

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

Ријазиијјат вə механика



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Математика и механика

2

1971

„ЕЛМ“ НƏШРИЈЈАТЫ – ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЕЛМ“
БАКЫ – БАКУ

81221

Б. И. АЛИЕВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЯДОВ ФУРЬЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей статье устанавливаются условия конечности некоторых функционалов, построенных исходя из коэффициентов Фурье элементов гильбертова пространства. Пусть $H = \{x\}$ — гильбертово пространство, $\{e_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, полная ортонормированная система векторов в H . Пусть далее $\{\psi_k(h)\}$, $h \geq 0$, — последовательность функций, ограниченных по совокупности:

$$|\psi_k(h)| \leq M, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

Сопоставим каждому вектору $x \in H$ с рядом Фурье

$$x \sim \sum_{k=0}^{\infty} (x, e_k) e_k \quad (2)$$

вектору $x_h \in H$, найденный по теореме Рисса — Фишера:

$$x_h \sim \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(h) (x, e_k) e_k. \quad (3)$$

Учитывая особую роль, будем называть $\{\psi_k(h)\}$ осредняющей последовательностью* и, стало быть, вектор x_h — осреднением вектора x с шагом h . Ниже будем требовать выполнения также условий: существуют числа $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ и константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что

$$|1 - \psi_k(h)| > c_1 (kh)^{m_1} \quad \text{при всех } k \text{ и } h, \quad (4)$$

$$|1 - \psi_k(h)| \geq c_2 (kh)^{m_2} \quad \text{при } 0 \leq kh \leq \mu \quad (\mu \geq 1). \quad (5)$$

При выполнении условий (4) и (5) числа m_1 и m_2 будем называть соответственно верхним и нижним показателем, а в случае $m_1 = m_2 = m$ — просто показателем осредняющей последовательности $\{\psi_k(h)\}$, при этом будем писать $\{\psi_k(h)\} \in n^{(m)}$ в случае (4) и $\{\psi_k(h)\} \in n_{(m)}$ в случае (5); $n^{(m)} n_{(m)} = n_{(m)}$, $n_{(m)}^{(m)} = n^{(m)}$.

Введем следующие функционалы:

$$A_{\beta}^{(\alpha)}(x) = \int_0^1 h^{-2+\beta(\alpha+\frac{1}{2})} \{ \|x - x_h\|_H \} dh, \quad (6)$$

$$B_{\beta}^{(\alpha)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-\beta(\alpha+\frac{1}{2})} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2}, \quad (7)$$

*) Этот термин и условия (4), (5) введены Ар. С. Джафаровым.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: А. И. Гусейнов (редактор), Ю. А. Сеидов (зам. редактора), Г. Б. Абдуллаев, Б. А. Азимов, М. И. Алиев, Д. Э. Аллахвердиев, К. Т. Ахмедов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Г. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, Л. М. Иманов, А. Х. Мирзаджанзаде, Ф. Г. Магсудов, Э. И. Манафлы (ответств. секретарь), Ю. А. Махмудов, Г. Ф. Султанов, З. И. Халилов, Т. Эминзаде, А. А. Эфендизаде.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)».

п 22368
Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

$$C_{\beta}^{(a, \alpha)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-\beta(a + \alpha + \frac{1}{2})} \left\| \sum_{k=1}^n \kappa^{2\alpha} (x, e_k)^2 \right\|^{\beta/2}, \quad (8)$$

где $\|x\|_H$ — норма вектора x , порожденная скалярным произведением в H ;

$$\|x\|_H = \sqrt{(x, x)}.$$

Заметим, что в силу полноты системы $\{e_k\}$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} (x, e_k)^2 \right\|^{\beta/2} = \|x - S_n(x)\|_H^{\beta/2} = E_n(x, H),$$

где

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (x, e_k) e_k$$

— частная сумма ряда (2),

$$E_n(x, H) = \inf_{\mu_k} \left\| x - \sum_{k=1}^n \mu_k e_k \right\|_H$$

— наилучшее приближение вектора x .

Теорема 1. Пусть $0 < \beta \leq 2$ и $\left(2m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta > 1$. Тогда из конечности функционала $B_{\beta}^{(m_1 - m_2)}(x)$ следует конечность функционала $C_{\beta}^{(m_1 - m_2, m_1)}(x)$ и обратно.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма 4. Если $a_1 \geq a_2 \geq \dots > 0$ и x действительно, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\alpha} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} a_n$$

сходятся или расходятся одновременно.

На основании леммы достаточно доказать теорему для следующих функционалов:

$$[B_{\beta}^{(m_1 - m_2)}(x)]_1 = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left[1 - \left(m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right] \left\{ \sum_{v=2^k+1}^{\infty} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2},$$

$$[C_{\beta}^{(m_1 - m_2, m_1)}(x)]_1 = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left[1 - \left(2m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right] \left\{ \sum_{v=1}^{2^{k+1}} \gamma^{2m_1} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} [C_{\beta}^{(m_1 - m_2, m_1)}(x)]_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left[1 - \left(2m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right] \left\{ \sum_{\gamma=0}^k \sum_{\gamma=2^{\gamma}+1}^{2^{\gamma+1}} \gamma^{2m_1} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left[1 - \left(2m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right] \left\{ 2^{2m_1} \sum_{\gamma=0}^k 2^{2m_1 \gamma} \sum_{v=2^{\gamma}+1}^{2^{\gamma+1}} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} \end{aligned}$$

Применяя неравенство Иенсена и учитывая условие $\left(2m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta > 1$, получим

$$[C_{\beta}^{(m_1 - m_2, m_1)}(x)]_1 \leq 2^{m_1 \beta} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left[1 - \left(2m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right] \left\{ \sum_{\gamma=0}^k 2^{m_2 \beta \gamma} \left[\sum_{v=2^{\gamma}+1}^{2^{\gamma+1}} (x, e_k)^2 \right]^{\beta/2} \right\} =$$

$$\begin{aligned} &= 2^{m_1 \beta} \sum_{\gamma=0}^{\infty} 2^{m_1 \beta \gamma} \left(\sum_{v=2^{\gamma}+1}^{2^{\gamma+1}} (x, e_k)^2 \right)^{\beta/2} \sum_{k=\gamma}^{\infty} 2^k \left[1 - \left(2m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right] = \\ &= \frac{2^{m_1 \beta}}{1 - 2^{1 - \left(2m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta}} \sum_{\gamma=0}^{\infty} 2^{m_1 \beta \gamma} 2^{\gamma \left[1 - \left(2m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right]} \left\{ \sum_{v=2^{\gamma}+1}^{2^{\gamma+1}} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C_3(m_1, m_2, \beta) \sum_{\gamma=0}^{\infty} 2^{\gamma \left[1 - \left(m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right]} \left\{ \sum_{v=2^{\gamma}+1}^{\infty} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} = \\ &= C_3(m_1, m_2, \beta) [B_{\beta}^{(m_1 - m_2)}(x)]_1. \end{aligned}$$

Итак

$$[C_{\beta}^{(m_1 - m_2, m_1)}(x)]_1 \leq C_3(m_1, m_2, \beta) [B_{\beta}^{(m_1 - m_2)}(x)]_1.$$

Теперь докажем обратное. Имеем

$$\begin{aligned} [B_{\beta}^{(m_1 - m_2)}(x)]_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left[1 - \left(m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right] \left\{ \sum_{v=2^k+1}^{\infty} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left[1 - \left(m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right] \left\{ \sum_{\gamma=k}^{\infty} \sum_{v=2^{\gamma}+1}^{2^{\gamma+1}} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left[1 - \left(m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right] \left\{ \sum_{\gamma=k}^m 2^{2m_1 \gamma} \sum_{v=2^{\gamma}+1}^{2^{\gamma+1}} v^{2m_1} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} \leq \end{aligned}$$

В силу неравенства Иенсена

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left[1 - \left(m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right] \left\{ \sum_{\gamma=k}^{\infty} 2^{-m_1 \beta \gamma} \left[\sum_{v=2^{\gamma}+1}^{2^{\gamma+1}} v^{2m_1} (x, e_k)^2 \right]^{\beta/2} \right\} = \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\infty} 2^{-m_1 \beta \gamma} \left[\sum_{v=2^{\gamma}+1}^{2^{\gamma+1}} v^{2m_1} (x, e_k)^2 \right]^{\beta/2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left[1 - \left(m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right] \leq \\ &\leq C_4(m_1, m_2, \beta) \sum_{\gamma=0}^{\infty} 2^{\gamma \left[1 - \left(2m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta\right]} \left\{ \sum_{v=1}^{2^{\gamma+1}} v^{2m_1} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} = \\ &= C_4(m_1, m_2, \beta) [C_{\beta}^{(m_1 - m_2, m_1)}(x)]_1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\{\psi_k(h)\} \in H_{(m_2)}^{(m_1)}$, $x \in H$, $m_1 - m_2 \geq 0$, $0 < \beta \leq 2$ и $\left(2m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta > 1$. Тогда из конечности одного из функционалов $A_{\beta}^{(m_1 - m_2)}(x)$, $B_{\beta}^{(m_1 - m_2)}(x)$, $C_{\beta}^{(m_1 - m_2, m_1)}(x)$ следует конечность других; здесь $A_{\beta}^{(m_1 - m_2)}(x)$ — такой же интеграл, что и (6), но только вместо x_h берется $x \frac{h}{2}$.

Доказательство. В силу полноты системы $\{e_k\}$ имеем

$$\left\| x - x \frac{h}{2} \right\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \psi \left(\frac{h}{x} \right) \right]^2 (x, e_k)^2. \quad (9)$$

Поэтому

$$A_{\beta}^{(m_1 - m_2)}(x) = \int_0^1 h^{-2 + \left(m_1 - m_2 + \frac{1}{2}\right)\beta} \left\| x - x \frac{h}{2} \right\|_H^2 dh =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 h^{-2+(m_1-m_2+\frac{1}{2})\beta} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \psi_k \left(\frac{h}{2} \right) \right]^2 (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} dh \leq \\
&\text{(так как } \{\psi_k(h)\} \in \Pi^{(m_1)} \text{)} \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{1/n}^{1/n-1} h^{-2+(m_1-m_2+\frac{1}{2})\beta} dh \left\{ C_1^2 \left(\frac{h}{2} \right)^{2m_1} \sum_{k=1}^n \kappa^{2m_1} (x, e_k)^2 + \right. \\
&\quad \left. + (1+M)^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} \leq \\
&\leq C_1^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{m_1\beta} \sum_{n=2}^{\infty} \int_{1/n}^{1/n-1} h^{-2+(2m_1-m_2+\frac{1}{2})\beta} dh \left\{ \sum_{k=1}^n \kappa^{2m_1} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} + \\
&\quad + C_5 \sum_{n=2}^{\infty} \int_{1/n}^{1/n-1} h^{-2+(m_1-m_2+\frac{1}{2})\beta} dh \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} \leq \\
&\leq C_6 (m_2, \beta) \sum_{n=2}^{\infty} n^{-(2m_1-m_2+(\frac{1}{2})\beta)} \left\{ \sum_{k=1}^n \kappa^{2m_1} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} + \\
&\quad + C_7 \sum_{n=2}^{\infty} n^{-(m_1-m_2+\frac{1}{2})\beta} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} = C_6 C_{\beta}^{(m_1-m_2, m_1)} (x) + \\
&\quad + C_7 B_{\beta}^{(m_1-m_2)} (x).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_{\beta}^{(m_1-m_2)} (x) \leq C_6 C_{\beta}^{(m_1-m_2, m_1)} (x) + C_7 B_{\beta}^{(m_1-m_2)} (x).$$

На основании теоремы 1 отсюда получаем, что из конечности $C_{\beta}^{(m_1-m_2, m_1)} (x) B_{\beta}^{(m_1-m_2)} (x)$ следует конечность функционала $A_{\beta}^{(m_1-m_2)} (x)$. На основании опять-таки теоремы 1 для завершения теоремы достаточно установить, что из конечности $A_{\beta}^{(m_1-m_2)} (x)$ следует конечность $C_{\beta}^{(m_1-m_2, m_1)} (x)$.

Имеем

$$\begin{aligned}
A_{\beta}^{(m_1-m_2)} (x) &= \int_0^1 h^{-2+(m_1-m_2+\frac{1}{2})\beta} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \psi_k \left(\frac{h}{2} \right) \right]^2 (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} dh \geq \\
&\geq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{1/n}^{1/n-1} h^{-2+(m_1-m_2+\frac{1}{2})\beta} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[1 - \psi_k \left(\frac{h}{2} \right) \right]^2 (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} dh \geq \\
&\quad \left(\text{так как } \kappa \frac{h}{2} \leq 1 \text{ и } \left\{ \psi_k \left(\frac{h}{2} \right) \right\} \in \Pi_{(m_2)} \right) \\
&\geq C_8 \sum_{n=2}^{\infty} n^{-(2m_1-m_2+\frac{1}{2})\beta} \left\{ \sum_{k=1}^n \kappa^{2m_1} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} = C_8 C_{\beta}^{(m_1-m_2, m_1)} (x),
\end{aligned}$$

теорема доказана.

II. Рассмотрим вопрос об условиях сходимости ряда, составленного из коэффициентов Фурье вектора $x \in H$ по ортонормированной и полной системе $\{e_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} |(x, e_n)|^{\beta}. \quad (10)$$

Теорема 3. Пусть $x \in H$ и пусть $\{\psi_k(h)\} \in \Pi_{(m_2)}$. Пусть $N > 1$ — целое число, $0 < \beta \leq 2$, γ — любое. Тогда сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} N^{n(\gamma+1-\frac{\beta}{2})} \left\{ \omega_x \left(\frac{1}{N^n} \right) \right\}^{\beta}$$

влечет сходимость ряда (10), где

$$\omega_x(\delta)_H = \sup_{h \leq \delta} \|x - x_h\|_H.$$

Доказательство. В силу (9)

$$\left\{ \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} \left[1 - \psi_k \left(\frac{1}{N^n} \right) \right]^2 (x, e_k)^2 \right\}^{1/2} \leq \omega_x \left(\frac{1}{N^n} \right),$$

откуда на основании неравенства (5) находим

$$\left\{ \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} (x, e_k)^2 \right\}^{1/2} \leq C_9 \omega_x \left(\frac{1}{N^n} \right)$$

или

$$\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} (x, e_k)^2 \leq C_{10} \omega_x^2 \left(\frac{1}{N^n} \right). \quad (11)$$

Далее на основании неравенства Гельдера для $0 < \beta < 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} |(x, e_k)|^{\beta} &\leq \left\{ \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} \left\{ \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} 1^{2-\beta} \right\}^{\frac{2-\beta}{2}} \leq \\
&\leq C_{11} \left\{ \omega_x \left(\frac{1}{N^n} \right) \right\}^2 N^{n(1-\frac{\beta}{2})}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Из (11) и (12) при $0 < \beta \leq 2$ получаем

$$\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} |(x, e_k)|^{\beta} \leq C_{12} \left\{ \omega_x \left(\frac{1}{N^n} \right) \right\} N^{n(1-\frac{\beta}{2})}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} |(x, e_n)|^{\beta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} \kappa^{\gamma} |(x, e_k)|^{\beta} \leq \\
&\leq C_{13} \sum_{n=1}^{\infty} n^{n(\gamma+1-\frac{\beta}{2})} \left\{ \omega_x \left(\frac{1}{N^n} \right) \right\}^{\beta} < \infty.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Положив в теореме 3 $N = 2$ и учитывая вышеуказанную лемму, получаем

Следствие 3. 1. Пусть удовлетворяются условия теоремы 3. Тогда сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\frac{\beta}{2}} \left\{ \omega_x \left(\frac{1}{n} \right) \right\}^{\beta}$$

влечет сходимость ряда (10).

III. Рассмотрим следующий вопрос. Пусть известно поведение ряда Фурье вектора $x \in H$. Как ведет себя ряд Фурье вектора $y \in H$, связанного с x соотношением

$$\|y - y_h\|_H \leq \|x - x_h\|_H? \quad (13)$$

Теорема 4. Пусть $\{\psi_k(h)\} \in \Pi_{(m_1)}^{(m_2)}$ и пусть $x, y \in H$ — векторы, связанные между собой соотношением (13). Тогда, если при неко-

тором $\beta \in (0, 2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta(2m_1-m_2+\frac{1}{2})} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \kappa^{2(m_1-m_2)} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} < \infty. \quad (14)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta(m_1-m_2+\frac{1}{2})} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \kappa^{2(m_1-m_2)} (x, e_k)^2 \right\}^{\beta/2} < \infty, \quad (15)$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(y, e_k)|^{\beta} < \infty. \quad (16)$$

Теорема 4 доказывается точно так же, как соответствующая теорема из [3]. Введем обозначения

$$A_{\beta}^{(m)}(x) = A_{\beta}^{(m-m)}(x), B_{\beta}^{(m)}(x), C_{\beta}^{(m)}(x) = C_{\beta}^{(m-m, m)}(x).$$

Непосредственно из теорем 2 и 4 вытекает

Теорема 5. Пусть $\{\psi_k(h)\} \in n^{(m)}$ и пусть $x, y \in H$ — векторы, связанные между собой соотношением (13), $0 < \beta < 2$, $(m + \frac{1}{2})\beta > 1$.

Тогда из сходимости одного из функционалов $A_{\beta}^{(m)}$, $B_{\beta}^{(m)}$, $C_{\beta}^{(m)}$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(y, e_k)|^{\beta} < \infty.$$

Примеры работы [3] могут быть приведены и в данной статье в качестве иллюстрации полученных результатов.

В заключение отметим, что в настоящей статье были использованы идеи работ [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Gen—Jchiro Sunouchi. On the convolution Algebra of Benrling. To hoki Math. Journ. Vol. 19, № 3, 1967.
2. Прохоренко В. И. Вестник МГУ, 6, 51—60, 1964.
3. Алиев Б. И. Изв. АН Азерб. ССР, серия: техн. и матем. наук, 1970, № 3.
4. Musielak J. Jeszty Nauk. Nliw. im. A. Mickilwicza, Mat. c/em. 1 (1957), P. 9—17.

Институт механики и математики
АН Азерб. ССР

Поступило 30. III 1970

Б. И. Әлијев

Нилберт фэзасында Фурје сырасынын бэ'зи хассэлэри
наггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә нилберт фэзасы элементлэри үчүн Фурје әмсалларынын көмәји илә гурулмуш бэ'зи функсионалларын сонлу олмасы шэртлэри верилмишдир.

А. Г. АЛЕСКЕРОВ

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

1°. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \lambda \left\{ F[t; x(t - \tau(t))] + \int_0^{t-\tau(t)} K[t; s; x(s)] ds + \int_0^t G[t; s; x(s); x(s - \tau(s))] ds \right\} \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t) \equiv 0 \text{ на } E_0 = (-\max_{0 \leq t \leq T} \tau(t) \leq t \leq 0) \quad (2)$$

Имеет место следующая теорема

Теорема 1. Пусть $\tau(t) \geq 0$ — непрерывная на $[0; T]$ функция. Пусть $F(t; x)$, $K(t; s; x)$ и $G(t; s; x; y)$ ($0 \leq s, t \leq T$; $\|x\|, \|y\| \leq \rho_0$) — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям:

$$|F(t; x_1) - F(t; x_2)| \leq L_1 |x_1 - x_2|,$$

$$|K(t; s; x_1) - K(t; s; x_2)| \leq L_2 |x_1 - x_2|,$$

$$|G(t; s; x_1; y_1) - G(t; s; x_2; y_2)| \leq L_3 [|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|].$$

Пусть, наконец,

$$0 < \lambda < \frac{1}{L_1 + T(L_2 + 2L_3)} \text{ и } 0 < \lambda \leq \frac{\rho_0}{F_0 + T(K_0 + G_0)}, \quad (3)$$

где

$$F_0 = \max_{0 \leq t \leq T, \|x\| \leq \rho_0} |F(t; x(t - \tau(t)))|, \quad K_0 = \max_{0 \leq s \leq t \leq T, \|x\| \leq \rho_0} |K(t; s; x)|$$

и

$$G_0 = \max_{0 \leq s, t \leq T, \|x\|, \|y\| \leq \rho_0} |G(t; s; x; y)|.$$

Тогда задача (1) — (2) имеет единственное решение и оно является пределом последовательных приближений:

$$x_n(t) = \lambda \left\{ F[t; x_{n-1}(t - \tau(t))] + \int_0^{t-\tau(t)} K[t; s; x_{n-1}(s)] ds + \int_0^t G[t; s; x_{n-1}(s); x_{n-1}(s - \tau(s))] ds \right\}, \quad (4)$$

где

$x_n(t) \equiv 0$ на E_0 ($n = 1, 2, 3, \dots$); здесь $x_0(t)$ — произвольная непрерывная на $[0; T]$ функция, причем $\|x_0(t)\| \leq \rho_0$ и $x_0(t) \equiv 0$ на E_0 . Ско-

рость сходимости определяется с помощью формулы:

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq \rho_0 q^n,$$

где

$$q = \lambda [L_1 + T(L_2 + 2L_3)].$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\|x_n(t)\| \leq \rho_0$. Положим $x_0(t) = 0$. Из (4) имеем

$$\|x_1(t)\| = \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \lambda \left\{ F(t; 0) + \int_0^{t-\tau(t)} K(t; s; 0) ds + \int_0^t G(t; s; 0; 0) ds \right\} \right\| \leq \lambda [F_0 + T(K_0 + G_0)] \leq \rho_0,$$

Допустим, что

$$\|x_{n-1}(t)\| \leq \rho_0.$$

Тогда

$$\|x_n(t)\| = \max_{\substack{0 \leq s, t \leq T \\ \|x_{n-1}(t)\| \leq \rho_0}} \left\| \lambda \left\{ F[t; x_{n-1}(t - \tau(t)) + \int_0^{t-\tau(t)} K[t; s; x_{n-1}(s)] ds + \int_0^t G[t; s; x_{n-1}(s); x_{n-1}(s - \tau(s))] ds \right\} \right\| \leq \lambda [F_0 + T(K_0 + G_0)] \leq \rho_0.$$

В силу метода математической индукции утверждаем, что $\|x_n(t)\| \leq \rho_0$

при всех $n = 0, 1, 2, \dots$

Докажем, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится равномерно на $[0; T]$. Из (4) имеем

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &= \max_{0 \leq s, t \leq T} |x_2(t) - x_1(t)| = \max_{0 \leq s, t \leq T} \left| \lambda \{ F[t; x_1(t - \tau(t)) - F[t; 0] + \int_0^{t-\tau(t)} K[t; s; x_1(s)] - K[t; s; 0] ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (G[t; s; x_1(s); x_1(s - \tau(s))] - G[t; s; 0; 0]) ds \right| \leq \\ &\leq \lambda \left\{ L_1 \max_t |x_1(t - \tau(t))| + L_2 \max_t \int_0^{t-\tau(t)} |x(s)| ds + \right. \\ &\quad \left. + L_3 \max_t \int_0^t [|x_1(s)| + |x_1(s - \tau(s))|] ds \right\} \leq \\ &\leq \lambda [L_1 + T(L_2 + 2L_3)] \|x_1(t)\|, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq \rho_0 q.$$

Допустим

$$\|x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)\| \leq \rho_0 q^{n-2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| &= \max_{0 \leq s, t \leq T} \left\| \lambda \left\{ F[t; x_{n-1}(t - \tau(t))] - F[t; x_{n-2}(t - \tau(t))] + \int_0^{t-\tau(t)} (K[t; s; x_{n-1}(s)] - K[t; s; x_{n-2}(s)]) ds + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t (G[t; s; x_{n-1}(s); x_{n-1}(s - \tau(s))] - G[t; s; x_{n-2}(s); x_{n-2}(s - \tau(s))]) ds \right\} \right\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \tau(s))\} ds \Big\| &\leq \lambda L_1 \|x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)\| + \lambda L_2 \|x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)\| \int_0^T dt + \\ &+ 2L_3 \lambda \|x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)\| \cdot \int_0^T dt \leq \lambda [L_1 + T(L_2 + 2L_3)] \rho_0 q^{n-2} = \rho_0 q^{n-1}. \end{aligned}$$

На основе метода математической индукции утверждаем, что

$$\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| \leq \rho_0 q^{n-1}$$

при всех $n = 1, 2, 3, \dots$. Отсюда следует, что последовательность приближений (4) равномерно сходится, следовательно,

$$\tilde{x}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Очевидно, что функция $x(t)$ будет непрерывной на $[0; T]$ и в силу $\tilde{x}(t) \equiv 0$ на E_0 . Следовательно, $\tilde{x}(t) - x_n(t) \equiv 0$ на E_0 ($n = 0; 1; 2; \dots$). Переходя к пределу в равенствах (4), получаем, что $\tilde{x}(t)$ является решением задачи (1)–(2). Аналогичным образом легко можно доказать, что

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq \rho_0 q^n.$$

Докажем единственность решения. Пусть $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ — два решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (2). Положим $y(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$. Тогда функция $y(t)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} y(t) &= \lambda \left\{ F[t; x(t - \tau(t))] - F[t; \tilde{x}(t - \tau(t))] + \int_0^{t-\tau(t)} (K[t; s; x(s)] - K[t; s; \tilde{x}(s)]) ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (G[t; s; x(s); x(s - \tau(s))] - G[t; s; \tilde{x}(s); \tilde{x}(s - \tau(s))]) ds \right\} \end{aligned}$$

и начальному условию $y(t) \equiv 0$ на E_0 .

Отсюда для $t \in [0; T]$ и $t - \tau(t) \geq 0$ имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\| [1 - \lambda (L_1 + T(L_2 + 2L_3))] \leq 0.$$

Учитывая неравенство (3), получим $y(t) = 0$, т. е. $x(t) = \tilde{x}(t)$.

Теперь последовательные приближения для решения задачи (1)–(2) определим равенствами типа

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \lambda \left\{ F[t; x_n(t + \tau(t))] + \int_0^{t-\tau(t)} K[t; s; x_{n-1}(s)] ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t G[t; s; x_{n-1}(s); x_{n-1}(s - \tau(s))] ds \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$x_n(t) \equiv 0 \text{ на } E_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Здесь $x_0(t)$ — произвольная непрерывная на $[0; T]$ функция, причем

$$\|x_0(t)\| \leq \rho_0 \text{ и } x_0(t) \equiv 0 \text{ на } E_0.$$

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, лишь с той разницей, что здесь условие (3) заменяется условиями

$$0 < \lambda < \frac{1}{L_1 + T_0(L_2 + L)} \text{ и } 0 < \lambda \leq \frac{1}{L_1 + T_0(K_0 + G_0 \gamma_0) \rho_0^{-1}}, \quad (6)$$

где

$$T_0 = \max_{0 \leq t \leq T} |t - \tau(t)|, \quad L = 2L_3 \gamma_0 \text{ и } \gamma_0 = \max_{0 \leq t \leq T} |\tau'(t)|.$$

Пусть функция $t - \tau(t) = \varphi(t)$ обратимая и обратная функция, обозначаемая через $\gamma(t)$, имеет производные на $[0; T]$. Тогда решение задачи (1)–(2) существует, единственно и является пределом последовательных приближений (5). Скорость сходимости определяется с помощью формулы

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq \rho_0 q_1^n \max_{0 \leq t \leq T} \varphi_n(t),$$

где

$$q_1 = \frac{1}{1 - \lambda L_1} (L_2 + L) \text{ и } \varphi_n(t) = \int_0^{t-\tau(t)} \varphi_{n-1}(s) ds.$$

Доказательство. Во-первых, покажем, что $\|x_n(t)\| \leq \rho_0$. Положим $x_0(t) = 0$ и $F(t; 0) = 0$. Из (5) имеем

$$\begin{aligned} \|x_1(t)\| &= \max_{0 \leq t \leq T} |x_1(t)| = \max_{0 \leq t \leq T} \left| \lambda \left\{ F[t; x_1(t - \tau(t))] - F[t; 0] + \right. \right. \\ &+ \int_0^{t-\tau(t)} K(t; s; 0) ds + \int_0^{t-\tau(t)} G[t; \gamma(s); 0; 0] \gamma'(s) ds \Big\} \Big| \leq \\ &\leq \lambda L_1 \max_{0 \leq t \leq T} |x_1(t - \tau(t))| + \lambda (K_0 + G_0 \gamma_0) T_0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|x_1(t)\| \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda L_1} (K_0 + G_0 \gamma_0) T_0 \leq \rho_0.$$

Допустим

$$\|x_{n-1}(t)\| \leq \rho_0$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_n(t)\| &= \max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ \|x_{n-1}(t)\| \leq \rho_0}} \left| \lambda \left\{ F[t; x_n(t - \tau(t))] - F[t; 0] + \right. \right. \\ &+ \int_0^{t-\tau(t)} K[t; s; x_{n-1}(s)] ds + \int_0^{t-\tau(t)} G[t; \gamma(s); x_{n-1}(\gamma(s)); x_{n-1}(s)] \gamma'(s) ds \Big\} \Big| \leq \\ &\leq \lambda L_1 \max_{0 \leq t \leq T} |x_n(t - \tau(t))| + \lambda (K_0 + G_0 \gamma_0) T_0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (6) получим

$$\|x_n(t)\| \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda T_1} T_0 (K_0 + G_0 \gamma_0) \leq \rho_0.$$

На основе метода математической индукции утверждаем, что

$$\|x_n(t)\| \leq \rho_0$$

при всех $n = 0, 1, 2, \dots$

Теперь докажем, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится равномерно на $[0; T]$. Из (5) имеем

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &= \max_{0 \leq t \leq T} |x_2(t) - x_1(t)| = \\ &= \max_{0 \leq t \leq T} \left| \lambda \left\{ F[t; x_2(t - \tau(t))] - F[t; x_1(t - \tau(t))] + \right. \right. \\ &- K(t; s; 0) ds + \int_0^{t-\tau(t)} (G[t; \gamma(s); x_1(\gamma(s); x_1(s)) - \\ &- G[t; \gamma(s); 0; 0]) \gamma'(s) ds \Big\} \Big| \leq \lambda L_1 \max_{0 \leq t \leq T} |x_2(t - \tau(t)) - \\ &- x_1(t - \tau(t))| + \lambda L_2 \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^{t-\tau(t)} |x_1(s) - 0| ds + \lambda L_3 \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^{t-\tau(t)} |x_1(\gamma(s)) - 0| ds \end{aligned}$$

$$+ |x_1(s)| |\gamma'(s)| ds \leq \lambda L_1 \|x_2(t) - x_1(t)\| + \lambda (L_2 + L) \rho_0 \max_{0 \leq t \leq T} \varphi_1(t).$$

Отсюда

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq \rho_0 \frac{\lambda (L_2 + L)}{1 - \lambda L_1} \max_{0 \leq t \leq T} \varphi_1(t) = \rho_0 q_1 \max_{0 \leq t \leq T} \varphi_1(t),$$

где

$$\varphi_1(t) = \int_0^{t-\tau(t)} ds.$$

Допустим,

$$\|x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)\| \leq \rho_0 q_1^{n-2} \max_{0 \leq t \leq T} \varphi_{n-2}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| &\leq \max_{0 \leq s, t \leq T} \left| \lambda \left\{ F[t; x_n(t - \tau(t))] - F[t; x_{n-1}(t - \tau(t))] + \right. \right. \\ &+ \int_0^{t-\tau(t)} K[t; s; x_{n-1}(s)] - K[t; s; x_{n-2}(s)] ds + \\ &+ \int_0^{t-\tau(t)} (G[t; \gamma(s); x_{n-1}(\gamma(s)); x_{n-1}(s)] - G[t; \gamma(s); x_{n-2}(\gamma(s)); x_{n-2}(s)]) \gamma'(s) ds \Big\} \Big| \leq \\ &\leq \lambda L_1 \max_{0 \leq t \leq T} |x_n(t - \tau(t)) - x_{n-1}(t - \tau(t))| + \\ &+ \lambda L_2 \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^{t-\tau(t)} |x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)| ds + \lambda L_3 \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^{t-\tau(t)} [|x_{n-1}(\gamma(s)) - x_{n-2}(\gamma(s))| + |x_{n-1}(\gamma(s)) - x_{n-2}(\gamma(s))| |\gamma'(s)|] ds \leq \\ &\leq \lambda L_1 \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| + \lambda (L_2 + L) \rho_0 q_1^{n-2} \max_{0 \leq t \leq T} \varphi_{n-1}(s) ds. \end{aligned}$$

На основе метода математической индукции утверждаем, что

$$\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| \leq \rho_0 q_1^{n-1} \max_{0 \leq t \leq T} \varphi_{n-1}(t)$$

при всех $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, последовательность приближений (5) равномерно сходится, следовательно,

$$\bar{x}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Очевидно, что функция $\bar{x}(t)$ будет непрерывной на $[0; T]$ и в силу (5) $\bar{x}(t) \equiv 0$ на E_0 . Следовательно,

$$\bar{x}(t) - x_n(t) \equiv 0 \text{ на } E_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Переходя к пределу в равенствах (5), получаем, что $\bar{x}(t)$ является решением задачи (1)–(2).

Аналогичным образом легко можно доказать, то

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq \rho_0 q_1^n \max_{0 \leq t \leq T} \varphi_n(t),$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T} \varphi_n(t) = 0.$$

Доказательство единственности проводится аналогично доказательству единственности теоремы 1.

2°. Вышеуказанные общие теоремы применим к исследованию решения следующей задачи:

$$x''(t) + \lambda \{x''(t - \tau(t)) + f[t; x(t); x(t - \tau(t))]\} = 0, \quad (7)$$

$x(t) \equiv 0$ на E_0 , $t \in [0, T]$,
 где $\tau(t) \geq 0$ — непрерывно дифференцируемая функция на $[0; T]$; кроме того, предполагается, что функция $t - \tau(t)$ обратимая, и обратная функция, обозначаемая через $\gamma(t)$, имеет производные до четвертого порядка на $[0; T]$; $f(t; x; y)$ — непрерывная на $[0; T]$ ($0 \leq t \leq T$; $\|x\|, \|y\| \leq \rho_0$), удовлетворяющая условию Липшица по второму и третьему аргументам; λ — действительный параметр, причем

$$0 < \lambda < \frac{1}{A_0 + T(B_0 + K_0)}, \quad (8)$$

где $A_0 = \max_{0 \leq t \leq T} |A(t)|$, $B_0 = \max_{0 \leq s, t \leq T} |B(t; s)|$ и K_0 — положительное число, связанное с постоянной Липшица и $\gamma'(t)$.

Нетрудно показать, что задача (7)–(8) эквивалентна следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$x(t) = -\lambda \left\{ \int_0^t (t-s) x''(s - \tau(s)) ds + \int_0^t (t-s) f[s; x(s); x(s - \tau(s))] ds \right\} \quad (9)$$

с начальным условием (8). После соответствующих преобразований уравнение (9) приводится к виду

$$x(t) = \lambda \left\{ A(t) x(t - \tau(t)) + \int_0^{t-\tau(t)} B(t; s) x(s) ds + \int_0^t G[t; s; x(s); x(s - \tau(s))] ds \right\} \quad (10)$$

с начальным условием

$$x(t) \equiv 0 \text{ на } E_0, \quad (11)$$

здесь

$$A(t) = -\gamma'^2[t - \tau(t)], \quad B(t; s) = -[\gamma'''(s)(t - \gamma(s)) - 3\gamma'(s)\gamma''(s)]$$

с

$$G[t; s; x(s); x(s - \tau(s))] = -(t-s)f[s; x(s); x(s - \tau(s))].$$

В силу вышедоказанных теорем задача (10)–(11) имеет единственное решение.

В заключение выражаю благодарность руководителю Р. М. Алиеву за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Р. М. и Алескерров А. Г. О краевой задаче для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Вторая научн. конф. УДН (1966).
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
3. Мамедов Я. Д. К теории решений нелинейных операторных уравнений типа Вольтерра. СМЖ 5:6 (1964).
4. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М., 1965.
5. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., «Наука», 1964.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 30. III 1970

А. Н. Элэскеров

Бир синиф интегрофункционал тэнликлэр наггында

ХУЛАСƏ

Тəдгигатда

$$x(t) = \lambda \left\{ F[t; x(t - \tau(t))] + \int_0^{t-\tau(t)} K[t; s; x(s)] ds + \int_0^t G[t; s; x(s); x(s - \tau(s))] ds \right\}$$

интегрофункционал тэнлик үчүн башлангыч мәсələјə бахылмышдыр. Мүхтəлиф јахынлашмалар гурмагла һəллин варлыгы. јеканəлији вə јығылма сүр'əти өјрəнилмишдир.

Ишин икинчи һиссəсиндə алынмыш нəтичəлэр

$$x''(t) + \lambda \{ x''(t - \tau(t)) + f[t; x(t); x(t - \tau(t))] \} = 0$$

тəнлији үчүн гојулмуш башлангыч мәсələјə тəтбиг едилмишдир.

Тəдгигатлардан алыннан нəтичəлэр 1 вə 2 теоремлэри вəситəсилə ифадə олунмушдур.

Н. А. БУЧАЕВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ДВОЙНОГО РЯДА ФУРЬЕ

Пусть периодическая функция $f(x, y)$ периода 2π относительно каждой из переменных принадлежит $L^2[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ и пусть

$$f(x, y) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} (a_{mn} \cos mx \cdot \cos ny + b_{mn} \sin mx \cdot \cos ny + c_{mn} \cos mx \cdot \sin ny + d_{mn} \sin mx \cdot \sin ny)$$

является ее рядом Фурье, где числа $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$;

$$\left(\lambda_{0,0} = \frac{1}{4}; \lambda_{0,n} = \frac{1}{2}; \lambda_{m,0} = \frac{1}{2}; \lambda_{m,n} = 1 \right).$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta_{xh} \Delta_{yk} f(x, y) &= f(x+h, y+k) - f(x-h, y+k) - \\ &\quad - f(x+h, y-k) + f(x-h, y-k), \\ \Delta_{xh} f(x, y) &= f(x+h, y) - f(x-h, y), \\ \Delta_{yk} f(x, y) &= f(x, y+k) - f(x, y-k); \\ \rho_{mn}^2(f) &= a_{mn}^2(f) + b_{mn}^2(f) + c_{mn}^2(f) + d_{mn}^2(f), \\ \rho_{m0}^2(f) &= a_{m0}^2(f) + b_{m0}^2(f), \\ \rho_{0n}^2(f) &= a_{0n}^2(f) + c_{0n}^2(f). \end{aligned}$$

Пусть известно поведение двойного ряда Фурье функции $f(x, y)$. Как ведет себя двойной ряд Фурье функции $g(x, y)$, связанной с $f(x, y)$ соотношениями

$$\left. \begin{aligned} |\Delta_{xh} \Delta_{yk} g(x, y)| &\leq |\Delta_{xh} \Delta_{yk} f(x, y)|, \\ |\Delta_{xh} g(x, y)| &\leq |\Delta_{xh} f(x, y)|, \\ |\Delta_{yk} g(x, y)| &\leq |\Delta_{yk} f(x, y)|, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при всех x и y ?

