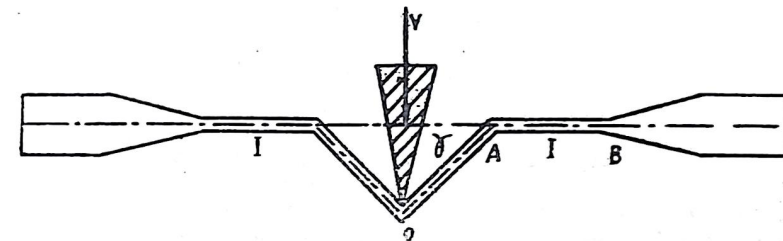


Рис. 1

В основе вышеуказанных методов была использована исходная зависимость $v(\gamma)$ скорости удара v от геометрического параметра (угла излома γ), определяемая из динамического эксперимента.

Настоящая статья посвящена исследованию нормального удара по гибким нитям (рис. 1) и дано решение задачи об определении диаграммы $\sigma = \sigma(\epsilon)$ с использованием исходных зависимостей $u(\tau)$, $v(\epsilon)$, представляющих собой дополнительные граничные условия. Показана также реализация указанного метода при построении ударной диаграммы $\sigma = \sigma(\epsilon)$ (напряжение—деформация) для промышленного резинового шнура.

§ 1. Основные уравнения, описывающие процесс распространения волн при поперечном ударе

Дифференциальные уравнения, описывающие плоское движение элемента нити, в проекциях на оси x , y при отсутствии массовых сил имеют вид:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} \left[\frac{\sigma}{1 + \epsilon} \left(1 + \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) \right], \quad (1, 1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} \left[\frac{\sigma}{1+\varepsilon} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right],$$

а в проекциях на касательную и нормаль к нити

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial s_0} - v \frac{\partial \theta}{\partial s_0} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (1, 2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial t} = (1+\varepsilon) b^2 \frac{\partial \theta}{\partial s_0}, \quad \frac{\partial v}{\partial s_0} + u \frac{\partial \theta}{\partial s_0} = (1+\varepsilon) \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

$$a(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}, \quad b(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{\sigma}{1+\varepsilon}}. \quad (1, 3)$$

Здесь a и b — скорости распространения продольных и поперечных возмущений в нити; s_0 — лагранжева координата рассматриваемого элемента; u и v — касательная и нормальная к нити проекции вектора скорости; ε и σ — деформация и напряжение; θ — угол между касательной в точке и осью OX ; ρ_0 — начальная плотность нити.

Если предположить закон деформирования известной непрерывной функцией своего аргумента, т. е. $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, то система уравнений (1, 1) допускает автомодельное решение. В случае нормального точечного удара, когда $\sigma(\varepsilon)$ удовлетворяет условиям $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} > 0$, $\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} < 0$, решение, полученное в [1], имеет вид:

$$u = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} d\varepsilon, \quad \rho_0 (b+u)^2 = \rho (1+\varepsilon), \quad (1, 4)$$

$$b+u = b \sec \gamma, \quad v = b \operatorname{tg} \gamma.$$

§ 2. Определение зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$

В [2] на основе решения (1, 4) при наличии экспериментальной зависимости $v(\gamma)$ — скорости удара от характерного геометрического параметра (угла излома γ) предложен метод определения динамической диаграммы $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ в параметрической форме $\sigma(\gamma)$ и $\varepsilon(\gamma)$. В отличие от вышеуказанных работ в настоящей статье показана возможность получения динамической зависимости напряжение — деформация $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ при исходных зависимостях скорости продольной частицы от скорости удара $u(v)$ или же скорости удара от деформации $v(\varepsilon)$, которую можно получить из динамического эксперимента при поперечном ударе (рис. 2).

Пользуясь условиями на фронте поперечной волны сильного разрыва, после некоторого преобразования уравнений (1, 4) получим:

$$\tau^2 = 2(1+\varepsilon)bu - u^2, \quad (2, 1)$$

$$u = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} d\varepsilon, \quad b = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0(1+\varepsilon)}}. \quad (2, 2)$$

Теперь покажем, что если известна зависимость $u(v)$, решение задачи, т. е. определение $\sigma(\varepsilon)$, сводится к решению дифференциального уравнения относительно деформации ε . Действительно, из (2, 1) имеем

$$(1+\varepsilon)b = \frac{u^2 + \tau^2}{2u} = \varphi(v). \quad (2, 3)$$

Учитывая, что $b = \sqrt{\frac{\sigma}{(1+\varepsilon)\rho_0}}$, получим

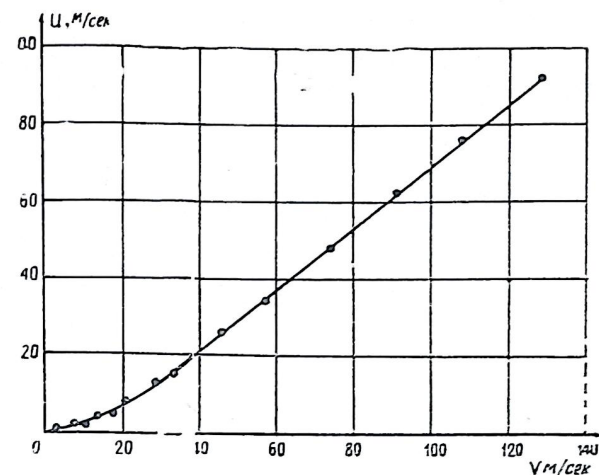
$$(1+\varepsilon)\sigma + \rho\varphi^2(v). \quad (2, 4)$$


Рис. 2

Дифференцируя выражения (2, 2) и (2, 4) по v , будем иметь:

$$\left(\frac{du}{dv} \right)^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{dv} \cdot \frac{d\varepsilon}{dv}, \quad (2, 5)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{dv} = \frac{2\varphi \cdot \varphi' \cdot (1+\varepsilon) - \varphi^2 \cdot \varepsilon'}{(1+\varepsilon)^2}. \quad (2, 6)$$

Исключив из (2, 5) и (2, 6) $\frac{d\sigma}{dv}$, получим

$$\frac{u'^2}{\varphi^2} = 2 \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} \cdot \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon'^2}{(1+\varepsilon)^2}$$

или

$$\left[\frac{(1+\varepsilon)'}{1+\varepsilon} \right]^2 - 2 \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} \cdot \frac{(1+\varepsilon)'}{1+\varepsilon} + \left(\frac{u'}{\varphi} \right)^2 = 0. \quad (2, 7)$$

Введем обозначения $\Lambda = \ln(1+\varepsilon)$, $\Phi = \ln \varphi(v)$, тогда уравнение (2, 7) примет вид

$$(\Lambda')^2 - 2\Phi' \cdot \Lambda' + \left(\frac{u'}{\varphi} \right)^2 = 0. \quad (2, 7')$$

Уравнение (2, 7') может быть непосредственно проинтегрировано. Действительно,

$$\Lambda' = \Phi' \pm \left[\Phi'^2 - \left(\frac{u'}{\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2, 8)$$

Можно показать, что в этом выражении нужно оставить знак минус.

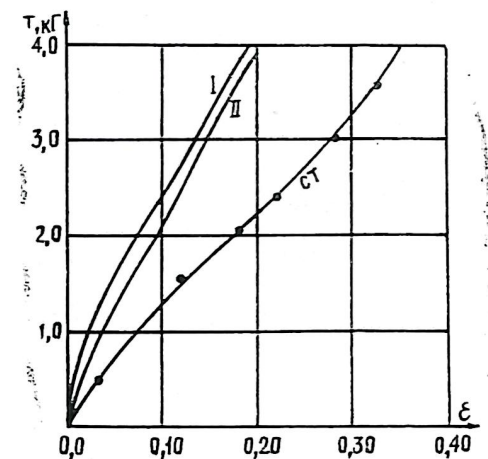


Рис. 3

Интегрируя уравнение (2, 8), будем иметь

$$\varepsilon(v) = \frac{(1 + \varepsilon_0) \varphi(v)}{\varphi(0)} e^{-\int_0^v \left[\Phi'^2 - \left(\frac{u'}{\varphi} \right)^2 \right]^{1/2} dv} - 1. \quad (2, 9)$$

Интегральная постоянная C определяется из начальных условий, т. е. из условия совпадения начальных участков динамических и статических кривых $\sigma(\varepsilon)$ имеем

$$C = \varphi(0) = \left[\frac{\sigma_0}{\rho_0} (1 + \varepsilon_0) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, уравнение (2, 9) совместно с уравнением (2, 4) дают параметрическое уравнение для определения зависимости $\sigma(\varepsilon)$. Решение задачи при исходной зависимости $v(\varepsilon)$ ввиду аналогичности здесь не приводится.

§ 3. Построение динамической диаграммы $\sigma = \sigma(\varepsilon)$

С целью реализации указанного метода для построения зависимости $\sigma(\varepsilon)$ нами исследованы экспериментальные данные, полученные в лаборатории динамики ИММ АН Азербайджанской ССР для резинового шнура. Для $u(v)$ эту зависимость с достаточно приемлемой точностью можно аппроксимировать функцией вида:

$$u(v) = 0,0114 v^2 + 0,0802 v, \quad v < 32,9;$$

$$u(v) = 0,8287 v - 12,1217, \quad v \geq 32,9.$$

По результатам вычислений построена диаграмма $\sigma(\varepsilon)$. На рис. 3 представлены кривые I и II, полученные, соответственно, в настоящей работе и в работе [2]. Анализ их показывает, что динамические кривые выше статической. Динамические кривые, полученные при различных исходных данных, почти совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. и Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Физматгиз, М., 1961.
2. Керимов К. А. „ДАН Азерб. ССР“, 1963, № 4.
3. Шульц А. В. и Тинг Т. С. Определение соотношения между напряжениями и деформациями в проволоке при поперечном ударе. Тр. американского об-ва инж.-мех. „Прикладная механика“, Е-35, № 2, 1969.

Институт математики
и механики

Поступило 19. V 1970

К. А. Маммэдов

Енинэ зэрбэ заманы кэркинлик-деформасија асылылыгынын тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә телин јүкләнмә һалы үчүн енинэ зэрбэ заманы „кэркинлик-деформасија“ диаграмынын тәјин үсулу верилмишдир.

Тәдгигатда телин һәрәкәтини һарактеризә едән вә квадратураја кәтирилән диференсиал тәнлик чыхарылмышдыр. Бундан башга, мүәллиф тәрәфиндән верилмиш үсула әсасән сәнајә әһәмийјәтли хүсуси резин үчүн $\sigma(\varepsilon)$ динамик диаграмы гурулмушдур.

УДК 539. 3

Г. Г. КУЛИЕВ

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ, ПОДКРЕПЛЕННОГО ШИРОКИМ КОЛЬЦОМ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ УПРУГОСТИ

Исследовано напряженно-деформированное состояние физически нелинейной упругой пластинки с отверстием, края которого подкреплены широким нелинейным упругим кольцом. Получены основные уравнения, граничные и контактные условия. Материал пластинки и кольца подчиняется „кубическому“ закону [4] напряжение—деформация.

1. Рассмотрим неограниченную упругую изотропную пластинку из физически нелинейного материала с отверстием, в которое впамяно нелинейно-упругое кольцо. Упругое равновесие пластинки и кольца описывается уравнениями плоской физически нелинейной теории упругости [2]. Для решения нелинейных уравнений применяется метод возмущений.

Представляя искомые функции в виде ряда по параметру, характеризующему нелинейно-упругие свойства материала:

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k F^{(k)}, \quad u = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k u^{(k)}, \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k v^{(k)}, \quad (1)$$

приходим в каждом приближении к необходимости интегрирования неоднородных бигармонических уравнений вида

$$\Delta \Delta F^{(i)} = L(F^{(0)}, \dots, F^{(i-1)}). \quad (2)$$

Перемещения определяем из нижеследующих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} = & \alpha_{11} \Delta F + \alpha_{12} \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right) + \alpha_{12} (\Delta F)^2 + \alpha_{22} \left[\left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right) + \right. \\ & + \frac{1}{r} F_r \left. \right]^2 + 2 \left(\frac{1}{r} F_{r\varphi} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi} \right)^2 + F_{rr}^2 + 2 \alpha_{22} \Delta F \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right) + \alpha_{31} (\Delta F)^3 + \\ & + \alpha_{32} \left[F_{rr}^2 + 2 \left(\frac{1}{r} F_r - \frac{1}{r^2} F_{\varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right)^2 \right] \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right) + \\ & + \alpha_{33} \left[\left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right)^3 + 2 \left(\frac{1}{r} F_{r\varphi} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi} \right)^2 \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right) + \right. \\ & + F_{rr}^2 \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right) + \left. \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right)^2 F_{rr} + 2 \left(\frac{1}{r} F_{r\varphi} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi} \right)^2 F_{rr} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F_{rr}^3 \Big] + \alpha_{33} (\Delta F)^2 \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right); \quad (3) \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} = \alpha_{11} \Delta F + \alpha_{12} F_{rr} + \alpha_{21} (\Delta F)^2 + \alpha_{22} \left[\left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. + 2 \left(\frac{1}{r} F_{r\varphi} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi} \right)^2 + F_{rr}^2 \right] + 2\alpha_{22} F_{rr} \Delta F + \alpha_{31} (\Delta F)^3 + \\
& \quad + \alpha_{32} \left[\left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} F_{r\varphi} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi} \right)^2 + F_{rr}^2 \right] F_{rr} + \\
& \quad + \alpha_{33} \left[\left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right)^3 + 2 \left(\frac{1}{r} F_{r\varphi} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi} \right)^2 \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right) + \right. \\
& \quad \left. + F_{rr}^2 \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right) + \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right)^2 F_{rr} + 2 \left(\frac{1}{r} F_{r\varphi} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{r^2} F_{\varphi} \right)^2 F_{rr} + F_{rr}^3 \right] + \alpha_{33} (\Delta F)^2 F_{rr}.
\end{aligned}$$

Выпишем разрешающее уравнение в полярных координатах для функций напряжений первого приближения, которое описывает упругое равновесие пластинки и кольца:

$$\begin{aligned}
& \Delta \Delta F^{(1)} + \alpha [\Delta (F^{(0)})^2] + \beta [\Delta (F_{rr}^{(0)})^2 + 2 \left(\frac{1}{r} F_{r\varphi}^{(0)} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0)} \right)^2 + \\
& \quad + \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi}^{(0)} + \frac{1}{r} F_r^{(0)} \right)^2] + 2 [\Delta F^{(0)} F_{rr}^{(0)}]_{rr} + \frac{2}{r^2} \left[\Delta F^{(0)} \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi}^{(0)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{r} F_r^{(0)} \right) \right]_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r} \left[\Delta F^{(0)} \left(\frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi}^{(0)} + \frac{1}{r} F_r^{(0)} \right) \right]_r + \\
& \quad + \frac{4}{r} \left[\Delta F^{(0)} \left(\frac{1}{r} F_{r\varphi}^{(0)} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0)} \right) \right]_{r\varphi} - \frac{4}{r^2} \left[\Delta F^{(0)} \left(\frac{1}{r} F_{r\varphi}^{(0)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0)} \right) \right]_{\varphi} \Big] = 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

2. Если на бесконечности пластинки заданы обычные поля напряжений, а внутренний контур кольца свободен от внешних усилий, то для любого приближения получим граничные условия в виде [3]:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_k^{(1)}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_k^{(1)}}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_k^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_k^{(1)}}{\partial r \partial \varphi} = 0 \text{ при } r=R; \\
& \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_{nn}^{(1)}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{nn}^{(1)}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_{nn}^{(1)}}{\partial r^2} = 0; \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_{nn}^{(1)}}{\partial \varphi} - \\
& \quad - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_{nn}^{(1)}}{\partial r \partial \varphi} = 0 \text{ при } r = \infty. \quad (5)
\end{aligned}$$

Если кольцо впаяно в круговое отверстие пластинки, то по контуру сая

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_k^{(i)} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_k^{(i)}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_k^{(i)}}{\partial r} \right) + \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{nn}^{(i)} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_{nn}^{(i)}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{nn}^{(i)}}{\partial r} \right), \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_k^{(i)} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial F_k^{(i)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_k^{(i)}}{\partial r \partial \varphi} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{nn}^{(i)} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial F_{nn}^{(i)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_{nn}^{(i)}}{\partial r \partial \varphi} \right), \quad (6) \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_k^{(i)} u_k^{(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{nn}^{(i)} u_{nn}^{(i)}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_k^{(i)} u_k^{(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{nn}^{(i)} u_{nn}^{(i)}.
\end{aligned}$$

При решении задач в нелинейной постановке будем исходить из известных решений линейной теории. Функция напряжений нулевого приближения для пластинки и кольца имеет вид [1]:

$$F^{(0)} = \frac{P}{2} [r^2 - \beta_{-1} \ln r], \quad r \geq R;$$

$$F^{(0)} = \frac{P}{2} [a_1 r^2 - b_{-1} R_2 \ln r], \quad R_1 \leq r \leq R_2; \quad R_2 = R. \quad (7)$$

Подставляя значение (7) и ее производные в уравнение (4), для определения функции напряжений $F^{(1)}$ соответственно находим следующие дифференциальные уравнения:

$$\Delta \Delta F_{nn}^{(1)} + \alpha \beta \left(8 P^2 \alpha_{-1}^2 \frac{R^4}{r^6} + 16 P^2 \beta_{-1} R^2 \frac{1}{r^4} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\Delta \Delta F_{кол}^{(1)} + \alpha \beta \left(8 P^2 b_{-1}^2 R_2^2 \frac{1}{r^6} + 16 P^2 a_1 b_{-1} R_2 \frac{1}{r^4} \right) = 0. \quad (9)$$

Решение уравнений (8) и (9) представляется в виде наложения частного интеграла, этих уравнений и интеграла однородного уравнения $\Delta \Delta F^{(1)} = 0$. Для рассматриваемого класса задач интеграл однородного уравнения берется в виде [2]:

$$F_{одн} = A \ln r + C r^2, \quad r \geq R; \quad (10)$$

$$F_{одн} = A' \ln r + C' r^2, \quad R_1 \leq r \leq R_2;$$

постоянные A , A' , C и C' определяются из граничных условий (5) и из условия сопряжения (6).

Частные интегралы уравнений (8), (9) имеют вид:

$$F_{част.} = -\frac{1}{8} \alpha \beta P^2 \beta_{-1}^2 \frac{R^4}{r^2} - 2 \alpha \beta \beta_{-1} R^2 \ln^2 r, \quad r \geq R;$$

$$F_{част.} = \frac{1}{8} \alpha \beta P^2 b_{-1}^2 \frac{R_2^2}{r^2} - 2 \alpha \beta P^2 a_1 b_{-1} R_2 \ln^2 r, \quad R_1 \leq r \leq R_2. \quad (11)$$

Учитывая (10) и (11), для пластинки и кольца, соответственно, найдем функцию напряжения $F^{(1)}(r, \varphi)$ в следующем виде:

$$F_{nn}^{(1)} = A \ln r + C r^2 - \frac{1}{8} \alpha \beta \beta_{-1}^2 P^2 \frac{R^4}{r^2} - 2 \alpha \beta \beta_{-1} P^2 R^2 \ln^2 r, \quad (12)$$

$$F_{кол}^{(1)} = A' \ln r + C' r - \frac{1}{8} \alpha \beta P^2 b_{-1}^2 \frac{R_2^2}{r^2} - 2 \alpha \beta b_{-1} a_1 P^2 R_2 \ln^2 r, \quad (13)$$

где $A = A(\alpha, \beta, \beta_{-1}, P, R)$, $C = 0$,

$A' = A'(\alpha, \beta, \beta_{-1}, a_1, b_{-1}, P, R, R_2)$, $C' = C'(\alpha, \beta, \beta_{-1}, a_1, b_{-1}, P, R, R_2)$.

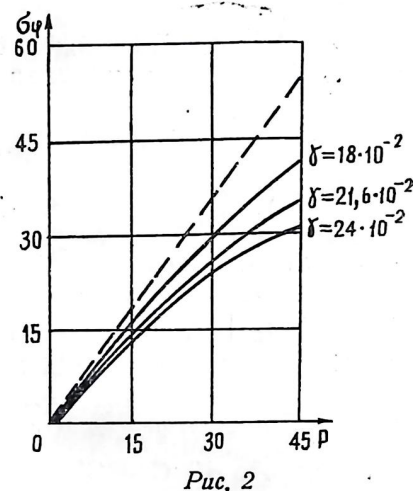
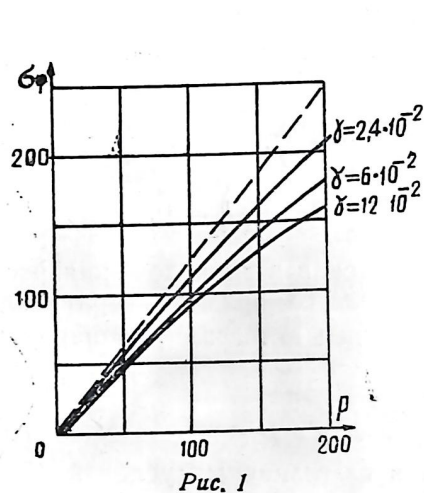
Значения коэффициентов концентрации напряжений σ_{φ} и σ_r для пластинки и кольца будут:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_{\varphi}^{(1)}}{P} = \frac{1}{2} \left(2 + \beta_{-1} \frac{R^2}{r^2} \right) + \left[-\frac{A}{P r^2} - \frac{3}{5} \alpha \beta \beta_{-1}^2 P R^4 \frac{1}{r^4} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{4 \alpha \beta \beta_{-1} R^2 P}{r^2} + \frac{4}{r^2} \alpha \beta \beta_{-1} R^2 P \ln r \right], \quad r \geq R; \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_{\varphi}^{(1)}}{P} = \frac{1}{2} \left(2 - \beta_{-1} \frac{R^2}{r^2} \right) + \left[\frac{A}{P r^2} + \frac{1}{4} \alpha \beta \beta_{-1}^2 P \frac{R^4}{r^4} - \right. \\
& \quad \left. - 4 \alpha \beta \beta_{-1} P R^2 \frac{\ln r}{r^2} \right], \quad r \geq R;
\end{aligned}$$

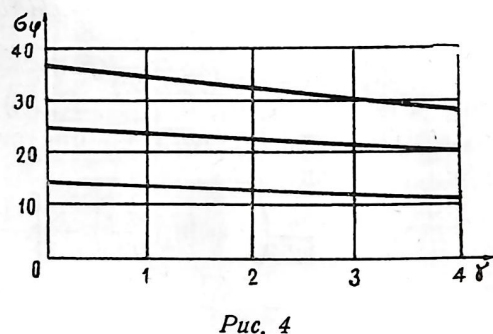
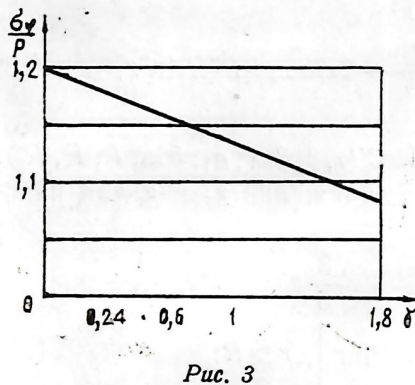
$$\frac{\sigma_r^{(1)}}{P} = \frac{1}{2} \left(2 a_1 + b_{-1} \frac{R_2^2}{r^2} \right) + \left[-\frac{A'}{P r^2} + \frac{2 C'}{P} - \frac{3}{4} \alpha \beta b_{-1}^2 P^2 \frac{1}{r^4} - \right.$$

$$\frac{\sigma_r^{(1)}}{P} = \frac{1}{2} \left(2a_1 - b_{-1} \frac{R_2}{r^2} \right) + \left[\frac{A'}{Pr^2} + \frac{2C'}{P} + \frac{1}{4} \alpha \beta P b_1^2 \frac{R_2^2}{r^4} - \right. \\ \left. - 4 \alpha \beta b_{-1} P R_2 \frac{\ln r}{r^2} \right], \quad R_1 \leq r \leq R_2; \quad (15)$$



Приведем выражение $\frac{\sigma_\varphi}{P}$ по контуру спая:

$$\frac{\sigma_\varphi}{P} \Big|_{r=R} = \frac{1}{2} (2a_1 + b_{-1}) - \gamma \left[\frac{1+R^2}{1-R^2} \left(-\frac{1}{4} b_{-1}^2 \frac{1}{R^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} b_{-1}^2 R^2 - 4a_1 b_{-1} \frac{\ln R}{R} - 4a_1 b_{-1} \frac{\ln R}{R} - 2\beta_{-1} + \frac{\beta_{-1}^2}{4} \ln R \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} b_{-1}^2 R^2 + \frac{3}{4} b_{-1}^2 \frac{1}{R^2} + 4b_{-1} a_1 - 4a_1 b_{-1} \ln R \right], \quad (16)$$



где $\gamma = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} P$ характеризует величину внешнего давления и физическую нелинейность материала.

Рассмотрим некоторые частные случаи для (16):

1- Абсолютно жесткое кольцо

$$\frac{\sigma_\varphi}{P} = 1,3333 - 5,1324\gamma. \quad (17)$$

2. Абсолютно гибкое кольцо

$$\frac{\sigma_\varphi}{P} = 2 - 11,4128\gamma. \quad (18)$$

3. Сплошная упругая круговая шайба

$$\frac{\sigma_\varphi}{P} = 1,221 - 0,9\gamma. \quad (19)$$

На рис. 1, 2, 3 и 4 соответственно показаны изменения напряжений и коэффициентов концентрации напряжений в зависимости от нагрузки и характеристики материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.
2. Цурпал И. А. „Прикладная механика“, т. IV, вып. 10, 1968.
3. Цурпал И. А. „ДАН УРСР“, 3, 340 (1964).
4. Evans R. J. and Pister K. S. Intern. J. solids structures 2, 427 (1966).

Институт математики
и механики

Поступило 9. VII 1970

Н. Н. Гулиjev

Гејри-хэтти еластики гануна табе олан мүнхтдэ кениш даирэви хэлгэ илэ бэркидилмиш даирэви дешик этрафында кэркинлик пайланмасы

ХҮЛАСЭ

Даирэви дешиклэ зэйфлэдилмиш физики гејри-хэтти еластики лөвхөний кэркинлик вэзижэти тэдгиг олуунмудур. Белэ ки, дешик кениш даирэви хэлгэ илэ мөхкөмлөндирилмишдир. Хэлгэ башга физики гејри-хэтти еластики материалдан хазырланмышдыр. Эсас тэнликлэр вэ сэрхэд шэртлэри алынмышдыр.

Лөвхөний вэ хэлгэний материалы кэркинлик вэ реформасија арасында „кубик“ ганунуна табедир.

УДК 539.374.

К. М. КУЛИЕВ

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ НЕОДИНАКОВЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ, ПРИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Пусть упругая изотропная плоскость ослаблена двумя неодинаковыми отверстиями, центры которых лежат на прямой, совпадающей с осью x (рис. 1). Расстояние между контурами отверстий равно S , а между центрами отверстий l . Радиусы малого и большого отверстий $r = 1$ и $R > 1$. Контур большого отверстия обозначим через L_1 , а малого — через L_0 . На бесконечности задано растягивающее усилие q (поперек линии центров). При этом напряжения возле отверстий определяются из следующих соотношений:

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{2} \left[2 \left(\frac{R^2}{l^2} + f_1 + R^2 f_2 + R^2 f_3 + 3R^4 f_4 \right) - (3R^4 f_5 + \right. \\ \left. + R^2 f_6 + f_7 + 6R^4 f_8) + 2R^2 f_9 + \left(1 + \frac{2R^2}{l^2} \right) f_{10} + f_{11} + R^2 f_{12} + \right. \\ \left. + 3R^4 f_{13} + R^2 f_{14} \right];$$

$$\sigma_{yy} = \frac{q}{2} \left[2 + 2 \left(\frac{R^2}{l^2} + f_1 + R^2 f_2 + R^2 f_3 + 3R^4 f_4 \right) + 3R^4 f_5 + \right. \\ \left. + R^2 f_6 + f_7 + 6R^4 f_8 + 2R^2 f_9 + \left(1 + \frac{2R^2}{l^2} \right) f_{10} + f_{11} + \right. \\ \left. + R^2 f_{12} + 3R^4 f_{13} + R^2 f_{14} \right];$$

$$\tau_{xy} = \frac{q}{2} [3R^4 f_{15} + R^2 f_{16} + f_{17} + 6R^4 f_{18} + 2R^2 f_{19} + f_{20} + \\ + f_{21} + R^2 f_{22} + 3R^4 f_{23} + R^2 f_{24}];$$

$f_1(x, y); f_2(x, y), \dots, f_{24}(x, y)$ — некоторые известные функции.

Исследование напряженного состояния в плоскости, ослабленной двумя неодинаковыми отверстиями, показало, что наибольший интерес представляют напряжения, действующие вблизи малого отверстия, так как большое отверстие значительно влияет на изменение напряженного состояния среды вблизи малого отверстия.

Эта задача при упругих деформациях решена А. С. Космодамианским [1]. На основании полученного решения методом „упругих“

напряжений [2] строим пластическое решение. Согласно этому методу за первое приближение берется упругое решение задачи концентрации. Поэтому первое приближение вычисляется по формуле (1). В дальнейшем напряжения будем записывать в безразмерном виде:

$$\bar{X}_x^{(1)} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_s}; \quad \bar{Y}_y^{(1)} = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_s}; \quad \bar{X}_y^{(1)} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_s}. \quad (2)$$

Второе приближение вычисляется по формулам:

$$\bar{X}_x^{(2)} = \bar{X}_x^{(1)} + \bar{\omega}^{(1)}(\bar{X}_x^{(1)} - \bar{\sigma}^{(1)}) + (-\beta_1 \bar{\omega}^{(1)} \bar{\sigma}^{(1)} + \beta_2 \bar{\omega}^{(1)} \bar{Y}_y^{(1)} + \\ + \beta_2 \bar{\varphi}_{0,1}) \cos^2 \theta + \bar{X}_x^{*(2)}; \\ \bar{Y}_y^{(2)} = \bar{Y}_y^{(1)} + \bar{\omega}^{(1)}(\bar{Y}_y^{(1)} - \bar{\sigma}^{(1)}) + (-\beta_1 \bar{\omega}^{(1)} \bar{\sigma}^{(1)} + \beta_2 \bar{\omega}^{(1)} \bar{Y}_y^{(1)} + \\ + \beta_2 \bar{\varphi}_{01}) \sin^2 \theta + \bar{Y}_y^{*(2)}; \quad (3)$$

$$\bar{X}_y^{(2)} = \bar{X}_y^{(1)} + \bar{\omega}^{(1)} \bar{X}_y^{(1)} + (-\beta_1 \bar{\omega}^{(1)} \bar{\sigma}^{(1)} + \beta_2 \bar{\omega}^{(1)} \bar{Y}_y^{(1)} + \beta_2 \bar{\varphi}_{01}) \sin \theta \cdot \cos \theta + \bar{X}_y^{*(2)}.$$

Здесь β_1 и β_2 — коэффициенты для плоского напряженного состояния:

$$\beta_1 = 2 + \nu, \quad \beta_2 = 1 + \nu.$$

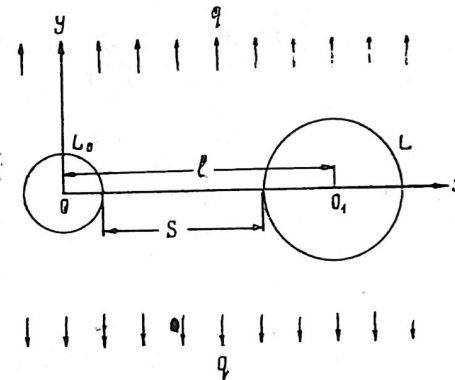


Рис. 1

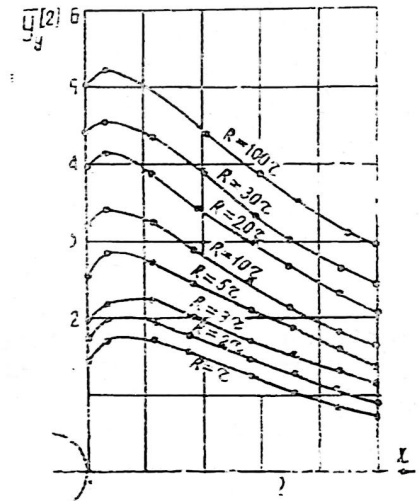


Рис. 2

Функция $\omega(\bar{e}_u)$ аппроксимирована по формулам (для сталей):

$$\omega(\bar{e}_u) = 0,5(\bar{e}_u - 1,005) \quad \text{для } 1,005 \leq \bar{e}_u \leq 1,5;$$

$$\omega(\bar{e}_u) = 0,2475 + 0,22(\bar{e}_u - 1,5)^3 - \\ - 0,414(\bar{e}_u - 1,5)^2 + 0,5(\bar{e}_u - 1,5) \quad \text{для } 1,5 \leq \bar{e}_u \leq 2,116;$$

$$\omega(\bar{e}_u) = 0,96 \left(\frac{\bar{e}_u - 1,124}{\bar{e}_u} \right) \quad \text{для } \bar{e}_u \geq 2,116.$$

Дополнительные члены $\bar{\varphi}_{01}$, $\bar{X}_x^{*(2)}$, $\bar{Y}_y^{*(2)}$ и $\bar{X}_y^{*(2)}$, входящие в (3) суть решения следующих краевых задач:

$$\nabla^2 \bar{X}_x^{*(2)} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(-\beta_1 \bar{\omega}^{(1)} \bar{\sigma}^{(1)} + \beta_2 \bar{\omega}^{(1)} \bar{Y}_y^{(1)} + \beta_2 \bar{\varphi}_{01}) \cos^2 \theta] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(-\beta_1 \bar{\omega}^{(1)} \bar{\sigma}^{(1)} + \beta_2 \bar{\omega}^{(1)} \bar{Y}_y^{(1)} + \beta_2 \bar{\varphi}_{01}) \sin^2 \theta]; \quad (4) \\ \bar{X}_x^{*(2)} + \bar{Y}_y^{*(2)} = 0,$$

на границе $\bar{X}_x^{*(2)} = \bar{Y}_y^{*(2)} = 0$;

$$\nabla^2 \bar{X}_y^{*(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\beta_1 \bar{\omega}^{(1)} \bar{\sigma}^{(1)} - \beta_2 \bar{\omega}^{(1)} \bar{Y}_y^{(1)} - \beta_2 \bar{\varphi}_{01}] -$$

$$-\nabla^2 [(-\beta_1 \bar{\omega}^{(1)} \bar{\sigma}^{(1)} + \beta_2 \bar{\omega}^{(1)} \bar{Y}_y^{(1)} + \beta_2 \bar{\varphi}_{01}) \sin \theta \cos \theta] \quad (5)$$

на границе $\bar{X}_y^{*(2)} = 0$;

$$\nabla^2 \bar{\varphi}_{01} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\bar{\omega}^{(1)} (\bar{X}_x^{(1)} - \bar{Y}_y^{(1)})] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\bar{\omega}^{(1)} \bar{X}_y^{(1)}) \quad (6)$$

на границе $\bar{\varphi}_{01} + 0$.

Интересующие нас упруго-пластические напряжения найдутся из выражений:

$$\bar{X}_x^{(2)} = \bar{X}_x^{(2)} - \bar{\omega}^{(2)} (\bar{X}_x^{(2)} - \bar{\sigma}^{(2)}),$$

$$\bar{Y}_y^{(2)} = \bar{Y}_y^{(2)} - \bar{\omega}^{(2)} (\bar{Y}_y^{(2)} - \bar{\sigma}^{(2)}), \quad (7)$$

$$\bar{X}_y^{(2)} = \bar{X}_y^{(2)} - \bar{\omega}^{(2)} \bar{X}_y^{(2)}.$$

Заметим, что в задачах, решенных методом упругих напряжений, обычно достаточно ограничиться вторым приближением (когда область пластических деформаций мала), при этом, как показывает практика решения задач, разница между третьим и вторым приближениями мала, так что погрешность не превышает 3—5%, что позволяет за исковое решение принимать второе приближение.

Граница между пластической и упругой областями определяется по упругому решению условием

$$\sigma_u^{(1)} = \sigma_s \text{ или } \bar{\sigma}_u^{(1)} = \frac{\sigma_u}{\sigma_s} = 1, \quad (8)$$

где σ_u — интенсивность напряжений, а σ_s — предел пропорциональности.

Наибольший интерес представляет распределение напряжений на площадках, перпендикулярных к оси y , т. е. в точках, лежащих на оси x (распределение напряжений между отверстиями). В этом случае $\bar{X}_y^{(1)} = 0$, $\bar{Y}_x^{(2)} = 0$. Подставляя (1) в (3), находим второе приближение. Полученные результаты подставляем в (7) и находим искомое решение (рис. 2). Дополнительные члены $\bar{X}_x^{*(2)}$, $\bar{Y}_y^{*(2)}$, $\bar{X}_y^{*(2)}$ и $\bar{\varphi}_{01}$, являющиеся решениями краевых задач (4), (5) и (6), были найдены ранее для пластинки, ослабленной бесконечными круговыми отверстиями [3]. Было также доказано, что эти дополнительные члены незначительно влияют на распределение напряжений около отверстий. Поэтому для нашей задачи этими членами пренебрегаем.

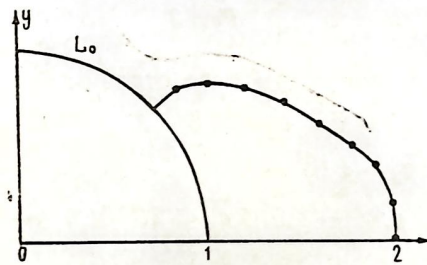


Рис. 3

Значение растягивающих усилий q_∞ было выбрано равным $0,651 \sigma_s$. Материал пластинки — сталь. Область, в которой ожидалось появление пластических деформаций, разбивалась сеткой, шаг которой по осям x и y был выбран постоянным и равным $h = 0,1$. После этого уравнение (8) решалось в узловых точках сетки. Для каждого сечения ($y = 0,0; 0,1; 0,2 \dots$) строились графики $\bar{\sigma}_u^{(1)} = \sigma_u(x)$, а затем определялись координаты точек границы между пластической и упругой

областями, удовлетворяющие условию (8). Пластическая область показана на рис. 3.

В этой задаче пластическое решение найдено для следующих случаев:

$$\frac{S}{r} = 5, \quad R = 2r, \quad R = 3r, \quad R = 5r, \quad R = 10r, \quad R = 20r, \quad R = 30r, \quad R = 100r.$$

Таким образом, увеличение радиуса большого отверстия значительно влияет на распределение напряжений вблизи малого отверстия при малых упруго-пластических деформациях. Это явление графически изображено на рис. 2.

Полученные данные показывают, что максимальные напряжения, полученные в результате решения данной задачи, равны:

$(\bar{Y}_y^{(2)})_{\max} = 1,701$	при $R = r$;
$(\bar{Y}_y^{(2)})_{\max} = 1,93$	„ $R = 2r$
$(\bar{Y}_y^{(2)})_{\max} = 2,16$	„ $R = 3r$;
$(\bar{Y}_y^{(2)})_{\max} = 2,96$	„ $R = 5r$;
$(\bar{Y}_y^{(2)})_{\max} = 3,38$	„ $R = 10r$;
$(\bar{Y}_y^{(2)})_{\max} = 4,16$	„ $R = 20r$;
$(\bar{Y}_y^{(2)})_{\max} = 4,54$	„ $R = 30r$;
$(\bar{Y}_y^{(2)})_{\max} = 5,23$	„ $R = 100r$,

ЛИТЕРАТУРА

1. Космодамианский А. С. Тр. ВНИМИ. 42, Л., 1961.
2. Панферов В. М. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 4.
3. Кулиев К. М. Пластическое деформирование пластин, ослабленных системой круговых отверстий. Канд. дисс., 1966.

Институт математики и
механики

Поступило 17. III 1971

К. М. Гулиев

Ејни олмајан ики даирэви дешиклэ зэйфлэдилмиш лөвһәнин
кичик еластики-пластики деформасијада кәркинлик вәзијјәти

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә ики ејни олмајан даирэви дешиклэ зэйфлэдилмиш лөвһәнин кичик еластики-пластики деформасијада кәркинлик вәзијјәтинә бахылмышдыр. Бурада әсас мәгсәд бөјүк даирәнин кичик даирә әтрафында кәркинлик вәзијјәтинә тәсир етмәсини тәдгиг етмәкдир.

УДК 539.375

В. М. МИРСАЛИМОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ТОРМОЖЕНИЯ РАСТУЩИХ ТРЕЩИН

Общезвестна возможность торможения растущих трещин или их локализация в случае позднего обнаружения. Мерами торможения распространения трещин, применяемыми на практике, являются подкрепления конструкции (пластинки) ребрами жесткости и высверливание отверстия в кончике трещины. В работе [1] исследована проблема подкрепления растущей трещины приклепанными ребрами жесткости, причем полученные результаты могут быть использованы для оптимального конструктивного предупреждения развития трещины.

Ниже рассматривается задача о влиянии эллиптического отверстия в кончике трещины на ее распространение. Из решения этой задачи получены решения задач о влиянии кругового отверстия и щели вдоль оси ординат в кончике трещины на ее развитие. Получены условия хрупкого разрушения.

1. Постановка задачи. Пусть сплошное деформированное упругое тело содержит трещины, являющиеся поверхностями разрыва смещений. Деформации тела считаем малыми. Введем систему прямоугольных декартовых координат x, y, z с центром O в конце трещины. При этом ось y направим по нормали к поверхности трещины, ось z — вдоль контура трещины, а ось x — в глубь тела. Будем считать выполненным условие локальной симметрии, согласно которому в малой окрестности каждой точки контура трещины имеет место симметрия относительно касательной плоскости к поверхности трещины в этой точке. Для торможения (локализации) развития трещин в ее кончике высверлено отверстие, представляющее собой эллипс:

$$\frac{x^2}{(1+m)^2} + \frac{y^2}{(1-m)^2} = R^2, \quad -1 \leq m < 1. \quad (1,1)$$

Постоянная $|m| \leq 1$ характеризуется эксцентриситетом. Подобрать для m различные значения от -1 до $+1$, можно получить эллиптическое отверстие с любым соотношением осей. В частности, если $m = 0$, то эллипс обращается в окружность. В предельном случае $m = -1$ эллипс превращается в разрез длиной $4R$ по оси Oy , заключенный между точками $y = \pm 2R$.

Ограничимся наиболее типичным и общим случаем, когда характерный линейный размер отверстия R мал сравнительно с характерным линейным размером тела L . Отметим, что в качестве L можно брать линейный размер трещины, расстояние конца трещины от границы тела. Рассмотрим окрестность конца трещины, малую сравнительно с характерным линейным размером тела, но большую по сравнению с размером отверстия в кончике трещины. Эта окрестность

представится на плоскости x, y бесконечной областью, занимающей внешность контура D , представляющего собой разрез вдоль $y = 0$ — $-\infty < x < -(1+m)R$ и эллипса (1,1) с центром в начале координат x, y . Параметры, характеризующие состояние деформированного тела в этой малой окрестности, очевидно, не зависят от z . В дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемое упругое тело находится в условиях сплошного сдвига. Такое напряженное состояние возникает также при кручении, когда исследуемая область мала по сравнению с характерным размером скручиваемого контура.

Представляет практический интерес постановка и решение следующей задачи теории упругости:

при $y = 0, -\infty < x < -(1+m)R$ $\tau_{yz} = 0$

на контуре отверстия $\tau_{zn} = 0$ (1,2)

при $y = 0, x \rightarrow \infty, \lim(\tau_{yz} \sqrt{x}) = N$.

Здесь N — коэффициент интенсивности напряжений (параметр нагружения), который считается известным, $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zn}$ — напряжения.

Заметим, что коэффициент интенсивности напряжений определяется только из решения задачи в целом и зависит от геометрии тела и нагрузки. Напряжения и смещения в рассматриваемом теле можно выразить через одну аналитическую функцию комплексного переменного $f(z)$ [2]:

$$w \operatorname{Re} f(z), \quad \tau_{xz} + \tau_{yz} = \overline{\mu f'(z)} \quad (1,3)$$

$$(z = x + iy).$$

Здесь $\mu = E/2(1+\nu)$ — модуль сдвига, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

При помощи представлений (1,3) искомая упругая задача (1,2) сведется к следующей краевой задаче для аналитической функции $f(z)$:

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z)}{dz} \right\} = 0 \quad \text{на } D, \quad (1,4)$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad \lim f(z) = -\frac{2iN}{\mu} \sqrt{z}.$$

Здесь dS — элемент дуги контура отверстия.

2. Решение краевой задачи. Для решения краевой задачи (1,4) перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи преобразования $z = \omega(\zeta)$. Аналитическая функция

$$z = \omega(\zeta) = R \left\{ -(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^2 - \frac{m}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^2} \right\}$$

осуществляет отображение верхней полуплоскости ζ на внешность контура D в физической плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. В результате поставленная упругая задача сведется к задаче определения одной аналитической функции из краевого условия для полуплоскости. Можно показать, что искомая аналитическая функция имеет вид

$$f'(z) = -\frac{iV}{\sqrt{2}\mu} \left\{ \frac{z + \sqrt{z^2 - 4mR^2} + 2R}{\sqrt{z^2 - 4mR^2} \sqrt{z + \sqrt{z^2 - 4mR^2}}} \right\}. \quad (2,1)$$

3. Анализ напряженного состояния. Соотношения (1,3) и (2,1) определяют напряжения и смещения в рассматриваемом теле. Выражения для напряжений не приводятся ввиду их громоздкости. Приведем формулы, дающие распределение напряжений вдоль осей координат:

при $\theta = 0$

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = \frac{N}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{r + \sqrt{r^2 - 4mR^2} + 2R}{\sqrt{r^2 - 4mR^2} \sqrt{r + \sqrt{r^2 - 4mR^2}}} \right\}. \quad (3,1)$$

Здесь $r\theta$ — полярные координаты с центром в точке O ($\theta = 0$ соответствует продолжению трещины, $r \geq (1+m)R$).

При $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r \geq (1-m)R$ имеем:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{N[2R + (r + \sqrt{r^2 + 4mR^2})]}{2\sqrt{r^2 + 4mR^2} \sqrt{r + \sqrt{r^2 + 4mR^2}}}, \\ \tau_{yz} &= \frac{N[(r + \sqrt{r^2 + 4mR^2}) - 2R]}{2\sqrt{r^2 + 4mR^2} \sqrt{r + \sqrt{r^2 + 4mR^2}}}. \end{aligned} \quad (3,2)$$

Развитие трещины продольного сдвига происходит по направлению максимального напряжения $\tau_{z\theta}$ [2]. Для $m \geq 0$ направлением максимального напряжения $\tau_{z\theta}$ является $\theta = 0$, т. е. продолжение трещины, а максимальное его значение равно

$$\tau_{z0} = \frac{2N}{(1-m)\sqrt{R}}. \quad (3,3)$$

Как только напряжения $\tau_{z\theta}$ окажется равным некоторой предельной величине τ , характерной для данного материала, трещина начнет распространяться. Следовательно, условием хрупкого разрушения будет

$$N = \frac{\tau\sqrt{R}}{2} (1-m). \quad (3,4)$$

Из соотношения (2,1) получим решение для наиболее важных частных случаев: для кругового отверстия и щели вдоль $x = 0$, $-2R < y < +2R$.

4. Круговое отверстие. Положив $m = 0$, из выражения (2,1) будем иметь

$$f'(z) = -\frac{iN}{\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{R}{z^{3/2}} \right). \quad (4,1)$$

Используя соотношения (1,3) и (4,1), найдем напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{N}{\sqrt{r}} \left(\sin \frac{1}{2} \theta + \frac{R}{r} \sin \frac{3}{2} \theta \right), \\ \tau_{yz} &= \frac{N}{\sqrt{r}} \left(\cos \frac{1}{2} \theta + \frac{R}{r} \cos \frac{3}{2} \theta \right). \end{aligned} \quad (4,2)$$

Для кругового отверстия условием хрупкого разрушения будет

$$N = \frac{\tau\sqrt{R}}{2}. \quad (4,3)$$

5. Щель вдоль $x = 0$, $-2R < y < 2R$. Соотношение (2,1) дает решение для указанного случая при $m = -1$. Соотношения для напряжений ввиду их громоздкости не приводятся.

Для определения напряжений в окрестности концов щели перейдем от системы координат xOy к системе $x_1O_1y_1$ с началом в вершине щели $(0, 2R)$. При этом функция $f'_1(z_1)$, играющая ту же роль в сис-

теме координат $x_1O_1y_1$, что и $f'(z)$ в системе xOy , может быть определена по формуле [3]:

$$f'_1(z_1) = f'(z_1 + z_0) \quad (z_0 = 2iR).$$

Теперь введем полярную систему координат $S_1\beta$ с началом в точке O_1 , принимая за полярную ось нормаль к берегам щели в этой точке.

Для напряжений имеет место соотношение

$$\tau_{x_1z} + i\tau_{y_1z} = \mu f'_1(z_1) \quad (z_1 = S_1 e^{i\beta}).$$

Рассмотрим малую область в окрестности конца щели, для которой справедливо неравенство $|z_1| \ll 2R$. Для указанной области после несложных выкладок можно записать

$$\tau_{x_1z} - i\tau_{y_1z} = -\frac{N(1+i)}{2\sqrt{z_1}} + O\left(\sqrt{\frac{z_1}{2R}}\right). \quad (5,1)$$

Для напряжения $\tau_{z\beta}$ в окрестности концов щели имеем выражение

$$\tau_{z\beta} = \frac{N}{2\sqrt{S_1}} \left(\cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right). \quad (5,2)$$

Из равенства $\partial \tau_{z\beta} / \partial \beta = 0$ найден, что $\beta = \frac{\pi}{2}$ является направлением

максимального напряжения $\tau_{z\beta}$. При $\beta = \pi/2$ напряжение равно

$$\tau_{z\beta} = \frac{N}{\sqrt{2}\sqrt{S_1}} = \frac{N_1}{\sqrt{S_1}}.$$

Здесь N_1 — играет роль коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины щели. Условием хрупкого разрушения в этом случае будет

$$N_1 = \frac{N}{\sqrt{2}} = \frac{K_{IIIC}}{\sqrt{2}}. \quad (5,3)$$

Здесь K_{IIIC} — вязкость разрушения, введенная впервые Ирвином [4].

На рисунке показана эпюра безразмерного напряжения τ_{yz}^*

$= \tau_{yz}\sqrt{R}/N$ на продолжении трещины для значений $m = -1; -0,5; 0; 0,5$. Здесь же штрихом показана кривая для случая отсутствия отверстия в кончике трещины. Согласно полученному условию (3,4) развитие трещины начинается как только коэффициент интенсивности напряжений достигнет некоторой критической величины $K = \tau\sqrt{R}(1-m)/2$, характерной для данного материала и зависящей от геометрии отверстия в кончике трещины и прочности материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П., Мирсалимов В. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1969, № 1.
2. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига. МПП, т. 25. вып. 6, 1961.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е, „Наука“, М., 1966.
4. Irvin G. R. Fracture in Handbuch der Physik, Berlin. Springer, 1958, Bd. 6.

Институт математики
и механики

Поступило 17. III 1971

Мәгаләдә жарығын учунда ачылмыш еллиптик дәлијин жарығын артмасына тәсири мәсәләсинә бахылмышдыр. Бахылан мәсәләнин һәллиндән жарығын учунда ачылмыш даирәви дәлијин вә ординат оху истигамәтиндә ачылмыш чатлағын жарығын инкишафына тәсири мәсәләләри һәлл едилмишдир. Нәтичәдә көврәк дағылма шәрти алынмышдыр.

УДК 539. 37 6-1-532. 135

Р. А. ЮЗБЕКОВ

ИЗГИБ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Задача о деформации прямоугольной пластины из нелинейного вязко-упругого материала строится методом последовательных приближений.

1. Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q(x, y), \quad (1)$$

где M_{xx} , M_{yy} — изгибающие, а M_{xy} — крутящий моменты, $q(x, y)$ — распределенная по поверхности пластинки интенсивность нагрузки.

Рассмотрим случай шарнирного закрепления конутра пластинки, т. е.

при $x = 0$ и $x = a$ $W = 0$, $M_{xx} = 0$;

при $y = 0$ и $y = b$ $W = 0$, $M_{yy} = 0$.

Изгиб упругой пластинки в этом случае определяется формулой (1):

$$W(x, y) = \frac{4}{L\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \times \\ \times \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy,$$

где a , b — размеры пластинки, соответственно, в направлении осей x

и y ; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость;

ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; h — толщина пластинки. В случае постоянного распределения нагрузки по поверхности пластинки, т. е. $q(x, y) = q_0 = \text{const}$, будем иметь

$$W(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \quad (2')$$

II. Рассмотрим случай, когда материал пластинки обладает свойством линейной вязко-упругости.

Соотношения Больцмана между девиаторами напряжений деформации l_{ij} и девиаторами напряжений s_{ij} в изображениях Лапласа имеют вид:

$$\begin{cases} 2G_0 \bar{l}_{ij} = s_{ij}(1 + \Gamma), \\ \bar{\sigma} = K\theta, \end{cases} \quad (3)$$

где G_0 — мгновенный модуль сдвига, K — модуль объемной деформации, θ — относительное изменение объема, σ — среднее напряжение, $\bar{R}$, $\bar{\Gamma}$ — изображение универсальных функций $R(t)$ и $\Gamma(t)$, определяемых экспериментально, соответственно, из опытов на релаксацию и ползучесть.

Соотношения (3) совпадают с соответствующими соотношениями упругой среды, если в последних заменить

$$\frac{1}{G} \rightarrow \frac{1}{G_0}(1 + \bar{\Gamma}), \quad G \rightarrow G_0(1 - \bar{R}). \quad (4)$$

Решение линейной вязко-упругости по принципу Вольтерра получим из упругого решения путем замены упругих постоянных соответствующими интегральными операторами.

Решение (2) содержит следующую комбинацию упругих постоянных:

$$\frac{1 - \nu^2}{E}.$$

Учитывая соотношения (4) и зависимости между E , ν , G , K , соответствующий интегральный оператор в изображениях можно представить в виде

$$\frac{1 - \nu^2}{E} \rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2G_0}(1 + \bar{\Gamma}) + \frac{1}{2K} \bar{g}_{1/2} \right].$$

Функция $g_{1/2}(t)$, изображение которой есть $\bar{g}_{1/2}$, определяется из опыта на релаксацию [2]:

$$g_{1/2}(t) = 1 - \frac{1}{9K} R(t).$$

Отсюда получаем решение линейной вязкой упругости из (2') в виде

$$\begin{aligned} W(x, y, t) = & \frac{96}{\pi^6 h^3} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{2G_0} q(t) + \frac{1}{2G_0} \int_0^t \Gamma(t - \tau) q(\tau) d\tau + \frac{1}{2K_0} \int_0^t g_{1/2}(t - \tau) q(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

III. Теперь рассмотрим случай нелинейной вязко-упругости. Зависимость между девиаторами напряжений и деформацией возьмем в виде [3]:

$$\begin{cases} \frac{s_{ij}}{2G_0} = l_{ij}[1 - \omega(\epsilon_w)] - \int_0^t R(t - \tau) [1 - \omega(\epsilon_w)] l_{ij}(\tau) d\tau, \\ \tau = K\theta. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь ϵ_w — интенсивность деформации, $\omega(\epsilon_w)$ — некоторая функция интенсивности деформаций, определяемая экспериментально. Преобразуем (6) к виду:

$$\begin{cases} s_{ij} = s'_{ij} + s_{ij\omega}, \\ \sigma = K\theta. \end{cases}$$

Соответственно получим:

$$\begin{cases} s'_{ij} = \sigma'_{ij} + s_{ij\omega}, \\ \sigma' = \sigma, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} s'_{ij} &= 2G_0 [l_{ij} - \int_0^t R(t - \tau) l_{ij}(\tau) d\tau], \\ s_{ij\omega} &= -2G_0 [l_{ij\omega} - \int_0^t R(t - \tau) l_{ij}(\tau) \omega d\tau]. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя соотношение (8), составляем выражение для моментов:

$$M_{ij} = M'_{ij} + M_{ij\omega}, \quad (10)$$

где

$$M'_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_{ij} z dz, \quad M_{ij\omega} = \int_{-h/2}^{h/2} s_{ij\omega} z dz.$$

Подставив (10) в уравнение равновесия (1), получим

$$\frac{\partial^2 M'_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M'_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M'_{xy}}{\partial x \partial y} = -(q - q_\omega), \quad (11)$$

где

$$q_\omega = \frac{\partial^2 M_{xx\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy\omega}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy\omega}}{\partial x \partial y}. \quad (12)$$

Из (11), учитывая, что напряжения, отмеченные штрихом, связаны с деформациями соотношением (9), видно, что искомое перемещение $W(x, y, t)$ есть решение соответствующей задачи линейной вязко-упругости при наличии первоначального постоянного давления $q_0(t)$ и дополнительного давления $q_\omega(x, y, t)$. Отсюда становится очевидной возможность применения метода последовательных приближений [3].

За первое приближение принимается решение при $\omega = 0$ (линейное вязко-упругое решение), которое дается формулой (5). При любом последующем приближении величина q_ω определяется из предыдущего приближения с помощью формулы (12), а решение опять-таки дается формулой (5) при замене $q_0(t)$ на $q_0(t) + q_\omega(x, y, t)$.

Указанным выше способом найдем второе приближение. Исходя из соотношений

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \epsilon_{xy} = -sz \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

найдем компоненты девиаторов и интенсивность деформаций. Пусть $\omega = A\epsilon_w^\alpha$, где A и α — постоянные числа. По известным ϵ_{ij} определяются l_{ij} и ϵ_w . Далее с помощью соотношений (9), (10) и (12) определяется дополнительная нагрузка. После несложных преобразований она примет вид

$$q_\omega = C \left[\varphi_{mn}(x, y, t) - \int_0^t R(t - \tau) \varphi_{mn}(x, y, \tau) d\tau \right],$$

где введены обозначения:

$$C = -2AG_0 \left(\frac{64}{\pi^4 h^3} \right)^{\alpha+1} \left(\frac{h}{2} \right)^{\alpha+3} \frac{1}{\alpha+3} \frac{1}{2^{\alpha/2}};$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{mn}(x, y, t) = & \left[2\pi^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^4 n^4 + b^4 m^4 + 5a^2 b^2 mn}{mn(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \times \right. \right. \\
& \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \Big) \varphi_{mn}(x, y) + 2\pi ab^2 \times \\
& \times \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b^2 m^2 + 5a^2 n^2}{n(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\
& + 2\pi a^2 b \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a^2 n^2 + 5b^2 m^2}{m(m^2 b^2 + a^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \\
& + a^2 b^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b^2 m^2 - a^2 n^2}{mn(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \\
& + a^2 b^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a^2 n^2 - b^2 m^2}{mn(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \\
& - 12a^2 b^3 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \Big] \psi^{a+1}(t); \\
\varphi_{mn}(x, y) = & \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{na^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \right)^2 + \right. \\
& + \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mb^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \right)^2 - \\
& - 2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mb^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \right) \times \\
& \times \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{na^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \right) + \\
& + 6 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \right)^2 \Big] \frac{a}{2};
\end{aligned}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2C_0} q(t) + \frac{1}{2C_0} \int_0^t \Gamma(t-\tau) q(\tau) d\tau + \frac{1}{2K} \int_0^t q_{11}(t-\tau) q(\tau) d\tau.$$

С помощью найденного второго приближения отыскивается третье приближение и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. М., "Наука", 1966.
2. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термо-вязкоупругости. М., "Наука", 1970.
3. Москвитин В. В. Механика полимеров, 1967, 2, 207.

Институт математики
и механики

Поступило 17. III 1971

Р. А. Лүзбәјов

Физикий гејри-хәтти өзүлү-еластик дүзбучаглы лөвһәнин
енинә пәјланмыш гүввәләрин тә'сири илә әјилмәси

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда В. В. Москвитин тәрәфиндән тәклиф олунмуш арды-
чыл јахынлашма методуну тәтбиг етмәклә, мәсәләнин ардычыл ја-
хынлашмаларла аналитик һәлли алынмышдыр.

УДК 532.546

М. Н. ВЕЛИЕВ, И. И. ДЖАББАРОВ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКВАЖИН, РАСПОЛОЖЕННЫХ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ СО СЛАБОПРОНИЦАЕМОЙ КРОВЛЕЙ

В работе [2] рассмотрена задача о движении упругой жидкости в упругом неоднородном пласте, кровля которого слабопроницаема, а подошва непроницаема, к совершенной скважине, расположенной в одной из зон в произвольной точке. В настоящей статье рассматривается случай, когда в каждой зоне пласта имеются скважины. Точно так же, как в указанной работе, предположим, что в пласте имеется зона в виде круга (первая зона), внутри которой коэффициенты проницаемости и пьезопроводности имеют величины k_1, α_1 , а во всей остальной части пласта (вторая зона) соответствующие параметры имеют значения k_2, α_2 . В начальный момент времени давление во всем пласте считается постоянным и равным нулю. Считается также равным нулю давление, поддерживаемое в вышележащем пласте.

Предполагается, что скважины, расположенные в соответствующих зонах пласта, пущены в эксплуатацию с заданными переменными дебитами $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$. Требуется определить функцию давления в пласте в любой момент времени в произвольной точке его.

Математически рассматриваемую задачу сформулируем следующим образом: найти решение системы дифференциальных уравнений в частных производных, учитывающих слабопроницаемость кровли и непроницаемость подошвы пласта:

$$\begin{cases} \Delta P_1 - \alpha_1 P_1 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial P_1}{\partial t}, \\ (0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t > 0, \text{ первая зона}), \\ \Delta P_2 - \alpha_2 P_2 = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial P_2}{\partial t}, \\ (a < r \leq \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t > 0, \text{ вторая зона}), \end{cases} \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$; $\alpha_1 = \frac{k_{r1}}{k_1 b b_r}$, $\alpha_2 = \frac{k_{r2}}{k_2 b b_r}$; b_r — мощность перемычки; k_{r1}, k_{r2} — проницаемости перемычки в соответствующих зонах, при начальных и граничных условиях:

$$P_1 = P_2 = 0 \quad \text{при} \quad t = 0; \quad (2)$$

$$\left(R_1 \frac{\partial P_1}{\partial R_1} \right)_{R_1 \rightarrow 0} = \frac{Q_1^{(1)}}{2\pi b k_1} = Q_1(t); \quad (3)$$

$$P_1 = P_2, \quad k_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} = k_2 \frac{\partial P_2}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = a; \quad (4)$$

$$P_2 = 0 \quad \text{при} \quad r = \infty, \quad (5)$$

где $R_1^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi$, $R_2^2 = r^2 + r_2^2 - 2rr_2 \cos(\varphi - \varphi_0)$, $i = 1, 2$.

Индекс $i = 1$ относится к первой зоне, $i = 2$ ко второй.

Для решения поставленной задачи применим интегральное преобразование Лапласа:

$$\bar{P}_i(r, \varphi, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_i(r, \varphi, t) dt,$$

где λ — параметр преобразования, $\bar{P}_i$ — изображение функции P_i , после чего с учетом начального условия (2) получим

$$\Delta \bar{P}_i - q_i^2 \bar{P}_i = 0, \quad (6)$$

где $q_i^2 = \alpha_i^2 + \frac{\lambda}{\alpha_i}$.

Так же как в работах [1, 2], решая (6) при условиях (3) — (5) предварительно применив к ним преобразования Лапласа, получим

$$\begin{aligned} -\bar{P}_1 &= \bar{Q}_1(\lambda) \left\{ K_0(q_1 R_1) + \sum_{n=0}^\infty I_n(b_1 r) [a_n^{(1)} \cos n \varphi + a_n^{(2)} \sin n \varphi] \right\}, \\ -\bar{P}_2 &= \bar{Q}_2(\lambda) \left\{ K_0(q_2 R_2) + \sum_{n=0}^\infty K_n(q_2 r) [b_n^{(1)} \cos n \varphi + b_n^{(2)} \sin n \varphi] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &= \frac{\bar{Q}_1 \nu \delta \varepsilon_n K_n(q_2 R_2) \cos n \varphi_0 + \varepsilon_n [\nu \delta K_n(q_1 a) K'_n(q_2 a) - \\ &\quad I'_n(q_1 a) K_n(q_2 a) - \nu \delta I_n(q_1 a) K'_n(q_2 a) - \\ &\quad - K'_n(q_1 a) K_n(q_2 a)] I_n(q_1 r_1)}{I'_n(q_1 a) K_n(q_2 a) - \nu \delta I_n(q_1 a) K'_n(q_2 a)}, \\ a_n^{(2)} &= \frac{\bar{Q}_2 \nu \delta \varepsilon_n \sin n \varphi_0 K_n(q_2 r_2)}{q_2 a [I'_n(q_1 a) K_n(q_2 a) - \nu \delta I_n(q_1 a) K'_n(q_2 a)]}, \\ b_n^{(1)} &= \frac{\varepsilon_n}{q_1 a \bar{Q}_1} \frac{I_n(q_1 r_1) + \varepsilon_n [\nu \delta I'_n(q_2 a) I_n(q_1 a) - I_n(q_2 a) I'_n(q_1 a)] \times \\ &\quad \times K_n(q_2 r_2) \cos n \varphi_0}{I'_n(q_1 a) K_n(q_2 a) - \nu \delta I_n(b_1 a) K'_n(q_2 a)}, \\ b_n^{(2)} &= \frac{\varepsilon_n [\nu \delta I_n(q_1 a) I'_n(q_2 a) - I_n(q_2 a) I'_n(q_1 a)] K_n(q_2 r_2) \sin n \varphi_0}{I'_n(q_1 a) K_n(q_2 a) - \nu \delta I_n(q_1 a) K'_n(q_2 a)}, \\ \bar{Q} &= \frac{\bar{Q}_2(\lambda)}{\bar{Q}_1(\lambda)}, \quad \delta = \frac{q_2}{q_1}, \quad \nu = \frac{k_2}{k_1}. \end{aligned}$$

Для перехода к оригиналам (7) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} -P_1 &= \bar{Q}_1(\lambda) \bar{A}_1(\lambda) + \bar{Q}_2(\lambda) \bar{A}_2(\lambda), \\ -P_2 &= \bar{Q}_1(\lambda) \bar{B}_1(\lambda) + \bar{Q}_2(\lambda) \bar{B}_2(\lambda), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_1(\lambda) &= \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n \cos n \varphi \left[I_n(q_1 r_1) K_n(q_1 r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu \delta K_n(q_1 a) K'_n(q_2 a) - K'_n(q_1 a) K_n(q_2 a)}{I'_n(q_1 a) K_n(q_2 a) - \nu \delta I_n(q_1 a) K'_n(q_2 a)} I_n(q_1 r) I_n(q_1 r_1) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_2(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \nu \delta I_n(q_1 r) K_n(q_2 r_2) \cos n(\varphi - \varphi_0)}{q_2 a [I_n'(q_1 a) K_n(q_2 a) - \nu \delta I_n(q_1 a) K_n'(q_2 a)]}, \\ \bar{B}_1(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\varphi - \varphi_0) \left[I_n(q_2 r) K_n(q_2 r_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu \delta I_n'(q_2 a) I_n(q_1 a) - I_n(q_2 a) I_n'(q_1 a)}{I_n'(q_1 a) K_n(q_2 a) - \nu \delta I_n(q_1 a) K_n'(q_2 a)} K_n(q_2 r) K_n(q_2 r_2) \right], \\ \bar{B}_2(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n I_n(q_1 r_1) K_n(q_2 r) \cos n\varphi}{q_1 a [I_n'(q_1 a) K_n(q_2 a) - \nu \delta I_n(q_1 a) K_n'(q_2 a)]}.\end{aligned}$$

Используя теорему умножения известную из теории операционных исчислений, оригиналы изображений (8) находим в следующем виде:

$$\begin{aligned}-P_1 &= \int_0^t A_1(\tau) Q_1(t-\tau) d\tau + \int_0^t A_2(\tau) Q_2(t-\tau) d\tau, \\ -P_2 &= \int_0^t B_1(\tau) Q_1(t-\tau) d\tau + \int_0^t B_2(\tau) Q_2(t-\tau) d\tau,\end{aligned}\quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}A_1(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^{\infty} \frac{\sigma u e^{-\Gamma \tau} J_n(u \bar{r}_1) J_n(u \bar{r})}{(\alpha_1^2 a^2 + u^2) [M_n^2(u) + N_n^2(u)]} du, \\ A_2(\tau) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\varphi - \varphi_0) \int_0^{\infty} \frac{u e^{-\Gamma \tau} E_n(u, \bar{r}, \bar{r}_2)}{\rho (\alpha_1^2 a^2 + u^2) [M_n^2(u) + N_n^2(u)]} du, \\ B_1(\tau) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\varphi - \varphi_0) \int_0^{\infty} \frac{u e^{-\Gamma \tau} U_n(u \bar{r}) U_n(u \bar{r}_2)}{(\alpha_1^2 a^2 + u^2) [M_n^2(u) + N_n^2(u)]} du, \\ B_2(\tau) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^{\infty} \frac{e^{-\Gamma \tau} F_n(u, \bar{r}, \bar{r}_1)}{(\alpha_1^2 a^2 + u^2) [M_n^2(u) + N_n^2(u)]} du.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}M_n(u) &= \nu \delta J_n(u) J_n'(\rho) - J_n'(u) J_n(\rho), \quad N_n(u) = \nu \delta J_n(u) Y_n'(\rho) - J_n'(u) Y_n(\rho), \\ E_n(u, \bar{r}, \bar{r}_2) &= M_n(u) J_n(u \bar{r}) Y_n(\rho \bar{r}_2) - N_n(u) J_n(u \bar{r}) J_n(\rho \bar{r}_2), \\ F_n(u, \bar{r}, \bar{r}_1) &= M_n(u) J_n(u \bar{r}_1) Y_n(\rho \bar{r}) - N_n(u) J_n(u \bar{r}_1) J_n(\rho \bar{r}), \\ U_n(u, \bar{r}) &= N_n(u) J_n(\rho \bar{r}) - M_n(u) Y_n(\rho \bar{r}), \quad \Gamma = \alpha_1 \left(\frac{a^2}{a^2} + \alpha_1^2 \right).\end{aligned}$$

Таким образом, поставленная задача решена. Как видно из формул (9), они очень сложны для проведения гидродинамических расчетов. Поэтому необходимо их упростить. Как в работе [2] для малых значений параметра λ , которые соответствуют большим значениям времени в оригинале, заменяя цилиндрические функции в выражениях A_1, A_2, B_1, B_2 первыми членами в их разложении при малых значениях аргумента (кроме функций с нулевыми индексами), когда дебиты скважин Q_1 и Q_2 постоянны, будем иметь:

$$\begin{aligned}-\bar{P}_1 &= A \left\{ \frac{1}{\lambda} K_0(q_1 r) - \frac{1}{\lambda} K_0(q_1 a) + \frac{1}{\lambda} \frac{k_1}{k_2} K_0(q_2 a) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\lambda} \ln \left[1 - 2 \frac{r_1}{r} \cos \varphi + \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] - \frac{1}{2\lambda} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{r r_1}{a^2} \cos \varphi + \left(\frac{r r_1}{a^2} \right)^2 \right] \right\} + \frac{B}{\lambda} \left\{ K_0(q_2 r_2) - \frac{k_2}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{r}{r_2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (10) \\ -\bar{P}_2 &= \frac{B}{\lambda} \left\{ K_0(q_2 R_2) - \frac{1}{2} \ln \left[1 - 2 \frac{r}{r_2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{a^2}{r r_2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{a^2}{r r_2} \right)^2 \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{A}{\lambda} \left\{ \frac{k_1}{k_2} K_0(q_2 r) - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{r_1}{r} \cos \varphi + \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \right\}.\end{aligned}$$

Переходя к оригиналам, получим:

$$\begin{aligned}-P_1 &= A \left\{ L\left(a_1, \frac{r^2}{4 \alpha_1 t}\right) - L\left(a_1, \frac{a^2}{4 \alpha_1 t}\right) + \frac{k_1}{k_2} L\left(a_2, \frac{a^2}{4 \alpha_2 t}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \left[1 - 2 \frac{r_1}{r} \cos \varphi + \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] - \frac{k_1 - k_2}{2(k_1 + k_2)} \ln \left[1 - 2 \frac{r r_1}{a^2} \cos \varphi + \left(\frac{r r_1}{a^2} \right)^2 \right] \right\} + B \left\{ L\left(a_2, \frac{r_2^2}{4 \alpha_2 t}\right) - \frac{k_2}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{r}{r_2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (11) \\ -P_2 &= B \left\{ L\left(a_2, \frac{R_2^2}{4 \alpha_2 t}\right) - \frac{1}{2} \ln \left[1 - 2 \frac{r}{r_2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{a^2}{r r_2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{a^2}{r r_2} \right)^2 \right] \right\} + \\ &\quad + A \left\{ \frac{k_1}{k_2} L\left(a_2, \frac{r^2}{4 \alpha_2 t}\right) - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{r_1}{r} \cos \varphi + \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \right\},\end{aligned}$$

$$\text{где } A = \frac{Q_1 \mu}{2\pi b k_1}, \quad B = \frac{Q_2 \mu}{2\pi b k_2},$$

$$L\left(a_i, \frac{\varepsilon^2}{4 \alpha_i t}\right) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4 \alpha_i u} - \alpha_i^2 \alpha_1 u\right) du,$$

$i = 1, 2; \varepsilon = a, r, R_2, r_2$.

Теперь рассмотрим случай, когда в пласте работают две батареи скважин, расположенные по одной в каждой зоне на дугах концентрических окружностей. Все формулы, полученные выше, можно представить в общем виде:

$$-P = \bar{C}_0^{(1)} + C_0^{(1)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \{C_m^{(1)} \cos m\varphi + C_m^{(2)} \cos m(\varphi - \varphi_0)\}. \quad (12)$$

Предположим, что внутри круговой области имеется батарея из n_1 скважин, расположенная равномерно на дуге окружности с радиусом r_1 и центральным углом $\frac{2\pi}{\rho_1}$, а вне круговой области — батарея из n_2 скважин, расположенная равномерно на дуге окружности с радиусом

r_2 и центральным углом $\frac{2\pi}{\rho_2}$, где $\rho_1, \rho_2 \geq 1$. Скважины в батареях расположены, начиная с концов дуг, на одинаковых расстояниях для каждой. Другие концы дуг для получения частного случая полных круговых батарей скважин считаем свободными.

Далее, заменяя в (12) φ на $\varphi - \frac{2\pi\nu}{\rho_1 n_1}$, а $\varphi - \varphi_0$ на $\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi\nu}{\rho_2 n_2}$, для ν -ых скважин будем иметь

$$-P = C_0^{(1)} + C_0^{(2)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m^{(1)} \cos m \left(\varphi - \frac{2\pi\nu}{\rho_1 n_1} \right) + C_m^{(2)} \cos m \left(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi\nu}{\rho_2 n_2} \right) \right]. \quad (13)$$

Суммируя члены, входящие в $C_m^{(1)}$, по ν от 0 до n_1 , а члены, входящие в $C_m^{(2)}$, по ν от 0 до n_2 , где $m = 0, 1, 2, \dots$, получим

$$-P = n_1 C_0^{(1)} + n_2 C_0^{(2)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} [C_m^{(1)} \Phi_m^{(1)}(\varphi) + C_m^{(2)} \Phi_m^{(2)}(\varphi - \varphi_0)], \quad (14)$$

где

$$\Phi_m^{(i)}(\theta) = \cos m \left[\frac{\pi(n_i - 1)}{\rho_i n_i} - \theta \right] \sin \frac{\pi m}{\rho_i} \operatorname{cosec} \frac{\pi m}{\rho_i n_i}, \quad i = 1, 2; \theta = \varphi, \varphi - \varphi_0.$$

Заменяя Q_i на $\frac{Q_{ic}}{n_i}$, где Q_{ic} — суммарные дебиты всех скважин, при $n \rightarrow \infty$ для функции давления при работе двух дуговых галерей в неоднородном пласте получим

$$-P = C_{oc}^{(1)} + C_{oc}^{(2)} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[C_{mc}^{(1)} \cos m \left(\frac{\pi}{\rho_1} - \varphi \right) \sin \frac{\pi m}{\rho_1} + \rho_2 C_{mc}^{(2)} \cos m \left(\frac{\pi}{\rho_2} - \varphi + \varphi_0 \right) \sin \frac{\pi m}{\rho_2} \right], \quad (15)$$

где $C_{mc}^{(i)}$ получаются из $C_m^{(i)}$ заменой в последнем Q_i на Q_{ic} .

При $\rho_1 = \rho_2 = 1$ из (15) для случая, когда в неоднородном пласте работают две круговые галереи, имеем

$$-P = C_{oc}^{(1)} + C_{oc}^{(2)}. \quad (16)$$

Если $\rho_1 = \rho_2 = 2$, то при работе полукруговых галерей

$$-P = C_{oc}^{(1)} + C_{oc}^{(2)} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} [C_{(2m-1)c}^{(1)} \sin (2m-1) \varphi + C_{(2m-1)c}^{(2)} \sin (2m-1) (\varphi - \varphi_0)]. \quad (17)$$

При $\rho_1 = \rho_2 = 1$ из (14) для круговых батарей скважин получим

$$-P_1 = n_1 C_0^{(1)} + n_2 C_0^{(2)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} [n_1 C_{m, n_1} \cos m n_1 \varphi + n_2 C_{m, n_2} \cos m n_2 (\varphi - \varphi_0)]. \quad (18)$$

Аналогичным образом можно суммировать и выражения (16), полученные для больших значений времени. Например, для случая, когда в неоднородном пласте работают две круговые батареи сква-

жин, суммируя первые выражения в (11), будем иметь

$$-P_1 = A \left\{ n_1 \left[L \left(a_1, \frac{r^2}{4 a_1 t} \right) - L \left(a_2, \frac{a^2}{4 a_1 t} \right) + \frac{k_1}{k_2} L \left(a_2, \frac{a^2}{4 a_2 t} \right) \right] - \frac{1}{2} \ln \left[1 - 2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^{n_1} \cos n_1 \varphi + \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2n_1} \right] - \frac{k_1 - k_2}{2(k_1 + k_2)} \ln \times \right. \\ \left. \times \left[1 - 2 \left(\frac{r r_1}{a^2} \right)^n \cos n_1 \varphi + \left(\frac{r r_1}{a^2} \right)^{2n_1} \right] \right\} + B \left\{ n_2 L \left(a_2, \frac{r^2}{4 a_2 t} \right) - \frac{k_2}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \left(\frac{r}{r_2} \right)^n \cos n_2 (\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{r}{r_2} \right)^{2n} \right] \right\}. \quad (19)$$

Как видно, упрощенная формула (19) очень удобна для проведения гидродинамических расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чугунов В. Д. Изв. Казанского филиала АН СССР, серия физ.-матем. и техн. наук, 1959, № 3.
2. Гусейнов Г. П., Велиев М. Н. Тр. АзНИИ ДН, вып. XVIII, 1967.

Институт математики
и механики

Поступило 8.VI 1971

М. Н. Вәлиев, И. И. Чаббаров

Таваны ээйф кечиричиликли олан гејри-бирчинс ләјда
јерләшмиш гујуларын гаршылыгы тәсири

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда таваны ээйф кечиричиликли олан еластики гејри-бирчинс ләјда јерләшмиш, замандан асылы олараг дәјишән мәһсулдарлыглы ишләјән гујуларын бир-биринә гаршылыгы тәсири мәсәләси өјрәнилмишдир. Ишләнилән ләј спараметрләри мұхтәлиф ики зонадан ибарәт олдуғу вә гејри-бирчинслилик сәрһәддинин чеврә олдуғу фәрз едилмәклә ријазии гојулмуш мәсәлә һәлл олунмушдур.

Мәгаләдә алынмыш мұрәккәб дүстурлар садәләшдирилмиш вә һесабат апарыла биләчәк шәклә салынмышдыр.

УДК 532.546

Г. П. ГУСЕЙНОВ, М. Н. ВЕЛИЕВ, И. И. ДЖАББАРОВ

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ СО СЛАБОПРОНИЦАЕМОЙ КРОВЛЕЙ

В настоящей статье рассматривается неустановившееся движение однофазной жидкости в упругом кусочно-однородном пласте со слабопроницаемой кровлей к гидродинамически совершенной скважине. Предполагается, что в пласте со слабопроницаемой кровлей и непроницаемой подошвой имеется круговая зона с радиусом a (первая), внутри которой коэффициент проницаемости имеет величину k_1 , а коэффициент пьезопроводности α_1 . Во всей остальной части пласта (вторая зона) соответствующие параметры имеют значения k_2, α_2 . Предполагается, что скважина пущена в эксплуатацию с переменным дебитом $Q^*(t)$ и она расположена в произвольной точке пласта, либо в первой зоне, либо во второй. В начальный момент времени давление во всех точках пласта считается постоянным, равным, для простоты, нулю. Значение давления в вышележащем пласте также считается равным нулю. Требуется определить давление в любой момент времени в произвольной точке пласта.

Математически задача формулируется следующим образом: требуется решить систему дифференциальных уравнений в частных производных, учитывающих слабопроницаемость кровли и непроницаемость подошвы пласта:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial \theta^2} - \alpha_1^2 P_1 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial P_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$(0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, t > 0)$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial \theta^2} - \alpha_2^2 P_2 = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial P_2}{\partial t}, \quad (2)$$

$$(r > a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, t > 0)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$P_1 = P_2 \quad \text{при} \quad r = 0;$$

$$P_2 = 0 \quad \text{при} \quad r = \infty;$$

$$P_1 = P_2, k_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} = k_2 \frac{\partial P_2}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = a; \quad (3)$$

$$\left(R \frac{\partial P_1}{\partial R} \right)_{R=0} = \frac{Q^*(t)}{2\pi b k_1} = Q(t),$$

здесь $R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}$; $\alpha_i^2 = \frac{k_{ri}}{k_i b b_r}$;

(r', θ') — координаты точки, в которой помещена скважина; μ — коэффициент вязкости жидкости; $i = 1$, если скважина в первой зоне, и $i = 2$, если она во второй; b, b_r — мощности пласта и перемычки; k_{r1}, k_{r2} — проницаемости перемычки в соответствующих зонах; P_1, P_2 — функции давления в соответствующих зонах.

Необходимо отметить, что случай непроницаемости кровли и подошвы пласта для вышепоставленной задачи рассмотрен в работе [1]. В [2] описан случай, когда дебит скважины постоянен и полученные формулы упрощены и приведены к удобному для расчета виду. Для решения поставленной задачи воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа

$$\bar{P} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P dt, \quad (4)$$

где $\bar{P}$ — изображение функции P , λ — параметр преобразования Лапласа. Преобразование (4) сводит задачу интегрирования уравнений (1), (2) к интегрированию дифференциальных уравнений, учитывающих начальное условие:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{P}_i}{\partial \theta^2} - \left(\alpha_i^2 + \frac{\lambda}{\alpha_i} \right) \bar{P}_i = 0. \quad (5)$$

Аналогичным образом преобразование (4) применяется и к граничным условиям в (3), после чего они принимают вид:

$$\bar{P}_2 = 0 \quad \text{при} \quad r = \infty;$$

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_2, k_1 \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial r} = k_2 \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = a; \quad (6)$$

$$\left(R \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial R} \right)_{R=0} = \bar{Q}(\lambda).$$

Ход решения уравнений (5) при условиях (6) будет таким же, как в работе [2]. Поэтому, опуская его, приведем только окончательные выражения для изображений функций давлений. Точно так же как в работе [2], будем рассматривать два возможных случая.

Случай 1. Предположим, что скважина расположена в первой (круговой) зоне. При этом полученные формулы для изображений имеют вид:

$$-\bar{P}_1 = \bar{Q}(\lambda) \left\{ K_0(q_1 R) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \times \right. \\ \left. \times \frac{[K_n(q_2 a) K'_n(q_1 a) + \sigma K_n(q_1 a) K'_n(q_2 a)] I_n(q_1 r') I_n(q_1 a)}{\sigma I_n(q_1 a) K_n(q_2 a) - K_n(q_2 a) I_n(q_1 a)} \right\}, \quad (7)$$

$$-\bar{P}_2 = \bar{Q}(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \frac{I_n(b_1 r') K_n(q_2 r')}{q_1 a [\sigma I_n(q_1 a) K'_n(q_2 a) - K_n(q_2 a) I'_n(q_1 a)]}, \quad (8)$$

где $\varphi = \theta - \theta'$; I_n, K_n — модифицированные функции Бесселя от мнимого аргумента, соответственно, первого и второго рода n -го порядка;

$$\varepsilon_n = 1, \text{ если } n = 0; \varepsilon_n = 2, \text{ если } n = 1, 2, \dots, q_1 = \sqrt{\alpha_i^2 + \frac{\lambda}{\alpha_i}}.$$

Оригиналы выражений (7) и (8) соответственно будут:

$$-P_1 = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^\infty \frac{\sigma J_n(u r') J_n(u r)}{\rho (M_n^2 + N_n^2)} du \int_0^t e^{-\left(\frac{u^2}{\alpha^2} + \alpha_i^2\right) \tau} Q(\tau) d\tau, \quad (9)$$

$$-P_2 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^{\infty} \frac{[M_n Y_n(\rho \bar{r}) - N_n J_n(\rho \bar{r})] J_n(\rho \bar{r}')}{M_n^2 + N_n^2} \times \\ \times du \int_0^t e^{-\left(\frac{u^2}{a^2} + a_1^2\right) \tau_1 (t-\tau)} \cdot Q(\tau) d\tau, \quad (10)$$

где $M_n = \sigma J_n(u) J_n'(\rho) - J_n(u) J_n'(\rho)$, $N_n = \sigma J_n(u) Y_n'(\rho) - Y_n(\rho) J_n'(u)$,

$$\sigma = \frac{k_2}{k_1} \frac{\rho}{u}, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{\kappa_2}} \sqrt{a_2^2 \kappa_2 - a_1^2 \kappa_1 + u^2 \kappa_1}.$$

Если в (7) при $k_2 \rightarrow 0$ перейти к пределу, то полученная формула будет соответствовать изображению перепада давления в закрытом круговом пласте с радиусом a и со скважиной, расположенной эксцентрично в точке (r', θ') . Она будет иметь вид

$$-\bar{P}_1 = \bar{Q}(\lambda) \left\{ K_0(q_1 R) - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \frac{K_n'(q_1 a) I_n(q_1 r') I_n(q_1 a)}{I_n(q_1 a)} \right\}. \quad (11)$$

Переходя к оригиналу в (11), найдем

$$-P_1 = \frac{2\kappa_1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma_{n,m}^2 J_n(a_{n,m} \bar{r}') J_n(a_{n,m} \bar{r})}{(a_{n,m}^2 - n^2) I_n^2(a_{n,m})} \times \\ \times \int_0^t e^{-\left(\frac{a_{n,m}^2}{a^2} - a_1^2\right) \tau_1} \cdot Q(t-\tau) d\tau, \quad (12)$$

где $a_{n,m}$ — положительные корни уравнения $I_n'(a) = 0$.

Если в (7) при $k_2 \rightarrow \infty$ ($q_2 \rightarrow 0$) перейти к пределу, то получим

$$-P_1 = \bar{Q}(\lambda) \left\{ K_0(q_1 R) - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \frac{[K_n(q_1 a) I_n(q_1 r') I_n(q_1 r)]}{I_n(q_1 a)} \right\}. \quad (13)$$

Переходя к оригиналам в последней формуле, будем иметь

$$-P_1 = \frac{2\kappa_1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(a_{n,m} \bar{r}') J_n(a_{n,m} \bar{r})}{[I_n'(a_{n,m})]^2} \times \\ \times \int_0^t e^{-\left(\frac{a_{n,m}^2}{a^2} - a_1^2\right) \tau_1} \cdot Q(t-\tau) d\tau. \quad (14)$$

Случай 2. Предположим, что скважина находится во второй зоне пласта. В этом случае получим следующие формулы для изображения перепада давления:

$$-\bar{P}_1 = \bar{Q}(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \frac{\sigma I_n(q_1 r) K_n(q_2 r')}{a q_2 [\sigma I_n(q_1 a) K_n'(q_2 a) - K_n(q_2 a) I_n'(q_1 a)]}, \quad (15)$$

$$-\bar{P}_2 = \bar{Q}(\lambda) \left\{ K_0(q_2 R) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \times \right. \\ \times \left. \frac{[I_n(q_2 a) I_n'(q_1 a) - \sigma I_n'(q_2 a) I_n(q_2 a)] K_n(q_2 r') K_n(q_1 r)}{\sigma I_n(q_1 a) K_n'(q_2 a) - K_n(q_2 a) I_n'(q_1 a)} \right\}, \quad (16)$$

Оригиналы последних выражений имеют вид:

$$-P_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^{\infty} \frac{\sigma J_n(u \bar{r}) [M_n Y_n(\rho \bar{r}') - N_n J_n(\rho \bar{r}')] }{\rho (M_n^2 + N_n^2)} \times \\ \times u du \int_0^t e^{-\left(\frac{u^2}{a^2} + a_1^2\right) \tau_1 (t-\tau)} \cdot Q(\tau) d\tau, \quad (17)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^{\infty} \frac{U_n(\rho \bar{r}) U_n(\rho \bar{r}')}{M_n^2 + N_n^2} u du \int_0^t e^{-\left(\frac{u^2}{a^2} + a_1^2\right) \tau_1 (t-\tau)} \cdot Q(\tau) d\tau, \quad (18)$$

где $U_n(\rho, \bar{r}) = M_n Y_n(\rho \bar{r}) - N_n J_n(\rho \bar{r})$.

Рассмотрим частные случаи. При $k_1 \rightarrow 0$ ($q_1 \rightarrow \infty$), переходя к пределу в формуле (16), для изображения функции давления в пласте, который ограничен изнутри непроницаемой круговой областью радиуса a , получим

$$-\bar{P}_2 = \bar{Q}(\lambda) \left\{ K_0(q_2 R) - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \frac{I_n'(q_2 a) K_n(q_2 r') K_n(q_2 r)}{K_n(q_2 a)} \right\}. \quad (19)$$

Переходя к оригиналу, имеем

$$-P_2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^{\infty} \frac{U_n'(\rho \bar{r}') U_n'(\rho \bar{r})}{I_n'^2(\rho) + Y_n'^2(\rho)} u du \int_0^t e^{-\left(\frac{u^2}{a^2} + a_1^2\right) \tau_1} \cdot Q(t-\tau) d\tau, \quad (20)$$

где

$$U_n'(\rho \bar{r}') = J_n(\rho \bar{r}') Y_n'(\rho) - J_n'(\rho) Y_n(\rho \bar{r}'),$$

$$U_n'(\rho \bar{r}) = J_n'(\rho) Y_n(\rho \bar{r}) - Y_n'(\rho) J_n(\rho \bar{r}).$$

При $k_1 \rightarrow \infty$ ($q_1 \rightarrow 0$), переходя к пределу в (16), будем иметь

$$-\bar{P}_1 = \bar{Q}(\lambda) \left\{ K_0(q_2 R) - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \frac{I_n(q_2 a) K_n(q_2 r') K_n(q_2 r)}{K_n(q_2 a)} \right\}. \quad (21)$$

Оригинал последнего выражения имеет вид

$$-\bar{P}_1 = \frac{2}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^{\infty} \frac{U_n^{(1)}(\rho \bar{r}') U_n^{(2)}(\rho \bar{r})}{I_n^2(\rho) + Y_n^2(\rho)} u du \int_0^t e^{-\left(\frac{u^2}{a^2} + a_1^2\right) \tau_1} \cdot Q(t-\tau) d\tau, \quad (22)$$

где

$$U_n^{(1)}(\rho \bar{r}') = J_n(\rho \bar{r}') Y_n(\rho) - J_n(\rho) Y_n(\rho \bar{r}'), \quad U_n^{(2)}(\rho \bar{r}) = \\ = J_n(\rho) Y_n(\rho \bar{r}) - Y_n(\rho) J_n(\rho \bar{r}).$$

Отметим, что формулы для случая постоянного дебита скважины легко получаются из вышеприведенных выражений. Для этого достаточно в них считать $Q(t) \equiv Q_0 = \text{const}$. Тогда

$$\bar{Q}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} Q_0. \quad (23)$$

Учитывая (23) в формулах (7) и (8) и переходя к оригиналам в них, будем иметь:

$$-P_1 = Q_0 \left\{ \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^{\infty} e^{-\Gamma(u)t} \frac{\sigma J_n(u \bar{r}') J_n(u \bar{r})}{\rho (M_n^2 + N_n^2) (u^2 + a_1^2 a^2)} + P_{\text{cm}}(r, \varphi) \right\}, \quad (24)$$

$$-P_2 = Q_0 \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n \varphi \int_0^{\infty} e^{-\Gamma(u)t} \times \right. \\ \left. \times \frac{[M_n Y_n(\rho \bar{r}) - N_n J_n(\rho \bar{r})] J_n(\rho \bar{r}')}{(M_n^2 + N_n^2)(u^2 + a_1^2 a^2)} du + P_{cm}(r, \varphi) \right\}, \quad (25)$$

где

$$P_{cm}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n \varphi \left[I_n(a_1 r') K_n(a_1 r) + \right. \\ \left. + \frac{K_n(a_2 a) K'_n(a_1 a) - \sigma_1 K_n(a_1 a) K'_n(a_2 a)}{\sigma_1 I_n(a_1 a) K_n(a_2 a) - I'_n(a_1 a) K_n(a_2 a)} I_n(a, r') I_n(a_1 r) \right], \quad (26)$$

$$P'_{cm}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n \varphi \frac{I_n(a, r') K_n(a_2 a)}{a_1 a [I'_n(a_1 a) K_n(a_2 a) - \sigma_1 I_n(a_1 a) K'_n(a_2 a)]}, \quad (27)$$

$$\Gamma(u) = \kappa_1 \left(a_1^2 \frac{u^2}{a^2} \right), \quad \sigma_1 = \frac{k_2 a_2}{k_1 a_1}.$$

Остальные обозначения прежние. Формулы (26) и (27) являются решениями соответствующей стационарной задачи.

Для малых значений параметра λ из (7) и (8) с учетом (23) получим:

$$-\bar{P}_1 = Q_0 \left\{ \frac{1}{\lambda} K_0(q_1 R) + \frac{1}{\lambda} \frac{k_1}{k_2} K_0(q_2 a) - \frac{1}{\lambda} K_0(q_1 a) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\lambda} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{rr'}{a^2} \cos \varphi + \left(\frac{rr'}{a^2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (28)$$

$$-P_2 = Q_0 \left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{k_1}{k_2} K_0(q_2 r) - \frac{1}{\lambda} \frac{k_1}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \varphi + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right] \right\}. \quad (29)$$

Переходя к оригиналам в (28) и (29), будем иметь:

$$-P_1 = Q_0 \left\{ L\left(a_1, \frac{R^2}{4\kappa_1 t}\right) - \frac{k_1}{k_2} L\left(a_2, \frac{a^2}{4\kappa_2 t}\right) - L\left(a_1, \frac{a^2}{4\kappa_1 t}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{rr'}{a^2} \cos \varphi + \left(\frac{rr'}{a^2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (30)$$

$$-P_2 = Q_0 \left\{ \frac{k_1}{k_2} L\left(a_2, \frac{r^2}{4\kappa_2 t}\right) - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \varphi + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right] \right\}, \quad (31)$$

где

$$L\left(a_1, \frac{z^2}{4\kappa_1 t}\right) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{z^2}{4\kappa_1 u} - a_1^2 \kappa_1 u\right) du.$$

$z = a, r, R$

Отметим, что для малых значений $(\kappa_1 z)$ и для больших значений времени с определенной точностью можно принять следующее:

$$L\left(a_1, \frac{z^2}{4\kappa_1 t}\right) \approx K_0(a_1 z) + \frac{1}{2} E_1(-a_1^2 \kappa_1 t).$$

Для второго случая, т. е. когда скважина расположена во второй зоне, при постоянном дебите скважины оригиналы функций изобра-

жений (15) и (16) с учетом в них (23) можно представить в следующем виде:

$$-P_1 = Q_0 \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n \varphi \int_0^{\infty} e^{-\Gamma(u)t} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sigma I_n(u \bar{r}) [M_n Y_n(\rho \bar{r}') - N_n J_n(\rho \bar{r}')] }{\rho (M_n^2 + N_n^2)(u^2 + a_1^2 a^2)} + P_{cm}^{(1)}(r, \varphi) \right\}, \quad (32)$$

$$P_2 = Q_0 \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n \varphi \int_0^{\infty} e^{-\Gamma(u)t} \times \right. \\ \left. \times \frac{U_n(\rho \bar{r}) U_n(\rho \bar{r}')}{(M_n^2 + N_n^2)(u^2 + a_1^2 a^2)} u du + P_{cm}^{(2)}(r, \varphi) \right\}, \quad (33)$$

где

$$U_n(\rho z) = M_n Y_n(\rho z) - N_n J_n(\rho z), \quad z = \bar{r}, \bar{r}'$$

$$P_{cm}^{(1)}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n \varphi \frac{\sigma_1 K(\kappa_2 r') I_n(a_1 r)}{a_2 a [K_n(a_2 a) I'_n(a_1 a) - \sigma_1 I_n(a_1 a) K'_n(a_2 a)]}, \quad (34)$$

$$P_{cm}^{(2)}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n \varphi \times \\ \times \frac{[I'_n(a_1 a) I_n(a_2 a) - \sigma_1 I_n(a_1 a) I_n(a_2 a)] K_n(a_2 r') K_n(a_2 r)}{\sigma_1 I_n(a_1 a) K'_n(a_2 a) - I_n(a_1 a) K_n(a_2 a)} + K_0(a_2 R). \quad (35)$$

Для малых значений λ функции изображения давления имеют вид:

$$-\bar{P} = Q_0 \left\{ \frac{1}{\lambda} K_0(q_2 r') - \frac{1}{\lambda} \frac{k_2}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{r}{r'} \cos \varphi + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \right] \right\}, \quad (36)$$

$$-\bar{P}_2 = Q_0 \left\{ \frac{1}{\lambda} K_0(q_2 R) + \frac{1}{2} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \frac{1}{\lambda} \ln \left[1 - 2 \frac{a^2}{rr'} \cos \varphi + \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^2 \right] \right\}. \quad (37)$$

Переходя к оригиналам, получим:

$$-P_1 = Q_0 \left\{ L\left(a_2, \frac{r'^2}{4\kappa_2 t}\right) - \frac{k_2}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{r}{r'} \cos \varphi + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \right] \right\}, \quad (38)$$

$$-P_2 = Q_0 \left\{ L\left(a_2, \frac{R^2}{4\kappa_2 t}\right) + \frac{1}{2} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \ln \left[1 - 2 \frac{a^2}{rr'} \cos \varphi + \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^2 \right] \right\}. \quad (39)$$

Последние формулы получены для больших значений времени.

С целью изучения влияния неоднородности пласта на понижение давления у забоя скважины по формулам (30) и (39) при некоторых значениях параметров пластов и перемычки вычислен безразмерный перепад давления $-P_c = -\frac{Q \mu}{2\pi b k_2} P_c$ в зависимости от безразмер-

ного времени $\tau = \frac{\kappa_2 t}{a^2}$, где $a = 100$ м (табл. 1—3). Как и следовало

ожидать, при сравнительно больших значениях проницаемости перемычки процесс фильтрации быстро устанавливается и с уменьшением ее время установления возрастает.