Под I_1, I_2, I_3 будем понимать:

$$I_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty} (m \cdot n)^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (\kappa l)^2 \cdot [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} +$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{m,n=1}^{\infty} m^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot n^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_2(n) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{l=n+1}^{\infty} \kappa^2 \cdot [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} + \\ &+ \sum_{m,n=1}^{\infty} m^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \omega_1(m) \cdot \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{l=1}^n l^2 \cdot [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} + \\ &+ \sum_{m,n=1}^{\infty} (m \cdot n)^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_1(m) \cdot \omega_2(n) \cdot \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{l=n+1}^{\infty} [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^m i^2 \cdot [\omega_1(i)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{i,0}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_1(m) \cdot \left\{ \sum_{i=m+1}^{\infty} [\omega_1(i)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{i,0}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \kappa^2 \cdot [\omega_2(\kappa)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{0,\kappa}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_2(n) \cdot \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} [\omega_2(\kappa)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{0,\kappa}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ суть 2π -периодические функции относительно каждой из переменных из $L^2[0, 2\pi; 0, 2\pi]$, связанные между собой соотношениями (1), и пусть $\rho_{mn}(f) \leq \gamma_{mn}$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$). Тогда, если при некотором $\alpha \in \left(\frac{2}{3}; 2\right)$

$$I_0 + I_1 + I_2 + I_3 < \infty, \quad (2)$$

то $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_1(m) \cdot \omega_2(n) \cdot \rho_{mn}^{\alpha}(g) < \infty$, где функции $\omega_i(m)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$a) \sum_{n=N}^{2N} n^{-\frac{3}{2}\alpha} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \kappa^2 \cdot [\omega_i(\kappa)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa,n}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \geq c \cdot N^{1-\frac{3}{2}\alpha} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^N \kappa^2 \cdot [\omega_i(\kappa)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa,n}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}};$$

$$б) N^{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_i(N) \cdot \left\{ \sum_{k=N+1}^{\infty} [\omega_i(\kappa)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa,n}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = o\left(\frac{1}{N}\right);$$

$$в) [\omega_i(m)]^{\frac{1}{\alpha}} \geq 1.$$

Доказательство. Нетрудно показать, что

$$\Delta_{xh} \Delta_{yk} f(x, y) \sim 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn}(x, y) \sin mh \cdot \sin nk,$$

где $D_{mn}(x, y) = d_{mn} \cos mx \cos ny - b_{mn} \cos mx \sin ny -$
 $- c_{mn} \sin mx \cos ny + a_{mn} \sin mx \sin ny.$

Так как по условию теоремы

$$|\Delta_{xh} \Delta_{yk} g(x, y)| \leq |\Delta_{xh} \Delta_{yk} f(x, y)|,$$

то последнее можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_{xh} \Delta_{yk} g(x, y)|^2 dx dy \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_{xh} \Delta_{yk} f(x, y)|^2 dx dy. \quad (3)$$

Тогда, применяя равенство Парсеваля, положив

$$h = \frac{\pi}{2\varphi_1(m)}, \quad \kappa = \frac{\pi}{2\varphi_2(n)},$$

из (3) и из условия $\rho_{mn}(f) \leq \gamma_{mn}$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \rho_{kl}^2(g) \cdot \sin^2 \frac{\kappa \pi}{2\varphi_1(m)} \cdot \sin^2 \frac{l\pi}{2\varphi_2(n)} &\leq \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \rho_{kl}^2(f) \cdot \sin^2 \frac{\kappa \pi}{2\varphi_1(m)} \cdot \sin^2 \frac{l\pi}{2\varphi_2(n)} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{kl}^2 \cdot \sin^2 \frac{\kappa \pi}{2\varphi_1(m)} \cdot \sin^2 \frac{l\pi}{2\varphi_2(n)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть

$$\Phi_{n,m} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n [\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^a \cdot \rho_{kl}^a(g), \quad \Phi_{0,0} = 0, \quad \frac{2}{3} < a < 2, \quad (5)$$

$n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots$. Тогда, применяя неравенство Гельдера, получим

$$\Phi_{m,n} \leq (m \cdot n)^{\frac{2-a}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n [\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^2 \cdot \rho_{kl}^2(g) \right\}^{\frac{a}{2}}. \quad (6)$$

Поскольку из (5) следует

$$\omega_1(m) \cdot \omega_2(n) \cdot \rho_{mn}^a(g) = (m \cdot n)^{-a} \cdot (\Phi_{m,n} - \Phi_{m-1,n} - \Phi_{m,n-1} + \Phi_{m-1,n-1}),$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \omega_1(m) \cdot \omega_2(n) \cdot \rho_{mn}^a(g) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (m \cdot n)^{-a} \times \\ &\times (\Phi_{m,n} - \Phi_{m-1,n} - \Phi_{m,n-1} + \Phi_{m-1,n-1}). \end{aligned}$$

С помощью преобразования Абеля для двойных рядов Фурье имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \omega_1(m) \cdot \omega_2(n) \cdot \rho_{mn}^a(g) &= \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(m+1)^a - m^a}{m^a \cdot (m+1)^a} \times \\ &\times \frac{(n+1)^a - n^a}{n^a \cdot (n+1)^a} \cdot \Phi_{m,n} + M^{-a} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^a - n^a}{n^a \cdot (n+1)^a} \cdot \Phi_{M,n} - \\ &- \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(n+1)^a - n^a}{n^a \cdot (n+1)^a} \cdot \Phi_{0,n} + N^{-a} \cdot \sum_{m=1}^{M-1} \frac{(m+1)^a - m^a}{m^a \cdot (m+1)^a} \cdot \Phi_{M,n} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ N^{-a} \cdot M^{-a} \cdot \Phi_{M,N} - N^{-a} \cdot \Phi_{0,N} - \\ &- \sum_{m=1}^{M-1} \frac{(m+1)^a - m^a}{m^a \cdot (m+1)^a} \cdot \Phi_{m,0} - M^{-a} \cdot \Phi_{M,0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из теоремы о конечных приращениях Лагранжа можно получить

$$(n+1)^a - n^a \leq c(a) \cdot n^{a-1}, \quad a > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Используя такого типа неравенства и (6), из (7) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \omega_1(m) \cdot \omega_2(n) \cdot \rho_{mn}^a(g) &\leq c^2(a) \cdot \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} (m \cdot n)^{-a-1} \cdot \Phi_{m,n} + \\ &+ c(a) \cdot M^{-a} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} n^{-a-1} \cdot \Phi_{M,n} + c(a) \cdot N^{-a} \cdot \sum_{m=1}^{M-1} m^{-a-1} \cdot \Phi_{m,N} + \\ &+ N^{-a} \cdot M^{-a} \cdot \Phi_{M,N} + S^{(1)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= -c(a) \cdot \sum_{n=1}^{N-1} n^{-a-1} \cdot \Phi_{0,n} - N^{-a} \cdot \Phi_{0,N} - c(a) \times \\ &\times \sum_{m=1}^{M-1} m^{-a-1} \cdot \Phi_{m,0} - M^{-a} \cdot \Phi_{M,0}. \end{aligned}$$

Так как сходимость $S^{(1)}$ будет вытекать из сходимости I_0 из [2], то достаточно изучить в дальнейшем сходимость оставшейся части в (8):

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= c^2(a) \cdot \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} (m \cdot n)^{-a-1} \cdot \Phi_{m,n} + c(a) \cdot M^{-a} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} n^{-a-1} \cdot \Phi_{M,n} + \\ &+ c(a) \cdot N^{-a} \cdot \sum_{m=1}^{M-1} m^{-a-1} \cdot \Phi_{m,N} + N^{-a} \cdot M^{-a} \cdot \Phi_{M,N} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c^2(a) \cdot \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} (m \cdot n)^{-\frac{3a}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n [\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^2 \cdot \rho_{kl}^2(g) \right\}^{\frac{a}{2}} + \\ &+ c(a) \cdot M^{1-\frac{3a}{2}} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} n^{-\frac{3a}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^n [\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^2 \cdot \rho_{kl}^2(g) \right\}^{\frac{a}{2}} + \\ &+ c(a) \cdot N^{1-\frac{3a}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{M-1} m^{-\frac{3a}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^N [\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^2 \cdot \rho_{kl}^2(g) \right\}^{\frac{a}{2}} + \\ &+ (M \cdot N)^{1-\frac{3a}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N [\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^2 \cdot \rho_{kl}^2(g) \right\}^{\frac{a}{2}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \end{aligned} \quad (9)$$

Если покажем, что $S_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ограничены при $M, N \rightarrow \infty$, то этим сходимость $S^{(2)}$ будет доказана, а значит и ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_1(m) \cdot \omega_2(n) \cdot \rho_{mn}^a(g)$$

будет сходиться.

Так как $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то из (4) вытекает

$$\sum_{\kappa=1}^m \sum_{l=1}^n [\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^2 \cdot \rho_{\kappa l}^2(g) \leq [\varphi_1(m) \cdot \varphi_2(n)]^2 \times$$

$$\times \sum_{\kappa, l=1}^{\infty} \frac{[\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^2}{\kappa^2 \cdot l^2} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \cdot \sin^2 \frac{\kappa \pi}{2 \varphi_1(m)} \cdot \sin^2 \frac{l \pi}{2 \varphi_2(n)}.$$

Следовательно, для S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) из (9) будем иметь:

$$S_1 \leq c^2(\varepsilon) \cdot \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} (m \cdot n)^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot [\varphi_1(m) \cdot \varphi_2(n)]^2 \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{[\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^2}{\kappa^2 \cdot l^2} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \cdot \sin^2 \frac{\kappa \pi}{2 \varphi_1(m)} \cdot \sin^2 \frac{l \pi}{2 \varphi_2(n)} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (10)$$

$$S_2 \leq c(\varepsilon) \cdot M^{1-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot [\varphi_1(M) \cdot \varphi_2(n)]^2 \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{[\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^2}{\kappa^2 \cdot l^2} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \cdot \sin^2 \frac{\kappa \pi}{2 \varphi_1(M)} \cdot \sin^2 \frac{l \pi}{2 \varphi_2(n)} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (11)$$

$$S_3 \leq c(\alpha) \cdot N^{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{M-1} m^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot [\varphi_1(m) \cdot \varphi_2(N)]^2 \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{[\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^2}{\kappa^2 \cdot l^2} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \cdot \sin^2 \frac{\kappa \pi}{2 \varphi_1(m)} \cdot \sin^2 \frac{l \pi}{2 \varphi_2(N)} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (12)$$

$$S_4 \leq (N \cdot M)^{1-\frac{3\alpha}{2}} \cdot [\varphi_1(M) \cdot \varphi_2(N)]^2 \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\kappa, l=1}^{\infty} \frac{[\varphi_1(\kappa) \cdot \varphi_2(l)]^2}{\kappa^2 \cdot l^2} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \cdot \sin^2 \frac{\kappa \pi}{2 \varphi_1(M)} \cdot \sin^2 \frac{l \pi}{2 \varphi_2(N)} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (13)$$

С помощью неравенств $(|a| + |b|)^{\beta} \leq |a|^{\beta} + |b|^{\beta}$, $0 < \beta \leq 1$ (см. [1], стр. 31), $|\sin x| \leq |x|$, $|\sin x| \leq 1$ из (10), учитывая $\omega_i(m) = m^{-\alpha} \times [\varphi_i(m)]^2$ ($i = 1, 2$), находим

$$S_1 \leq c_1(\alpha) \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (m \cdot n)^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{\kappa=1}^m \sum_{l=1}^n (\kappa l)^2 \cdot [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ c_2(\alpha) \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N m^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot n^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_2(n) \cdot \left\{ \sum_{\kappa=1}^m \sum_{l=n+1}^{\infty} \kappa^2 \cdot [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ c_3(\alpha) \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N m^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \omega_1(m) \cdot \left\{ \sum_{\kappa=m+1}^{\infty} \sum_{l=1}^n l^2 \cdot [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ c_4(\alpha) \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (m \cdot n)^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_1(m) \cdot \omega_2(n) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\kappa=m+1}^{\infty} \sum_{l=n+1}^{\infty} [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Но в силу условий теоремы (2) и а), б), в) ряды, стоящие в последнем соотношении, сходятся при $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, т. е.

$$S_1 = 0(1) \text{ при } M \rightarrow \infty \text{ и } N \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Аналогично получим

$$S_2 \leq c_1'(\alpha) \cdot M^{1-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \sum_{n=1}^N n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{\kappa=1}^M \sum_{l=1}^n (\kappa \cdot l)^2 \cdot [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ c_2'(\alpha) \cdot M^{1-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \sum_{n=1}^N n^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_2(n) \cdot \left\{ \sum_{\kappa=1}^M \sum_{l=n+1}^{\infty} \kappa^2 \cdot [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ c_3'(\alpha) \cdot M^{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_1(M) \cdot \sum_{n=1}^N n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{\kappa=M+1}^{\infty} \sum_{l=1}^n l^2 \cdot [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ c_4'(\alpha) \cdot M^{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_1(M) \cdot \sum_{n=1}^N n^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_2(n) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\kappa=M+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (15)$$

Учитывая (2) и условия а), б), в), заключаем, что

$$\sum_{m=M}^{2M} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{\kappa=1}^m \sum_{l=1}^n (\kappa \cdot l)^2 \cdot [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} >$$

$$> c_1'(\alpha) \cdot M^{1-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \sum_{n=1}^N n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{\kappa=1}^M \sum_{l=1}^n (\kappa l)^2 \cdot [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = T_1, \quad (16)$$

т. е. $T_1 = 0(1)$ при $M \rightarrow \infty$.

Аналогично найдем

$$T_2 = 0(1) \text{ при } M \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Таким же путем доказываются и соотношения

$$T_k = 0(1) \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (\kappa = 3, 4). \quad (18)$$

Таким образом, согласно (16)–(18) и условиям а), б), в) будем иметь

$$S_2 = 0(1) \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (19)$$

стало быть, аналогично

$$S_3 = 0(1) \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (20)$$

Используя снова формулу (4) и условия теоремы, получим

$$S_4 \leq \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} (m \cdot n)^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega_1(m) \cdot \omega_2(n) \cdot \left\{ \sum_{\kappa, l=1}^{\infty} [\omega_1(\kappa) \cdot \omega_2(l)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_{\kappa l}^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} < \infty. \quad (21)$$

Из (9), (14), (19)–(21) следует

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_1(m) \cdot \omega_2(n) \cdot \rho_{mn}^{\alpha}(g) < \infty.$$

И, наконец,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \omega_1(m) \cdot \rho_{m0}^{\alpha}(g) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_2(n) \cdot \rho_{0n}^{\alpha}(g) < \infty$$

вытекают из конечности I_0 , где I_0 определена условием (3) работы [2]. И условий а), б), в), что и доказывает теорему.

В заключение выражаю благодарность доценту А. С. Джафарову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.
2. Н. А. Бучаев. Некоторые свойства коэффициентов Фурье. ИАН Азерб. ССР, 1970, № 5, 22–27.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 10. IV 1970

Н. А. Бучаев

Икигат Фурје сырасынын эмсалларынын бэзи хассэлэри

ХҮЛАСӨ

Тэдгигатларда $f(x, y)$ вэ $g(x, y)$ Фурје функцијаларынын икигат сырлары эмсалларынын x вэ y -ин бүтүн гијмэтлэриндэ ашағыдакы мүнәсибэтлэ бағлы олан характери өјрәнилмишдир:

$$|\Delta_{xh} \Delta_{yk} g(x, y)| \leq |\Delta_{xh} \Delta_{yk} f(x, y)|,$$

$$|\Delta_{xh} g(x, y)| \leq |\Delta_{xh} f(x, y)|, \quad |\Delta_{yk} g(x, y)| \leq |\Delta_{yk} f(x, y)|$$

бурада $\Delta_{xh} \Delta_{yk} g(x, y)$, $\Delta_{xh} g(x, y)$, $\Delta_{yk} g(x, y)$ — $g(x, y)$ функцијасынын сонлу фэрглэридир.

М. Б. А. БАБАЕВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим приближение многочлена двух переменных

$$z = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n A_{pq} x^p y^q, \quad A_{pq} \geq 0,$$

на прямоугольнике $Q = [a, b; c, d]$, $a, c \geq 0$, посредством всевозможных функций вида $\varphi(x) + \psi(y)$ в метрике пространства C . В данной статье описан простой способ нахождения наилучшей приближающей функции такого приближения.

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная в Q функция. Определим

$$E[f, \varphi + \psi, Q]_C = E[f] = \inf_{\varphi + \psi} \|f - (\varphi + \psi)\|; \quad \|f\| = \sup_{x, y \in Q} |f|.$$

Через Π обозначим класс функций двух переменных $f(x, y)$, обладающих свойством: для произвольных $x'' \geq x'$, $y'' \geq y'$ из Q справедливо

$$f(x'', y'') + f(x', y') \geq f(x'', y') + f(x', y'').$$

Нами было показано [1], что класс Π шире класса функций, для которых $f_{xy} \geq 0$. Учитывая

$$\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n A_{pq} x^p y^q = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} x^p y^q + \sum_{q=1}^n A_{p0} y^q + \sum_{p=0}^m A_{p0} x^p,$$

закключаем, что

$$E \left[\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n A_{pq} x^p y^q, \varphi + \psi \right] = E \left[\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} x^p y^q \right],$$

и если $\varphi_0 + \psi_0$ является наилучшей приближающей многочлена $\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n A_{pq} x^p y^q$, то $\varphi_0 + \psi_0 - \left(\sum_{q=1}^n A_{0q} y^q + \sum_{p=0}^m A_{p0} x^p \right)$ является наилуч-

шей приближающей многочлена $\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} x^p y^q$. Поэтому в дальней-

шем будем полагать $z = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} x^p y^q$.

Предполагаем следующий метод α определения наилучшей приближающей функции:

$$z = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} x^p y^q;$$

где

$$z_1 = z; \quad z_{2n} = z_{2n-1} - g_n; \quad z_{2n+1} = z_{2n} - h_n,$$

$$g_n = g_n(x) = \frac{1}{2} \left[\max_{c < y < d} z_{2n-1} + \min_{c < y < d} z_{2n-1} \right];$$

$$h_n = h_n(y) = \frac{1}{2} \left[\max_{a < x < b} z_{2n} + \min_{a < x < b} z_{2n} \right];$$

$$\max z = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \max A_{pq} x^p y^q,$$

$$\min z = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \min A_{pq} x^p y^q,$$

т. е. $\max z$ означает сумму максимумов всех членов, а $\min z$ — сумму минимумов всех членов многочлена. Очевидно,

$$\max z \geq \max z, \quad \min z \leq \min z.$$

Обозначим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g_k(x) = g_0(x) = g_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n h_k(y) = h_0(y) = h_0.$$

Утверждаем, что

$$\rho[z, g_0 + h_0] = E[z], \quad \text{т. е. } g_0(x) + h_0(y)$$

является наилучшей приближающей функцией.

Нам потребуются некоторые вспомогательные факты.

Лемма 1. Если для неотрицательных чисел c, d, y при некотором фиксированном i

$$y^i \geq \frac{1}{2} (c^i + d^i), \quad a \quad y^{i+1} < \frac{1}{2} (c^{i+1} + d^{i+1}),$$

то

$$y^{i+k} < \frac{1}{2} (c^{i+k} + d^{i+k}), \quad k = 2, 3, \dots \quad (1)$$

Доказательство. Сначала установим справедливость (1) при $k = 2$, т. е.

$$y^{i+2} < \frac{1}{2} (c^{i+2} + d^{i+2}). \quad (2)$$

В силу условия леммы

$$c^{i+1} + d^{i+1} > y (c^i + d^i). \quad (3)$$

Определим числа

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} (c^{i+2} + d^{i+2})}{c^{i+1} + d^{i+1}}, \quad \beta = \frac{y^{i+1}}{c^i + d^i}.$$

Для доказательства (2) достаточно установить справедливость

$$\alpha \geq \beta, \quad (4)$$

так как умножением этого неравенства на (3) получается (2). Исходя из $(c - d)^2 \geq 0$, получим

$$c^i d^i (c^2 + d^2) \geq 2 c^{i+1} d^{i+1}$$

или

$$(c^i + d^i) (c^{i+2} + d^{i+2}) \geq (c^{i+1} + d^{i+1})^2.$$

Или в силу условия леммы

$$(c^i + d^i) (c^{i+2} + d^{i+2}) > 2 y^{i+1} (c^{i+1} + d^{i+1}).$$

Разделяя последнее неравенство на $2(c^i + d^i)(c^{i+1} + d^{i+1})$, получим (4). Итак, соотношение (1) установлено для $k = 2$. Теперь пусть оно справедливо при некотором $k = n$:

$$y^{i+n} < \frac{1}{2} (c^{i+n} + d^{i+n}). \quad (5)$$

Покажем, что справедливо

$$y^{i+n+1} < \frac{1}{2} (c^{i+n+1} + d^{i+n+1}). \quad (6)$$

Исходя из очевидного неравенства:

$$c^i d^i (d - c) (d^n - c^n) \geq 0,$$

получим

$$c^i d^{i+n+1} + c^{i+n+1} d^i \geq c^{i+1} d^{i+n} + c^{i+n} d^{i+1}$$

или

$$(c^i + d^i) (c^{i+n+1} + d^{i+n+1}) \geq (c^{i+n} + d^{i+n}) (c^{i+1} + d^{i+1}).$$

Воспользовавшись неравенством (5), будем иметь:

$$(c^i + d^i) (c^{i+n+1} + d^{i+n+1}) > 2 y^{i+n} (c^{i+1} + d^{i+1}). \quad (7)$$

Умножаем (3) на (7):

$$(c^{i+1} + d^{i+1}) (c^i + d^i) (c^{i+n+1} + d^{i+n+1}) > 2 y^{i+n+1} (c^i + d^i) (c^{i+1} + d^{i+1}),$$

Это дает нам (6).

В силу математической индукции лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если для неотрицательных чисел c, d и y $y < \frac{1}{2} (c + d)$, то

$$y^i < \frac{1}{2} (c^i + d^i), \quad i = 2, 3, \dots \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $i = 2$. Имеем

$$y^2 < \frac{1}{4} (c^2 + d^2). \quad (9)$$

Далее

$$c^2 + d^2 \geq 2cd, \quad 2(c^2 + d^2) \geq (c + d)^2.$$

Теперь из (9) получим $y^2 < \frac{1}{2} (c^2 + d^2)$. Неравенство (8) доказано

при $i = 2$. Пусть $y^k < \frac{1}{2} (c^k + d^k)$. Тогда в силу условия леммы

$$y^{k+1} = y^k \cdot y < \frac{1}{2} (c + d) \cdot \frac{1}{2} (c^k + d^k) = \frac{1}{4} (c^{k+1} + cd^k + c^k d + d^{k+1}),$$

остается показать, что

$$c^{k+1} + cd^k + c^k d + d^{k+1} \leq 2(c^{k+1} + d^{k+1})$$

или

$$c^{k+1} + d^{k+1} - cd^k - dc^k = (d^k - c^k) (d - c) \geq 0,$$

что, очевидно, справедливо.

В силу математической индукции лемма 2 доказана.

Следствие. Если $y^n \geq \frac{1}{2} (c^n + d^n)$, то $y^i \geq \frac{1}{2} (c^i + d^i)$, $i = 1,$

$2, \dots, n-1$. Действительно, наличие хотя одного неравенства

$$y^{i_0} < \frac{1}{2} (c^{i_0} + d^{i_0}), \quad i_0 \leq n-1, \quad \text{влекло бы в силу одной из лемм 1 и 2}$$

$$y^n < \frac{1}{2} (c^n + d^n).$$

Теорема 1. (см. [1]). Для произвольной непрерывной функции $f(x, y) \in \Pi$, определенной на прямоугольнике $Q = [a, b; c, d]$, справедливо

$$E[f, \varphi + \psi, Q]_c = \frac{1}{4}[f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)].$$

Теорема 2. Метод α позволяет получать наилучшую приближающую функцию вида $\varphi(x) + \psi(y)$ для многочленов

$$z = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} x^p y^q, \quad A_{pq} \geq 0,$$

на $[a, b; c, d]$, $a, c \geq 0$, и этой функцией является многочлен

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} \left[x^p (c^q + d^q) + y^q (a^p + b^p) - \frac{1}{2} (a^p + b^p) (c^q + d^q) \right].$$

Доказательство. Воспользуемся методом α :

$$\begin{aligned} z_1 &= z; \\ g_1(x) &= \frac{1}{2} \left[\max_y z + \min_y z \right]; \\ \max_y z &= \max_y z = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} d^q x^p, \\ \min_y z &= \min_y z = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} c^q x^p. \end{aligned}$$

Отсюда

$$g_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} (c^q + d^q) x^p;$$

$$z_2 = z_1 - g_1(x) = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} x^p \left[y^q - \frac{1}{2} (c^q + d^q) \right].$$

Используя леммы 1 и 2 и обозначая

$$A_{pq} b^p \left[y^q - \frac{1}{2} (c^q + d^q) \right] = L_1, \quad A_{pq} a^p \left[y^q - \frac{1}{2} (c^q + d^q) \right] = L_2,$$

имеем, если

$$y^l \geq \frac{1}{2} (c^l + d^l), \quad y^{l+1} < \frac{1}{2} (c^{l+1} + d^{l+1}), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \max_x z_2 &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^l L_1 + \sum_{p=1}^m \sum_{q=l+1}^n L_2, \\ \min_x z_2 &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=l+1}^n L_1 + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^l L_2, \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_1(y) &= \frac{1}{2} \left[\max_x z_2 + \min_x z_2 \right] = \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n L_1 + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n L_2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n (L_1 + L_2) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} (a^p + b^p) \left[y^q - \frac{1}{2} (c^q + d^q) \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что для произвольной фиксированной $y \in [c, d]$ существует натуральное l , $0 \leq l \leq n$, которое удовлетворяет

неравенствам (10). Следовательно, (11) имеет место на всем отрезке $[c, d]$. Далее

$$\begin{aligned} z_3 &= z_2 - h_1(y) = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} x^p \left[y^q - \frac{1}{2} (c^q + d^q) \right] - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} (a^p + b^p) \left[y^q - \frac{1}{2} (c^q + d^q) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} (c^q + d^q) \left[x^p - \frac{1}{2} (a^p + b^p) \right] + \\ &+ \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} y^q \left[x^p - \frac{1}{2} (a^p + b^p) \right] = u(x) = v(x, y). \end{aligned}$$

Учитывая, что $u(x)$ от y не зависит, имеем

$$\begin{aligned} \max_y z_3 &= u(x) + \max_y v(x, y), \\ \min_y z_3 &= u(x) + \min_y v(x, y). \end{aligned}$$

Очевидно, функции z_2 и $v(x, y)$ имеют одинаковый вид, лишь в $v(x, y)$ a, b, x и c, d, y поменялись ролями. Произведя аналогичные вычисления, получим

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \frac{1}{2} \left[\max_y z_3 + \min_y z_3 \right] = \frac{1}{2} \left[u(x) + \max_y v(x, y) + \right. \\ &+ u(x) + \min_y v(x, y) \left. \right] = u(x) + \frac{1}{2} \left[\max_y v(x, y) + \min_y v(x, y) \right] = \\ &= u(x) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} (c^q + d^q) \left[x^p - \frac{1}{2} (a^p + b^p) \right] = u(x) - u(x) = 0. \\ g_2(x) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда $z_4 = z_3 - g_2(x) = z_3 - 0 = z_3$; x и y в выражении z_3 равноправны. Поэтому, аналогично рассуждая, найдем

$$\begin{aligned} h_2(y) &= \frac{1}{2} \left[\max_x z_4 + \min_x z_4 \right] = \frac{1}{2} \left[\max_x z_3 + \min_x z_3 \right] = 0; \\ z_5 &= z_4 - h_2(y) = z_4 - 0 = z_4 = z_3. \end{aligned}$$

Продолжая процесс, будем иметь

$$z_n = z_3, \quad n \geq 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_3;$$

$$\sum_{k=1}^n g_k(x) = g_1(x), \quad \sum_{k=1}^n h_k(y) = h_1(y), \quad n \geq 1.$$

Предполагаемой наилучшей приближающей функцией будет

$$\begin{aligned} g_0(x) + h_0(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \{g_k(x) + h_k(y)\} = g_1(x) + h_1(y) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} x^p (c^q + d^q) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} (a^p + b^p) \left[y^q - \frac{1}{2} (c^q + d^q) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} \left[x^p (c^q + d^q) + y^q (a^p + b^p) - \frac{1}{2} (a^p + b^p) (c^q + d^q) \right]. \end{aligned}$$

Остается установить, что этот многочлен является наилучшим приближающим.

Покажем, что $z \in \Pi$; действительно, в силу предположений теоремы

$$z_{xy} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n p q_p A_q x^{p-1} y^{q-1} \geq 0.$$

Тогда, применяя теорему 1, получим

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{4} [z(b, d) + z(a, c) - z(a, d) - z(b, c)] = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} (b^p - a^p) (d^q - c^q). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \rho[z, g_0 + h_0]_c &= s \quad f - (g_0 + h_0) = \\ &= \max \left\{ \sup (f - g_0 - h_0), -\inf (f - g_0 - h_0) \right\}. \end{aligned} \quad (3')$$

Далее

$$z - g_0 - h_0 = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} \left[x^p - \frac{1}{2} (a^p + b^p) \right] \left[y^q - \frac{1}{2} (c^q + d^q) \right]. \quad (4')$$

В силу $a \leq x \leq b$ имеем

$$\begin{aligned} a^p &\leq x^p \leq b^p, \\ -\frac{1}{2} (b^p - a^p) &\leq x^p - \frac{1}{2} (a^p + b^p) \leq \frac{1}{2} (b^p - a^p), \end{aligned}$$

аналогично находим

$$-\frac{1}{2} (d^q - c^q) \leq y^q - \frac{1}{2} (c^q + d^q) \leq \frac{1}{2} (d^q - c^q).$$

Тогда из (4)

$$\begin{aligned} z - g_0 - h_0 &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} \left[x^p - \frac{1}{2} (a^p + b^p) \right] \left[y^q - \frac{1}{2} (c^q + d^q) \right] \leq \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} (b^p - a^p) (d^q - c^q) = E[z]. \end{aligned}$$

Но

$$z - g_0 - h_0 \leq E[z]$$

и

$$[z - g_0 - h_0](b, d) = E(z)$$

достигается. Поэтому

$$\sup_{x, y \in Q} (z - g_0 - h_0) = E(z);$$

аналогично находим

$$\inf_{x, y \in Q} (z - g_0 - h_0) = -E(z).$$

Тогда в силу (3)

$$\rho[z, g_0 + h_0] = E(z),$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Следствие 2. Среди всех функций вида $\varphi(x) + \psi(y)$ многочлен $\frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} \left(x^p + y^q - \frac{1}{2} \right)$ является наилучшей приближающей многочлена $\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} x^p y^q$, $A_{pq} \geq 0$, в квадрате $[0, 1; 0, 1]$.

Следствие 3. Многочлен $\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y - \frac{1}{4}$ является наилучшей приближающей xy в квадрате $[0, 1; 0, 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаев М.-Б. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук (в печати).

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 10. IV 1970

М.-Б. Э. Бабаев

Икидэјишэнли чоххэдлилэрин бирдэјишэнли функцијаларын чэмлэрилэ јахынлашдырылмасы һаггында

ХҮЛАСӘ

Тәклиф олунмуш үсулун көмәклији илә көстәрилир ки,

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} [x^p (c^q + d^q) + y^q (a^p + b^p) (c^q + d^q)]$$

чоһхәдлиси $[a, b; c, d]$, $a, c \geq 0$ дүзбучаглысында $z = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} x^p y^q$, $A_{pq} \geq 0$ чоһхәдлисини $\varphi(x) + \psi(y)$ шәклиндәки функцијалар ичәрисиндә ән јахшы јахынлашдырыр.

А. Д. ИСКЕНДЕРОВ

ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ФИЛЬТРУЮЩИХ СРЕД

Определение неизвестных характеристик нефтяного пласта имеет большое значение в практике, и не случайно, что для этой цели разработано много различных методов [1—5]. Одним из наиболее широко применяемых методов определения параметров пласта является обработка кривых восстановления забойного давления в скважинах после прекращения откачки.

В настоящей статье предлагается способ, при помощи которого одновременно могут быть определены распределение давления и меняющийся со времени коэффициент нефтепроницаемости пласта. При этом мы стремились не только разработать эффективный математический алгоритм, обеспечивающий высокую точность расчета, но и использовать легко наблюдаемые в практике величины для определения меняющихся физических характеристик сред.

В [3] и других работах приведено большое количество экспериментальных данных, показывающих, что „затухание“ коэффициента нефтепроницаемости в зависимости от продолжительности фильтрации имеет место для всех исследованных видов нефти и нефтеносных пород. Эти исследования свидетельствуют о наличии определенной закономерности указанного явления во времени. Ниже все рассуждения в основном приводятся для определения коэффициента непроницаемости, хотя буквально таким же образом могут быть определены и некоторые другие характеристики фильтрующих сред.

Основная идея предложенной методики заключается в том, что многие процессы подземной гидравлики описываются дифференциальными уравнениями [2, 5] и, как обычно, характеристики сред, где изучается рассматриваемый процесс, входят в коэффициенты дифференциальных уравнений. Таким образом, чтобы изучить процессы, протекающие в средах с неизвестными характеристиками, приходится решать дифференциальные уравнения с неизвестными коэффициентами. При этом необходимо задавать дополнительные данные о решении задачи. В нашем случае, кроме распределения давления на границах пласта, дебит в забое также считается заданным.

Рассмотрим радиально-симметричный пласт, внешний и внутренний радиусы которого, соответственно, R и r_0 . Распределение давления в таком пласте при упругом режиме фильтрации с учетом упругости пористой среды описывается уравнением

$$p(r, t) - a(t) b(t) [p_{rr}(r, t) + r^{-1} p_r(r, t)] = H(r, t), \quad (1)$$

где $r_0 \leq r \leq R$, $0 \leq t \leq T$, $p(r, t)$ — давление в точке с радиусом r в момент времени t , $a(t)$ — коэффициент нефтепроницаемости, $b(t)$ — другие известные характеристики пласта (модуль упругости жидкости, ее вязкость и др.), $H(r, t)$ — известная функция, характеризующая распределение источников. Если бы $a(t)$ была известна, то для однозначного определения распределения давления в пласте к уравнению (1) необходимо было бы присоединить еще условия на границе и при $t = 0$, которые можно брать в виде:

$$p(r_0, t) = f_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$p(R, t) = f_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$p(r, 0) = \varphi(r), \quad r_0 \leq r \leq R, \quad f_1(0) = \varphi(r_0), \quad f_2(0) = \varphi(R). \quad (4)$$

Если $a(t)$, неизвестна, тогда возникает вопрос: какие дополнительные условия достаточны для того, чтобы из (1) — (4) можно было бы одновременно определить $a(t)$ и $p(r, t)$?

Пусть, кроме условия (1) — (4), нам задано еще выражение дебита в забое:

$$g(t) = -a(t) c(t) p_r(r_0, t), \quad 0 < t \leq T. \quad (5)$$

где $c(t)$ — известная функция.

Оказывается условие (5) достаточно для того, чтобы из (1) — (5) можно было определить $a(t)$, $p(r, t)$. Именно, при надлежащих условиях доказывается, что существуют единственные $a(t)$ и $p(r, t)$, которые удовлетворяют условиям (1) — (5). На изложении этих вопросов и других теоретических исследований, связанных с задачей (1) — (5), здесь останавливаться не будем.

Укажем один эффективный способ для нахождения $a(t)$ и $p(r, t)$ из условий (1) — (5). Для этого сперва преобразуем систему (1) — (5): положим

$$x = \ln r; \quad u(x, t) = p(e^x, t), \quad \psi(x) = \varphi(e^x), \quad F(x, t) = H(e^x, t),$$

$$\text{тогда } r = e^x, \quad x_0 \leq x \leq X, \quad x_0 = \ln r_0, \quad X = \ln R.$$

Задача (1) — (5) после такой замены примет вид:

$$u_t - a(t) b(t) e^{-2x} u_{xx} = F(x, t), \quad x_0 < x < X, \quad 0 < t \leq T, \quad (6)$$

$$u(x_0, t) = f_1(t), \quad u(X, t) = f_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x_0 \leq x \leq X, \quad \psi(0) = f_1(0), \quad \psi(X) = f_2(0), \quad (8)$$

$$-a(t) u_x(x_0, t) = r_0 c^{-1}(t) g(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (9)$$

Теперь укажем разностный алгоритм для нахождения решения $u(x, t)$, $a(t)$ из условий (6) — (9). Для этого разобьем отрезки $x_0 \leq x \leq X$ и $0 \leq t \leq T$ точками $x_i = ih$, ($i = 0, 1, 2, \dots, N$; $h > 0$, $Nh = X - x_0$) и $t_j = j\tau$ ($j = 0, 1, 2, \dots, M$; $\tau > 0$, $\tau M = T$) соответственно на N и M равных частей. Приближенное решение u_{ij} задачи (6) — (9) в узлах сетки (x_i, t_j) будем искать в виде решения следующей разностной задачи:

$$\delta_t u_{ij} - a_{j-1} e^{-2x_i} b_j \delta_{xx} u_{ij} = F_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (10)$$

$$u_{0j} = f_{1j}, \quad u_{Nj} = f_{2j}, \quad 0 \leq j \leq N, \quad (11)$$

$$u_{i0} = \psi_i, \quad 0 \leq i \leq N, \quad f_{10} = \psi_0, \quad f_{20} = \psi_N, \quad (12)$$

$$-a_j \delta_x u_{0j} = r_0 c_j^{-1} g_j, \quad 0 \leq j \leq M, \quad (13)$$

$$\text{где } \delta_t u_{ij} = \tau^{-1} (u_{ij} - u_{i,j-1}), \quad \delta_{xx} u_{ij} = h^{-2} (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}),$$

$$F_{ij} = F(x_i, t_j), \quad f_{1j} = f_1(t_j), \quad f_{2j} = f_2(t_j), \quad g_j = g(t_j), \quad b_j = b(t_j), \quad c_j = c(t_j),$$

$$\psi_i = \psi(x_i).$$

В системе (10) — (13) итерационный процесс осуществляется следующим образом: сначала по известному $a_0 = -r_0 c_0^{-1} g_0 (\delta_x \psi_0)^{-1} > 0$ из (10) — (12) находим u_{j1} . По найденным u_{j1} из (13) определяем a_1 .

После этого a_1 используется для осуществления следующего шага итерации и т. д.

Ясно, что для продолжимости этого итерационного процесса должно иметь место

$$c_j g_j \delta_x u_{0j} < 0 \quad (14)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots, M$. В реальных процессах условие (14) всегда выполняется. При надлежащих условиях на данные задачи его даже можно строго обосновать. Это следует из доказанного ниже утверждения для решения v_{ij} следующей разностной задачи:

$$\delta_{\bar{t}} v_{ij} - b_{ij} \delta_{\bar{x}\bar{x}} v_{ij} = F_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (15)$$

$$v_{0j} = f_{1j}, \quad v_{Nj} = f_{2j}, \quad 0 \leq j \leq M, \quad (16)$$

$$v_{j0} = \varphi_i, \quad 0 < i \leq N, \quad f_{10} = \varphi_0, \quad f_{20} = \varphi_N. \quad (17)$$

Утверждение. Пусть выполнены условия:

а) $f_{1j}, f_{2j} \geq 0$, $\varphi_i \geq 0$, $\delta_x \varphi_i < 0$, $\delta_x \varphi_0 < 0$, $\delta_{\bar{x}\bar{x}} \varphi_i \geq 0$, $f_{1j} - f_{2j} > 0$;

б) $b_{ij} > 0$, $c_j g_j > 0$, $F_{ij} \leq 0$, $\delta_{\bar{x}\bar{x}} F_{ij} \leq 0$, $0 \leq F_{0j} + \delta_{\bar{t}} f_{1j} \leq \nu c_{\max} g_{\min}$,

$0 \leq F_{Nj} + \delta_{\bar{t}} f_{2j} \leq \nu c_{\max} g_{\min}$,

ν — некоторое фиксированное число;

в) $b_{ij}, \delta_x b_{ij}, \delta_{\bar{x}\bar{x}} b_{ij}, F_{ij}, \delta_x F_{ij}, \delta_{\bar{x}\bar{x}} F_{ij}, \varphi_{ij}, \delta_x \varphi_i, \delta_{\bar{x}\bar{x}} \varphi_i, f_{1j}, f_{2j}, \delta_{\bar{t}} f_{1j}, \delta_{\bar{t}} f_{2j}, g_j, c_j$ равномерно ограничены при всех i, j и h и τ . Тогда для решения задачи (15) — (17) имеет место оценки

$$0 \leq v_{ij} \leq f_{\max} + T F_{\max}, \quad (18)$$

$$0 \leq \delta_{\bar{x}\bar{x}} v_{ij} \leq B = T_{\max} |\delta_{\bar{x}\bar{x}} F_{ij}| + \max |\delta_{\bar{x}\bar{x}} \varphi_i| + f_{\max}^2 + \nu b_{\min}^{-1} c_{\max} g_{\min}, \quad (19)$$

$$0 < (f_{1j} - f_{2j}) (X - x_0)^{-1} \leq -\delta_x v_{0j} \leq \left(f_{1j} - f_{2j} + \frac{1}{2} (X - x_0)^2 B \right) \times (X - x_0)^{-1}. \quad (20)$$

Действительно, оценка (18) следует из принципа максимума [6] для решения задачи (15) — (17). Докажем справедливость (19). Положим

$$w_{ij} = \delta_{\bar{x}\bar{x}} v_{ij} = b_{ij}^{-1} [F_{ij} + \delta_{\bar{t}} u_{ij}]. \quad (21)$$

Беря второе разностное отношение $\delta_{\bar{x}\bar{x}}$ от (15) и (17) и полагая в (21) $i = 0, i = N$, для w_{ij} получим задачу:

$$\delta_{\bar{t}} w_{ij} - b_{ij} w_{ij} - \delta_x b_{ij} \delta_x w_{ij} - \delta_x b_{ij} \delta_{\bar{x}\bar{x}} w_{ij} - \delta_{\bar{x}\bar{x}} b_{ij} w_{ij} = \delta_{\bar{x}\bar{x}} F_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (22)$$

$$w_{0j} = b_{0j}^{-1} [F_{0j} + \delta_{\bar{t}} f_{1j}]; \quad w_{Nj} = b_{Nj}^{-1} [F_{Nj} + \delta_{\bar{t}} f_{2j}], \quad 0 \leq j \leq M, \quad (23)$$

$$w_{i0} = \delta_{\bar{x}\bar{x}} \varphi_i, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (24)$$

Из этой задачи и принципа максимума [6] следует справедливость (19). Оценка (20) получается из очевидного тождества:

$$-\delta_x v_{0j} = [v_{0j} - v_{Nj} + h^2 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^n \delta_{\bar{x}\bar{x}} v_{kj}] (X - x_0)^{-1}. \quad (25)$$

Таким образом оценка (14) будет иметь место для всех $j = 0, 1, 2, \dots, M$. Следует отметить, что дифференциальный аналог оценок (18) — (20) используется для доказательства существования решения задачи (1) — (5) и обоснования метода последовательных приближений для нахождения решения. Доказывается сходимость задачи (10) — (13)

Замечания:

1) Если в уравнении (1) и условии (5) окажется $a(t)$ известным, а $b(t)$ — функцией, подлежащей определению, тогда после небольшой

модификации изложенного выше способа из (1) — (5) можно найти $b(t)$ и $u(x, t)$.

Если помимо $a(t)$ неизвестными окажутся еще и другие характеристики, то, кроме (5), задавая еще дополнительные условия, их можно также определить. По этой же методике можно изучить влияние различных факторов (температуры, механического состава породы и т. д.) на характеристики пласта.

2) Выше вместо (1) можно рассматривать более общее уравнение; разработан метод определения характеристик пласта, когда фильтрация происходит по более общему закону, чем закон Дарси. При рассмотрении бесконечного пласта существенных затруднений не возникает, увеличивается лишь число операций при расчете.

3) В практике часто возникает необходимость определения параметров пласта в стационарном случае. Этот случай рассматривается аналогично (1) — (5).

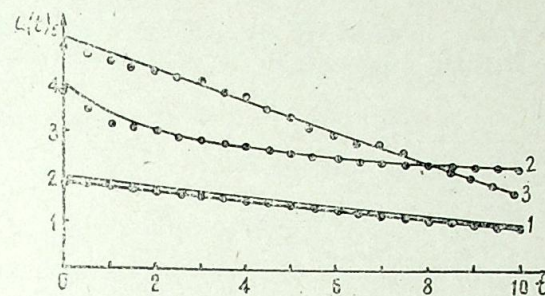


Рис.

4) В реальных условиях зависимость нефтепроницаемости от пространственных переменных также является естественной. Изложенная выше схема не дает возможности определить характеристики пласта в зависимости от пространственных переменных. Однако, взяв определенную модель в предположении, что характеристики от пространственных переменных известны (например, проницаемость взять в виде $a(x, a(t))$, где $a(x, q)$ — известная функция своих аргументов, $a(t)$ — неизвестная функция), по вышеизложенной схеме можно определить меняющиеся со временем неизвестные функции, входящие в выражение этих характеристик.

По вышеуказанным расчетным схемам проведен ряд численных экспериментов, которые показывают эффективность предложенных алгоритмов. Не останавливаясь подробно на описании этих расчетов, для сравнения в трех случаях укажем графики точного значения и результатов расчета. Сплошная линия — точное решение, кружки — расчетные точки (рис.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А., Умрихин И. Д. Об одном методе определения параметров пласта по наблюдениям неустановившегося режима притока к скважинам. М., 1957.
2. Чарный П. А., „Основы подземной гидродинамики“.
3. Требин Ф. А. Нефтепроницаемость песчаных коллекторов. Гостехиздат, 1945.
4. Баренблатт Г. И., Максимов В. А. „Изв. АН СССР, ОТН“, 1958, № 7.
5. Пихачев Г. Б. Подземная гидравлика. 1965.
6. Самарский А. А. ЖВМ и МФ, 1962, № 4.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 10. V 1970

Филтрасија едэн мүһитлэрин параметрлэрини тэјин етмэк
үчүн тэрс сэрһэд мәсәлэләри
ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда тэрс сэрһэд мәсәлэләри филтрасија едэн мүһитлэрин физики параметрлэрини вә өлчүлэрини тэјин етмэк үчүн тәтбиг олушдур. Гојулмуш мәсәләнин һәлли үчүн сонлу фәргләр үсулу әсәсләндирилмышдыр. Әдәди експериментләрә көрә гурулан графикләр мүһитин параметрлэрини тәјин етмэк үчүн тәклиф олунаң үсулун еффе́ктивлијини көстәрир.

Н. СВАРИЧЕВСКАЯ, М. ЯГУБОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Исследуем решение задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= V(v(t), v(t-\tau), \varepsilon), \\ v(t) &= \varphi(t) \text{ при } t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция, а ε — малый параметр. Известно, что [1, 2, 3] в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, когда запаздывание (т. е. $v(t-\tau)$) в правой части системы (1) отсутствует, ее называют возмущенной, а систему, которая получается при $\varepsilon = 0$, невозмущенной. Аналогично систему, получаемую из (1) при $\varepsilon = 0$, будем называть невозмущенной. Причем, предполагается, что члены с запаздыванием присутствуют только в возмущенной системе. Это означает, что $V(v(t), v(t-\tau), 0) \equiv U(v)$ и невозмущенная система имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = U(v). \quad (*)$$

Так как невозмущенная система связана с возмущенной, то начальное условие для последней должно задаваться в виде

$$v(0) = \varphi(0) = c. \quad (**)$$

Предположим, что решение задачи (*) — (**) на отрезке $[0, t]$ ($t < \infty$) известно. Обозначим его через $v(c, t)$. Наша цель — с помощью решений задачи (*) — (**) найти условие разделения движений системы (1) (ниже будет дано определение разделения движений) и такой замены переменных, которая приводит к разделению движений.

Авторы приносят благодарность проф. К. Т. Ахмедову за руководство работой.

§ 1. Разделение движений

Запишем систему (1) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= U(v) + \varepsilon V_1(v, v_\tau, \varepsilon), \\ v(t) &= \varphi(t) \text{ на } [-\tau, 0]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Будем искать решение возмущенного уравнения (2) в той же форме, в которой получено решение невозмущенной системы. Но тогда нужно считать, что c не постоянная, зависит от времени, т. е.

$$v = v(c(t), t). \quad (3)$$

Использованный прием аналогичен методу вариации произвольной постоянной для линейных систем.

Подставим (3) в уравнение возмущенного движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{dc}{dt} = U(v) + \varepsilon V_1(v, v_\tau, \varepsilon)$$

где

$$v_\tau = v(c(t-\tau), t-\tau),$$

а $\frac{\partial v}{\partial c}$ — матрица, элементы которой есть частные производные компонент вектора v по компонентам вектора c , и она не вырождена.

Так как $v(c, t)$ удовлетворяет невозмущенному уравнению

$$\frac{\partial v(c, t)}{\partial t} = U(v),$$

то, разрешая предыдущее уравнение относительно $\frac{dc}{dt}$ получим

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right)^{-1} V_1(v, v_\tau, \varepsilon) \quad (4)$$

Если ввести обозначение

$$\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right)^{-1} V_1(v, v_\tau, \varepsilon) = C,$$

уравнение (4) запишется в виде

$$\frac{dc}{dt} = C(c(t), c(t-\tau), t, \varepsilon) \quad (4')$$

при условии $c(t) = \psi(t)$ на начальном множестве $-\tau \leq t \leq 0$, причем $\psi(t)$ определяется из соотношения $\varphi(t) \equiv v(c(t), t)$ при $-\tau \leq t \leq 0$.

Предположим, что правая часть соотношения (4') не зависит от третьего аргумента, т. е. система не меняется со временем. Тогда ее значение можно найти при $t=0$. Но при $t=0$ $v(c, 0) = c$ и $\frac{\partial v}{\partial c} = E$, а

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= v(0) = c \\ \varphi(-\tau) &= v(-\tau) = c_1, \\ C &= V_1(c, c_1, \varepsilon). \end{aligned}$$

Уравнение для c в этом случае может быть записано иначе:

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon V_1(c, c_1, \varepsilon). \quad (5)$$

Из (3) ясно, что решение возмущенной системы получается следующим способом.

Достаточно совершенно независимо друг от друга решить уравнения (*) и (5), а затем решение последнего подставить вместо начальных данных c , имеющих в решении невозмущенного уравнения. Здесь невозмущенное уравнение описывает быстрое движение точки v по траектории невозмущенного движения.

Определение. Уравнение (5), определяющее медленно изменение параметров траектории, называется эволюционным по отношению к уравнению (2). Если в системе имеет место такая ситуация, то будем говорить про уравнение (2), что оно допускает разделение движений.

Как мы видели выше, необходимым и достаточным условием разделения движений является независимость от времени правой части уравнения (4). Это условие можно записать в форме равенства нулю

частной производной по времени правой части (4), которая имеет вид.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right)^{-1} \left(\frac{\partial V_1}{\partial v} U - \frac{\partial U}{\partial v} V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial v_\tau} \frac{dv_\tau}{dt} \right) = 0, \quad (6)$$

где $\frac{dv_\tau}{dt} = U(v_\tau)$.

Значит необходимым и достаточным условием разделения движений для системы (2) является выполнение равенства

$$\frac{\partial V_1}{\partial v} U - \frac{\partial U}{\partial v} V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial v_\tau} \frac{dv_\tau}{dt} = 0. \quad (7)$$

Это соотношение является аналогом условия разделения движений для возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [2].

§ 2. Замена переменных, приводящая к разделению движений

Из условия (7) видно, что осуществить разделение движений трудно, поскольку вид возможного возмущения ограничен. Но мы можем в исследуемом уравнении сделать такую замену переменных, которая приведет к форме, допускающей разделение движений. Нашей целью и является отыскание такой замены. Здесь мы используем малость ε .

Пусть заданное уравнение, подлежащее исследованию, имеет вид

$$\frac{du}{dt} = U_0(u) + \varepsilon U_1(u, u_\tau, \varepsilon) \equiv U_*(u, u_\tau, \varepsilon)$$

Введем новую переменную v вместо u так, чтобы при $\varepsilon = 0$ она совпадала бы со старой по формуле

$$u = v + \varepsilon Q_1(v, \varepsilon) \equiv Q(v, \varepsilon),$$

тогда

$$u_\tau = v_\tau + \varepsilon Q_1(v_\tau, \varepsilon) \equiv Q(v_\tau, \varepsilon).$$

Таким образом, замену переменных находим среди преобразований, бесконечно близких к тождественному при $\varepsilon \rightarrow 0$. Уравнение в новых переменных запишется в виде

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dQ}{dv} \right)^{-1} \frac{du}{dt}$$

или

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dQ}{dv} \right)^{-1} U_*(Q, Q', \varepsilon), \quad (8)$$

где $Q' = Q(v_\tau, \varepsilon)$,

Обозначая правую часть уравнения (8) через $V(v, v_\tau, \varepsilon)$ получим

$$\frac{dv}{dt} = V(v, v_\tau, \varepsilon). \quad (8')$$

Коэффициент Q_1 , подлежащий определению, надо подобрать так, чтобы уравнение (8') допускало разделение движений. А это равносильно, как мы видели, выполнению равенства (7), которое для наших целей запишется в виде

$$\frac{\partial V}{\partial v} U - \frac{\partial U}{\partial v} V + \frac{\partial V}{\partial v_\tau} \frac{dv_\tau}{dt} = 0.$$

Таким образом, для определения V и Q получим систему двух уравнений. Функция U_* задана. А при $\varepsilon = 0$ и $u = v$, $u_\tau = v_\tau$ и из (8) и (8') вытекает, что

$$U(v) \equiv V(v, v_\tau, 0) = U_*(v, v_\tau, 0) = U_0(u),$$

т. е. главный член у исходного уравнения и уравнения (8') одинаков.

Для дальнейших выкладок удобно систему уравнений записать следующим образом;

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dv} V(v, v_\tau, \varepsilon) - U_*(Q, Q', \varepsilon) &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial v} U &\equiv \frac{\partial U}{\partial v} V + \frac{\partial V}{\partial v_\tau} \frac{dv_\tau}{dt} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В целях определения коэффициентов асимптотических рядов используем разложения $V(v, v_\tau, \varepsilon)$ и $Q(v, \varepsilon)$ по степеням параметра ε , т. е. в (9) вместо V и Q подставим разложения.

$$V(v, v_\tau, \varepsilon) = V_0(v, v_\tau) + \varepsilon V_1(v, v_\tau) + \varepsilon^2 V_2(v, v_\tau) + \dots,$$

$$Q(v, \varepsilon) = Q_0(v) + \varepsilon Q_1(v) + \varepsilon^2 Q_2(v) + \dots,$$

тогда

$$Q(v_\tau, \varepsilon) = Q_0(v_\tau) + \varepsilon Q_1(v_\tau) + \varepsilon^2 Q_2(v_\tau) + \dots$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, приходим к следующей системе уравнений, определяющей искомые функции:

$$\left. \begin{aligned} U(v) &= U_0(v), \\ Q_0(v) &= v; \\ \frac{dQ_1}{dv} U - \frac{dU}{dv} Q_1 + V_1 &= U_*(v, v_\tau, \varepsilon), \\ \frac{\partial V_1}{\partial v} U - \frac{\partial U}{\partial v} V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial v_\tau} \frac{dv_\tau}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

и т. д.

Представим системы уравнений для V_n и Q_n в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_n}{dv} U - \frac{dU}{dv} Q_n + V_n &= G_n(v, v_\tau), \\ \frac{\partial V_n}{\partial v} U - \frac{\partial U}{\partial v} V_n + \frac{\partial V_n}{\partial v_\tau} \frac{dv_\tau}{dt} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $G_n(v, v_\tau)$ зависит от $U_*, \dots, U_n, Q_1, \dots, Q_{n-1}$ и $V_1, \dots, V_{n-1}$; G_1 , в частности, есть просто U_{*1} , т. е.

$$G_1(v, v_\tau) = U_{*1}(v, v_\tau).$$

Для получения решения системы (10) выведем формулы, аналогичные построению правой части уравнения (4) по функции $V_1(v, v_\tau, \varepsilon)$ т. е.

$$\bar{f}(c, c_1, t) = \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right)^{-v} f(v, v_\tau). \quad (11)$$

Легко видеть, что частная производная по времени этой функции имеет вид

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right)^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial v} U(v) - \frac{\partial U}{\partial v} f(v, v_\tau) + \frac{\partial f}{\partial v_\tau} \frac{dv_\tau}{dt} \right]. \quad (12)$$

Эти формулы подсказывают переход к функциям вдоль траектории в системе (10). Действительно, если умножить оба уравнения на $\left(\frac{\partial v}{\partial c} \right)^{-1}$,

то приходим к следующей системе уравнений для функций на траекториях;

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{dt} + \bar{V} &= \bar{G}, \\ \frac{d\bar{V}}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Первое слагаемое в первом уравнении полученной системы образовалось следующим образом. Чтобы сохранить симметрию и уметь использовать формулы (11), (12), прибавим член $\frac{dQ_n}{dv_\tau} \frac{dv_\tau}{dt}$ к выражению

$$\frac{dQ_n}{dv} U - \frac{du}{dv} Q. \text{ Этот член равен нулю, поскольку функция } Q(v) \text{ не}$$

зависит от запаздывания. Теперь остается умножить на $\left(\frac{\partial v}{\partial c} \right)^{-1}$, а по-

лученное дает нам $\frac{d\bar{Q}_n}{dt}$. Таким образом, преобразование (11) означает переход к характеристикам системы (10).

Решения системы (13) находим в случае, когда все решения невозмущенного уравнения для v периодичны по времени и для которого выполняется групповое свойство (в силу автономности невозмущенного уравнения):

$$v(c, t + t_0) \equiv v(v(c, t), t_0).$$

Решения эти задаются формулами, которые определяются однозначно

$$V(c, c_1) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{dv}{dc} \right)^{-1} G(v, v_\tau) dt,$$

$$Q(c) = - \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_0^x \left(\frac{\partial z}{\partial c} \right)^{-1} [G(z, z_\tau) - V(z, z_\tau)] dt_0 \right\} dx,$$

где $z = v(c, t_0)$, $x = t + t_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов. УМН, т. 17, 1962, № 6.
2. Молчанов А. М. „ДАН СССР“, т. 136 1961, № 5.
3. Волосов, „ДАН СССР“, т. 133, 1960, № 2.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 6. V 1970

К. М. МУСАЕВ

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим произвольную односвязную область G со спрямляемой границей Γ и класс обобщенных аналитических функций (в смысле И. Н. Векуа) $U_{p,2}(A, B, G)$ ([1], стр. 157), т. е. класс регулярных решений уравнения

$$\partial_{\bar{z}} W(z) + A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} = 0, \quad (1)$$

где $A(z), B(z) \in L_{p,2}(E)$, E —вся конечная плоскость,

$$\partial_{\bar{z}} W = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + i \frac{\partial W}{\partial y} \right).$$

Как известно (см. [1], стр. 175), любая функция $W(z)$ класса $U_{p,2}(A, B, G)$ представляется в виде

$$W(z) = \Phi(z) l^{\omega(z)}, \quad (2)$$

где $\Phi(z)$ — аналитическая функция в G , а $\omega(z)$ непрерывна по Гельдеру во всей плоскости, и значит ограничена:

$$|l^{\omega(z)}| \leq C_0 < +\infty.$$

Напомним, что нами [3] введены обобщенный интеграл типа Коши-Стилтьеса:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} \mathcal{Q}_1(z, t) dF(t) - \mathcal{Q}_2(z, t) d\overline{F(t)} \quad (3)$$

и обобщенный интеграл типа Коши-Лебега:

$$W_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} \mathcal{Q}_1(z, t) \varphi(t) dt - \mathcal{Q}_2(z, t) \overline{\varphi(t)} d\overline{t}, \quad (4)$$

где $F(t)$ — произвольная функция с ограниченным изменением на Γ , а $\varphi(t)$ — суммируемая на Γ , $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ — основные ядра класса $U_{p,2}(A, B, E)$, ([1], стр. 177). Заметим, что $W(z), W_1(z) \in U_{p,2}(A, B, \mathbb{C})$ и интеграл называется интегралом Коши-Стилтьеса (Коши-Лебега) если он имеет почти везде угловые граничные значения $F'(t) (\varphi(t))$ при $z \rightarrow t$ изнутри G [3].

В работе [3] высказано заключение, что будет полезно рассмотреть классы решений уравнения (1), состоящих из функций с ограниченными средними модулями: аналогов классов H_p и E_p (см. [2], стр. 78 и 204), изучаемых в теории аналитических функций; освещение этого вопроса является целью настоящей статьи. Целесообразно изложить полученные факты сперва для случая круга, а затем уже

для произвольной области, так как в случае круга можно было применить более простые рассуждения, основанные на исследовании интеграла Пуассона.

1. Итак, пусть область G — единичный круг: $|z| < 1$, $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$.
Определение 1. Обобщенная аналитическая в круге $|z| < 1$ функция $W(z)$ класса $U_{p,2}(A, B, G)$ принадлежит $H_{\delta}(A, B)$, $0 < \delta < \infty$, если

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |W(re^{i\theta})|^{\delta} d\theta \leq H(W) < +\infty, \quad (5)$$

и классу $H_{\infty}(A, B)$, если

$$\sup_{z \in G} |W(z)| \leq M < +\infty. \quad (6)$$

Отметим, что $H_{\delta}(A, B) \subset H_{\Delta}(A, B)$, если $\delta > \Delta > 0$. Формула взаимности (2) позволяет доказать нижеследующую лемму.

Лемма 1. Для того, чтобы обобщенная аналитическая функция $W(z)$ принадлежала классу $H_{\delta}(A, B)$, $0 < \delta < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы в представлении (2) аналитическая функция $\Phi(z)$ принадлежала соответствующему классу H_{δ} .

С помощью этой леммы можно перенести ряд свойств аналитических функций классов H_{δ} на наши классы $H_{\delta}(A, B)$. Имеют место следующие утверждения:

1. Если $W(z) \in H_{\delta}(A, B)$, то она обладает угловыми граничными значениями $W(t)$ почти везде на окружности Γ и функция $|W(t)|^{\delta}$ суммируема на Γ .

2. (Аналог теоремы В. И. Смирнова). Пусть обобщенная аналитическая функция $W(z)$ принадлежит классу $H_{\delta}(A, B)$ и функция $|W(t)|^{\delta_1}$, $\delta_1 < \delta_2$ ($W(t)$ — граничные значения $W(z)$, суммируема. Тогда $W(z) \in H_{\delta_2}(A, B)$.

3. (Аналог теоремы Ф. Рисса). Пусть обобщенная аналитическая функция $W(z)$ принадлежит классу $H_{\delta}(A, B)$, $\delta > 0$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |W(re^{i\theta}) - W(e^{i\theta})|^{\delta} d\theta = 0. \quad (7)$$

Докажем, например, утверждение 3. Так как $W(z) \in H_{\delta}(A, B)$, то в (2) $\Phi(z) \in H_{\delta}$ в силу леммы 1. Тогда на основании теоремы Ф. Рисса для аналитических функций (см. [2], стр. 89)

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\theta}) - \Phi(e^{i\theta})|^{\delta} d\theta = 0. \quad (8)$$

Из равномерной непрерывности $\omega(z)$ в $|z| \leq 1$ имеем

$$|e^{\omega(re^{i\theta})} - e^{\omega(e^{i\theta})}| \leq \delta_1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \delta_1 \rightarrow 0; \quad (9)$$

$$W(re^{i\theta}) - W(e^{i\theta}) = [\Phi(re^{i\theta})e^{\omega(re^{i\theta})} - \Phi(e^{i\theta})e^{\omega(re^{i\theta})}] + \\ + [\Phi(e^{i\theta})e^{\omega(re^{i\theta})} - \Phi(e^{i\theta})e^{\omega(e^{i\theta})}].$$

Далее

$$\int_0^{2\pi} |W(re^{i\theta}) - W(e^{i\theta})|^{\delta} d\theta \leq 2^{\delta} \left[\int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\theta})|^{\delta} |\Phi(re^{i\theta}) - \Phi(e^{i\theta})|^{\delta} d\theta + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} |\Phi(e^{i\theta})|^{\delta} |e^{\omega(re^{i\theta})} - e^{\omega(e^{i\theta})}|^{\delta} d\theta \right].$$

Утверждение 1 и соотношения (8), (9) доказывают сформулированное свойство. Рассмотрим дальнейшие свойства обобщенных аналитических функций класса $H_1(A, B)$.

Теорема 1. Если обобщенная аналитическая функция $W(z)$ принадлежит классу $H_1(A, B)$, то она представима интегралом Коши—Лебега по своим граничным значениям.

Для доказательства рассматриваются концентрические круги G_r : $|z| < r$, $r < 1$ с границами Γ_r : $|z| = r$. Функция $W(z)$, будучи внутри круга $|z| < 1$ обобщенной аналитической функцией класса $U_{p,2}(A, B, G)$, непрерывна там. Поэтому (см. [1], стр. 183) $W(z)$ представима в G_r интегралом Коши по Γ_r :

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma_r} \mathcal{O}_1(z, r l^{i\theta}) W(r l^{i\theta}) dt - \mathcal{O}_2(z, r e^{i\theta}) \overline{W(r l^{i\theta})} d\bar{t}, \quad (10)$$

$$z = \rho l^{i\varphi}, \quad t = r l^{i\theta}, \quad \rho < r.$$

Чтобы доказать теорему, нужно доказать следующее соотношение:

$$\lim_{i \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left[\int_{\Gamma_r} \mathcal{O}_1(z, r l^{i\theta}) W(r l^{i\theta}) d(r l^{i\theta}) - \mathcal{O}_2(z, r l^{i\theta}) \overline{W(r l^{i\theta})} d(\overline{r l^{i\theta}}) \right] - \right. \\ \left. - \left[\int_{\Gamma} \mathcal{O}_1(z, l^{i\theta}) W(l^{i\theta}) dl^{i\theta} - \mathcal{O}_2(z, l^{i\theta}) \overline{W(l^{i\theta})} d(\overline{l^{i\theta}}) \right] \right\} = 0. \quad (11)$$

Последнее соотношение доказывается с помощью утверждений 1 и 3, с использованием свойств ядер $\mathcal{O}_1(z, t)$ и $\mathcal{O}_2(z, t)$ ([1], стр. 177).

Теорема 2. Если обобщенная аналитическая функция $W(z)$ представима интегралом Коши—Стилтьеса, то она принадлежит классу $H_1(A, B)$.

Доказательство. Пусть $W(z)$ представима интегралом Коши—Стилтьеса:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} \mathcal{O}_1(z, t) dF(t) - \mathcal{O}_2(z, t) d\bar{F}(t). \quad (12)$$

По теореме 2 из работы [3] это значит, что

$$W(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} \mathcal{O}_1(z^*, t) dF(t) - \mathcal{O}_2(z^*, t) d\bar{F}(t) \equiv 0, \quad z^* \in \bar{G}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) имеем

$$W(z) - W(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} \mathcal{O}_1(z, t) dF(t) - \mathcal{O}_2(z, t) d\bar{F}(t) - \\ - \int_{\Gamma} \mathcal{O}_1(z^*, t) dF(t) - \mathcal{O}_2(z^*, t) d\bar{F}(t). \quad (14)$$

Используя для $\mathcal{O}_1(z, t)$ и $\mathcal{O}_2(z, t)$ в (14) оценки (см. [1], стр. 179),

$$\text{получим } W(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{dF(t)}{t-z} - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{dF(t)}{t-z^*} \right] + \\ + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} M_1(z, t) dF(t) - \int_{\Gamma} M_1(z^*, t) dF(t) - \int_{\Gamma} M_2(z, t) dF(t) - \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} M_2(z^*, t) d\bar{F}(t) \right], \quad (15)$$

где $M_1(z, t) = \frac{m_1(z, t)}{|z-t|^{2/p}}$, $M_2(z, t) = \frac{m_2(z, t)}{|z-t|^{2/p}}$, m_1 и m_2 ограничены во всей плоскости по z и t .

Пусть z и z^* —симметричные точки относительно окружности.

В этом случае

$$F_1(r l^{i\varphi}) = \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dF(t)}{t-z} - \int_{\Gamma} \frac{dF(t)}{t-z^*} - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)e^{i\theta} d\theta}{1+r^2-2r \cos(\varphi-\theta)} \right], \quad z = r e^{i\varphi}$$

и

$$\int_0^{2\pi} |F_1(r e^{i\varphi})| d\varphi \leq c_1 < +\infty, \quad 0 < r < 1. \quad (16)$$

Далее, оценивая дополнительные члены в (15), можно получить, что интегралы по концентрическим окружностям ограничены:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} M_1(z, t) dF(t) \right| d\varphi &\leq c_2 < +\infty \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} M_2(z, t) d\bar{F}(t) \right| d\varphi &\leq c_3 < +\infty \end{aligned} \right\} z \in \Gamma. \quad (17)$$

В силу (16) и (17)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |W(r e^{i\varphi})| d\varphi \leq c < +\infty, \quad 0 < r < 1 \quad (18)$$

Это значит, что $W(z) \in H_1(A, B)$. Объединяя теоремы 1 и 2, получаем аналог теоремы Г. М. Фихтенгольца (см [2], стр. (97)).

Теорема 3. Следующие классы обобщенных аналитических функций совпадают с классом;

1. $H_1(A, B)$;
2. Функций, представимых интегралом Коши—Стилтьеса;
3. Функций, представимых интегралом Коши—Лебега.

II. Теперь рассмотрим односвязную область G , ограниченную спрямляемой кривой Γ , и определим в ней классы $F_{\delta}(A, B, G)$ обобщенных аналитических функций. Соответствующие классы E_{δ} аналитических функций были введены В. И. Смирновым и изучались им, а также М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым (см. [2], стр. 203 и далее).

Определение 2. Обобщенная аналитическая в G функция $W(z)$ из класса $U_{p,2}(A, B, G)$ принадлежит классу $E_{\delta}(A, B, G)$, $\delta > 0$, если существует последовательность спрямляемых кривых γ_n , сходящихся к Γ , и таких, что

$$\int_{\gamma_n} |W(z)|^{\delta} |dz| < c < +\infty \quad (19)$$

(c не зависит от n). Класс $E_{\infty}(A, B, G)$ состоит из таких функций $W(z) \in U_{p,2}(A, B, G)$, для которых

$$\sup_{z \in G} |W(z)| < +\infty. \quad (20)$$

Отметим, что $E_{\delta}(A, B, G) \subset E_{\delta_1}(A, B, G)$, если $\delta > \delta_1$. Для класса $E_{\delta}(A, B, G)$ справедлива

Лемма 2. Для того, чтобы обобщенная аналитическая функция $W(z)$ принадлежала классу $E_{\delta}(A, B, G)$, необходимо и достаточно, чтобы в (2) $\Phi(z)$ принадлежала соответствующему классу E_{δ} . Эта лемма доказывается сразу, если исходить из формулы (2). Основываясь на указанной лемме и соответствующих свойствах ([2], стр. 240) аналитических функций класса E_{δ} , можно доказать следующие утверждения:

а) если $W(z) \in E_{\delta}(A, B, G)$, $\delta > 0$, то $W(z)$ имеем почти везде угловые граничные значения $W(t)$ на Γ и $|W(z)|^{\delta}$ суммируема на Γ ;

б) пусть $W(z) \in E_{\delta_1}(A, B, G)$ и область G принадлежит классу S В. И. Смирнова (см. [2], стр. 250).

Если $|W(t)|^{\delta_2}$ суммируема на Γ и $\delta_2 > \delta_1$, то $W(z) \in E_{\delta_2}(A, B, G)$. Докажем, например, утверждение б). Так как $W(z) \in E_{\delta_2}(A, B, G)$, то в (2) $\Phi(z) \in E_{\delta_1}$ (в силу леммы 2). Из ограниченности $e^{-\omega(z)}$ во всей плоскости и из того, что $\Phi(z) = W(z)e^{-\omega(z)}$, имеем

$$\int_{\Gamma} |\Phi(t)|^{\delta_1} |dt| = \int_{\Gamma} |W(t)|^{\delta_1} |e^{-\omega(t)}|^{\delta_1} |dt| < +\infty.$$

Следовательно, в силу теоремы В. И. Смирнова (см. [2], стр. 264) $\Phi(z) \in E_{\delta_1}$, а тогда $W(z) \in E_{\delta_2}(A, B, G)$.

Рассмотрим дальнейшие свойства обобщенных аналитических функций класса $E_1(A, B, G)$.

Теорема 4. Пусть область G ограничена произвольной спрямляемой кривой Γ и пусть обобщенная аналитическая функция $W(z) \in U_{p,2}(A, B, G)$ принадлежит классу $E_1(A, B, G)$. Тогда $W(z)$ представима интегралом Коши—Лебега в области G через свои граничные значения.

В принципе эта теорема доказывается как теорема 1. Обратно: то, что из представимости $W(z)$ интегралом Коши—Лебега или Коши—Стилтьеса следует включение $W(z) \in E_1(A, B, G)$, удастся доказать лишь при дополнительных условиях, налагаемых на область G . Прежде чем сформулировать эту теорему, приведем следующую лемму, которая понадобится нам при доказательстве теоремы.

Лемма 3. Пусть область G ограничена гладким контуром Γ , а $z = \varphi(\varepsilon)$ — конформное отображение круга $|\varepsilon| < 1$ на G . Γ_n — образы при отображении $z = \varphi(\varepsilon)$ окружностей $|\varepsilon| < r_n$, $n = 1, 2, \dots, r_n \rightarrow 1$. Пусть также дана функция $M(z, t) = \frac{m(t, z)}{|z - t|^{\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$, $m(z, t)$ ограничена во всей плоскости. Тогда существует константа k , независимая от n и t такая, что

$$\int_{\Gamma_n} |W(z, t)| |dz| \leq k < +\infty, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

для любого $f \in \Gamma$.

Доказательство этой леммы опускаем.

Замечание. Утверждение леммы сохраняется при замене контуров Γ_n на контуры Γ_n , получающиеся из окружностей $|\varepsilon| < r_n > 1$ при конформном отображении внешности круга $|\varepsilon| < 1$ на внешность области G .

Теорема 5. В области G с гладкой границей совпадают следующие классы обобщенных аналитических функций:

1. $E_1(A, B, G)$;
2. Класс функций, представимых интегралом Коши—Стилтьеса;
3. Класс функций, представимых интегралом Коши—Лебега.