Таблица 1

$$\frac{\kappa_r}{\kappa} = 10^{-2}$$

r'	$\frac{a}{2} \pm r_c$		$a - r_c$		$a + r_c$		$\frac{3a}{2} + r_c$	
	$\frac{a}{2}$		a		a		$a + \frac{a}{2}$	
	κ_1/κ_2	τ	κ_1/κ_2	τ	κ_1/κ_2	τ	κ_1/κ_2	τ
1	0,2	33,32	0,2	23,72	0,2	11,60	0,2	23,72
5	0,5	33,43	0,5	23,83	0,5	11,71	0,5	23,83
10	1,0	33,54	1,0	23,94	1,0	11,82	1,0	24,05
50	2,0	33,65	2,0	24,05	2,0	11,93	2,0	24,16
100	5,0	33,76	5,0	24,16	5,0	12,04	5,0	24,27
1000	10,0	33,87	10,0	24,27	10,0	12,15	10,0	24,38
10000	20,0	33,98	20,0	24,38	20,0	12,26	20,0	24,49
100000	50,0	34,09	50,0	24,49	50,0	12,37	50,0	24,60
1000000	100,0	34,20	100,0	24,60	100,0	12,48	100,0	24,71
10000000	200,0	34,31	200,0	24,71	200,0	12,59	200,0	24,82
100000000	500,0	34,42	500,0	24,82	500,0	12,70	500,0	24,93
1000000000	1000,0	34,53	1000,0	24,93	1000,0	12,81	1000,0	25,04
10000000000	2000,0	34,64	2000,0	25,04	2000,0	12,92	2000,0	25,15
100000000000	5000,0	34,75	5000,0	25,15	5000,0	13,03	5000,0	25,26
1000000000000	10000,0	34,86	10000,0	25,26	10000,0	13,14	10000,0	25,37
10000000000000	20000,0	34,97	20000,0	25,37	20000,0	13,25	20000,0	25,48
100000000000000	50000,0	35,08	50000,0	25,48	50000,0	13,36	50000,0	25,59
1000000000000000	100000,0	35,19	100000,0	25,59	100000,0	13,47	100000,0	25,70
10000000000000000	200000,0	35,30	200000,0	25,70	200000,0	13,58	200000,0	25,81
100000000000000000	500000,0	35,41	500000,0	25,81	500000,0	13,69	500000,0	25,92
1000000000000000000	1000000,0	35,52	1000000,0	25,92	1000000,0	13,80	1000000,0	26,03
10000000000000000000	2000000,0	35,63	2000000,0	26,03	2000000,0	13,91	2000000,0	26,14
100000000000000000000	5000000,0	35,74	5000000,0	26,14	5000000,0	14,02	5000000,0	26,25
1000000000000000000000	10000000,0	35,85	10000000,0	26,25	10000000,0	14,13	10000000,0	26,36
10000000000000000000000	20000000,0	35,96	20000000,0	26,36	20000000,0	14,24	20000000,0	26,47
100000000000000000000000	50000000,0	36,07	50000000,0	26,47	50000000,0	14,35	50000000,0	26,58
1000000000000000000000000	100000000,0	36,18	100000000,0	26,58	100000000,0	14,46	100000000,0	26,69
10000000000000000000000000	200000000,0	36,29	200000000,0	26,69	200000000,0	14,57	200000000,0	26,80
100000000000000000000000000	500000000,0	36,40	500000000,0	26,80	500000000,0	14,68	500000000,0	26,91
1000000000000000000000000000	1000000000,0	36,51	1000000000,0	26,91	1000000000,0	14,79	1000000000,0	27,02
10000000000000000000000000000	2000000000,0	36,62	2000000000,0	27,02	2000000000,0	14,90	2000000000,0	27,13
100000000000000000000000000000	5000000000,0	36,73	5000000000,0	27,13	5000000000,0	15,01	5000000000,0	27,24
1000000000000000000000000000000	10000000000,0	36,84	10000000000,0	27,24	10000000000,0	15,12	10000000000,0	27,35
10000000000000000000000000000000	20000000000,0	36,95	20000000000,0	27,35	20000000000,0	15,23	20000000000,0	27,46
100000000000000000000000000000000	50000000000,0	37,06	50000000000,0	27,46	50000000000,0	15,34	50000000000,0	27,57
1000000000000000000000000000000000	100000000000,0	37,17	100000000000,0	27,57	100000000000,0	15,45	100000000000,0	27,68
10000000000000000000000000000000000	200000000000,0	37,28	200000000000,0	27,68	200000000000,0	15,56	200000000000,0	27,79
100000000000000000000000000000000000	500000000000,0	37,39	500000000000,0	27,79	500000000000,0	15,67	500000000000,0	27,90
1000000000000000000000000000000000000	1000000000000,0	37,50	1000000000000,0	27,90	1000000000000,0	15,78	1000000000000,0	28,01
10000000000000000000000000000000000000	2000000000000,0	37,61	2000000000000,0	28,01	2000000000000,0	15,89	2000000000000,0	28,12
100000000000000000000000000000000000000	5000000000000,0	37,72	5000000000000,0	28,12	5000000000000,0	16,00	5000000000000,0	28,23
1000000000000000000000000000000000000000	10000000000000,0	37,83	10000000000000,0	28,23	10000000000000,0	16,11	10000000000000,0	28,34
100	20000000000000,0	37,94	20000000000000,0	28,34	20000000000000,0	16,22	20000000000000,0	28,45
1000	50000000000000,0	38,05	50000000000000,0	28,45	50000000000000,0	16,33	50000000000000,0	28,56
100	100000000000000,0	38,16	100000000000000,0	28,56	100000000000000,0	16,44	100000000000000,0	28,67
1000	200000000000000,0	38,27	200000000000000,0	28,67	200000000000000,0	16,55	200000000000000,0	28,78
100	500000000000000,0	38,38	500000000000000,0	28,78	500000000000000,0	16,66	500000000000000,0	28,89
1000	1000000000000000,0	38,49	1000000000000000,0	28,89	1000000000000000,0	16,77	1000000000000000,0	29,00
100	2000000000000000,0	38,60	2000000000000000,0	29,00	2000000000000000,0	16,88	2000000000000000,0	29,11
1000	5000000000000000,0	38,71	5000000000000000,0	29,11	5000000000000000,0	16,99	5000000000000000,0	29,22
100	10000000000000000,0	38,82	10000000000000000,0	29,22	10000000000000000,0	17,10	10000000000000000,0	29,33
1000	20000000000000000,0	38,93	20000000000000000,0	29,33	20000000000000000,0	17,21	20000000000000000,0	29,44
100	50000000000000000,0	39,04	50000000000000000,0	29,44	50000000000000000,0	17,32	50000000000000000,0	29,55
1000	100000000000000000,0	39,15	100000000000000000,0	29,55	100000000000000000,0	17,43	100000000000000000,0	29,66
100	200000000000000000,0	39,26	200000000000000000,0	29,66	200000000000000000,0	17,54	200000000000000000,0	29,77
1000	500000000000000000,0	39,37	500000000000000000,0	29,77	500000000000000000,0	17,65	500000000000000000,0	29,88
100	1000000000000000000,0	39,48	1000000000000000000,0	29,88	1000000000000000000,0	17,76	1000000000000000000,0	29,99
1000	2000000000000000000,0	39,59	2000000000000000000,0	29,99	2000000000000000000,0	17,87	2000000000000000000,0	30,10
100	5000000000000000000,0	39,70	5000000000000000000,0	30,10	5000000000000000000,0	17,98	5000000000000000000,0	30,21
1000	10000000000000000000,0	39,81	10000000000000000000,0	30,21	10000000000000000000,0	18,09	10000000000000000000,0	30,32
100	20000000000000000000,0	39,92	20000000000000000000,0	30,32	20000000000000000000,0	18,20	20000000000000000000,0	30,43
1000	50000000000000000000,0	40,03	50000000000000000000,0	30,43	50000000000000000000,0	18,31	50000000000000000000,0	30,54
100	100000000000000000000,0	40,14	100000000000000000000,0	30,54	100000000000000000000,0	18,42	100000000000000000000,0	30,65
1000	200000000000000000000,0	40,25	200000000000000000000,0	30,65	200000000000000000000,0	18,53	200000000000000000000,0	30,76
100	500000000000000000000,0	40,36	500000000000000000000,0	30,76	500000000000000000000,0	18,64	500000000000000000000,0	30,87
1000	1000000000000000000000,0	40,47	1000000000000000000000,0	30,87	1000000000000000000000,0	18,75	1000000000000000000000,0	30,98
100	2000000000000000000000,0	40,58	2000000000000000000000,0	30,98	2000000000000000000000,0	18,86	2000000000000000000000,0	31,09
1000	5000000000000000000000,0	40,69	5000000000000000000000,0	31,09	5000000000000000000000,0	18,97	5000000000000000000000,0	31,20
100	10000000000000000000000,0	40,80	10000000000000000000000,0	31,20	10000000000000000000000,0	19,08	10000000000000000000000,0	31,31
1000	20000000000000000000000,0	40,91	20000000000000000000000,0	31,31	20000000000000000000000,0	19,19	20000000000000000000000,0	31,42
100	50000000000000000000000,0	41,02	50000000000000000000000,0	31,42	50000000000000000000000,0	19,30	50000000000000000000000,0	31,53
1000	100000000000000000000000,0	41,13	100000000000000000000000,0	31,53	100000000000000000000000,0	19,41	100000000000000000000000,0	31,64
100	200000000000000000000000,0	41,24	200000000000000000000000,0	31,64	200000000000000000000000,0	19,52	200000000000000000000000,0	31,75
1000								

УДК 542.69:531.411.6.001.6

А. И. ВЕРДИЕВ и Я. Р. АБДУЛЛАЕВ

К РАСЧЕТУ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОПРЕСНЕНИЯ ЗАСОЛЕННЫХ ПОЧВ

В последнее время возникла необходимость исследования процессов растворения и диффузии в пористых средах в связи с изучением взаимодействия пресных и соленых вод. Изучение этих факторов при фильтрации воды в грунтах весьма актуально для мелиорации засоленных земель. Этой важной проблеме посвящено большое число работ [1, 2, 3, 4], в которых скорость фильтрации по глубине принимается постоянной. В настоящей статье излагается решение уравнения конвективной диффузии для одномерной задачи при переменной скорости фильтрации по глубине. Уравнение конвективной диффузии, описывающее перемещение солей в пористой среде при переменной скорости фильтрации, имеет вид

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial c}{\partial x} + \gamma (c_m - c) = n \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (1)$$

где

c —концентрация солей в поровой воде в точке с координатой x в момент времени t ;

D —коэффициент конвективной диффузии солей;

γ —константа скорости растворения;

c_m —концентрация предельного насыщения;

n —активная пористость;

v —скорость фильтрации.

В левой части уравнения (1) первый член отражает диффузионный перенос солей в обратном направлении фильтрации, второй—конвективный перенос солей фильтрующимся раствором, третий—обогащение раствора при его движении за счет растворения солей твердой фазы. Это уравнение решается при помощи операционного исчисления при следующих начальном и граничных условиях, аналогично условиям Н. Н. Веригина [1]:

$$\begin{aligned} c(x, 0) &= c_1, \\ c(0, t) &= c_2, \\ \left. \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

К уравнению (1) и условиям (2) применяется преобразование Лапласа:

$$Y(x, \lambda) = \int_0^\infty c(x, t) e^{-\lambda t} dt. \quad (3)$$

После преобразования уравнение (1) принимает вид

$$Dy'' - v(x)y' + \gamma c_m \frac{1}{\lambda} - \gamma y = n[c(x, 0) + \lambda y]$$

или

$$Dy'' - v(x)y' - (\gamma + n\lambda)y = nc_1 - \frac{\gamma c_m}{\lambda}, \quad (1')$$

Общее решение уравнения (1') имеет вид

$$y = \tilde{c}_1 y_1 + \tilde{c}_2 y_2 - \frac{nc_1 - \frac{\gamma c_m}{\lambda}}{\gamma + n\lambda}, \quad (4)$$

где c_1 и c_2 —произвольные постоянные;
 y_1 и y_2 —суть решения соответствующего однородного уравнения;

$\frac{nc_1 - \frac{\gamma c_m}{\lambda}}{\gamma + n\lambda}$ —частное решение неоднородного уравнения (1'), предполагаемого постоянным.

Для данного случая решение однородного уравнения ищем в виде бесконечного ряда

$$y_i = e^{\theta_i x} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} \cdot g_i^n(x), \quad (5)$$

где θ_i —корни характеристического уравнения в смысле Биркгофа:

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{n}{D}}; \quad \theta_2 = -\sqrt{\frac{n}{D}}; \quad \rho = \sqrt{\lambda};$$

$g_i^n(x)$ —параметр.

Подставляя найденные значения y_1 и постоянных $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ в выражение (4) и переходя к оригиналу, получим

$$\begin{aligned} c(x, t) = & \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ e^{\lambda t + \rho l \theta_1 + \rho \theta_1 (x-l)} \cdot \frac{[c_2(\gamma + n\lambda) + \lambda nc_1 - \gamma c_m] e^{\frac{1}{2} D \int_0^x v(\eta) d\eta}}{\lambda(\gamma + n\lambda) \cdot (1 + e^{\rho l(\theta_2 - \theta_1)})} + \right. \\ & + \frac{e^{\lambda t} \cdot e^{\rho \theta_2 x} \cdot \left(\frac{c_2}{\lambda} + \frac{nc_1 - \frac{\gamma c_m}{\lambda}}{\gamma + n\lambda} \right) \cdot e^{\frac{1}{2} D \int_0^x v(\eta) d\eta}}{(1 + e^{\rho l(\theta_2 - \theta_1)})} - \left. \frac{\left(nc_1 - \frac{\gamma c_m}{\lambda} \right) e^{\lambda t}}{\gamma + n\lambda} \right\} d\lambda. \quad (6) \end{aligned}$$

Этот интеграл вычисляется по теории вычетов. В результате получаем искомое решение данного уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} c(x, t) = & \left\{ e^{\frac{1}{2} D \int_0^x v(\eta) d\eta} [c_2 - c_m] + \right. \\ & + \frac{e^{-\frac{\gamma}{n} t} \cdot (c_1 + c_m) \cdot 4 \cos \sqrt{\frac{\gamma}{D}} (x-l) \cdot \cos \sqrt{\frac{\gamma}{D}} l}{4 \cos^2 \sqrt{\frac{\gamma}{D}} l} + \\ & \left. + 8b \cdot \cos \frac{3\pi(l-x)}{2l} - 8a \cdot \cos \frac{\pi(l-x)}{2l} \right] + c_m - (c_m + c_1) e^{-\frac{\gamma}{n} t} \Big\}, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\text{где } b = e^{\frac{9\pi^2 D}{4n l^2} t} \frac{\left[\gamma [c_2 - c_m] - \frac{9\pi^2 n (c_2 + c_1)}{l^2 (\theta_2 - \theta_1)^2} \right]}{3\pi \left(\gamma - \frac{9\pi^2 n}{l^2 (\theta_2 - \theta_1)^2} \right)}$$

$$a = e^{-\frac{\pi^2 t}{l^2 (\theta_2 - \theta_1)^2}} \frac{\left[\gamma (c_2 - c_m) - \frac{\pi^2 n (c_2 + c_1)}{l^2 (\theta_2 - \theta_1)^2} \right]}{\pi \left(\gamma - \frac{\pi^2 n}{l^2 (\theta_2 - \theta_1)^2} \right)}$$

Следует заметить, что уравнение (7) описывает процесс неполного растворения солей твердой фазы, то есть относится к периоду вытеснения и растворения солей твердой фазы. В большинстве случаев концентрация порового раствора в естественных условиях близка

Таблица 1

Горизон- ты, м	Минерализация почвенного раство- ра при переменной скорости фильтрации по полученной формуле			$D, \frac{м^2}{сутки}$	$t, \frac{сутки}{сутки}$	n	$v(x)$	$B, (м)$	$l, (м)$
	c/c_m								
	$\alpha=0,05 \text{ м}^{-1}$	$\alpha=0,08 \text{ м}^{-1}$	$\alpha=0,1 \text{ м}^{-1}$						
0—20	0,13	0,19	0,14	$171 \cdot 10^{-3}$	19	0,5		200	5
20—40	0,25	0,23	0,24						
40—60	0,39	0,42	0,36						
60—80	0,48	0,42	0,46						
80—100	0,61	0,64	0,55						
100—120	0,66	0,83	0,61						
120—160	0,83	0,52	0,60						
160—200	0,49	0,42	0,35						
200—220	0,19		0,11						
220—240									

B —междреннее расстояние.

к концентрации предельного насыщения [7]. Поэтому можно брать $c_1 = C_m$ и пренебрегать членами c_2, c_m в силу $c_m \gg c_2$. После учета этих допущений и соответствующего упрощения выражение (7) принимает вид

$$\frac{c}{c_m} = \left\{ e^{\frac{1}{2} D \int_0^x v(\eta) d\eta} \left[\frac{8e^{-\frac{\pi t}{n}} \cdot \cos \sqrt{\frac{\gamma}{D}} l \cdot \cos \sqrt{\frac{\gamma}{D}} (x-l)}{4 \cos^2 \sqrt{\frac{\gamma}{D}} l} - \right. \right.$$

$$\left. - 8b' \cdot \cos \frac{3\pi(l-x)}{2l} + 8a' \cdot \cos \frac{\pi(l-x)}{2l} - 1 \right] +$$

$$\left. + \left(1 - 2e^{-\frac{\gamma}{n} t} \right) \right\}, \quad (7')$$

где

$$b' = e^{-\frac{9\pi^2 D}{4n l^2} t} \cdot \frac{\left(\gamma + \frac{9\pi^2 D}{4 l^2} \right)}{3\pi \left(\gamma - \frac{9\pi^2 D}{4 l^2} \right)}; \quad a' = e^{-\frac{\pi^2 D}{4n l^2} t} \cdot \frac{\left(\gamma + \frac{\pi^2 D}{4 l^2} \right)}{\pi \left(\gamma - \frac{\pi^2 D}{4 l^2} \right)}$$

Теперь произведем расчет по полученной формуле для построения кривых, характеризующих зависимость между концентрацией и

Таблица 2

$x = 1,6 \text{ м}$		$x = 3 \text{ м}$		$D, \frac{m^2}{сутки}$	n	$v(x)$	$B, м$	$l, м$	$\gamma, \text{сутки}^{-1}$
$t, \text{сутки}$	$\frac{c}{c_m}$	$t, \text{сутки}$	$\frac{c}{c_m}$						
10	1	30	1	$171,10^{-3}$	0,5		200	5	0,094
15	0,99	35	0,87						
30	0,857	40	0,72						
25	0,712	45	0,59						
30	0,586	50	0,48						
35	0,479	50	0,39						
40	0,39	60	0,31						
45	0,37	65	0,25						
50	0,24	70	0,19						
55	0,18								

глубиной, а также между концентрацией и временем. В качестве примера рассмотрим один частный случай.

При насыщении грунтов труднорастворимыми солями или при незначительном содержании солей в твердой фазе можно считать, что $\gamma = 0$. Процесс конвективной диффузии порового раствора в этом случае характеризуется выражением

$$\frac{c}{c_m} = \left\{ e^{\frac{1}{2} D \int_0^x v(\eta) d\eta} \cdot \left[1 + \frac{8}{3\pi} e^{-\frac{9\pi^2 D}{4n l^2} t} \cdot \cos \frac{3\pi(l-x)}{2l} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{8}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 D}{4n l^2} t} \cdot \cos \frac{\pi(l-x)}{2l} \right] - 1 \right\}. \quad (8)$$

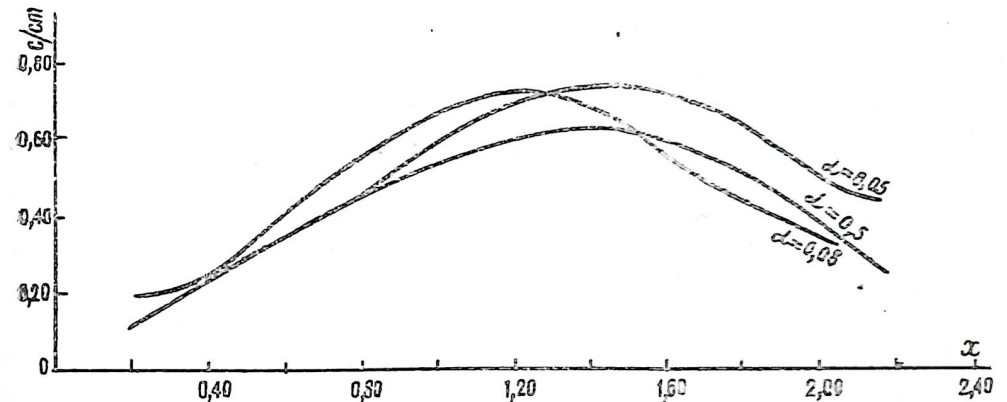


Рис. 1. Кривые зависимости концентрации солей от глубины.

Вычисление производится при следующих значениях полевых данных $D = 171 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{сутки}$; $n = 0,5$; $t = 19$ суток, взятых по Муганов-Сальянскому массиву (Э. С. Варунян, Г. Я. Гасанов. Сводный научно-технический отчет за 1964—1968 гг. АЗНИИГИМА).

Примем, что скорость фильтрации изменяется по закону

$$v = v_0 e^{-\alpha x},$$

где v_0, α — постоянные параметры.

Результаты расчетов распределения солей по полученным формулам приведены в табл. 1, 2. По полученным значениям строим график зависимости между концентрацией солей и глубиной. Как видно, концентрация солей порового раствора возрастает до некоторой глубины,

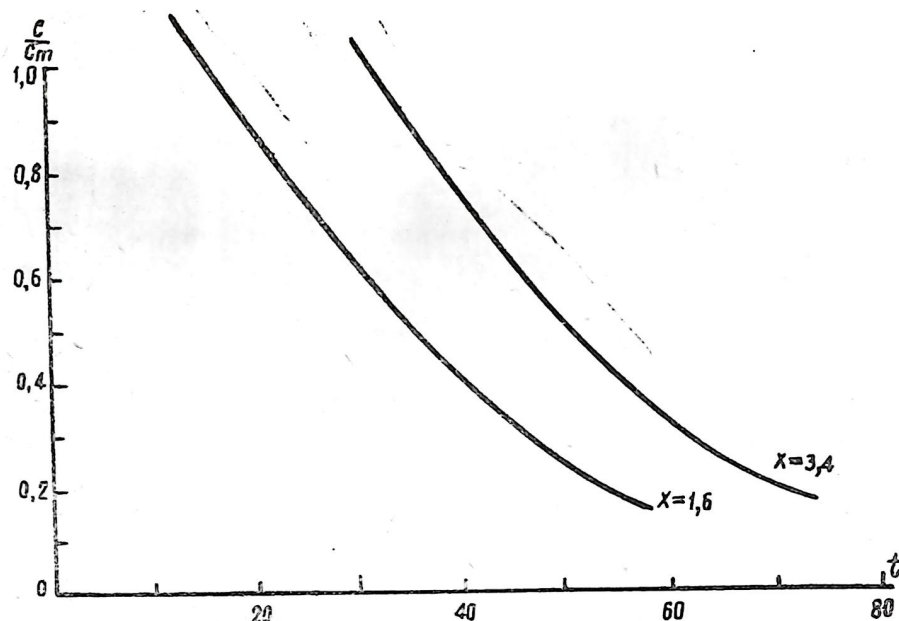


Рис. 2. Кривые зависимости концентрации солей от времени.

а затем уменьшается (рис. 1). Таким же образом построен график зависимости между концентрацией солей и временем на глубинах 1,6 и 3 м (рис. 2), из которого видно, что с течением времени величина концентрации уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веригин Н. Н. Изв. АН СССР, ОТН*. 1953, № 10.
2. Веригин Н. Н. О кинетике растворения солей при движении воды в грунтах. Сб. "Растворение и выщелачивание горных пород". М., 1957.
3. Веригин Н. Н. Основы теории растворения и вымыва солей при фильтрации воды в горных породах. Сб. "Инженерно-геологические свойства горных пород и методы их изучения". М., 1962.
4. Аверьянов С. Ф. Докл. ТСХА (гидротехника и мелиорация), вып. 56, М., 1960.
5. Лаврентьев М., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд-во "Наука", М., 1965.
6. Диткин В. А. Интегральные преобразования и операционные исчисления. Физматгиз, 1961.

Институт кибернетики

Поступило 5. V 1971

А. И. Вердиев, J. P. Абдуллаев

Шоран торпагларинын ширинлешмә ганунауҗунлуғунун һесабатына даир

ХУЛАСӘ

Шоран торпагларинын јујулмасында гаршыја чыхан бә'зи лазими мәсәләләрин һәлли бир чох тә'сиредиҗи фактларын (диффузија һәлл-олма сүзүлмә сүр'әти) тапылмасына кәтириб чыхарыр. Бу исә, әсас е'тибарилә, шоран торпагларинын јујулмасы заманы торпагда баш верән просеси там характеризә едән ријазии бир тәнлијин-хүсуси төрәмәли ики тәртибли дифференциал тәнлијин һәлли илә әлагәдардыр.

Бу тәнликдә әсас амыл һесап олуна сүзүлмә сүр'әтинин дәринлик бојунча дәјишән кәтүрүлмәси гојулан мәсәләнин даһа үмуми вә дәгиг һәлл олунамасына имкан верир.

Башга тәдгигатчылардан фәрғли оларағ, бурада бахылан мәсәләнин һәллине сүзүлмә сүр'әтинин дәринлијин функцијасы кими кәтүрмәк нөгтеји-нәзәријәдән јанашылмыш вә јума заманы дүзкүн физики-көмјәви гидродинamik нөгтеји-нәзәрден дузун һәрәкәтини характеризә едән даһа дәгиг үмуми һәлл алынмышдыр.

УДК 518:517

В. Г. ПИРМАМЕДОВ, О. М. ФАРЗАЛИЕВА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗИРОВАННОЙ НЕФТИ С УЧЕТОМ МАССОПЕРЕНОСА ОСТАТОЧНОЙ ВОДЫ

В данной статье рассматривается численное решение изотермической задачи фильтрации газированной нефти с учетом массопереноса остаточной воды в ограниченной области.

Как известно [1, 2], задача о нестационарной плоско-радиальной фильтрации газированной нефти с учетом массопереноса остаточной воды сводится к решению систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\kappa}{\mu_1} f_1(S_1; S_2) \frac{\partial P}{\partial r} \right] = m \frac{\partial S_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\kappa}{\mu_2} f_2(S_1; S_2) \frac{P}{P_0} \frac{\partial P}{\partial r} \right] + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\kappa}{\mu_1} f_1(S_1; S_2) \alpha(P) \frac{\partial P}{\partial r} \right] = \\ & = m \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - S_1 - S_2) \frac{P}{P_0} + S_1 \alpha(P) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\kappa}{\mu_2} f_2(S_1; S_2) \frac{P}{P_0} W(P) \frac{\partial P}{\partial r} \right] = m \frac{\partial}{\partial t} \left[(1 - \right. \\ & \left. - S_1 - S_2) \frac{P}{P_0} W(P) + S_2 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$(r, t) \in D = \{(r, t); r_0 < r < R; 0 < t < T\}$$

при следующих условиях:

$$P(r, 0) = P^0(r); \quad (4) \quad S_1(r, 0) = S_1^0(r); \quad (5) \quad S_2(r, 0) = S_2^0(r); \quad (6)$$

$$r f_1(S_1; S_2) \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \lambda(t) \quad \text{или} \quad P(r, t) \Big|_{r=r_0} = \nu(t); \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0; \quad (8) \quad \varphi(P; S_1; S_2) \Big|_{r=R} = 0; \quad (9) \quad \psi(P; S_1; S_2) \Big|_{r=R} = 0, \quad (10)$$

где κ , m — соответственно, проницаемость и пористость; r — произвольный радиус; r_0 , R — радиусы скважины и контура; t — время;

* Влагосодержанием газа, растворенного в нефти, из-за отсутствия экспериментальных данных пренебрегаем.

$f_1(S_1; S_2), f_2(S_1; S_2)$ — относительные фазовые проницаемости нефти и газа; S_1, S_2 — насыщенности пласта, соответственно, нефтью и водой; $\alpha(P)$ — рас-
дой; μ_1, μ_2 — вязкости нефти и газа; P — пластовое давление; $\lambda(t) = \frac{Q(t)\mu_1}{2\pi kh}$ —
творимость газа в нефти; $W(P)$ — влагосодержание газа; $Q(t)$ — дебит скважины; h — мощность пласта.

Функции $\varphi(P; S_1; S_2), \psi(P; S_1; S_2)$ достаточно гладкие и полу-
чаются непосредственно из уравнений (1)–(3) с учетом непроницае-
мости границы (8).

Прежде чем перейти к численному решению задачи (1)–(10),
введем безразмерные величины

$$\bar{P} = \frac{P}{P_1}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R_1}, \quad \bar{r}_0 = \frac{r_0}{R_1}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_1}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T_1}$$

и, учитывая характер изменения функций $P(r, t), S_1(r, t), S_2(r, t)$,
новую логарифмическую переменную $u = \ln r$, где P_1, R_1, T_1 — масш-
табы безразмерности. Тогда задача (1)–(10) будет формулироваться
следующим образом: найти функции $P(u, t), S_1(u, t), S_2(u, t)$, удов-
летворяющие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[f_1(S_1; S_2) \frac{\partial P}{\partial u} \right] = a \cdot e^{2u} \frac{\partial S_1}{\partial t}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[a_1 f_2(S_1; S_2) \frac{P}{P_0} \frac{\partial P}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial u} \left[f_1(S_1; S_2) \alpha(P) \frac{\partial P}{\partial u} \right] =$$

$$= a e^{2u} \frac{\partial}{\partial t} \left[(1 - S_1 - S_2) \frac{P}{P_0} + S_1 \alpha(P) \right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[a_1 f_2(S_1; S_2) \frac{P}{P_0} W(P) \frac{\partial P}{\partial u} \right] = a e^{2u} \frac{\partial}{\partial t} \left[(1 - S_1 -$$

$$- S_2) \frac{P}{P_0} W(P) + S_2 \right], \quad (13)$$

$$(u, t) \in L = \{(u, t); u_c < u < u_k; 0 < t < T\}$$

при условиях

$$P(u; 0) = P^0(u), \quad (14) \quad S_1(u; 0) = S_1^0(u), \quad (15)$$

$$S_2(u; 0) = S_2^0(u), \quad (16)$$

$$u_c \leq u \leq u_k$$

$$f_1(S_1; S_2) \frac{\partial P}{\partial u} \Big|_{u=u_c} = \lambda(t) \quad (17) \quad \text{или} \quad P(u, t)|_{u=u_c} = v_1(t), \quad (18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial u} \Big|_{u=u_k} = 0, \quad (19) \quad \varphi(P; S_1; S_2)|_{u=u_k} = 0, \quad (20)$$

$$\psi(P; S_1; S_2)|_{u=u_k} = 0, \quad (21)$$

$$0 \leq t \leq T,$$

где

$$a = \frac{m\mu_1 R_1^2}{\kappa P_1 T_1}; \quad a_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Нелинейная система дифференциальных уравнений (11)–(13) при
соответствующих условиях (14)–(21) решается разностно-итерацион-
ным методом. Введем в области $\bar{L} = \{u_c \leq u \leq u_k; 0 \leq t \leq T\}$ прост-

ранственно-временную сетку узлов $\Omega_{h\tau_{n+1}} = \left\{ m = u_c + (m-1) \frac{h}{2}; \right.$
 $m = \bar{0}, \bar{M}+1; u_{m+1} = u_k; h = \frac{u_k - u_c}{M+1}; t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}; n = \bar{0}, \bar{N} \}$ и обоз-
начения:

$$P(u_m t_{n+1}) = P_{mn+1}, \quad P_{m+1n+1} = 0,5 (P_{m+2n+1} + P_{mn+1}),$$

$$S_1(u_{m-1} t_{n+1}) = S_{m-1n+1}, \quad S_{1mn+1} = 0,5 (S_{m+1n+1} + S_{m-1n+1}),$$

$$S_2(u_{m-1} t_{n+1}) = \bar{S}_{m-1n+1}, \quad S_{2mn+1} = 0,5 (\bar{S}_{m+1n+1} + \bar{S}_{m-1n+1}).$$

Производные функций $P(u, t), S_1(u, t), S_2(u, t)$ в точке $(u_m;$
 $\times t_{n+1})$ на сетке узлов $\Omega_{h\tau_{n+1}}$ по пространственной переменной заме-
няются центральными разностными производными, а по времени — раз-
ностными производными, использующими сеточные значения функции
в три момента времени: t_{n-1}, t_n, t_{n+1} . Используя квазилинеаризацию
[3], а также указанные выше конечно-разностные аппроксимации,
получим нелинейную конечно-разностную задачу, для решения кото-
рой применяем итерационный метод. А именно: считая известными
значения функций при (k) -й итерации, $(k+1)$ -ю итерацию находим
из решения задачи:

$$\begin{aligned} & [\bar{f}_1 \Delta P]_{m+1n+1}^{(k)} \delta S_{m+1n+1}^{(k+1)} + [\bar{f}_1 \Delta P]_{m+1n+1}^{(k)} \delta S_{m+1n+1}^{(k+1)} + \\ & + [f_1]_{m+1n+1}^{(k)} \delta (\Delta P)_{m+1n+1}^{(k+1)} - [\bar{f}_1 \Delta P]_{m-1n+1}^{(k)} \delta S_{m-1n+1}^{(k+1)} - \\ & - [\bar{f}_1 \Delta P]_{m-1n+1}^{(k)} \delta S_{m-1n+1}^{(k+1)} - [f_1]_{m-1n+1}^{(k)} \delta (\Delta P)_{m-1n+1}^{(k+1)} = \\ & = a \cdot e^{2u_m} h^2 S_{tmn+1}^{(k+1)}; \quad (22) \\ & \left\{ \left[a_1 \bar{f}_2 \frac{P}{P_0} + \bar{f}_2 \alpha(P) \right] \Delta P \right\}_{m+1n+1}^{(k)} \cdot \delta S_{m+1n+1}^{(k+1)} + \left\{ \left[a_1 \bar{f}_2 \frac{P}{P_0} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{f}_1 \alpha(P) \right] \Delta P \right\}_{m+1n+1}^{(k)} \cdot \delta S_{m+1n+1}^{(k+1)} + \left\{ \left[a_1 f_2 \frac{1}{P_0} + f_1 \alpha(P) \right] \times \right. \\ & \times \Delta P \left. \right\}_{m+1n+1}^{(k)} \cdot \delta P_{m+1n+1}^{(k+1)} + \left\{ \left[a_1 f_2 \frac{P}{P_0} + f_1 \alpha(P) \right] \right\}_{m+1n+1}^{(k)} \delta (\Delta P)_{m+1n+1}^{(k+1)} - \\ & - \left\{ a_1 \bar{f}_2 \frac{P}{P_0} + \bar{f}_1 \alpha(P) \right\}_{m-1n+1}^{(k)} \delta S_{m-1n+1}^{(k+1)} - \left\{ a_1 \bar{f}_2 \frac{P}{P_0} + \right. \\ & \left. + \bar{f}_1 \alpha(P) \right\}_{m-1n+1}^{(k)} \delta S_{m-1n+1}^{(k+1)} - \left\{ \left[a_1 f_2 \frac{1}{P_0} + f_1 \alpha(P) \right] \Delta P \right\}_{m-1n+1}^{(k)} \delta P_{m-1n+1}^{(k+1)} - \\ & - \left\{ \left[a_1 f_2 \frac{P}{P_0} + f_1 \alpha(P) \right] \right\}_{m-1n+1}^{(k)} \delta (\Delta P)_{m-1n+1}^{(k+1)} = a e^{2u_m} h^2 Z_{tmn+1}^{(k+1)}; \quad (23) \\ & \left\{ \left[a_1 \bar{f}_2 \frac{P}{P_0} W(P) \Delta P \right] \right\}_{m+1n+1}^{(k)} \delta S_{m+1n+1}^{(k+1)} + \left\{ \left[a_1 \bar{f}_2 \frac{P}{P_0} \times \right. \right. \\ & \times W(P) \Delta P \left. \right\}_{m+1n+1}^{(k)} \delta S_{m+1n+1}^{(k+1)} + \left\{ a_1 f_2 \frac{1}{P_0} [W(P) + \right. \\ & \left. + \bar{W}(P)] \Delta P \right\}_{m+1n+1}^{(k)} \delta P_{m+1n+1}^{(k+1)} + \left\{ \left[a_1 f_2 \frac{P}{P_0} W(P) \right] \right\}_{m+1n+1}^{(k)} \delta (\Delta P)_{m+1n+1}^{(k+1)} - \\ & - \left\{ \left[a_1 \bar{f}_2 \frac{P}{P_0} W(P) \Delta P \right] \right\}_{m-1n+1}^{(k)} \delta S_{m-1n+1}^{(k+1)} - \end{aligned}$$

$$- \left\{ \left[a_1 \bar{f}_2 \frac{P}{P_0} W(P) \Delta P \right]_{m-1n+1}^{(k)} \right\} \delta \bar{S}_{m-1n+1}^{(k+1)} - \left\{ a_1 f_2 \frac{1}{P_0} \left[W(P) + \right. \right. \\ \left. \left. + P \bar{W}(P) \right] \Delta P \right\}_{m-1n+1}^{(k)} \cdot \delta P_{m-1n+1}^{(k+1)} - \left\{ \left[a_1 f_2 \frac{P}{P_0} W(P) \right]_{m-1n+1}^{(k)} \right\} \times \\ \times \delta (\Delta P)_{m-1n+1}^{(k+1)} = a e^{2um} h^2 \bar{Z}_{t\ mn+1}^{(k+1)}; \quad (24)$$

$$[\bar{f}_1 \Delta P]_{1n+1}^{(k)} \delta S_{1n+1}^{(k+1)} + [\bar{f}_1 \Delta P]_{1n+1}^{(k)} \delta \bar{S}_{1n+1}^{(k+1)} + [f_1]_{1n+1}^{(k)} \delta (\Delta P)_{1n+1}^{(k+1)} = \lambda_1; \quad (25)$$

$$\left\{ \left[A + \frac{P}{P_0} - \alpha(P) \right] S_t + \left[\frac{P}{P_0} \bar{S}_t \right] + \left[\frac{1}{P_0} - \bar{\alpha}(P) \right] P_t \cdot S + \right. \\ \left. + \frac{1}{P_0} P_t [\bar{S} - 1] \right\}_{M+1n+1}^{(k+1)} = 0; \quad (26)$$

$$\left\{ \left[B \left[\alpha(P) - \frac{P}{P_0} \right] + \frac{P}{P_0} W(P) \right] S_t + \left[\left[\frac{P}{P_0} W(P) - B \frac{P}{P_0} \right] \bar{S}_t + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\left[\bar{\alpha}(P) - \frac{1}{P_0} \right] B + \left[W(P) + P \bar{W}(P) \right] \cdot \frac{1}{P_0} \right] S \cdot P_t + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[[W(P) + P \bar{W}(P)] - B \right] \cdot \frac{1}{P_0} P_t (\bar{S} - 1) \right\}_{M+1n+1}^{(k+1)} = 0; \quad (27)$$

$$P_{1n+1} = v_1; \quad (28') \quad \Delta P_{M+1n+1} = 0; \quad (28)$$

$$P(u_m, 0) = P_m^0; \quad (29) \quad S(u_m, 0) = S_m^0; \quad (30) \quad \bar{S}(u_m, 0) = \bar{S}_m^0; \quad (31)$$

где

$$\frac{\partial f_1(S_1; S_2)}{\partial S_1} = \bar{f}_1; \quad \frac{\partial f_2(S_1; S_2)}{\partial S_1} = \bar{f}_2; \quad \frac{\partial f_1(S_1; S_2)}{\partial S_2} = \bar{f}_1;$$

$$\frac{\partial f_2(S_1; S_2)}{\partial S_2} = \bar{f}_2; \quad \bar{\alpha}(P) = \frac{\partial \alpha}{\partial P};$$

$$\bar{W}(P) = \frac{\partial W}{\partial P}; \quad \Delta P_{m+1} = P_{m+2} - P_m; \quad S_t = \omega_1 S_{mn+1} -$$

$$- \omega_2 S_{mn} + \omega_3 S_{mn-1};$$

$$\omega_1 = 1 + 0,5 (\tau_{n+1} + \tau_n) (2\tau_{n+1})^{-1}; \quad \omega_3 = 0,5 (\tau_{n+1} + \tau_n) (2\tau_n)^{-1}; \\ \omega_2 = \omega_1 + \omega_3;$$

$$Z = \left\{ \frac{P}{P_0} + \left[\alpha(P) - \frac{P}{P_0} \right] S - \frac{P}{P_0} \bar{S} \right\}; \quad \bar{Z} = \left\{ \frac{P}{P_0} W(P) - \right.$$

$$\left. - \frac{P}{P_0} W(P) \cdot S + \left[1 - \frac{P}{P_0} W(P) \right] \bar{S} \right\};$$

$$A = \left[a_1 f_2 \frac{P}{P_0} + f_2 \alpha(P) \right] [f_1]^{-1};$$

$$B = f_2 \frac{P}{P_0} W(P) \left[f_2 \frac{P}{P_0} + a_2 f_1 \alpha(P) \right]^{-1}.$$

Для решения задачи (22)–(31) при каждой итерации поступаем следующим образом: используя условия (25)–(31), из (22)–(24) методом матричной прогонки определяем функции $P_{m+1}^{(i)}$, $S_{m-1n+1}^{(i)}$, $\bar{S}_{m-1n+1}^{(i)}$.

Поступая аналогично, определяем остальные приближения. Итерации происходят до такого (k_0) приближения, при котором выполняются условия:

$$\max_m |P_m^{(k_0)} - P_m^{(k_0-1)}| < \varepsilon_1,$$

$$\max_m |S_{m-1}^{(k_0)} - S_{m-1}^{(k_0-1)}| < \varepsilon_2,$$

$$\max_m |\bar{S}_{m-1}^{(k_0)} - \bar{S}_{m-1}^{(k_0-1)}| < \varepsilon_3,$$

где ε_1 , ε_2 , ε_3 — заданные величины.

Отметим, что при $n=1$ используется двухслойная схема, которая получается как частный случай из указанной выше схемы ($\omega_1=1$, $\omega_2=1$, $\omega_3=0$), а в дальнейшем — трехслойная. Расчеты по данному методу производились на ЭЦВМ М-220. Как показали результаты, для быстроты сходимости итерационного процесса в данной задаче целесообразнее $(k+1)$ -е приближения итерируемых величин считать псевдоитерацией, а за истинную $(k+1)$ -ю итерацию принимать среднеарифметическую сумму между k -й итерацией и $(k+1)$ -й псевдоитерацией.

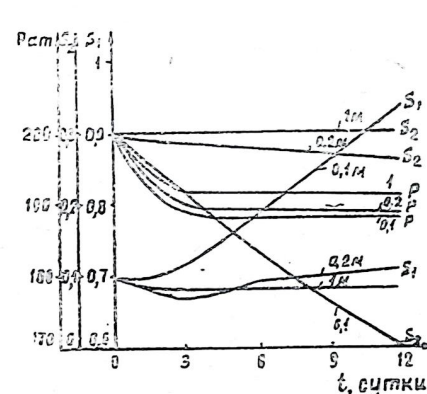


Рис. 1

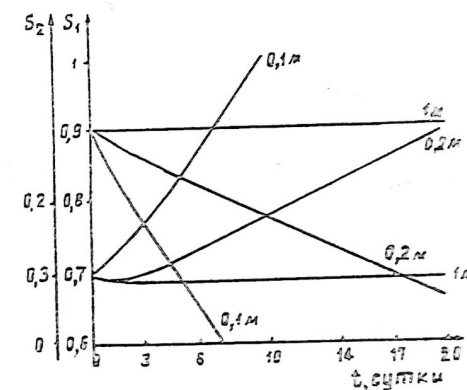


Рис. 2

Относительные фазовые проницаемости для нефти и газа выражены соотношениями:

$$f_1(S; \bar{S}) = S^3 (1 - \bar{S})^{-3}; \quad f_2(S; \bar{S}) = (1 - S - \bar{S})^2 (1 - \bar{S})^{-2}.$$

Аналитические выражения для растворимости газа в нефти и влагосодержания газа имеют вид:

$$\alpha(P) = \bar{A}P, \quad W(P) = \bar{B}P^{-1} + \bar{C},$$

где $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ — постоянные коэффициенты.

В расчетах были использованы следующие исходные данные:

$$k = 0,5 \text{ д}, \quad m = 0,2, \quad \mu_1 = 3 \text{ спз}, \quad \mu_2 = 0,03 \text{ спз},$$

$$P^0 = 200 \text{ ат}, \quad S_1^0 = 0,7,$$

$$S_2^0 = 0,3, \quad Q_1; \quad Q_2 = 100 \text{ м}^3/\text{сутки}, \quad 25 \text{ м}^3/\text{сутки}, \quad h = 20 \text{ м},$$

$$r_0 = 0,1 \text{ м}, \quad R = 200 \text{ м},$$

$$\bar{A} = 0,75 \frac{\text{м}^3}{\text{м}^3 \cdot \text{ат}}, \quad \bar{B} = 0,152 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{м}^3} \text{ ат}, \quad \bar{C} = 0,562 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^3}{\text{м}^3},$$

$$P_{заб} = 195 \text{ ат}.$$

Расчеты производились для начальной стадии разработки при постоянном забойном давлении и постоянном значении дебита. Результаты графически представлены на рис. 1, 2, 3.

Как видно из рисунков, изменение значений нефтенасыщенности с учетом массопереноса остаточной воды во всей рассматриваемой ограниченной области в зависимости от r и t имеет свои особенности, которые были обнаружены и в автомодельном случае (2). Особенно наглядно это видно из рис. 1, 2, где показано изменение давления, насыщенности нефти и воды в различных точках пласта по времени при дебите, равном 100 $m^3/сутки$ (рис. 1), и постоянном забойном давлении 195 атм (рис. 2). Насыщенность нефти в рассматриваемых точках по мере уменьшения r убывает, достигая минимального значения, а затем начинает расти. Аналогичный эффект обнаруживается и на скважине, но из-за масштаба времени на рис. 1, 2 этого не видно. Водонасыщенность же уменьшается; причем тем интенсивнее, чем точка ближе к скважине.

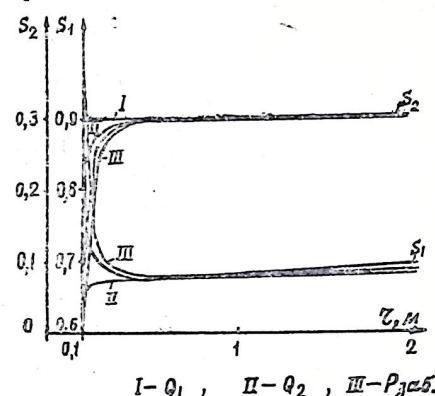


Рис. 3

Изменение насыщенностей S_1, S_2 по пласту при фиксированном для различных дебитов ($Q_1 = 100 m^3/сутки, Q_2 = 25 m^3/сутки$) и постоянном забойном давлении ($P_{заб} = 195 атм$) показано на рис. 3. Значение S_1 ($Q_1 = 100 m^3/сутки; P_{заб} = 195 атм$) по мере уменьшения r уменьшается, достигая минимального значения, а затем, возрастая, принимает значения больше первоначального. При малом же дебите ($Q_2 = 25 m^3/сутки$) возрастания S_1 пока не наблюдается, так как осушка в этом случае происходит при большем t . Водонасыщенность в рассматриваемых случаях по мере уменьшения r убывает. Отметим, что со временем зона осушки увеличивается. Таким образом, из вышеизложенного следует, что учет массопереноса остаточной воды оказывает существенное влияние на процесс истощения пласта.

В заключение, пользуясь случаем, выражаем благодарность акад. А. Х. Мирзаджанзаде за руководство и З. М. Ахмедову за оказанную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. Гостоптехиздат, 1953.
2. Ахмедов З. М. и др. "Нефть и газ", 1970, № 5.
3. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. Изд-во "Мир", М., 1968.

Институт кибернетики

Поступило 5. V 1971

В. Г. Пирмамедов, О. М. Ферзелиева

Галыг сујун күтлэ өтүрүлмәсини нәзәрә алмагла
газланмыш нефтин сүзүлмәсинин гејри-стационар
мәсәләсинин эдәди һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә сонлу лајда галыг сујун күтлэ өтүрүлмәсини нәзәрә алмагла газланмыш нефтин сүзүлмәсинин гејри-стационар мүстәвир-радиал мәсәләсинә бахылмышдыр. Бундан башга, һаггында данышылан нефтин сүзүлмәсини тәсвир едән хусуси төрәмәли диференциал кәстәрилмишдир. Верилмиш башлангыч вә сәрһәд мәсәләсинин эдәди һәлли үсулу дә башлангыч истисмар дөврү үчүн тәзјигин, нефт вә су дојмасынын дәјишмә характери тәдгиг олунмушдур.

УДК 532.546 : 622.692.2

Р. А. МУСТАФАЕВ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДВУХФАЗНЫХ ЗАДАЧ ТИПА ВЕРИГИНА

Задача о перемещении границы раздела двух жидкостей и распределении давления в пористой среде имеет большое практическое значение. В частности, с ней связаны вопросы о вытеснении воды газом при создании подземных газохранилищ в водоносных пластах, законтурного и внутриконтурного заводнения. Впервые эта задача была сформулирована и приближенно решена Л. С. Лейбензоном [1]. В дальнейшем решении задач, связанных с исследованием перемещения границы раздела, занимались многие авторы [2—7 и др.]. Имеется ряд автомодельных решений задач о вытеснении. Следует отметить, что только в частных случаях получены аналитические решения. В связи с этим представляет интерес численное решение задач указанного типа.

Ниже рассматривается разностный метод решения некоторых нестационарных задач типа Веригина, возникающих при создании и эксплуатации газохранилищ в водоносных пластах. Считая процесс изотермическим, газ идеальным и предполагая, что зона смеси отсутствует, можно сформулировать нижеследующую задачу. Определить давление $p_1(r, t)$ в газовой области, давление $p_2(r, t)$ в водяной части пласта и подвижную границу $\rho(t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial p_1^2}{\partial r} \right) = \frac{1}{\kappa_1(p_1)} \frac{\partial p_1^2}{\partial t} \quad \text{в } D_1: \{0 < r < \rho(t), 0 < t < T\}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) = \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad \text{в } D_2: \{\rho(t) < r < L, 0 < t < T\}, \quad (2)$$

начальным и граничным условиям:

$$E_n \left[-\frac{\pi \gamma_0 \kappa_1 r_0}{\rho_{n+1}} \right] \frac{\partial p_1^2(r_0, t)}{\partial r} + F_n p_1(r_0, t) = f_n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$p_1(r, 0) = \psi_1(r), \quad r_0 \leq r \leq \rho(0), \quad p_2(r, 0) = \psi_2(r), \quad \rho(0) \leq r \leq L, \quad (4)$$

$$p_2(L, t) = \varphi(t) \quad (5) \quad \text{или} \quad \frac{\partial p_2(L, t)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5')$$

$$p_1(\rho(t), t) = p_2(\rho(t), t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial p_1(\rho(t), t)}{\partial r} = \alpha_2 \frac{\partial p_2(\rho(t), t)}{\partial r}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\alpha_2 \frac{\partial p_2(\rho(t), t)}{\partial r}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

где

$$\kappa_1(p_1) = \frac{\kappa_1 p_1(t)}{m_1 \mu_1}, \quad \kappa_2 = \frac{\kappa_2 K}{m_2 \mu_2}, \quad \alpha_i = \frac{\kappa_i}{m_i \mu_i} \quad (i = 1, 2),$$

$n=0$ в случае нагнетания газа через галерею (прямолинейно-параллельное вытеснение), $n=1$ в случае нагнетания газа в одиночную скважину, расположенную в центре кругового пласта радиуса L (плоско-радиальное движение). Случай сферически-радиального движения ($n=2$) будет описан в следующем сообщении.