Доказательство. В силу теоремы 4 достаточно показать, что функция $W(z)$, представимая интегралом Коши—Стилтьеса, входит в класс $E_1(A, B, G)$. Пусть $W(z)$ представима интегралом Коши—Стилтьеса:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathcal{Q}_1(z, t) d\mu(t) - \mathcal{Q}_2(z, t) d\overline{\mu(t)} \quad (W(z) \rightarrow \mu'(t), z \rightarrow t, z \in G).$$

Тогда $W(z) \equiv 0$ при $z \in E \mid \overline{G} = G_0$, E — вся конечная плоскость. Пред-

ставляя $\mathcal{Q}_1(z, t)$ в виде суммы $\frac{1}{t-z} + M_1(z, t)$ получим

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\mu(t)}{t-z} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} M_1(z, t) d\mu(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{Q}_2(z, t) d\overline{\mu(t)}. \quad (22)$$

Пусть

$$K(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} M_1(z, t) d\mu(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathcal{Q}_2(z, t) d\overline{\mu(t)}, \quad \text{если } z \in \Gamma.$$

Тогда при $z \in G_0$ из (22) имеем $K(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\mu(t)}{t-z}$. Таким образом, $K(z)$ — аналитическая в G_0 и заметим, что $K(\infty) = 0$. Более того, $K(z) \in E_1(G_0)$. (23)

В самом деле, пусть Γ'_n — контуры, принадлежащие G_0 , $\Gamma'_n \rightarrow \Gamma$ ($n \rightarrow \infty$) такие же, как в замечании к лемме 3. Тогда по лемме 3

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'_n} |K(z)| ds &\leq \int_{\Gamma'_n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |M_1(z, t)| |d\mu(t)| \right] ds + \\ &+ \int_{\Gamma'_n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\mathcal{Q}_2(z, t)| |d\overline{\mu(t)}| \right] ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\int_{\Gamma'_n} |M_1(z, t)| ds \right] |d\mu(z, t)| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\int_{\Gamma'_n} |\mathcal{Q}_2(z, t)| ds \right] |d\overline{\mu(t)}| \leq c < +\infty, \end{aligned} \quad (24)$$

где c не зависит от n . Таким образом, (23) доказано. Точно так же показывается, что интегралы от $|K(z)|$ по контурам Γ_n ограничены. Отсюда следует, что $K(z)$ имеет граничные значения $K(t)$ почти везде на Γ и представляется интегралом Коши—Лебега в G_0 :

$$K(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\kappa(t) dt}{t-z}, \quad z \in G_0.$$

Тогда значение этого интеграла внутри G тождественно равно нулю:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K(t) dt}{t-z} = 0, \quad z \in G. \quad (25)$$

В силу (22) вне G имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\mu(t)}{t-z} + K(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d[\mu(t) + f(t)]}{t-z} \equiv 0, \quad z \in G.$$

Следовательно,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d[\mu + f]}{t-z}, \quad z \in G;$$

есть интеграл Коши—Стилтьеса, а значит $F(z)$ принадлежит классу $E_1(G)$ в области G (см. [2], стр. 207, п. 7 и стр. 215, п. 10.2). Но в силу (25) внутри G

$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\mu(t)}{t-z}$, $z \in G$. Таким образом, в

$G W(z) = F(z) + K(z)$, причем $F(z)$ принадлежит $E_1(G)$, а интегралы $\int_{\Gamma_n} |K(z)| |dz|$ по контурам Γ ограничены.

Следовательно, $W(z) \in E_1(A, B, G)$. Доказательство завершено.
Следствие 1. Пусть область G имеет гладкую границу Γ . Для того, чтобы обобщенная аналитическая функция $W(z) \in E_\delta(A, B, G)$, $\delta \geq 1$, необходимо и достаточно, чтобы $W(z)$ представлялась интегралом Коши—Лебега и ее граничные значения были суммируемы в степени δ .

Доказательство. Если $W(z) \in E_\delta(A, B, G)$, $\delta > 1$, то тем более $W(z) \in E_1(A, B, G)$ и потому представляется интегралом Коши—Лебега. Кроме того, $\int_{\Gamma} |W(t)|^\delta |dt|$, как отмечалось в утверждении а).

Обратно, если $W(z)$ представима интегралом Коши—Лебега, то она входит в класс $E_1(A, B, G)$. Имея, помимо этого, граничные значения, суммируемые в δ -степени, она входит и в $E_\delta(A, B, G)$ (в силу б)); Область с гладкой границей принадлежит классу областей S В. И. Смирнова.

В заключение выражаю благодарность проф. С. Я. Хавинсону и доц. А. Н. Кочеткову за оказанную помощь и консультации при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., 1959
2. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М., 1951
3. Мусаев К. М. „ДАН СССР“ т. 181, 1968, № 6.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 16. V 1970

К. М. Мусаев

Үмумиләшмиш аналитик функцијаларын бә'зи синифләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә үмумиләшмиш аналитик функцијалар (И. Н. Векуа мә'нада) синфиндән $U_{p,2}(A, B, G)$ синфинә бахылмышдыр. Бу синифдә үмумиләшмиш аналитик функцијалар үчүн $H_\delta(A, B)$ вә $E_\delta(A, B, G)$ $\delta > 0$ синифләри тә'јин олунмушдур. Һәмсин синифләрә дахил олан функцијаларын сәрһәд вә характеристик хассәләри өјрәнилмишдир.

А. Г. АЛЕСКЕРОВ

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U(t; x)}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial^2 U(t - \tau; x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(t; x)}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 U(t - \tau; x)}{\partial x^2} = f(t; x) \quad (1)$$

в области

$$D = (0 \leq t < T; 0 \leq x \leq l), \quad U(t; 0) = U(t; l) = 0, \quad (2)$$

с начальными условиями

$$U(t; x) = 0 \text{ на } E_0 = (-\tau \leq t \leq 0; 0 \leq x \leq l), \quad (3)$$

где $\tau > 0$ — постоянная запаздывания; λ — действительный и положительный параметр; $f(t; x)$ имеет конечный интеграл в области D и $f(t; x) = 0$ на E_0 .

Обозначим через Q множество всех непрерывных в D функций $U(t, x)$, имеющих непрерывные первые и ограниченные вторые производные и обращающихся в нуль в граничной области D . Введем в это множество скалярное произведение по формуле

$$(U, v) = \iint_D \left(\frac{\partial U}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dt dx.$$

Определение. Обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3) будем называть функцию $U(t, x) \in Q$, если для любой функции $V(t; x)$ вида $V(t; x) = v(t; x) + \lambda v_1(t; x)$, где

$$v(t; x) = \int_t^T w_1(\eta; x) d\eta, \quad v_1(t, x) = \int_{t-\tau}^t w_2(\eta; x) d\eta; \quad w_1(t; x)$$

такова, что

$$w_i(t; 0) = w_i(t; l) = 0 \quad (t \in [0; T]) \text{ и } \iint_D \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 dt dx < \infty \quad (i = 1, 2),$$

выполняется интегральное тождество:

$$-\left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial t}, \frac{\partial V(t; x)}{\partial t} \right] - \lambda \left[\frac{\partial U(t - \tau; x)}{\partial t}, \frac{\partial V(t; x)}{\partial t} \right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial x}, \frac{\partial V(t; x)}{\partial x} \right] + \lambda \left[\frac{\partial U(t - \tau; x)}{\partial x}, \frac{\partial V(t; x)}{\partial x} \right] = [f(t; x), V(t; x)]. \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем $[\varphi, \psi] = \int_D \varphi \psi dt dx$.

Теорема. Пусть λ удовлетворяют условию

$$0 < \lambda < \inf \{A_\varepsilon, B_\varepsilon\}$$

и $f(t; x)$ имеет конечный интеграл

$$\iint_D f^2(t; x) dt dx < +\infty.$$

Тогда задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение в классе функций $U(t; x) \in Q$, причем для $U(t, x)$ справедлива оценка

$$\left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial t}, \frac{\partial U(t; x)}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial x}, \frac{\partial U(t; x)}{\partial x} \right] \leq C_0 [f, f], \quad (6)$$

где $C_0 = (T+1)(\lambda+1)\varepsilon G_{\lambda, \varepsilon}$, здесь ε — произвольное положительное число.

$$0 \leq G_{\lambda, \varepsilon} = \inf \{G'_{\lambda, \varepsilon}, G''_{\lambda, \varepsilon}\};$$

$$G'_{\lambda, \varepsilon} = \frac{1}{T+1} - (T+1)\lambda \left(\lambda + \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon} \right),$$

$$G''_{\lambda, \varepsilon} = \frac{1}{T+1} - (T+1) \left(\lambda^2 + \frac{2\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon} \lambda + \varepsilon \right);$$

$$A_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{(T+1)^2} + \frac{(\varepsilon^2 + 1)^2}{4\varepsilon^2}} - \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right),$$

$$B_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{(T+1)^2} + \frac{(2\varepsilon^2 + 1)^2}{4\varepsilon^2}} - \varepsilon - \left(\varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon} \right).$$

Доказательство. Для доказательства существования обобщенного решения применим аналог метода Галеркина для построения приближенных решений смешанной задачи (1)–(3).

Пусть $\bar{u}_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) такая последовательность функций, что G_0 и $\bar{u}_i(x) = \bar{u}_i^{(1)}(x)$ образуют полную линейно независимую систему элементов в $\bar{w}_2^{(1)}[0, l]$. Приближенное решение смешанной задачи будем искать в виде

$$U_N(t; x) = \sum_{k=1}^N C_k(t) \bar{u}_k(x).$$

Коэффициенты $C_k(t)$ определим как решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^N \{ (C_k''(t) + \lambda C_k''(t - \tau)) \cdot (\bar{U}_k(x), \bar{U}_s(x)) +$$

$$+ (C_k(t) + \lambda C_k(t - \tau)) \cdot (\bar{U}'_k(x), \bar{U}'_s(x)) \} = (f, \bar{U}_s) \quad (s = \overline{1, N}) \quad (7)$$

при начальных условиях

$$C_k(t) = 0 \text{ на } E_0. \quad (8)$$

Не нарушая общности, можно считать последовательность $\{\bar{U}_i(x)\}$ ортонормированной в $[0, l]$, так что система дифференциальных уравнений (7) оказывается разрешенной относительно старших производных. В матричной форме система (7) запишется в виде

$$C''(t) + \lambda C''(t - \tau) + A(t)(C(t) + \lambda C(t - \tau)) = F(t),$$

причем начальные условия теперь понимаются как нуль-матрицы.

Приведем оценки норм приближенного решения (равномерные по N). Умножим обе части уравнений (7) на $\frac{1}{t+1} (C'_s(t) + \lambda C'_s(t - \tau))$,

где $C'_s(0) + \lambda C'_s(-\tau) = 0$, просуммируем по s от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 U_N(t; x)}{\partial t^2}, \frac{1}{t+1} \frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t} \right] + \lambda \left[\frac{\partial^2 U_N(t - \tau; x)}{\partial t^2}, \right. \\ & \left. \frac{1}{t+1} \frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t} \right] + \lambda \left[\frac{\partial^2 U_N(t; x)}{\partial t^2}, \frac{1}{t+1} \frac{\partial U_N(t - \tau; x)}{\partial t} \right] + \\ & + \lambda^2 \left[\frac{\partial^2 U_N(t - \tau; x)}{\partial t^2}, \frac{1}{t+1} \frac{\partial U_N(t - \tau; x)}{\partial t} \right] + \\ & + \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial x}, \frac{1}{t+1} \frac{\partial^2 U_N(t; x)}{\partial t \partial x} \right] + \\ & + \lambda \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial x}, \frac{1}{t+1} \frac{\partial^2 U_N(t - \tau; x)}{\partial t \partial x} \right] + \\ & + \lambda \left[\frac{\partial U_N(t - \tau; x)}{\partial x}, \frac{1}{t+1} \frac{\partial^2 U_N(t; x)}{\partial t \partial x} \right] + \\ & + \lambda^2 \left[\frac{\partial U_N(t - \tau; x)}{\partial x}, \frac{1}{t+1} \frac{\partial^2 U_N(t - \tau; x)}{\partial t \partial x} \right] = \\ & = \left[f(t; x), \frac{1}{t+1} \frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t} \right] + \lambda \left[f(t; x), \frac{1}{t+1} \frac{\partial U_N(t - \tau; x)}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

с начальным условием

$$U_N(t; x) = 0 \text{ на } E_0$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(T+1)} \int_0^t \left(\frac{\partial U_N(T; x)}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U_N(T - \tau; x)}{\partial t} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2(T+1)} \int_0^t \left(\frac{\partial U_N(T; x)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_N(T - \tau; x)}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t}, \frac{1}{(t+1)^2} \frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t} \right] + \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \left[\frac{\partial U_N(t - \tau; x)}{\partial t}, \frac{1}{(t+1)^2} \frac{\partial U_N(t - \tau; x)}{\partial t} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial x}, \frac{1}{(t+1)^2} \frac{\partial U_N(t; x)}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \left[\frac{\partial U_N(t - \tau; x)}{\partial x}, \frac{1}{(t+1)^2} \frac{\partial U_N(t - \tau; x)}{\partial x} \right] + \\ & + \lambda \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t}, \frac{1}{(t+1)^2} \frac{\partial U_N(t - \tau; x)}{\partial t} \right] + \\ & + \lambda \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial x}, \frac{1}{(t+1)^2} \frac{\partial U_N(t - \tau; x)}{\partial x} \right] = \end{aligned}$$

$$= \left[f(t; x), \frac{1}{t+1} \frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t} \right] + \lambda \left[f(t; x), \frac{1}{t+1} \frac{\partial U_N(t-\tau; x)}{\partial t} \right] \quad (9)$$

с начальным условием $U_N(t; x) \equiv 0$ на E_0 . (10)

После соответствующих преобразований, пользуясь левой частью неравенства $|y \cdot z| \leq \frac{\varepsilon}{2} y^2 + \frac{1}{2\varepsilon} z^2$ и правой частью равенства (9), будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(T+1)} \int_0^T \left(\frac{\partial U_N(T; x)}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U_N(T-\tau; x)}{\partial t} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2(T+1)} \int_0^T \left(\frac{\partial U_N(T; x)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_N(T-\tau; x)}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2(T+1)} G_{\lambda, \varepsilon} \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t}, \frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t} \right] + \\ & + \frac{1}{2(T+1)} G_{\lambda, \varepsilon} \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial x}, \frac{x U_N(t; x)}{\partial x} \right] \leq \frac{1}{2\varepsilon} (1 + \lambda) [f, f]. \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (5) и выбрав ε , получим

$$\left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t}, \frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial x}, \frac{\partial U_N(t; x)}{\partial x} \right] \leq C_0 [f, f]. \quad (11)$$

Из оценки (11) следует равномерная по N ограниченность норм

$$\left\| \frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t} \right\| \text{ и } \left\| \frac{\partial U_N(t; x)}{\partial x} \right\|.$$

В силу теоремы о слабой компактности существует подпоследовательность N_k индексов такая, что $\frac{\partial U_{N_k}}{\partial t}$ и $\frac{\partial U_{N_k}}{\partial x}$ сходятся слабо.

С другой стороны, $\{U_{N_k}(t; x)\}$ вследствие непрерывности оператора вложения сходится сильно к функции $U(t; x)$, имеющей обобщенные первые производные по t и x , являющиеся слабыми пределами $\frac{\partial U_{N_k}}{\partial t}$ и $\frac{\partial U_{N_k}}{\partial x}$, соответственно. При этом для предельной функции справедлива оценка

$$\left[\frac{x U(t; x)}{\partial t}, \frac{\partial U(t; x)}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial x}, \frac{x U(t; x)}{\partial x} \right] \leq C_0 [f, f]. \quad (12)$$

Учитывая неотрицательности каждого слагаемого в левой части, неравенство (12) можно представить в виде

$$\left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial t}, \frac{\partial U(t; x)}{\partial t} \right] \leq K_0. \quad (13)$$

Так как $U_{N_k}(0; x) = 0$, то

$$U_{N_k}(t; x) = \int_0^t \frac{\partial U_{N_k}}{\partial t} dt.$$

Переходя к пределу при $N_k \rightarrow \infty$, убеждаемся, что и предельная функция $U(t; x)$ представима в виде интеграла:

$$U(t; x) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Отсюда следует, что $U(t; x)$ удовлетворяет начальным данным (3) в сильном смысле. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 U^2(t; x) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^t \frac{\partial U}{\partial t} dt \right)^2 dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^t \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 dt \cdot \int_0^t 1^2 dt \right) dx \leq \\ &\leq t \int_0^1 \int_0^T \left(\frac{\partial U(t; x)}{\partial t} \right)^2 dt dx \leq t \cdot K_0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^1 U^2(0; x) dx = 0, \text{ т. е. } U(0; x) = 0.$$

Далее на основании (13) имеем

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial U(t; x)}{\partial t} \right)^2 dx \leq \frac{2 \cdot K_0}{T^2} \cdot t,$$

Отсюда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 \left(\frac{\partial U(t; x)}{\partial t} \right)^2 dx = 0,$$

следовательно,

$$\frac{\partial U(0; x)}{\partial t} = 0.$$

Покажем теперь, что предельная функция $U(t; x)$ является обобщенным решением смешанной задачи, т. е. выполняется интегральное тождество (4). Умножим обе части равенства (7) на произвольные дифференцируемые функции $d_s(t) + \lambda d_{1s}(t)$, где $d_s(T) + \lambda d_{1s}(T) = 0$, просуммируем по s от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T . После интегрирования по частям по t и x получим

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial t}, \frac{\partial V_N(t; x)}{\partial t} \right] - \lambda \left[\frac{\partial U_N(t-\tau; x)}{\partial t}, \frac{\partial V_N(t; x)}{\partial t} \right] + \\ & + \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial x}, \frac{\partial V_N(t; x)}{\partial x} \right] + \lambda \left[\frac{\partial U_N(t; x)}{\partial x}, \frac{\partial V_N(t; x)}{\partial x} \right] = \\ & = [f(t; x), V_N(t; x)], \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$V_N(t; x) = \sum_{s=1}^N (d_s(t) + \lambda d_{1s}(t)) \bar{U}_s(x),$$

Заменим в равенстве (14) U_N на U_{N_k} и перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$ и при фиксированном $V_N(t; x)$. Тогда в силу сходимости U_{N_k} , $\frac{\partial U_{N_k}}{\partial t}$ и $\frac{\partial U_{N_k}}{\partial x}$ получим

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial t}, \frac{\partial V_N(t; x)}{\partial t} \right] - \lambda \left[\frac{\partial U(t-\tau; x)}{\partial t}, \frac{\partial V_N(t; x)}{\partial t} \right] + \\ & + \left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial x}, \frac{\partial V_N(t; x)}{\partial x} \right] + \lambda \left[\frac{\partial U(t-\tau; x)}{\partial x}, \frac{\partial V_N(t; x)}{\partial x} \right] = \\ & = [f(t; x), V_N(t; x)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Это соотношение справедливо для всех $N = 1, 2, 3, \dots$

В равенстве (4) $V(t; x)$ — любая функция, представимая в виде

$$V(t; x) = v(t; x) + \lambda v_1(t; x) - \int_T^t W_1(\eta; x) d\eta + \lambda \int_{T-\tau}^{t-\tau} W_2(\eta; x) d\eta,$$

где $W_i(t; x)$ такова, что $W_i(t; 0) = W_i(t; l) = 0$, $t \in [0; T]$ и

$$\iint_D \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \right)^2 dt dx < +\infty \quad (i = 1, 2),$$

Покажем, что функцию $V(t; x)$ можно аппроксимировать функциями вида $V_N(t; x)$. Заметим, что $V(t; x)$ имеет квадратично суммируемую вторую смешанную производную по t и x . Разложим $G_0 \frac{dV(t; x)}{dt}$ при каждом фиксированном t в ряд по $G_0 \bar{U}_s(x)$, образующий полную линейно независимую систему элементов в $W_2^{(1)}[0; l]$, для этого разложим $G_0 \frac{\partial v(t; x)}{\partial t}$ и $G_0 \frac{\partial v_1(t; x)}{\partial t}$;

$$G_0 \frac{\partial v(t; x)}{\partial t} = G_0 W = \sum_{s=1}^{\infty} \bar{d}_s(t) G_0 \bar{U}_s(x).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое N , что

$$\left\| G_0 \frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{s=1}^N \bar{d}_s(t) G_0 \bar{U}_s(x) \right\| < \varepsilon. \quad (16)$$

Положим

$$v_N(t; x) = \sum_{s=1}^N \int_T^t \bar{d}_s(\eta) d\eta \cdot \bar{U}_s(x).$$

Пользуясь (16), получим

$$\| G_0 v - G_0 v_N \| \leq \left\| G_0 \frac{\partial v}{\partial t} - G_0 \frac{\partial v_N}{\partial t} \right\| \cdot \sqrt{T} \leq \sqrt{T} \cdot \varepsilon.$$

Из (16) также имеем

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v_N}{\partial t} \right\| \leq \sqrt{T} \varepsilon, \quad \text{где } G_0 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Аналогичным образом можно получить разложение $G_0 \frac{\partial v_1(t; x)}{\partial t}$, а

следовательно и $G_0 \frac{\partial V(t; x)}{\partial t}$. Подставляя в (15) $V_N(t; x)$ в виде

$$V_N(t; x) = \sum_{s=1}^N \left(\int_T^t \bar{d}_s(\eta) d\eta + \lambda \int_{T-\tau}^{t-\tau} \bar{d}_{1s}(\eta) d\eta \right) \bar{U}_s(x)$$

и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим соотношение (4), определяющее обобщенное решение.

Для доказательства единственности положим в (4) $f(t; x) \equiv 0$ и выведем отсюда, что $U(t; x) \equiv 0$. Возьмем в качестве функции $V(t; x)$

$$V(t; x) = \int_T^t \frac{1}{\eta+1} U(\eta; x) d\eta + \lambda \int_{T-\tau}^{t-\tau} \frac{1}{\eta+\tau+1} U(\eta; x) d\eta \quad (t \in [0; T]), \quad (17)$$

где $U(t; x) \equiv 0$ на E_0 . Подставляя в (4) $V(t; x)$ из (17) и полагая $f(t; x) \equiv 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial t}, \frac{1}{t+1} U(t; x) \right] + \lambda \left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial t}, \frac{1}{t+1} U(t-\tau; x) \right] + \\ & + \lambda \left[\frac{\partial U(t-\tau; x)}{\partial t}, \frac{1}{t+1} U(t; x) \right] + \\ & + \lambda^2 \left[\frac{\partial U(t-\tau; x)}{\partial t}, \frac{1}{t+1} U(t-\tau; x) \right] - \\ & - \left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial x}, \int_T^t \frac{1}{\eta+1} \frac{\partial U(\eta; x)}{\partial x} d\eta \right] - \\ & - \lambda \left[\frac{\partial U(t; x)}{\partial x}, \int_{T-\tau}^{t-\tau} \frac{1}{\eta+\tau+1} \frac{\partial U(\eta; x)}{\partial x} d\eta \right] - \\ & - \lambda \left[\frac{\partial U(t-\tau; x)}{\partial x}, \int_T^t \frac{1}{\eta+1} \frac{\partial U(\eta; x)}{\partial x} d\eta \right] - \\ & - \lambda^2 \left[\frac{\partial U(t-\tau; x)}{\partial x}, \int_{T-\tau}^{t-\tau} \frac{1}{\eta+\tau+1} \frac{\partial U(\eta; x)}{\partial x} d\eta \right] = 0 \end{aligned}$$

с начальным условием

$$U(t; x) \equiv 0 \text{ на } E_0$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(T+1)} \int_0^l (U(T; x) + \lambda U(T-\tau; x))^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(t+1)^2} U(t; x), U(t; x) \right] + \lambda \left[\frac{1}{(t+1)^2} U(t; x), U(t-\tau; x) \right] + \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \left[\frac{1}{(t+1)^2} U(t-\tau; x), U(t-\tau; x) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\int_0^T \frac{1}{t+1} \frac{\partial U(t; x)}{\partial x} dt \right)^2 dx + \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^l \left(\int_0^{T-\tau} \frac{1}{t+\tau+1} \frac{\partial U(t; x)}{\partial x} dt \right)^2 dx + \\ & + \lambda \int_0^l \left(\int_0^T \frac{1}{t+1} \frac{\partial U(t; x)}{\partial x} dt \cdot \int_0^{T-\tau} \frac{1}{t+\tau+1} \frac{\partial U(t; x)}{\partial x} dt \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\int_T^t \frac{1}{\eta+1} \frac{\partial U(\eta; x)}{\partial x} d\eta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda \int_{T-\tau}^{t-\tau} \frac{1}{\eta+\tau+1} \frac{\partial U(\eta; x)}{\partial x} d\eta \right), \left(\int_T^t \frac{1}{\eta+1} \frac{\partial U(\eta; x)}{\partial x} d\eta + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \lambda \int_{T-\tau}^{T-\tau} \frac{1}{\eta + \tau + 1} \frac{\partial U(\eta; x)}{\partial x} d\eta \Bigg) = 0 \quad (18)$$

с начальным условием.

$$U(t; x) \equiv 0 \text{ на } E.$$

После соответствующих преобразований, пользуясь неравенством $|y \cdot z| \leq \frac{\varepsilon}{2} y^2 + \frac{1}{2\varepsilon} z^2$ и левой частью равенства (18), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(T+1)} \int_0^1 (U(T; x) + \lambda U(T - \tau; x))^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(T+1)^2} - \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon} \lambda - \lambda^2 \right) [U, U] + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^T \frac{1}{t+1} \frac{\partial U(t; x)}{\partial x} dt + \lambda \int_0^{T-\tau} \frac{1}{t+\tau+1} \frac{\partial U(t; x)}{\partial x} dt \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^T \frac{1}{\eta+1} \frac{\partial U(\eta; x)}{\partial x} d\eta + \lambda \int_{T-\tau}^{T-\tau} \frac{1}{\eta+\tau+1} \frac{\partial U(\eta; x)}{\partial x} d\eta \right), 1 \right] \leq 0. \quad (19) \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (5), из (19) найдем $U(t; x) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Б. Д., Алиев Р. М. О свойствах решений эллиптических уравнений с отклоняющимися аргументами, Сб. "Спец. вопросы функционального анализа и их применение к теории дифференц. уравнений и теории функций". Баку, 1968.
2. Краснов М. Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка. Матем. Сб., 1959. 49 (91).
3. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
4. Носов В. Р. Уравнения гиперболического типа с запаздываниями времени. Всесоюз. межвуз. конф. по теории и приложению дифф. уравнений с откл. аргументом. 1965.
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. Изд-во "Наука", М., 1966.
6. Ткач Б. П. "Укр. матем. ж." 21 (1969) № 1.
7. Эльсгольд Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. М., Гостехиздат, 1955.

Институт математики и
механики АН Азерб. ССР

Поступило 2. III 1970

А. Н. Элскеров

Нејтрал типли гиперболик тэнлик үчүн гојулмуш
гарышыг мәсәлә

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатларда (1)–(3) мәсәләсинин үмумиләшмиш һәллинин варлығы вә јеканәлији Галјоркин методунун аналогу тәтбиг едиләрәк өјрәнилмишдир. Ишин кедишиндә тәгриби һәллин үмумиләшмиш һәллә јығылмасы ајдынлашмышдир.

Алынған нәтичәләр 1-чи теоремдә ифадә олуңмушдур.

УДК 539.3

Д. Г. АГАЛАРОВ

О ВЛИЯНИИ ВРЕМЕННЫХ ЯВЛЕНИЙ В МАТЕРИАЛЕ ГИБКОЙ СВЯЗИ НА ДВИЖЕНИЕ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ

Основные результаты по распространению волн в гибких деформируемых связях получены Х. А. Рахматулиным [1]. В данной работе исследовалось движение гибкой деформируемой нити при поперечном ударе с учетом временных явлений в материале нити.

§ 1. УРАВНЕНИЯ НИТИ

Уравнения движения нити при неявном законе деформирования удобно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial s_0^2} + \rho_0 (1 + \varepsilon) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_0} \right)^2, \\ \rho_0 (1 + \varepsilon) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_0^2} - 2\rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2 \frac{\partial T}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s_0}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ε — деформация, T — натяжение, φ — угол, образованный нитью и координатной осью, s_0 — координата частицы нити в недеформированном состоянии, t — время, ρ_0 — начальная плотность. Предполагается, что между $T(t)$ и $\varepsilon(t)$ существует некоторая связь, которая заранее не задается.

§ 2. УДАР С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Рассматривается первоначально невозмущенная полубесконечная нить, конец которой приводится в движение с постоянной скоростью. В этом случае начальные и граничные условия задачи для уравнения (1) будут следующими;

$$\begin{aligned} t = 0, 0 \leq s_0 < \infty, \quad \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = T = \frac{\partial T}{\partial t} = 0; \\ s = 0; 0 \leq t < \infty, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s_0} = \frac{\partial T}{\partial s_0} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

§ 3. ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПАРАМЕТРОВ T И ε

Заметим, что второе уравнение системы (1) линейно относительно φ . Поэтому при надлежащей аппроксимации параметров задача может быть упрощена.

При условиях § 2 указанные параметры можно аппроксимировать следующим образом. Так как $\partial T / \partial s_0 = 0$ на конце и скорость продольной волны практически значительно превосходит скорость фронта поперечной волны, то при слабой релаксации можно принять натяжение, а также и деформацию, связанную с натяжением операцией по времени, независимыми от координаты во всей области поперечного движения. Следовательно, можно переписать второе уравнение системы (1) в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_0^2} - 2 [\ln(1 + \varepsilon)]' \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (3)$$

где

$$b^2 = \frac{T}{\rho_0(1 + \varepsilon)}.$$

Преобразуя время $\tau = \int_0^t b dt$, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + [\ln[b(1 + \varepsilon)^2]]' \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_0^2}. \quad (4)$$

Характер изменения $b(t) [1 + \varepsilon(t)]^2$ можно установить исследованием волнового процесса в полубесконечном стержне вблизи конца. Однако без специального исследования известно, что указанная величина убывает от значения $b_0(1 + \varepsilon_0)^2$, соответствующего мгновенному состоянию при ударе с заданной постоянной во времени скоростью, до $b_\infty(1 + \varepsilon_\infty)^2$, соответствующего состоянию, определяемому статическими свойствами.

§ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматриваемая задача в результате аппроксимации параметров ε и T сводится к решению уравнения (4) при начальных условиях

$$\tau = 0, 0 \leq s_0 < \infty, \varphi = \varphi_0 H(-s_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \varphi_0 \delta(s_0),$$

где
$$H(q) = \begin{cases} 1, q > 0 \\ 0, q < 0, \end{cases} \quad \delta(q) = \frac{\partial H}{\partial q} = \begin{cases} 1, q = 0 \\ 0, q \neq 0, \end{cases}$$

и граничном условии: $s_0 = 0, \tau > 0, \partial \varphi / \partial s_0 = 0$.

При данном граничном условии задачу удобно решать при помощи косинус-преобразования Фурье:

$$f_c(\omega) = \int_0^\infty \cos(\omega s) f(s) ds$$

Преобразованное уравнение и начальные условия имеют вид:

$$\frac{d^2 \varphi_c}{d\tau^2} + 2P \frac{d\varphi_c}{d\tau} + \omega^2 \varphi_c = 0, \quad \tau = 0, \varphi_c = 0, \frac{d\varphi_c}{d\tau} = \varphi_0, \quad (5)$$

где

$$P = \frac{d \ln [b(1 + \varepsilon)^2]}{d\tau}.$$

Вводя переменную $y = \varphi_c \lambda \sqrt{b} / \lambda_0 \sqrt{b_0}$, уравнение (5) сводится к уравнению, не содержащему первой производной:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (\omega^2 - P^2 - P')y = 0, \quad (6)$$

где

$$P' = \frac{dP}{d\tau}, \quad \lambda = 1 + \varepsilon.$$

Задавая аппроксимации $P(\tau)$ можно найти соответствующие точные или приближенные решения уравнения (6). Один из методов приближенного решения уравнения (6) в общем виде связан с именами Венцеля, Крамерса, Бриллюэна, Джеффриса [2] (метод WKBI). В случае малости P' уравнение (6) имеет следующее приближенное решение:

$$y = y_0 \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - P^2} \tau}{\sqrt{\omega^2 - P^2}}$$

или

$$\varphi_c = \varphi_0 \frac{\lambda_0 \sqrt{b_0}}{\lambda \sqrt{b}} \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - P^2} \tau}{\sqrt{\omega^2 - P^2}}.$$

Произведя обратное преобразование, найдем

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\lambda_0 \sqrt{b_0}}{\lambda \sqrt{b}} I_0(P \sqrt{\tau^2 - s_0^2}) \quad (6')$$

($I_0(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента).

§ 5. СЛУЧАИ ТОЧНОГО И ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

1. В случае $\lambda \sqrt{b} = \lambda_0 \sqrt{b_0} \exp(-\alpha \tau)$ решение (6') является точным. Вводя безразмерные величины $z = \alpha \tau$ и $x = \alpha s_0$, получим

$$\varphi = \varphi_0 \exp z \cdot I_0(\sqrt{t^2 - x^2}).$$

Форма нити в момент $z = \pi/2$ показана на рис. 1.

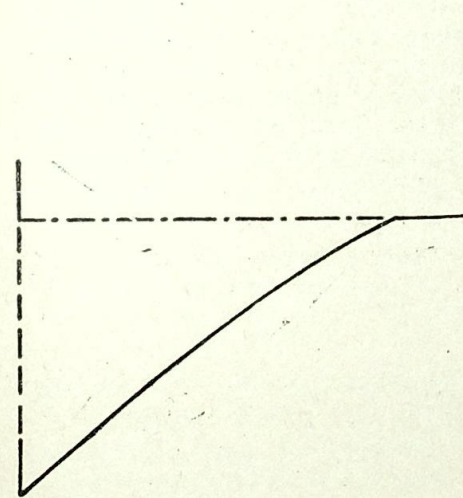


Рис. 1.

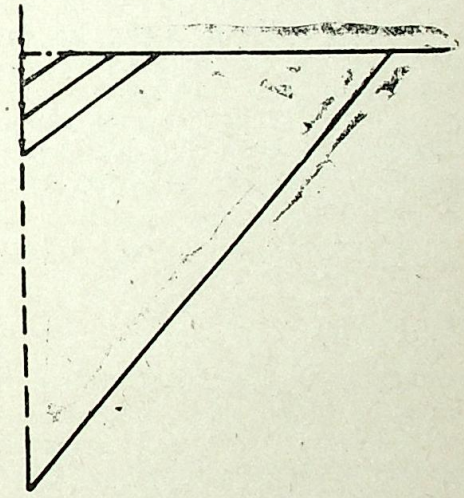


Рис. 2.

2. В случае $\lambda \sqrt{b} = \lambda_0 \sqrt{b_0} \exp(-\alpha \tau) + \lambda_\infty \sqrt{b_\infty} [1 - \exp(-\alpha \tau)]$, т.е. когда величина $\lambda \sqrt{b}$ убывает, стремясь к $\lambda_\infty \sqrt{b_\infty}$, при $\tau \rightarrow \infty$ имеем

$$\varphi = \varphi_0 \frac{I_0\left(\frac{m-1}{m-1+\exp z} \sqrt{z^2 - x^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \exp(-z) + \frac{1}{m}},$$

где $m = \lambda_0 \sqrt{b_0} / \lambda_\infty \sqrt{b_\infty}$.

Положения нити в моменты $0,1\pi/2$; $0,2\pi/2$; $0,3\pi/2$ и $\pi/2$ при $m=2$ показаны на рис. 2.

Выводы

Из приведенных решений можно заключить, что при ударе с постоянной скоростью временные эффекты в материале заметнее влияют на изменение угла во времени, нежели по координате; кривизна нити монотонно растет вдоль нити с нуля в точке приложения силы до некоторого максимального значения на фронте поперечной волны.

Имея картину движения нити при ударе с постоянной скоростью, можно охарактеризовать временные явления, имеющие место в исследуемом материале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматуллин Х. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. МФМ, 1961.
2. Каннингхем В. Введение в теорию нелинейных систем (перевод с английского). М.—Л. ГЭИ, 1962.

Институт математики и
механики АН Азерб. ССР

Поступило 16. V 1970

Ч. Н. Агаларов

Чевик рабитэлэрэ енинэ зэрбэ вахты материалда заман
эффектлэринин һэрэкэтэ тәсири һаггында

ХҮЛАСӘ

Сабит сүр'әтлә зэрбэ вахты чевик рабитәнин һэрәкәти тәдгиг олунмушдур. Материалын хусусијјәти һеч бир моделлә мәһдудлашмамышдыр. Һәрәкәт тәнлији енинэ һәрәкәт областында деформасија вә кәрилмә аппроксимасија көмәклији илә һәлл олунмушдур. Заман эффектлэри рабитәнин формасынын замана көрә дәјишмәјинә координата олдуғундан даһа чох тәсир кәстәрир.

УДК 517.512.6

Б. Б. ГУЛИЕВ

О СХОДИМОСТИ И ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ НА СФЕРЕ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ВАЛЛЕ—ПУССЕНА

Рассмотрим интеграл

$$V_n^*(f; P) = \frac{\alpha_n(n+1)}{4\pi[1-(1-\alpha_n)^{n+1}]} \iint_S f(Q) \left(1 - \alpha_n + \frac{1+\cos \gamma_{PQ}}{2} \alpha_n\right)^n d\sigma_Q, \quad (1)$$

где S — единичная сфера с центром в начале координат трехмерного евклидова пространства, γ_{PQ} — угловое расстояние между точками P и Q сферы S , $0 \leq \alpha_n \leq 1$ — последовательность чисел, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha_n)^n = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что $V_n^*(f; P)$ является линейным положительным оператором. Если $\alpha_n \equiv 1$, то интеграл $V_n^*(f; P)$ совпадает с интегралом $V_n(f; P)$, являющимся интегралом Валле—Пуссена для сферы и рассмотренным в книге С. Л. Соболева [1] в связи с полнотой системы ортогональных сферических функций. Таким образом, интеграл $V_n^*(f; P)$ является обобщением интеграла Валле—Пуссена $V_n(f; P)$. Из условия (2) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha_n = \infty. \quad (3)$$

В настоящей статье устанавливаются некоторые теоремы о сходимости и порядке сходимости последовательности операторов $V_n^*(f; P)$. В работе [2] была установлена следующая

Теорема А. Если для последовательности линейных и положительных операторов $A_n(f; P)$ в точке $P \in S$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(1; P) = 1, \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\psi; P) = 0, \quad (5)$$

где

$$\psi(Q) = \sin^2 \frac{\gamma_{PQ}}{2},$$

то последовательность $A_n(f; P)$ сходится в точке P к $f(P)$ для любой функции f , ограниченной на S и непрерывной в точке P . И эта сходимость равномерна для любой функции $f(P) \in C(S)$, если равномерно на S выполняются условия (4) и (5).

Покажем, что для операторов $V_n^*(f; P)$ выполняются условия теоремы А. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$V_n^*\left(\sin^2 \frac{\gamma_{PQ}}{2}; P\right) = \frac{1}{(n+2)\sigma_n} + \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{(1-\sigma_n)^{n+1}}{(1-\sigma_n)^{n+1}-1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Так как интеграл по сфере не зависит от выбора полюса сферы, то в качестве полюса выберем точку P . Имеем

$$\begin{aligned} V_n^*\left(\sin^2 \frac{\gamma_{PQ}}{2}; P\right) &= \frac{(n+1)\sigma_n}{4\pi[1-(1-\sigma_n)^{n+1}]} \iint_S \sin^2 \frac{\gamma_{PQ}}{2} \left(1-\sigma_n + \frac{1+\cos \gamma_{PQ}}{2} \sigma_n\right)^n d\sigma_Q = \\ &= \frac{(n+1)\sigma_n}{2[1-(1-\sigma_n)^{n+1}]} \int_0^\pi \sin^2 \frac{\gamma}{2} \left(1-\sigma_n + \frac{1+\cos \gamma}{2} \sigma_n\right)^n \sin \gamma d\gamma = \\ &= \frac{(n+1)\sigma_n}{2[1-(1-\sigma_n)^{n+1}]} \int_{-1}^1 \frac{1-x}{2} \left(1-\sigma_n + \frac{1+x}{2} \sigma_n\right)^n dx = \\ &= 1 + \frac{1-\sigma_n}{\sigma_n} - \frac{n+1}{2[1-(1-\sigma_n)^{n+1}]} \int_{-1}^1 \left(1-\sigma_n + \frac{1+x}{2} \sigma_n\right)^{n+1} dx = \\ &= \frac{1}{\sigma_n} - \frac{n+1}{[1-(1-\sigma_n)^{n+1}]\sigma_n} \cdot \frac{\left(1-\sigma_n + \frac{1+x}{2} \sigma_n\right)^{n+2}}{n+2} \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\sigma_n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1-(1-\sigma_n)^{n+2}}{1-(1-\sigma_n)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{(n+2)\sigma_n} + \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{(1-\sigma_n)^{n+1}}{(1-\sigma_n)^{n+1}-1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

в силу сделанных предположений относительно последовательности $\{\sigma_n\}$. Лемма доказана, т. е. для оператора $V_n^*(f; P)$ выполнено условие (5).

Теперь для тех же операторов проверим выполнение условия (4)

$$\begin{aligned} V_n(1; P) &= \frac{(n+1)\sigma_n}{4\pi[1-(1-\sigma_n)^{n+1}]} \iint_S \left(1-\sigma_n + \frac{1+\cos \gamma_{PQ}}{2} \sigma_n\right)^n d\sigma_Q = \\ &= \frac{(n+1)\sigma_n}{2[1-(1-\sigma_n)^{n+1}]} \int_0^\pi \left(1-\sigma_n + \frac{1+\cos \gamma}{2} \sigma_n\right)^n \sin \gamma d\gamma = \\ &= \frac{(n+1)\sigma_n}{2[1-(1-\sigma_n)^{n+1}]} \int_{-1}^1 \left(1-\sigma_n + \frac{1+x}{2} \sigma_n\right)^n dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n+1}{1-(1-\sigma_n)^{n+1}} \cdot \frac{\left(1-\sigma_n + \frac{1+x}{2} \sigma_n\right)^{n+1}}{n+1} \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{n+1}{1-(1-\sigma_n)^{n+1}} \cdot \frac{1-(1-\sigma_n)^{n+1}}{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, для операторов $V_n^*(f; P)$ выполнены все условия теоремы А. Поэтому имеет место следующая

Теорема 1. *Последовательность обобщенных операторов Валле—Пуссена $V_n^*(f; P)$ сходится в точке P к $f(P)$ для любой функции f , ограниченной на S и непрерывной в точке P . И эта сходимость равномерна для любой функции $f(P) \in C(S)$.*

Теорему 1 можно получить также из следующей теоремы работы [2].

Теорема Б. Пусть

$$L_n(f; P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(Q) K_n(\cos \gamma_{PQ}) d\sigma_Q,$$

где

$$K_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} (2k+1) P_k(x).$$

Если для матрицы чисел $\rho_k^{(n)}$ выполнены условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1^{(n)} = 1, K_n(x) \geq 0, -1 \leq x \leq 1, \quad (6)$$

то для последовательности операторов $L_n(f; P)$ справедливы утверждения теоремы А.

Теперь займемся установлением порядка приближения функций интегралами $V_n^*(f; P)$. Будем пользоваться следующими теоремами из работы [2].

Теорема В. Если $L_n(f; P)$ — линейный положительный оператор ($K_n(x) \geq 0$), то для функции $f(P) \in C(S)$ справедливо неравенство

$$\|L_n(f) - f\|_{C(S)} \leq 8 \mathcal{Q}_f \left(\frac{1}{m} \right) \left[1 + m^2 \cdot \frac{\pi^2}{2} (1 - \rho_1^{(n)}) \right], \quad (10)$$

где m — любое положительное число, $\mathcal{Q}_f(\delta)$ — обобщенный (сферический) модуль непрерывности функции f .

Теорема Г. Пусть $L_n(f; P)$ — линейный положительный оператор ($K_n(x) \geq 0$). Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \rho_2^{(n)}}{1 - \rho_1^{(n)}} = 3, \quad (11)$$

то в каждой точке P , в которой существует конечный обобщенный лапласиан

$$D^* f(P) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\pi \sin \gamma} \int_{C(P; \gamma)} f(Q) dS_Q - f(P)}{\sin^2 \frac{\gamma}{3}},$$

имеет место соотношение

$$L_n(f; P) - f(P) = \frac{1}{2} (1 - \rho_1^{(n)}) D^* f(P) + o(1 - \rho_1^{(n)}). \quad (12)$$

Из (9) получаем

$$1 - \rho_1^{(n)} \leq \frac{2}{(n+2)\alpha_n}.$$

Полагая в (10) $m = \sqrt{n\alpha_n}$, получим следующую теорему.

Теорема 2. Если $f(P) \in C(S)$, то справедливо неравенство

$$\|V_n^*(f) - f\|_{C(S)} \leq 8(1 + \pi^2) \mathcal{Q}_f \left(\frac{1}{\sqrt{n\alpha_n}} \right).$$

Теперь проверим выполнимость условия (11) для операторов $V_n^*(f; P)$.

Лемма 2. Справедливо соотношение

$$V_n^* \left(\sin^2 \frac{\gamma_{QN}}{2}; N \right) = \frac{2}{(n+2)(n+3)\alpha_n} - \\ - \left\{ \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{2(1-\sigma_n)^{n+1}}{[1-(1-\sigma_n)^{n+1}](n+3)\alpha_n} + \frac{(1-\sigma_n)^{n+1}}{[1-(1-\sigma_n)^{n+1}](n+3)} \right\} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Эта лемма устанавливается так же, как и лемма 1.

Так как

$$P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

то

$$\frac{1 - \rho_2^{(n)}}{1 - \rho_1^{(n)}} = \frac{1 - V_n^*(P_2(\cos \gamma_{QN}); N)}{1 - V_n^*(P_1(\cos \gamma_{QN}); N)} = \\ = \frac{1 - V_n^* \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma_{QN} - \frac{1}{2}; N \right)}{1 - V_n^*(\cos \gamma_{QN}; N)} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2} V_n^*(\cos^2 \gamma_{QN}; N)}{1 - V_n^*(\cos \gamma_{QN}; N)} = \\ = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2} V_n^* \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma_{QN}}{2}; N \right)}{2 V_n^* \left(\sin^2 \frac{\gamma_{QN}}{2}; N \right)} = \\ = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2} V_n^* \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\gamma_{QN}}{2} + 4 \sin^4 \frac{\gamma_{QN}}{2}; N \right)}{2 V_n^* \left(\sin^2 \frac{\gamma_{QN}}{2}; N \right)} = \\ = 3 \cdot \left[1 - \frac{V_n^* \left(\sin^4 \frac{\gamma_{QN}}{2}; N \right)}{V_n^* \left(\sin^2 \frac{\gamma_{QN}}{2}; N \right)} \right].$$

Учитывая леммы 1 и 2, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \rho_2^{(n)}}{1 - \rho_1^{(n)}} = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{2}{(n+3)\alpha_n} \right] = 3.$$

Поэтому из теоремы Г на основании леммы 1 следует

Теорема 3. Если функция $f(P)$ имеет в точке P конечный обобщенный лапласиан $D^* f(P)$, то справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \{V_n^*(f; P) - f(P)\} = D^* f(P).$$

где

$$\beta_n \sim n\alpha_n.$$

Из этой теоремы следует, что при приближении функций интегралами $V_n^*(f; p)$ порядок приближения не выше, чем $\frac{1}{n\alpha_n}$, как бы ни была хороша функция $f(P)$. В случае 2π -периодических функций подобные интегралы рассмотрены в работах [3—5].

Настоящая работа выполнена под руководством Ар. С. Джафара, которому автор выражает глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Уравнения математической физики, М., 1966.
2. Джафаров Ариф С., Гулиев Б. Б. О сходимости и порядке сходимости линейных положительных интегральных операторов, действующих над функциями, заданными на сфере. Докл. Болгарской Академии наук, 1970.
3. Натансон И. П. ДАН СССР, т. XIV, 1944, № 7.
4. Коровкин П. П. УМН, т. XIII, вып. 6 (84), 1958.
5. Лебедева Л. П. Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена, т. 183 (1958).

Институт математики и
механики АН Азерб. ССР

Поступило 16. V 1970

Б. Б. Гулиев

Сфера үзәриндә үмүмиләшмиш Валле-Пуссен интегралы
васитәсилә жығылма вә жығылма тәртиби һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә сфера үчүн Валле-Пуссен операторунун үмүмиләшмәсинә бахылмышдыр. Исбат едилмишдир ки, дүзәлдилмиш үмүмиләшмиш интеграл оператор мүүжән шәртләрлә сфера үзәриндә мәнһуд вә сферанын P нөгтәсиндә кәсилмәжән f функцијасы үчүн $f(P)$ -ә жығылыр. Еләчә дә исбат олунмушдур ки, ихтијари $f(P) \in C(S)$ функцијасы үчүн бахылан оператор мүнτζәм олараг $f(P)$ -ә жығылыр. Сонра үмүмиләшмиш (сферик) кәсилмәзликлә модулу васитәсилә жығылма тәртиби верилмиш вә нәһајәт, бу јахынлашма тәртиби үчүн асимптотик бәрәбәрлик тапылмышдыр.

А. Ш. КАХРАМАНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО МЕТОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕС- КОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

1. В данной работе операционным методом решалась смешанная задача для уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + c(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

$$x \in [0, \infty], t \in [0, T].$$

при условиях

$$u'_x(0, t) + \alpha u'_t(0, t) + \beta u(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (3)$$

Здесь a, α, β — комплексные постоянные числа, $b(x), c(x), \varphi(x), f(x, t)$ — вообще говоря, комплекснозначные функции. В дальнейшем везде предполагаем, что выполняется условие А: $b(x), b^2(x), b'(x), c(x)$ — ограниченные, суммируемые функции на $[0, \infty]$.

Применяя преобразование Лапласа к задаче (1)–(3), получаем граничную задачу с параметром (для простоты изложения считаем пока $f(x, t) \equiv 0$)

$$a \frac{d^2 \bar{u}(x, \lambda)}{dx^2} + b(x) \frac{d \bar{u}(x, \lambda)}{dx} + (c(x) - \lambda) \bar{u}(x, \lambda) = -\varphi(x), \quad (4)$$

$$\frac{d \bar{u}(x, \lambda)}{dx} \Big|_{x=0} + (\alpha \lambda + \beta) \bar{u}(x, \lambda) \Big|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

где $\bar{u}(x, \lambda)$ — преобразование Лапласа функции $u(x, t)$.

Для решения граничной задачи (4)–(5) применяем методику из работы [1]. При условии А можно доказать, что однородное уравнение

$$a \frac{d^2 \bar{u}(x, \lambda)}{dx^2} + b(x) \frac{d \bar{u}(x, \lambda)}{dx} + (c(x) - \lambda) \bar{u}(x, \lambda) = 0 \quad (6)$$

имеет фундаментальную систему частных решений $u_1(x, \lambda), u_2(x, \lambda)$, которые допускают следующие асимптотические представления при больших λ , принадлежащих области

$$D_\varepsilon = \left\{ \lambda: |\lambda| \geq M, -\pi + \varepsilon \leq \arg \lambda \leq \pi - \varepsilon \right\} \text{ равномерно по } x \in [0, \infty]:$$

$$\frac{d^k u_1(x, \lambda)}{dx^k} = \left(-\sqrt{\frac{\lambda}{a}} \right)^k e^{-\beta(x)} e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{a}} x} \left[1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right], \quad (7)$$

$$\frac{d^k u_2(x, \lambda)}{dx^k} = \left(\sqrt{\frac{\lambda}{a}} \right)^k e^{-\beta(x)} e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{a}} x} \left[1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right], \quad (8)$$

$$k = 0, 1, 2.$$

Здесь $\beta(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x b(\xi) d\xi$, $o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ обозначает функцию вида

$\frac{\eta(x, \lambda)}{\sqrt{\lambda}}$, где $\eta(x, \lambda)$ непрерывно дифференцируема и при больших λ

ограничена, для $\sqrt{\frac{\lambda}{a}}$ берем ту ветвь, для которой $\operatorname{Re} \sqrt{\frac{\lambda}{a}} \geq 0$, M — постоянная величина, определяемая данными задачи, $\varepsilon > 0$.

Аналогично тому, как в работе [1], можно показать, что функция Грина задачи (4)–(5) равна

$$K(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a\lambda}} [u_1(x, \lambda) u_2(\xi, \lambda) - \psi(\lambda) u_2(x, \lambda) u_1(\xi, \lambda)] e^{2\beta(\xi)}, & \xi < x, \\ \frac{1}{2\sqrt{a\lambda}} [u_2(\xi, \lambda) u_2(x, \lambda) - \psi(\lambda) u_1(x, \lambda) u_1(\xi, \lambda)] e^{2\beta(\xi)}, & \xi > x, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\psi(\lambda) = \frac{u'_2(0, \lambda) + (\alpha \lambda + \beta) u_2(0, \lambda)}{u'_2(0, \lambda) + (\alpha \lambda + \beta) u_2(0, \lambda)}. \quad (10)$$

Доказывается следующая

Теорема 1. При условии А, если $\varphi(x) \in L^2(0, \infty)$, задача (4)–(5) для $x \in [0, \infty), \lambda \in D_\varepsilon$ имеет аналитическое по λ решение, представимое в виде

$$\bar{u}(x, \lambda) = \int_0^\infty K(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi, \quad (11)$$

для $\bar{u}(x, \lambda)$ справедлива оценка

$$\left| \frac{d^k \bar{u}(x, \lambda)}{dx^k} \right| \leq \frac{C_\varepsilon}{(|\lambda|)^{1-k}}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (12)$$

2. Смешанная задача (1)–(3). Пусть $-\frac{\pi}{2} < \arg a < \frac{\pi}{2}$, возьмем для

определенности $\arg a = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_2$, тогда при соответствующем подборе

числа ε найдется такое $\delta > 0$, что облас $D = \{\lambda: |\lambda| \geq M, \cos \arg \lambda \geq |\delta|\}$ λ плоскости входит целиком в область D_ε . В этом случае все утверждения теоремы 1 сохраняются в области D , при чем в оценке (12) постоянная C от ε уже не зависит.

Теперь может быть сформулирована основная

Теорема 2. При условиях теоремы 1, если $-\frac{\pi}{2} < \arg a < \frac{\pi}{2}$,

$\varphi(x)$ имеет ограниченные, суммируемые производные до второго порядка для $x \in [0, \infty)$, $f(x, t)$ имеет ограниченные, суммируемые по x производные по x и t до второго порядка при $x \in [0, \infty), t \in [0, T]$,

то существует решение задачи (1)–(3), представимое в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t} d\lambda \int_0^\infty \kappa(x, \xi, \lambda) \left[\varphi(\xi) + \int_0^t e^{-\lambda \tau} f(\xi, \tau) d\tau \right] d\xi, \quad (13)$$

где $c \geq M$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t} \int_0^\infty \kappa(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t} \overline{u(x, \lambda)} d\lambda \quad (14)$$

является решением задачи (1)–(3) при $f(x, t) \equiv 0$.

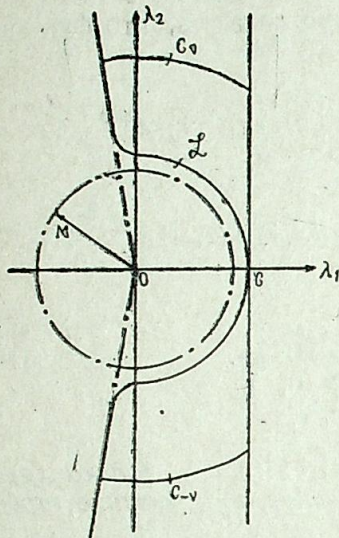


Рис. Применение операционного метода к исследованию разрешимости смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка на полуоси.

Так же как в [3] (стр. 69) и [2] (стр. 150) предварительно установим, что в интеграле (14) путь интегрирования $\operatorname{Re} \lambda = c$ можно заменить на контур L (см. рис. для $|\lambda| > c$ контур L совпадает с лучами $\cos \arg \lambda = -\delta$). Возможность такой замены контура интегрирования при имеющейся для $\overline{u(x, \lambda)}$ оценке (12) установлена в работе [3], здесь же нами дается более краткое доказательство справедливости такой замены. Действительно, из аналитичности $\overline{u(x, \lambda)}$ между контуром L и прямой $\operatorname{Re} \lambda = c$ следует, что для нашей цели достаточно доказать равенство

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_{c \pm v} e^{\lambda t} \overline{u(x, \lambda)} d\lambda = 0. \quad (15)$$

На контурах $C_{\pm v}$, $\operatorname{Re} \lambda \leq c$; $t \geq 0$, а для $\overline{u(x, \lambda)}$ имеет место оценка $|\overline{u(x, \lambda)}| \leq C (V|\lambda|)^{-1}$. Поэтому, применяя лемму Жордана (см. [4], стр. 434), получаем равенство (15).

Итак

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\lambda t} \overline{u(x, \lambda)} d\lambda. \quad (16)$$

Далее, установив равномерную сходимость интеграла (16) относительно $t \in [0, T]$, $x \in (0, \infty)$, интеграла (16) и интегралов, полученных из него дифференцированием один раз по t и два раза по x относительно $t \in (0, T)$, $x \in [0, \infty)$, непосредственной проверкой убеждаемся, что $u_1(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $f(x, t) \equiv 0$, граничному условию (2) и начальному условию (3).

На втором этапе мы должны доказать, что

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t} d\lambda \int_0^\infty \kappa(x, \xi, \lambda) \int_0^t e^{\lambda \tau} f(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (17)$$

является решением задачи (1)–(3) при нулевом начальном условии. Точно так же, как и выше, убеждаемся в справедливости представ-

ления

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t} d\lambda \int_0^\infty \kappa(x, \xi, \lambda) \int_0^t e^{\lambda \tau} f(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (18)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\tau &= -\frac{1}{\lambda} f(\xi, t) + \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} f(\xi, 0) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{df(\xi, t)}{dt} + \\ &+ \frac{1}{\lambda^2} \frac{df(\xi, t)}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

Пользуясь формулой (19), можно установить сходимость интеграла (18), а также интегралов, полученных из него дифференцированием по t и один раз по x , причем сходимость относительно $t \in [0, T]$, $x \in [0, \infty)$ равномерна. Следовательно, в формуле (18) под знаком интеграла по контуру L можно дифференцировать по t и один раз по x и переходить к пределу при $t \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$.

Тогда, переходя к пределу при $t \rightarrow 0$, под знаком интеграла (18) получим

$$u_2(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} u_2(x, t) = 0.$$

Далее, введя оператор граничного условия под знак интеграла (18), удастся показать, что $u_2(x, t)$ удовлетворяет граничному условию (2). Кроме того, пользуясь значениями нижеследующих интегралов:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{1}{V\lambda} \exp \left[\lambda(t-\tau) \pm \sqrt{\frac{\lambda}{a}} (x-\xi) \right] d\lambda &= \frac{2i\sqrt{\pi}}{\sqrt{t-\tau}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a(t-\tau)} \right], \\ \int_L \exp \left[\lambda(t-\tau) \pm \sqrt{\frac{\lambda}{a}} (x-\xi) \right] d\lambda &= \mp \frac{iV\pi(x-\xi)}{\sqrt{a}(t-\tau)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a(t-\tau)} \right], \end{aligned}$$

которые получаются непосредственным вычислением, можно доказать, что $u_2(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Здесь отметим, что, применяя оператор $\frac{\partial}{\partial t} - P \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b(x) \frac{\partial}{\partial x} - c(x)$ к интегралу (18), мы не имеем права диф-

ференцировать два раза по x под знаком интеграла по контуру L , поэтому приходится выделить главную часть этого интеграла и вычислить ее. На этом доказательство теоремы 2 завершается.

В заключение приношу благодарность проф. М. Г. Гасимову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А. Тр. Московского матем. об-ва, 3 (1954).
2. Карслоу Х. и Еввер Д. Операционные методы в прикладной математике, М., 1948.
3. Эфрос А. и Данилевский. Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков, 1937.
4. Лаврентьев М. и Шабат Б. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1965.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 19. V 1970

Жарымохда икинчи тәртиб параболик тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләнин һәллинин варлығынын оператор үсулу илә тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә жарымохда икинчи тәртиб параболик тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләжә бахылмышдыр. Бәзи шәртләр дахилиндә мәсәләнин контур интегралы шәклиндә көстәрилә билән һәллинин варлығы исбат олунмушдур.

УДК 517.946

Х. М. НАДЖАФОВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ, С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ЛИНИИ ВЫРОЖДЕНИЯ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$L(z) = yz_{xx} + z_{yy} + \left[\frac{a_0}{|y|^{1/2}} + a(x, y) \right] z_x + \left[\frac{\beta_0}{y} + b(x, y) \right] z_y + c(x, y)z = 0 \quad (1)$$

в области Ω полуплоскости $y \leq 0$, ограниченной отрезком AB оси x , дугами характеристик

$$AC: x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 0 \quad \text{и} \quad BC: x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 1,$$

выходящих из точки $C\left(\frac{1}{2}, -\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\right)$ и оканчивающихся в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$. В характеристических координатах

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} \quad (2)$$

уравнение (1) принимает вид

$$L_1(z) = z_{\xi\eta} + \frac{q}{\eta - \xi} z_{\xi} - \frac{p}{\eta - \xi} z_{\eta} + \alpha(\xi, \eta) z_{\xi} + \beta(\xi, \eta) z_{\eta} + C(\xi, \eta) z = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^{2/3} \cdot a \cdot (\eta - \xi)^{-2/3} - \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/3} \cdot b \cdot (\eta - \xi)^{-1/3}, \\ \beta(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^{2/3} \cdot a \cdot (\eta - \xi)^{-2/3} - \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/3} \cdot b \cdot (\eta - \xi)^{-1/3}, \\ C(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^{2/3} \cdot c \cdot (\eta - \xi)^{-2/3}, \quad q = \frac{1}{6} - \frac{a_0}{3} + \frac{\beta_0}{3}, \\ p &= \frac{1}{6} + \frac{a_0}{3} + \frac{\beta_0}{3}. \end{aligned}$$

Задача Коши. Найти решение $z(x, y)$ уравнения (1) в области Ω , непрерывное в замкнутой области $\bar{\Omega}$, дважды непрерывно дифференцируемое в области Ω и удовлетворяющее начальным данным

$$\lim_{y \rightarrow -0} z(x, y) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} z_y(x, y) = \nu(x), \quad 0 < x < 1. \quad (5)$$

Задача Коши для уравнения (3) в случае $p = q = \frac{1}{6}$ решена

Ф. И. Франклем [1] при ограничении на длину линии перехода. К. И. Бабенко [2] снял ограничение на длину линии перехода, но при этом считал $a(x, 0) = 0$. В дальнейшем И. В. Майоровым [4] было снято и это ограничение. Задача Коши для уравнения (3) в случае $p = q$ рассмотрена М. М. Смирновым [5]. В характеристических координатах (2) область Ω преобразуется в область H , ограниченную линиями $\xi = 0$, $\eta = 1$, $\eta = \xi$. Начальные условия (4), (5) принимают вид:

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} z(\xi, \eta) = \tau(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad (6)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \left(\frac{3}{4} \right)^{p+q} \cdot (\eta - \xi)^{p+q} \cdot (z_\xi - z_\eta) = \nu(\xi), \quad 0 < \xi < 1. \quad (7)$$

Определение. Регулярным решением уравнения (3) в области H будем называть решение $z(\xi, \eta)$, которое непрерывно в замкнутой области $\bar{H}$ и имеет непрерывные частные производные первого порядка в области H .

В характеристических координатах (2) для уравнения (3) задача Коши формулируется так: найти регулярное решение $z(\xi, \eta)$ уравнения (3) в области H , удовлетворяющее начальным условиям (6), (7).

§ 2. Построение функции Римана

Решение поставленной задачи будем проводить методом Римана, поэтому займемся построением функции Римана. Сопряженное уравнение для уравнения (3) имеет вид

$$L_1^*(z) = z_{\xi\eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{q \cdot z}{\eta - \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p \cdot z}{\eta - \xi} \right) - D[z] = 0, \quad (8)$$

где положено

$$D[z(\xi, \eta)] = \frac{\partial}{\partial \xi} [\alpha(\xi, \eta)z] + \frac{\partial}{\partial \eta} [\beta(\xi, \eta)z] - C(\xi, \eta)z.$$

Введем обозначения

$$U(\xi_0, \eta_0; \xi_0, \eta) = \bar{c}(\xi_0, \eta_0; \eta) = \left(\frac{\eta - \xi_0}{\eta_0 - \xi_0} \right)^q \cdot \exp \left\{ \int_{\eta_0}^{\eta} c(\xi_0, \eta') d\eta' \right\}, \quad (9)$$

$$U(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta_0) = \bar{\beta}(\xi_0, \eta_0; \xi) = \left(\frac{\eta_0 - \xi}{\eta_0 - \xi_0} \right)^p \cdot \exp \left\{ \int_{\xi_0}^{\xi} \beta(\xi', \eta_0) d\xi' \right\}. \quad (10)$$

Функцию Римана для уравнения (3) строим методом последовательных приближений [1]. Отыскивая функцию Римана для уравнения (8) в виде ряда

$$U(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta), \quad (11)$$

для $U_n (n = 1, 2, \dots)$ получим следующие интегральные представления:

$$U_1(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta_0}^{\eta} U_0(\xi', \eta'; \xi, \eta) D[U_0(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta')] d\xi' d\eta' + \\ + \int_{\xi_0}^{\xi} U_0(\xi', \eta_0; \xi, \eta) \beta(\xi', \eta_0) \bar{\beta}(\xi_0, \eta_0; \xi') d\xi' + \\ + \int_{\eta_0}^{\eta} U_0(\xi_0, \eta'; \xi, \eta) \alpha(\xi_0, \eta') \bar{\alpha}(\xi_0, \eta_0; \eta') d\eta', \quad (12)$$

$$U_{n+1}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta_0}^{\eta} U_n(\xi', \eta'; \xi, \eta) D[U_n(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta')] d\xi' d\eta', \quad (13)$$

($n = 1, 2, \dots$)

где

$$U_0(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = (\eta - \xi)^{q+p} \cdot (\eta - \xi_0)^{-p} \cdot (\eta_0 - \xi)^{-q} \times \\ \times F \left[p, q, 1; \frac{(\xi - \xi_0)(\eta_0 - \eta)}{(\eta_0 - \xi)(\eta - \xi_0)} \right]$$

является функцией Римана [3] для уравнения

$$L_0(z) = z_{\xi\eta} + \frac{q}{\eta - \xi} z_\xi - \frac{p}{\eta - \xi} z_\eta = 0. \quad (14)$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$q > 0, \quad p > 0, \quad \frac{2}{3} < q + p < 1.$$

Выясним равномерную сходимость ряда (11) в замкнутой области $\bar{H}$. Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Лемма 1. В области H имеет место неравенство

$$|D[U_0(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)]| \leq C_0 \lambda_0 (\eta_0 - \xi_0)^{1-p-q} \cdot (\eta - \xi)^{-\frac{2}{3}} \times \\ \times (\eta_0 - \xi)^{p-1} \cdot (\eta - \xi_0)^{q-1},$$

где C_0 — постоянная, независимая от ξ_0, η_0, ξ, η ;

$$\lambda_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/3} \max \{ |a|, |a_x|, |b_y|, |c|, \left(\frac{4}{3} \right)^{1/3} \cdot |b| \}.$$

Лемма 2. В области H справедливо неравенство

$$|D[U_1(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)]| \leq L C_1 \lambda_0^2 \cdot (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{4}{3}-p-q} \cdot (\eta - \xi)^{-\frac{2}{3}} \times \\ \times (\eta_0 - \xi)^{p-1} \cdot (\eta - \xi_0)^{q-1},$$

где C_1 — постоянная, независимая от ξ_0, η_0, ξ, η ; $L = \exp \{ \lambda_0 \times (\eta_0 - \xi_0)^{1/3} \}$.

Рассмотрим случай, когда $0 < p < \frac{1}{6}$, $\frac{2}{3} < q < \frac{5}{6}$.

Имеет место

Лемма 3. В области H справедливы неравенства

$$|D[U_\kappa(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)]| \leq L \lambda_0^{\kappa+1} \cdot C_\kappa \cdot (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{1}{3}-p} (\eta - \xi)^{-\frac{2}{3}} \cdot (\eta_0 - \xi)^{p+\frac{\kappa-4}{3}} \\ (\kappa = 2, 3),$$

$$|D[U_4(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)]| \leq L \lambda_0^5 C_4 \cdot (\eta_0 - \xi_0)^{1/3} \cdot (\eta - \xi)^{-\frac{2}{3}},$$

где $C_\kappa (\kappa = 2, 3, 4)$ — постоянные, независимые от ξ_0, η_0, ξ, η .

Лемма 4. В области H имеет место неравенство

$$|D[U_{n+5}(\xi_0, \eta_0, \xi, \eta)]| \leq \frac{\Gamma^{\frac{1}{r}} \left(1 + \frac{r}{6}\right) (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{1}{2} + n \left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{3}\right)} \cdot [\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{n}{r} + \frac{1}{6}}}{\left[1 - r_1 \cdot \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1\right)\right]^{\frac{n}{r_1}} \cdot \Gamma^{\frac{1}{r}} \left(n + 1 + \frac{r}{6}\right) \cdot (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}},$$

где

$$n = 0, 1, 2, \dots, C = \lambda_0^6 L C_5, C_1 = \lambda_0 \left[\frac{C_0}{\varepsilon_1} + 4\right], \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r} = 1,$$

$$1 < r_1 < \frac{3}{2 + 3\varepsilon_1}, \varepsilon_1 > 0 \text{ — малое число.}$$

Доказательство. Доказательство леммы проводим методом математической индукции. Нетрудно убедиться в справедливости утверждения леммы при $n = 0, 1, 2$. Предположим, что утверждение леммы верно при $n = \kappa$ и докажем ее для $n = \kappa + 1$:

$$\begin{aligned} D[U_{\kappa+6}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)] &= \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta_0}^{\eta} D[U_0(\xi', \eta'; \xi, \eta)] \cdot D[U_{\kappa+5}(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta')] d\xi' d\eta' + \\ &+ \alpha(\xi, \eta) \int_{\eta_0}^{\eta} U_0(\xi, \eta'; \xi, \eta) D[U_{\kappa+5}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta')] d\eta' + \\ &+ \beta(\xi, \eta) \int_{\xi_0}^{\xi} U_0(\xi', \eta; \xi, \eta) D[U_{\kappa+5}(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta)] d\xi' = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Оценим I_1 , пользуясь результатом леммы 1:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta_0}^{\eta} |D[U_0(\xi', \eta'; \xi, \eta)]| \cdot |D[U_{\kappa+5}(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta')]| d\xi' d\eta' \leq \\ &\leq \frac{C_0 \lambda_0 C C_1^{\kappa} \Gamma^{\frac{1}{r}} \left(1 + \frac{r}{6}\right) (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{1}{2} + \kappa \left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{3}\right) + \varepsilon_1}}{\varepsilon_1 \cdot \left[1 - r_1 \cdot \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1\right)\right]^{\frac{\kappa}{r_1}} \cdot \Gamma^{\frac{1}{r}} \left(\kappa + 1 + \frac{r}{6}\right) (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}} \times \\ &\times \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{[\eta_0 - \eta + \xi' - \xi_0]^{\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{6}}}{(\xi - \xi')^{\frac{2}{3} + \varepsilon_1}} d\xi'. \end{aligned}$$

Применяя к интегралу неравенство Гельдера с показателями r и r_1 , получим

$$\begin{aligned} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{[\eta_0 - \eta + \xi' - \xi_0]^{\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{6}}}{(\xi - \xi')^{\frac{2}{3} + \varepsilon_1}} d\xi' &\leq \\ &\leq \frac{(\eta_0 - \xi_0)^{\frac{1}{r} - \frac{2}{3} - \varepsilon_1} \cdot [\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{\kappa+1}{r} + \frac{1}{6}}}{\left[1 - r_1 \cdot \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1\right)\right]^{\frac{1}{r_1}} \cdot \left[\kappa + 1 + \frac{r}{6}\right]^{\frac{1}{r}}}. \end{aligned}$$

Тогда окончательно для I_1 будем иметь оценку

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \\ &\leq \frac{C_0 \lambda_0 C C_1^{\kappa} \cdot \Gamma^{\frac{1}{r}} \left(1 + \frac{r}{6}\right) \cdot (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{1}{2} + (\kappa+1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{3}\right)} \cdot [\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{\kappa+1}{r} + \frac{1}{6}}}{\varepsilon_1 \cdot \left[1 - r_1 \cdot \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{r_1}} \cdot \Gamma^{\frac{1}{r}} \left(\kappa + 2 + \frac{r}{6}\right) \cdot (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

Аналогично рассуждая, получим

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \\ &\leq \frac{2 \lambda_0 C C_1^{\kappa} \cdot \Gamma^{\frac{1}{r}} \left(1 + \frac{r}{6}\right) \cdot (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{1}{2} + (\kappa+1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{3}\right)} \cdot [\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{\kappa+1}{r} + \frac{1}{6}}}{\left[1 - r_1 \cdot \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{r_1}} \cdot \Gamma^{\frac{1}{r}} \left(\kappa + 2 + \frac{r}{6}\right) \cdot (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}}; \end{aligned}$$

и имеет одинаковую оценку с I_2 . Итак, из полученных оценок для I_κ ($\kappa = 1, 2, 3$) имеем

$$\begin{aligned} |D[U_{\kappa+6}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)]| &\leq \\ &\leq C C_1^{\kappa+1} \cdot \frac{\Gamma^{\frac{1}{r}} \left(1 + \frac{r}{6}\right) (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{1}{2} + (\kappa+1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{3}\right)} \cdot [\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{\kappa+1}{r} + \frac{1}{6}}}{\left[1 - r_1 \cdot \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{r_1}} \cdot \Gamma^{\frac{1}{r}} \left(\kappa + 2 + \frac{r}{6}\right) \cdot (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из лемм 1, 2, 3 следует

Лемма 5. В области H справедливы неравенства

$$|U_n(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)| \leq L \lambda_0^n C_n (\eta - \xi)^{q+p} \cdot (\eta_0 - \xi)^{-q} \cdot (\eta - \xi_0)^{-p} \cdot (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{n}{3}} \quad (n = 1, 2),$$

$$|U_3(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)| \leq L \lambda_0^3 C_3 (\eta - \xi)^{q+p} \cdot (\eta_0 - \xi)^{\frac{1}{6}} \cdot (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{7}{6} - p - q},$$

$$|U_\kappa(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)| \leq C_\kappa L \lambda_0^\kappa (\eta - \xi)^{q+p} \cdot (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{\kappa}{3} - p - q} \quad (\kappa = 4, 5),$$

где $C_\kappa (\kappa = 1, \dots, 5)$ — постоянные, независимые от ξ_0, η_0, ξ, η .

Заметим, что утверждение леммы 5 для U_κ ($\kappa = 4, 5$) справедливо в замкнутой области $\bar{H}$.

Лемма 6. В замкнутой области $\bar{H}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |U_{n+6}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)| &\leq \\ &\leq C C_1^n K \cdot \frac{\Gamma^{\frac{1}{r}} \left(1 + \frac{r}{6}\right) (\eta - \xi)^{q+p} \cdot (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{11}{6} - p - q + n \left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{3}\right)} \cdot [\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{n}{r} + \frac{1}{6}}}{\left[1 - r_1 \cdot \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1\right)\right]^{\frac{n}{r_1}} \cdot \Gamma^{\frac{1}{r}} \left(n + 1 + \frac{r}{6}\right)} \\ &\quad \Gamma(1 - p - q) \end{aligned}$$

$$\text{где } n = 0, 1, 2, \dots, K = \frac{\left(\frac{1}{3} - p\right) (1 - q) \Gamma(1 - p) \Gamma(1 - q)}{\Gamma(1 - p - q)}.$$

Справедливость леммы 6 очевидна из леммы 4.

Случаи $\frac{1}{6} \leq p \leq \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} - p < q < 1 - p$; $0 < q \leq \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} < q < p < 1 - q$ рассматриваются аналогично. Итак, имеет место

Лемма 7. Ряд (11) абсолютно и равномерно сходится при $\xi_0 < \xi \leq \eta < \eta_0$ для $0 < \eta_0 - \xi_0 < \infty$. Ряд (11) можно почленно дифференцировать и сумма ряда удовлетворяет по ξ , η уравнению (8) и условиям (9), (10). Кроме того,

$|U(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)| \leq C(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)(\eta - \xi)^{q+p} \cdot (\eta - \xi_0)^{-p} \cdot (\eta_0 - \xi)^{-q}$,
где $0 < C(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) < \infty$ при $\xi_0 \leq \xi \leq \eta \leq \eta_0$, $0 < \eta_0 - \xi_0 < \infty$.

§ 3. Решение задачи Коши

Формула решения задачи Коши для уравнения (14) с начальными данными (6), (7), полученная Г. Дарбу [3], имеет вид

$$z(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(q+p)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} (\eta - \xi)^{1-p-q} \int_{\xi}^{\eta} \tau(t) (t - \xi)^{q-1} \cdot (\eta - t)^{p-1} dt - \\ - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1-p-q)}{\Gamma(1-p)\Gamma(1-q)} \cdot \int_{\xi}^{\eta} \nu(t) (\eta - t)^{-q} \cdot (t - \xi)^{-p} dt,$$

где $p > 0$, $q > 0$, $0 < p + q < 1$.