Предполагается, что выполнены условия сопряжения и подвижная граница $\rho(t)$ не совпадает с концами отрезка $[0, L]$. Вводя безразмерные переменные

$$\frac{r}{L_0} = r, \quad \frac{t}{T_0} = t, \quad \frac{p_i(r, t)}{p_0} = p_i \quad (i = 1, 2)$$

и выполняя замену независимых переменных

$$s_1 = (r_0 - r)[r_0 - \rho(t)]^{-1}, \quad s_2 = [r - \rho(t)][L - \rho(t)]^{-1} + 1,$$

представим исходную задачу (1)–(8) в следующем виде:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = \alpha_1^2 [\rho(t) - r_0]^{-2} \frac{\partial^2 P_1^2}{\partial s_1^2} + \alpha_1^2 n \{ [s_1(\rho(t) - r_0) + r_0][\rho(t) - r_0] \}^{-1} \frac{\partial P_1^2}{\partial s_1} +$$

$$+ s_1 \dot{\rho}(t) [\rho(t) - r_0]^{-1} \frac{\partial P_1}{\partial s_1} \quad \text{в } D_1^*: \{0 < s_1 < 1, \quad 0 < t < T\}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = \alpha_2^2 [L - \rho(t)]^{-2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial s_2^2} + \{ \alpha_2^2 n [(s_2 - 1)(L - \rho(t)) +$$

$$+ \rho(t)]^{-1} [L - \rho(t)]^{-1} + (2 - s_2) \dot{\rho}(t) [L - \rho(t)]^{-1} \} \frac{\partial P_2}{\partial s_2}$$

$$\text{в } D_2^*: \{1 < s_2 < 2, \quad 0 < t < T\}; \quad (10)$$

$$E_n \bar{\Phi}_1^{-1} [\rho(t) - r_0]^{-1} \left(\frac{\partial P_1^2}{\partial s_1} \right)_{s_1=0} + F_n P_1(0, t) = f_n(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (11)$$

$$P_1(s_{1,0}^0) = \psi_1(s_1^0), \quad 0 \leq s_1^0 \leq 1, \quad s_1^0 = (r_0 - r)[r_0 - \rho(0)]^{-1}, \quad (12)$$

$$P_2(s_{2,0}^0) = \psi_2(s_2^0), \quad 1 \leq s_2^0 \leq 2, \quad s_2^0 = [r - \rho(0)][L - \rho(0)]^{-1} + 1,$$

$$P_2(2, t) = \varphi(t) \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial P_2}{\partial s_2} \right)_{s_2=2} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13)$$

$$P_1(1, t) = P_2(1, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (14)$$

$$\alpha_1 [\rho(t) - r_0]^{-1} \left(\frac{\partial P_1}{\partial s_1} \right)_{s_1=1} = \alpha_2 [L - \rho(t)]^{-1} \left(\frac{\partial P_2}{\partial s_2} \right)_{s_2=1}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (15)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha [L - \rho(t)]^{-1} \left(\frac{\partial P_2}{\partial s_2} \right)_{s_2=1}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (16)$$

где

$$\alpha_1^2 = \frac{T_0 p_0 \alpha_1}{2 L_0^2}, \quad \alpha_2^2 = \frac{T_0 \alpha_2}{L_0^2}, \quad \Phi_1(t) = - \frac{f_1(t) \Gamma_1 p_0 L_0}{\pi \kappa_1 \Gamma_0 r_0 p_0^2} =$$

$$= \bar{\Phi}_1(t) f_1(t), \quad \alpha = - \frac{\alpha_2 T_0 p_0}{L_0^2}.$$

Для решения используем неявную разностную схему с неравномерной сеткой. С этой целью разобьем отрезки $[0, 1]$ и $[1, 2]$ соответственно на N_1 и N_2 частей точками $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{N_1} = 1 < s_{N_1+1} < \dots < s_{N_1+N_2} = 2$, а $[0, T]$ — на M частей точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$. Введем обозначения $\nabla_i = s_i - s_{i-1}$, $\nabla_j = t_j - t_{j-1}$, $P_{ij} = P(s_i, t_j)$, $\rho_j = \rho(t_j)$ и заменим производные следующими конечными разностными соотношениями:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_k = \left(\frac{DP}{Lx} \right)_{k+1,k} - \nabla_{k+1} \left(\frac{L^2 P}{Lx^2} \right)_{k+2,k} + c_1 (\nabla x)^2, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_k = \left(\frac{L^2 P}{Lx^2} \right)_{k+1,k-1} + c_2 \nabla x, \quad (18)$$

где

$$\nabla x = \max_k \nabla_{k,k},$$

$$\left(\frac{DP}{Lx} \right)_{k+1,k} = (P_{k+1} - P_k) (x_{k+1} - x_k)^{-1}, \quad (19)$$

$$\left(\frac{D^2 P}{Lx^2} \right)_{k+2,k} = \left[\left(\frac{DP}{Lx} \right)_{k+2,k+1} - \left(\frac{DP}{Lx} \right)_{k+1,k} \right] (x_{k+2} - x_k)^{-1}. \quad (20)$$

Очевидно, что

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_k = \left(\frac{DP}{Lx} \right)_{k-k,1} - \nabla_k \left(\frac{L^2 P}{Lx^2} \right)_{k-2,k} + c_1' (\nabla x)^2, \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_k = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{DP}{Lx} \right)_{k+1,k} - \left(\frac{DP}{Lx} \right)_{k,k-1} \right] + c_3 \nabla x. \quad (22)$$

С учетом (17)–(22) после некоторых преобразований получим нелинейную разностную задачу, эквивалентную задаче (9)–(16). Для ее решения применим метод итераций [8]. В результате для определения искомых величин на $(\rho_{(j+1)} + 1)$ временном слое получим следующие итерационно-разностные выражения:

$$\{ [\alpha_1^{(k)} c_{1,i+1} (1 + c_{1,i+1})^{-1} + n \beta_1^{(k)}] P_{1,i+1,j+1}^{(k-1)} + \gamma_1^{(k)} \} P_{1,i+1,j+1}^{(k)} -$$

$$- \{ [\alpha_1^{(k)} c_{1,i+1} + n \beta_1^{(k)} (1 - c_{1,i+1})] P_{1,i,j+1}^{(k-1)} + 1 + \gamma_1^{(k)} (1 - c_{1,i+1}) \} P_{1,i,j+1}^{(k)} +$$

$$+ \{ (\alpha_1^{(k)} c_{1,i+1} (1 + c_{1,i+1})^{-1} - n \beta_1^{(k)}) P_{1,i-1,j+1}^{(k-1)} - \gamma_1^{(k)} \} c_{1,i+1} P_{1,i-1,j+1}^{(k)} = -P_{1,i,j};$$

$$(i = \overline{1, N_1 - 1}; \quad j = \overline{0, M - 1}; \quad k = 1, 2, \dots)$$

$$[\alpha_2^{(k)} c_{2,i+1} (1 + c_{2,i+1})^{-1} + n \beta_2^{(k)} + \gamma_2^{(k)}] P_{2,i+1,j+1}^{(k)} -$$

$$- [\alpha_2^{(k)} c_{2,i+1} + (n \beta_2^{(k)} + \gamma_2^{(k)}) (1 - c_{2,i+1}) + 1] P_{2,i,j+1}^{(k)} +$$

$$+ [\alpha_2^{(k)} c_{2,i+1} (1 + c_{2,i+1})^{-1} - n \beta_2^{(k)} - \gamma_2^{(k)}] c_{2,i+1} P_{2,i-1,j+1}^{(k)} = -P_{2,i,j}; \quad (24)$$

$$(i = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 - 1}; \quad j = \overline{0, M - 1}; \quad k = 1, 2, \dots) \quad (24)$$

$$E_n d_{j+1}^{(k)} P_{1,1,j+1}^{(k-1)} P_{1,1,j+1}^{(k)} - \{ E_n d_{j+1}^{(k)} P_{1,0,j+1}^{(k-1)} - F_n \} P_{1,0,j+1}^{(k)} =$$

$$= f_{n,j+1}, \quad (j = \overline{0, M - 1}); \quad (25)$$

$$P_{1,i,0} = \psi_{1,i} \quad (i = \overline{0, N_1}); \quad P_{2,i,0} = \psi_{2,i} \quad (i = \overline{N_1, N_1 + N_2}); \quad (26)$$

$$P_{2,N_1+N_2,j+1} = \varphi_{j+1} = \quad (j = \overline{0, M - 1}) \quad (27)$$

или

$$\alpha_2^{(k)} P_{2,N_1+N_2-1,j+1}^{(k)} - (\alpha_2^{(k)} + 1) P_{2,N_1+N_2,j+1}^{(k)} = -P_{2,N_1+N_2,j},$$

$$(j = \overline{0, M - 1}); \quad (27')$$

$$P_{1,N_1,j+1}^{(k)} = P_{2,N_1,j+1}^{(k)} \quad (j = \overline{0, M-1}); \quad (28)$$

$$\gamma^{(k)} P_{2,N_1+1,j+1}^{(k)} - (\gamma^{(k)} + 1) P_{1,N_1,j+1}^{(k)} + P_{1,N_1-1,j+1}^{(k)} = 0 \quad (j = \overline{0, M-1}); \quad (29)$$

$$\rho_{j+1}^{(k)} = \rho_j - \alpha \nabla_{j+1} [(L - \rho_{j+1}^{(k-1)}) \nabla_{N_1+1}]^{-1} [P_{2,N_1+1,j+1}^{(k-1)} - P_{2,N_1,j+1}^{(k-1)}] \quad (j = \overline{0, M-1}), \quad (30)$$

где введены обозначения:

$$\alpha_1^{(k)} = 2a_1^2 \nabla_{i+1} [\nabla_{1,i+1} (\rho_{j+1}^{(k)} - r_0)]^{-2},$$

$$\gamma_1^{(k)} = s_{1,1} (\rho_{j+1}^{(k)} - r_0) [2 \nabla_{1,i+1} (\rho_{j+1}^{(k)} - \rho_j)]^{-1},$$

$$\beta_1^{(k)} = a_1^2 \nabla_{j+1} \{2 \nabla_{1,i+1} [s_{1,1} (\rho_{j+1}^{(k)} - r_0) + r_0] (\rho_{j+1}^{(k)} - r_0)\}^{-1},$$

$$c_{1,i+1} = \frac{\nabla_{1,i+1}}{\nabla_i} \quad (l = 1, 2), \quad \alpha_2^{(k)} = 2a_2^2 \nabla_{j+1} [\nabla_{2,i+1} (L - \rho_{j+1}^{(k)})]^{-2},$$

$$\gamma_2^{(k)} = (2 - s_{2,i}) (\rho_{j+1}^{(k)} - \rho_j) [2 \nabla_{2,i+1} (L - \rho_{j+1}^{(k)})]^{-1},$$

$$\beta_2^{(k)} = a_2^2 \nabla_{j+1} \{2 \nabla_{2,i+1} [(s_{2,i} - 1) (L - \rho_{j+1}^{(k)}) + \rho_{j+1}^{(k)}] (L - \rho_{j+1}^{(k)})\}^{-1},$$

$$\gamma^{(k)} = \nabla_{1,N_1} (\rho_{j+1}^{(k)} - r_0) \alpha_2 [\nabla_{2,N_1+1} (L - \rho_{j+1}^{(k)}) \alpha_1]^{-1},$$

$$a_{j+1}^{(k)} = [\nabla_{1,N_1} (\rho_{j+1}^{(k)} - r_0)]^{-1}.$$

Таким образом, из (25), (23), (29), (24) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_{0,j+1}^{(k)} P_{1,1,j+1}^{(k)} - B_{0,j+1}^{(k)} P_{1,0,j+1}^{(k)} = D_{0,j+1}, \\ A_{i,j+1}^{(k)} P_{1,i+1,j+1}^{(k)} - B_{i,j+1}^{(k)} P_{1,i,j+1}^{(k)} + C_{i,j+1}^{(k)} P_{1,i-1,j+1}^{(k)} = D_{i,j+1} \quad (i = \overline{1, N_1-1}), \\ A_{N_1,j+1}^{(k)} P_{2,N_1+1,j+1}^{(k)} - B_{N_1,j+1}^{(k)} P_{1,N_1,j+1}^{(k)} + C_{N_1,j+1}^{(k)} P_{1,N_1-1,j+1}^{(k)} = 0, \\ A_{i,j+1}^{(k)} P_{2,i+1,j+1}^{(k)} - B_{i,j+1}^{(k)} P_{2,i,j+1}^{(k)} + C_{i,j+1}^{(k)} P_{2,i-1,j+1}^{(k)} = D_{i,j+1}, \end{cases} \quad (31)$$

$$(i = \overline{N_1+1, N_1+N_2-1}).$$

Итерационный процесс состоит в следующем. Считая известным $(k-1)$ -е приближение искомых величин, из (30) определяем $\rho_{j+1}^{(k)}$. Затем, используя (23) — (29), по найденному $\rho_{j+1}^{(k)}$ определяем $P_{1,0,j+1}^{(k)}, \dots, P_{1,N_1,j+1}^{(k)}, P_{2,N_1+1,j+1}^{(k)}, \dots, P_{2,N_1+N_2-1,j+1}^{(k)}$.

Аналогично определяются и последующие приближения. Итерирование происходит до выполнения условий

$$|P_{1,i,j+1}^{(k)} - P_{1,i,j+1}^{(k-1)}| < \varepsilon_1, \quad |\rho_{j+1}^{(k)} - \rho_{j+1}^{(k-1)}| < \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = \text{const}, \text{const} > 0, \quad (l = 1, 2).$$

При каждой итерации для решения системы (31) применялся метод прогонки. Искомые функции ищутся в виде

$$P_{i,j+1} = \alpha_{i,j+1} P_{i+1,j+1} - \beta_{i,j+1}.$$

Вспомогательные величины определяются при прямой прогонке из формул (верхние индексы опущены):

$$\alpha_{i,j+1} = \frac{A_{i,j+1}}{B_{i,j+1} - \alpha_{i-1,j+1} C_{i,j+1}}, \quad \beta_{i,j+1} = \frac{\beta_{i-1,j+1} C_{i,j+1} - D_{i,j+1}}{B_{i,j+1} - \alpha_{i-1,j+1} C_{i,j+1}} \quad (i = \overline{0, N_1 + N_2 - 1}),$$

где

$$\alpha_{-1} = \beta_{-1} = 0.$$

Для подбора эффективной разностной сетки были рассмотрены различные типы разбиений по пространственной переменной.

1. Начальные 5—7 шагов равны $\rho(0)$, затем шаг удваивается до тех пор, пока сумма длин всех шагов не достигнет некоторого

значения H . Если после некоторого удвоения сумма больше H , то шаг равен разности между H и суммой предыдущих шагов. В первой области последующие шаги до середины отрезка, а во второй области до конца равны h . Вторая половина первой области — зеркальное отображение первой половины.

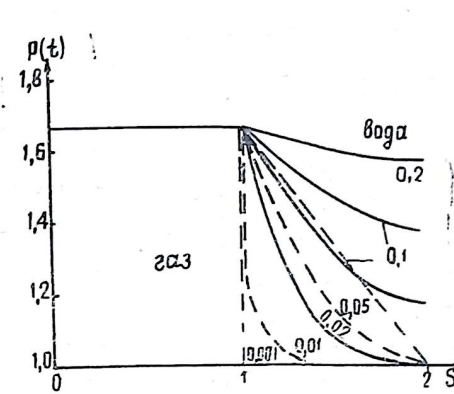


Рис. 1

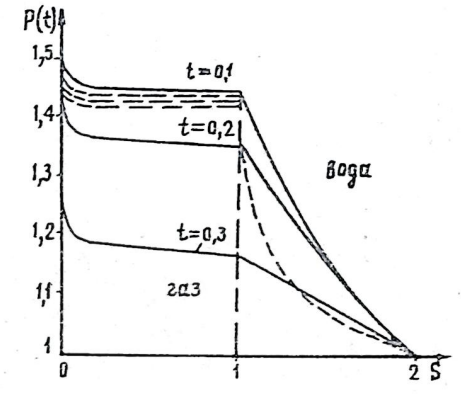


Рис. 2

2. До значения H_1 шаги берутся как в п. 1, затем 1—3 шага равны h . Последующие шаги в первой области до середины, а во второй до конца равны $2h$. Вторая половина первой области — зеркальное отображение первой половины.

3. Процедура п. 1, но со значениями H_2 и $h/2$ вместо H и h , соответственно.

В качестве примера численных расчетов задачи (1) — (8), решенной на ЭЦВМ М-220А, рассмотрим частный случай со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 1,043\,928, & a_2^2 &= 4,323\,456, & \alpha_1 \cdot \alpha_2^{-1} &= 0,1 \cdot 10^{-1}, \\ \alpha &= 0,208\,7856 \cdot 10^{-1}, & \psi_1 &= 1, & \psi_2 &= 1. \end{aligned} \quad (32)$$

а) $n = 0, E_0 = 0, F_0 = 1, r_0 = 0$.

Результаты численных расчетов для случая (32) при $\rho(0) = 0,1$ м, $L = 10$ км, $f_0(t) = 1,67$ представлены на рис. 1 (условие (5) — пунктиром, (5') — сплошные линии). Как следует из этого рисунка, давление в газовой области практически можно принять постоянным во времени и равным давлению закачки. Для численных расчетов в этом случае эффективным является разбиение второго типа.

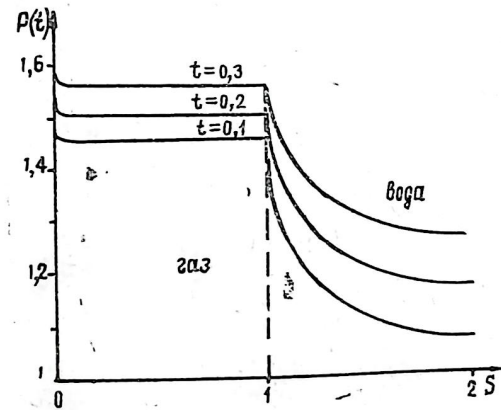


Рис. 3

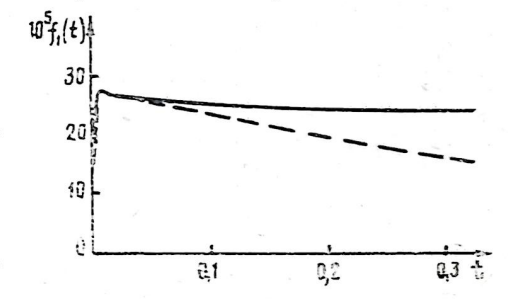


Рис. 4

б) $n = 1, E_1 = 2h, F_1 = 0$. К (32) добавляются условия $r_0 = 0,1$ м, $\rho(0) = 0,11$ м, $\Phi_1 = 618,896\,440$. Результаты расчетов приведены на рис. 2 и 3 (условия (5) и (5'), соответственно). На рис. 2 пунктиром указаны значения для $L = 10$ км, сплошной линией для $L = 1$ км. Как следует

Таблица 1

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$p_{1c}(t)$	$p_{2c}(t)$	$p_{3c}(t)$	$p_1(p(t), t)$	$p_2(p(t), t)$	$p_3(p(t), t)$
$0,1 \cdot 10^{-4}$	$0,229 \cdot 10^{-3}$	$0,251 \cdot 10^{-3}$	$0,231 \cdot 10^{-3}$	1,548	1,530	1,562	1,542	1,524	1,556
$0,2 \cdot 10^{-4}$	$0,332 \cdot 10^{-3}$	$0,326 \cdot 10^{-3}$	$0,336 \cdot 10^{-3}$	1,605	1,583	1,623	1,599	1,577	1,617
$0,4 \cdot 10^{-4}$	$0,489 \cdot 10^{-3}$	$0,478 \cdot 10^{-3}$	$0,497 \cdot 10^{-3}$	1,602	1,577	1,623	1,595	1,570	1,616
$0,8 \cdot 10^{-4}$	$0,712 \cdot 10^{-3}$	$0,695 \cdot 10^{-3}$	$0,727 \cdot 10^{-3}$	1,576	1,550	1,601	1,569	1,543	1,593
$0,16 \cdot 10^{-3}$	$0,102 \cdot 10^{-2}$	$0,997 \cdot 10^{-3}$	$0,105 \cdot 10^{-2}$	1,550	1,523	1,576	1,542	1,515	1,568
$0,32 \cdot 10^{-3}$	$0,146 \cdot 10^{-2}$	$0,141 \cdot 10^{-2}$	$0,149 \cdot 10^{-2}$	1,526	1,500	1,554	1,518	1,491	1,545
$0,64 \cdot 10^{-3}$	$0,205 \cdot 10^{-2}$	$0,200 \cdot 10^{-2}$	$0,211 \cdot 10^{-2}$	1,506	1,480	1,534	1,497	1,471	1,525
$0,128 \cdot 10^{-3}$	$0,288 \cdot 10^{-2}$	$0,280 \cdot 10^{-2}$	$0,297 \cdot 10^{-2}$	1,489	1,463	1,520	1,480	1,453	1,510
$0,256 \cdot 10^{-3}$	$0,404 \cdot 10^{-2}$	$0,391 \cdot 10^{-2}$	$0,416 \cdot 10^{-2}$	1,475	1,448	1,509	1,465	1,438	1,499
$0,512 \cdot 10^{-2}$	$0,564 \cdot 10^{-2}$	$0,546 \cdot 10^{-2}$	$0,581 \cdot 10^{-2}$	1,464	1,437	1,501	1,454	1,426	1,490
$0,1024 \cdot 10^{-1}$	$0,788 \cdot 10^{-2}$	$0,764 \cdot 10^{-2}$	$0,812 \cdot 10^{-2}$	1,458	1,427	1,496	1,447	1,416	1,485
$0,2048 \cdot 10^{-1}$	$0,109 \cdot 10^{-1}$	$0,107 \cdot 10^{-1}$	$0,114 \cdot 10^{-1}$	1,455	1,427	1,495	1,443	1,410	1,483

из рис. 2, даже в случае однородного пласта конечной длины (до 10 км) распределение давления в газовой области происходит неравномерно. При этом зона сильного возмущения составляет 8—9% радиуса газовой области. Так, в случае $L=1$ км через 36 дней нагнетания зона сильного возмущения составляет свыше 29 м, через 72 дня свыше 42 м, через 108 дней—около 54 м, а отношение давле-

Таблица 2

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$p_{1c}(t)$	$p_{2c}(t)$	$p_{3c}(t)$	$p_1(L, t)$	$p_2(L, t)$	$p_3(L, t)$
$0,1 \cdot 10^{-4}$	$0,227 \cdot 10^{-3}$	$0,224 \cdot 10^{-3}$	$0,229 \cdot 10^{-3}$	1,551	1,553	1,565	1,000	1,000	1,000
$0,15 \cdot 10^{-3}$	$0,101 \cdot 10^{-2}$	$0,983 \cdot 10^{-3}$	$0,103 \cdot 10^{-2}$	1,547	1,520	1,574	1,000	1,000	1,000
$0,128 \cdot 10^{-2}$	$0,289 \cdot 10^{-2}$	$0,280 \cdot 10^{-2}$	$0,295 \cdot 10^{-2}$	1,486	1,459	1,511	1,000	1,000	1,090
$0,256 \cdot 10^{-2}$	$0,404 \cdot 10^{-2}$	$0,392 \cdot 10^{-2}$	$0,416 \cdot 10^{-2}$	1,471	1,445	1,506	1,000	1,000	1,000
$0,512 \cdot 10^{-2}$	$0,565 \cdot 10^{-2}$	$0,547 \cdot 10^{-2}$	$0,581 \cdot 10^{-2}$	1,461	1,433	1,498	1,000	1,000	1,000
$0,1024 \cdot 10^{-1}$	$0,778 \cdot 10^{-2}$	$0,765 \cdot 10^{-2}$	$0,812 \cdot 10^{-2}$	1,454	1,416	1,493	1,000	1,000	1,000
$0,2048 \cdot 10^{-1}$	$0,110 \cdot 10^{-1}$	$0,107 \cdot 10^{-1}$	$0,114 \cdot 10^{-1}$	1,451	1,418	1,491	1,002	1,002	1,002
$0,3072 \cdot 10^{-1}$	$0,134 \cdot 10^{-1}$	$0,130 \cdot 10^{-1}$	$0,137 \cdot 10^{-1}$	1,450	1,416	1,492	1,007	1,006	1,008
$0,4096 \cdot 10^{-1}$	$0,154 \cdot 10^{-1}$	$0,148 \cdot 10^{-1}$	$0,159 \cdot 10^{-1}$	1,451	1,416	1,494	1,014	1,013	1,016
$0,8192 \cdot 10^{-1}$	$0,216 \cdot 10^{-1}$	$0,209 \cdot 10^{-1}$	$0,223 \cdot 10^{-1}$	1,460	1,422	1,504	1,052	1,045	1,059
0,11007	$0,249 \cdot 10^{-1}$	$0,242 \cdot 10^{-1}$	$0,257 \cdot 10^{-1}$	1,469	1,430	1,514	1,079	1,069	1,090
0,16384	$0,302 \cdot 10^{-1}$	$0,293 \cdot 10^{-1}$	$0,311 \cdot 10^{-1}$	1,493	1,451	1,541	1,132	1,116	1,150
0,21888	$0,346 \cdot 10^{-1}$	$0,335 \cdot 10^{-1}$	$0,356 \cdot 10^{-1}$	1,522	1,477	1,573	1,186	1,164	1,210
0,32768	$0,416 \cdot 10^{-1}$	$0,404 \cdot 10^{-1}$	$0,427 \cdot 10^{-1}$	1,586	1,534	1,642	1,289	1,256	1,324

ния на контакте к забойному давлению соответственно 98,3, 97,96 и 97,6%. Сравнение с результатами [7] показало, что предположение о постоянстве давления в газовой области приводит к занижению результатов. Так, при $L=1$ км давление на контакте занижено до 9%. В табл. 1, 2 (условия (5) и (5¹), соответственно) для сравнения приведены данные расчетов при $r_0=0,1$ м, $p(0)=1$ м, $L=10$ км

в случае нагнетания в течение 4 месяцев 10^8 н.м³ газа. Индексы при $p(t)$, $P_c(t)$, $P(p(t), t)$ и $P(L, t)$ соответствуют типам разбиений. Как следует из таблиц, в этом случае эффективным является разбиение первого типа.

в) $n=1$, $E_1=2h$, $F_1=0$, го функция $f_1(t)$ неизвестна, т. е. рассматривается обратная задача, когда задано давление нагнетания. В этом случае добавляется условие, получаемое из (3) при $n=0$, $E_0=0$, $F_0=1$. Результаты расчетов для (32) при $r_0=0,1$ м, $f_0(t)=1,67$, $\Phi_1(t)=0,742675728 \cdot 10^{-3}$, $p(0)=1$ м, $L=10$ км представлены на рис. 4 (условие (5)—сплошная линия, условие (5¹)—пунктир). В этом случае эффективным является разбиение второго типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Собр. трудов, т. II, 1952.
2. Веригин Н. Н. Изв. АН СССР, ОТН, 1952, № 5.
3. Мирзаджанзаде А. Х., Мустафаев В. В. ДАН Азерб. ССР, т. 14, 1958, № 1.
4. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. "Звизгзне", 1967.
5. Камынин Л. И. ЖВМ и МФ, т. II, 1962, № 5.
6. Филинов М. В. Изв. АН СССР, 1965, № 2.
7. Пирмамедов В. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1967, № 3.
8. Будак Б. М., Гольдман Н. А., Успенский А. Б. ДАН СССР, т. 167, 1966, № 4.

Институт кибернетики

Поступило 19. VII 1971

Р. А. Мустафаев

Верикин типли бə'зи икифазалы мәсələлəрин
əдəди һəлли

ХҮЛАСƏ

Мəгалəдə сујун газ илə сыхышдырылмасына даир ики икифазалы Верикин типли мəсələнин əдəди һəллигə бахылмышдыр. Биринчи мəсələдə сонлу су лајында јерлəшмиш галерейаја тəрəф сујун газ илə сыхышдырылмасы һалы өјрəнилмишдыр. Икинчи мəсələдə сонлу су лајында јерлəшмиш кичик радиуслу гујуја газын вурулмасы про-сесинə бахылмышдыр.

Əдəди һесабламаларда сонлу фəрглэр үсудунун гејри-ашкар схеминдэн истифадə олунмушдыр.

Конкрет мисаллар „М-220А“ ЕНМ-да һəлл едилмишдыр.

УДК 517.946

О. А. ДЫШИН

ОПЕРАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ОБРАЩЕНИЕ

1. Целью настоящей работы являлся вывод операционных формул решения и их обращение для уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами, зависящими от x , и граничными условиями, включающими производные по времени, правые части которых переменны по t .

В случае граничных условий, не содержащих производных по времени, при постоянных коэффициентах уравнения формальное решение задачи операционным методом и методом конечных интегральных преобразований получено в работах [1–3]. Рассматриваемая здесь задача в случае граничных условий с правыми частями, постоянными по t , исследована в [4], краткое изложение результатов дано в [5].

Пусть (a_i, b_i) ($i = 1, \dots, n$) — примыкающие друг к другу интервалы, содержащиеся в основном интервале (a_1, b_n) ($n \geq 1$). Через $\alpha_{Se}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, $\beta_{Se}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ обозначим линейные операторы

$$\alpha_{Se}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \alpha_{Se0}^{(i)} + \alpha_{Se1}^{(i)} \cdot \frac{\partial}{\partial t}, \quad \beta_{Se}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \beta_{Se0}^{(i)} + \beta_{Se1}^{(i)} \cdot \frac{\partial}{\partial t},$$

где $\alpha_{Sek}^{(i)}$, $\beta_{Sek}^{(i)}$ ($k = 0, 1$) — постоянные, вообще говоря, комплексные числа.

Поставим задачу нахождения решения уравнений

$$\frac{\partial u^{(i)}(x, t)}{\partial t} - \sum_{l=0}^2 c_l^{(i)}(x) \frac{\partial^l u^{(i)}(x, t)}{\partial x^l} + f^{(i)}(x, t), \quad x \in (a_i, b_i), \quad t > 0, \quad (1)$$

$(i = 1, \dots, n)$

при граничных условиях

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^1 \left\{ \alpha_{Se}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^l u^{(i)}(x, t)}{\partial x^l} \Big|_{x=a_i+0} + \beta_{Se}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^l u^{(i)}(x, t)}{\partial x^l} \Big|_{x=b_i-0} \right\} = \gamma_s(t), \quad t > 0, \quad (s = 1, 2, \dots, 2n) \quad (2)$$

и начальных условиях

$$u^{(i)}(x, 0) = 0, \quad x \in (a_i, b_i) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3)$$

где $f^{(i)}(x, t)$ ($i = 1, \dots, 2n$), $\gamma_s(t)$ ($s = 1, 2, \dots, 2n$) — заданные функции. Под решением задачи (1)–(3) будут понимать функции $u^{(i)}(x, t)$, удовлетворяющие (1)–(3), непрерывные при $x \in (a_i, b_i)$, $t \geq 0$ и $x \in [a_i, b_i]$, $t > 0$, все производные, от которых входящие в (1), непрерывны по $x \in (a_i, b_i)$, $t > 0$, а производные, входящие в (2), непрерывны по $x \in (a_i, b_i)$ и $t > 0$.

Обозначим далее через S множество всех функций $\Phi(x, t)$, определенных при x на некотором промежутке I , $0 \leq t < \infty$, интегрируемых по t в каждом конечном интервале $[0, T]$ при любом $x \in I$, для которых интеграл Лапласа $L_t\{\Phi(x, t)\}$ сходится в некоторой точке $\lambda_0 = \lambda_0(\Phi)$ равномерно относительно $x \in I$. Каждой фиксированной функции $\Phi(x, t)$ из S соответствует множество $F[\Phi]$ всех действительных значений λ , для которых $L_t\{\Phi(x, t)\}$ сходится равномерно относительно $x \in I$. Нижнюю грань множества $E[\Phi]$ назовем абсциссой сходимости интеграла $L_t\{\Phi(x, t)\}$.

2. Пусть для функций $\gamma_s(t)$, $f^{(i)}(x, t)$ выполнены условия: 1°. Функции $\gamma_s(t)$ ($s = 1, 2, \dots, 2n$) дифференцируемы по $t \geq 0$, причем $\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \gamma_s(t) \right|$ ($k = 0, 1$) принадлежат множеству S с абсциссой сходимости интегралов Лапласа $\gamma_s \geq 0$.

2°. Функции $\left| \frac{\partial^{k+m}}{\partial t^k \partial x^m} f^{(i)}(x, t) \right|$ ($m = 0, 1$; $k = 0, 1, 2$; $i = 1, \dots, n$) на интервале $[a_i, b_i]$ принадлежит S с абсциссой сходимости интегралов Лапласа $\mu^{(i)} \geq 0$.

Решение неоднородного уравнения (1) при однородных граничных условиях и начальных условиях (3) назовем задачей А, а решение однородного уравнения (1) при неоднородных граничных условиях (2) и начальных условиях (3) — задачей Б. Через $\gamma_s(\lambda)$ обозначим преобразование Лапласа функций $\gamma_s(t)$ и воспользуемся обозначениями из [5], а затем исключением, что

$$\Delta^{(i)}(x, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & y_1^{(i)}(x, \lambda) & y_2^{(i)}(x, \lambda) & \dots & 0 & 0 \\ -\gamma_1(\lambda) & | & - & - & - & - & - & - \\ \cdot & | & & & & & & \\ \cdot & | & & & \Delta(\lambda) & & & \\ \cdot & | & & & & & & \\ -\gamma_{2n}(\lambda) & | & - & - & - & - & - & - \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Будем также считать, что коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2) подчинены условиям а), А и Б_(κ) из [5] и назовем как и в [5], задачей А_(κ) ($\kappa = 0, 1, 2$) условно задачу А с граничными условиями (2), соответственно: 1) не содержащими никаких производных по t ; 2) содержащими производную по t хотя бы при одном значении i и s ; 3) содержащими производную $\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t \partial x}$ хотя бы при одном значении i и s . При условиях а), А, Б_(κ) для функций $\Delta^{(i)}(x, \lambda)$, $\Delta(\lambda)$ при больших по модулю λ , $\text{Re } \lambda \geq \gamma_0 = \max(h, \max_s \gamma_s)$ (h — правая граница нулей $\Delta(\lambda)$), верна асимптотическая формула:

$$\frac{1}{\Delta(\lambda)} \frac{d^m \Delta^{(i)}(x, \lambda)}{d\lambda^m} = (V\lambda)^{m-\kappa} \sum_{l=1}^2 [\gamma_{l0m}^{(i)}(x)] \exp\left(V\lambda \int_{a_i}^x \varphi_l^{(i)}(z) dz\right) \times \\ \times \sum_{s=1}^{2n} \gamma_s(\lambda) \sum_{\mu=1}^{\sigma} [M_{\mu s, l}^{(i)}] \exp(m_{\mu}^{(i)} V\lambda) \quad (m = 0, 1; i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

$x \in [a_i, b_i]$,

где

$$a_1^{(1)} = a_i, \quad a_1^{(2)} = b_i; \quad \varphi_k^{(1)}(x) = (-1)^k, \quad (c_2^{(1)}(x))^{-1/2} \quad (k = 1, 2);$$

$$[M_{ps,l}^{(i)}] = \sum_{p=0}^2 M_{ps,l}^{(i)} (V\lambda)^{-p} + O(\lambda^{-3/2});$$

$$[\gamma_{lom}^{(i)}] = \gamma_{lom}^{(i)} + O(1); \quad m_1^{(i)} < m_2^{(i)} < \dots < m_\sigma^{(i)} = 0 \quad (\sigma \leq \varphi^n).$$

С помощью асимптотической формулы (5) и теоремы об обращении интеграла Лапласа в той формулировке, в которой она дается в [7], доказывается нижеследующая теорема.

Теорема 1. Задача $A_{(k)}$ ($k = 0, 1, 2$) при условиях $a), A, B_{(k)}$ и 1° имеет единственное решение, представимое при всех $x \in [a_i, b_i]$, $t > 0$, и $x \in (a_i, b_i)$, $t \geq 0$, формулой

$$\tau^{(i)}(x, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} e^{\lambda t} \frac{\Delta^{(i)}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} d\lambda \quad (\eta \geq \eta_0). \quad (6)$$

$(i = 1, \dots, n)$

Все производные от решения $\tau^{(i)}(x, t)$, входящие в задачу $A_{(k)}$, получаются дифференцированием под знаком контурного интеграла в (6) и принадлежат множеству S с абсциссой сходимости η_0 .

Принимая во внимание таблицы формул операционного исчисления ([6], формулы 3.75, 3.84, 3.87), из асимптотических формул (5) заключаем, что при условиях теоремы 1 для решения задачи $A_{(k)}$ ($k = 1, 2$) справедливы равенства:

$$\tau^{(i)}(x, t) + \sum_{s=1}^{2n} \int_0^t \gamma_s(\tau) P_s(x, t-\tau) d\tau \quad (i = 1, \dots, n),$$

$x \in [a_i, b_i], \quad t > 0 \quad (7)$

где $P_s^{(i)}(x, t)$ — функции, непрерывные при $x \in [a_i, b_i]$, $t > 0$, являющиеся обращениями интегралов Лапласа функций, стоящих коэффициентами при $\gamma_s(\lambda)$ в разложении определителя $\Delta^{(i)}(x, \lambda)/\Delta(\lambda)$ по первому столбцу.

Относительно задачи B в [4] было доказано, что при условиях $a), A$ и 2° решение $W^{(i)}(x, t)$ задачи B представляется при всех $x \in [a_i, b_i]$, $t > 0$, обратным интегралом Лапласа:

$$W^{(i)}(x, t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} e^{\lambda t} d\lambda \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} G^{(i,j)}(x, \xi, \lambda) \bar{f}_1^{(j)}(\xi, \lambda) d\xi, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8)$$

где

$$\bar{f}_1^{(i)}(x, \lambda) = \bar{f}^{(i)}(x, \lambda) (c_2(x))^{-1}, \quad \bar{f}^{(i)}(x, \lambda) = L_t\{f^{(i)}(x, t)\}; \quad G^{(i,j)}(x, \xi, \lambda)$$

($i, j = 1, \dots, n$) — матричная функция Грина, соответствующая i -му уравнению спектральной задачи — задачи в изображениях:

$$\eta = \max(h, \max \mu^{(i)}).$$

Все производные от решения $W^{(i)}(x, t)$, входящие в задачу B , получаются дифференцированием под знаком контурного интеграла в (8) и принадлежат множеству S с абсциссой сходимости, не превышающей числа η .

Асимптотическая оценка при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Pi \{|\lambda| \operatorname{Re} \lambda \geq h\}$, функций $G^{(i,j)}(x, \xi, \lambda)$ приводит к формулам

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} G^{(i,j)}(h, \xi, \lambda) = \sum_{v=0}^3 (a_{1m,v}^{(i,j)}(x, \xi) \exp(-a_{mv}^{(i,j)}(x, \xi) \sqrt{\lambda}) + a_{2m,v}^{(i,j)}(x, \xi) (\sqrt{\lambda})^{-v+m-1}) + \frac{E_m^{(i,j)}(x, \xi, \lambda)}{\lambda^{3/2}} \quad (m = 0, 1, 2; i, j = 1, \dots, n). \quad (9)$$

Функции $a_{km,v}^{(i,j)}(x, \xi)$, $a_{mv}^{(i,j)}(x, \xi)$ ($k = 1, 2$; $m = 0, 1, 2$; $v = 0, 1, 2, 3$) в формулах (9) непрерывны при всех $x \in [a_i, b_i]$, $\xi \in [a_j, b_j]$, причем

$$a_{mv}^{(i,j)}(x, \xi) > 0 \quad (m = 0, 1, 2; v = 0, 1, 2, 3); \quad E_m^{(i,j)}(x, \xi, \lambda)$$

($m = 0, 1, 2$) непрерывны по $x \in [a_i, b_i]$, $\xi \in [a_j, b_j]$, аналитические по $\lambda \in \Pi$ и равномерно по $x \in [a_i, b_i]$, $\xi \in [a_j, b_j]$ ограничены при всех больших по модулю λ , $\lambda \in \Pi$. Из (9) в наших предположениях о гладкости функций $f^{(i)}(x, t)$ следует возможность перестановки порядка интегрирования в (8).

Так как далее функции $\exp(-x\sqrt{\lambda})(\sqrt{\lambda})^{-v}$ ($v = 0, 1, 2, 3$) и $(\sqrt{\lambda})^{-v}$ ($v = 1, 2, 3$) являются при $x > 0$ интегралами Лапласа от функций, непрерывных при $t > 0$ и абсолютно интегрируемых на любом конечном интервале $[0, T]$ (см. [6]), то из (9) следует, что $G^{(i,j)}(x, \xi, \lambda)$ ($i, j = 1, \dots, n$) являются интегралами Лапласа от функций $G_0^{(i,j)}(x, \xi, t)$, непрерывных по $x \in [a_i, b_i]$, $\xi \in [a_j, b_j]$ при любом фиксированном $t > 0$ и $\int_0^t |G_0^{(i,j)}(x, \xi, \tau)| d\tau$ сходится при $0 < t \leq T$ (T — любое конечное число) равномерно по $x \in [a_i, b_i]$, $\xi \in [a_j, b_j]$ к непрерывной функции аргументов $x \in [a_i, b_i]$, $\xi \in [a_j, b_j]$, $t \in [0, T]$.

Тогда, применяя теорему об умножении изображений, из (8) находим при всех $x \in [a_i, b_i]$ и $t > 0$

$$W^{(i)}(x, t) = - \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} G_0^{(i,j)}(x, \xi, t-\tau) f_1^{(j)}(\xi, \tau) (c_2(\xi))^{-1} d\xi d\tau. \quad (10)$$

$(i = 1, \dots, n)$

Таким образом, справедливо нижеследующее.

Теорема 2. При условиях $a), A$ и 2° решение задачи B существует и представляется при всех $x \in [a_i, b_i]$, $t > 0$ в виде свертки (10).

Следует отметить, что в отдельных случаях задачу (1) — (3) удается путем надлежащих замен неизвестных функций свести к задаче вида (1) — (3) с граничными условиями, правые части которых постоянны по t . Частные случаи таких задач исследованы нами в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. В. Сб. „Теплофизика в линейном производстве“. Изд-во АН БССР, Минск, 1963.
2. Дущенко В. П., Луцки П. П. Сб. „Теплофизика и тепломеханика“. Киев, 1964.
3. Шевелев Л. А. Сб. „Теплофизика и теплотехника“, Киев, 1964.
4. Дышин О. А. Применение преобразования Лапласа к численному решению некоторых классов дифференциальных уравнений. Канд. дисс. Баку, 1969.
5. Дышин О. А. „ДАН СССР“, 179 (5), 1968.
6. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
7. Фукс Б. А., Левин В. И. Функции комплексного переменного и некоторые их применения. Гостехиздат, М.—Л., 1951.

Институт кибернетики

Поступило 19. VII 1971

Параболик типли тэнлижин һәлли үчүн операсија
дүстурлары вә онларын чеврилмәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә x дәјишәниндән асылы кәсилән әмсаллы параболик типли тәнлик үчүн сәрһәд мәсәләсинә бахылмышдыр. Сәрһәд шәртләриндә исә замана көрә төрәмә кштирак едир вә онун сағ тәрәфи замандан асылыдыр. Бундан әлавә, бахылан сәрһәд мәсәләсинин һәлли үчүн операсија дүстурлары вә онларын чеврилмәси верилмишдир.

В. А. ИВНИЦКИЙ, А. Б. КАСУМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ДУБЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ С НЕНАДЕЖНЫМ
ОБСЛУЖИВАЮЩИМ ПРИБОРОМ

Постановка задачи. Имеется дублированная система, состоящая из одного основного элемента и одного ненагруженного резервного. Значения времени безотказной работы элементов взаимно независимы и имеют одну и ту же функцию распределения $G(x)$. Восстановление отказавших элементов производится одним прибором и время восстановления имеет экспоненциальное распределение с параметром μ . Прибор, осуществляющий восстановление, может выходить из строя только в свободном состоянии, его время безотказной работы и время восстановления имеют экспоненциальные распределения с параметрами α и β , соответственно.

Легко видеть, что эта система является системой обслуживания с приоритетом, так как ремонт (обслуживание) восстанавливающего прибора, естественно, имеет приоритет по отношению к восстановлению отказавших элементов.

Уравнения для вероятностей состояний системы. Введем в рассмотрение трехмерный случайный процесс:

$$I(t) = \{v(t), e(t), \xi(t)\},$$

где $v(t)$ — число отказавших элементов в момент

$$l(t) = \begin{cases} 0, & \text{если восстанавливающий прибор исправен;} \\ 1, & \text{если восстанавливающий прибор неисправен;} \end{cases}$$

$\xi(t)$ — время с момента t до момента появления следующего отказавшего элемента.

Легко видеть, что процесс $I(t)$ будет кусочно-линейным [1].

Введем обозначения:

$$\varphi_{20}(t) = P\{v(t) = 2, l(t) = 0\},$$

$$\varphi_{ij}(x, t) = P\{v(t) = i, l(t) = j, \xi(t) < x\},$$

$$P_{ij}(t) = P\{v(t) = i, l(t) = j\},$$

$$\varphi_{ij}(0, x) = \varphi_{ij}^{(0)}(x); P_{ij}(0) = P_{ij}^{(0)}; \varphi_{00}(0) = P_{00}^{(0)} \quad (i = 0, 1, 2; j = 0, 1).$$

Введенные функции $\varphi_{ij}(x, t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \varphi_{i0}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{00}(x, t)}{\partial x} - \alpha \varphi_{00}(x, t) + \beta \varphi_{01}(x, t) + \mu \varphi_{i0}(x, t) - \frac{\partial \varphi_{00}(0, t)}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{01}(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi_{01}(x, t)}{\partial x} - \beta \varphi_{01}(x, t) + \alpha \varphi_{00}(x, t) - \frac{\partial \varphi_{01}(0, t)}{\partial x}, \\
\frac{\partial \varphi_{10}(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_{10}(x, t)}{\partial x} - \mu \varphi_{10}(x, t) + \beta \varphi_{11}(x, t) + \mu \varphi_{20}(t) - \\
&\quad - \frac{\partial \varphi_{10}(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{00}(0, t)}{\partial x} G(x), \\
\frac{\partial \varphi_{11}(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_{11}(x, t)}{\partial x} - \beta \varphi_{11}(x, t) - \frac{\partial \varphi_{11}(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{01}(0, t)}{\partial x} G(x), \\
\frac{\partial \varphi_{20}(t)}{\partial t} &= -\mu \varphi_{20}(t) + \beta \varphi_{21}(t) + \frac{\partial \varphi_{10}(0, t)}{\partial x}, \\
\frac{\partial \varphi_{21}(t)}{\partial t} &= -\beta \varphi_{21}(t) + \frac{\partial \varphi_{11}(0, t)}{\partial x}.
\end{aligned} \quad (1)$$

Введем преобразование Лапласа [3]:

$$\tilde{\varphi}_{ij}(s, u) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx-ut} dx \varphi_{ij}(x, t) dx;$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_{ij}(0, u)}{\partial x} = \int_0^\infty e^{-ut} \frac{\partial \varphi_{ij}(0, t)}{\partial x} dt;$$

$$\tilde{\varphi}_{ij}^{(0)}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\varphi_{ij}^{(0)}(x);$$

$$\tilde{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x); \quad \tilde{P}_{ij}(u) = \int_0^\infty e^{-ut} P_{ij}(t) dt \quad (i=0, 1, 2; j=0, 1).$$

Применяя к (1) преобразование Лапласа, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
(u-s+\alpha)\tilde{\varphi}_{00}(s, u) &= \beta \tilde{\varphi}_{01}(s, u) + \mu \tilde{\varphi}_{11}(s, u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{00}(0, u)}{\partial x} + \tilde{\varphi}_{00}^{(0)}(s), \\
(u-s+\beta)\tilde{\varphi}_{01}(s, u) &= \alpha \tilde{\varphi}_{00}(s, u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{01}(0, u)}{\partial x} + \tilde{\varphi}_{01}^{(0)}(s), \\
(u-s+\mu)\tilde{\varphi}_{10}(s, u) &= \beta \tilde{\varphi}_{11}(s, u) + \mu \tilde{\varphi}_{20}(u) - \\
&\quad - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{10}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{00}(0, u)}{\partial x} \tilde{g}(s) + \tilde{\varphi}_{10}^{(0)}(s), \\
-s+\beta)\tilde{\varphi}_{11}(s, u) &= -\frac{\partial \tilde{\varphi}_{11}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{01}(0, u)}{\partial x} \tilde{g}(s) + \tilde{\varphi}_{11}^{(0)}(s), \\
(u+\mu)\tilde{\varphi}_{20}(u) &= \frac{\partial \tilde{\varphi}_{10}(0, u)}{\partial x} + \beta \tilde{\varphi}_{21}(u) + P_{20}^{(0)}, \\
(u+\beta)\tilde{\varphi}_{21}(u) &= \frac{\partial \tilde{\varphi}_{11}(0, u)}{\partial x} + P_{21}^{(0)}.
\end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда легко получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $\frac{\partial \tilde{\varphi}_{00}(0, u)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{\varphi}_{01}(0, u)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{\varphi}_{10}(0, u)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{\varphi}_{11}(0, u)}{\partial x}$.

$$\begin{cases}
A_{10} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{01}(0, u)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{11}(0, u)}{\partial x} = A, \\
A_1 \frac{\partial \tilde{\varphi}_{11}(0, u)}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_{01}(0, u)}{\partial x} + A_8 \frac{\partial \tilde{\varphi}_{10}(0, u)}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_{00}(0, u)}{\partial x} = C, \\
A_3 \frac{\partial \tilde{\varphi}_{11}(0, u)}{\partial x} + A_6 \frac{\partial \tilde{\varphi}_{01}(0, u)}{\partial x} + A_5 \frac{\partial \tilde{\varphi}_{10}(0, u)}{\partial x} + A_4 \frac{\partial \tilde{\varphi}_{00}(0, u)}{\partial x} = B, \\
A_7 \frac{\partial \tilde{\varphi}_{11}(0, u)}{\partial x} + A_9 \frac{\partial \tilde{\varphi}_{01}(0, u)}{\partial x} + A_8 \frac{\partial \tilde{\varphi}_{10}(0, u)}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{00}(0, u)}{\partial x} = D,
\end{cases} \quad (3)$$

где $A = -\tilde{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \alpha + \beta)$; $B = \frac{\beta \mu^2}{(u + \beta)(u + \mu)(\mu - \alpha - \beta)} P_{21}^{(0)} +$
 $+ \frac{\mu^2}{(u + \mu)(\mu - \alpha - \beta)} P_{20}^{(0)} - \frac{\beta \mu}{\alpha(\mu - \alpha - \beta)} \tilde{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \alpha + \beta) +$
 $+ \frac{\mu}{\mu - \alpha - \beta} \tilde{\varphi}_{10}^{(0)}(u + \alpha + \beta) + \tilde{\varphi}_{00}^{(0)}(u + \alpha + \beta) + \frac{\beta}{\alpha} \tilde{\varphi}_{01}^{(0)}(u + \alpha + \beta);$
 $C = -\left(\frac{\beta \mu}{(u + \beta)(u + \mu)} P_{21}^{(0)} + \frac{\mu}{u + \mu} P_{20}^{(0)} + \tilde{\varphi}_{00}^{(0)}(u) + \right.$
 $\left. + \tilde{\varphi}_{10}^{(0)}(u) + \tilde{\varphi}_{11}^{(0)}(u) + \tilde{\varphi}_{01}^{(0)}(u) \right);$

$$\begin{aligned}
D &= -\left(\frac{\beta \mu}{(u + \beta)(u + \mu)} P_{21}^{(0)} + \frac{\mu}{u + \mu} P_{20}^{(0)} + \frac{\beta}{\beta - \mu} \tilde{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \mu) + \tilde{\varphi}_{10}^{(0)}(u + \mu) \right); \\
A_1 &= -\frac{u(u + \beta + \mu)}{(u + \beta)(u + \mu)}; \quad A_2 = [\tilde{g}(u) - 1]; \quad A_3 = -\frac{\beta \mu [\alpha \mu + (u + \beta)(u + \mu)]}{\alpha(u + \beta)(u + \mu)(\mu - \alpha - \beta)}, \\
A_4 &= 1 - \frac{\mu \tilde{g}(u + \alpha + \beta)}{\mu - \alpha - \beta}; \quad A_5 = \frac{\mu u}{(u + \mu)(\mu - \alpha - \beta)}; \\
A_6 &= \frac{\beta \mu \tilde{g}(u + \alpha + \beta) - \beta(\mu - \alpha - \beta)}{\alpha(\mu - \alpha - \beta)}; \quad A_7 = \frac{\beta \mu (\beta - \mu) - \beta(u + \beta)(u + \mu)}{(\beta - \mu)(u + \beta)(u + \mu)}; \\
A_8 &= -\frac{u}{u + \mu}; \quad A_9 = \frac{\beta \tilde{g}(u + \mu)}{\beta - \mu}; \quad A_{10} = \tilde{g}(u + \beta); \quad A_{11} = \tilde{g}(u + \mu).
\end{aligned}$$