Запишем тождество Грина для уравнения (3):

$$U \cdot L_1(z) - z \cdot L_1^*(U) = N_{\xi} + M_{\eta}, \quad (16)$$

где

$$N = \left[\frac{q}{\eta - \xi} + \alpha(\xi, \eta) \right] U \cdot z - \frac{1}{2} U_{\eta} \cdot z + \frac{1}{2} U \cdot z_{\eta}, \\ M = \left[-\frac{p}{\eta - \xi} + \beta(\xi, \eta) \right] U \cdot z - \frac{1}{2} U_{\xi} \cdot z + \frac{1}{2} U \cdot z_{\xi}.$$

Рассмотрим область $H_{0\epsilon}$, ограниченную линиями $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\eta = \xi + \epsilon$ ($\epsilon > 0$ мало).

Пусть $z(\xi, \eta)$ — решение задачи Коши для уравнения (3) и $U(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$ — функция Римана (11), построенная выше. Проинтегрировав тождество (16) по области $H_{0\epsilon}$, после несложных выкладок, перейдя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, законность которого обеспечивается леммой 7, получим формулу

$$z(\xi_0, \eta_0) = \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) g(\xi_0, \eta_0; \xi) d\xi + \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) h(\xi_0, \eta_0; \xi) d\xi, \quad (17)$$

где

$$h(\xi_0, \eta_0; \xi) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{4}{3} \right)^{p+q} \cdot \frac{1}{2} \cdot \epsilon^{-(p+q)} \cdot U(\xi_0, \eta_0; \xi, \xi + \epsilon) = \\ = - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^{p+q} \cdot \frac{\Gamma(1-p-q)}{\Gamma(1-p)\Gamma(1-q)} \left\{ (\eta_0 - \xi)^{-q} \cdot (\xi - \xi_0)^{-p} + \right. \\ \left. + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\beta(\xi', \eta_0) \cdot \bar{\beta}(\xi_0, \eta_0; \xi')}{(\eta_0 - \xi')^q \cdot (\xi - \xi')^p} d\xi' + \int_{\eta_0}^{\xi} \frac{\alpha(\xi_0, \eta') \bar{\alpha}(\xi_0, \eta_0; \eta')}{(\eta' - \xi)^q \cdot (\xi - \xi_0)^p} d\eta' + \right.$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta_0}^{\xi} \frac{D[U(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta')]}{(\eta' - \xi)^q \cdot (\xi - \xi')^p} d\xi' d\eta', \quad (18)$$

$$g(\xi_0, \eta_0; \xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{q+p}{\epsilon} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/2} \cdot \frac{b}{\epsilon^{1/2}} \right] \cdot U(\xi_0, \eta_0; \xi, \xi + \epsilon) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} U_{\xi}(\xi_0, \eta_0; \xi, \xi + \epsilon) - \frac{1}{2} U_{\eta}(\xi_0, \eta_0; \xi, \xi + \epsilon) \right\} = \\ = \frac{\Gamma(q+p)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \left\{ (\eta_0 - \xi_0)^{1-p-q} \cdot (\xi - \xi_0)^{q-1} \cdot (\eta_0 - \xi)^{p-1} + \right. \\ \left. + \int_{\xi_0}^{\xi} (\eta_0 - \xi')^{1-p-q} \cdot (\xi - \xi')^{q-1} \cdot (\eta_0 - \xi)^{p-1} \cdot \beta(\xi', \eta_0) \bar{\beta}(\xi_0, \eta_0; \xi') d\xi' + \right. \\ \left. + \int_{\eta_0}^{\xi} (\eta' - \xi_0)^{1-p-q} \cdot (\xi - \xi_0)^{q-1} \cdot (\eta' - \xi)^{p-1} \cdot \alpha(\xi_0, \eta') \bar{\alpha}(\xi_0, \eta_0; \eta') d\eta' + \right. \\ \left. + \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta_0}^{\xi} (\eta' - \xi')^{1-p-q} \cdot (\xi - \xi')^{q-1} \cdot (\eta' - \xi)^{p-1} \cdot D[U(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta')] d\xi' d\eta' \right\}. \quad (19)$$

Произведя в (17) замену $\xi = \xi_0 + (\eta_0 - \xi_0)t$, получим

$$z(\xi_0, \eta_0) = \int_0^1 \tau[\xi_0 + (\eta_0 - \xi_0)t] G(\xi_0, \eta_0; t) dt + \\ + \int_0^1 \nu[\xi_0 + (\eta_0 - \xi_0)t] H(\xi_0, \eta_0; t) dt \quad (20)$$

где

$$H(\xi_0, \eta_0; t) = (\eta_0 - \xi_0) \cdot h(\xi_0, \eta_0; \xi_0 + (\eta_0 - \xi_0)t), \\ G(\xi_0, \eta_0; t) = (\eta_0 - \xi_0) \cdot g(\xi_0, \eta_0; \xi_0 + (\eta_0 - \xi_0)t).$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих представлений:

$$G(\xi_0, \eta_0; t) = \\ = \frac{\Gamma(q+p)}{\Gamma(q)\Gamma(p)} t^{q-1} \cdot (1-t)^{p-1} + O[(\eta_0 - \xi_0)^{1/2}] \cdot t^{q-1} \cdot (1-t)^{p-1}, \quad (21) \\ H(\xi_0, \eta_0; t) = - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^{p+q} \cdot \frac{\Gamma(1-p-q)}{\Gamma(1-p)\Gamma(1-q)} (\eta_0 - \xi_0)^{1-p-q} \cdot t^{-p} \cdot (1-t)^{-q} + \\ + O[(\eta_0 - \xi_0)^{4/3-p-q}] t^{-p} \cdot (1-t)^{-q}. \quad (22)$$

Будем считать, что $\tau(x)$ удовлетворяет условию Гельдера порядка $\delta > 1 - p - q$ при $0 \leq x \leq 1$, а $\nu(x)$ является непрерывной в интервале $(0, 1)$ и абсолютно интегрируемой в сегменте $[0, 1]$. Пользуясь представлениями ядер (21), (22), докажем выполнимость начальных условий (4), (5). Из (20), (21) и (22) следует

$$\lim_{y \rightarrow 0} z(x, y) = \lim_{\eta \rightarrow \xi} z(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(q+p)}{\Gamma(q)\Gamma(p)} \tau(\xi) \int_0^1 t^{q-1} \cdot (1-t)^{p-1} dt = \tau(\xi), \\ (1 - \beta_0)(-y)^{\beta_0} \frac{z(x, y) - z(x, 0)}{y} = - (1 - \beta_0) \left(\frac{4}{3} \right)^{1-p-q} \cdot (\eta - \xi)^{p+q-1} \times \\ \times \left\{ \int_0^1 [\tau(T) - \tau(\xi)] t^{q-1} \cdot (1-t)^{p-1} dt + O[(\eta - \xi)^{1/2}] \cdot \int_0^1 \tau(T) t^{q-1} \cdot (1-t)^{p-1} dt - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -v(\xi) \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^{p+q} \cdot \frac{\Gamma(1-p-q)}{\Gamma(1-p)\Gamma(1-q)} (\eta-\xi)^{1-p-q} \cdot \int_0^1 t^{-p} \cdot (1-t)^{-q} dt - \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^{p+q} \cdot \frac{\Gamma(1-p-q)}{\Gamma(1-p)\Gamma(1-q)} (\eta-\xi)^{1-p-q} \cdot \int_0^1 [v(T) - \\
& - v(\xi)] t^{-p} \cdot (1-t)^{-q} dt + O\left[(\eta-\xi)^{\frac{4}{3}-p-q}\right] \cdot \int_0^1 v(T) t^{-p} \cdot (1-t)^{-q} dt \Bigg\} = \\
& = O[(\eta-\xi)^{\delta+p+q-1}] + O[(\eta-\xi)^{q+p-\frac{2}{3}}] + v(\xi) + O(\xi) + O[(\eta-\xi)^{1/3}], \quad (23)
\end{aligned}$$

где $T = \xi + (\eta - \xi)t$, $\varepsilon > 0$ достаточно мало.
Тогда из (23) имеем

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \cdot z_y(x, y) = v(x), \quad 0 \leq x < 1.$$

Нетрудно убедиться, что функция (20) является решением уравнения (3). Из самого способа получения формулы (20) и ее вида следует, что решение задачи Коши (1), (4), (5) единственно и непрерывно зависит от начальных данных. Непрерывная дифференцируемость решения проводится аналогично работе [1]. Имеет место

Теорема. Пусть: 1) функции $a(x, y)$, $b(x, y)$ непрерывны, имеют непрерывные производные до второго порядка включительно и ограниченные производные третьего порядка в замкнутой области $\bar{Q}$. Функция $c(x, y)$ непрерывна, имеет непрерывные производные первого порядка и ограниченные производные второго порядка в замкнутой области $\bar{Q}$;

$$2) \frac{1}{2} < \beta_0 < 1, \quad |\sigma_0| < \frac{2}{3};$$

$$3) \tau(x) \text{ удовлетворяют условию Гельдера порядка } \delta > \frac{2}{3}(1 - \beta_0)$$

при $0 \leq x \leq 1$, $v(x)$ непрерывна в интервале $(0, 1)$, и абсолютно интегрируема на сегменте $[0, 1]$, кроме того, эти функции имеют непрерывные производные до второго порядка включительно.

Тогда существует единственное непрерывное в замкнутой области $\bar{Q}$ решение уравнения (1), имеющее непрерывные производные второго порядка в области Q , удовлетворяющее начальным данным (4), (5); оно представляется в виде (20).

Задача Коши (1), (4), (5) поставлена корректно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И., "Изв. АН СССР, серия матем." 8,5, 1944.
2. Бабенко К. И. К теории уравнений смешанного типа. Докт. дисс. М., 1951.
3. Darbox G. Leçons la théorie des surfaces, 2-e ed. (Paris, Gauthier—Villars) P, 2^e, livr. IV, Chap. III.
4. Майоров И. В. "Волжский матем сб.", вып. 3, 1965.
5. Смирнов М. М. Выражающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. Изд-во "Наука", М., 1966.

Институт математики и
механики АН Азерб. ССР

Поступило 27. II 1970

Х. М. Нәчәфов

Чырлашма хәтти үзәриндә сингулјар әмсаллары олан сәrhәддә чырлашан гиперболик типли бир тәнлик үчүн Коши мәсәләси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә x охунун AB парчасы вә AC , BC характеристикалары илә һүдудланмыш $y \leq 0$ жарыммүстәвисинин Q областында (1) тәнлији үчүн Коши мәсәләсинин корректлији мүүјјән шәртләр дахилиндә Риман үсулу илә исбат едилир.

М. С. КУШЕЛЬМАН

ПОСТРОЕНИЕ ГОМОТОПИЧЕСКИХ 4-СФЕР, РАЗВЕТВЛЕННЫХ НАД ДВУМЕРНЫМИ УЗЛАМИ

Данная статья посвящена построению гомотопической сферы Σ^4 , циклическим образом накрывающей сферу S^4 и разветвленной над двумерным узлом κ^2 . Показана возможность выбора такого узла κ^2 , что двумерная сфера ветвления Λ^2 оказывается заузленной в Σ^4 . Рассматривая преобразование скольжения $T: \Sigma^4 \rightarrow \Sigma^4$, получаем в размерности четыре решение гипотезы Смита [3] в отрицательном смысле с точностью до решения проблемы Пуанкаре [4]. Предположим, что двумерный узел κ^2 расположен в $R^4 = \{x, y, z, t\}$ симметрично относительно $R_{t=0}^3$, $R_{t=0}^3 \cap \kappa^2 = \kappa^1$, где κ^1 является ленточным узлом, для которого $p = 2$ [1, стр. 291], и κ^2 получается при помощи κ^1 так, как описано в [1, стр. 295].

Применяя теорему ван Кампена, получаем, что для задания копредставления группы $\pi_1(S^4 - \kappa^2)$ надо добавить соотношение $x_m = 1$ к копредставлению группы $\pi_1(S^3 - \kappa^1)$ [1]. Далее преобразуем полученное копредставление группы $\pi_1(S^4 - \kappa^2)$ следующим образом: из соотношений $r_i = x_{i-1} c_k x_i^{-1} c_k^{-1}$ и $s_i = x_{\rho(i)-1} x_{\sigma(i)}^{-1} x_{\rho(i)}^{-1}$ индукцией по индексу при x следует, что $x_0 = x_1 = \dots = x_m = 1$; из соотношений $p_i = 1$ и $q_j = 1$ следует, что $a_0 = \dots = a_k$ и $b_0 = \dots = b_l$. Таким образом, обозначая $a_i = a$ и $b_j = b$ при всех i, j , получаем следующее копредставление группы $\pi_1(S^4 - \kappa^2)$:

$$\pi_1(S^4 - \kappa^2) = |a, b : az = zb|_\mu, \text{ где } z = b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_p}.$$

Как видно из данного копредставления, коммутирование в нем таково, что $\nu(a) = \nu(b) = t$, где t является образующей бесконечной циклической группы $\pi_1(S^4 - \kappa^2) \setminus [\pi_1(S^4 - \kappa^2), \pi_1(S^4 - \kappa^2)]$. Представим группу $\pi_1(S^4 - \kappa^2) / [\pi_1(S^4 - \kappa^2), \pi_1(S^4 - \kappa^2)]$ в симметрической группе S_n при помощи формулы $\rho(t) = \begin{pmatrix} i \\ i+1 \end{pmatrix}$ и в соответствии с представлением $\rho: \pi_1(S^4 - \kappa^2) \rightarrow S_n$ построим циклическое n -кратное накрытие $\Sigma^4 - \Lambda^2 \rightarrow S^4 - \kappa^2$ [2]. Тогда [1]

$$\pi_1(\Sigma^4 - \Lambda^2) = \left[\begin{array}{l} a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-1} : a_0 z_1 = z_0 b_{l_0} \dots \\ \dots a_i z_{i+1} = z_i b_{l_i} \dots a_{n-1} z_0 = z_{n-1} b_{l_{n-1}}, \\ a_0 = a_1 = \dots = a_{n-2} = 1; l_i = l_0 + i \pmod{n} \end{array} \right],$$

где.

$$z_1 = b_{i + \frac{\text{sgn } \beta_1 - 1}{2}}^{\text{sgn } \beta_1} \cdot b_{i + \frac{\text{sgn } \beta_1 - 1}{2} + \text{sgn } \beta_1}^{\text{sgn } \beta_1} \cdot \dots \cdot b_{i + \beta_1 - \frac{\text{sgn } \beta_1 + 1}{2}}^{\text{sgn } \beta_1}$$

$$\begin{aligned}
 & a^{\operatorname{sgn} \alpha_1} i + \beta_1 + \frac{\operatorname{sgn} \alpha_2 - 1}{2} \cdot a^{\operatorname{sgn} \alpha_2} i + \beta_1 + \frac{\operatorname{sgn} \alpha_2 - 1}{2} \cdots a^{\operatorname{sgn} \alpha_j} i + \beta_1 + \alpha_1 - \frac{\operatorname{sgn} \alpha_j + 1}{2} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & a^{\operatorname{sgn} \alpha_k} i + \beta_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} + \beta_{k-1} + \frac{\operatorname{sgn} \alpha_k - 1}{2} \cdots a^{\operatorname{sgn} \alpha_k} i + \beta_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \frac{\operatorname{sgn} \alpha_k + 1}{2} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & b^{\operatorname{sgn} \beta_k} i + \beta_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \frac{\operatorname{sgn} \beta_k - 1}{2} \cdots b^{\operatorname{sgn} \beta_k} i + \beta_1 + \alpha_2 + \cdots + \beta_k - \frac{\operatorname{sgn} \beta_k + 1}{2} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & a^{\operatorname{sgn} \alpha_p} i + \beta_1 + \alpha_2 + \cdots + \beta_{p-1} + \frac{\operatorname{sgn} \alpha_p - 1}{2} \cdots a^{\operatorname{sgn} \alpha_p} i + \beta_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p - \frac{\operatorname{sgn} \alpha_p + 1}{2} \pmod{n}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь символ $(\text{mod } n)$ означает, что индексы берутся в классе вычетов $0, 1, \dots, n-1$. Чтобы найти копредставление группы $\pi_1(\Sigma^4)$, надо к получившемуся копредставлению добавить соотношения ветвления: $a_0 a_1 \cdots a_{n-1} = 0$ и $b_0 b_1 \cdots b_{n-1} = 1$. Таким образом, получаем

$$\pi_1(\Sigma^4) = \left| \begin{array}{l} b_0, b_1, \dots, b_{n-1} : z_{0,1} = z_{0,0} b_{l_0} \dots z_{0,0} = \\ = z_{0,n-1} b_{l_{n-1}}; b_0 b_1 \dots b_{n-1} = 1 \quad l_i = l_{0+i} \end{array} \right|_{\mu},$$

где $z_{0,i} = z_i \big|_{a_0=a_1=\dots=a_{n-1}=1}$.

Из точной кохомологической последовательности пары $(\Sigma^4, \Sigma^4 - T_{\Lambda^2})$, где T_{Λ^2} является трубчатой окрестностью Λ^2 в Σ^4 , нетрудно видеть, что односвязное Σ^4 является гомотопической сферой, поэтому найдем некоторое достаточное условие тривиальности группы $\pi_1(\Sigma^4)$. Рассмотрим множество M целочисленных последовательностей $x = (\beta_1, \alpha_2, \dots, \beta_{q-1}, \alpha_q)$, где $q = 1, \dots, p$. Обозначим $s(\beta_k) = \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \dots + \alpha_k + \frac{\text{sgn } \beta_k - 1}{2}$, $f(\beta_k) = \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \dots + \alpha_k + \beta_k + \frac{\text{sgn } \beta_k + 1}{2}$ и определим отображения ξ и η множества M в себя следующим образом.

Определение ξ . Если существуют такие целые положительные числа $i_1, i_2, \dots, i_s$, где $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_s < q$, что: а) $f(\beta_{i_k-1}) \equiv s(\beta_{i_k}) \pmod{n}$ $\kappa = 1, 2, \dots, s$; в) $\operatorname{sgn} \beta_{i_k-1} + \operatorname{sgn} \beta_{i_k} = 0$, $\kappa = 1, 2, \dots, s$, тогда $\xi(x) = \xi(\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i_k-1}, \beta_{i_k-1}, \alpha_{i_k}, \beta_{i_k}, \alpha_{i_k+1}, \dots, \beta_{q-1}, \alpha_q) = (\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i_k-1}, \beta_{i_k-1} + \alpha_{i_k} + \beta_{i_k}, \alpha_{i_k+1}, \dots, \beta_{q-1}, \alpha_q)$. Если не выполняется либо а), либо в), то $\xi(x) = x$.

Определение η . Если существует разбиение последовательности $x = (\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ на такие непересекающиеся подпоследовательности $x_{i_k} = (\sigma_{i_k+1}, \beta_{i_k+1}, \alpha_{i_k+2}, \dots, \alpha_{j_k-1}, \beta_{i_k-1}, \alpha_{j_k})$, где $k = 1, 2, \dots, s$; $1 < i_1, i_2 < \dots < i_s < q$; $j_k < i_{k+1}$ для $k = 1, 2, \dots, s-1$ и $j_s \leq q$, что: с) $\beta_{i_k+1} + \beta_{i_k+2} + \dots + \beta_{j_k-1} \equiv 0 \pmod n$; d) $\text{sgn } \beta_{i_k+1} = \text{sgn } \beta_{i_k+2} = \dots = \text{sgn } \beta_{j_k-1}$; e) $f(\beta_{i_k+m}) \equiv s(\beta_{i_k+m+1}) - \text{sgn } \beta_{i_k+m} \pmod n$, $m = 1, 2, \dots, j_k - i_k - 2$, тогда $\eta(x) = \eta(\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_k, \alpha_{i_k+1}, \beta_{i_k+1}, \dots, \alpha_{j_k-1}, \beta_{j_k}, \alpha_{j_k}, \dots, \alpha_q) = (\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i_k}, \beta_k, \alpha_{i_k+1} + \beta_{i_k+1} + \dots + \alpha_{j_k-1} + \beta_{j_k-1} + \alpha_{j_k}, \beta_{j_k}, \dots, \alpha_q)$.

Если не выполняется одно из условий с), d), e), то $\eta(x) = x$.
Теперь введем последовательность отображений $\varphi_l: M \rightarrow M$, $l \geq 0$,
следующим образом:

$$\varphi_l = \begin{cases} \xi, & \text{если } l \text{ четно,} \\ \eta, & \text{если } l \text{ нечетно,} \end{cases}$$

и обозначим $x_{l+1} = \varphi_l(x_l)$ для $l \geq 0$, причем $x_0 = (\beta_{0,1}, \alpha_{0,2}, \dots, \alpha_{0,q_0}) = (\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$, а также обозначим через $M_0 \subset M$ подмножество

Теорема. Достаточным условием того, что $\pi_1(\Sigma^1) = 1$, является $x \in I$.

Очевидно, что каждой последовательности $x \in M$ взаимнооднозначно соответствует некоторое копредставление

$$\text{Cop} = \left| \begin{array}{ccccccc} a_0, & a_1 & \dots & a_{n-1}, & b_0, & b_1 & \dots, & b_{n-1} : a_0 z_1 = z_0 b_{l_0} \\ & & & & & & & a_i z_{i-1} = z_i b_{l_i} \\ & & & & & & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & & & & & & & a_{n-1} z_0 = z_{n-1} b_{l_{n-1}} \end{array} \right|,$$

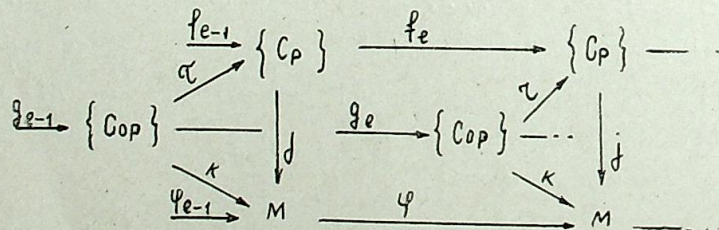
Это соответствие обозначим через $\kappa: \{Cop\} \rightarrow M$. Каждому копредставлению C_p однозначно поставим в соответствие $\kappa(C_p)$ копредставление

$$Cp = \begin{vmatrix} b_0, & b_1 & \dots & b_{n-1} : z_{0,1} = z_{0,0} & b_{l_0} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & z_{0,i+1} = z_{\gamma,i} & b_{l_1} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & z_{0,0} = z_{n-1,0} & b_{l_{n-1}} \end{vmatrix},$$

Это соответствие обозначим через $\tau: \{C_{op}\} \rightarrow \{C_r\}$.

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{Cop} \} & \xrightarrow{\tau} & \{ \text{Cp} \} \\ & \searrow \kappa & \nearrow j \\ & M & \end{array}$$

Пользуясь отображениями $\varphi_l: M \rightarrow M$, строим отображения $g_b: \{Cor\} \rightarrow \{Cor\}$ и $f_l: \{Cr\} \rightarrow \{Cr\}$ по формулам: $g_l = \kappa^{-1} \varphi_l \kappa$; $f_l = \tau \kappa^{-1} \varphi_l j$, где $l \geq 0$. Таким образом получаем следующую диаграмму:



Необходимость. Пусть в C_{p_0} слова $z_{0,i} = 1$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Это значит, что существует такое целое число $r > 0$, что $f_r f_{r-1} \dots f_1 f_0(C_{p_0}) = \emptyset$, где $\emptyset$ означает, что все соотношения сведены к тривиальным, то есть

где c_2 — целое число. А это значит, что $x_0 \in I$.

где α_2 является любым целым числом. Или

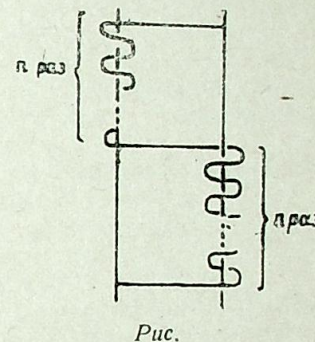
$$(\varphi_\tau \kappa^{-1}) \varphi_\tau (j \tau \kappa^{-1}) \varphi_{\tau-1} (j \tau \kappa^{-1}) \dots \varphi_1 (j \tau \kappa^{-1}) \varphi_0 (j \tau \kappa^{-1}) (x_0) = (0, \alpha_2),$$

откуда имеем

$$j(f_r f_{r-1} \dots f_0) (\tau \kappa^{-1}) (x_0) = (0; a_2).$$

$$(f_r f_{r-1} \dots f_0) (\tau \kappa^{-1}) (x_0) = \emptyset,$$

Теперь рассмотрим пример, причем для удобства изобразим не узел κ^1 , а граф Γ , связанный с этим узлом (рис.). Нетрудно сосчитать, что



то есть $(\beta_1, \sigma_2) = (n, n) \in I$ и потому n -листное циклическое разветвленное накрытие Σ^4 является гомотопической сферой. Ясно, что полином Александера $P(t)$ группы $\pi_1(S^4 \kappa^2)$ имеет вид

$$P(t) = 1 + (t-1) \cdot \left(\frac{\partial (b^n a^n)}{\partial a} \right) = 1 + (t-1) t^n (1 + t + \dots + t^{n-1}),$$

$$P(t) = t^{2n} - t^n + 1.$$
$$\widetilde{P}(\tau) = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j t) = (t^{2n} - t^n + 1)^n = (\tau^2 - \tau + 1)^n,$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кроуэлл и Фокс. Введение в теорию узлов. "Мир", 1967.
2. Зейферт и Трельфалль. Топология. М.—Л., 1938.
3. Smith P. A. Transformations of finite period, II. Annals of Math. v. 40 (1939) 690—711.
4. Смейл. Обобщенная гипотеза Пуанкаре. Математика, 6 : 3 (1962), 139—155

Поступило 30. III 1970

2 өлчүлү дүүнлөр үзөрндө будагланмыш 4 өлчүлү
ганотопик сфераларын гурулмасы

ХУЛАСӘ

Тәдгигатларда 4 өлчүлү ганотопик сфераны өзүнә чевирән вә 2 өлчүлү дүүнлү сфераны тәрпәнмәз сахлајан сонлу тәртибли кә-
силмәз ин'икас өјрәнилмишдир.

К. ХАМРАЕВ

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Решению смешанных задач для параболических уравнений разделяющимися переменными методом Фурье посвящено много работ. В. А. Ильным [1] рассмотрена разрешимость смешанных задач методом Фурье для параболического уравнения и дан подробный обзор по этому вопросу. Смешанная задача в неограниченной области, когда переменные не разделяются, рассмотрена З. И. Халиловым [2], Ф. Г. Максудовым и Д. Г. Салмановой [3].

В настоящей работе обобщенным методом Фурье решается смешанная задача для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -L_0 u + c(x, t)u + b(x, t), \quad (1)$$

где L_0 —действующий в пространстве $L_2(0, \infty)$ самосопряженный одномерный сингулярный дифференциальный оператор $2n$ -го порядка. Рассмотрим дифференциальные выражения

$$l(y) = (-1)^n (P_0(x) y^{(n)})^{(n)} + (1)^{(n-1)} (P_1(x) y^{(n-1)})^{(n-1)} + \dots + P_n(x) y, \quad (2)$$

$$0 \leq x < \infty,$$

где $P_0^{-1}(x), P_1(x) \dots P_n(x)$ —локально суммируемые вещественные функции. Обозначим через D линейное многообразие в $L_2(0, \infty)$, состоящее из всех функций $y(x)$ из $L_2(0, \infty)$, все квазипроизводные которых до $(2n-1)$ -го порядка включительно абсолютно непрерывны, а квазипроизводные $y^{[2n]} = l(y)$ принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$. Определим оператор L в $L_2(0, \infty)$ следующим образом: его область определения есть D и $y \in D; L(y) = l(y)$. Обозначим через D_0 совокупность всех финитных функций y из D , а через L_0 —сужение оператора L на D_0 . Очевидно, L_0 является симметрическим оператором. Предположим, что минимальный оператор L_0 имеет индекс дефекта (n, n) . Обозначим через L_0 какое-нибудь полуграниченное самосопряженное расширение оператора L_0 , а через $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda) \dots y_n(x, \lambda)$ —какие-нибудь линейно независимые решения уравнения $l(y) = \lambda y$, удовлетворяющие краевым условиям, которое описывает самосопряженное расширение L_0 и удовлетворяет краевым условиям, описывающим расширение. Тогда известно [4], что каждому самосопряженному расширению оператора L соответствует матричная спек-

тральная функция $\sigma(\lambda) = (\sigma_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^n$ такая, что формулы

$$F_j(\lambda) = \int_0^\infty f(x) y_j(x, \lambda) dx, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j,k=1}^n F_j(\lambda) y_k(x, \lambda) d\sigma_{jk}(\lambda) \quad (4)$$

осуществляют взаимобратные изометрические отображения $L_2(0, \infty)$ на $L_2^2(0, \infty)$ и $L_2^2(0, \infty)$ на $L_2(0, \infty)$, соответственно. При этом интегралы (3) и (4) сходятся в смысле метрики в L_2^2 и $L_2(0, \infty)$, соответственно, и

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j,k=1}^n F_j(\lambda) \bar{F}_k(\lambda) d\sigma_{jk}(\lambda). \quad (5)$$

Здесь $L_2^2(0, \infty)$ — гильбертово пространство вектор-функций со скалярным произведением $(u, v) = \int_0^\infty \sum_{i,j=1}^n u_i(x) \bar{v}_j(x) d\sigma_{ij}(x)$. Ставится следующая

Задача А. Найти в области $D = \{0 \leq x \leq T, 0 \leq x < \infty\}$ решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + c(x, t)u + b(x, t), \quad (6)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \quad (7)$$

и такое, что $u(x, t) \in D(L)$ для любого $t \in [0, T]$.
Определение. Решением задачи (6)–(7) будем называть всякую функцию $u(x, t)$ ($0 \leq t \leq T, 0 \leq x < \infty$), входящую в $D(L)$ при любом фиксированном t и для всех $t > 0$ имеющую непрерывную производную по t в $L_2(0, \infty)$, удовлетворяющую уравнению (6) при каждом t почти всюду по x и начальному условию (7) в среднем, т. е. при $x \rightarrow 0$

$$\int_0^\infty |u(x, t) - \varphi(x)| dx \rightarrow 0.$$

Решение задачи будем искать в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n F_i(t, \lambda) y_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda). \quad (8)$$

Подставляя его в уравнение (6) и в начальные условия (7), получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \frac{dF_i(t, \lambda)}{dt} y_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n F_i(t, \lambda) Ly_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n F_i(t, \lambda) (c(x, t) y_j(x, \lambda)) d\sigma_{ij}(\lambda) + b(x, t). \end{aligned} \quad (9)$$

Положим

$$(c(x, t) y_j(x, \lambda)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n \bar{B}_{kl}^j(t, \lambda, \mu) y_l(x, \mu) d\sigma_{kl}(\mu), \quad (10)$$

$$b(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n A_i(t, \lambda) y_i(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda). \quad (11)$$

Подставляя (10), (11) и (12), будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \frac{dF_i(t, \lambda)}{dt} y_i(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \lambda F_i(t, \lambda) y_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n F_i(t, \lambda) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n \bar{B}_{kl}^j(t, \lambda, \mu) y_l(x, \mu) d\sigma_{kl}(\mu) d\sigma_{ij}(\lambda) + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n A_i(t, \lambda) y_i(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \frac{dF_i(t, \lambda)}{dt} y_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \lambda F_i(t, \lambda) y_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \bar{B}_{kl}^j(t, \lambda, \mu) F_i(t, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) \right) y_l(x, \mu) d\sigma_{kl}(\mu) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n A_i(t, \lambda) y_i(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda), \end{aligned}$$

Из последнего находим

$$\begin{aligned} \frac{dF_i(t, \lambda)}{dt} = \lambda F_i(t, \lambda) + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n \bar{B}_{kl}^i(t, \lambda, \mu) F_l(t, \mu) d\sigma_{kl}(\mu) + A_i(t, \lambda), \quad (12) \\ F_i(t, \lambda)|_{t=0} = a_i(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(x) y_i(x, \lambda) dx, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13) \end{aligned}$$

Исследование задачи Коши (12)–(13) проведем в банаховом пространстве $G = \{L_2^2(0, \infty): c[0, t]\}$.

Положим

$$[Pv](t, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \bar{B}_{ij}^k(t, \lambda, \mu) v_j(t, \mu) d\sigma_{ij}(\mu),$$

где $v(t, \lambda) = \{v_1(t, \lambda), v_2(t, \lambda), \dots, v_n(t, \lambda)\}$.

Имеет место

Лемма 1. Если $|c(x, t)| < M$ в $[0 \leq t \leq T, 0 \leq x < \infty]$, то оператор P ограничен в пространстве G .

Доказательство. Пусть $v(t, \lambda), u(t, \lambda) \in G$. Оценим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (Pu, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n [Pu]_i(t, \lambda) v_j(t, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n \bar{B}_{kl}^i(t, \lambda, \mu) u_l(t, \mu) d\sigma_{kl}(\mu) v_j(t, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n \int_0^\infty (c(x, t) y_l(x, \lambda) y_k(x, \mu) u_l(t, \mu) d\sigma_{kl}(\mu) v_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda)). \end{aligned}$$

Положим

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n u_k(t, \lambda) y_l(x, \mu) d\sigma_{kl}(\lambda),$$

$$\bar{v}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n v_i(t, \lambda) y_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda).$$

Тогда

$$(Pu, v) = \int_0^\infty |c(x, t) \bar{u}(x) \bar{v}(x)| dx.$$

Отсюда

$$|(Pu, v)| \leq M \int_0^\infty \bar{u} \bar{v} dx.$$

Применяя равенства Парсеваля (5), получим

$$(\bar{u} \bar{v}) = (u, v)_s,$$

откуда следует, что оператор P ограничен.

Положим

$$a(\lambda) = \{a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots, a_n(\lambda)\}, \quad F(t, \lambda) = \{F_1(t, \lambda), F_2(t, \lambda), \dots, F_n(t, \lambda)\}.$$

Лемма 2. Пусть при любом t $c(x, t) y_j(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, $j = \overline{1, n}$. Тогда вектор функции $a(\lambda)$, $F(t, \lambda)$ принадлежит G .

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3. Если функция $G(x, t)$ удовлетворяет на $[0, T]$ условию Гельдера $|c(x, t) - c(x, \tau)| \leq N|t - \tau|^\varepsilon$ с показателем $0 < \varepsilon < 1$, то оператор P также удовлетворяет условию Гельдера, с тем же показателем.

Доказательство.

$$\begin{aligned} & |(P(t) - P(\tau))v(t, \mu)v(t, \lambda)| = \\ & = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n (B_i^k(t, \lambda, \mu) - \right. \right. \\ & \left. \left. B_i^k(\tau, \lambda, \mu) v_l(t, \mu) d\tau_{kl}(\mu) v_j(t, \lambda) d\tau_{ij}(\lambda) \right) \right| \leq \\ & \leq \int_0^\infty |c(x, t) - c(x, \tau)| \bar{v}(x)^2 dx \leq N|t - \tau|^\varepsilon \bar{v} \|. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что $\|P(t) - P(\tau)\| \leq N|t - \tau|^\varepsilon$.

Лемма 4. Если $b(x, t)$ удовлетворяет условию Гельдера по t в смысле нормы $L_2(0, \infty)$, т. е. $\|b(x, t) - b(x, \tau)\|_{L_2(0, \infty)} \leq M|t - \tau|^\varepsilon$, то $A(t, \lambda)$ также удовлетворяет условию Гельдера, с тем же показателем ε .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|A(t) - A(\tau)\| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n (A_i(t, \lambda) - A_i(\tau, \lambda)) (A_j(t, \lambda) - A_j(\tau, \lambda)) d\sigma_{ij}(\lambda) = \\ &= \int_0^\infty |b(x, t) - b(x, \tau)|^2 dx \leq K|t - \tau|^\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\|A(t) - A(\tau)\| \leq |t - \tau|^\varepsilon.$$

Рассмотрим оператор Δ_s в $L_2^s(0, \infty)$, определенный на множестве R всех финитных функций из $L_2^s(0, \infty)$, полагая для $g \in R$ $\Delta_s g = \{\lambda g_1, \lambda g_2, \dots, \lambda g_n\}$.

Как известно [5], замыкание оператора Δ_s есть самосопряженный оператор. Обозначим его через Λ_s . Легко заметить, что оператор Λ_s является производящим оператором аналитической полугруппы в $L_2(0, \infty)$. Тогда, применяя теоремы Соломыка [4], приходим к следующему результату.

Теорема 1. Пусть: 1) при любом $t \in [0, T]$ $c(x, t) y_j(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, $j = \overline{1, n}$;

2) $|c(x, t) - c(x, \tau)| \leq N|t - \tau|^\varepsilon$ при $t \in [0, T]$, $0 < \varepsilon < 1$;

3) При любом $t \in [0, T]$ $b(x, t) \in L_2(0, \infty)$ и $\|b(x, t) - b(x, \tau)\|_{L_2(0, \infty)} \leq M|t - \tau|^\varepsilon$;

4) $\varphi(x) \in L_2(0, \infty)$.

Тогда задача Коши (12)–(13) имеет единственное решение $F(t, \lambda)$, которое непрерывно дифференцируемо на $(0, T]$, причем

$$\lambda F(t, \lambda) \in L_2^s(0, \infty) \text{ и } \frac{dF}{dt} \in L_2^s(0, \infty).$$

Это решение можно найти методом последовательных приближений.

Теперь по найденной $F(t, \lambda)$ и формуле (8) построим и покажем, что она действительно является решением смешанной задачи (6)–(7). Для этого сначала докажем, что $u(x, t) \in L_2(0, \infty)$ при любом t ;

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |u(x, t)|^2 dx &= \int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n F_i(t, \lambda) y_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) \right|^2 dx = \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n F_i(\lambda) \bar{F}_j(\lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) > \infty. \end{aligned}$$

Также можно показать, что $Lu, \frac{du}{dt} \in L_2(0, \infty)$.

Теперь покажем, что $u(x, t)$ действительно удовлетворяет уравнению (6). Рассмотрим функцию

$$\Phi(x, t) = \frac{du}{dt} + Lu - c(x, t) - b(x, t).$$

Ясно, что $\Phi(x, t) \in L_2(0, \infty)$.