Решая систему (3), находим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\varphi}_{01}(0, u)}{\partial x} &= \frac{K_1}{K}, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_{10}(0, u)}{\partial x} = \frac{K_2}{K}, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_{00}(0, u)}{\partial x} = \frac{K_3}{K}, \\
\frac{\partial \tilde{\varphi}_{11}(0, u)}{\partial x} &= A + A_{10} \frac{K_1}{K},
\end{aligned}$$

где $K = (A_2 + A_1 A_{10})(A_5 A_{11} - A_4 A_8) +$
 $+ (A_9 + A_7 A_{10})(A_4 A_8 - A_2 A_5) + A_8(A_2 - A_{11})(A_6 + A_3 A_{10});$
 $K_1 = (C - A A_1)(A_5 A_{11} - A_4 A_8) +$
 $+ (D - A A_7)(A_4 A_8 - A_2 A_5) + (B - A A_3)(A_2 A_8 - A_8 A_{11});$
 $K_2 = (B - A A_3)[A_4(A_2 + A_1 A_{10}) - A_2(A_9 + A_7 A_{10})] +$
 $+ (C - A A_1)[A_{11}(A_9 + A_7 A_{10}) - A_{11}(A_6 + A_3 A_{10})] +$
 $+ (D - A A_7)[A_2(A_6 + A_3 A_{10}) - A_4(A_2 + A_1 A_{10})];$

$$K_3 = (A_2 + A_1 A_{10})[A_5(D - AA_7) - A_8(A_2 + A_1 A_{10})] + \\ + A_8(A_6 + A_3 A_{10})(C - D - AA_1 + AA_7) + \\ + (A_9 + A_7 A_{10})[A_8(B - AA_3) - A_5(C - AA_1)];$$

$$\tilde{P}_{ij}(u) \text{ равно } \tilde{P}_{ij}(u) - \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_{ij}(s, u) \quad (i = 0, 1, 2; j = 0, 1).$$

Устремляя в (2) $s \rightarrow 0$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (u + \alpha)\tilde{P}_{00}(u) = \beta\tilde{P}_{10}(u) + \mu\tilde{P}_{10}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{00}(0, u)}{\partial x} + P_{00}^{(0)}, \\ (u + \beta)\tilde{P}_{01}(u) = \alpha\tilde{P}_{00}(u) - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{01}(0, u)}{\partial x} + P_{01}^{(0)}, \\ (u + \mu)\tilde{P}_{10}(u) = \beta\mu\tilde{P}_{11}(u) + \mu\tilde{P}_{21}(u) - \\ - \frac{\partial \tilde{\varphi}_{10}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{00}(0, u)}{\partial x} + P_{10}^{(0)}, \\ (u + \beta)\tilde{P}_{11}(u) = -\frac{\partial \tilde{\varphi}_{11}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{01}(0, u)}{\partial x} + P_{11}^{(0)}, \\ (u + \mu)\tilde{P}_{20}(u) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_{10}(0, u)}{\partial x} + \beta\tilde{P}_{21}(u) + P_{20}^{(0)}, \\ (u + \beta)\tilde{P}_{21}(u) = \frac{\partial \tilde{\varphi}_{11}(0, u)}{\partial x} + P_{21}^{(0)}. \end{cases} \quad (4)$$

Решая систему (4), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{21}(u) &= \frac{1}{u + \beta} \left(A + A_{10} \frac{K_1}{K} + P_{21}^{(0)} \right); \\ \tilde{P}_{20}(u) &= \frac{1}{u + \mu} \frac{K_2}{K} + \frac{\beta}{(u + \beta)(u + \mu)} \left(A + A_{10} \frac{K_1}{K} + P_{21}^{(0)} \right) + \frac{1}{u + \mu} P_{20}^{(0)}; \\ \tilde{P}_{11}(u) &= \frac{1}{u + \beta} \left(\frac{K_1}{K} - A - A_{10} \frac{K_1}{K} + P_{11}^{(0)} \right); \\ \tilde{P}_{10}(u) &= \frac{\beta}{(u + \beta)(u + \mu)} \left(\frac{K_1}{K} - A - A_{10} \frac{K_1}{K} + P_{11}^{(0)} \right) + \frac{\mu}{(u + \mu)^2} \frac{K_1}{K} + \\ &+ \frac{\mu}{(u + \mu)^2} P_{20}^{(0)} - \frac{1}{u + \mu} \frac{K_2}{K} + \frac{1}{u + \mu} \left(P_{10}^{(0)} + \frac{K_3}{K} \right) + \\ &+ \frac{\beta\mu}{(u + \beta)(u + \mu)^2} \left(P_{21}^{(0)} + A + A_{10} \frac{K_1}{K} \right); \\ \tilde{P}_{00}(u) &= \frac{\beta}{u(u + \alpha + \beta)} \left(P_{01}^{(0)} - \frac{K_1}{K} \right) + \frac{\beta\mu}{u(u + \mu)(u + \alpha + \beta)} \left(\frac{K_1}{K} - A - \right. \\ &- A_{10} \frac{K_1}{K} + P_{11}^{(0)} \left. \right) + \frac{\mu^2(u + \beta)}{u(u + \mu)^2(u + \alpha + \beta)} \frac{K_0}{K} + \frac{\beta\mu^2}{u(u + \mu)^2(u + \alpha + \beta)} \left(A + \right. \\ &+ A_{10} \frac{K_1}{K} + P_{21}^{(0)} \left. \right) + \frac{\mu^2(u + \beta)}{u(u + \mu)^2(u + \alpha + \beta)} P_{10}^{(0)} - \frac{\mu(u + \beta)}{u(u + \mu)(u + \alpha + \beta)} \frac{K_2}{K} + \\ &+ \frac{\mu(u + \beta)}{u(u + \mu)(u + \alpha + \beta)} \left(P_{10}^{(0)} + \frac{K_3}{K} \right) - \frac{u + \beta}{u(u + \alpha + \beta)} \left(P_{10}^{(0)} - \frac{K_3}{K} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{01}(u) &= \frac{\alpha\beta}{u(u + \beta)(u + \alpha + \beta)} \left(P_{01}^{(0)} - \frac{K_1}{K} \right) + \\ &+ \frac{\alpha\beta\mu}{u(u + \beta)(u + \mu)(u + \alpha + \beta)} \left(\frac{K_1}{K} - A - A_{10} \frac{K_1}{K} + P_{11}^{(0)} \right) + \\ &+ \frac{\alpha\mu^2}{u(u + \mu)^2(u + \alpha + \beta)} \frac{K_2}{K} + \frac{\alpha\beta\mu^2}{u(u + \mu)^2(u + \beta)(u + \alpha + \beta)} \left(A + A_{10} \frac{K_1}{K} + \right. \\ &+ P_{21}^{(0)} \left. \right) + \frac{\alpha\mu^2}{u(u + \mu)^2(u + \alpha + \beta)} P_{20}^{(0)} - \frac{\alpha\mu}{u(u + \mu)(u + \alpha + \beta)} \frac{K_2}{K} + \\ &+ \frac{\alpha\mu}{u(u + \mu)(u + \alpha + \beta)} \left(P_{10}^{(0)} + \frac{K_3}{K} \right) + \frac{\alpha}{u(u + \alpha + \beta)} \left(P_{00}^{(0)} - \frac{K_3}{K} \right) + \\ &+ \frac{1}{u + \beta} \left(P_{01}^{(0)} - \frac{K_1}{K} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, когда система начинает функционировать с исправного состояния, т. е. имеем начальные условия: $P_{00}(0) = 1$ и $\tilde{\varphi}_{00}^{(0)}(x) = G(x)$. В этом случае решение существенно упрощается и имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{21}(u) &= \frac{\tilde{g}(u + \beta)}{u + \beta} \frac{D_1}{D}, \quad \tilde{P}_{11}(u) = \frac{1 - \tilde{g}(u + \beta)}{u + \beta} \frac{D_1}{D}, \\ \tilde{P}_{10}(u) &= \frac{\beta(1 - \tilde{g}(u + \beta))}{(u + \beta)(u + \mu)} \frac{D_1}{D} + \frac{\beta\mu\tilde{g}(u + \mu)}{(u + \beta)(u + \mu)^2} \frac{D_1}{D} - \frac{u}{(u + \mu)^2} \frac{D_1}{D} + \\ &+ \frac{1}{u + \mu} \frac{D_3}{D}; \\ \tilde{P}_{20}(u) &= \frac{1}{u + \mu} \frac{D_2}{D} + \frac{\beta\tilde{g}(u + \mu)}{(u + \beta)(u + \mu)} \frac{D_1}{D}, \\ \tilde{P}_{00}(u) &= \frac{\beta\mu(1 - \tilde{g}(u + \beta))}{u(u + \mu)(u + \alpha + \beta)} \frac{D_1}{D} - \frac{\beta}{u(u + \alpha + \beta)} \frac{D_1}{D} + \\ &+ \frac{\beta\mu^2\tilde{g}(u + \beta)}{u(u + \mu)^2(u + \alpha + \beta)} \frac{D_1}{D} - \frac{\mu u(u + \beta)}{u(u + \mu)^2(u + \alpha + \beta)} \frac{D_2}{D} + \\ &+ \frac{\mu(u + \beta)}{u(u + \mu)(u + \alpha + \beta)} \frac{D_3}{D} - \frac{u + \beta}{u(u + \alpha + \beta)} \frac{D_3}{D} + \frac{n + \beta}{u(u + \alpha + \beta)}; \\ \tilde{P}_{01}(u) &= \frac{\alpha\beta\mu(1 - \tilde{g}(u + \beta))}{u(u + \beta)(u + \mu)(u + \alpha + \beta)} \frac{D_1}{D} - \frac{\alpha\beta}{u(u + \beta)(u + \alpha + \beta)} \frac{D_1}{D} + \\ &+ \frac{\alpha\beta\mu^2\tilde{g}(u + \beta)}{u(u + \beta)(u + \mu)^2(u + \alpha + \beta)} \frac{D_1}{D} - \frac{\alpha\mu u}{u(u + \mu)^2(u + \alpha + \beta)} \frac{D_2}{D} + \\ &+ \frac{\alpha\mu}{u(u + \mu)(u + \alpha + \beta)} \frac{D_3}{D} - \frac{\alpha}{u(u + \alpha + \beta)} - \frac{1}{u + \beta} \frac{D_1}{D} + \frac{\alpha}{u(u + \alpha + \beta)}; \end{aligned}$$

где $D = \frac{u(\beta - \mu)}{\beta} \tilde{g}(u + \mu) \left[\frac{\alpha u(u + \beta + \mu)}{(u + \beta)(u + \mu)} \tilde{g}(u + \mu) - \alpha(\tilde{g}(u) - 1) - \right. \\ \left. - \tilde{g}(u + \alpha + \beta) - \frac{\alpha\mu + (u + \beta)(u + \mu)(\mu - \alpha - \beta + 1)}{(u + \alpha)(u + \mu)} \right] + \\ + \frac{u(\beta - \mu)(u + \mu + \beta)}{\beta(u + \beta)(u + \mu)} \tilde{g}(u + \mu) - \frac{\mu(u + \mu) + u(u + \beta)}{(u + \beta)(u + \mu)} \tilde{g}(u + \beta) -$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta-\mu}{\beta}(\tilde{g}(u)-1)+\tilde{g}(u+\mu)+\alpha u(\tilde{g}(u)-1)\tilde{g}(u+\mu)-(\tilde{g}(u)-1)\times \\
& \times \left[\frac{\beta u[\alpha\mu+(u+\beta)(u+\mu)]}{(u+\beta)(u+\mu)} - \frac{\alpha u[u(u+\beta)+\mu(u+\mu)]}{(u+\beta)(u+\mu)} - \right. \\
& \quad \left. -u\beta\tilde{g}(u+\alpha+\beta)+u\beta(\mu-\alpha-\beta) \right]; \\
D_1 &= \frac{\alpha u(\beta-\mu)(\mu-\alpha-\beta)}{\beta\mu}\tilde{g}(u+\alpha+\beta)(\tilde{g}(u+\mu)+\tilde{g}(u)-1)+ \\
& + \frac{\alpha u(\beta-\mu)}{\beta} \left[\tilde{g}(u+\mu) + \frac{1}{\mu}(\mu-\alpha-\beta-\mu\tilde{g}(u+\alpha+\beta)) \right]; \\
D_2 &= \frac{\alpha(u+\mu)}{\mu} \left[\frac{u(u+\beta+\mu)}{u+\beta}\tilde{g}(u+\mu)-(u+\mu)(\tilde{g}(u)-1) \right] [\mu-\alpha-\beta- \\
& -(\alpha+\beta)\tilde{g}(u+\alpha+\beta)]\tilde{g}(u)+(\beta-\mu)(u+\mu)[\tilde{g}(u+\alpha+\beta)-(\mu-\alpha-\beta)- \\
& -\frac{\alpha\mu+(u+\beta)(u+\mu)}{(u+\beta)(u+\mu)}]\tilde{g}(u+\mu)\tilde{g}(u)+\frac{\alpha(\mu-\alpha-\beta)(\beta-\mu)}{\beta\mu}\times \\
& \times \left[\frac{u(u+\beta+\mu)}{\beta\mu}\tilde{g}(u+\mu)-(u+\mu)(\tilde{g}(u)-1) \right] \tilde{g}(u+\mu)\tilde{g}(u+\alpha+\beta)- \\
& -\frac{\alpha(u+\mu)(\mu-\alpha-\beta)}{\beta\mu} \left[\tilde{g}(u+\mu)-\frac{\mu(u+\mu)+u(u+\beta)}{(u+\beta)(u+\mu)} \right] \tilde{g}(u+\alpha+\beta); \\
D_3 &= \frac{\alpha u(\mu-\alpha-\beta)}{\mu} \left[\frac{\beta(u+\beta)(2u+\mu)-\mu u(u+\mu)}{\beta(u+\beta)(u+\mu)}\tilde{g}(u+\mu)- \right. \\
& -\frac{u(u+\beta)+\mu(u+\mu)}{(u+\beta)(u+\mu)}\tilde{g}(u+\mu)-\frac{\beta-\mu}{\beta}(\tilde{g}(u)-1) \left. \right] \tilde{g}(u+\alpha+\beta)- \\
& -u \left[(\beta-\mu)\tilde{g}(u+\alpha+\beta)-(\beta-\mu)(\mu-\alpha-\beta)-(\beta-\mu)\frac{\alpha\mu+(u+\beta)(u+\mu)}{(u+\beta)(u+\mu)} - \right. \\
& \quad \left. -\alpha \left(\tilde{g}(u+\mu)-\frac{u(u+\beta)+\mu(u+\mu)}{(u+\beta)(u+\mu)}\tilde{g}(u+\mu) \right) \right].
\end{aligned}$$

Итак, явный вид преобразования Лапласа нестационарного распределения вероятностей состояний дублированной системы найден.

Перейдем к нахождению распределения времени безотказной работы. Введем обозначения:

$$\bar{\varphi}_{ij}(x, t) = P\{v(t) = i, l(t) = j, \xi(t) < x, v(\tau) \neq 2 \text{ при } 0 \leq \tau \leq t\},$$

$$\bar{\varphi}_{2i}(t) = P\{v(t) = 2, l(t) = i \text{ при } 0 \leq \tau \leq t, v(\tau) \neq 2, t_1 \leq \tau < t, v(t) = 2\}.$$

Введение функции $\bar{\varphi}_{ij}(x, t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases}
\frac{\partial \bar{\varphi}_{00}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\varphi}_{00}(x, t)}{\partial x} - \alpha \bar{\varphi}_{00}(x, t) + \beta \bar{\varphi}_{01}(x, t) + \\
+ \mu \bar{\varphi}_{10}(x, t) - \frac{\partial \bar{\varphi}_{00}(0, t)}{\partial x}, \\
\frac{\partial \bar{\varphi}_{01}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\varphi}_{01}(x, t)}{\partial x} - \beta \bar{\varphi}_{01}(x, t) + \alpha \bar{\varphi}_{00}(x, t) - \frac{\partial \bar{\varphi}_{01}(0, t)}{\partial x}, \\
\frac{\partial \bar{\varphi}_{10}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{10}(x, t)}{\partial x} - \mu \bar{\varphi}_{10}(x, t) + \beta \bar{\varphi}_{11}(x, t) -
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
-\frac{\partial \bar{\varphi}_{10}(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{00}(0, t)}{\partial x} G(x), \\
\frac{\partial \bar{\varphi}_{11}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\varphi}_{11}(x, t)}{\partial x} - \beta \bar{\varphi}_{11}(x, t) - \\
-\frac{\partial \bar{\varphi}_{11}(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{11}(0, t)}{\partial x} G(x), \\
\frac{\partial \bar{\varphi}_{20}(t)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\varphi}_{10}(0, t)}{\partial x}, \\
\frac{\partial \bar{\varphi}_{21}(t)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\varphi}_{11}(0, t)}{\partial x}.
\end{cases} \quad (5)$$

Введем преобразование Лапласа [3]:

$$\bar{\bar{\varphi}}_{ij}(s, u) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx-ut} dx \bar{\varphi}_{ij}(x, t) dt,$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}_{ij}(0, u)}{\partial x} = \int_0^\infty e^{-ut} \frac{\partial \bar{\varphi}_{ij}(0, t)}{\partial x} dt,$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\bar{\varphi}_{ij}^{(0)}(x),$$

$$\bar{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x) \quad (i = 0, 1, 2; j = 0, 1).$$

Применяя к (5) преобразование Лапласа, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}
(u-s+\alpha)\bar{\bar{\varphi}}_{00}(s, u) = \beta \bar{\bar{\varphi}}_{01}(s, u) + \mu \bar{\bar{\varphi}}_{10}(s, u) - \\
-\frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}_{00}(0, u)}{\partial x} + \bar{\bar{\varphi}}_{00}^{(0)}(s), \\
(u-s+\beta)\bar{\bar{\varphi}}_{01}(s, u) = \alpha \bar{\bar{\varphi}}_{00}(s, u) - \frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}_{01}(0, u)}{\partial x} + \bar{\bar{\varphi}}_{01}^{(0)}(s), \\
(u-s+\mu)\bar{\bar{\varphi}}_{10}(s, u) = \beta \bar{\bar{\varphi}}_{11}(s, u) - \frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}_{10}(0, u)}{\partial x} + \\
+ \frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}_{00}(0, u)}{\partial x} \bar{g}(s) + \bar{\bar{\varphi}}_{10}^{(0)}(s), \\
(u-s+\beta)\bar{\bar{\varphi}}_{11}(s, u) = \frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}_{01}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}_{01}(0, u)}{\partial x} \bar{g}(s) + \bar{\bar{\varphi}}_{11}^{(0)}(s), \\
u \bar{\bar{\varphi}}_{20}(u) = \frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}_{10}(0, u)}{\partial x}, \\
u \bar{\bar{\varphi}}_{21}(u) = \frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}_{11}(0, u)}{\partial x}.
\end{cases}$$

Решая эту систему так же, как и ранее, находим преобразование Лапласа—Стилтьеса распределения времени безотказной работы:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ut} dP\{\xi < t\} = u \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_{10}(0, u)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{11}(0, u)}{\partial x} \right) = u \left\{ - \frac{\mu}{(\beta - \mu)(\mu - \alpha - \beta)} \times \right. \\ \times (\bar{g}(u) - 1) [\mu \bar{g}(u + \mu) - \beta \bar{g}(u + \beta)] + \left(\frac{\mu \bar{g}(u + \alpha + \beta)}{\mu - \alpha - \beta} - 1 \right) \times \\ \times \left[\frac{1}{\beta - \mu} (\beta \bar{g}(u + \mu) - \mu \bar{g}(u + \beta)) + 1 - \bar{g}(u) \right] + \frac{\beta}{\alpha} (\bar{g}(u) - \bar{g}(u + \mu) - 1) \times \\ \times \left[1 - \frac{\mu (\bar{g}(u + \beta) - \bar{g}(u + \alpha + \beta))}{\mu - \alpha - \beta} \right] \Big\}^{-1} \left\{ \left[\frac{\beta}{\alpha} \bar{\varphi}_{01}^{(0)}(u + \mu) - \right. \right. \\ - \bar{\varphi}_{00}^{(0)}(u + \alpha + \beta) - \frac{\mu \bar{\varphi}_{10}^{(0)}(u + \alpha + \beta)}{\mu - \alpha - \beta} + \frac{\beta \mu}{\alpha(\mu - \alpha - \beta)} (\bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \alpha + \beta) - \\ - \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \beta)) \Big] \frac{1}{\beta - \mu} (\bar{g}(u) - 1) (\mu \bar{g}(u + \mu) - \beta \bar{g}(u + \beta)) + \frac{\beta}{\alpha} \times \\ \times \left[1 - \frac{\mu (\bar{g}(u + \beta) - \bar{g}(u + \alpha + \beta))}{\mu - \alpha - \beta} \right] \Big[\bar{g}(u + \mu) (\bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \beta) - \bar{\varphi}_{00}^{(0)}(u) - \\ - \bar{\varphi}_{01}^{(0)}(u) - \bar{\varphi}_{10}^{(0)}(u)) - \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u) \frac{\beta}{\beta - \mu} (\bar{g}(u) - 1) (\bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \beta) - \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \mu)) + (\bar{g}(u) - \\ - 1) \bar{\varphi}_{10}^{(0)}(u + \mu) \Big] + \left(\frac{\mu \bar{g}(u + \alpha + \beta)}{\mu - \alpha - \beta} - 1 \right) (\bar{g}(u) - \bar{g}(u + \beta) - 1) \times \\ \times \left[\frac{\beta}{\beta - \mu} (\bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \beta) - \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \mu) - \bar{\varphi}_{10}^{(0)}(u + \mu)) \right] - \\ - \frac{\beta}{\beta - \mu} (\bar{g}(u + \mu) - \bar{g}(u + \beta)) [\bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \beta) - \bar{\varphi}_{00}^{(0)}(u) - \bar{\varphi}_{01}^{(0)}(u) - \bar{\varphi}_{10}^{(0)}(u) - \\ - \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u)] - \frac{\mu \bar{g}(u + \beta)}{\mu - \alpha - \beta} (\bar{g}(u) - 1) \left[\frac{\beta}{\beta - \mu} (\bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \beta) - \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \mu)) - \right. \\ - \bar{g}(u + \mu) (\bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \beta) - \bar{\varphi}_{00}^{(0)}(u) - \bar{\varphi}_{01}^{(0)}(u) - \bar{\varphi}_{10}^{(0)}(u) - \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u)) \Big] + \\ + \left[\frac{\beta}{\alpha} \bar{\varphi}_{01}^{(0)}(u + \alpha + \beta) - \bar{\varphi}_{00}^{(0)}(u + \alpha + \beta) - \frac{\mu \bar{\varphi}_{10}^{(0)}(u + \alpha + \beta)}{\mu - \alpha - \beta} + \right. \\ + \frac{\beta \mu}{\alpha(\mu - \alpha - \beta)} (\bar{\varphi}_{10}^{(0)}(u + \alpha + \beta) - \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \beta)) \Big] (\bar{g}(u) - \bar{g}(u + \mu) - 1) \times \\ \times \bar{g}(u + \beta) + \left(\frac{\mu \bar{g}(u + \alpha + \beta)}{\mu - \alpha - \beta} - 1 \right) \left[\frac{\beta}{\beta - \mu} (\bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \beta) - \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \mu)) - \right. \\ - \bar{\varphi}_{10}^{(0)}(u + \mu) - \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \beta) + \bar{\varphi}_{00}^{(0)}(u) + \bar{\varphi}_{01}^{(0)}(u) + \bar{\varphi}_{10}^{(0)}(u) + \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u) \Big] \times \\ \times \bar{g}(u + \beta) \Big\} + \bar{\varphi}_{11}^{(0)}(u + \beta). \end{aligned}$$

Таким образом, найден явный вид преобразований Лапласа нестационарного распределения вероятностей состояний и распределения времени безотказной работы дублированной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В. и Коваленко И. Н. Введение в теории массового обслуживания. Изд-во „Наука“, 1966.
2. Саати Т. А. „Сов. радио“, М., 1965.
3. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Изд-во „Наука“, М., 1965.

Институт кибернетики

Поступило 19. VII 1971

В. А. Ивнитски, А. Б. Гасымов

Е'тибарсыз хидмэт чиһазы илэ эвэз олуңмуш системин гејри-стасионар характеристикаларынын тэдгиги

ХҮЛАСӘ

Тэдгигатда хидмэт чиһазы илэ тәнзим едилән, һәддиндән артыг еһтијаты олан эвэз олуңмуш систем тэдгиг едилмишдир ки, бу систем сәрбәст везијәтдә сырадан чыха вә бәрпа олуна билир. Системин элементләринин дајанмадан ишләмә заманлары ихтијары пәјланмаја маликдир. Системин элементләрин бәрпәсы, дајанмадан ишләмә вә хидмэт чиһазларынын бәрпәсы заманлары экспоненсиал пәјланмышдыр.

Бундан әлавә, гејри-стасионар еһтимал везијәтләринин Лаплас чевирмәси вә верилән системин дајанмадан ишләмә вахтларынын пәјланмасы тә'јин олуңмушдур.

Ч. С. АГАЛАРОВ, А. А. АЛИ-ЗАДЕ,
Н. Д. ДАГКЕСАМАНСКИЙ, Р. Я. КАСУМОВ

СПОСОБ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ВУЛКАНИЗАЦИИ АВТОПОКРЫШЕК

Цеха вулканизации современных шинных заводов представляют собой сложные производственные комплексы, включающие большое число однотипных технологических агрегатов, в которых реализуются заданные технологические режимы. Цех вулканизации состоит из ряда производственных линий. Вулканизационные элементы, расположенные в одну производственную линию, подключаются параллельно к питающим магистралям, по которым подаются основные теплоносители.

Процесс вулканизации заключается в двухстороннем обогреве сырых покрышек, в результате которого каучук теряет пластические свойства, становится эластичным и прочным и приобретает другие характерные для резины свойства, обуславливающие пригодность изделия к нормальной эксплуатации. Реализация заданных технологических режимов осуществляется в настоящее время по жесткой программе, обеспечивающей установленную продолжительность цикла вулканизации, определяемую размером автопокрышки и шифром резиновой смеси. При этом каждый технологический агрегат оснащается индивидуальным программным устройством — командно-электрическим прибором типа КЭП-16, реализующим заданный технологический режим.

Показатели физико-механических свойств резины, определяющие качество вулканизированной покрышки, оказываются в пределах нормы, если строго выдерживаются условия вулканизации — температура, давление теплоносителей и продолжительность цикла. Однако задание режима, рассчитанного с учетом всего комплекса знаний о процессе, само по себе еще не обеспечивает выполнения необходимых условий вулканизации. Последнее объясняется тем, что основные технологические параметры отклоняются от заданных значений, это приводит к низкому качеству покрышек, а зачастую и к браку. Указанные отклонения обуславливаются изменением параметров теплоносителей в магистральных трубопроводах, колебаниями нагрузки (включением в работу и отключением технологических агрегатов), изменением со временем и разбросом их характеристик, охлаждением пресс-форм после капитального и текущего ремонта и т. д.

Дадим оценку погрешности существующего метода управления процессом вулканизации по величине эффекта вулканизации, достигаемой к концу процесса. Пусть задана программа изменения темпе-

ратуры теплоносителя $t(\tau)$ и продолжительность процесса вулканизации T . На основе этих режимных параметров может быть вычислено значение эффекта вулканизации, которое должно быть достигнуто к концу процесса [1]:

$$E^* = \int_0^T \kappa^{\frac{t(\tau)-t_0}{10}} d(\tau), \quad (1)$$

где t_0 — температура, при которой значение эффекта вулканизации принимается равным единице (обычно $t_0 = 100^\circ\text{C}$);
 κ — температурный коэффициент вулканизации ($\kappa = 1,8 \div 2,2$).

Ввиду того, что значения температуры теплоносителя отклоняются от заданной программы изменения на величину $\pm \Delta t(\tau)$, фактически достигаемое к концу процесса значение эффекта вулканизации (E_ϕ) равно

$$E_\phi = \int_0^T \kappa^{\frac{t(\tau) \pm \Delta t(\tau) - t_0}{10}} d\tau \quad (2)$$

и будет отличаться от заданного E^* на величину

$$\Delta E = E_\phi - E^* = \int_0^T \kappa^{\frac{t(\tau)-t_0}{10}} \left(\kappa^{\frac{\pm \Delta t(\tau)}{10}} - 1 \right) d\tau. \quad (3)$$

Если имеет место систематическая погрешность в реализации заданной программы изменения температуры теплоносителя, т. е. $\Delta t(\tau) = \text{const}$, то выражение для погрешности примет вид:

$$\Delta E = \left(\kappa^{\frac{\pm \Delta t}{10}} - 1 \right) \int_0^T \kappa^{\frac{t(\tau)-t_0}{10}} d\tau. \quad (4)$$

По этой же формуле может быть оценена погрешность метода и в общем случае. При этом в (4) по Δt следует понимать среднеквадратичную погрешность реализации программы $t(\tau)$. По выражению (4) при $\Delta t = \pm 1^\circ\text{C}$ погрешность составляет 7% от заданного значения E . В силу нелинейности подынтегрального выражения (4) с увеличением Δt значение ΔE резко возрастает, что свидетельствует о неудовлетворительности практикуемого метода реализации технологического режима вулканизации.

Для устранения указанного недостатка следует так организовать процесс вулканизации, чтобы продолжительность его цикла не задавалась заранее, а корректировалась с учетом реального хода технологического процесса. Однако эта коррекция не может быть осуществлена на основе анализа текущего состояния вулканизата, так как в настоящее время отсутствуют методы и приборы оперативного контроля качества вулканизуемых изделий. Вместе с тем, если для процесса существует показатель, который может быть автоматически измерен или вычислен и который косвенно характеризует качество изделия, коррекция продолжительности процесса может быть выполнена на основе измерения или вычисления этого показателя и сравнения его текущего значения с наперед заданной величиной, характеризующей достижение заданного качества изделия.

В разработанном способе управления таким показателем является величина эффекта вулканизации. Требования к качеству готовой продукции будут удовлетворены, если к концу процесса вулканизации достигнуты заданные значения эффектов вулканизации для наружных слоев автопокрышки [2].

В автоматизированной системе управления цехом вулканизации шинного завода в качестве центрального управляющего органа системы

предусматривается использование управляющей вычислительной машины [3]. Функция управления технологическим процессом вулканизации с обратной связью по величине эффекта вулканизации реализуется следующим образом. На каждом вулканизационном элементе устанавливается четыре датчика температуры, по два на каждую из пресс-форм (со стороны диафрагмы и пресс-формы). Последовательно опрашиваются датчики температур теплоносителей всех вулканизационных элементов цеха. На основе измеренных температур (t_{ij}) вычисляются текущие значения эффектов вулканизации по формуле:

$$E_{ij}(n) = \sum_{m=1}^n \kappa \frac{t_{ij}^{(m)} - t_0}{10} \Delta \tau. \quad (5)$$

Текущие значения сравниваются с заданным E_{ij}^* . Если заданное значение достигнуто, то формируется и запоминается сигнал $C_{ij} = 1$. В противном случае $C_{ij} = 0$ (i — номер датчика j -го вулканизационного

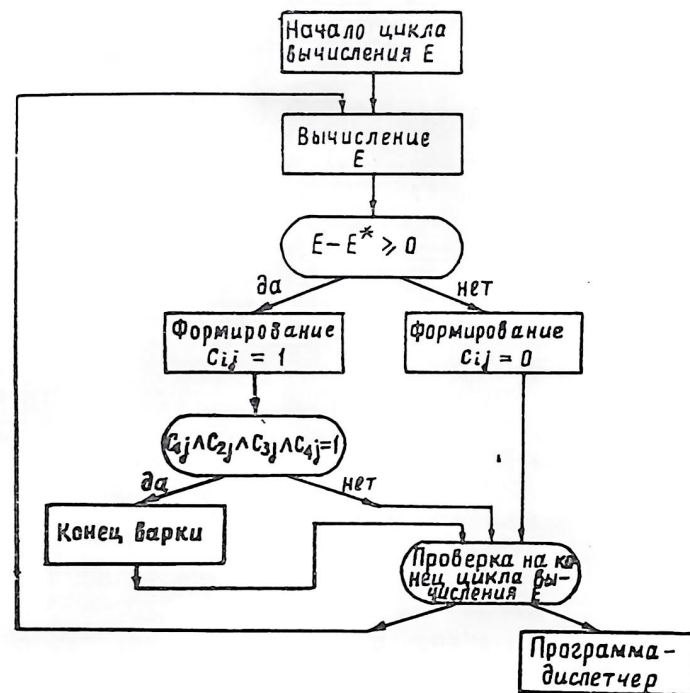


Рис.

элемента). Таким образом, по каждому j -му вулканизационному элементу формируется четыре сигнала — C_{1j} , C_{2j} , C_{3j} и C_{4j} . После вычисления E_{ij} по показаниям четырех датчиков j -го вулканизационного элемента и сравнения рассчитанных значений с заданными выполняется операция конъюнкции $C_{1j} \wedge C_{2j} \wedge C_{3j} \wedge C_{4j} = C_j$. Если результат этой операции равен единице ($C_j = 1$), то выдается сигнал о прекращении процесса варки в данном вулканизационном элементе. В противном случае процесс варки продолжается, и в следующем m -ом цикле опроса все перечисленные выше операции повторяются. Таким образом, в каждом цикле производится вычисление текущих значений эффектов вулканизации для всех технологических агрегатов, сравнение их с заданными значениями и принимается решение на основе результа-

тов сравнения. Блок-схема программы, реализующей описанный алгоритм управления, показана на рисунке. Время выполнения данной программы

при общем числе контролируемых точек, равном 480, на вычислительной машине с быстродействием 20000 операций в секунду составляет около 200 мсек. Погрешность способа управления с обратной связью по величине эффекта вулканизации определяется погрешностью датчиков температуры, устройств обработки информации и погрешностью за счет дискретизации непрерывной кривой $t(\tau)$. Как показали расчеты, при выборе шага дискретизации в интервале 60—150 сек вышеизложенный способ обеспечивает значительно большую точность в достижении заданного значения эффекта вулканизации по сравнению с используемым в настоящее время способом управления этим процессом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошелев Ф. Д., Климов Н. С. Общая технология резины. М., Госхимиздат, 1958.
2. Дагкесаманский Н. Д. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1967, № 5.
3. Агаларов Ч. С. и др. „За технический прогресс“, 1969, № 9.

Институт кибернетики

Поступило 19. VII 1971

Ч. С. Агаларов, А. А. Элизадэ, И. Д. Дагкесаманли, Р. Ж. Гасымов

Шинләри вулканлашдырма просесинин автоматик идарәетмә үсулу

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә вулканлашдырма просесини әкс рабәтә илә идарәетмә методу тәклиф олунмушдур. Әкс рабәтә вулканизатын кеҗфиҗәтинин долаҗы көстәричисинин—вулканлашдырма эффектинин һесапланмасы үзәриндә гурулмушдур. Бу метода көрә вулканлашдырма просесинин мүддәти әввәлдән тәҗин едилмир вә техноложии просесин реал кедишиндән асылы олараг тәсһиһ едилир. Мәгаләдә шин заводу вулканлашдырма сехенин автоматлашдырылмыш идарәетмә ситтеминдә бу методун һесаблаҗчы машыла ичра едилмәсинин алгоритми верилмишдир.

А. А. АЛИЗАДЕ, Г. А. ГАДЖИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И МЕТЕО-ЭЛЕМЕНТОВ АТМОСФЕРЫ У ЗЕМЛИ В ГРОЗОВОЙ И НЕГРОЗОВОЙ ПЕРИОДЫ

Рост производства, сопряженный с увеличением выработки и потребления электроэнергии, требует расширения старых и строительства новых энергосистем высокой надежности, одним из важнейших параметров которой является грозоупорность. Для разработки эффективных грозозащитных мероприятий необходимо знание явлений возмущенной атмосферы и процессов, порождающих эти возмущения и сопутствующих им.

Ряд исследований, посвященных этим вопросам в последние годы, позволил установить уменьшение коэффициента униполярности ионов при сильном ветре, уменьшение подвижности ионов и токов проводимости при увеличении значений напряженности электрического поля и образование объемных зарядов при наличии жидких и твердых взвесей в атмосфере, наличие связи между плотностью ионов и температурой воздуха, уменьшение проводимости воздуха при больших градиентах потенциала электрического поля и возникновение коронного разряда на наземных объектах, а также переход его, при дальнейшем увеличении градиента, в канальный разряд, нарастающий по направлению вверх в виде встречного разряда, обусловленного предразрядом молнии.

Проведенные исследования, как правило, касаются ограниченного числа параметров атмосферы, или проводились за ограниченный период времени.

Нами была поставлена задача комплексного исследования качественных, количественных и временных характеристик электрических и метеорологических параметров атмосферы в грозовой и негрозовой периоды и их взаимосвязи в целях глубокого формирования и развития молниевых разрядов и разработки методов оперативного прогнозирования гроз, а также проведения подготовительных мероприятий для эффективной грозозащиты энергосистемы. Для решения этой задачи была разработана аппаратура комплексной регистрации электрических параметров и метеозащитных элементов атмосферы, представляющая собой многоканальную измерительно-регистрирующую систему, которая создавалась в соответствии с жесткими требованиями непрерывной эксплуатации в полевых условиях в течение длительного времени.

Датчики измерительных устройств должны были выдерживать воздействия сложных метеорологических условий, вплоть до ливне-

вого дождя и града. Аппаратура предназначалась для регистрации параметров как невозмущенной атмосферы, так и возмущенной — в грозу, когда значения многих измеряемых параметров могут изменяться в широких пределах. При этом она должна была обладать достаточной разрешающей способностью, соответствующей быстротечным процессам, сопровождающим разряд молнии.

Функциональная схема комплексной регистрации представлена на рис. 1. Датчики измерительных каналов преобразуют значения измеряемых параметров в пропорциональных их величинам токи (напряжения), которые далее поступают на входы усилительных устройств назначения которых — подведение сигналов достаточной мощности к регистрирующим устройствам и согласование входных сопротивлений последних с выходными сопротивлениями датчиков.

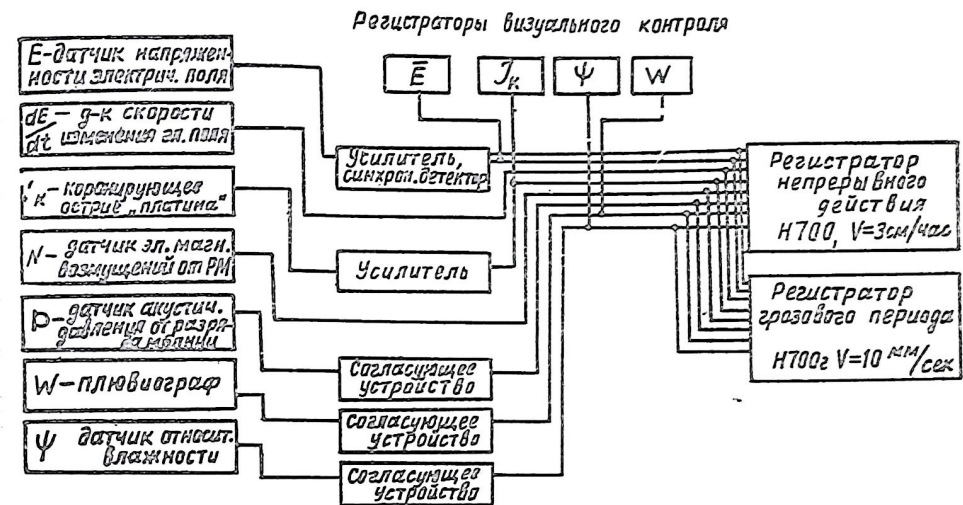


Рис. 1. Функциональная схема аппаратуры комплексной регистрации параметров атмосферного электричества.

В качестве регистраторов использованы два магнитоэлектрических светолучевых 14-канальных осциллографа, в конструкциях и схемах питания которых произведены некоторые переделки, обусловленные спецификой использования. Один осциллограф рассчитан на непрерывную работу в течение нескольких месяцев, за исключением отдельных отрезков времени, необходимых для смены кассет и профилактического осмотра. Скорость протягивания диаграммной бумаги равна 3 см/час. Для регистрации более быстрых изменений исследуемых параметров в грозовой период включается второй осциллограф со скоростью протягивания диаграммной бумаги 1 см/сек (36 м/час). Типы и чувствительности соответствующих каналов обоих осциллографов идентичны, что облегчает сопоставление записей, полученных при различной скорости регистрации.

Некоторые измерительные каналы, значения которых могут меняться в широких пределах, кроме осциллографических регистраторов, снабжены самопишущими приборами визуального контроля хода записи и диапазоными переключателями. Подробное описание схем измерений и их данные приведены в [6].

Вышеописанной аппаратурой в полевой лаборатории по исследованию грозовых процессов и грозозащиты АзНИИ энергетики им. И. Г. Есьмана, расположенной в горах Малого Кавказа, получена синхронная регистрация электрических параметров и метеозащитных элементов атмосферы у земли с 17 августа по 16 сентября 1970 года.

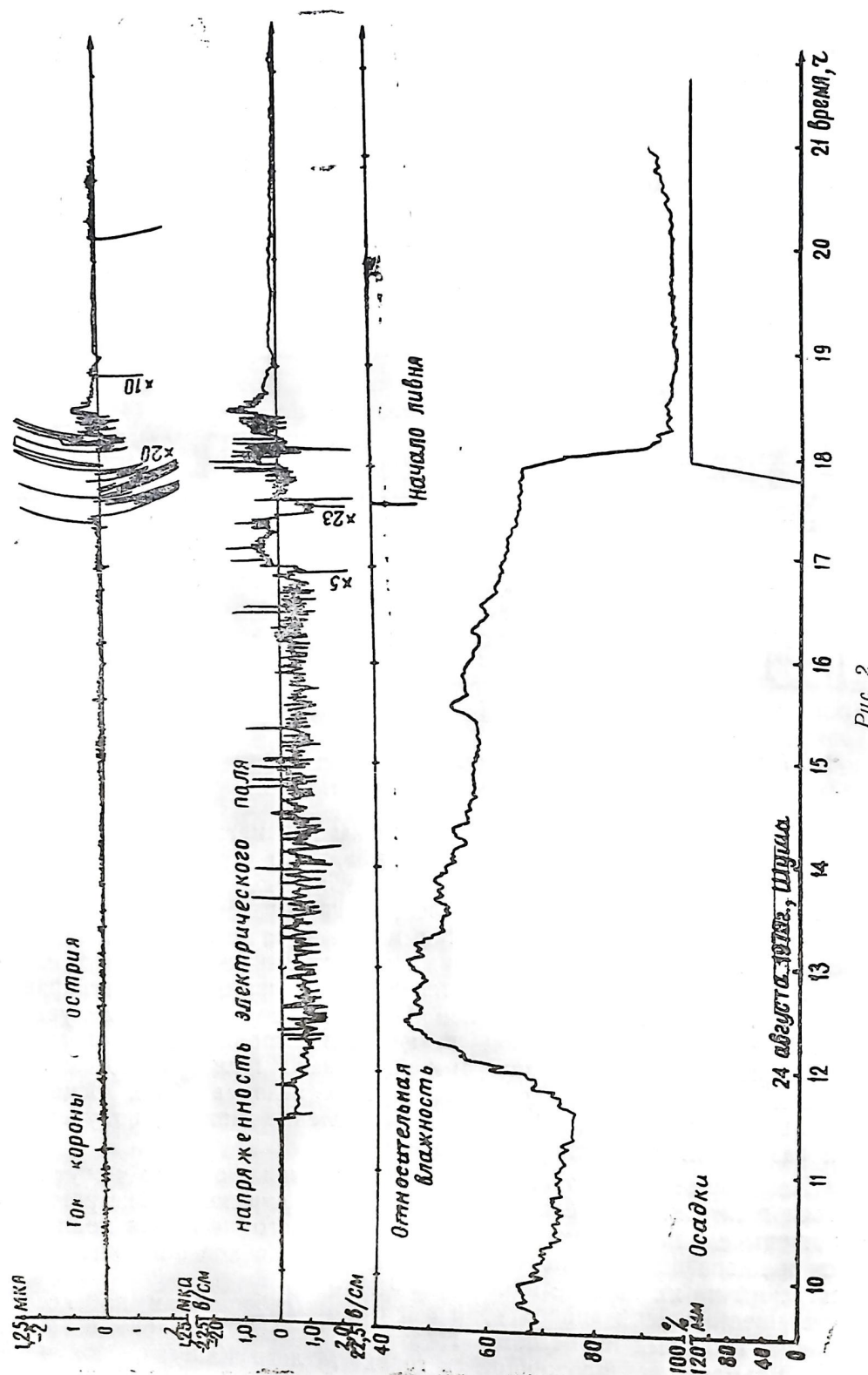


Рис. 2

Рассмотрим характерную комплексную запись параметров атмосферы от 24 августа 1970 года, когда в месте расположения лаборатории разразилась гроза с ливнем (рис. 2). За 4 ÷ 5 часов до начала активной стадии грозы обнаруживаются существенные изменения параметров атмосферы. Появляются порывы ветра, переменная облачность, влажность падает до 45%, среднее значение напряженности электрического поля $+1 \text{ кВ/м}$, с вариациями $\pm 1 \text{ кВ/м}$ через 1 ÷ 1,5 минуты, ток с острия незначителен -10^{-8} а . В дальнейшем влажность монотонно возрастает, облачность густеет, порывы ветра усиливаются. За 20 минут до начала активной стадии грозы влажность достигает 65%, средняя напряженность электрического поля 2 кВ/м , с отрицательными всплесками до $7,5 \text{ кВ/м}$. Ток короны с сильными всплесками — до 10^{-5} а .

Активная стадия грозы сопровождается резкими изменениями значений напряженности электрического поля от -42 до $+52 \text{ кВ/м}$ и тока короны от $-5 \cdot 10^{-5}$ до $+2 \cdot 10^{-5} \text{ а}$, с интервалами времени от нескольких секунд до одной минуты. Сильный грозовой ливень способствует затуханию грозы и уменьшению значений напряженности электрического поля и тока короны, а также резкому возрастанию относительной влажности до 97%.

Первые результаты комплексного исследования электрических параметров атмосферы и метеозаписей подтверждают наличие закономерных связей между ними и благодаря этому возможность надежного прогнозирования гроз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красногорская Н. Б. Изв. АН СССР, серия геогр., 1958, № 4.
2. Dr. techn. Tibor Horvath, „Eine theoretische Betrachtung des Entstehens der Fagentladung“, Technische Universität, Budapest, 1969.
3. Ализаде А. А., Кулиев Д. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1967, № 2.
4. Бергер К., Фогельзандер Е. О ходе напряженности электрического поля в непосредственной близости от удара молний. Материалы X Интернац. Будапештской конф. по грозозащите и грозовым процессам.
5. Имянитов И. М. Приборы и методы для изучения атмосферного электричества. М., ГТИИ, 1957.
6. Отчет лаборатории ГП и ГЗ АзНИИ энергетики им. И. Г. Есьмана за 1970 г.
7. Кедров Иванский и др. Метеорологические приборы. Гидрометеониздат, 1953.
8. Качурин Л. Г. Электрические измерения аэрологических величин. „Высшая школа“, М., 1967.

Институт энергетики

Поступило 15. III 1971

А. А. Элизаде, Н. А. Начыев

Атмосфердә јер үзәриндә електрик параметрләринин вә метео-элементләрин гасырға вахты вә ади һалда тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә енергетика системләрини илдирымдан эффектив муһа физә етмәк үчүн илдирымын әмәлә кәлмәсини вә онун инкишаф механизмини дәриндән өјрәнмәк, һәмчинин гасырғанкы һазырлыглы гаршыламагдан өтрү онун оператив прогностлашма методунун ишләгән мәсәди илә атмосфердә јер үзәриндә електрик вә метеоэлемент параметрләринин комплекс тәдгигиндән бәһс олунмушдур. Бундан әлавә, мәгаләдә чохканаллы гејдәдичи чиһазын тәсвири вә чөл тәдгигатынын бәзи нәтижәләри верилмишдир.

УДК 539

Р. Ю. КЕРИМОВ, Т. М. КЕРИМОВ

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ОСЛАБЛЕННЫХ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Концентрация напряжений возле малого кругового отверстия по поверхности цилиндрической оболочки впервые рассматривалась А. И. Лурье [1]. Приближенные методы исследования концентрации напряжений около кругового отверстия в цилиндрической оболочке применяли И. Н. Василенко [2] и О. А. Фролова [3]. Ими были получены решения для отверстий, размеры которых значительно больше, чем в решении А. И. Лурье [1]. В случае, когда упруго-эквивалентные направления не совпадают ни с направлениями координатных линий, ни с направлениями линий кривизны, задачу концентрации напряжений около кругового отверстия в цилиндрической оболочке изучали А. Н. Гузь [4, 5] и Ю. А. Ашмарина [10]. При этом решение осуществлялось приближенно, с применением метода Фитца. И. А. Цурпал и Н. А. Шульга [6] построили основную систему уравнений тонких пологих оболочек при нелинейной зависимости между деформациями и напряжениями.

В настоящей статье на основе теории малых упруго-пластических деформаций [7] рассматривается упруго-пластическое состояние цилиндрических оболочек с круговыми отверстиями, когда срединная поверхность оболочки не относится к линиям кривизны.

1. Пусть во всей области происходит процесс нагружения. Тогда зависимость между напряжениями и деформациями можно представить в виде [8]

$$\sigma_{ij} = K e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left[1 - \omega(e_i) \right] \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (1)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ — знак Кронекера ($i, j = 1, 2, 3$);

e_{kk} — объемная деформация;

σ_{ij}, e_{ij} — тензоры напряжения и деформаций;

e_i — интенсивность деформации сдвига;

$\omega(e_i)$ — функция Ильюшина;

K, μ — упругие постоянные.

Согласно гипотезе Кирхгофа—Лява ($e_{13} = e_{23} = 0$) зависимость (1) в проекциях на оси координат можно записать в виде:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{11} + \nu e_{22}) - \frac{E \omega(e_i)}{3(1-\nu^2)} [(2-\nu)e_{11} - (1-2\nu)e_{22} + (1+\nu)g \cdot (e_{11} + e_{22})],$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{22} + \nu e_{11}) - \frac{E \omega(e_i)}{3(1-\nu^2)} [(2-\nu)e_{22} - (1-2\nu)e_{11} + (1+\nu)g \cdot (e_{11} + e_{22})], \quad (2)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} [1 - \omega(e_i)] e_{12},$$

здесь ν — коэффициент Пуассона, $g = \frac{3\nu + (1-2\nu)\omega}{3(1-\nu) - 2(1-2\nu)\omega}$.

Компоненты деформации по толщине оболочки определяем с помощью формул $e_{11} = \varepsilon_{11} + z \kappa_{11}$, $e_{22} = \varepsilon_{22} + z \kappa_{22}$ и $e_{12} = \varepsilon_{12} + 2z \kappa_{12}$, где ε_{11} , ε_{22} и ε_{12} — соответственно, относительные удлинения в направлении координатных линий и сдвиг между ними; κ_{11} , κ_{22} и κ_{12} — изменения кривизны и кручения срединной поверхности.

Функция Ильюшина $\omega(e_i)$ выбирается на основе экспериментальных данных об упрочнении материала. С целью сокращения вычислений более удобно выбрать аналитическое выражение для $\omega(l_i)$, закон, принимаемый для физически нелинейных материалов:

$$\omega(e_i) = a_2 e_i^2 + a_4 e_i^4 + \dots \quad (3)$$

Тогда, заменяя напряженное состояние в оболочке приведенной системой усилий и моментов в срединной поверхности (материал оболочки несжимаемый, $\nu = 1/2$), получаем:

$$T_1 = \frac{2Eh}{3} (2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - a [(I_3 + b I_1) (2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + I (2\kappa_{11} + \kappa_{22})],$$

$$T_2 = \frac{2Eh}{3} (2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}) - a [(I_3 + b I_1) (2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}) + I_2 (2\kappa_{22} + \kappa_{11})],$$

$$T_{12} = \frac{2Eh}{3} \varepsilon_{12} - \frac{a}{2} [(I_3 + b I_1) \varepsilon_{12} + 2\kappa_{12} I_2] \quad (4)$$

и

$$M_1 = - \frac{Eh^3}{18} (2\kappa_{11} + \kappa_{22}) + a [(2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) I_2 + (2\kappa_{11} + \kappa_{22}) (I_1 + c I_3)],$$

$$M_2 = - \frac{Eh^3}{18} (2\kappa_{22} + \kappa_{11}) + a [(2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}) I_2 + (2\kappa_{22} + \kappa_{11}) (I_1 + c I_3)],$$

$$M_{12} = \frac{Eh^3}{18} \kappa_{12} - \frac{a}{2} [\varepsilon_{12} I_2 + 2\kappa_{12} (I_1 + c I_3)]. \quad (5)$$

Здесь $I_1 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{12}^2$; $I_2 = 2\varepsilon_{11} \kappa_{11} + 2\varepsilon_{22} \kappa_{22} + \varepsilon_{11} \cdot \kappa_{22} + \varepsilon_{22} \kappa_{11} + \varepsilon_{12} \cdot \kappa_{12}$; $I_3 = \kappa_{11}^2 + \kappa_{11} \cdot \kappa_{22} + \kappa_{22}^2 + \kappa_{12}^2$; a, b, c — некоторые постоянные; T_1, T_2, T_{12} — тангенциальные усилия; M_1, M_2, M_{12} — изгибающие и крутящие моменты.

2. Будем рассматривать тонкие оболочки, для которых максимальным значением $\frac{h}{r}$ (R — радиус кривизны срединной поверхности, h — толщина оболочки) можно пренебречь по сравнению с единицей. Большинство встречающихся на практике оболочек ($0,001 < \frac{h}{R} < 0,02$) являются тонкими. За координатную поверхность оболочки примем криволинейные ортогональные координаты α и β . Тогда уравнения равновесия оболочки, отнесенной к ортогональным координатам в предположении, что упруго-эквивалентные направления не совпадают с линиями кривизны, будут иметь вид [9]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} (BT_1) + \frac{\partial A}{\partial \beta} T_{12} + \frac{\partial}{\partial \beta} (AT_{12}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} (BT_{12}) - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{\partial}{\partial \beta} (AT_2) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_{12} &= 0, \\
A \cdot B \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{2T_{12}}{R_{12}} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} &= (AN_2) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_{12}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 - \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_2) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{12} + A \cdot B N_2 &= 0, \\
-\frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_1) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} + \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_{12}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + A \cdot B N_1 &= 0,
\end{aligned} \quad (6)$$

где N_1, N_2 — перерезывающие усилия, A и B — коэффициенты первой квадратичной формулы.

Теперь рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, ослабленную круговым отверстием. Пусть оболочка такова, что упруго-эквивалентные направления не совпадают с направлениями линий кривизны [5]. Срединную поверхность оболочки отнесем к „полярной“ системе координат (r, θ) , полюс которой совпадает с центром отверстия. В этом случае, полагая в системе (6)

$$A = 1, B = r, \frac{1}{R_1} = \frac{\sin^2 \theta}{R}, \frac{1}{R_2} = \frac{\cos^2 \theta}{R}, \frac{1}{R_{12}} = \frac{\sin 2\theta}{R},$$

получим:

$$\begin{aligned}
T_2 - T_\theta + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial T_r}{\partial r} &= 0; \quad 2T_{r\theta} + r \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} = 0; \\
\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \\
+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (M_r - M_\theta) + \frac{1}{R} (\sin^2 \theta \cdot T_2 + \cos^2 \theta \cdot T_\theta + \sin 2\theta \cdot T_{r\theta}) &= 0. \quad (7)
\end{aligned}$$

Подставляя выражения для усилия и моментов из (4) и (5) в (7) и учитывая, что компоненты относительного удлинения, изменения кривизны и кручения связываются с составляющими перемещений и прогиба по формулам:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin^2 \theta}{R} \omega, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} - \frac{\cos^2 \theta}{R} \omega, \\
\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} - \frac{\sin 2\theta}{R} \omega, \quad \kappa_r = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}, \quad \kappa_\theta = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad \kappa_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}, \quad (8)
\end{aligned}$$

получим систему из трех уравнений для определения перемещений u, v и прогиба ω :

$$\begin{aligned}
r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{3}{2r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{3}{4R} r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \\
+ \frac{1}{2R} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} - \omega \right) - \frac{1}{2R} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \sin 2\theta = \frac{3a}{4Eh} \left[(I_3 + bI_1) \left(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) + r \frac{\partial (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)}{\partial r} \right] + I_2 \left(\kappa_r - \kappa_\theta + \frac{\partial \kappa_{r\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial (2\kappa_r + \kappa_\theta)}{\partial r} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ \frac{1}{2} \varepsilon_{r\theta} \cdot \frac{\partial (I_3 + bI_1)}{\partial \theta} + \kappa_{r\theta} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \theta} + r (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \frac{\partial (I_3 + bI_1)}{\partial r} + \\
+ r (2\kappa_r + \kappa_\theta) \frac{\partial I_2}{\partial r} \Big]; \quad (9) \\
\Delta \Delta \omega - \frac{6}{h^2 R} \left[3 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{3}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + 3 \frac{u}{r} - 3 \frac{\omega}{R} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} - \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{\omega}{R} \cos 2\theta \right) \cos 2\theta + 2\varepsilon_{r\theta} \sin 2\theta \right] = \frac{18a}{Eh^3} \left\{ \frac{\partial^2 I_2}{\partial r^2} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + \right. \\
+ \frac{\partial I_2}{\partial r} \left[2 \frac{\partial (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{r} \varepsilon_r \right] + I_2 \left[\frac{\partial^2 (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)}{\partial r^2} + \right. \\
+ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \\
- \frac{3}{2R} (\kappa_r + \kappa_\theta) - \frac{1}{2R} (\kappa_\theta - \kappa_r) \cos 2\theta - \frac{1}{R} \kappa_{r\theta} \sin 2\theta \Big] + \frac{\partial I_2}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial r} + \right. \\
+ \frac{2}{r^2} \frac{\partial (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \varepsilon_{r\theta} \Big] + \frac{1}{r} \varepsilon_{r\theta} \frac{\partial^2 I_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r) \frac{\partial^2 I_2}{\partial \theta^2} + \\
+ (I_1 + cI_3) \left[\frac{\partial^2 (2\kappa_r + \kappa_\theta)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \kappa_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (2\kappa_\theta + \kappa_r)}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \kappa_{r\theta}}{\partial \theta} + \right. \\
+ \frac{3}{r} \frac{\partial \kappa_r}{\partial r} \Big] + \frac{\partial (I_1 + cI_3)}{\partial r} \left[2 \frac{\partial (2\kappa_\theta + \kappa_r)}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \kappa_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{r} \kappa_r \right] + \\
+ (2\kappa_r + \kappa_\theta) \frac{\partial^2 (I_1 + cI_3)}{\partial r^2} + \frac{\partial (I_1 + cI_3)}{\partial \theta} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \kappa_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \kappa_{r\theta}}{\partial \theta} + \right. \\
+ \frac{2}{r^2} \kappa_{r\theta} \Big) + \frac{2}{r} \kappa_{r\theta} \frac{\partial^2 (I_1 + cI_3)}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} (2\kappa_\theta + \kappa_r) \frac{\partial^2 (I_1 + cI_3)}{\partial \theta^2} - \\
- (I_3 + bI_1) \left[3 (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) \cos 2\theta + \varepsilon_{12} \sin 2\theta \right] \cdot \frac{1}{2R} \Big\}.
\end{aligned}$$

Система (9) решается при соответствующих граничных условиях.

3. Рассмотрим цилиндрическую оболочку, ослабленную круговым отверстием радиуса r_0 и нагруженную равномерным внутренним давлением интенсивности P . Будем считать, что отверстие подкреплено абсолютно жестким патрубком таким образом, что передает только перерезывающую силу. Тогда граничные условия можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u + u^0|_{r=r_0} = 0, \quad v + v^0|_{r=r_0} = 0, \quad \omega + \omega^0|_{r=r_0} = 0, \\
\frac{\partial}{\partial r} (\omega + \omega^0)|_{r=r_0} = 0. \quad (10)
\end{aligned}$$

Предполагается, что основное напряженное состояние является безмоментным и ему соответствуют u^0, v^0, ω^0 [5].

Мэгалэдэ кичик еластики-пластики деформасија нэзэријјесиндэн истифадэ едэрэк силиндриг өртүјүн эсас дифференциал тэгликлэри чыхарылмышдыр. Сонра даирэви зэйфлэтмэјэ малик силиндриг өртүк үчүн сэрһэд мэсэлэси тэгриби јол илэ һэлл едилмишдир. Механика-нын мүмкүн јердэјишмэлэр принципини тэтбиг едэрэк гојулмуш мэсэлэ гејри-хэтти чэбри тэнлијэ кэтирилмишдир.

УДК 628.162.4 (26.03)

И. З. МАКИНСКИЙ, Р. М. МУСАЕВ, С. А. ШАХМАРОВ, М. Б. ХЕИРОВ,
Ф. А. ХАСПОЛАТОВ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО СОСТАВА ОТЛОЖЕНИЙ В ПРОЦЕССАХ ТЕРМОХИМИЧЕСКОГО УМЯГЧЕНИЯ МОРСКОЙ ВОДЫ МЕТОДОМ РЕНТГЕНДИФРАКТОМЕТРИИ

Известен ряд способов умягчения и опреснения морской воды. Одним из них является термохимический метод умягчения [1]. Как известно, при умягчении морской воды возникает опасность интенсивного накипеобразования на рабочих поверхностях, что затрудняет эксплуатацию аппаратов и требует частых вынужденных остановок. До настоящего времени факторы, способствующие отложению осадков-накипей и образованию отходов после умягчения морской воды, остаются невыясненными.

Исследование в области определения вещественного состава отложений и отходов представляет не только практический, но и теоретический интерес, так как, зная вещественный состав отложений в различных аппаратах, легче вести борьбу с осадкообразованием и разработать соответствующие мероприятия [2].

С целью уточнения минералогического состава рентгендифрактометрическому изучению подвергались образцы 10, 19, 20, 21, 24, 28 и 33 из действующих установок ГРЭС «Северная» и образцы 6, 6₁, 6₂, 36, 36₁, 37, 38, 38₁, 39 и 39₁ из установок Краснодарской ТЭЦ [3]. Порошковые дифрактограммы этих образцов снимались с помощью модернизированного дифрактомера УРС-50 ИМ при скорости вращения счетчика 4 град/мин, системе щелей 0,5; 0,25 и 0,25 мм, на отфильтрованном медном излучении.

Как видно из дифрактометрических кривых образцов 21 и 24 (рис. 1), в них преобладающим минералом является каменная соль (NaCl) которая определяется дифракционными эффектами, регистрируемыми на дифрактограммах при межплоскостных расстояниях:

$$\begin{aligned} d(111) &= 3,24 - 3,25; & d(200) &= 2,80 - 2,81; \\ d(200) &= 1,983 - 1,990; & d(311) &= 1,687 - 1,690; \\ d(222) &= 1,624 - 1,625; & d(400) &= 1,4068 - 1,4070; \\ d(420) &= 1,2587 - 1,2590; & d(422) &= 1,1487 - 1,1490 \text{ Å} \end{aligned}$$

и др. В образце 21, помимо каменной соли, встречаются небольшие количества сильвина KCl, сингенита K₂SO₄, а также следы брусита Mg(OH)₂ и других минералов, а в образце 24 — заметные количества гипса и брусита.

Сильвин характеризуется дифракционными пиками при межплоскостных расстояниях $d(220) = 2,221$; $d(222) = 1,821$; $d(400) = 1,571$ и $d(420) = 1,406 \text{ Å}$ (рис. 1).

Сингенит определен дифракционными максимума с межплоскостными расстояниями 5,88; 5,56; 4,56; 3,11 Å и др. Образец 6 представлен гипсом CaSO₄·2H₂O, а образец 20 — гипсом с небольшой примесью брусита. Для гипса характерна регистрация дифракционных макси-

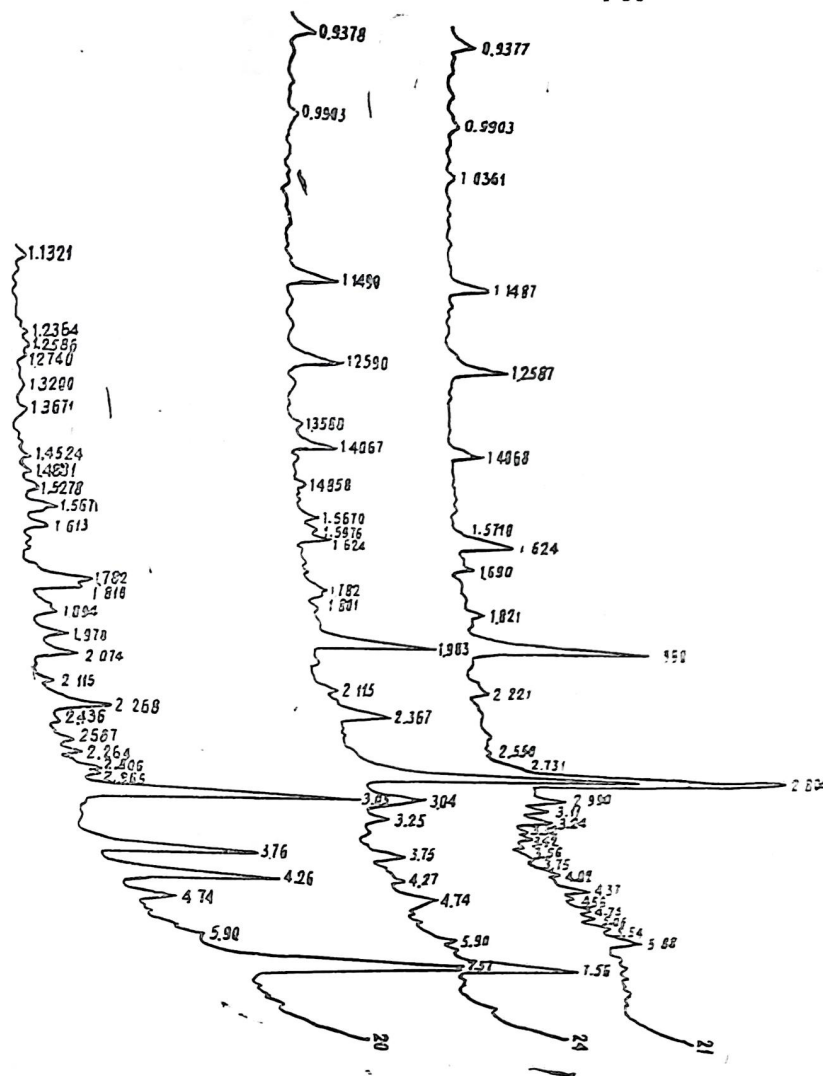


Рис. 1

мумов при следующих межплоскостных расстояниях: $d(200) = 7,56$; $d(121) = 4,28$; $d(031; 040) = 3,76$; $d(141) = 3,05$; $d(002) = 2,865$; $d(022; 051) = 2,674$; $d(150; 202) = 2,587$; $d(123) = 2,074$; $d(170) = 1,978$; $d(080; 013) = 1,894$; $d(262) = 1,810 \text{ Å}$ и др. Следы гипса встречаются также в образцах 6₁ и 6₂ (рис. 2).

Образец 19 представлен почти чистым бруситом, для которого характерно появление на дифрактограммах рефлексов при межплоскостных расстояниях: $d(0001) = 4,74$; $d(10\bar{1}0) = 2,713$; $d(10\bar{1}1) = 2,360$; $d(10\bar{1}2) = 1,789$; $d(0003) = 1,567$; $d(11\bar{2}1) = 1,487$; $d(10\bar{1}3; 20\bar{2}0) = 1,3676$; $d(11\bar{2}2; 20\bar{2}1) = 1,3078$; $d(0004) = 1,1791$; $d(10\bar{1}4) = 1,0875$; $d(20\bar{2}3; 21\bar{3}0) = 1,0303 \text{ Å}$ и др. Заметные количества брусита встречаются также в образцах 38, 38₁, а следы его отмечают в образцах 37 и 39 (рис. 2).

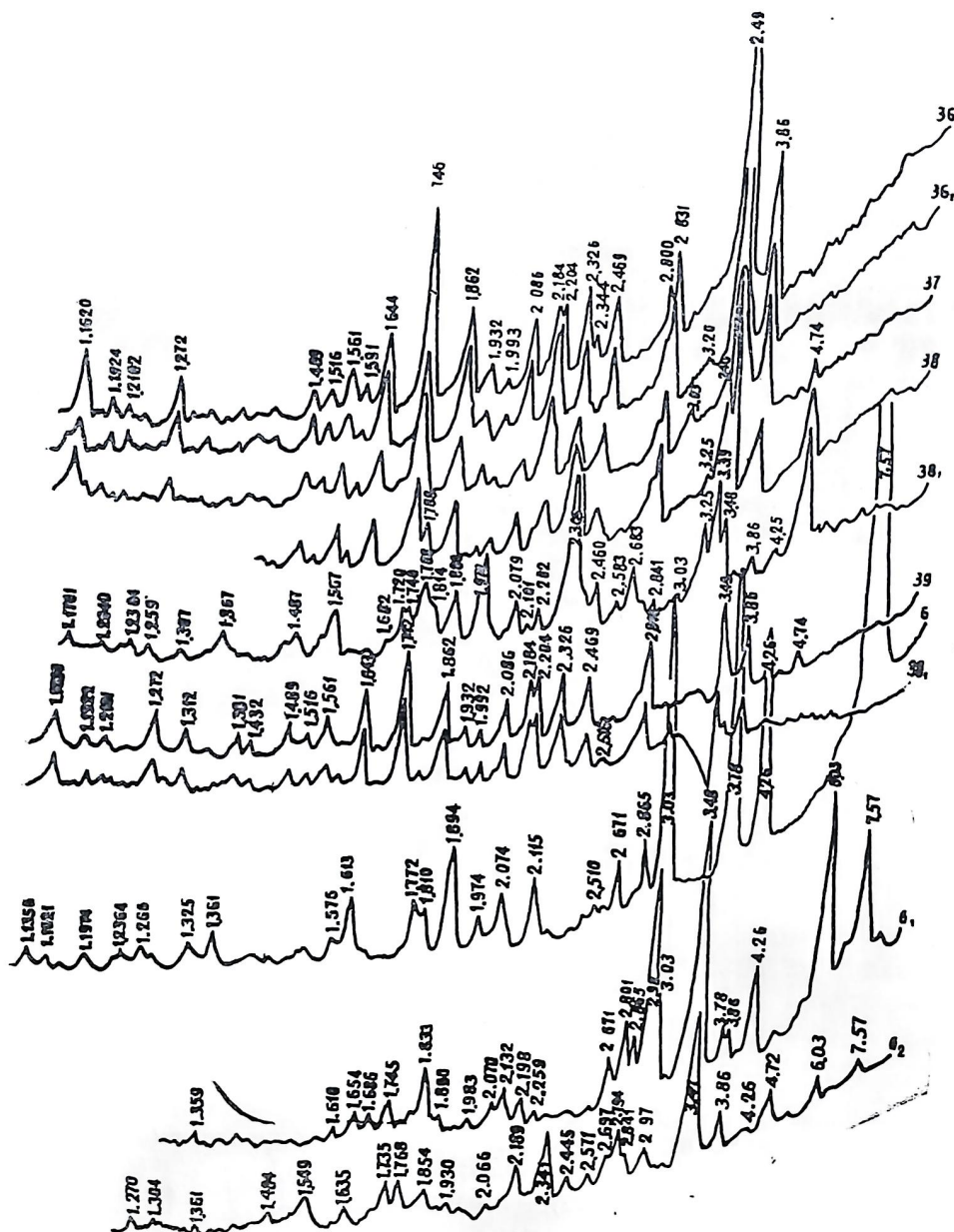


Рис. 2

По данным рентгенодифрактометрического анализа образцы 10, 33, 28, 36 и 36₁ представлены почти чистым ангидритом CaSO_4 , который определен дифракционными эффектами при межплоскостных расстояниях: $d(111) = 3,86$; $d(020; 002) = 3,48$; $d(210) = 2,841$; $d(022) = 2,468$; $d(202; 220) = 2,324$; $d(212; 221) = 2,201$; $d(103) = 2,183$; $d(031; 013) = 2,081$; $d(311) = 1,990$; $d(230; 203) = 1,862$; $d(004; 040) = 1,745$; $d(232) = 1,644$; $d(205; 250) = 1,270$; $d(440; 404) = 1,1615$ Å и др. Он является преобладающим минералом и в образцах 26, 37, 38, 39 и 39₁ (рис. 2). Причем в образцах 26, 37 и 39, помимо ангидрита, присутствует незначительная, а в образце 38 заметная примесь брусита. В образцах 37, 38 и 39₁ отмечаются также следы кальцита, а в образцах 37 и 39₁ и следы арагонита.

Большое количество арагонита, характеризующегося дифракционными эффектами при межплоскостных расстояниях 4,25; 3,39; 3,25; 2,683; 1,970; 1,814 Å и др. (рис. 2), встречается в образце 38₁. Кальцит в образцах, не содержащих гипса, определяется в основном эффектом при 3,03 Å.

Полугидрат $\text{CaSO}_4 \cdot 0,5 \text{H}_2\text{O}$ встречен в заметных количествах в образцах 6₁ и 6₂. Для него характерна регистрация рефлексов при межплоскостных расстояниях 6,03; 3,48; 2,98; 2,801; 2,692; 1,852 Å и др. (рис. 2).

Таким образом, детальные исследования позволили установить химизм, минералогический состав и структуру отложений. Выяснено влияние физико-химических и термодинамических условий умягчения морской воды на состав отложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макинский И. З., Уч. зап. АЗИНЕФТЕХИМ им. М. Азизбекова, 1967, № 1.
2. Макинский И. З., Мусаев Р. М. и др. „За технический прогресс“, 1970, № 1.
3. Макинский И. З., Мусаев Р. М. и др. „За технический прогресс“, 1971, № 2.

АЗИНХ им. Азизбекова,
АзНИИПнефть

Поступило 31. V 1971

И. З. Макински, Р. М. Мусаев, С. А. Шахмаров, М. Б. Хежиров,
Ф. Э. Хасполадов

Дәниз сујунун термохимјәви јумшалдылмасы просесиндә әмәлә кәлән чөкүнтүләрин минерал тәркибинин рентгендифрактометрија үсулу илә тәјини

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә „шима“ ДРЕС-дә вә Красноводск ИЕМ-дә ишләјән термохимјәви гурғуларда дәниз сујунун јумшалдылмасы заманы ајры-ајры апаратларда әмәлә кәлән чөкүнтүләрин минерал тәркибинин рентгендифрактометрија үсулу илә тәјининдән бәһс едилмишдир. Бу тәдгигат гурғунун мүхтәлиф апаратларда чөкүнтүнүн јаранмасына гаршы көрүлән тәдбирләрин вахтында апарылмасына имкан верир.

УДК 536.22; 541.135

А. М. КЕРИМОВ, Ф. Г. ФАТУЛЛАЕВ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

Фундаментальные исследования теплопроводности водных растворов солей выполнены в работах [1, 2, 3] методом коаксиальных цилиндров при температуре 20°C, с точностью до 1%. Для всех исследованных водных растворов солей KCl, KBr, KJ, CaCl₂, CaBr₂, BaCl₂, BaBr₂, BaJ₂, за исключением натриевых солей, автор работ [1, 2, 3] нашел уменьшение теплопроводности с ростом концентрации раствора. Из экспериментальных данных было обнаружено, что влияние солей на теплопроводности электролитов подчиняется правилу аддитивности по отношению к ионам, на которые диссоциируют соли в растворе. На основании этого вывода автор предложил следующую формулу:

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_i \alpha_i c_i,$$

где λ и λ_0 — теплопроводность раствора и воды, c_i — концентрация ионов в растворе, α_i — коэффициенты, характеризующие влияние ионов на теплопроводность. Автор составил таблицу величин α_i для различных ионов [2].

В работе [6] стационарным методом нагретой нити была исследована теплопроводность водных растворов солей NaCl, KCl, BaCl₂, ZnSO₄, Na₂SO₄, HCl, KOH при 30°C, с точностью до 1%. Более точные измерения теплопроводности водных растворов солей относительным методом плоского слоя выполнены в работе [7] при температуре 25°C. Этот метод позволил проводить эксперимент с точностью, оцененной авторами в 0,1%.

В работе [8] нестационарным методом нагретой нити (относительный вариант) исследована теплопроводность водных растворов солей NaCl, KCl, LiCl, CsCl, KBr, KJ при температурах 0–40°C, с точностью до 0,1%. Таким образом, из результатов указанных работ видно, что теплопроводности водных растворов солей исследованы при комнатной температуре (до 40°C). По нашему мнению, эти результаты не дают возможности сделать какой-нибудь количественный вывод для нужд современной техники. Изучение влияния растворенного вещества на температурную зависимость теплопроводности воды имеет (помимо чисто практического) большое значение для теории, рассматривающей аномальный температурный ход теплопроводности воды.

Настоящая статья посвящена изучению концентрационной и температурной зависимости теплопроводности водных растворов электролитов.

Результаты измерений

Измерения теплопроводности осуществлялись относительным методом коаксиальных цилиндров. В ранее описанной установке [9] были определены теплопроводности водных растворов солей BaCl₂,

Таблица 1

Раств. вещество	λ , вт/м·град					
	T, °C	Концентрация, вес. %				
		0	5	10	20	25
BaCl ₂	20	0,602	0,5997	0,5956	0,5795	0,5667
	40	0,630	0,6279	0,6238	0,6076	0,5948
	60	0,653	0,6501	0,6462	0,6307	0,6180
	80	0,669	0,6667	0,6628	0,6476	0,6345
	100	0,680	0,6778	0,6740	0,6589	0,6456
	120	0,685	0,6830	0,6792	0,6639	0,6509
	140	0,687	0,6848	0,6810	0,6657	0,6527
	160	0,684	0,6824	0,6785	0,6634	0,6496
	180	0,676	0,6741	0,6705	0,6546	0,6414
	200	0,664	0,6618	0,6578	0,6420	0,6291

BaBr₂, BaJ₂ в интервале температур 20–200°C при различных концентрациях, с точностью до 1,5%. Растворы готовили непосредственно перед измерениями и тщательно перемешивали. Предельные весовые концентрации были: BaCl₂ — $\rho=25\%$, BaBr₂ — $\rho=40\%$ и BaJ₂ — $\rho=60\%$. Используемые соли BaCl₂, BaBr₂, BaJ₂ имели спецификацию ЧДА. Все измерения выполнялись при двух значениях разностей температур — 4 и 2°C. При этом получаемые результаты не выходят за пределы точности опыта.

Таблица 2

Раств. вещество	T, °C	λ , вт/м·град					
		Концентрация, вес. %					
		0	5	10	20	30	40
BaBr ₂	20	0,602	0,5948	0,5862	0,5660	0,5420	0,5129
	40	0,630	0,6231	0,6145	0,5946	0,5709	0,5430
	60	0,653	0,6464	0,6378	0,6186	0,5970	0,5724
	80	0,669	0,6627	0,6541	0,6370	0,6159	0,5910
	100	0,680	0,6731	0,6662	0,6484	0,6280	0,6034
	120	0,685	0,6790	0,6717	0,6547	0,6340	0,6107
	140	0,687	0,6808	0,6736	0,6567	0,6367	0,6130
	160	0,684	0,6780	0,6707	0,6534	0,6330	0,6093
	180	0,676	0,6687	0,6621	0,6442	0,6234	0,5997
	200	0,663	0,6578	0,6492	0,6315	0,6097	0,5850

Результаты экспериментов иллюстрируют табл. 1–3 и рис. 1–3. На рис. 1 показана зависимость коэффициента температурной зависимости теплопроводности от концентрации (вес. %). Как видно, концентрационная зависимость теплопроводности не является линейной, что опровергает утверждение Егера, Рау и Риделя [1–5]. Для этих же солей на рис. 2 представлена зависимость теплопроводности от молярной концентрации, которая также является нелинейной.

Таблица 3

Раств. вещество	T, °C	λ , Вт/м·град							
		Концентрация, вес. %							
		0	5	10	20	30	40	50	60
Ba I ₂	20	0,602	0,5930	0,5847	0,5624	0,5376	0,5099	0,4802	0,4491
	40	0,630	0,6214	0,6131	0,5917	0,5678	0,5410	0,5115	0,4784
	60	0,653	0,6442	0,6359	0,6162	0,5948	0,5701	0,5413	0,5101
	80	0,669	0,6612	0,6524	0,6346	0,6137	0,5900	0,5630	0,5331
	100	0,680	0,6711	0,6629	0,6457	0,6244	0,6018	0,5757	0,5470
	120	0,685	0,6768	0,6699	0,6523	0,6318	0,6089	0,5837	0,5556
	140	0,687	0,6792	0,6723	0,6523	0,6344	0,6113	0,5860	0,5580
	160	0,684	0,6760	0,6683	0,6550	0,6303	0,6077	0,5830	0,5543
	180	0,676	0,6680	0,6597	0,6419	0,6210	0,5976	0,5730	0,5437
	200	0,664	0,6555	0,6482	0,6290	0,6078	0,5838	0,5567	0,5263

Из табл. 1—3 и рис. 3 видно, что теплопроводность электролитов всегда меньше теплопроводности чистой воды. Причем с увеличением концентрации теплопроводность уменьшается, а положительный ход ее сохраняется таким же, как у чистой воды.

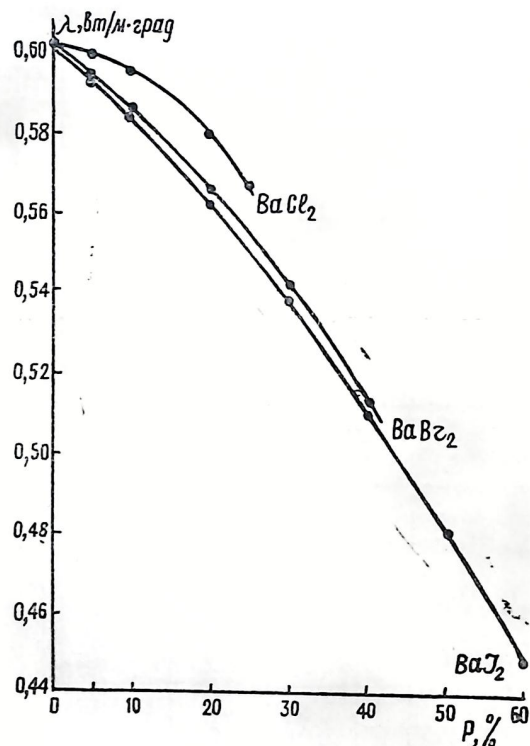


Рис. 1

Уменьшение теплопроводности раствора можно объяснить влиянием водородных связей на теплопроводность воды [10]. Согласно этим представлениям, перенос тепла от одной молекулы к другой облегчается появлением дополнительной силы взаимодействия в виде водородной связи. В неискаженной структуре льда каждая молекула устанавливает две водородные связи с двумя другими (из четырех, являющихся ее ближайшими соседями) и две молекулы устанавливают с данной еще по одной связи. Поэтому каждая молекула свя-

зана четырьмя связями с окружающими ее молекулами. В искаженной льдоподобной структуре воды часть водородных связей оборвана, каждая молекула связана с окружающими ее молекулами числом

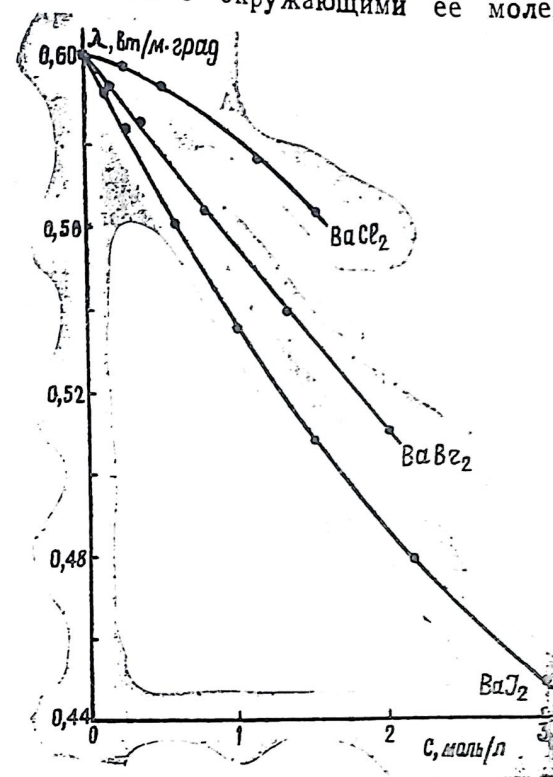


Рис. 2

связей $z_n < 4$. Если ион, находящийся в растворе, замещает молекулы воды в квазикристаллической структуре, то связи H_2O-H_2O заме-

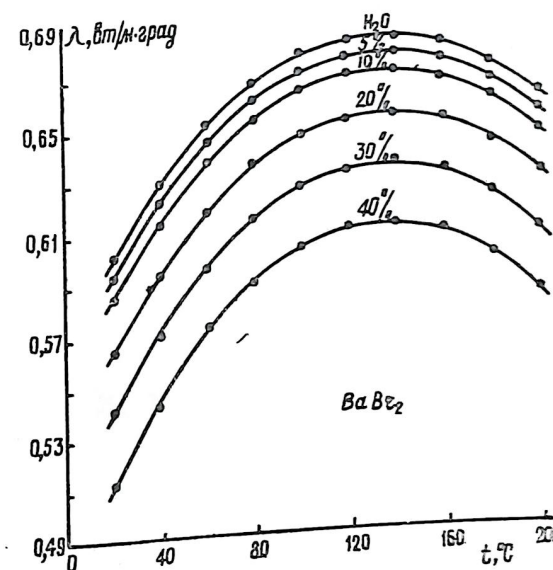


Рис. 3

щаются связями H_2O —ион. При этом происходит обрыв z_n -связей, которые имела замещаемая молекула в структуре воды. В общем

случае связь H_2O —ион менее теплопроводна, чем H_2O — H_2O при наличии несборванной связи между ними. Поэтому переход от воды к раствору должен сопровождаться уменьшением теплопроводности раствора. Ионы в растворе как бы экранируют передачу тепла по водородным связям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Riedel L. Wärmeleitfähigkeitsmessungen an Flüss., C. F. Muller Verlag, Karlsruhe, 1948.
2. Riedel L. Kältetechnik, 2 Jahrgang, 1950, Heft. 4, S. 99.
3. Riedel L. Chem.-Eng.-Technik, 22 Jahrgang, 14 Febr., 1950, № 3, S. 54; 22, 54, 1950, S. 465; 23, 1951, S. 59.
4. Roy W. Zs. für angew. Phys., Bd. 1, Heft 5, 1948, S. 211.
5. Jäger G. Wien Berichte, 99 (2/a), 1890, 3245; Repertorium d. Phys., 27, 1891 42.
6. Варгафтик И. Б., Осьминин Ю. Л. „Теплоэнергетика“, 1956, № 7.
7. Капустинский А. Ф., Рузавин И. И. ЖФХ, т. 29, 1955, вып. 12.
8. Литвиненко И. В. Канд. дисс., 1968.
9. Керимов А. М., Эльдаров Ф. Г., Эльдаров В. С. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1969, № 6.
10. Самойлов О. Я. Структура водных растворов электролитов и гидратация ионов. Изд. АН СССР, 1957.

Институт энергетики

Поступило 15. X 1971

Э. М. Керимов, Ф. Н. Фатуллаев

Электролитләрнн сулу мәнлулларынын истилик кечирмәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $BaCl_2$, $BaBr_2$, BaJ_2 дузларынын мұхтәлиф гатылыгда сулу мәнлулларынын 20—200°C температур интервалында истилик-кечирмә әмсалларынын тәчрүби јолла тәјини верилмишдир. Тәдгигатда сујун гурулушу һаггында мұасир тәсәввүрләрә әсасланараг, һонларын сујун истилик кечирмәсинә тәсири мұәјјән едилмишдир.

УДК 538.4

Т. М. АЛИКИШИБЕКОВА, Ю. Н. КИСЕЛЕВ, В. А. ПОПОВ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ МАЗУТА

При использовании продуктов сгорания мазута в качестве рабочего тела МГД генератора открытого цикла значительный интерес представляют исследования их электрофизических параметров. Подобные исследования проводились для ряда углеводородных топлив, однако присутствие в мазуте таких специфических легкоионизируемых элементов, как натрий, кальций и калий, объясняет электрофизические особенности горения и свойства продуктов сгорания.

Методика произведенного нами расчета электропроводности в целом является обобщением уравнений Саха и Чепмена—Каулинга. При расчете проводимости продуктов сгорания мазута исходили из нижеследующих предположений. В газе имеет место термическая ионизация. Основными носителями заряда являются свободные электроны, электронная и ионная температуры равны и плазма нейтральна. Электронная плотность представляется как результат ионизации щелочного элемента натрия, содержащегося в золе мазута, весовое содержание которого наибольшее по сравнению с кальцием и калием.

Электропроводность слабоионизированной плазмы для этих условий определяется уравнением

$$\sigma = \frac{n_e \cdot e \cdot u_e}{E} = n_e \cdot \mu \cdot e, \quad (1)$$

где n_e —плотность электронов; e —заряд электрона; u_e —скорость дрейфа электронов в газе; E —напряженность электрического поля; μ —подвижность электронов.

Подвижность электронов $\frac{u_e}{E}$ ограничивается столкновением с нейтральными частицами газа, кулоновские взаимодействия с другими заряженными частицами можно не учитывать. Для такого газа Чепмен [1] определяет подвижность по формуле

$$\frac{u_e}{E} = \mu = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{0.5} \frac{e}{Q_{e-a} \cdot P} \left(\frac{kT}{m_e} \right)^{0.5}, \quad (2)$$

где Q_{e-a} —эффективное сечение упругих столкновений электрона с нейтральными частицами; k —постоянная Больцмана; m_e —масса электрона; P —общее давление.

Для определения концентрации n_e использовалась формула

$$n_e = \frac{0,75 \cdot 10^{22}}{T} \left[\frac{-K_1}{2} \pm \frac{(-K_1 + 4K_1 A_0)^{0,5}}{2} \right], \quad (3)$$

где A_0 — полная концентрация щелочного металла (атм); K_1 — константа ионизационного равновесия в уравнениях Саха [2],

$$\lg K_1 = -\frac{21 \cdot 810}{T} + 2,5 \lg T - 6,49 + \frac{(g_{A_0^+})(g_e)}{(g_{A_0})}. \quad (4)$$

Поскольку пренебрегли электронным возбуждением, то отношение статистических весов (g) для натрия принято равным единице.

К решению задачи по определению проводимости есть еще один подход, использованный рядом авторов [3], который основан на предположении, что молекулы газа и электроны непрерывно сталкиваются друг с другом, но в период между столкновениями движутся свободно. В этом случае уравнение для проводимости можно записать в виде

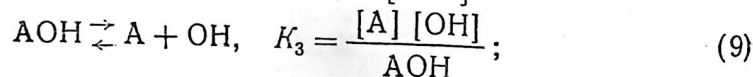
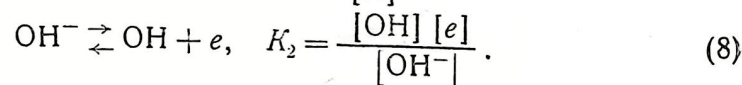
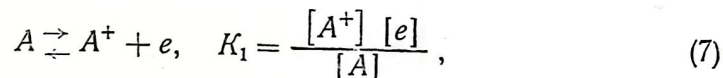
$$\sigma = 0,385 \cdot 10^{-7} \frac{n_e}{T^{0,5} (\sum n_a Q_{e-a} + n_e Q_{e-i})}, \quad (5)$$

здесь T — температура, °K; n_e — число электронов в 1 см³; n_a — число нейтральных частиц в 1 см³; Q_{e-a} — эффективное сечение взаимодействия электронов с нейтральными атомами (см²); Q_{e-i} — электронно-ионное сечение взаимодействия.

Оценка порядка величины $n_e Q_{e-i}$ показывает, что она значительно меньше $n_a Q_{e-a}$, поэтому с достаточной степенью точности электронно-ионным взаимодействием можно пренебречь. Уравнение (5) упрощается и может быть записано в виде

$$\sigma = 0,385 \cdot 10^{-7} \frac{n_e}{T^{0,5} n_a Q_{e-a}}. \quad (6)$$

Анализ свойств компонентов продуктов сгорания показывает, что влияние на их ионизацию может оказывать радикал OH, который связывает атомы щелочного металла реакцией образования гидроксида OH и обуславливает прилипание электронов вследствие большой энергии сродства OH к электронам. Процесс связывания щелочного металла A радикалом OH и прилипания электронов к OH рассмотрен в работе [4] и представляется схемами:



K_1 , K_2 и K_3 — константы равновесия (A ; A^+ ; OH ; OH^- ; AON ; e) — соответствующие парциальные давления компонентов.

Константы равновесия K_1 , K_2 , K_3 были рассчитаны из уравнений, предложенных Фростом [4]:

$$\lg K_1 = -\frac{5050}{T} V_1 + \frac{5}{2} \lg T - 6,48, \quad (10)$$

$$\lg K_2 = -\frac{5050}{T} E + \frac{5}{2} \lg T - 5,58, \quad (11)$$

$$\lg K_3 = \frac{5050}{T} (V_{H_2O} - V_{AON}) + \lg K_{H_2O} + 0,716. \quad (12)$$

Исходя из условия нейтральности плазмы,

Решив уравнения (7), (8), (9), (13) относительно $[e]$, получим значение парциального давления электронов в форме

$$[e]^2 = \frac{K_1 [A]}{(1 + \Phi_2)(1 + \Phi_3 + K_1/[e])}, \quad (14)$$

где

$$\Phi_2 = \frac{[OH^-]}{[e]} = \frac{[OH]}{K_2},$$

$$\Phi_3 = \frac{[AON]}{[A]} = \frac{[OH]}{K_3}.$$

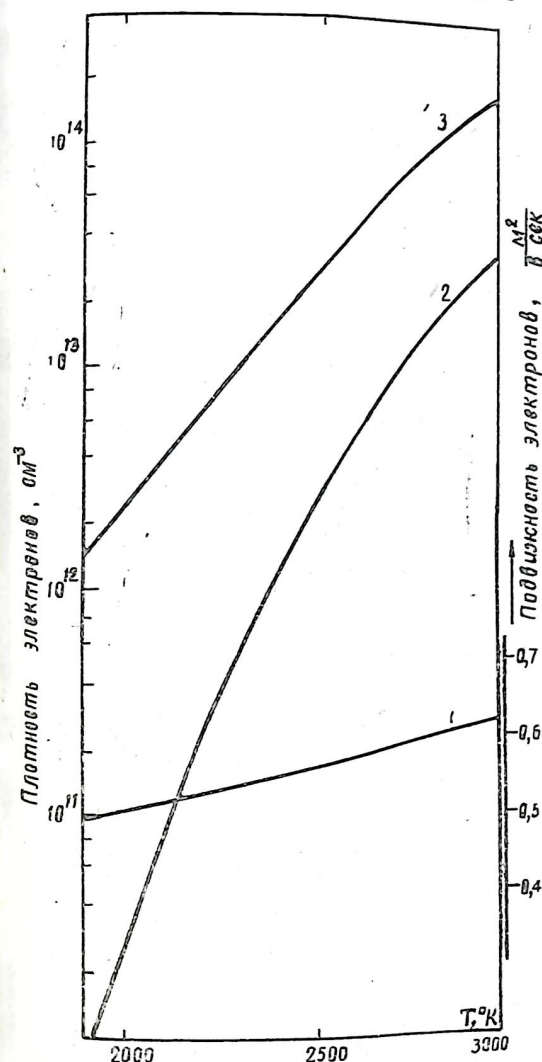


Рис. 1. Зависимость подвижности и плотности электронов от температуры: 1 — подвижность электронов; 2 — плотность электронов с учетом влияния OH; 3 — плотность электронов без учета влияния OH.

Выражение $K_1/[e]$ характеризует обеднения плотности нейтральных щелочных атомов в результате ионизации, что становится заметным только при температуре 3500°K и выше.

Плотность электронов в 1 см³ определялась выражением

$$n_e = 7,335 \cdot 10^{21} \frac{[e]}{T}. \quad (15)$$

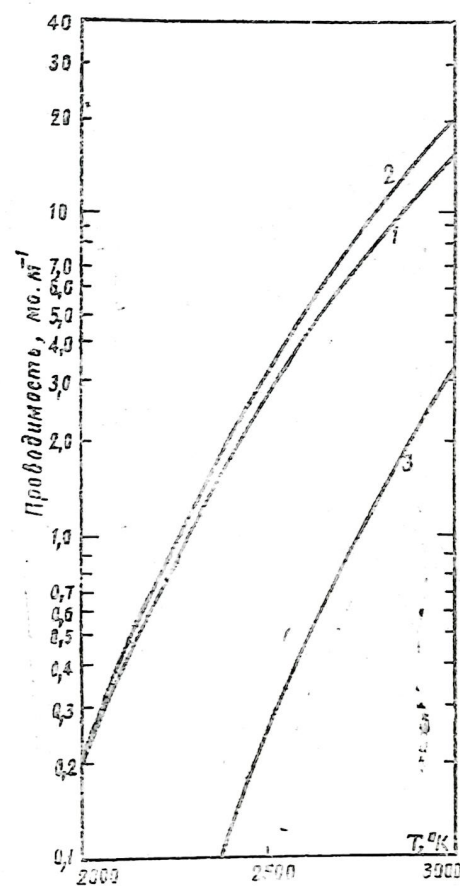


Рис. 2. Зависимость проводимости от температуры: 1 — проводимость по формуле (1); 2 — проводимость по Мулланю; 3 — проводимость с учетом влияния OH.

Плотность нейтральных атомов n_a , полная концентрация щелочного металла A_0 и необходимые парциальные давления компонент определялись по результатам термодинамического расчета продуктов сгорания мазутов в воздухе при общем давлении 3 атм [5]. Так, полная концентрация щелочного металла натрия равна $6 \cdot 10^{-4}$ атм.

Величина Q_{e-a} принималась равной $2,5 \cdot 10^{-15}$ см [6]. Энергия диссоциации V_{NaOH} на $Na + OH$ и V_{H_2O} на $H + OH$ составляла 3,96 и 5,16 эв, соответственно. Константа равновесия для диссоциации H_2O в виде $lg K_{H_2O}$ взята по Б. Люису и Г. Эльбе [7], потенциал ионизации натрия $V_i = 5,14$ эв.

Для энергии сродства электрона E к гидроксильному радикалу было выбрано значение 2,1 эв как наиболее приемлемое и дающее хорошее совпадение с измеренными значениями проводимости [4]. Расчеты параметров выполнялись на ЭЦВМ „Наири-2“ и представлены на рис. 1 и 2 в виде зависимостей электронной концентрации, подвижности и электропроводности от температуры сгорания мазута.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрение выполненных расчетов приводит к следующим выводам. Очевидна резкая зависимость электропроводности от температуры.

Существенный вклад в собственную электропроводность продуктов сгорания вносит содержащийся в газе атомарный натрий. При парциальном давлении щелочного металла порядка $P_{Na} = 6 \cdot 10^{-4}$ атм ионизация последнего в значительной степени превышает ионизацию основного газа, которой практически можно пренебречь. Влияние радикала (ОН) на электропроводность начинает проявляться уже при $2000^\circ K$ и приводит к уменьшению электронной концентрации, а следовательно, и электропроводности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов, ИЛ 1960.
2. Saha M. Phil. Mag., 40, 472 (1920).
3. Mullaney G. J., Kydd P. H. and Dibelius N. R. J. Appl. phys., 32 № 4, 1961.
4. Frost J. J. Appl. phys., 32, № 10 (1961).
5. Аликишибекова Т. М., Киселев Ю. Н. Тр. Азерб. научно-иссл. ин-та энергетики, 1970.
6. Зимин Э. П., Попов В. А. ПМТФ, 1963, № 5.
7. Льюис Б., Эльбе Г. Горение, пламя и взрывы в газах. „Мир“, 1968.

Институт энергетики

Поступило 12. VII 1971

Т. М. Аликишибекова, Ю. Н. Киселев, В. А. Попов

Мазутун жанма махсулларынын алчаг температурлу плазмасынын нээри тэһлили

ХҮЛАСЭ

Мәгалә мазутун жүксәк температурлу жанмасынын электрик-физики мәсәләләринин тәдгигинә һәср едилмишдир. Бу мәсәлә мәје жаначагла ишләјән МГС кенераторлар саһәсиндә апарылан тәдгигатларла әлағәдар олараг чох марағлыдыр.

Мәгаләдә мазутун жанма махсулларынын плазма кәстәришләринин нээри һесабыласы верилмишдир. Бураја електроларын конструијасы вә чевиклији, $2000-3000^\circ K$ температур интервалында электрик кечиричилији дахилдир.

Кәстәришләрин һесабаты Наири-2 маркалы электрон әдәди һесабама машинында апарылмышдыр.

Б. А. АЗИМОВ, Г. А. МАМЕДОВ, И. Т. ЭМИНОВ

К ВОПРОСУ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ВОДО-НЕФТЯНОГО КОНТАКТА (ВНК) В КРУГОВОМ ПЛАСТЕ

Решение задачи управления движением ВНК в общей постановке, как известно [1], связано с большими математическими трудностями. Поэтому она обычно рассматривается при некоторых упрощениях [1, 2]. Рассмотрим горизонтальный круговой пласт, одинаковый по проницаемости (k) и по мощности (h), ограниченный некоторым кругом Γ_k , на котором поддерживается постоянное давление P_k , равное первоначальному пластовому. Вязкости воды μ_v и нефти μ_n считаем одинаковыми, т. е. $\mu_v = \mu_n = \mu$. Эксплуатационные и нагнетательные скважины размещены в форме кольцевых батарей, число которых, соответственно, n и l . Координаты скважин считаем заданными.