Используя условия теоремы 1 можно показать, что имеет место равенство Парсеваля:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\Phi(x, t)|^2 dx &= \int_0^\infty \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{dF_i}{dt} + \lambda F_i - B_i - A_i \right) \times \\ &\times \left(\frac{dF_j}{dt} + \lambda F_j - B_j - A_j \right) d\sigma_{ij}(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $\Phi(x, t) = 0$ почти всюду на $(0, \infty)$ при любом $t \in [0, T]$, откуда следует, что $u(x, t)$ есть решение. Далее из равенства

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty |u(x, t) - \varphi(x)|^2 dx = \\ &= \int_0^\infty \sum_{i,j=1}^n |F_i(t, \lambda) - a_i(\lambda)| |F_j(x, \lambda) - a_j(\lambda)| d\sigma_{ij}(\lambda) \end{aligned}$$

следует, что $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям (7). Так как интегро-дифференциальное уравнение имеет единственное решение $F(t, \lambda)$, то решение задачи (6)–(7) $u(x, t)$, представимое в виде (8),

будет единственным. Пусть $u_i(x, t)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = -Lu_i + c(x, t)u_i + b_i(x, t), \quad i = 1, 2,$$

при начальном условии $u_i(x, t)|_{t=0} = u_i(x)$ и при всех $t \in [0, T]$. Легко можно показать, что имеет место оценка

$$\|u_1(x, t) - u_2(x, t)\| \leq M(\|b_1 - b_2\| + \|\varphi_1 - \varphi_2\|)$$

при всех $t \in [0, T]$. Это указывает на то, что решение задачи $u(x, t)$ непрерывно зависит от начальных данных. Нами полностью доказана следующая основная.

Теорема 2. Пусть сужение L_0 оператора L имеет индекс дефекта (n, n) и обладает полуограниченным самосопряженным расширением L_0 и пусть удовлетворены следующие условия:

- 1) $\varphi(x) \in L_2(0, \infty)$;
- 2) $c(x, t) y_j(x, \lambda)$, $e(x, t) \in L_2(0, \infty)$ при любом $t \in [0, T]$, $j = \overline{1, n}$;
- 3) $|c(x, t_1) - c(x, t_2)| \leq r|t_1 - t_2|^\varepsilon$;
- 4) $\|b(x, t_1) - b(x, t_2)\|_{L_2(0, \infty)} \leq M|t_1 - t_2|^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$.

Тогда существует единственное решение задачи A , непрерывно зависящее от начальных данных и правой части, и это решение представляется в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n F_i(t, \lambda) y_i(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda).$$

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность научному руководителю Ф. Г. Максудову за постоянное внимание и помощь при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. А. УМН, т. XV, вып. 2 (92), 1960.
2. Халилов З. И. ДАН СССР*, 83, 1952.
3. Максудов Ф. Г. и Салманова Д. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1968, № 6.
4. Соломяк М. З. Изв. вузов*, 1 (14), 1960.
5. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные уравнения, М., 1954.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 20. V 1970

Г. хамраев

Параболик тип тэнликлэр үчүн жарымохда гарышыг мәсэләнин үмүмиләшмиш Фурје үсулу илә һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (6) тәнлијини һәр јердә, (7) башланғыч шәртләрини $L_{2(0, \infty)}$ фәзасынын нормасы мәнада өдәјән $u(x, t) \in D(L)$ функција-сынын үмүмиләшмиш Фурје үсулу илә тапылмасы мәсәләсинә бахылмышдыр. Бурада $L - (1)$ дифференсиал ифадәси вә (2) сәрһәд шәртләри вәситәсилә дүзәлдилмиш $L_{2(0, \infty)}$ фәзасында тәсир едән өз-өзүнә гошма мүсбәт мүәјјән оператордур, $D(L)$ исә онун тәјин областыдыр.

Н. Г. АГАЕВ

ИЗМЕНЕНИЕ РЕЖИМА РАБОТЫ ГАЛЕРЕИ В МНОГОПЛАСТОВОЙ СИСТЕМЕ

В последнее время в целях увеличения нефтеотдачи применяется циклическое воздействие на пласт, заключающееся в частом изменении режима работы скважины [3, 4]. В данной статье рассматривается течение жидкости в продуктивных пластах, разделяющихся слабопроницаемой перемычкой (рис.). Пласты считаются упругозамкнутыми. Предполагается, что на линии галереи (в обоих пластах) известно постоянное давление. Кроме того, в нижнем пласте II имеется галерея ($x = x_1$), которая

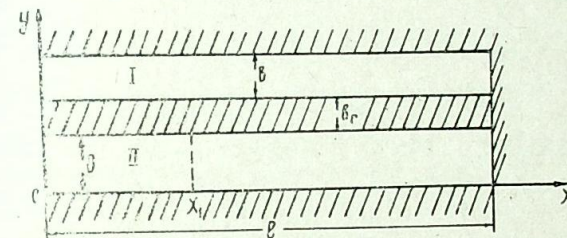


Рис.

функционирует до момента времени t_1 . Затем она отключается до момента времени $t = t_2$, после чего галерея включается с другим дебитом. Требуется определить поле давления в разрабатываемых пластах, а также возможный через перемычку переток в зависимости от времени.

Наша задача сводится к решению системы уравнений [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \alpha(P_1 - P_2) &= \frac{1}{x} \frac{\partial P_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} - \alpha(P_2 - P_1) &= \frac{1}{x} \frac{\partial P_2}{\partial t} + \{A_1[\sigma(t) - \sigma(t - t_1)] + \\ &+ A_2 \sigma(t - t_2)\} \delta(x - x_1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} P_1|_{t=0} &= P_2|_{t=0} = 0 \\ P_1|_{x=0} &= P_2|_{x=0} = P_c, \\ \frac{\partial P_1}{\partial x}|_{x=1} &= \frac{\partial P_2}{\partial x}|_{x=1} = 0, \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{\kappa_r}{\kappa_b b_r}$, $\sigma(z)$ — единичная функция Хевисайда, а $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака. Применяя к системе уравнений (1) последовательно конечное синус-преобразование Фурье и преобразование Лапласа [2], получим

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{s}{z} + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} + \alpha \right] \bar{P}_{1n} &= \frac{(2n+1)\pi P_c}{l^2 s} + \alpha \bar{P}_{2n}, \\ \left[\frac{s}{z} + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} + \alpha \right] \bar{P}_{2n} - \alpha \bar{P}_{1n} &= \frac{(2n+1)\pi P_c}{l^2 s} - \\ &- \frac{2}{ls} \sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{2l} A_1(1 - e^{-st_1}) + A_2 e^{-st_2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$P_{in} = \frac{2}{l} \int_0^1 P_i \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz,$$

$$P_{in} = \int_0^\infty P_{in} e^{-st} dt.$$

Решая систему алгебраических уравнений (2), находим:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{1n} &= \frac{4\pi(2n+1)P_c}{s[4l^2s + (2n+1)^2\pi^2z + 4l^2\alpha z]} + \\ &+ \frac{(4\pi)^2 l^2 \alpha \{(2n+1)\pi[4l^2s + (2n+1)^2\pi^2z + 8l^2\alpha z]P_c -}{s[4l^2s + (2n+1)^2\pi^2z + 4l^2\alpha z] \times} \\ &- 2l \sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{2l} [A_1(1 - e^{-st_1}) + A_2 e^{-st_2}][4l^2s + (2n+1)^2\pi^2z + 4l^2\alpha z]}{[4l^2s + (2n+1)^2\pi^2z + 4l^2\alpha z]^2 - 16(\pi\alpha)^2 l^4}, \\ \bar{P}_{2n} &= \frac{4\pi \{(2n+1)\pi[4l^2s + (2n+1)^2\pi^2z + 8l^2\alpha z]P_c -}{s[4l^2s + (2n+1)^2\pi^2z + 4l^2\alpha z]^2 - 16(\pi\alpha)^2 l^4} \\ &- 2l \sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{2l} [A_1(1 - e^{-st_1}) + A_2 e^{-st_2}][4l^2s + (2n+1)^2\pi^2z + 4l^2\alpha z]}{[4l^2s + (2n+1)^2\pi^2z + 4l^2\alpha z]^2 - 16(\pi\alpha)^2 l^4} \end{aligned}$$

Далее, переходя к оригиналу, окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_c - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ \frac{e^{\kappa_1 t} P_c}{(2n+1)\pi} + \right. \\ &+ \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ \frac{8A_1 l^3 \alpha}{(2n+1)^2 \pi^2 [(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha]} - \right. \\ &- \frac{A_1 l e^{\kappa_1 t}}{(2n+1)^2 \pi^2} + \frac{A_1 l e^{\kappa_2 t}}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} - \\ &- c(t-t_1) \left[\frac{8A_1 l^3 \alpha}{(2n+1)^2 \pi^2 [(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha]} - \right. \\ &- \frac{A_1 l e^{\kappa_1(t-t_1)}}{(2n+1)^2 \pi^2} + \frac{A_1 l e^{\kappa_2(t-t_1)}}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} \left. \right] + \\ &+ c(t-t_2) \left[\frac{8A_2 l^3 \alpha}{(2n+1)^2 \pi^2 [(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha]} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{A_2 l e^{\kappa_1(t-t_2)}}{(2n+1)^2 \pi^2} + \frac{A_2 l e^{\kappa_2(t-t_2)}}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} \right\} \left. \right\},$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P_c - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ \frac{e^{\kappa_1 t} P_c}{(2n+1)\pi} + \right. \\ &+ \sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{2l} \left\{ \frac{2A_1 l [(2n+1)^2 \pi^2 + 4l^2 \alpha]}{(2n+1)^2 \pi^2 [(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha]} - \right. \\ &- \frac{A_1 l e^{\kappa_1 t}}{(2n+1)^2 \pi^2} - \frac{A_1 l e^{\kappa_2 t}}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} \left. \right\} - \\ &- \sigma(t-t_1) \frac{2A_1 l [(2n+1)^2 \pi^2 + 4l^2 \alpha]}{(2n+1)^2 \pi^2 [(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha]} - \\ &- \frac{A_1 l e^{\kappa_1(t-t_1)}}{(2n+1)^2 \pi^2} - \frac{A_1 l e^{\kappa_2(t-t_1)}}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} + \\ &+ c(t-t_2) \left[\frac{2A_2 l [(2n+1)^2 \pi^2 + 4l^2 \alpha]}{(2n+1)^2 \pi^2 [(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha]} - \right. \\ &- \frac{A_2 l e^{\kappa_1(t-t_2)}}{(2n+1)^2 \pi^2} - \frac{A_2 l e^{\kappa_2(t-t_2)}}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} \left. \right\} \left. \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\kappa_1 = -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 z}{4l^2},$$

$$\kappa_2 = -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha}{4l^2} z.$$

Количество перетекающей через перемычку жидкости определяется формулой:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\kappa_r}{\mu} \int_0^1 \frac{P_1 - P_2}{b_r} dx = \\ &= \frac{16\kappa_r l^2}{\mu b_r} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{2l} \left\{ \frac{A_1 [1 - e^{\kappa_1 t} - \sigma(t-t_1) [1 - e^{\kappa_2(t-t_1)}]]}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} + \right. \\ &+ \sigma(t-t_2) \frac{A_2 [1 - e^{\kappa_2(t-t_2)}]}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} \left. \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $t < t_1 < t_2$ решение имеет вид:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_c - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ \frac{e^{\kappa_1 t} P_c}{(2n+1)\pi} + \right. \\ &+ \sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{2l} \left\{ \frac{8A_1 l^3 \alpha}{(2n+1)^2 \pi^2 [(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha]} - \right. \\ &- \frac{A_1 l e^{\kappa_1 t}}{(2n+1)^2 \pi^2} + \frac{A_1 l e^{\kappa_2 t}}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} \left. \right\} \left. \right\}, \\ P_2 &= P_c - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ \frac{e^{\kappa_1 t} P_c}{(2n+1)\pi} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ \frac{2A_1 l(2n+1)^2 \pi^2 + 4l^2 \alpha}{(2n+1)^2 \pi^2 [(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha]} - \frac{A_1 l e^{\kappa_1 t}}{(2n+1)^2 \pi^2} - \frac{A_1 l e^{\kappa_2 t}}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} \right\}$$

и

$$Q = \frac{16 \kappa_r l^2}{\mu b_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{2l}}{(2n+1)\pi} \frac{A_1 (1 - e^{\kappa_2 t})}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha}.$$

Если же $t_1 < t < t_2$, то

$$P_1 = P_c - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ \frac{e^{\kappa_1 t} P_c}{(2n+1)} + \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ \frac{A_1 l [e^{\kappa_1(t-t_1)} - e^{\kappa_1 t}]}{(2n+1)^2 \pi^2} + \frac{A_1 l [e^{\kappa_2 t} - e^{\kappa_2(t-t_1)}]}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} \right\} \right\},$$

$$P_2 = P_c - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ \frac{e^{\kappa_1 t} P_c}{(2n+1)\pi} + \sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{2l} \left\{ \frac{A_1 l [e^{\kappa_1(t-t_1)} - e^{\kappa_1 t}]}{(2n+1)^2 \pi^2} + \frac{A_1 l [e^{\kappa_2(t-t_1)} - e^{\kappa_2 t}]}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha} \right\} \right\}$$

и

$$Q = \frac{16 \kappa_r l^2}{\mu b_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{2l}}{(2n+1)\pi} \frac{A_1 [e^{\kappa_1(t-t_1)} - e^{\kappa_2 t}]}{(2n+1)^2 \pi^2 + 8l^2 \alpha}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном плассте. "Недра", М., 1965.
2. Трантер К. Д. Интегральные преобразования в математической физике. ГИТТЛ, М., 1956.
3. Харин О. Н. Исследования в области теории упругого режима фильтрации и ее приложений. Канд. дисс., 1966.
4. Агаев Н. Г. "Нефть и газ", 1969, № 4.

Институт математики
и механики АН Азерб. ССР

Поступило 21. X 1970

Н. Н. Агаев

Чохлајлы системдэки галерејанын иш режиминин
дэјишмэси

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ азкечирэн аракэсмэ илэ бөлүнмүш икилајлы системдэ олан тээјиг мејданы шэрһ олунмушдур. Лаја олан тэ'сир дөври характер дашыјыр. Замандан асылы олараг, лајдакы тээјиг мејданы вэ аракэсмэдэн мүмкүн олан ахын мүэјјән едилмишдир.

А. Р. МАГОМЕДОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Рассмотрим задачу:

$$\dot{x}(t) = F[t, x(t), \max_{\tau \in [0, t]} x(\tau)], \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(0) = x_0.$$

Предположим, что вектор-функция

$$F[t, x(t), \max_{0 \leq \tau \leq t} x(\tau)]$$

непрерывна по совокупности аргументов в некоторой области

$$E: (|x(t)| \leq K, \quad |\max_{0 \leq \tau \leq t} x(\tau)| \leq K, \quad 0 \leq t \leq T),$$

ограничена, т. е.

$$|F[t, x(t), \max_{0 \leq \tau \leq t} x(\tau)]| \leq M,$$

кроме того, удовлетворяет условию

$$|F[t, x(t), \max_{0 \leq \tau \leq t} x(\tau)] - F[t, y(t), \max_{0 \leq \tau \leq t} y(\tau)]| \leq \omega(t, |x(t) - y(t)|, \max_{0 \leq \tau \leq t} |x(\tau) - y(\tau)|),$$

где функция $\omega(t, |x(t) - y(t)|, \max_{0 \leq \tau \leq t} |x(\tau) - y(\tau)|)$ непрерывна по совокупности аргументов в области E , не убывает по вторым и третьим аргументам. Эта задача эквивалентна интегральному уравнению с запаздывающим аргументом:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F[s, x(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x(\tau)] ds; \quad (2)$$

Пусть уравнение

$$Z(t) = \int_0^t \omega(s, Z(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} Z(\tau)) ds \quad (3)$$

имеет только нулевое решение.

1. Построим последовательные приближения $\{x^{(m)}(t)\}$ и $\{u^{(m)}(t)\}$ с помощью следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} x^{(0)}(0) &= x_0, \\ x^{(m)}(t) &= x_0 + \int_0^t F[s, x^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(m-1)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} u^{(0)}(0) &= 0, \\ u^{(m)}(t) &= \int_0^t \omega(s, u^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} u^{(m-1)}(\tau)) ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть функция $F[t, x(t), \max_{0 \leq \tau \leq t} x(\tau)]$ определена при $t \in [0, T]$, непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию

$$\left| F[t, x(t), \max_{0 \leq \tau \leq t} x(\tau)] - F[t, y(t), \max_{0 \leq \tau \leq t} y(\tau)] \right| \leq \omega(t, |x(t) - y(t)|, \max_{0 \leq \tau \leq t} |x(\tau) - y(\tau)|). \quad (*)$$

Пусть уравнение (3) имеет только нулевое решение и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u^{(m)}(t) \quad (6)$$

равномерно сходится по $t \in [0, T]$. Тогда существует единственное решение уравнения (2) и это решение является пределом последовательных приближений Пиккара (4).

Доказательство.

Пусть существуют два решения $x(t)$ и $y(t)$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F[s, x(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x(\tau)] ds,$$

$$y(t) = x_0 + \int_0^t F[s, y(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} y(\tau)] ds.$$

Оценим разность:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \left| \int_0^t F[s, x(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x(\tau)] ds - \int_0^t F[s, y(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} y(\tau)] ds \right| \\ &\leq \int_0^t \omega(s, |x(s) - y(s)|, \max_{0 \leq \tau \leq s} |x(\tau) - y(\tau)|) ds. \end{aligned}$$

Положив

$$Z(t) = |x(t) - y(t)|,$$

имеем

$$Z(t) \leq \int_0^t \omega(s, Z(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} Z(\tau)) ds.$$

Так как уравнение (3) имеет только нулевое решение, то получим $Z(t) = 0$; $x(t) - y(t) = 0$.

Следовательно,

$$x(t) \equiv y(t),$$

что и требовалось доказать.

2. Для доказательства существования решения сначала покажем, что последовательность $\{x^{(m)}(t)\}$ фундаментальна:

$$x^{(m+1)}(0) = x_0,$$

$$x^{(m+1)}(t) = x_0 + \int_0^t F[s, x^{(m)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(m)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T].$$

Рассмотрим разность и оценим:

$$|x^{(m+1)}(t) - x^{(m)}(t)| \leq \int_0^t F[s, x^{(m)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(m)}(\tau)] ds -$$

$$\begin{aligned} - \int_0^t F[s, x^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(m-1)}(\tau)] ds &\leq \int_0^t \omega(s, |x^{(m)}(s) - x^{(m-1)}(s)|, \\ &\quad \max_{0 \leq \tau \leq s} |x^{(m)}(\tau) - x^{(m-1)}(\tau)|) ds. \end{aligned}$$

Введя обозначение

$$v^{(m)}(t) = |x^{(m+1)}(t) - x^{(m)}(t)|,$$

получим

$$v^{(m)}(t) \leq \int_0^t \omega(s, v^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} v^{(m-1)}(\tau)) ds.$$

Теперь докажем, что

$$v^{(m)}(t) = |x^{(m+1)}(t) - x^{(m)}(t)| \leq u^{(m)}(t).$$

Для любого p ($p = 1, 2, 3, \dots$) имеем

$$\begin{aligned} |x^{(m+p)}(t) - x^{(m)}(t)| &\leq |x^{(m+p)}(t) - x^{(m+p-1)}(t)| + \\ &+ |x^{(m+p-1)}(t) - x^{(m+p-2)}(t)| + |x^{(m+p-2)}(t) - x^{(m+p-3)}(t)| + \\ &+ \dots + |x^{(m+1)}(t) - x^{(m)}(t)| \leq u^{(m+p-1)}(t) + u^{(m+p-2)}(t) + \\ &+ u^{(m+p-3)}(t) + \dots + u^{(m)}(t) \leq \sum_{k=m}^{m+p-1} u^{(k)}(t) \leq \sum_{k=m}^{\infty} u^{(k)}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$|x^{(m+p)}(t) - x^{(m)}(t)| \leq \sum_{k=m}^{\infty} u^{(k)}(t).$$

Так как ряд (6) сходится равномерно, то при $k \rightarrow \infty$

$$|x^{(m+p)}(t) - x^{(m)}(t)| \rightarrow 0.$$

Следовательно, последовательность $\{x^{(m)}(t)\}$ фундаментальна, т. е. сходится к решению уравнения (2). Переходя к пределу в неравенствах (4), будем иметь

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F[s, x(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x(\tau)] ds.$$

II. Построим последовательность приближений Тонелли:

$$x^{(0)}(0) = x_0,$$

$$\left. \begin{aligned} x^{(n)}(t) &= x_0 + \int_0^{t-\frac{1}{n}} F[s, x^{(n)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(n)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Имеет место

Теорема 2. Пусть функция $F[t, x(t), \max_{0 \leq \tau \leq t} x(\tau)]$ определена

при $t \in [0, T]$, непрерывна по совокупности переменных, ограничена $|F[t, x(t), \max_{0 \leq \tau \leq t} x(\tau)]| \leq M$ и удовлетворяет условию (*). И пусть уравнение (3) имеет только нулевое решение. Тогда существует единственное решение уравнения (2) на $[0, T]$ и оно является пределом последовательных приближений Тонелли (7).

Доказательство.

Единственность теоремы доказывается подобно теореме 1.

Для доказательства существования решения сначала покажем, что последовательность $\{x^{(n)}(t)\}$ фундаментальна.

Пусть $n < m$:

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) &= x_0 + \int_0^{\frac{T}{n}} F[s, x^{(n)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(n)}(\tau)] ds, \\ x^{(m)}(t) &= x_0 + \int_0^{\frac{T}{m}} F[s, x^{(m)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(m)}(\tau)] ds = \\ &= x_0 + \int_0^{\frac{T}{m}} F[s, x^{(m)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(n)}(\tau)] ds + \\ &+ \int_0^{\frac{T}{n}} F[s, x^{(m)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(m)}(\tau)] ds. \end{aligned}$$

Оценим разность:

$$\begin{aligned} |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| &\leq \int_0^{\frac{T}{n}} F[s, x^{(n)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(n)}(\tau)] - \\ &- F[s, x^{(m)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(m)}(\tau)] ds + \int_0^{\frac{T}{m}} |F[s, x^{(m)}(s), \\ &\max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(n)}(\tau)] - F[s, x^{(m)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} x^{(m)}(\tau)]| ds \leq \int_0^{\frac{T}{n}} \omega(s, |x^{(n)}(s) - x^{(m)}(s)|, \\ &\max_{0 \leq \tau \leq s} |x^{(n)}(\tau) - x^{(m)}(\tau)|) ds + M \left(\frac{T}{n} - \frac{T}{m} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$v^{(n,m)}(t) = |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)|.$$

Тогда получим

$$v^{(n,m)}(t) \leq \int_0^t \omega(s, v^{(n,m)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} v^{(n,m)}(\tau)) ds + M \left(\frac{T}{n} - \frac{T}{m} \right).$$

Итак, имеем

$$v^{(n,m)}(t) \leq \varphi^{(n,m)}(t).$$

где $\varphi^{(n,m)}$ — решение уравнения

$$\varphi^{(n,m)}(t) = \int_0^t \omega(s, \varphi^{(n,m)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \varphi^{(n,m)}(\tau)) ds + M \left(\frac{T}{n} - \frac{T}{m} \right).$$

Если перейти к пределу при $n, m \rightarrow \infty$, то согласно [2], получим, что $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \varphi^{(n,m)}(t) = 0$ равномерно по $t \in [0, T]$, и поэтому $\lim_{n,m \rightarrow \infty} v^{(n,m)}(t) = 0$, т. е. $\lim_{n,m \rightarrow \infty} |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| = 0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Следовательно, $\{x^{(n)}(t)\}$ фундаментальна и значит сходится равномерно по $t \in [0, T]$ к некоторому пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}(t) = x^*(t).$$

Так как решение единственно, то, переходя к пределу в равенствах (7) при $n \rightarrow \infty$, получим, что $x^*(t) = x(t)$ является решением уравнения (2) на $[0, T]$. Следовательно, теорема доказана.

III. Построим последовательности нижних и верхних функций и докажем их сходимость к решению уравнения (2) на $[0, T]$. Функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ являются нижней и верхней функциями уравнения (2), если имеют место неравенства:

$$\xi(0) = \eta(0) = x_0,$$

$$\xi(t) \leq x_0 + \int_0^t F[s, \xi(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi(\tau)] ds, \quad t \in [0, T],$$

$$\eta(t) \geq x_0 + \int_0^t F[s, \eta(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta(\tau)] ds, \quad t \in [0, T].$$

Для уравнения (2) построим последовательности нижних и верхних функций посредством равенств

$$\xi^{(m)}(t) = x_0 + \int_0^t F[s, \xi^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(m-1)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

$$\eta^{(m)}(t) = x_0 + \int_0^t F[s, \eta^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(m-1)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть функция $F[t, x(t), \max_{0 \leq \tau \leq s} x(\tau)]$ определена на отрезке $[0, T]$, непрерывна по совокупности аргументов, удовлетворяет условию (*). Тогда существует единственное решение уравнения (2) на $[0, T]$, причем это решение является пределом последовательности нижних и верхних функций.

Доказательство.

Пусть имеем функции $\xi^{(1)}(t)$ и $\eta^{(1)}(t)$ такие, что

$$\xi^{(1)}(0) = \eta^{(1)}(0) = x_0,$$

$$\xi^{(1)}(t) \leq \eta^{(1)}(t),$$

$$\xi^{(1)}(t) \leq x_0 + \int_0^t F[s, \xi^{(1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(1)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T],$$

$$\eta^{(1)}(t) \geq x_0 + \int_0^t F[s, \eta^{(1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(1)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T].$$

Построим функции $\xi^{(2)}(t)$ и $\eta^{(2)}(t)$ с помощью равенств

$$\xi^{(2)}(0) = \eta^{(2)}(0) = x_0,$$

$$\xi^{(2)}(t) = x_0 + \int_0^t F[s, \xi^{(1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(1)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T],$$

$$\eta^{(2)}(t) = x_0 + \int_0^t F[s, \eta^{(1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(1)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T].$$

Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(t) - \xi^{(2)}(t) &\leq x_0 + \int_0^t F[s, \xi^{(1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(1)}(\tau)] ds - x_0 - \\ &- \int_0^t F[s, \xi^{(1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(1)}(\tau)] ds = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}(t) - \eta^{(2)}(t) &\geq x_0 + \int_0^t F[s, \eta^{(1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(1)}(\tau)] ds - x_0 - \\ &- \int_0^t F[s, \eta^{(1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(1)}(\tau)] ds = 0; \\ \xi^{(1)}(t) - \xi^{(2)}(t) &\geq 0, \quad \text{т. е.} \quad \xi^{(1)}(t) \leq \xi^{(2)}(t), \\ \eta^{(1)}(t) - \eta^{(2)}(t) &\geq 0, \quad \text{т. е.} \quad \eta^{(1)}(t) \geq \eta^{(2)}(t).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\xi^{(1)}(t) \leq \xi^{(2)}(t) \leq \eta^{(2)}(t) \leq \eta^{(1)}(t).$$

Пусть

$$\begin{aligned}\xi^{(2)}(0) &= \eta^{(2)}(0) = x_0, \\ \xi^{(2)}(t) &\leq \eta^{(2)}(t), \\ \xi^{(2)}(t) &\leq x_0 + \int_0^t F[s, \xi^{(2)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(2)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T], \\ \eta^{(2)}(t) &\geq x_0 + \int_0^t F[s, \eta^{(2)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(2)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T]\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\xi^{(3)}(0) &= \eta^{(3)}(0) = x_0, \\ \xi^{(3)}(t) &= x_0 + \int_0^t F[s, \xi^{(2)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(2)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T], \\ \eta^{(3)}(t) &= x_0 + \int_0^t F[s, \eta^{(2)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(2)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned}\xi^{(2)}(t) - \xi^{(3)}(t) &\leq x_0 + \int_0^t F[s, \xi^{(2)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(2)}(\tau)] ds - x_0 - \\ &- \int_0^t F[s, \xi^{(2)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(2)}(\tau)] ds = 0, \\ \eta^{(2)}(t) - \eta^{(3)}(t) &\geq x_0 + \int_0^t F[s, \eta^{(2)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(2)}(\tau)] ds - x_0 - \\ &- \int_0^t F[s, \eta^{(2)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(2)}(\tau)] ds = 0; \\ \xi^{(2)}(t) - \xi^{(3)}(t) &\leq 0, \quad \text{т. е.} \quad \xi^{(2)}(t) \leq \xi^{(3)}(t), \\ \eta^{(2)}(t) - \eta^{(3)}(t) &\geq 0, \quad \text{т. е.} \quad \eta^{(2)}(t) \geq \eta^{(3)}(t).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\xi^{(2)}(t) \leq \xi^{(3)}(t) \leq \eta^{(3)}(t) \leq \eta^{(2)}(t).$$

Построим функции $\xi^{(m-1)}(t)$ и $\eta^{(m-1)}(t)$:

$$\begin{aligned}\xi^{(m-1)}(0) &= \eta^{(m-1)}(0) = x_0, \\ \xi^{(m-1)}(t) &\leq x_0 + \int_0^t F[s, \xi^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(m-1)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T], \\ \eta^{(m-1)}(t) &\geq x_0 + \int_0^t F[s, \eta^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(m-1)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

Подобным образом строятся функции $\xi^{(m)}(s)$ и $\eta^{(m)}(t)$:

$$\xi^{(m)}(0) = \eta^{(m)}(0) = x_0,$$

$$\begin{aligned}\xi^{(m)}(t) &= x_0 + \int_0^t F[s, \xi^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(m-1)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T], \\ \eta^{(m)}(t) &= x_0 + \int_0^t F[s, \eta^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(m-1)}(\tau)] ds, \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned}\xi^{(m-1)}(t) - \xi^{(m)}(t) &\leq x_0 + \int_0^t F[s, \xi^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(m-1)}(\tau)] ds - \\ &- x_0 - \int_0^t F[s, \xi^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(m-1)}(\tau)] ds = 0, \\ \eta^{(m-1)}(t) - \eta^{(m)}(t) &\geq x_0 + \int_0^t F[s, \eta^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(m-1)}(\tau)] ds - \\ &- x_0 - \int_0^t F[s, \eta^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(m-1)}(\tau)] ds = 0; \\ \eta^{(m-1)}(t) - \eta^{(m)}(t) &\leq 0 \quad \text{т. е.} \quad \eta^{(m-1)}(t) \leq \eta^{(m)}(t), \\ \eta^{(m-1)}(t) - \eta^{(m)}(t) &\geq 0, \quad \text{т. е.} \quad \eta^{(m-1)}(t) \geq \eta^{(m)}(t).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\dots \leq \eta^{(m-1)}(t) \leq \xi^{(m)}(t) \leq \eta^{(m)}(t) \leq \eta^{(m-1)}(t) \leq \dots$$

Таким образом имеем последовательности функций $\{\xi^{(m)}(t)\}$ и $\{\eta^{(m)}(t)\}$, определенных равенствами (8), (9), причем

$$\begin{aligned}\xi^{(1)}(t) &\leq \xi^{(2)}(t) \leq \xi^{(3)}(t) \leq \dots \leq \xi^{(m)}(t) \leq \dots, \\ \eta^{(1)}(t) &\geq \eta^{(2)}(t) \geq \eta^{(3)}(t) \geq \dots \geq \eta^{(m)}(t) \geq \dots, \\ \xi^{(m)}(0) &= \eta^{(m)}(0) \quad (m = 1, 2, 3, \dots).\end{aligned}$$

Так как последовательность $\{\xi^{(m)}(t)\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху $\eta^{(1)}(t)$, то она сходится к некоторому пределу $\xi(t)$. С другой стороны, последовательность функции $\{\eta^{(m)}(t)\}$ монотонно убывает и ограничена снизу $\xi^{(1)}(t)$, тогда она также сходится к некоторому пределу $\eta(t)$, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi^{(m)}(t) = \xi(t), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \eta^{(m)}(t) = \eta(t).$$

Так как

$$\xi^{(m)}(t) \leq \eta^{(1)}(t),$$

то $\{\xi^{(m)}(t)\}$ равномерно ограничена. С другой стороны, если

$$\eta^{(m)}(t) \geq \xi^{(1)}(t),$$

то $\{\eta^{(m)}(t)\}$ также равномерно ограничена.

Для того, чтобы доказать равномерную непрерывность, оценим разность:

$$\begin{aligned}|\xi^{(m)}(t_1) - \xi^{(m)}(t_2)| &\leq \left| \int_0^{t_2} F[s, \xi^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(m-1)}(\tau)] ds - \right. \\ &- \left. \int_0^{t_1} F[s, \xi^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(m-1)}(\tau)] ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} F[s, \xi^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(m-1)}(\tau)] ds.\end{aligned}$$

$$\max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(m-1)}(\tau) \Big] ds \leq M |t_1 - t_2|,$$

$$|\xi^{(m)}(t_1) - \xi^{(m)}(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|.$$

Отсюда следует равностепенная непрерывность $\{\xi^{(m)}(t)\}$. Таким же образом можно доказать равностепенную непрерывность $\{\eta^{(m)}(t)\}$. Так как верхний (нижний) предел равностепенной непрерывной и равномерно ограниченной последовательности функции непрерывен, то $\xi(t)$ (или $\eta(t)$) есть равномерно непрерывная функция на $[0, T]$.
Теперь докажем, что сходимость равномерна по t и $\xi(t) = \eta(t) = x(t)$. Рассмотрим разность $\eta^{(m)}(t) - \xi^{(m)}(t)$ и оценим ее:

$$\begin{aligned} \eta^{(m)}(t) - \xi^{(m)}(t) &= x_0 + \int_0^t F[s, \eta^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(m-1)}(\tau)] ds - \\ &- x_0 - \int_0^t F[s, \xi^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(m-1)}(\tau)] ds, \\ |\eta^{(m)}(t) - \xi^{(m)}(t)| &\leq \int_0^t F[s, \eta^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \eta^{(m-1)}(\tau)] ds - \\ &- \int_0^t F[s, \xi^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} \xi^{(m-1)}(\tau)] ds \leq \int_0^t \omega(s, |\eta^{(m-1)}(s) - \\ &- \xi^{(m-1)}(s)|, \max_{0 \leq \tau \leq s} |\eta^{(m-1)}(\tau) - \xi^{(m-1)}(\tau)|) ds, \\ |\eta^{(m)}(t) - \xi^{(m)}(t)| &\leq \int_0^t \omega(s, |\eta^{(m-1)}(s) - \xi^{(m-1)}(s)|, \\ &\max_{0 \leq \tau \leq s} |\eta^{(m-1)}(\tau) - \xi^{(m-1)}(\tau)|) ds. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$V^{(m)}(t) = |\eta^{(m)}(t) - \xi^{(m)}(t)|,$$

Тогда получим

$$V^{(m)}(t) \leq \int_0^t \omega(s, V^{(m-1)}(s), \max_{0 \leq \tau \leq s} V^{(m-1)}(\tau)) ds, \quad t \in [0, T],$$

$$V^{(m)}(0) = 0.$$

Аналогично предыдущему, т. е. используя [3], получим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V^{(m)}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} |\eta^{(m)}(t) - \xi^{(m)}(t)| = 0,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \eta^{(m)}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \xi^{(m)}(t) = x(t).$$

Переходя к пределу в (9) или (10) при $m \rightarrow \infty$, получим, что $x(t)$ является решением уравнения (2). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петухов В. Р. „Изв. вузов, матем.“. 3 (40), 1964.
2. Мамедов Я. Д. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных операторных уравнений. Докт. дисс., Ростов-на Дону, 1965.
3. Цалюк З. Б. Некоторые вопросы общей теории уравнений Вольтерра. Докт. дисс. Ижевск, 1966.
4. Сеидов З. Б. „Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. и хим. наук“, 1962, № 1.

Кечикән аргументли бир синиф диференсиал тәнликләрин һәллинин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатларда

$$\dot{x}(t) = F[t, x(t), \max_{\tau \in [0, t]} x(\tau)].$$

тәнлијинин $0 \leq t \leq T$ олдугда $x(0) = x_0$ шәртини өдәјән һәллинин варлығы вә јеканәлији мәсәләси өјрәнилмишдир.

А. Р. МАГОМЕДОВ

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

В работе [1] рассматриваются задачи Коши для систем дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y}^{(i)} = f(t, y(t), \max_{\tau \in [0, t]} y(\tau), \max_{\tau \in [t-h, t]} y(\tau), \dots)$$

и методом сжатых отображений доказывается теорема существования и единственности решения.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x}(t) = F[t, \dot{x}(t), \max_{\tau \in [t-h, t]} x(\tau)], \quad t \geq t_0, \quad [1]$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \quad (2)$$

где $\varphi(t)$ — начальная функция, непрерывная на начальном множестве $[t_0 - h, t_0]$. Для простоты начальное множество обозначаем через E_0 . Предположим, что вектор-функция $F(t, u, v)$ является непрерывной функцией в некоторой окрестности начала координат, скажем для $|u| + |v| \leq c_1$ и удовлетворяет равномерному условию Липшица:

$$|F(t, u_1, v_1) - F(t, u_2, v_2)| \leq C_1(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|). \quad (3)$$

Пусть D обозначает эту окрестность, а C_2 — максимум $|F(t, u, v)|$ для всех (t, u, v) из D . В данном случае устанавливаются существование и единственность решений при соответствующих условиях, наложенных на функции φ и F . Используя этот метод, мы определяем последовательность функций $\{x_m(t)\}$ и показываем, что предел этой последовательности является функцией, удовлетворяющая уравнению (1) и начальным условиям (2).