Известно [3], что при водонапорном режиме и указанных выше условиях давление в пласте описывается формулой:

$$P = P_k + \frac{\mu}{4\pi h k} \sum_{i=1}^{n+l} q_i \ln \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{r}{R_i} \right)^{m_i} + \left(\frac{R_i}{r} \right)^{m_i} \right] \cos m_i (\theta - \varphi_i)}{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{r R_i}{R_k^2} \right)^{m_i} + \left(\frac{R_k}{r R_i} \right)^{m_i} \right] \cos m_i (\theta - \varphi_i)}, \quad (1)$$

где r, θ — полярные координаты любой точки пласта, m_i — число скважин в i -й кольцевой батарее, R_i, φ_i ($i = 1, n+l$) — полярные координаты центра ближайшей к оси скважины i -й батареи.

Допустим, что желаемый закон стягивания контура нефтеносности Γ имеет круговую форму и задается уравнением

$$F(\theta, r, t) = r - r_0 e^{-bt}, \quad (2)$$

где

$$b = \frac{1}{T} \ln \frac{r_0}{r}.$$

Здесь T — время, в течение которого контур нефтеносности от своего первоначального положения Γ_0 равномерно сходится к конечному Γ_1 , r_0 — радиус первоначального, а r_1 — конечного положений кругового контура стягивания. При указанных предложениях задача управления движением ВНК математически может быть сформулирована следующим образом: скважины с координатами φ_i, R_i ($i = 1, n$) необходи-

мо эксплуатировать так, чтобы функция "невязки"

$$\varepsilon(\theta, r, t, q_1, q_2, \dots, q_{n+1}) = m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\kappa}{\mu} \left[\frac{\partial P}{\partial r} \right]_r \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (3)$$

для любых t ($0 \leq t \leq T$), Q ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) и r ($r_1 \leq r \leq r_0$) сделалась как можно более близкой к нулю.

Чтобы решить эту задачу, необходимо ввести норму в каком-либо функциональном пространстве, а затем минимизировать норму $\|\varepsilon(\theta, r, t, q_1, q_2, \dots, q_{n+1})\|$ как линейную функцию от дебитов. Естественно, что на забойные давления будут налагаться ограничения как в работе [2]:

$$P_{3j} = P_k + \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} q_i \geq P_{3j}^*, \quad j = \overline{1, n} \quad (4)$$

где

$$a_{ij} = \frac{\mu}{4\pi kh} \ln \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{R_j}{R_i} \right)^{m_1} + \left(\frac{R_i}{R_j} \right)^{m_1} \right] - \cos m_1 (\varphi_j - \varphi_i)}{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{R_i R_j}{R_k^2} \right)^{m_1} + \left(\frac{R_k^2}{R_i R_j} \right)^{m_1} \right] - \cos(\varphi_j - \varphi_i)}$$

при

$$a_{ij} = -\frac{\mu}{2\pi kh} \left\{ \ln \frac{R_j}{m_j r_{jc}} + \ln \left[\left(\frac{R_k}{R_j} \right)^{m_j} - \left(\frac{R_j}{R_k} \right)^{m_j} \right] \right\},$$

P_{3j}^* —заданные величины забойных давлений. За норму $\varepsilon(\theta, r, t, q_1, q_2, \dots, q_{n+1})$ в функциональном пространстве интегрируемых по θ функций примем

$$\|\varepsilon(\theta, r, t, q_1, q_2, \dots, q_{n+1})\| = \bar{\varepsilon}(t, q_1, q_2, \dots, q_{n+1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varepsilon(\theta, r, t, q_1, q_2, \dots, q_{n+1})| d\theta. \quad (5)$$

Таким образом, данная задача сведена к задачам линейного и параметрического программирования [4]. С помощью подбора дебитов эксплуатационных скважин требуется минимизировать (5) при ограничениях (4). Решение этой задачи в таком виде связано с большими математическими трудностями. Однако наличие знакоопределенности функции $\varepsilon(\theta, r, t, q_1, q_2, \dots, q_{n+1})$, т. е. неположительности или неотрицательности в области изменения аргументов θ, t позволяет, подставляя (1), (2) в (5), раскрыть интеграл.

Подставляя (1), (2) в (3), можно установить, что знакоопределенность функции невязки достигается при выполнении ограничения:

$$\sum_{i=1}^m m_i q_i \geq \frac{mh}{T} \kappa(t), \quad (6)$$

$$\text{где } \kappa(t) = \frac{4\pi r^2(t) \ln \frac{r_0}{r_1}}{1 - \left[\frac{R_n}{r(t)} \right]^{m_1} + \frac{1 - \left[\frac{r(t)}{R_{n+1}} \right]^{m_{n+1}}}{1 + \left[\frac{R_n}{r(t)} \right]^{m_1} + \frac{1 - \left[\frac{r(t)}{R_{n+1}} \right]^{m_{n+1}}}{1 + \left[\frac{r(t)}{R_{n+1}} \right]^{m_{n+1}}}}.$$

Это соотношение получено при предположении, что объем закачанной в пласт воды равен объему отобранной из него жидкости. Минимизация (5) при ограничениях (4), (6) значительно упрощает решение поставленной задачи.

Левая часть соотношения (6) есть суммарный отбор жидкости из пласта, а правая зависит от параметров T, m, h и радиуса контура нефтеносности $r(t)$. Так как радиус ВНК зависит от времени, также зависит от t . Обозначив среднее значение дебитов эксплуатационных скважин через q_{cp} , будем иметь

$$\sum_{i=1}^n m_i q_i = q_{cp} \sum_{i=1}^n m_i.$$

Тогда ограничение (6) примет вид

$$q_{cp} \geq \frac{mh}{T \sum_{i=1}^n m_i} \kappa(t). \quad (7)$$

Нетрудно догадаться, что для установления знакоопределенности функции достаточны знакоопределенности функции невязки и достаточно вместо (7) выполнения соотношения

$$q_{cp} = \frac{mh}{T \sum_{i=1}^n m_i} \kappa(t). \quad (8)$$

Изучение характера этой зависимости в некоторых случаях представляет большой практический интерес. Постоянные T, m, h на характер этой зависимости не влияют, что видно из (6), поэтому нетрудно догадаться, что, не нарушая общности, его можно изучать на конкретном примере.

Пусть пласт с вышеуказанными гидродинамическими свойствами разбурен двумя батареями эксплуатационных и одной батареей нагнетательных скважин. Все батареи кольцевые и начало осей полярных координат совпадает с центром этих батарей. Не нарушая общности задачи, расстояния между скважинами и батареями будем считать равными Δh . Учитывая эти условия, рассмотрим следующий пример:

$$R_3 = 5000 \text{ м}, R_2 = R_3 - \Delta h, R_1 = R_3 - 2\Delta h, h = 10 \text{ м}, m = 0,2, \delta_1 = 30 \text{ м}, \delta_2 = 20 \text{ м}.$$

Здесь R_3 —радиус батареи нагнетательных, а R_1, R_2 эксплуатационных скважин. Величина δ_1 является расстоянием между начальным положением контура нефтеносности и батареей нагнетательных, а δ_2 между конечным положением контура нефтеносности и ближайшей батареей эксплуатационных скважин.

Для этого примера формула (8) будет иметь следующий вид:

$$q_{cp} = \frac{mh}{T \sum_{i=1}^n m_i} \kappa(t), \quad (9)$$

где

$$k(t) = \frac{4\pi r^2(t) \ln \frac{r_0}{r_1}}{1 - \left[\frac{R_2}{r(t)} \right]^{m_1} + \frac{1 - \left[\frac{r(t)}{R_3} \right]^{m_2}}{1 + \left[\frac{R_2}{r(t)} \right]^{m_1} + \frac{1 - \left[\frac{r(t)}{R_3} \right]^{m_3}}{1 + \left[\frac{R_2}{r(t)} \right]^{m_1}}}; \quad m_i = \exp \left[\frac{2\pi R_i}{\Delta h} \right].$$

$i = 1, 2, 3$

Если скорость движения контура нефтеносности обозначим через $v = \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{км}}{\text{лет}}$, то время T , за которое ВНК продвигается от своего начального положения до конечного, будет вычисляться по формуле:

$$T = N \cdot \frac{\Delta h - \delta_1 - \delta_2}{1000 \text{ м}} \text{ лет}, \quad (10)$$

где N —число лет, за которое контур нефтеносности проходит расстояние 1 км.

Значения $q_{\text{ср}}$, вычисленные для некоторых величин $r(t)$ и Δh по формулам (9), (10) при $N=10$, $N=18$, приведены в таблице. Из этой таблицы видно, что при одних и тех же значениях $r(t)$ чем меньше шаг сетки Δh , тем меньше значения $q_{\text{ср}}$. Кроме того, до определенного момента с удалением контура нефтеносности от своего первоначального положения $q_{\text{ср}}$ убывает, а затем начинает возрастать. Следовательно, $q_{\text{ср}}$ наибольшие значения получает на концах интервалов изменения $r(t)$.

$q_{\text{ср}} \frac{\text{м}^3}{\text{сутки}}$	$\Delta h = 500 \text{ м}$		$\Delta h = 400 \text{ м}$		$\Delta h = 300 \text{ м}$		$\Delta h = 200 \text{ м}$		$\Delta h = 100 \text{ м}$	
	$N=10$	$N=18$	$N=10$	$N=18$	$N=10$	$N=18$	$N=10$	$N=18$	$N=10$	$N=18$
$r(t) \text{ м}$										
4980	246,1	136,6	188,3	104,6	136,5	75,8	88,3	49,1	44,1	24,5
4970	221,6	123,1	170,2	94,5	123,8	68,7	79,6	44,2	38,8	21,5
4950	190,8	106,0	146,5	81,4	106,3	59,0	69,1	38,4	34,7	19,3
4930	174,2	96,8	133,5	64,2	95,4	52,9	63,6	35,3	35,1	19,5
4900	163,1	90,6	124,6	79,2	90,8	50,5	60,6	33,7		
4850	155,6	86,5	119,4	66,3	86,3	48,9	66,6	37,0		
4820	154,5	85,8	119,5	66,4	94,1	52,3	83,6	46,5		
4770	154,7	85,9	122,3	67,9	101,1	56,1				
4720	157,1	87,2	129,6	71,9	132,4	73,3				
4670	163,2	90,6	146,7	81,5						
4620	177,9	98,8	183,7	102,1						
4570	197,4	109,6								
4520	236,5	131,4								

Из таблицы легко усмотреть, что с увеличением N при одних и тех же значениях Δh и $r(t)$ величина $q_{\text{ср}}$ убывает. Все указанные закономерности соответствуют уменьшению (при необходимости) значений $q_{\text{ср}}$ с помощью уменьшения скорости движения ВНК в начальных и конечных моментах времени. Этот результат весьма важен при решении задачи управления движением ВНК для месторождений, когда дебиты эксплуатационных скважин не удовлетворяют соотношению (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Изв. Казанского филиала АН СССР, серия физ.-матем. и техн. наук, вып. 6, 1955.
2. Азимов Б. А., Рагимов Ш. М., Гаджибалаев Г. Ш. Применение математических методов и ЭВМ к решению некоторых задач разработки нефтегазовых месторождений. Баку, 1969.
3. Черный И. А. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, 1948.
4. Гасс С. Линейное программирование. Физматгиз, 1961.

АзНИПИнефть

Поступило 16. VII 197

Б. Э. Азимов, Г. Э. Маммедов, И. Т. Еминов

Даирэви лајда нефт-су сэрхэдди һэрэкэтинин идарэ
едилмэси мәсэлэсинэ ријази програмлашдырма үсулларынын
тэтбиг олунмасына даир

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда даирэви лајда гујуларын һәмәви батарејалар шәк-
линдә јерләшдији һал үчүн вә нефт-су сэрхэдди һэрэкэтинин идарэ
олунмасы мәсэлэсини ријази програмлашдырма үсуллары тэтбиг
олуна биләчәк шәклә кәтирмәк үчүн алынмыш бәрабәрсизлик араш-
дырылмышдыр. Гујуларын һасилаты үзәринә гојулан бу мәһдудийјәт
конкрет мисал үзәриндә тәдгиг едилмишдир.

УДК 539.3

Ю. А. АМЕНЗАДЕ, О. Л. БУБУТЕЙШВИЛИ

ДЕЙСТВИЕ ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ОСЛАБЛЕННУЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

В данной статье рассматривается задача о вдавливании жесткого штампа в упругую полуплоскость с произвольно расположенным эллиптическим отверстием, когда между полуплоскостью и штампом имеет место полное сцепление; случай кругового отверстия рассмотрен в [1].

Границу полуплоскости, находящуюся вне штампа, обозначим L_0 , под штампом — L_1 , аффикс центра эллипса $z_0 = x_0 - iy_0$, контур эллипса — L_1 , угол наклона большей оси к границе L_0 обозначим α , внутренность эллипса — S_1 , полуплоскость с вырезанным отверстием — S_0 (рис. 1). Возьмем функцию, отображающую внешность эллипса на внешность круга $|\zeta| = 1$, в виде (рис. 2)

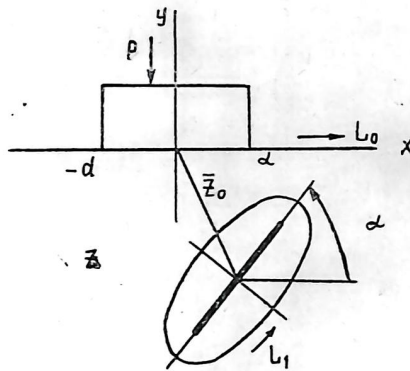


Рис. 1

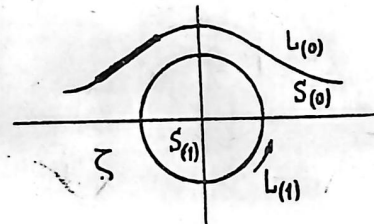


Рис. 2

$$z = \omega(\zeta) = \bar{z}_0 + \frac{c}{2} e^{i\alpha} \left(\rho \zeta + \frac{1}{\rho \zeta} \right) \quad (1)$$

$$\left(c = \sqrt{a^2 - b^2}, \rho = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right).$$

Функция, обратная (1),

$$\zeta = \chi(z) = (z - \bar{z}_0 + \sqrt{(z - \bar{z}_0)^2 - c^2 e^{2i\alpha}}) / \rho c e^{i\alpha}. \quad (2)$$

Граничное условие на L_1 имеет вид [2]

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \frac{\sigma^2}{\omega'(\sigma)} [\omega(\sigma)\Phi'(\sigma) + \omega'(\sigma)\Psi(\sigma)] = 0. \quad (3)$$

Разложим функцию $\Phi(\sigma)$ на L_1 в ряд Фурье:

$$\Phi^*(t) = \Phi(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sigma^n. \quad (4)$$

Введено обозначение $\Phi(\zeta) = \Phi(\chi(z)) = \Phi^*(z)$.

Функции, регулярные в области $S_0 + S_1$, будут:

$$\Phi_0^*(z) = \begin{cases} \Phi^*(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\Phi^*(t) dt}{t-z}, & z \in S_0, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\Phi^*(t) dt}{t-z}, & z \in S_1; \end{cases} \quad (5)$$

$$\Psi_0^*(z) = \begin{cases} \Phi^*(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\Phi^*(t) dt}{t-z}, & z \in S_0, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\Psi^*(t) dt}{t-z}, & z \in S_1. \end{cases} \quad (6)$$

Согласно отображающей функции (1) имеем

$$\frac{dt}{t-z} = \frac{(\sigma^2 \rho^2 - 1) d\sigma}{\rho^2 \sigma (\sigma - \zeta) (\sigma - \rho^{-2} \zeta^{-1})} \quad (t \in L_1, \sigma \in L_{(1)}). \quad (7)$$

Подставим (4) и (7) в (5), тогда с учетом того, что подынтегральная функция имеет в плоскости ζ полюса в точках $\sigma = 0$, $\sigma = \zeta$, $\sigma = \rho^{-2} \zeta^{-1}$ и точка ζ лежит вне L_1 , найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \Phi^*(t) \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{L_{(1)}} a_n \sigma^n \frac{(\sigma^2 \rho^2 - 1) d\sigma}{\rho^2 \sigma (\sigma - \zeta) (\sigma - \rho^{-2} \zeta^{-1})} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho^{-2n} - a_{-n}) \zeta^{-n},$$

Следовательно,

$$\Phi_0(\zeta) = \Phi(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho^{-2n} - a_{-n}) \zeta^{-n} \quad (\zeta \in S_{(0)}). \quad (8)$$

Учтем (4) в (3), тогда

$$\Psi^*(t) = \Psi(\sigma) = (\sigma^2 \rho^2 - 1)^{1-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(a_n + \bar{a}_{-n}) e^{2i\alpha} (\rho^2 - \sigma^2) - \left(\frac{2z_0 \rho}{c e^{i\alpha}} \sigma + e^{-2i\alpha} (\sigma^2 + \rho^2) \right) n a_n \right] \sigma^n.$$

Учитывая, что при $n > 0$ точка $\sigma = \rho^{-2} \zeta^{-1}$, при $n < 0$ точка $\sigma = \zeta$, при $n = 0$ точки $\sigma = \zeta$, $\sigma = \rho^{-2} \zeta^{-1}$ являются полюсами, когда $\zeta \in S_{(0)}$, найдем

$$\frac{1!}{2\pi i} \int_{L_1} \Psi^*(t) \frac{dt}{t-z} = H(\zeta). \quad (9)$$

Здесь

$$H(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\zeta).$$

В свою очередь,

$$h_0(\zeta) = (1 - \rho^2 \zeta^2)^{-1} e^{-2i\alpha} (a_0 + \bar{a}_0) (\rho^2 - \rho^{-2}),$$

$$h_n(\zeta) = e^{-2i\alpha} (1 - \rho^2 \zeta^2)^{-1} \left\{ \left[(\rho^4 \zeta^2 - \rho^{-2}) - n \left(\frac{2z_0 \rho e^{i\alpha}}{c} \zeta + (\rho^4 \zeta^2 + \rho^{-2}) \right) \right] \frac{a_n}{\zeta^n \rho^{2n}} + \right.$$

$$\left. + \left[(\rho^2 - \zeta^2) + n \left(\frac{2z_0 \rho e^{i\alpha}}{c} \zeta + (\rho^2 + \zeta^2) \right) \right] \frac{a_{-n}}{\zeta^n} + (\rho^2 - \zeta^2) \frac{\bar{a}_n}{\zeta^n} + \right.$$

$$\left. + (\rho^4 \zeta^2 - \rho^{-2}) \frac{\bar{a}_{-n}}{\zeta^n \rho^{2n}} \right\}, \quad n \geq 1. \quad (11)$$

Тогда в плоскости z будем иметь

$$\Psi_0^*(z) = \Psi^*(z) + H^*(z). \quad (12)$$

Граничные условия для функций $\Phi^*(z)$ и $\Psi^*(z)$ на L_0 :

$$\Phi^*(x) + \overline{\Phi^*(x)} + x \Phi^{*'}(x) + \overline{\Psi^*(x)} = 0, \quad |x| > d; \quad (13)$$

$$x \Phi^*(x) - \overline{\Phi^*(x)} - x \overline{\Phi^{*'}(x)} - \Psi^*(x) = 0, \quad |x| < d. \quad (14)$$

Подставим (8), (9), (10) и (11) в (12) и (13). Тогда с учетом формулы

$$t \bar{\chi}'(t) / \bar{\chi}(t) = - \frac{e^{2i\alpha}}{1 - \rho^2 \bar{\chi}^2} \left[\frac{2z_0 \rho e^{i\alpha}}{c} \bar{\chi} + (\rho^2 \bar{\chi}^2 + 1) e^{-2i\alpha} \right],$$

после ряда преобразований получим:

$$\Phi_0^*(x) + \overline{\Phi_0^*(x)} + x \overline{\Phi_0^{*'}(x)} + \overline{\Psi_0^*(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x) \quad (|x| > d), \quad (15)$$

$$x \Phi_0^*(x) - \overline{\Phi_0^*(x)} - x \overline{\Phi_0^{*'}(x)} - \overline{\Psi_0^*(x)} = x \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x), \quad (|x| < d).$$

Здесь введены обозначения:

$$p_n(x) = (a_n \rho^{-2n} - a_{-n}) \bar{\chi}^{-n}(x); \quad l_0(x) = \frac{e^{2i\alpha}}{1 - \rho^2 \bar{\chi}^2} \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) (a_0 + \bar{a}_0);$$

$$l_n(x) = \frac{e^{2i\alpha}}{\bar{\chi}^n (1 - \bar{\chi}^2 \rho^2)} \left\{ \left[\left(\rho^4 \bar{\chi}^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \left(\frac{4iy_0 \rho e^{-i\alpha}}{c} \bar{\chi} + (\rho^2 e^{-2i\alpha} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \rho^4) \bar{\chi}^2 + e^{-2i\alpha} - \frac{1}{\rho^2} \right) n \right] \frac{\bar{a}_n}{\rho^{2n}} + \left\{ (\rho^2 - \bar{\chi}^2) - \left(\frac{4iy_0 \rho e^{-i\alpha}}{c} \bar{\chi} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\rho^2 e^{-2i\alpha} - 1) \bar{\chi}^2 + e^{-2i\alpha} - \rho^2 \right) n \right\} \frac{\bar{a}_{-n}}{\rho^{2n}} + (\rho^2 - \bar{\chi}^2) a_n + \right.$$

$$\left. + \left(\rho^4 \bar{\chi}^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{a_{-n}}{\rho^{2n}} \right\} + (\bar{a}_n \rho^{-2n} - \bar{a}_{-n}) \bar{\chi}^{-n}, \quad n \geq 1. \quad (16)$$

Здесь и в дальнейшем под $\bar{\chi}(z)$ будем понимать функцию

$$\zeta = \bar{\chi}(z) = [z - z_0 + \sqrt{(z - z_0)^2 - c^2 e^{-2i\alpha}}] / \rho c e^{-i\alpha} \quad z = \omega_1(\zeta) =$$

$$= z_0 + \frac{c}{2} e^{-i\alpha} \left(\rho \zeta + \frac{1}{\rho \zeta} \right). \quad (17)$$

Для функций $\Phi_0^*(z)$ и $\Psi_0^*(z)$ равенства (14) представляют собой основную смешанную задачу, решение которой имеет вид

$$\Phi_0^*(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \left[- \int_{L_0'} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x)}{X_0^+(x) (x - z)} dx + \right.$$

$$\left. + \int_{L_0'} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x)}{X_0^+(x) (x - z)} dx + X_0(z) \frac{ip}{2\pi} \right]. \quad (18)$$

Кроме того,

$$\Psi_0^*(z) = - \Phi_0^*(z) - \overline{\Phi_0^*(\bar{z})} - z \Phi_0^{*'}(z) \quad (y < 0), \quad (19)$$

$$X_0(z) = (z + d)^{-\frac{1}{2} + i\beta} (z - d)^{-\frac{1}{2} - i\beta} \quad \left(\beta = \frac{\ln \chi}{2\pi} \right).$$

Для $X_0(z)$ берем ветвь, для которой $z X_0(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь интегралы, входящие в правую часть (17):

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[- \int_{L_0'} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) dx}{X_0^+(x) (x - z)} + z \int_{L_0'} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) dx}{X_0^+(x) (x - z)} \right] =$$

$$= -J_1(z) + J_2(z). \quad (20)$$

В свою очередь,

$$J_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{1n}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{p_n(x) dx}{X_0^+(x) (x - z)}, \quad (21)$$

где

$$J_{11}(z) = \begin{cases} -\frac{1}{4} (a_1 \rho^{-1} - a_{-1} \rho) c e^{i\alpha} + \frac{p_1(z)}{X_0(z)}, & \text{когда } y > 0, \\ -\frac{1}{4} (a_1 \rho^{-1} - a_{-1} \rho) c e^{i\alpha} & \text{при } y < 0; \end{cases}$$

$$J_{1n}(z) = \begin{cases} \frac{p_n(z)}{X_0(z)}, & \text{когда } y > 0 \\ 0 & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad n > 1.$$

Учитывая $X_0^-(x) = -\frac{1}{x} X_0^+(x)$ и обозначая через L_{01} контур раз-

реза под штампом с положительным обходом, будем иметь

$$J_2(z) = \frac{z+1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) dx}{X_0^+(x) (x - z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{01}} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) dx}{X_0^-(x) (x - z)} = \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z). \quad (22)$$

В свою очередь,

$$J_{2n}(z) = (a_n \rho^{-2n} - a_{-n}) T_{-n}(z), \quad (23)$$

В равенстве (22)

$$T_{-n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\chi^{-n}(x) dx}{X_0(x)(x-z)}.$$

Поступая таким же образом, как в предыдущем случае, найдем

$$I(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} l_n(x) dx}{X_0^+(x)(x-z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} l_n(x) dx}{X_0^-(x)(x-z)} = I_1(z) + I_2(z), \quad (23)$$

где

$$I_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} l_n(x) dx}{X_0^-(x)(x-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} I_{1n}(z);$$

$$I_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} l_n(x) dx}{X_0^+(x)(x-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n}(z).$$

Здесь

$$I_{10}(z) = \begin{cases} e^{2ia} \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) (a_0 + \bar{a}_0) \frac{1}{1 - \rho^2 \bar{\chi}^2(z)}, & \text{когда } y < 0, \\ 0 & \text{если } y > 0; \end{cases}$$

$$I_{11}(z) = \begin{cases} -\frac{1}{4} (a_1 \rho^{-1} - a_{-1} \rho) c e^{ia} + \frac{l_1(z)}{X_0(z)} & \text{в случае } y > 0, \\ -\frac{1}{4} (a_1 \rho^{-1} - a_{-1} \rho) c e^{i\sigma} & \text{при } y > 0; \end{cases} \quad (24)$$

$$I_{1n}(z) = \begin{cases} \frac{l_n(z)}{X_0(z)}, & \text{если } y < 0, \\ 0, & \text{когда } y < 0, \end{cases} \quad n \geq 2;$$

$$I_{20}(z) = -e^{2ia} \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) (a_0 + \bar{a}_0) Q_0(z);$$

$$I_{2n}(z) = -e^{2ia} \left[\left(n \rho^2 e^{-2ia} - (n-1) \rho^4 \right) Q_{-n+2}(z) + \frac{4iy_0 \rho e^{-ia}}{c} n Q_{-n+1}(z) + (n e^{-2ia} - (n+1) \rho^{-2}) Q_{-n}(z) \right] \frac{\bar{a}_n}{\rho^{2n}} -$$

$$- \left[\left(n \rho^2 e^{-2ia} - (n-1) \right) Q_{-n+2}(z) + \frac{4iy_0 \rho e^{-ia}}{c} n Q_{-n+2}(z) + (n e^{-2ia} - (n+1) \rho^2) Q_{-n}(z) \right] \bar{a}_{-n} + (\rho^2 Q_{-n}(z) - Q_{-n+2}(z)) a_n +$$

$$+ (\rho^4 Q_{-n+2}(z) - \rho^{-2} Q_{-n}(z)) \frac{a_{-n}}{\rho^{2n}} - T_{-n}(z) \rho^{-2n} \bar{a}_n + \tilde{T}_{-n}(z) a_{-n}, \quad n \geq 1$$

Введены обозначения:

$$Q_{-n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{dx}{(1 - \chi^2 \rho^2) X_0(x)(x-z) \bar{\chi}^n(x)}, \quad (26)$$

$$\tilde{T}_{-n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{dx}{X_0(x)(x-z) \bar{\chi}^n(x)}.$$

Исходя из формул (19) ÷ (26), получим:

$$\Phi_0^*(z) = \begin{cases} \frac{ip}{2\pi} X_0(z) + [A_0(z) + \tilde{A}_0(z)] (a_0 + \bar{a}_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(B_n(z) + \bar{B}_n(z)) a_n + (C_n(z) + \bar{C}_n(z)) a_{-n} + (D_n(z) + \bar{D}_n(z)) \bar{a}_n + (E_n(z) + \bar{E}_n(z)) \bar{a}_{-n}], & y < 0; \\ \frac{ip}{2\pi} X_0(z) + A_0(z) (a_0 + \bar{a}_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(B_n(z) + F_n(z)) a_n + (C_n(z) + L_n(z)) a_{-n} + D_n(z) a_{-n} + E_n(z) \bar{a}_{-n}], & y > 0. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь

$$A_0(z) = -\left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) e^{2ia} Q_0(z) X_0(z); \quad \tilde{A}_0(z) = \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) e^{2ia} \frac{1}{1 - \rho^2 \bar{\chi}^2};$$

$$\tilde{B}_n = \frac{e^{2ia} (\rho^2 - \bar{\chi}^2)}{(1 - \bar{\chi}^2 \rho^2) \bar{\chi}^n}; \quad \bar{C}_n = \frac{e^{ia} \left(\rho^4 \bar{\chi}^2 - \frac{1}{\rho^2} \right)}{(1 - \bar{\chi}^2 \rho^2) (\rho^2 \bar{\chi})^n};$$

$$F_n = -\frac{1}{(\rho^2 \bar{\chi})^n}; \quad L_n = \frac{1}{\bar{\chi}^n};$$

$$B_n = \left[-(\rho^2 Q_{-n}(z) - Q_{-n+2}(z)) e^{ia} + \frac{1}{\rho^{2n}} T_{-n}(z) \right] X_0(z);$$

$$C_n = - \left\{ \left[\rho^4 Q_{-n+2}(z) - \frac{1}{\rho^2} Q_{-n}(z) \right] \frac{e^{ia}}{\rho^{2n}} + T_{-n}(z) \right\} X_0(z);$$

$$D_n = \left\{ (n-1) (\rho^2 e^{-2ia} - \rho^4) Q_{-n+2}(z) + \frac{4iy_0 \rho e^{-ia}}{c} n Q_{-n+1}(z) + (n+1) \left(e^{-2ia} - \frac{1}{\rho^2} \right) Q_{-n}(z) \right\} \frac{e^{ia}}{\rho^{2n}} X_0(z);$$

$$\bar{D}_n = \frac{e^{2ia}}{(1 - \bar{\chi}^2 \rho^2) (\rho^2 \bar{\chi})^n} \left[(n-1) (\rho^2 e^{-2ia} - \rho^4) \bar{\chi}^2 + \frac{4iy_0 \rho e^{-ia}}{c} n \bar{\chi} + (n+1) \left(e^{-2ia} - \frac{1}{\rho^2} \right) \right];$$

$$\bar{E}_n(z) = -\frac{e^{2ia}}{(1 - \bar{\chi}^2 \rho^2) \bar{\chi}^n} \left[(n-1) (\rho^2 e^{-2ia} - 1) \bar{\chi}^2 + \frac{4iy_0 \rho e^{-ia}}{c} n \bar{\chi} + (n+1) (e^{-2ia} - \rho^2) \right];$$

$$E_n = \left\{ (n-1) (\rho^2 e^{-2ia} - 1) Q_{-n+2}(z) + \frac{4iy_0 \rho e^{-ia}}{c} n Q_{-n+1}(z) + (n+1) (e^{-2ia} - \rho^2) Q_{-n}(z) \right\} e^{2ia} X_0(z).$$

Условию (3) на L_1 придадим вид

$$\Phi(\chi) + \bar{\Phi}(\bar{\chi}) - \frac{2\rho \bar{\chi}^2}{c e^{-ia} (\rho^2 - \chi^2)} \left[\left(\varepsilon_0 + \frac{c}{2} e^{-ia} \left(\frac{\rho}{\chi} + \frac{\chi}{\rho} \right) \right) \Phi'(\chi) + \frac{c}{2} e^{ia} \left(\rho - \frac{1}{\rho \chi^2} \right) \Psi(\chi) \right] = 0.$$

Учитывая (8) ÷ (11) и (18), найдем уравнение для функции $\Phi_0(\chi)$. Умножим полученное уравнение на ядро $\frac{1}{2\pi i} \chi^m d\chi (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, проинтегрируем по L_1 и L_2 (L_2 — эллипс, симметричный эллипсу L_1 относительно L_0). Тогда, учитывая (27), получим две бесконечные системы относительно коэффициентов $a_n, a_{-n}, \bar{a}_n, \bar{a}_{-n}$:

$$\begin{aligned} \rho^2 \bar{P}_{-(m+2)} - \bar{P}_{-(m+4)} - (m+2) \left[(\rho^2 e^{2i\alpha} - 1) P_{m+2} - \frac{4iy_0 e^{i\alpha}}{c} P_{m+1} + \right. \\ \left. + (e^{2i\alpha} - \rho^2) P_m \right] - \rho^2 e^{2i\alpha} \bar{Q}_{m+2} + e^{2i\alpha} \bar{Q}_m = \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) (m+2) \left[\frac{a_{m+1}}{\rho^{2(m+1)}} - \right. \\ \left. - \frac{a_{m+3}}{\rho^{2(m+2)}} \right] + \rho^2 \bar{a}_{m+1} - \bar{a}_{m+3} + \frac{1}{\rho^{2(m+1)}} \bar{a}_{-(m+3)} - \frac{1}{\rho^{2(m+2)}} \bar{a}_{-(m+1)}, \quad m \geq 0; \\ \rho^2 \bar{P}_{m-2} - \bar{P}_{m-4} + (m-2) \left[(\rho^2 e^{2i\alpha} - 1) P_{-m+2} - \frac{4iy_0 e^{i\alpha}}{c} P_{-m+1} + \right. \\ \left. + (e^{2i\alpha} - \rho^2) P_{-m} \right] - \rho^2 e^{2i\alpha} \bar{Q}_{-m+2} + e^{2i\alpha} \bar{Q}_{-m} = (a_0 + \bar{a}_0) \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \delta_{m,1} - \\ - \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) (2-m) \frac{a_{(3-m)}}{\rho^{2(2-m)}} + \frac{\bar{a}_{(m-1)}}{\rho^{2(m-2)}} - \bar{a}_{(3-m)} - \frac{\bar{a}_{(m-3)}}{\rho^{2(m-3)}} + \frac{\bar{a}_{-(3-m)}}{\rho^{2(1-m)}} - \\ - \rho^2 \bar{a}_{-(m-1)} + \bar{a}_{-(m-3)}, \quad m > 0. \end{aligned} \quad (28)$$

В этих системах индексы, заключенные в скобки, положительны. Введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_m = \frac{ip}{2\pi} Y_m + [A_{0,m} + A_{0,m}^*] a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(B_{n,m} + B_{n,m}^*) a_n + \\ + (C_{n,m} + C_{n,m}^*) a_{-n} + (D_{n,m} + D_{n,m}^*) \bar{a}_n + (E_{n,m} + E_{n,m}^*) \bar{a}_{-n}]; \\ Q_m = \frac{ip}{2\pi} \bar{Y}_m + A_{0,m} (a_0 + \bar{a}_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\bar{B}_{n,m} - \frac{1}{\rho^{2n}} W_{-n,m} \right) a_n + \right. \\ \left. + (\bar{C}_{n,m} + W_{-n,m}) a_{-n} + \bar{D}_{n,m} a_{-n} + \bar{E}_{n,m} \bar{a}_{-n} \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{0,m} = - \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) R_{0,m}; \quad A_{0,m}^* = \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) V_{0,m}; \\ B_{n,m}^* = e^{2i\alpha} (\rho^2 V_{-n,m} - V_{-n+2,m}); \quad C_{n,m}^* = \frac{e^{2i\alpha}}{\rho^{2n}} (\rho^4 V_{-n+2,m} - \rho^{-2} V_{-n,m}); \\ D_{n,m}^* = \frac{e^{2i\alpha}}{\rho^{2n}} \left[(n-1) (\rho^2 e^{-2i\alpha} - \rho^4) V_{-n+2,m} + \frac{4iy_0 e^{-i\alpha}}{c} n V_{-n+1,m} + \right. \\ \left. + (n+1) \left(e^{-2i\alpha} - \frac{1}{\rho^2} \right) V_{-n,m} \right]; \\ B_{n,m} = \frac{1}{\rho^{2n}} S_{-n,m} - (\rho^2 R_{-n,m} - R_{-n+2,m}) e^{2i\alpha}; \\ C_{n,m} = S_{-n,m} - \left(\rho^4 R_{-n+2,m} - \frac{1}{\rho^2} R_{-n,m} \right) \frac{1}{\rho^{2n}}; \\ D_{n,m} = - \frac{e^{2i\alpha}}{\rho^{2n}} \left[(n-1) (\rho^2 e^{-2i\alpha} - \rho^4) R_{-n+2,m} + \frac{4iy_0 e^{-i\alpha}}{c} n R_{-n+1,m} + \right. \\ \left. + (n+1) \left(e^{-2i\alpha} - \frac{1}{\rho^2} \right) R_{-n,m} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{n,m} = e^{2i\alpha} \left[(n-1) (\rho^2 e^{-2i\alpha} - 1) R_{-n+2,m} + \frac{4iy_0 e^{-i\alpha}}{c} n R_{-n+1,m} + \right. \\ \left. + (n+1) (e^{-2i\alpha} - \rho^2) R_{-n,m} \right]; \\ E_{n,m}^* = - e^{2i\alpha} \left[(n-1) (\rho^2 e^{-2i\alpha} - 1) V_{-n+2,m} + \frac{4iy_0 e^{-i\alpha}}{c} n V_{-n+1,m} + \right. \\ \left. + (n+1) (e^{-2i\alpha} - \rho^2) V_{-n,m} \right]. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения для $\bar{B}_{n,m}, \bar{C}_{n,m}, \bar{D}_{n,m}, \bar{E}_{n,m}$ можно получить, применяя знак $\sim$, например,

$$\bar{B}_{n,m} = \rho^2 \bar{S}_{-n,m} + (\rho^2 \bar{R}_{-n,m} - \bar{R}_{-n+2,m}) \text{ и т. д.}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} R_{n,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} X_0(t) \chi^m(t) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{01}} \frac{\bar{\chi}^n(x) dx}{(1 - \bar{\chi}^2(x) \rho^2) X_0(x) (x-t)} \right] d\chi(t); \\ \bar{R}_{n,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} X_0(t) \bar{\chi}^m(t) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{01}} \frac{\chi^n(x) dx}{(1 - \bar{\chi}^2 \rho^2) X_0(x) (x-t)} \right] d\bar{\chi}(t); \\ S_{n,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} X_0(t) \chi^m(t) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{01}} \frac{\chi^n(x) dx}{X_0(x) (x-t)} \right] d\chi(t); \\ \bar{S}_{n,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} X_0(t) \bar{\chi}^m(t) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{01}} \frac{\chi^n(x) dx}{X_0(x) (x-t)} \right] d\bar{\chi}(t); \\ V_{n,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\chi^m(t) \bar{\chi}^n(t)}{1 - \bar{\chi}^2 \rho^2} d\chi(t); \quad Y_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} X_0(t) \chi^m(t) d\chi(t); \\ \bar{Y}_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} X_0(t) \bar{\chi}^m(t) d\bar{\chi}(t); \quad W_{n,m} = V_{n,m} - \rho^2 V_{n+2,m}. \end{aligned}$$

В зависимости от требуемой точности укачиваются бесконечные системы (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Араманович И. Г., Фотиева Н. Н., Лыткин В. А. Вдавливание жесткого штампа в полуплоскость с круговым отверстием. Контактные задачи и их инженерные приложения. Доклады конференции. НИИМАШ, М., 1969.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1968.
3. Шерман Д. И. ПММ, т. 15, вып. 3, 1951.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступило 12. VII 1971

Л. Э. Эмэнзаде, О. Л. Бубутејшвили

Эллиптик дешиклэ зәифләдилмиш јарыммүстәвијә сәрт штампын тә'сири

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә штампы ихтијари гәјдада јерләшмиш эллиптик дешији олан јарыммүстәвијә тә'сири мәсәләсини, һәлли гәјдасы верилмишдир. Мәсәлә сонсуз чәбри тәһлилкләр системинә кәтирилмишдир.

УДК 539

А. М. МАГЕРРАМОВ

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФИНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим граничную задачу:

$$By' + Q(x)y = \lambda y, \quad (1)$$

$$y_1(0) = 0, \quad (2)$$

где

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а $p(x)$, $q(x)$ — вещественные функции, определенные на $(0, \infty)$. В работе [3] доказано, что если $p(x)$ и $q(x)$ — достаточно гладкие функции, $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$ при $x > 1$, при $x \rightarrow 1 - 0$ имеют место асимптотические формулы

$$q(x) \sim C_{\mu_1}(1-x)^{\mu_1}, p(x) \sim C_{\mu_2}(1-x)^{\mu_2}$$

(здесь мы рассматриваем случай, когда $\mu_1 < \mu_2$; случай $\mu_1 = \mu_2$, $\mu_1 < \mu_2$ рассматривается аналогично), то резольвента граничной задачи (1) — (2) голоморфна в верхней полуплоскости и имеет счетное число $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ полюса в нижней полуплоскости с предельной точкой в бесконечности, причем

$$\lambda_n = n\pi + \frac{1}{2i} \ln \left[\frac{(2\pi i n)^{\mu_1+1}}{C_{\mu_1} \Gamma(\mu_1+1)} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \left(\frac{\ln n}{n} \right)^k$$

Цель настоящей статьи заключается в следующем: по данной последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел восстановить $p(x)$ и $q(x)$. Аналогичная задача для уравнения Штурма — Лиувилля несколько иным методом решена А. Г. Раммом [2]. При вещественных λ

$$S(\lambda) = f_1(0, \lambda) (\overline{f_1(0, \lambda)})^{-1},$$

причем $f_1(0, \lambda)$ как целая функция с заданной на бесконечности асимптотикой определена при помощи своих нулей.

Теорема. Для того, чтобы некоторая мероморфная функция $S(\lambda)$ была S -функцией некоторой граничной задачи типа (1) — (2) с суммируемым финитным потенциалом $Q(x)$, т. е. $Q(x) \equiv 0$ при $x > 1$, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

а) $S^{-1}(\lambda) = \overline{S(\lambda)}$, $S(0) = 1$ при действительных λ ;

* Условие $S = 1$ можно и не предполагать.

б) функция $S(\lambda)$ в верхней полуплоскости и на вещественной оси не имеет нулей,

$$f_1(0, \lambda) = e^{i\lambda} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=-N}^N \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right), \quad (2')$$

где $\{\lambda_n\}$ — нули функции $S(\lambda)$ на нижней полуплоскости. Лемма 1. Пусть $S(\lambda)$ является S -функцией граничной задачи типа (1) — (2) и удовлетворяет следующим условиям:

$$1. \overline{S(\lambda)} = S^{-1}(\lambda);$$

$$2. \{1 - S(\lambda)\} \in L^2(-\infty, \infty);$$

$$3. |1 - S(\lambda)| \leq e^{2|\operatorname{Im} \lambda|}.$$

Тогда потенциальная функция $Q(x)$ задачи (1) — (2) финитна, т. е. $Q(x) \equiv 0$ при $x > 1$.

Доказательство. Известно [1], что

$$F(x, \lambda) = f(x, \lambda) + \int_x^{\infty} A(x, y) f(t, \lambda) dt,$$

где $f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda x}$, $A(x, t)$ — матрица-функция, удовлетворяющая условию

$$BA(x, x) - A(x, x)B = Q(x)$$

и интегральному уравнению

$$F(x, t) + A(x, t) + \int_x^{\infty} A(x, y) F(y, t) dy = 0. \quad (3)$$

Причем

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda)) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1, i) e^{-i\lambda t} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \overline{S(-\lambda)}) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (1, -i) e^{i\lambda t} d\lambda.$$

По теореме типа Палея — Винера

$$F(t) = 0 \text{ при } t > 2.$$

Тогда из уравнения (3) получаем, что

$$A(x, t) = 0 \text{ при } x + t > 2$$

и

$$A(x, x) = 0 \text{ при } x > 1.$$

Лемма 2. Для того, чтобы последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ была последовательностью собственных значений граничной задачи (1) — (2) с финитным потенциалом $Q(x)$, достаточно, чтобы числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ лежали в нижней полуплоскости и имели асимптотику при $n \rightarrow \infty$:

$$\lambda_n \sim n\pi + \frac{1}{2i} \ln \left[\frac{(2\pi i)^{\mu_1+1}}{C_{\mu_1} \Gamma(\mu_1+1)} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \left(\frac{\ln n}{n} \right)^k$$

Доказательство. Определим $f_1(0, \lambda)$ по формуле (2') и обозначим $f_1(0, \lambda)$ через $f_2(0, \lambda)$ при вещественных λ . Тогда

$$f_2(0, \lambda) = e^{-i\lambda} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right).$$

Определим функцию

$$S(\lambda) = f_1(0, \lambda) (\overline{f_1(0, \lambda)})^{-1}.$$

Очевидно, что при вещественных λ

$$S(\lambda) = S^{-1}(\lambda).$$

Пусть $p_0(t) = 0$ и $q_0(x) = 0$ при $x > 1$ и при $x \rightarrow 1 - \infty = 0$ имеют соответственно асимптотику

$$p_0(x) \approx C_{\mu_{10}} (1-x)^{\mu_{10}}, \quad q_0(x) \approx C_{\mu_{20}} (1-x)^{\mu_{20}}.$$

Рассмотрим граничную задачу:

$$By' + Q(x)y = \lambda y, \quad y_1(0) = 0,$$

где

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} p_0(x) & q_0(x) \\ q_0(x) & -p_0(x) \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$f_{01}(x, \lambda) = 1 + \frac{e^{2i\lambda}}{(2i\lambda)^{\mu_{10}+1}} C_{\mu_{10}} \Gamma(\mu_{10} + 1) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\} - \\ - i C_{\mu_{20}} \Gamma(\mu_{20} + 1) \frac{e^{2i\lambda}}{(2i\lambda)^{\mu_{20}+1}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\}.$$

Установим связь между $f_1(\lambda)$ и $f_{01}(\lambda)$:

$$f_1(\lambda) = f_{01}(\lambda) \frac{f_1(\lambda)}{f_{01}(\lambda)} = f_{01}(\lambda) \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)} = \\ = f_{01}(\lambda) \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_n^0}{\lambda_n} \frac{\lambda_n - \lambda}{\lambda_n^0 - \lambda} = f_{01}(\lambda) \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_n^0}{\lambda} \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{\lambda_n^0 - \lambda}.$$

Так как

$$\lambda_n - \lambda_n^0 = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\lambda_n - \bar{\lambda}_n = O(\ln n),$$

то легко можно показать сходимость последнего бесконечного произведения. Таким образом, получим

$$f_1(\lambda) \approx f_{01}(\lambda) \left\{ 1 + O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) \right\},$$

что и завершает доказательство леммы.

В заключение, пользуясь случаем, выражаю благодарность проф. М. Г. Гасымову за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М. Г. Тр. Московского матем. об-ва, 19, 1968.
2. Рамм А. Г. „ДАН СССР“, т. 157, 1964, № 5.
3. Магеррамов А. М. Тр. по исследованиям дифференциальных уравнений Баку, 1971.

Институт математики и механики

Поступило 12.VII 1971

Г. В. ГОНЧАРОВА

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОБЛАСТИ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

Уравнения эллиптического типа в многомерной области, граница которой имеет особые невырождающиеся конические точки, исследована В. А. Кондратьевым [1]. В данной статье будем рассматривать граничную задачу для уравнения Ламе теории упругости в двумерной области с угловыми точками. Общие результаты, полученные в [1], в этом случае можно уточнить.

Рассмотрим систему Ламе (в матричной записи):

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \partial' u = -f,$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \partial = \begin{pmatrix} \partial / \partial x_1 \\ \partial / \partial x_2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Или } A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u = -f, \quad \text{где } A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \partial \partial',$$

Пусть D — плоская ограниченная область, граница которой ∂D содержит конечное количество угловых точек $a_1, \dots, a_m$, соединенных дугами класса C^{p+3} (p — целое). Будем рассматривать также и неограниченные области D такие, что $\bar{D} \neq R^2$, и после инверсии относительно круга с центром в точке $a \in R^2 \setminus \bar{D}$ они превращаются в ограниченные области предыдущего типа.

Пусть для любой точки $x \in R^2$ $r(x)$ есть расстояние точки x до ближайшей из точек $a_1, \dots, a_m$. Следуя [1], введем пространство $B_{q,2}^q(D)$ ($q \leq p+2$, q — целое число), состоящее из функций, определенных в $\bar{D}$, имеющих в D обобщенные производные до порядка q с нормой

$$\|u\|_{B_{q,2}^q(D)}^2 = \int_D [r(x)]^{2q-1} \sum_{k_1+k_2 \leq q} [r(x)]^{2(k_1+k_2)} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2} u(x)}{u x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right|^2 dx.$$

Введем также пространство $B_{q,2}^{q-\frac{1}{2}}(\partial D)$, определяемое следующим образом: функция $v \in B_{q,2}^{q-\frac{1}{2}}(\partial D)$ определена на ∂D и продолжима (конечно неоднозначно) до функции $u \in B_{q,2}^q(D)$, причем

$$\|v\|_{B_{q,2}^{q-\frac{1}{2}}(\partial D)} = \inf_u \|u\|_{B_{q,2}^q(D)}.$$

Здесь $\inf$ берется по всем функциям $u \in B_{\sigma,2}^p(L)$ со следом на ∂D , равным τ . Эти нормы очевидным образом переносятся на матричные функции.

Сформулируем без доказательства две леммы [1]. Пусть Γ — дуга класса C^{p+3} и $x_2 = 0$ есть касательная к Γ в точке $O \in \Gamma$. $\tilde{\Gamma}$ есть дуга с уравнением $x_2 = \psi(x_1) \in C^{p+3}$, совпадающая с Γ при $|x_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, совпадающая с прямой $x_2 = 0$ при $|x_1| \geq \varepsilon$ и удовлетворяющая оценкам: $\psi(x_1) = O(\varepsilon)$, $\left(\frac{d}{dx_1}\right)^k \psi(x_1) = O(\varepsilon^{1-k})$. Область $D: x_2 > \psi(x_1)$.

Лемма 1. Пусть дуга Γ удовлетворяет перечисленным требованиям. Тогда можно указать столь малое ε , что, продолжая дугу Γ указанным выше способом, задача

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = -f \quad (bD),$$

$$u = g \quad (b\partial D)$$

($f \in L_2^p(D)$, $g \in L_2^{p+3/2}(\partial D)$) имеет решение $u \in L_2^{p+2}(D)$ ($u|_{\partial D} = L_2^{p+3/2}(\partial D)$), притом единственное. Справедлива оценка

$$\|u\|_{L_2^{p+2}(D)} + \|u\|_{L_2^{p+3/2}(\partial D)} \leq C(\|f\|_{L_2^p(D)} + \|g\|_{L_2^{p+3/2}(\partial D)}).$$

Пусть Γ_1, Γ_2 — две дуги, исходящие из точки O , образующие угол γ . Построим дуги с уравнениями (в полярных координатах):

$$\tilde{\Gamma}_1: \varphi = \psi_1(r),$$

$$\tilde{\Gamma}_2: \varphi = \psi_2(r), \quad 0 \leq r < \infty.$$

При $0 \leq r \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\tilde{\Gamma}_1$ совпадает с Γ_1 , $\tilde{\Gamma}_2$ с Γ_2 ; при $r \geq \varepsilon$ $\tilde{\Gamma}$ идет по лучу

$\varphi = 0$, $\tilde{\Gamma}_2$ — по лучу $\varphi = \gamma$. Кроме того, предполагается, что ψ_1, ψ_2 — $\gamma = O(\varepsilon)$, $\left(\frac{d}{dr}\right)^k \psi_1(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^k \psi_2(r) = O(\varepsilon^{1-k})$. Обозначим через D область, заключенную между $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$ („слегка попорченный“ угол).

Лемма 2. Пусть даны две дуги Γ_1, Γ_2 , исходящие из точек O и образующие угол γ ($0 < \gamma < 2\pi$) класса C^{p+3} , тогда можно указать такое $\varepsilon > 0$, что, продолжая по вышеуказанному части Γ_1, Γ_2 , лежащие в шаре $|x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, до полубесконечных дуг $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2$, обозначая

через D область между $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2$, задача

$$Au = -f \quad (bD),$$

$$u = g \quad (b\partial D)$$

(при $f \in B_{\sigma,2}^p(D)$, $g \in B_{\sigma,2}^{p+3/2}(\partial D)$) имеет единственное решение из $B_{\sigma,2}^{p+2}(D)$ — u , для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{B_{\sigma,2}^{p+2}(D)} + \|u\|_{B_{\sigma,2}^{p+3/2}(\partial D)} \leq C(\|f\|_{B_{\sigma,2}^p(D)} + \|g\|_{B_{\sigma,2}^{p+3/2}(\partial D)}).$$

Аналогичная лемма справедлива и при задании на ∂D напряжений, в этом случае следует предполагать, что $g \in B_{\sigma+1,2}^{p+1/2}(\partial D)$. Лемма 1 легко доказывается преобразованием Фурье по x в случае полуплоскости. В случае точного угла величины γ лемма 2 доказывается преоб-

разованием Римана—Меллина по радиусу-вектору. При небольшом искажении области разрешимость сохраняется.

Теорема. Пусть L — область конечного диаметра, граница которой ∂D состоит из конечного количества дуг класса C^{p+3} (p — натуральное число); при этом углы, составляемые дугами, имеют общий конец, отличный от нуля и 2π .

Пусть далее $f \in B_{\sigma+2,2}^p(D)$, $g \in B_{\sigma,2}^{p+3/2}(\partial D)$, тогда задача

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = -f(x) \quad (x \in D), \quad (1)$$

$$u = g(x) \quad (x \in \partial D). \quad (2)$$

имеет решение $u \in B_{\sigma,2}^{p+2}(D)$. Существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|u\|_{B_{\sigma,2}^{p+2}(D)} \leq C(\|f\|_{B_{\sigma+2,2}^p(D)} + \|g\|_{B_{\sigma,2}^{p+3/2}(\partial D)}).$$

Доказательство. Сведем известным приемом нашу задачу к функциональному уравнению типа Фредгольма. Выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и покроем $\bar{D}$ конечным числом кругов радиуса ε . Для определенности будем предполагать, что круги, покрывающие угловые точки, имеют центры в этих угловых точках; круги, покрывающие границу, имеют центры, лежащие на границе. Следовательно, круги с центрами в D не пересекаются с границей ∂D . Пусть $O_1, \dots, O_m$ — эти круги и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ — разложение единицы, подчиненное этому разбиению $\bar{D}_m: \varphi_k \geq 0$, носитель φ_k принадлежит O_k , $\varphi_k \in C^\infty(R^2)$, $\sum_{k=1}^m \varphi_k(x) = 1$ ($x \in \bar{D}$). Пусть $F \in L_2^p(D)$, $GL_2^{p+3/2}(\partial D)$, $F_k = \varphi_k F$, $g_k = \varphi_k g$,

Пусть $O'_1, \dots, O'_m$ — круги радиуса ε_0 с теми же центрами, что $O_1, \dots, O_m$, соответственно. Предполагается, что $\varepsilon < \varepsilon_0 < 2\varepsilon$, и круги O'_k , не имеющие центра в угловой точке, не содержат этих угловых точек. Пусть $\psi_1, \dots, \psi_m$ — функции их $C^\infty(R^2)$ с носителями в $O'_1, \dots, O'_m$, соответственно, и такие, что $\psi_k(x) = 1$, если $x \in O_k$.

Рассмотрим для каждого k вспомогательную задачу. Если O_k имеет центр в D , то обозначим через τ_k решение задачи (из $L_2^{p+2}(R^2)$)

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau_k = -F_k \quad (x \in R^2).$$

Будем писать $\tau_k = R_k \varphi_k F$. Как известно, $\|\tau_k\|_{L_2^{p+2}(R^2)} \leq C\|\varphi_k F\|_{L_2^p(R^2)}$, или

$$\|R_k \varphi_k F\|_{L_2^{p+2}(R^2)} \leq C\|\varphi_k F\|_{L_2^p(R^2)}.$$

При этом $R_k = R: L_2^p(R^2) \rightarrow L_2^{p+2}(R^2)$. Рассматривая R_k как оператор из $L_2^p(R^2)$ в $L_2^p(R^2)$, получим (по теореме вложения) вполне непрерывный оператор. Точно так же $\frac{\partial}{\partial x} R_k: L_2^p(R^2) \rightarrow L_2^p(R^2)$. Тогда $\frac{\partial}{\partial x} R_k: L_2^p(R^2) \rightarrow$

$\rightarrow L_2^p(R^2)$ будет также вполне непрерывным.

Пусть теперь O_k имеет центр на ∂D , но не в угловой точке. Будем предполагать, что ε столь мало, что для полуплоскости применима сформулированная выше лемма 1. Рассмотрим в области D_k задачу:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau_k = -F_k \quad (в D_k),$$

$$\tau_k = g_k \quad (в \partial D_k).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} v_k &= R_k^{(1)} F_k + R_k^{(2)} g_k \quad (\text{в } D_k), \\ A(R_k^{(1)} F_k + R_k^{(2)} g_k) &= -F_k \quad (\text{в } D_k), \\ AR_k^{(1)} F_k &= -F_k, \quad AR_k^{(2)} g_k = 0 \quad (\text{в } D_k), \\ R_k^{(1)} F_k + R_k^{(2)} g_k &= g_k \quad (\text{в } \partial D_k), \text{ т. е.} \\ R_k^{(1)} F_k &= 0 \quad (\text{в } \partial D_k), \\ R_k^{(2)} g_k &= g_k \quad (\text{в } \partial D_k). \end{aligned}$$

При этом

$$|\tau_k|_{L_2^{p+1/2}(\partial D_k)} + |\tau_k|_{L_2^{p+2}(D_k)} \leq C(|g_k|_{L_2^{p+1/2}(\partial D_k)} + |F_k|_{L_2^p(D_k)}).$$

Пусть теперь O_k имеет центр в угловой точке. По лемме 2 задача

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v_k &= -F_k \quad (\text{в } D_k), \\ \tau_k &= g_k \quad (\text{в } \partial D_k), \end{aligned}$$

если $F_k \in B_{\sigma+2,2}^p(D_k)$, $g_k \in B_{\sigma+2,2}^{p+1/2}(\partial D_k)$ имеет единственное решение $\tau_k \in B_{\sigma+2,2}^{p+1/2}(D_k)$, причем

$$|\tau_k|_{B_{\sigma+2,2}^{p+1/2}(\partial D_k)} + |\tau_k|_{B_{\sigma+2,2}^{p+2}(D_k)} \leq C(|g_k|_{B_{\sigma+2,2}^{p+1/2}(\partial D_k)} + |F_k|_{B_{\sigma+2,2}^p(D_k)}).$$

Из-за конечного количества кругов O_k постоянную C можно выбрать одну и ту же для всех O_k .

Имеем:

$$\begin{aligned} \tau_k &= R_k^{(1)} F_k + R_k^{(2)} g_k, \\ AR_k^{(1)} F_k &= -F_k, \quad AR_k^{(2)} g_k = 0 \quad (\text{в } D_k), \\ R_k^{(1)} F_k &= 0, \quad R_k^{(2)} g_k = g_k \quad (\text{в } \partial D_k). \end{aligned}$$

Заметим, что функции τ_k не определены, может быть, во всей области D , но $\psi_k \tau_k$ определено во всем D . Будем искать предварительно решение первоначальной задачи (1), (2) в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k(x) \tau_k(x). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$u(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k(x) \tau_k(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k(x) \varphi_k(x) g(x) = g(x).$$

Таким образом, $g(x) = g(x)$, что и определяет g . Подставим (3) в уравнение (1):

$$\begin{aligned} Au &= \sum_{k=1}^m \psi_k A v_k + \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \tau_k}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m (A \varphi_k) \tau_k \\ &= - \sum_{k=1}^m \psi_k F_k + \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} R_k^{(1)} F_k + \frac{\partial}{\partial x_j} R_k^{(2)} g_k \right] + \\ &\quad + \sum_{k=1}^m A \psi_k (R_k^{(1)} F_k + R_k^{(2)} g_k) \end{aligned}$$

(если O_k есть внутренний для D_m круг, полагаем $R_k^{(2)} = 0$). Но $F_k =$

$$= \varphi_k F = \left(\sum_{k=1}^m \psi_k \varphi_k \right) F = \sum_{k=1}^m \varphi_k F = F.$$

Итак,

$$\begin{aligned} Au &= -F + \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} R_k^{(1)} \varphi_k F + \frac{\partial}{\partial x_j} R_k^{(2)} \varphi_k g \right] + \\ &\quad + \sum_{k=1}^m A \psi_k (R_k^{(1)} \varphi_k F + R_k^{(2)} \varphi_k g). \end{aligned}$$

Обозначим через δ_1 множество тех k , для которых круг O_k лежит внутри D ; через δ_2 — множество тех k , для которых O_k имеет центр на гладкой части границы ∂D ; через δ_3 — множество тех k , для которых O_k имеет центр в угловой точке ∂D . Пространство $B_{\sigma+2,2}^p(D)$ можно снабдить эквивалентной нормой:

$$\begin{aligned} |f|_{B_{\sigma+2,2}^p(D)}^2 &= \sum_{k \in \delta_1} \int_{O_k} \sum_{0 \leq k_1+k_2 \leq p} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{k_2} \varphi_k f \right|^2 dx + \\ &\quad + \sum_{k \in \delta_2} \int_{O_k \cap D} \sum_{0 \leq k_1+k_2 \leq p} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{k_2} \varphi_k f \right|^2 dx + \\ &\quad + \sum_{k \in \delta_3} \int_{O_k \cap D} r^{\sigma-1} \sum_{0 \leq k_1+k_2 \leq p} \left| \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^{k_2} \varphi_k f \right|^2 dr d\varphi, \end{aligned}$$

где r, φ — полярные координаты с полюсом в центре круга O_k . Тогда, предполагая, что $F \in B_{\sigma+2,2}^p(D)$, имеем

$$\psi_k R_k^{(1)} \varphi_k F \in B_{\sigma+2,2}^{p+2}(D), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_k \frac{\partial}{\partial x_j} R_k^{(1)} \varphi_k F \in B_{\sigma+1,2}^{p+1}(D).$$

Запишем схематически результат подстановки u из (3) в формулу (1) в виде

$$-F + K^{(1)} F + K^{(2)} g = -f. \quad (5)$$

В. А. Кондратьевым [1] доказано, что $K^{(1)}$, рассматриваемый как оператор из $B_{\sigma+2,2}^p(D)$ в $B_{\sigma+2,2}^p(D)$, есть вполне непрерывный оператор.

Следовательно, чтобы $u(x)$ было решением задачи (1), (2) достаточно удовлетворение F уравнению

$$F - K^{(1)} F = (f + K^{(2)} g) \in B_{\sigma+2,2}^p(D); \quad (6)$$

$K^{(1)}$ — вполне непрерывный оператор, следовательно, применима теория Фредгольма.

Теперь будет слегка изменена формула (3) и, следовательно, формула (6) так, чтобы вновь полученное уравнение решалось по первой теореме Фредгольма. Заметим, что для каждой угловой точки a границы существует такой круг O_{k_a} радиуса $\varepsilon_1 < \varepsilon$, в котором $K^{(1)} F = 0$ для всякого $F \in B_{\sigma+2,2}^p(D)$, если $x \in D \cap O_{k_a}$. Это означает, что $w = K^{(1)} F \in L_2^p(D)$, если $F \in B_{\sigma+2,2}^p(D)$.

Действительно, $|w|_{B_{\sigma+2,2}^p(D)} < +\infty$,

$$|w|_{B_{\sigma+2,2}^p(D)}^2 = \sum_{k \in \delta_1} \int_{O_k} \sum_{0 \leq k_1+k_2 \leq p} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{k_2} \varphi_k w \right|^2 dx +$$

$$+ \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{O_k \cap D} \sum_{0 \leq k_1 + k_2 \leq p} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{k_2} \varphi_k w \right|^2 dx + \\ + \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{(O_k \cap D) \setminus O_k^*} r^{2s+3} \sum_{0 \leq k_1 + k_2 \leq p} r^{2k_1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^{k_2} \varphi_k w \right|^2 dr d\varphi,$$

Можно показать, что эта норма эквивалентна $\|w\|_{L^p_2}$. Таким образом, оператор $K^{(1)}$ отображает $B_{s+2,2}^p(D) \subset L^p_2(D)$. Так как, очевидно, $L^p_2(D)$ есть подпространство $B_{s+2,2}^p(D)$, то $K^{(1)}$, можно рассмотреть и как оператор из $L^p_2(D)$ в $L^p_2(D)$. $K^{(1)}$, очевидно, есть также вполне непрерывный оператор из $L^p_2(D)$ в $L^p_2(D)$. Отметим, наконец, что пространства $L^p_2(D)$ и $B_{s+2,2}^p(D)$ — Гильбертовы.

Будем рассматривать уравнение Фредгольма

$$F - K^{(1)}F = H$$

и в пространстве $L^p_2(D)$, и в $B_{s+2,2}^p(D)$. Рассмотрим однородное уравнение

$$F - K^{(1)}F = 0.$$

Если единственным решением его является $F = 0$ (bD), то уравнение (6) однозначно разрешимо и

$$\|F\|_{B_{s+2,2}^p(D)} \leq C \|f + K^{(2)}g\|_{B_{s+2,2}^p(D)},$$

но тогда задача (1), (2) имеет решение $u \in B_{s,2}^{p+2}$ и теорема доказана.

Пусть теперь однородное уравнение (7) имеет ненулевые решения. Тогда в $B_{s+2,2}^p(D)$ имеется количество независимых решений уравнения (7): $\psi_1, \dots, \psi_{n_p}$. Так как $\psi_k = K^{(1)}\psi_k \in L^p_2(D)$, то решения уравнения (7) из $B_{s+2,2}^p(D)$ и из $L^p_2(D)$ совпадают. По теореме Фредгольма — Рисса сопряженное для (7) уравнение имеет столько же независимых решений. Очевидно, $L^{p+1}_2(D) \subset L^p_2(D)$, поэтому $n_0 \geq n_1 \geq \dots \geq n_{p-1} \geq 0$.

Рассмотрим еще подпространство пространства $L_2(D) - L_{2,\alpha}(D)$. $L_{2,\alpha}(D)$ состоит из тех функций из $L_2(D)$, которые равны нулю во всех кругах с центром в вершинах угловых точек и радиусом $\alpha > 0$ ($\alpha \leq \varepsilon_1$). Очевидно, $K^{(1)}: L_{2,\alpha}(D) \rightarrow L_{2,\alpha}(D)$. Будем рассматривать уравнение (7) в пространствах $L_{2,\alpha}(D)$. Решения (7) в $L_2(D) - \psi_1, \dots, \psi_{n_p}$ принадлежат, по предыдущему, $L_{2,\varepsilon_1}(D)$ и, следовательно, всем $L_{2,\alpha}(D)$. Поэтому для всех таких α количество линейно независимых решений уравнения (7) одно и то же и равно n_0 .

Лемма 3. Для каждого $f \in L_{2,\alpha}(D)$ ($\alpha \leq \varepsilon_1$) можно подобрать такое $w \in C^\infty(\bar{D})$, что $w|_{\partial D} = 0$ и

$$\int_D \overline{f'(x)} \cdot A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) w(x) dx \neq 0.$$

Доказательство. Пусть

$$\int_D \overline{f'(x)} \cdot f(x) dx = \|f\|_{L_2(D)}^2 = 1.$$

Пусть ω есть функция Соболева: $\omega \in C^\infty(R^2)$, $\omega(x) \geq 0$,

$$\int_{R^2} \omega(x) dx = 1, \quad \omega(x) = 0, \text{ если } |x| \geq 1.$$

Известно, что $f_\tau(x) = \frac{1}{\tau^2} \int_D \omega \left(\frac{x-y}{\tau} \right) f(y) dy$ неограниченно дифференцируема и $\|f - f_\tau\|_{L_2(D)} \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$. Если $\tau \leq \frac{\alpha}{2}$, то $f_\tau \in L_{2,\frac{\alpha}{2}}(D)$. Действительно, если a — угловая точка границы, $x \in D$, $|x-a| \leq \frac{\alpha}{2}$, то $\omega \left(\frac{x-y}{\tau} \right) f(y) = 0$ для всех $y \in D$.

Выберем теперь τ столь малым, чтобы $\|f - f_\tau\|_{L_2(D)} \leq \frac{1}{2} \left(\tau \leq \frac{\alpha}{2} \right)$. Рассмотрим вспомогательную область $D_0 \subset D$, которую построим следующим образом: в окрестности каждого угла a , внутри круга $O_{\frac{\alpha}{2},a}$ построим дугу γ_a , дополняющую остальные части границы ∂D так, что граница ∂D_0 принадлежит классу C^{p+3} . Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varepsilon = -f_\tau(x) \quad (\text{в } D_0) \\ \varepsilon = 0 \quad (\text{в } \partial D_0). \quad (8)$$

Известно, что решение этого уравнения и притом классическое, принадлежащее $C^{p+2}(\bar{D}_0)$, существует (и единственно). Пусть теперь функция $\theta \in C^\infty(R^2)$ и притом

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & (|x-a| \leq \frac{\alpha}{2}), \\ 1 & (|x-a| \geq \alpha), \end{cases}$$

для каждой угловой точки a границы ∂D . Положим $w(x) = \theta(x) \varepsilon(x)$; w рассматриваем в $\bar{D}$, полагая $w(x) = 0$, если $|x-a| \leq \frac{\alpha}{2}$. Очевидно, $w(x) = \varepsilon(x)$, если $|x-a| \geq \alpha$; $w \in C^{p+2}(\bar{D})$. Наконец, $w = 0$, если $x \in \partial D$. Имеем (полагая, что $\bigcup_a O_{\alpha,a}$ есть объединение всех кругов радиуса α с центрами в угловых точках):

$$- \int_D \overline{f'(x)} \cdot A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) w(x) dx = - \int_{D \setminus \bigcup_a O_{\alpha,a}} \overline{f'(x)} \cdot A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \theta(x) \varepsilon(x) dx = \\ = - \int_{D \setminus \bigcup_a O_{\alpha,a}} \overline{f'(x)} A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varepsilon(x) dx = - \int_{D_0} \overline{f'(x)} A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varepsilon(x) dx = \\ = \int_{D_0} \overline{f'(x)} f_\tau(x) dx = \int_{D_0} \overline{f'(x)} [f_\tau(x) - f(x)] dx + \int_{D_0} \overline{f'(x)} f(x) dx = \\ = 1 + b, \text{ где } b = \int_{D_0} \overline{f'(x)} [f_\tau(x) - f(x)] dx.$$

По неравенству Шварца

$$|b| = |(f_\tau - f, f)_{L_2}| \leq \|f_\tau - f\|_{L_2} \|f\|_{L_2} \leq \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $1 + b \geq \frac{1}{2}$ и лемма доказана.

Рассматривая уравнение (7) в пространстве $L_{2,\varepsilon_1}(D)$, обозначим через $\Phi_1, \dots, \Phi_{n_0}$ решения однородного сопряженного уравнения. Так как $L_{2,\varepsilon_1}(D)$ — Гильбертово пространство, то по теореме Рисса, $\Phi_1, \dots, \Phi_{n_0} \in L_{2,\varepsilon_1}(D)$. Если $\Phi_1 - K^{(1)*}\Phi_1 = 0$, то $(\Phi_1 - K^{(1)*}\Phi_1, F)_{L_2} = 0$ при всех $F \in L_2$ и, следовательно, $(g, F - K^{(1)}F)_{L_2} = 0$ при всех F . Обозначим через $w_1 \in C^{p+2}(\bar{D})$, $w_1(x) = 0$ (если $x \in \partial D$ и если $|x - a| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$), такое, что $\int_D \overline{\Phi_1(x)} A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) w_1(x) dx \neq 0$. Обозначим через $v_1(x)$ произвольный столбец из $C^\infty(D)$ такой, что $\int_D \overline{v_1(x)} \psi_1(x) dx \neq 0$. Будем искать $u(x)$ — решение задачи (1), (2) в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k(x) \cdot v_k(x) + w_1(x) \int_D \overline{v_1(y)} F(y) dy.$$

Так как $w_1(x) = 0$ ($x \in \partial D$), то в результате подстановки u в (2) получим старое следствие: $G = g$.

Результат подстановки u в (1) даст

$$-F(x) + K^{(1)}F(x) + \left[A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) w_1(x) \right] \int_D \overline{v_1(y)} F(y) dy = -f(x) - K^{(2)}g.$$

Вместо уравнения (7) получим

$$F - K^{(1)}F - A w_1(F, v_1)_{L_2} = f + K^{(2)}g. \quad (9)$$

Соответствующее однородное уравнение есть

$$F - K^{(1)}F - A w_1(F, v_1)_{L_2} = 0. \quad (10)$$

Пусть ψ есть его решение. Тогда

$$\psi - K^{(1)}\psi - A w_1(\psi, v_1)_{L_2} = 0. \quad (11)$$

Умножив скалярно на Φ_1 , будем иметь

$$(\Phi_1, \psi - K^{(1)}\psi) = 0 \text{ и, следовательно,} \\ (\Phi_1, A w_1(\psi, v_1)_{L_2}) = 0.$$

По лемме 3 $(\Phi_1, A w_1) \neq 0$, следовательно, $(\psi, v_1)_{L_2} = 0$ и из (11) $\psi - K^{(1)}\psi = 0$. Таким образом, все решения уравнения (10) являются также и решениями уравнения (7). ψ_1 — решение уравнения (7) не является решением уравнения (10), так как $A w_1 \neq 0$, $(\psi_1, v_1)_{L_2} \neq 0$ по выбору v_1 ($\psi_1 - K^{(1)}\psi_1 = 0$ по условию). Следовательно, уравнение (10) имеет менее чем n_0 независимых решений (фактически их будет ровно $n_0 - 1$).

Положим теперь

$$K^{(1)}F + A w_1(F, w_1)_{L_2} = K^{(2)}F.$$

Для уравнения $F - K^{(1)}F = 0$ повторим те же рассуждения. После n_0 шагов придем к выражению

$$u = \sum_{k=1}^m \psi_k(x) v_k(x) + w_1(F, v_1)_{L_2} + \dots + w_{n_0}(F, v_{n_0})_{L_2},$$

для которого получим интегральное уравнение

$$F - K_n^{(1)}F = f + K^{(2)}g,$$

разрешимое по первой теореме Фредгольма. Отсюда легко следует доказательство теоремы. Оно разрешимо в $L_{2,\varepsilon_1}(D)$, следовательно, в $L_2^p(D)$ ($n_p \leq n_0 = 0$), а значит и в $B_{\varepsilon+2,2}^p(D)$.

Аналогичная теорема (с учетом известной неоднозначности решения) может быть тем же методом доказана и в случае задания граничных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В. А. Тр. Московского матем. об-ва, т. 16, 1967.
2. Эскин Г. И. УМН, 18, вып. 3, 1963.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступило 15. X 1971

Г. В. Гончарова

Бучаг нөгтөлөри олан областлар үчүн еластикијјет
нэзэријјэсинин мүстэви мäsэлэсинин һәлли

ХҮЛАСЭ

Мәгәлэдә бучаг нөгтөлөринә матрик олан икиөлчүлү областда Ләме тәнкликләри үчүн сәрһәд мәсәлэсинин һәллинин варлығындан бәһс олунур. Фәрз едилир ки, еластики материал областын диаметри сонлу олан һиссәсини тутур. Белә ки, һәмийн һиссәсин сәрһәдләри сонлу сәјда C^{p+3} сифинә мәнsub олан әјриләрдән ибарәтдир (бурада P — натурал әдәддир).

А. В. СПИЦЫН, Г. М. ГАСУМОВ и А. К. АБИЕВ

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБЛУЧЕНИЯ ГЕРМАНИЯ ЭЛЕКТРОНАМИ С ЭНЕРГИЕЙ 1 И 28 Мэв

В работах [1, 2], посвященных результатам облучения германия быстрыми электронами с энергией 28 Мэв, было показано, что при этом наряду с простыми точечными дефектами образуются сложные структурные повреждения типа разупорядоченных областей. Экспериментальные данные настоящей работы, посвященной сравнению результатов облучения германия электронами различной энергии (1 и 28 Мэв), служат дополнительным подтверждением того, что при увеличении энергии электронов до нескольких десятков мегаэлектронвольт в объеме германия возникают качественно новые по своей природе радиационные дефекты.

Элементарная оценка среднего количества дефектов на один электрон показывает, что различие между электронами с энергией 1 и 28 Мэв не должно быть существенным и заключается лишь в 3 раза большей эффективности электронов с энергией 28 Мэв. Однако в действительности основное различие заключается в пространственном распределении возникающих структурных повреждений. Образующиеся в каскадных процессах поврежденные области проявляют себя как одно целое, а не как отдельные входящие туда простые дефекты.

В работе использовались образцы германия *n*-типа, вырезанные из слитка ГЭС-1,8 (концентрация электронов $7-7,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$), легированные сурьмой, с плотностью дислокаций $\sim 3 \cdot 10^3 \text{ см}^{-2}$ и содержанием растворенного кислорода $\sim 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, а также из слитка ГЭМ-2,2 (концентрация электронов $5,5-6,0 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$), легированные мышьяком, с плотностью дислокаций $\sim 10^4 \text{ см}^{-2}$ и содержанием кислорода $\sim 3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

Образцы подвергались облучению при температурах 78° К в направлении оси [111] в случае электронов с энергией 1 Мэв и при 85° К в направлении, перпендикулярном оси [111] в случае электронов с энергией 28 Мэв. Разница в ориентации образцов по отношению к пучку несущественна, так как при энергиях электронов выше нескольких мегаэлектронвольт ориентационные эффекты не играют роли [3]. Облучение образцов толщиной 0,7–0,75 мм с энергией 1 Мэв производилось последовательно с двух сторон, а с энергией 28 Мэв — с одной стороны.

Во всех случаях максимальные дозы облучения были таковы, что образцы германия сохраняли проводимость *n*-типа. Изохронный отжиг радиационных дефектов производился в области температур 110–372° К (через 10°, по 20 минут при каждом значении температуры отжига).

Данные о концентрации дефектов *N* и энергетическом положении соответствующих уровней в верхней половине запрещенной зоны E_c были получены из температурной зависимости коэффициента Холла до облучения, после облучения и после отжига. В образцах, облученных электронами низкой и высокой энергии, э.д.с. Холла измерялась на установках с применением постоянных и переменных полей,

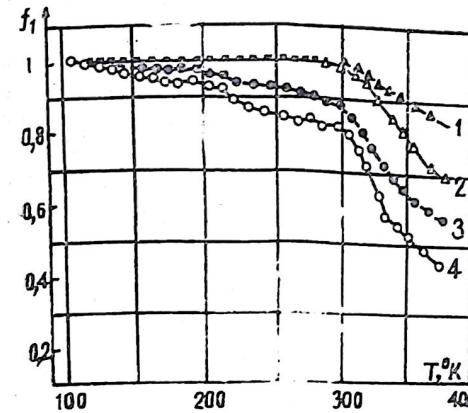


Рис. 1. Зависимость относительной концентрации удаленных носителей от температуры отжига:
1—1 Мэв, ГЭМ-2,2; 2—1 Мэв, ГЭС-1,8; 3—28 Мэв, ГЭМ-2,2; 4—28 Мэв, ГЭС-1,8.

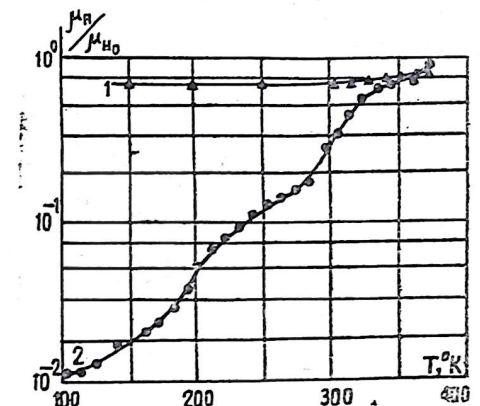


Рис. 2. Зависимость холловской подвижности (в относительных единицах) от температуры отжига:
1—1 Мэв, ГЭС-1,8. 2—28 Мэв, ГЭС-1,8.

соответственно [4]. В обоих случаях магнитное поле было направлено по оси [111] образца. При обработке экспериментальных данных холловских измерений использовались значения холловского фактора, приведенные в работе [5].

В дальнейшем будут использованы следующие обозначения: N_1 — концентрация радиационных дефектов с акцепторным уровнем $E_c = 0,2 \text{ эв}$; N_2 — концентрация радиационных дефектов с акцепторными уровнями в нижней половине запрещенной зоны; $\Sigma \Delta n = n_0 - n_{\text{обл.}}$ — полная концентрация заполненных при 78° К акцепторных дефектов, или концентрация удаленных носителей при 78° К, где n_0

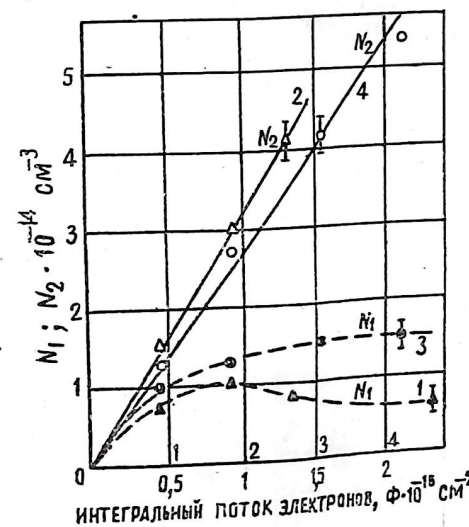


Рис. 3. Зависимость концентрации дефектов различного типа от интегрального потока электронов.
Образец ГЭС-1,8, 1, 2—1 Мэв; 3, 4—28 Мэв. Нижняя и верхняя шкалы относятся к кривым 3, 4 и 1, 2, соответственно.

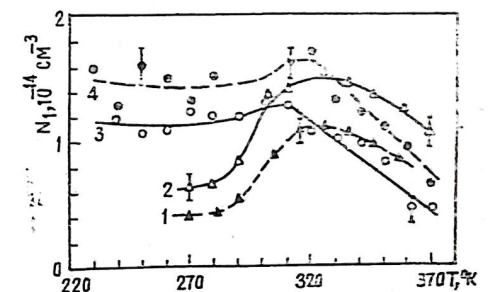


Рис. 4. Зависимость концентрации уровня $E_c = 0,2 \text{ эв}$ от температуры отжига. 1, 2—1 Мэв, ГЭМ-2, 2 и ГЭС-1,8, соответственно; 3, 4—28 Мэв, ГЭМ-2, 2 и ГЭС-1,8, соответственно.

и $n_{обл.}$ — концентрация электронов в образце, соответственно, до облучения и после облучения.

На рис. 1 представлена зависимость величины $\Sigma \Delta n$ от температуры отжига для случая разных энергий быстрых электронов. По оси ординат отложена относительная концентрация удаленных носителей $f_1 = (\Sigma \Delta n)_T / (\Delta \Sigma n)_0$ где индексы T и O относятся к измерениям при 78° после отжига при температуре T и сразу после облучения, соответственно. Интегральные потоки электронов различной энергии были выбраны так, что значения $(\Sigma \Delta n)_0$ в идентичных образцах отличались не более чем на 10%. Как видно из рис. 1, после облучения электронами с энергией 1 Мэв наблюдается единственная стадия заметного отжига в области температур выше $280-300^\circ$ К. В случае же облучения электронами высоких энергий появляются еще две низкотемпературные стадии отжига, одна при $\sim 150^\circ$ К и вторая при $\sim 220^\circ$ К.

На рис. 2 показана зависимость относительной холловской подвижности μ_n/μ_{n0} от температуры отжига, где μ_n и μ_{n0} — холловские подвижности после изохронного отжига и до облучения, соответственно. Холловская подвижность после облучения электронами с энергией 1 Мэв уменьшилась на 25%, а в случае облучения электронами высоких энергий упала почти на два порядка. Этот факт можно объяснить только созданием при высокоэнергетическом облучении объемных радиационных дефектов типа разупорядоченных областей, эффективно рассеивающих носители [6]. Ход кривой 2 (рис. 2) указывает на то, что по мере повышения температуры термообработки происходит интенсивный отжиг рассеивающих центров или областей, созданных облучением электронами с энергией 28 Мэв; этот отжиг может заключаться в аннигиляции или перестройке объемных радиационных дефектов. Как видно из рис. 2, после завершения температурного цикла отжигов $(\mu_n)_{1 \text{ Мэв}} \approx (\mu_n)_{28 \text{ Мэв}}$.

Способом, описанным в работе [7], были определены энергетическое положение ΔE_c глубокого акцепторного уровня в верхней половине запрещенной зоны после ряда облучений и отжигов, а также концентрация соответствующих дефектов N_1 . Затем вычислялась и концентрация $N_2: N_2 = \Sigma \Delta n - N_1$.

Величина ΔE_c оказалась для образцов ГЭС-1,8 равной $(0,215 \pm 0,010)$ эв, а для материала ГЭМ-2,2 — $(0,195 \pm 0,010)$ эв, независимо от энергии облучающих электронов. Экспериментально определенная величина статистического веса уровня g составляет $2 \pm 0,5$.

Весьма важно исследовать, как зависят от дозы облучения концентрации дефектов N_1 и N_2 . На рис. 3 показаны зависимости $N_1(\Phi)$ и $N_2(\Phi)$ для образцов, вырезанных из слитков ГЭС-1,8 и ГЭМ-2,2. Как видно, поведение концентрации $N_1(\Phi)$ качественно отличается при облучении электронами различных энергий. Зависимость $N_1(\Phi)$ при облучении электронами 28 Мэв представляет кривую, выходящую на насыщение. В случае же облучения электронами и меньшей энергии (1 Мэв) она описывается кривой с максимумом [8]. Подобного рода зависимости наблюдались для некоторых типов радиационных дефектов в кремнии [9].

Кинетику генерации и отжига радиационных дефектов в рассматриваемом случае можно описать с помощью дифференциальных уравнений, аналогично [10]. Чтобы получить кривую $N_1(\Phi)$ с максимумом, приходится предполагать, что при облучении электронами с энергией 1 Мэв при 80° К эффективная скорость генерации междоузельных атомов много выше скорости создания вакансий.

Как видно из рис. 4, концентрация радиационного уровня $E_c = 0,2$ эв отжигается в области температур $280-372^\circ$ К. В ходе термообработки образцов, облученных электронами с энергией 1 Мэв, вначале наблю-

дается стадия обратного отжига, т. е. возрастания величины N_1 . Обратный отжиг естественней всего объяснить увеличением концентрации радиационных дефектов за счет появления дополнительных свободных элементарных дефектов. Увеличение концентрации свободных вакансий V может происходить при термической диссоциации другого вторичного дефекта (комплекса вакансии с примесью, дивакансии) или взаимодействия междоузельного атома I с дивакансией $V_2: V_2 + I \rightarrow V$. При температуре выше $\sim 330^\circ$ К отжиг дефектов с уровнем $E_c = 0,2$ эв носит обычный характер, т. е. сопровождается уменьшением концентрации N_1 с повышением температуры отжига. В этом случае отжиг происходит с энергией активации $u = (0,45 \pm 0,15)$ эв. Обратная стадия отжига дефектов с уровнем $E_c = 0,2$ эв слабо выражена при термообработке образцов, облученных электронами с энергией 28 Мэв. В этом случае $u = (0,6 \pm 0,1)$ эв, значение частного фактора $\nu = (10^4 \div 10^6) \text{ сек}^{-1}$ и процесс отжига носит, по-видимому, бимолекулярный характер.

На рис. 5 представлена зависимость $f_2 = N_{2T} / N_{20}$ от температуры отжига, где N_{2T} и N_{20} — концентрация нижележащих акцепторных дефектов после отжига при T и сразу после облучения, соответственно. Как видно, отжиг протекает совершенно аналогичным образом для идентичных образцов, облученных электронами разных энергий. При температуре 372° К практически завершается аннигиляция одного из типов радиационных дефектов с акцепторными уровнями в нижней половине запрещенной зоны. Отжиг его носит бимолекулярный характер с энергией активации $u = (0,6 \pm 0,1)$ эв и значениями частотного фактора $(10^5 - 10^7) \text{ сек}^{-1}$. По-видимому, отжиг не происходит путем простой термической диссоциации рассматриваемого дефекта, иначе процесс отжига был бы мономолекулярным.

В заключение выражаем благодарность Р. А. Мамедову и М. С. Гаджиеву за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абиев А. К. и Ухин Н. А. ФТП. 4, вып. 3, 1970 (в печати).
2. Ухин Н. А. и Абиев А. К. ФТП. 4, 1970 (в печати).
3. Crawford J. H. Jr. „Factors influencing the stability of radiation defects in semiconductors“, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-15, № 6, 22 (1968).
4. Абиев А. К. и Ухин Н. А. ПТЭ № 3, 234 (1968).
5. Miyazawa H., Maeda H. J. Phys. soc. Japan, 15, № 11, 1294 (1960).
6. Flanagan T. M. IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-15, № 6, 42 (1968).
7. Спицын А. В. Тр. международного симпозиума по радиационным дефектам в полупроводниках. Тулуза (7-10 марта, 1967).
8. Спицын А. В. Радиационная физика неметаллических кристаллов. Изд. „Наукова думка“, Киев, 1967.
9. Djerassi H., Merlo-Flores J. and Messier J. J. appl. phys., 37, 4510 (1966).
10. Дамаск А. и Динс Дж. Точечные дефекты в металлах. Изд. „Мир“, М., 1966.

Поступило 23. VII 1970

Сектор радиационных исследований при
Президиуме АН Азерб. ССР

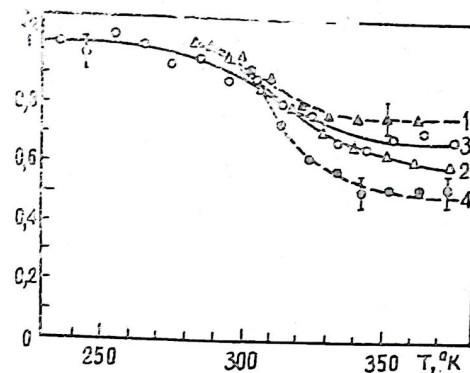


Рис. 5. Зависимость доли неотожженных дефектов, связанных с акцепторными уровнями в нижней половине запрещенной зоны:
1, 2—1 Мэв, ГЭМ-2,2 и ГЭС-1,8, соответственно, 3, 4—28 Мэв, ГЭМ-2,2 и ГЭС-1,8 соответственно.

1 вә 28 Мев енержили электронларла шүаландырылмыш керманиумда алынган нәтичәләрин мугајисәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә 28 вә 1 Мев енержили электронларла шүаландырылмыш вә Sb вә As ашгарлы Ge нүмунәләриндә әмәлә кәлмиш радиасија дефектләринин мугајисәси верилмишдир.

Экспериментал нәтичәләр 88° К температурда шүаландырылмыш вә 88÷370° К температур интервалында дәмләнмиш нүмунәләрдә һолл эффектнин вә электриккечиричлигинин өлчүлмәси вәсигәсилә алынмышдыр.

1 Мев енержили электронларла шүаландырылмыш нүмунәләрин изохрон дәмләмә графиндән фәрғли олараг, 28 Мев енержили электронларла шүаландырылмыш нүмунәләрин изохрон дәмләмә графиндә әләвә олараг ~150 вә ~220° К температурлар әтрафында ики дәмләмә мәрһәләси мүшаһидә олунур.

Јүксәк енержили электронларла шүаланма һалында нүмунәләрдә һолл јүрүклүјү гијмәтчә бир нечә тәртиб азалыр. Әләвә ики дәмләмә мәрһәләсинин слмасы вә јүрүклүјүн белә кәскин фәрғләнмәси јүксәк енержили электронларын нүмунәләрдә мүрәккәб тәбиәтли радиасија дефектләри јаратдығыны көстәрир.

ДЕПОНИРОВАННЫЕ СТАТЬИ

АННОТАЦИЯ

К статье „Решение задачи Трикоми для квазилинейного уравнения методом сеток“*

А. Маматкулов

Пусть D — однозначная конечная смешанная область плоскости переменных x, y , ограниченная простой дугой Жордана σ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$, и характеристиками $AC: x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 0$, $BC: x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 1$ уравнения

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u). \quad (1)$$

Методом конечных разностей решается задача: найти функцию $u(x, y)$, непрерывную в $\bar{D}$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую уравнению (1) в D , которая принимает граничные значения

$$u|_{\sigma} = \varphi, \quad u|_{AC} = \psi \quad (\varphi(0, 0) = \psi(0, 0)),$$

где φ и ψ — заданные функции и $f_u' \geq 0$.

Предполагается, что задача (1) — (2) однозначно разрешима. Сеточная область строится следующим образом: при $y < 0$ она состоит из точек пересечения характеристик

$$x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = kh, \quad x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = kh, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad Kh = 1;$$

при $y \geq 0$ она квадратная, с шагом h .

Доказывается, что при некоторых условиях разностная задача, соответствующая задаче (1) — (2), имеет единственное решение, которое является пределом последовательных приближений Зейделя.

* Статья депонирована в ВИНТИ (Москва, А—19, Балтийская ул., 14, отдел справочной информации ВИНТИ).

МҮНДЭРИЧАТ

С. Я. Виленкин, Т. Г. Гейдаров. Волтерра сырасынын көмөклиги илэ бир синиф гејри-хэтти системин өјрөнилмәси	3
В. Ч. Начыјев. Башлангыч кәркинликли еластик-пластик халганын дајаныгылыгы	9
В. М. Мирсәлимов. Квазикөврәк дагылма заманы јарыгын јайылмасынын лимит сүр'әти хагында	14
И. М. Мирзәјев. Өзүндөн истилик верән вә верилән чнсим бојунча ахан сәс сүр'әтиндән јүксәк сүр'әтли оха симметрик газ шырнагынын ејни истигамәтли газ селинә ахмасынын һесабаты	17
К. А. Мәмәдов. Енинә зәрбә заманы кәркинлик-деформасија асылылыгынын тәдгиги	21
Һ. Һ. Гулијев. Гејри-хәтти еластики гануна табе олан мүһитдә кениш даирәви һәлгә илэ бәркидилмиш даирәви дешик әтрафында кәркинлик пәјланмасы	25
К. М. Гулијев. Ејни олмајан ики даирәви дешиклә зәифләдилмиш лөвһәнин кичик еластики-пластики деформасијада кәркинлик вәзијјәти	30
В. М. Мирсәлимов. Арта билән јарыгы ләнкитмәјин бир үсулу хагында	34
Р. А. Јүзбәјов. Физики гејри-хәтти өзүлү-еластик дүзбучагылы лөвһәнин енинә пәјланмыш гүввәләрин тәсири илэ әјилмәси	39
М. Н. Вәлијев, И. И. Чаббаров. Таваны зәиф кечиричиликли олан гејри-бирчинс ләјда јерләшмиш гујуларын гаршылыгылы тәсири	44
Һ. П. Һүсәјнов, М. Н. Вәлијев, И. И. Чаббаров. Зәиф кечиричиликли таваны олан һиссә-һиссә бирчинс ләјда мајенин һәрәкәти	50
А. И. Вердијев, Ј. Р. Абдуллајев. Шоран торпагларын ширинләшмә ганунаујунлуғунун һесабатына даир	58
В. Г. Пирмәмәдов, О. М. Фәрзәлијева. Галыг сујун күтлә өтүрүлмәсини нәзәрә алмагла газланмыш нефтин сүзүлмәсинин гејри-стационар мәсәләсинин әдәди һәлли	63
Р. А. Мустафајев. Верикин типли бәзи икифазалы мәсәләләрин әдәди һәлли	69
О. А. Дышин. Параболик типли тәнлијин һәлли үчүн операсија дүстурлары вә онларын чеврилмәси	76
В. А. Ивницкий, А. Б. Гасумов. Етибарсыз хидмәт чиһазы илэ әвәз олунмуш системин гејри-стационар характеристикаларынын тәдгиги	81
Ч. С. Агаларов, А. А. Әлизадә, И. Д. Дағкәсәмәнли Р. А. Гасумов. Шиниләри вулканлашдырма просесинин автоматик идарәтмә үсулу	90
А. А. Әлизадә, Һ. А. Начыјев. Атмосфердә јер үзәриндә електрик параметрләринин вә метеоелементләрин гасырға вахты вә ади һалда тәдгиги	94
Р. Ј. Кәримов, Т. М. Кәримов. Даирәви зәифләтмәјә малик цилиндрик өртүјүн еластики-пластики кәркинлик вәзијјәти	98
И. З. Макински, Р. М. Мусајев, С. А. Шахмаров, М. Б. Хәјиров, Ф. Ә. Хаспәладов. Дәниз сујунун термокимјәви јумшалдылмасы просесиндә әмәлә кәлән чөкүнтүләрин минерал тәркибинин ренкендифрактометрия үсулу илэ тәјини	104
Ә. М. Кәримов, Ф. Һ. Фәтуллајев. Электролитләрин сулу мәһлулларынын истилик кечирмәси	108
Т. М. Әликишибәјова, Ј. Н. Киселјов, В. А. Попов. Мазутун јанма мәһсулларынын алчаг температурлу плазмасынын нәзәри тәһлили	113
Б. Ә. Әзимов, Г. Ә. Мәмәдов, И. Т. Еминов. Даирәви ләјда нефт-су сәрһәдди һәрәкәтинин идарә едилмәси мәсәләсинә ријазии програмлашдырма үсулларынын тәтбиг олунмасына даир	117
Ј. Ә. Әмәнзадә, О. Л. Бубутейшвили. Еллиптик дешиклә зәифләдилмиш јарыммүстәвијә сәрт штампын тәсири	122
А. М. Мәһәррәмов. Финит потенциалынын бәрпа едилмәси хагында	130
Г. В. Гончарова. Бучаг нөгтәләри олан областлар үчүн еластикијјәт нәзәријјәсинин мүстәви мәсәләсинин һәлли	133
А. В. Спитсын, Г. М. Гасумов, Ә. Г. Әбијев. 1 вә 28 Мев енержили электронларла шүаландырылмыш керманиумда алыннын нәтичәләрин мүгајисәси	142
Сифариш көзләјән мәғаләләр	147

СОДЕРЖАНИЕ

С. Я. Виленкин, Т. Г. Гейдаров. Исследование одного класса нелинейных систем путем разложения в ряд Вольтерра	3
В. Д. Гаджиев. Устойчивость упруго-пластического кольца при наличии начальных напряжений	9
В. М. Мирсалимов. О предельной скорости распространения трещины при квазихрупком разрушении	14
И. М. Мирзоев. Расчет осесимметричной сверхзвуковой газовой струи, истекающей в спутный сверхзвуковой поток и обтекающей заданное тело с подводом тепла	17
Г. А. Мамедов. Исследование зависимости напряжение—деформация при поперечном ударе	21
Г. Г. Кулиев. Концентрация напряжений около кругового отверстия, подкрепленного широким кольцом при нелинейном законе упругости	25
К. М. Кулиев. Концентрация напряжений в плоскости, ослабленной двумя неодинаковыми круговыми отверстиями, при малых упруго-пластических деформациях	30
В. М. Мирсалимов. Об одном способе торможения растущих трещин	34
Р. А. Юзбеков. Изгиб физически нелинейной вязко-упругой пругольной пластины под действием поперечно распределенной нагрузки	39
М. Н. Велиев, И. И. Джабаров. Взаимодействие скважин, расположенных в неоднородном пласте со слабопроницаемой кровлей	44
Г. П. Гусейнов, М. Н. Велиев, И. И. Джабаров. Движение жидкости в кусочно-однородном пласте со слабопроницаемой кровлей	50
А. И. Вердиев и Я. Р. Абдуллаев. К расчету закономерности опреснения засоленных почв	58
В. Г. Пирмамедов, О. М. Фарзалиева. Численное решение нестационарной задачи фильтрации газированной нефти с учетом массопереноса остаточной воды	63
Р. А. Мустафаев. Численное решение некоторых двухфазных задач типа Веригина	69
О. А. Дышин. Операционные формулы решения параболических уравнений и их обращение	76
В. А. Ивницкий, А. Б. Касумов. Исследование нестационарных характеристик дублированной системы с ненадежным обслуживающим прибором	81
Ч. С. Агаларов, А. А. Али-заде, Н. Д. Дагкесаманский, Р. Я. Касумов. Способ автоматического управления процессом вулканизации автопокрышек	90
А. А. Ализаде, Г. А. Гаджиев. Исследование электрических параметров и метеозлементов атмосферы у земли в грозовой и негрозовой периоды	94
Р. Ю. Керимов, Т. М. Керимов. Упруго-пластическое напряженное состояние цилиндрических оболочек, ослабленных круговым отверстием	98
И. З. Макинский, Р. М. Мусаев, С. А. Шахмаров, М. Б. Хейров, Ф. А. Хаспәлатов. К вопросу определения минералогического состава отложений в процессах термохимического умягчения морской воды методом рентгендифрактометрии	104
А. М. Керимов, Ф. Г. Фатуллаев. Теплопроводность водных растворов электролитов	108
Т. М. Аликишибекова, Ю. Н. Киселев, В. А. Попов. Теоретический анализ электрофизических свойств низкотемпературной плазмы продуктов сгорания мазута	113
Б. А. Азимов, Г. А. Мамедов, И. Т. Эминов. К вопросу применения методов математического программирования к решению задачи оптимального управления движением водо-нефтяного контакта (ВНК) в круговом пласте	117
Ю. А. Амензаде, О. Л. Бубутейшвили. Действие жесткого штампа на полуплоскость, ослабленную эллиптическим отверстием	122
А. М. Магеррамов. О восстановлении финитного потенциала	130
Г. В. Гончарова. Плоская задача теории упругости в области с угловыми точками	133
Депонированные статьи	
А. В. Спицын, Г. М. Гасумов и А. К. Абиев. Сравнение результатов облучения германия электронами с энергией 1 и 28 Мэв	142
А. Маматкулов. К статье „Решение задачи Трикоми для квазилинейного уравнения методом сеток“	147