Последовательность функции $\{x_m(t)\}$ может быть определена следующим образом:

$$x_m(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in E_0, \\ \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t F[s, x_{m-1}(s), \max_{\tau \in [s-h, s]} x_{m-1}(\tau)] ds, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (4)$$

Для простоты функции $x_{m-1}(t)$ и $\max_{\tau \in [t-h, t]} x_{m-1}(\tau)$ обозначим через $u_{m-1}(t)$ и $v_{m-1}(t)$. Эта задача эквивалентна интегральному уравнению с за-

паздывающим аргументом:

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in E_0, \\ \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t F[s, u(s), \tau(s)] ds, & t \geq t_0. \end{cases}$$

Теорема 1. Предположим, что функция $\varphi(t)$ непрерывна на E_0 и $m_\varphi = \max_{E_0} |\varphi(t)|$. Предположим далее, что функция $F(t, u, v)$ непрерывна и удовлетворяет равномерному условию Липшица:

$$|F(t, u_1, v_1) - F(t, u_2, v_2)| \leq C_1(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)$$

для любых точек (t, u_1, v_1) и (t, u_2, v_2) из области

$$D: t_0 - h \leq t \leq t_0 + t_1, \quad (t_1 \geq t_0 - h), \quad |u| + |v| \leq c_1. \quad (5)$$

И пусть $c_2 = \max_D |F(t, u, v)|$. Допустим, что $2m_\varphi < c_1$, и пусть c_3

выбрано так, что $c_3 < (c_2 - 2m_\varphi) \frac{1}{2c_2}$. Тогда на отрезке $t_0 - h \leq$

$t \leq t_0 + \min(c_3, t_1 - t_0)$ существует единственное непрерывное решение $u(t)$ уравнения

$$u(t) = F[t, u(t), v(t)], \quad t \geq t_0,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in E_0.$$

Доказательство.

Существование. Докажем по индукции, что точка (t, u_m, v_m) принадлежит D для $m = 0, 1, 2, \dots$. Как видно из начального условия (2), это верно для $m = 0$. Если допустить, что это утверждение уже доказано для m , то по формуле

$$u_{m+1}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in E_0, \\ \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t F[s, u_m(s), v_m(s)] ds, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (6)$$

получим

$$|u_{m+1}(t)| \leq |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t |F[s, u_m(s), v_m(s)]| ds \leq m_\varphi + c_2(t - t_0) \leq m_\varphi + c_2 c_3, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + c_3.$$

Очевидно, что это неравенство верно также и для $t_0 - h \leq t \leq t_0$.

Делаем вывод: если $c_3 < (c_1 - 2m_\varphi) \frac{1}{2c_2}$, то

$$|u_{m+1}(t)| + v_{m+1}(t) < c_1, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + c_3. \quad (7)$$

Так как неравенство (7) показывает, что точка $(t, u_{m+1}(t), v_{m+1}(t))$ принадлежит окрестности D для $t_0 \leq t \leq t_0 + c_3$.

Теперь докажем, что последовательность $\{x_m(t)\}$ сходится для $t_0 - h \leq t \leq t_0 + c_3$, если $F(t, u, v)$ удовлетворяет условию (3) для любых точек (t, u_1, v_1) и (t, u_2, v_2) , принадлежащих D , где c_4 является постоянной, зависящей только от F и D , но независимой от u_1, v_1, u_2, v_2 . Из условия (3) автоматически вытекает непрерывность функций в каждой точке окрестности D , так как правая часть неравенства (3) стремится к нулю, если $u_1 \rightarrow u_2$ и $v_1 \rightarrow v_2$.

Для $m \geq 1$, используя условие Липшица, из соотношений (3) получаем

$$|u_{m+1}(t) - u_m(t)| \leq c_4 \int_{t_0}^t [|u_m(s) - u_{m-1}(s)| + |v_m(s) - v_{m-1}(s)|] ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + c_3. \quad (8)$$

Поскольку для $t_0 - h \leq t \leq t_0$ имеем $u_m(t) - u_{m-1}(t) = 0$, то из не-
венства (8) следует, что

$$|u_{m+1}(t) - u_m(t)| \leq 2c_4 \int_{t_0}^t |u_m(s) - u_{m-1}(s)| ds, \quad (9)$$

$$t_0 - h \leq t \leq t_0 + c_3, \quad m \geq 1.$$

Так как для $t_0 \leq t \leq t_0 + c_3$

$$|u_1(t) - \varphi(t_0)| \leq \int_{t_0}^t |F[s, u_0(s), v_0(s)]| ds \leq c_2(t - t_0),$$

то

$$|u_1(t) - \varphi(t_0)| \leq c_2 t, \quad t_0 - h \leq t \leq t_0 + c_3. \quad (10)$$

Используя это неравенство и выполняя интегрирование по формуле (9), получим

$$|u_{m+1}(t) - u_m(t)| \leq \frac{c_2 (2c_4)^m t^{m+1}}{(m+1)!}, \quad t - h \leq t \leq t_0 + c_3, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} (u_{m+1}(t) - u_m(t)) \quad (12)$$

мажорируется рядом

$$\frac{c_2}{2c_4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2c_4 t)^{m+1}}{(m+1)!}, \quad (13)$$

который равномерно сходится на отрезке $t_0 - h \leq t \leq t_0 + c_3$.
Поэтому ряд (11) так равномерно сходится.

Поскольку $(n-1)$ -я частная сумма (12) равна $u_n(t) - \varphi(t_0)$, то последовательность $\{u_n(t)\}$ равномерно сходится на отрезке $t_0 - h \leq t \leq t_0 + c_3$ к функции $u(t)$:

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0 + c_3. \quad (14)$$

Переходя по формуле (6) к пределу $m \rightarrow \infty$, получаем

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in E_0, \\ \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t F[s, u(s), v(s)] ds, & t_0 - h \leq t \leq t_0 + c_3, \end{cases} \quad (15)$$

Так как равномерная сходимость позволяет поменять местами опера-
ции нахождения предела и интегрирования. Из этого результата ясно,
что функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1), причем уравнение удов-
летворяется на $t_0 \leq t \leq t_0 + c_3$. Таким образом, существование теоремы
доказано.

Единственность. Предположим, что $u(t)$ — функция, равная
 $\varphi(t)$ на E_0 и удовлетворяющая уравнению (1) на некотором интервале
справа от точки $t = t_0$, кроме того, предположим, что этот интервал
совпадает с интервалом $(t_0, t_0 + c_3)$. Надо показать, что $u(t) = u^*(t)$ на
отрезке $[t_0 - h, t_0 + c_3]$. Предположим, что $u(t) = u^*(t)$ на отрезке
 $[t_0 - h, t_1]$ для некоторого t_1 , удовлетворяющего интервалам $t_0 \leq t_2 \leq$
 $\leq t_0 + c_3$. По крайней мере одно такое значение t_1 определенно сущест-
вует, так как $u(t) = u^*(t) = \varphi(t)$ на E_0 . Поскольку точка $(t, u^*(t), v^*(t))$
принадлежит D при $t = t_1$ и функция непрерывна, эта точка будет
принадлежать D для некоторого интервала значений t справа от точ-
ки $t = t_0$. Пусть значение t_2 выбрано так, что $t_1 \leq t_2 \leq t_0 + c_3$, и точ-
ка $(t, u^*(t), v^*(t))$ принадлежит D для $t_0 \leq t \leq t_2$, поскольку

$$u^*(t) = \varphi(t) + \int_{t_0}^t F[s, u^*(s), v^*(s)] ds, \quad t_0 \leq t \leq t_2. \quad (16)$$

Выведем из формул (6) и (3), что

$$|u_{m+1}(t) - u^*(t)| \leq c_4 \int_{t_0}^t (|u_m(s) - u^*(s)| + |v_m(s) - v^*(s)|) ds,$$

или

$$|u_{m+1}(t) - u^*(t)| \leq 2c_4 \int_{t_0}^t |u^*(s) - v^*(s)| ds, \quad t_0 - h \leq t \leq t_2. \quad (17)$$

Из соотношения

$$|u^*(t) - \varphi(t_0)| \leq \int_{t_0}^t |F[s, u^*(s), v^*(s)]| ds \leq c_2 t$$

для $t_0 \leq t \leq t_2$ получаем итерациями с помощью (17) неравенство

$$|u_{m+1}(t) - u^*(t)| \leq \frac{c_2 (2c_4)^{m+1} t^{m+2}}{(m+2)!}, \quad t_0 - h \leq t \leq t_2.$$

Поскольку правая часть последнего стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$,
видим, что $u(t) - u^*(t) = 0$ для $t_0 - h \leq t \leq t_2$. Итак, не существует
наибольшего отрезка $[t_0 - h, t_1]$ с $t_1 < t_0 + c_3$, на котором $u(t)$ и $u^*(t)$
равны. Иначе говоря, они равны на всем отрезке $[t_0 - h, t_0 + c_3]$.
Таким образом, единственность тоже доказана.

В монографии [4] (стр. 88—89) доказана лемма о выборе (Арце-
ла), что любая равномерно ограниченная и равномерно непрерыв-
ная последовательность непрерывных функций на ограниченном ин-
тервале имеет равномерно сходящуюся на этом интервале подпослед-
овательность. На основе леммы о выборе (Арцела) докажем следующую
теорему, являющуюся вариантом теоремы 1.

Теорема 2. Предположим, что функция $\varphi(t)$ непрерывна на E_0
и $m_\varphi = \max_{E_0} |\varphi(t)|$. Предположим далее, что вектор-функция непре-

рывна в области $D: |u| + |v| \leq c_1, t_0 - h \leq t_0 \leq t_0 + t_1, (t_1 > t_0 - h)$.
Пусть $c_2 = \max_D |F(t, u, v)|$. Допустим, что $2m_\varphi < c_1$ и $c_3 < (c_1 -$
 $- 2m_\varphi) \frac{1}{2c_2}$. Тогда на отрезке $t_0 - h \leq t \leq t_0 + \min(c_3, t_1 - t_0)$ суще-

ствует непрерывное решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее
начальному условию $u(t) = \varphi(t)$ на E_0 .

Доказательство.

1. Существование. Пусть $u(t)$ — предельная функция последо-
вательности $\{u_m(t)\}$, удовлетворяющая уравнению (1). Для всякого от-
резка $[t_0, t_0 + c_3]$ выберем так, чтобы $t_0 + Lh_m \leq t$ при $m \rightarrow \infty, h_m \rightarrow 0$,
где h_m — последовательность положительных чисел и L — целая часть
числа t/h_m . Теперь докажем, что

$$u_m[t_0 + (L+1)h_m] = \varphi(t) + \sum_{l=0}^L h_m F[t_0 + lh_m, u_m(t_0 + lh_m), v_m(t_0 + lh_m)].$$

Это можно доказать следующим образом. Пусть для любых l и m

$$u_m[t_0 + (l+1)h_m] = u_m(t_0 + lh_m) + h_m F[t_0 + lh_m, u_m(t_0 + lh_m), v_m(t_0 + lh_m)].$$

Просуммировав эти неравенства для $l = 0, 1, 2, \dots, L$, получим равен-
ство (18), так как $u(t) = \varphi(t)$ на E_0 при каждом m . Тогда $u_m[t_0 +$
 $+(L+1)h_m] \rightarrow u_m(t)$. Сумма, стоящая в правой части равенства (18),
внешне напоминает интегральную сумму для интеграла Римана, поэ-
тому можно ожидать, что он стремится к $\int_{t_0}^t F[s, u(s), v(s)] ds$ при

$m \rightarrow \infty$, это нам и требуется.

Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^L h_m F[t_0 + lh_m, u_m(t_0 + lh_m), v_m(t_0 + lh_m)] = \\ & = \sum_{l=0}^L h_m F[t_0 + lh_m, u(t_0 + lh_m), v(t_0 + lh_m)] + \\ & + \sum_{l=0}^L h_m \{F[t_0 + lh_m, u_m(t_0 + lh_m), v_m(t_0 + lh_m)] - \\ & - F[t_0 + lh_m, u(t_0 + lh_m), v(t_0 + lh_m)]\}. \end{aligned}$$

Первая сумма правой части стремится к $\int_{t_0}^t F[s, u(s), v(s)] ds$, так как

она отличается от интегральной суммы на выражение

$$[(L+1)h_m - t]F[t_0 + lh_m, u(t_0 + lh_m), v(t_0 + lh_m)],$$

очевидно, стремящееся к нулю. Поскольку последовательность $\{u_m(t)\}$ равномерно сходится и функция $F(t, u, v)$ непрерывна то,

$$\|F[t_0 + lh_m, u_m(t_0 + lh_m), v_m(t_0 + lh_m)] - F[t_0 + lh_m, u(t_0 + lh_m), v(t_0 + lh_m)]\| \leq \varepsilon$$

для всех l при $m \geq m_0$. Отсюда получаем, что

$$\left\| \sum_{l=0}^L h_m \{F[t_0 + lh_m, u_m(t_0 + lh_m), v_m(t_0 + lh_m)] - F[t_0 + lh_m, u(t_0 + lh_m), v(t_0 + lh_m)]\} \right\| \leq \varepsilon h(L+1) \leq 2 + \varepsilon t.$$

Таким образом, равенство (18) доказано.

2. Единственность теоремы доказывается соответственно, как единственность теоремы 1.

Теорема 3. Пусть уравнение

$$\dot{x}(t) = F[t, x(t), \max_{\tau \in [t-h, t]} x(\tau)], \quad t \geq t_0,$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in E_0,$$

где $\varphi(t)$ — начальная функция непрерывная на E_0 , имеет единственное решение, если вектор-функция $F(t, u, v)$ непрерывная и удовлетворяет условию Липшица по второму и третьему аргументам.

Это единственное решение может быть найдено методом сжатых отображений.

Доказательство. Пусть оператор $A[u(t)]$ определен в пространстве непрерывных функций, заданных на E_0 и на отрезке $[t_0, t_0 + h]$ и удовлетворяет условию принципа сжатых отображений.

Введен оператор

$$A[u^*(t)] = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t F[s, u^*(s), v^*(s)] ds, \quad (19)$$

и пусть он удовлетворяет всем условиям, изложенным выше. Считаем этот оператор определенным в пространстве непрерывных функций, заданных на E_0 и на отрезке $[t_0, t_0 + h]$, причем не все эти функции совпадают с $\varphi(t)$.

Замечая, что условие 1 принципа сжатых отображений выполнено, проверяем условие 2:

$$\begin{aligned} \rho(A[u(t)], A[u^*(t)]) &= \sup_{t \in [t_0, t_0+h]} \left| \int_{t_0}^t \{F[s, u(s), v(s)] - F[s, u^*(s), v^*(s)]\} ds \right| \leq c_4 \sup_{t \in [t_0, t_0+h]} \int_{t_0}^t [|u - u^*| + |v - v^*|] ds \leq \\ & \leq c_4 h \left\{ \sup_{t \in [t_0, t_0+h]} |u - u^*| + \sup_{t \in [t_0, t_0+h]} |v - v^*| \right\} \leq \\ & \leq 2c_4 h \rho(u(t), u^*(t)). \end{aligned}$$

При $h \leq \frac{\alpha}{2c_4}$, где $0 \leq \alpha \leq 1$ получаем, что

$$\rho(A[u(t)], A[u^*(t)]) \leq \alpha \rho(u(t), u^*(t)).$$

Условие 2 принципа сжатых отображений выполнено. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петухов В. Р. „Изв. вузов, математика“ 3(40), 1964.
2. Эльсгольц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. М. 1955.
3. Коддингтон Э. Д., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1958.
4. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1954.
5. Халанай А. Некоторые качественные вопросы в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Revue Math. pures et appl. Acad. RPR, 2(1957), стр. 127—144.
6. Bellman R. On the existence and boundedness of Solutions of nonlinear differential-difference equations. Ann. Math, Ser 2(50), 1949, стр. 347—355.

Поступило 26. III 1970

ШАО

Э. Р. Мəһəммəдов

Кечикэн аргументли дифференциал тэнликлэр үчүн варлыг
вə јеканэлик теоремлэри

ХҮЛАСЭ

Мəгалəдə

$$\dot{x}(t) = F[t, x(t), \max_{\tau \in [t-h, t]} x(\tau)],$$

тəнлијинин $t \geq t_0$ олдугда $x(t) = \varphi(t)$, $t \in E_0$ шəртини əдəјəн мəсəлəси
верилмишдир.

УДК 517.919

М. М. ГУСЕЙНОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ, ЕДИНСТВЕННОСТИ И КОРРЕКТНОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

В настоящей статье содержатся теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий и от правой части дважды непрерывно дифференцируемого в прямоугольнике $\Pi = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ решения уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda F(t, x, u, u_x, u_t), \quad (1)$$

удовлетворяющего при $i = 0, 1$ краевым условиям

$$u_{tt}(i, t) = \lambda f_i(t, u(0, t), u(1, t), u_x(0, t), u_x(1, t), u_t(0, t), u_t(1, t)) \quad (2)$$

и при $t = 0$ начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

где λ — малый параметр, F, f_i, φ, ψ — заданные функции. Г. М. Халилов [2] исследовал существование, единственность и корректность решения задачи (1) — (3). С помощью определенной подстановки решение этой задачи сводится к смешанной задаче с нулевыми граничными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения. После применения метода Фурье получается некоторая счетная система нелинейных интегродифференциальных уравнений и с помощью решения этой системы строятся решения полученной смешанной задачи. Обычно при нахождении классического решения задачи (1), (2), (3) методом Фурье от правой части уравнения (1) требуется существование вторых частных производных и на данные функции налагаются условия вида

$$F(i, t, 0, v) = 0, \quad \varphi''(i) = \psi'(i) = 0 \quad (4)$$

при $i = 0, 1; 0 \leq t \leq 1$ и любых v .

Следует отметить, что требование (4) является жестким, физически неоправданным ограничением. Это ограничение исключает из рассмотрения даже достаточно хорошие функции: например, любую сколь угодно гладкую функцию вида $f(t) \neq 0$.

Целью настоящей статьи является следующее: пользуясь методом волновых областей, устранить ограничение (4) и снизить порядок частных производных, требуемых от правой части уравнения (1), на единицу. С целью исследования задачи (1), (2), (3) рассмотрим следующие банаховы пространства.

1. Пусть совокупность функций $u(x, t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до k -го порядка включительно в области Π .

Норму элемента в совокупности определим формулой

$$\|u\| = \sum_{s=0}^k \sum_{i=1}^n \max_{(t,x) \in \Pi} \left| \frac{d^s u}{dt^i dx^i} \right|.$$

Обозначим это пространство через $C^k(\Pi)$. Очевидно, что пространство $C^k(\Pi)$ банахово.

Введение функции

$$v(x, t) = u(x, t) - x d_1(t) - (1-x) a_2(t)$$

редуцирует задачу (1) — (3) к следующей задаче относительно функции $v(x, t)$:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{d^2 v}{dx^2} = F_1(\lambda, x, t, v, v_x, v_t, \dots), \quad (5)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad (6)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad v_t(x, 0) = \psi(x), \quad (7)$$

где

$$F_1(\lambda, x, t, v, \dots) = \lambda F - x d_1'(t) - (1-x) a_2'(t),$$

$$\psi_1(x) = \psi(x) - x d_1'(0) - (1-x) a_2'(0),$$

$d_1(t)$ и $d_2(t)$ являются решениями уравнения

$$a_i''(t) = \lambda f_i[t, v(0, t), \dots, a_1(t), a_1'(t), a_2(t), a_2'(t)] \quad (i = \overline{1, 2}) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1(0) &= 0, \quad a_1'(0) = \frac{1}{\Pi} \psi(1), \\ a_2(0) &= 0, \quad a_2'(0) = \frac{1}{\Pi} \psi(0). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Нахождение классического решения задачи (5), (6), (7) методом Фурье приводится к нахождению решения методом продолжений, так как нахождение решений указанной задачи после применения метода Фурье приводится к решению следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \cos n\pi t \int_0^1 \varphi(\xi) \sin n\pi \xi d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2 \sin n\pi t}{n\pi} \int_0^1 \psi_1(\xi) \sin n\pi \xi d\xi + \frac{2}{n\pi} \int_0^t \int_0^1 F_1 \sin n\pi \xi \sin n\pi(t-\tau) d\xi d\tau \right] \sin n\pi x \quad (10)$$

Принимая $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и меняя местами знаки суммирования и интегрирования в ряде (10), получим

$$v(x, t) = \int_0^1 \varphi'(\xi) \kappa_1(x, t, \xi) d\xi + \int_0^1 \psi_1(\xi) \kappa_2(x, t, \xi) d\xi + \\ + \int_0^t \int_0^1 F_1(\xi, \tau, \dots) \kappa_3(x, t, \xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (11)$$

где

$$\kappa_1(x, t, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \xi \cos n\pi t \sin n\pi x}{n};$$

$$\kappa_2(x, t, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi \xi \sin n\pi t \sin n\pi x}{n};$$

$$\kappa_3(x, \tau, \xi, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi \xi \sin \pi(t - \tau)}{n}.$$

Функции $\kappa_i (i = \overline{1, 3})$ кусочно-постоянные в области Π . В самом деле для $\kappa_3(x, t, \xi, \tau)$ имеем

$$\kappa_3(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 (1)^l \frac{\sin n\alpha_l}{n},$$

где

$$\alpha_1 = \pi(x + t + \xi - \tau), \quad \alpha_2 = \pi(x - t + \xi + \tau), \\ \alpha_3 = \pi(x - t - \xi + \tau), \quad \alpha_4 = \pi(x + t - \xi - \tau)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha_l}{n} = \begin{cases} -\frac{\pi + \alpha_l}{2} & \text{при } -2\pi < \alpha_l < 0, \\ \frac{\pi - \alpha_l}{2} & \text{при } 0 < \alpha_l < 2\pi, \\ \frac{3\pi - \alpha_l}{2} & \text{при } 2\pi < \alpha_l < 4\pi, \\ 0 & \text{при } \alpha_l = k\pi \end{cases}$$

$$(i = \overline{1, 4}; k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots).$$

Соответственно этому область Π распадается на несколько частичных областей, которые называются волновыми. Вычисляем значения функции κ_3 с помощью графического изображения волновых областей. В результате для точки $M(t, x)$ области Π получаем

$$\kappa_3(x, t, \xi, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{в области } \sigma_1, \\ 0 & \text{в областях } \sigma_2, \sigma_3, \end{cases}$$

где $\sigma: \{0 \leq \tau \leq t, x - (t - \tau) \leq \xi \leq x + (t - \tau)\}$, σ_2, σ_3 определяются соответствующими неравенствами. Аналогично доказывается кусочно-постоянность функций $\kappa_1(x, t, \xi)$, $\kappa_2(x, t, \xi)$. Таким образом $v(x, t)$ представляется с помощью частных областей в следующем виде:

$$v(x, t) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x + t) + \varphi(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi_1(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F_1(\lambda, \xi, \tau, \dots) d\xi d\tau \right]. \quad (12)$$

Из формулы (12) видно, что если $x < t$, то надо продолжить функции $\varphi(x)$, $\psi_1(x)$, F_1 из отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[-1, 2]$ по x .

Теперь докажем теорему о существовании и единственности классического решения задачи (1), (2), (3).

Теорема 1. Пусть:

- 1) $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(x) \in C^1[0, 1]$.
- 2) функция $F(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ определена в области $\Pi_R = \Pi x (-R \leq s_3, s_4, s_5 \leq +R)$, непрерывна по совокупности своих аргументов и удовлетворяет условию

$$|F(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) - F(s_1, s_2, s_3, s_4, s_6)| \leq M(R) \sum_{l=3}^5 |s_l - \tilde{s}_l|$$

где R — достаточно большое число, $M(R)$ — некоторая константа зависящая только от R .

3) существуют производные $F'_{s_i}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, удовлетворяющие условиям

$$|F_{s_i}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) - F'_{s_i}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)| \leq M \sum_{k=3}^5 |s_k - \tilde{s}_k|$$

в области Π_R .

4) $|F_{s_1}(s_1, s_2, 0, 0, 0)| \leq P$, $|F(s_1, s_2, 0, 0, 0)| \leq P (i = \overline{2, 5})$.

5) функции $f_m(t, z_1, \dots, z_6)$ непрерывны по совокупности своих аргументов в топологическом произведении

$$[0, 1] \times (|z_k| < C)$$

и в этой области удовлетворяют условию Липшица относительно переменных $tz_k (m = \overline{0, 1}, k = \overline{1, 6})$.

6) выполняются условия согласования.

Тогда при достаточно малых значениях $|\lambda|$ задача (1), (2), (3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Функции $\varphi(x)$, $\psi_1(x)$, F_1 продолжим по x нечетным образом из отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[-1, 2]$, сохраняя класс. Очевидно, что

$$v_0(x, t) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x + t) + \varphi(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \delta(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] \in C^2(\Pi),$$

где $\delta(x, t) = x\alpha_1'(t) - (1 - x)\alpha_2'(t)$.

Примем следующее обозначение:

$$L = \max(M, R, P, \|v_0\|).$$

Теперь, выбирая

$$R > \max_{(t, x)} \left\{ |v_0|, \left| \frac{dv_0}{dt} \right|, \left| \frac{dv_0}{dx} \right| \right\},$$

берем из пространства $C^2(\Pi)$ некоторый шар N с центром в точке $v_0(x, t)$ и радиусом r , где

$$0 < r \leq R - \max_{(t, x)} \left\{ |v_0|, \left| \frac{dv_0}{dt} \right|, \left| \frac{dv_0}{dx} \right| \right\}.$$

В шаре N определим оператор

$$S(v) = v_0 + \frac{\lambda}{2} \int_{\sigma(x, t)} \int F(\tau, \xi, \dots) d\xi d\tau.$$

Для любых двух функций $v(x, t), z(x, t) \in N$ получаем

$$\|A(v) - A(z)\|_{C(\Pi)} \leq |\lambda| (9 + 39L)L, \quad (13)$$

$$\|A(v) - A(z)\|_{C(\Pi)} \leq |\lambda| (7 + GL)L. \quad (14)$$

Таким образом, из неравенств (13) и (14) видно, что при достаточно малых значениях $|\lambda|$ оператор A преобразует шар N в себя и в этом шаре является оператором сжатия. Следовательно, оператор A имеет в этом шаре N единственную неподвижную точку $u(x, t) \in C^2(\Pi)$. Легко проверить, что функция $u(x, t)$ является классическим решением задачи (5), (6), (7). Пользуясь условием Липшица обобщенной

леммой Гронуолла, легко сказать, что $v(x, t)$ есть единственное классическое решение задачи (5), (6), (7), удовлетворяющее условию

$$-R \leq v(x, t), \quad v_x(x, t), \quad v_t(x, t) \leq R$$

при всех $(t, x) \in \bar{\Pi}$. Отсюда вытекает существование и единственность исходной задачи (1), (2), (3).

Для простоты вычисления допустим, что задача (5), (6), (7) имеет вид:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda F_1(x, t, v) \quad (5')$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad (6')$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad v_t(x, 0) = \psi_1(x). \quad (7')$$

Теперь несколько возьмем правые части в смысле норм пространств $L_2(\Pi)$, $L_2[0, 1]$, $L_2[0, 1]$, соответственно. Тогда задача (5), (6), (7) переходит к задаче

$$\frac{d^2 \tilde{v}}{dt^2} - \frac{d^2 \tilde{v}}{dx^2} = \lambda F_1(x, t, \tilde{v}) + F_0(x, t), \quad (15)$$

$$\tilde{v}(0, t) = \tilde{v}(1, t) = 0, \quad (16)$$

$$\tilde{v}(x, 0) = \varphi(x) + \varphi_0(x); \quad \tilde{v}_t(x, 0) = \psi_1(x) + \psi_0(x). \quad (17)$$

Через K обозначим множество последовательностей непрерывных функций определенных на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} |a_k(t)| < +\infty.$$

Норму элемента $a(t) \in K$ определим следующим образом:

$$\|a\|_K = \sum_{k=1}^{\infty} \max_t |a_k(t)|,$$

где $a(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t), \dots)$.

Очевидно, что пространство K банахово.

Теорема 2. Пусть:

1) задачи (5'), (6'), (7') и (15), (16), (17) имеет классическое решение

2) $|F_1(x, t, v) - F_1(x, t, \tilde{v})| \leq b(t, x) |v - \tilde{v}|$,

где $b(t, x) \in L_2(\Pi)$.

Тогда, если правые части (5'), (6'), (7') и (15), (16), (17) мало отличаются в смысле нормы пространств $L_2(\Pi)$, $L_2[0, 1]$, $L_2[0, 1]$, соответственно, то классические решения задач (5), (6), (7) и (15), (16), (17) мало отличаются друг от друга в смысле нормы пространства K .

Доказательство. Пользуясь условием Липшица, неравенством Бунаковского и обобщенной леммой Гронуолла, из (10) имеем

$$\|v - \tilde{v}\|_K^2 \leq 10 [\lambda^2 e(2) \|F_0\|_{L_2(\Pi)}^2 + e(4) \|\varphi_0\|_{L_2[0, 1]}^2 + e(2) \|\psi_0\|_{L_2[0, 1]}^2] \cdot e^{10\lambda^2 e(2) \|b\|_{L_2(\Pi)}^2}, \quad (18)$$

где $e(i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i}$ ($i = 2; 4$).

Утверждение теоремы 2 вытекает из неравенства (18).

Замечание 1. При наложенных условиях на функции f_i задача (8), (9) имеет дважды непрерывно дифференцируемые решения $a_i(t)$ ($i = 1, 2$) на отрезке $[0, 1]$.

Замечание 2. Те значения параметра λ , при которых справедливо утверждение теоремы 1, определяются следующим образом:

$$|\lambda| < \lambda_0 = \min \left\{ \frac{r}{(9 + 39L)L}, \frac{1}{(7 + 6L)L} \right\}.$$

Замечание 3. Для доказательства непрерывной зависимости от правой части решения задачи (5), (6), (7) вместо пространства K следует взять следующее пространство. С помощью функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$, построим множество последовательностей $(a_1(t), \dots, a_n(t), \dots)$, удовлетворяющих условию.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[n \max_{0 \leq t \leq 1} |a_n(t)| \right]^2 + \left[\max_{0 \leq t \leq 1} |a'_n(t)| \right]^2 \right\} < +\infty.$$

Каждому элементу $(a_1(t), \dots, a_n(t), \dots)$ из этого множества сопоставим функцию

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin nx.$$

Полученное множество обозначим через B , в котором операции сложения и умножения на число определим обычным образом, а норма

$$\|v\|_B = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[n \max_{0 \leq t \leq 1} |a_n(t)| \right]^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\max_{0 \leq t \leq 1} |a'_n(t)| \right]^2 \right)^{1/2}.$$

Очевидно, что B — банахово пространство.

Утверждение теоремы 2 верно для задачи (5), (6), (7) в смысле нормы пространства B .

Замечание 4. Методом продолжения нами доказаны существование и единственность решения задачи (1), (2), (3) в области

$$D: \begin{cases} 0 \leq x < +\infty \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов М. М. Канд. дисс. АГУ им. С. М. Кирова, 1965.
2. Халилов Г. М. Автореф., Баку, 1966.

АЗИ НЕФТЕХИМ

Поступило 16. IX 1969

М. М. Гусейнов

Бир гејри-хәтти мәсәләнин һәллинин варлығы, јеканәлији вә дајаныглығы һаггында

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатларда (1), (2), (3) мәсәләсинин һәллинин варлығы, јеканәлији вә дајаныглығы һаггында теоремләр исбат едилмишдир. Г. М. Хәлилов (1), (2), (3) мәсәләсинә диссертасија [2] ишиндә бахмышдыр. Онун алдығы нәтичәләр тәгдим едилән ишдә далғавары област үсулундан истифадә едиләрәк, мә'лумлар үзәринә гојулан шәртләр и азалтмагла алынмышдыр. κ_i ($i = 1, 3$) нүвәләринин Π областында һиссә-һиссә сабитлијиндән истифадә едиләрәк, мә'лумлар үзәринә гојулан төрәмәләрин тәртиби бир ваһид азалдылар вә бә'зи шәртләр тәләб олунмур.

Мәгаләдә (5), (6), (7) мәсәләси һәллинин фурје үсулу илә тапылмасынын давам үсулу илә ахтарылмасы мәсәләсинә кәтирилдији көсәтәрилмишдир. (1), (2), (3) мәсәләсинин һәллинин варлығы вә јеканәлијинин D областында арашдырылдығы да гејд едилмишдир.

К. К. ГАСАНОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим процесс управления, описываемый системой гиперболических уравнений второго порядка, двумерным временем и запаздывающим аргументом:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial z}{\partial x} \right) + Bz = f(t, x, p, v) \quad (1)$$

с начальными условиями Гурса

$$\left. \begin{aligned} z|_{-x_1^* < t_1 < 0} &= \varphi_1(t, x) \\ z|_{-x_2^* < t_2 < 0} &= \varphi_2(t, x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} Mz + Nz_x|_{x=0} &= \psi_1(t), \\ Pz + Qz_x|_{x=1} &= \psi_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $t = (t_1, t_2)$; $(t, x) \in G (0 \leq t_1 \leq T_1; 0 \leq t_2 \leq T_2; 0 \leq x \leq 1)$; $z(t, x)$ — матрица $n \times 1$, характеризующая состояние управляемого объекта; $\bar{z}(t, x) = z(t_1 - \omega_1(t_1), t_2 - \omega_2(t_2), x), \dots$ функции $\omega_i(t_i) \geq 0$ непрерывны на $[0, T_i]$ и $\omega_i(t_i) \neq 1$; $\omega_i = \max_{t_i} \omega_i(t_i)$ ($i = 1, 2$); $p = (z, z_{t_1}, z_{t_2}, z_x, \bar{z}, \bar{z}_{t_1}, \bar{z}_{t_2}, \bar{z}_x), \dots$ $A(x)$ — положительно определенная матрица $n \times n$, $B(x)$ — симметричная и неотрицательная; M, N, P, Q — постоянные матрицы $n \times n$, порождающие самосопряженные краевые условия; φ_i и ψ_i — непрерывные матрицы-функции, удовлетворяющие условиям согласования; $v(t, x)$ — управляющая матрица $r \times 1$, которая предполагается кусочно-непрерывной в области G , со значениями из некоторой ограниченной замкнутой области r -мерного евклидова пространства E^r . Такие уравнения называются допустимыми. Матрица $f(t, x, p, v)$ порядка $n \times 1$ непрерывна вместе с матрицами f_{t_1}, f_x и f_p , соответственно $n \times 1, n \times 1$ и $n \times 8n$ на $G \times E^n \times \dots \times E^n \times V$, причем f_p удовлетворяет условию Липшица по p .

Задача управления системой (1) — (3) заключается в нахождении управления $v(t, x)$ из класса допустимых управлений, которое минимизирует функционал

$$S = \int_0^1 c(x) z(T, x) dx, \quad (4)$$

где $T = (T_1, T_2)$, $c(x)$ — некоторая заданная матрица $1 \times n$.

В работе доказывается необходимое условие в виде принципа максимума, которое в случае

$f(t, x, p, v) = g(t, x)p + h(t, x, v)$ является и достаточным, где $g(t, x)$ и $h(t, x, v)$ — матрицы порядков $n \times 8n$ и $n \times 1$, соответственно. Этот случай назовем линейным. Пусть $v(t, x)$ — некоторое допустимое управление, а $z(t, x)$ — решение задачи (1) — (3), соответствующее этому управлению, и пусть матрица $u(t, x)$ порядка $1 \times n$ — решение задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_3} \left(\frac{\partial u}{\partial t_3} A \right) + uB - \frac{\partial H(t, t_3)}{\partial z} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial H(t_3, t)}{\partial z_{t_i}} \right) = \\ & \quad \begin{cases} 0 & (x = t_3); (t, x) \in D \\ \frac{\partial H(\gamma(t), t_3)}{\partial z} \gamma'_1(t_1) \gamma'_2(t_2) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial H(\gamma(t), t_3)}{\partial z_{t_i}} \gamma'_1(t_1) \gamma'_2(t_2) \right); \\ & (t, x) \in G \setminus D \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

с дополнительными ограничениями

$$\left. \begin{aligned} uA + \frac{\partial u}{\partial x} AM^{-1}N - \frac{\partial H(t, x)}{\partial x_x} M^{-1}N \Big|_{x=0} &= 0, \\ uA + \frac{\partial u}{\partial x} AP^{-1}Q - \frac{\partial H(t, x)}{\partial x_x} P^{-1}Q \Big|_{x=1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial H(t, x)}{\partial z_{t_1}} \Big|_{t_1=T_1} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} + \frac{\partial H(t, x)}{\partial z_{t_2}} \Big|_{t_2=T_2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$u(T, x) = -c(x), \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t_1} \right] \Big|_{t_1=h_1(T_1)} = \begin{cases} 0, & (h_1(T_1) \leq t_1 \leq T_1; t_2 = h_2(T_2)) \\ \frac{\partial H(\gamma(t), x)}{\partial z_{t_1}} \gamma'_1(t_1) \gamma'_2(t_2); & (0 \leq t_1 \leq h_1(T_1); t_2 = h_2(T_2)), \end{cases} \quad (9)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t_2} \right] \Big|_{t_2=h_2(T_2)} = \begin{cases} 0, & (t_1 = h_1(T_1); h_2(T_2) \leq t_2 \leq T_2), \\ \frac{\partial H(\gamma(t), x)}{\partial z_{t_2}} \gamma'_1(t_1) \gamma'_2(t_2); & (t_1 = h_1(T_1); 0 \leq t_2 \leq h_2(T_2)), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \text{где} \quad H(t, x) = H[t, x, p(t, x), u(t, x), v(t, x)] = \\ & \quad = u(t, x)f(t, x, p(t, x), v(t, x)); \\ & \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_2)); \quad h_i(t_i) = t_i - \omega_i(t_i) \quad \gamma_i(t_i) = \end{aligned} \quad (11)$$

обратная к функции

$$h_i(t_i); \quad D = D(h_1(T_1) \leq t_1 \leq T_1; h_2(T_2) \leq t_2 \leq T_2; 0 \leq x \leq 1);$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t_1} \right] \Big|_{t_1=h_1(T_1)} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{t_1=h_1(T_1)+0} - \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{t_1=h_1(T_1)-0}.$$

Предполагается, что все производные, входящие в систему (5), существуют. В дальнейшем предполагается, что при заданном допустимом управлении $v(t, x)$ существуют единственные непрерывные решения $z(t, x)$, $u(t, x)$ задач (1) — (3) и (5) — (10), соответственно.

Пусть $v(t, x)$ — некоторое допустимое управление, $\Delta v(t, x)$ — его приращение, $z(t, x)$ и $u(t, x)$ — решения задач (1) — (3) и (5) — (10), соответствующие управлению $v(t, x)$, а $z(t, x) + \Delta z(t, x)$ — решение задачи (1) — (3), соответствующее управлению $v(t, x) + \Delta v(t, x)$. Тогда очевидно, — (3), соответствующее управлению $v(t, x) + \Delta v(t, x)$.

что $\Delta z(t, x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2(\Delta z)}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial(\Delta z)}{\partial x} \right) + B \Delta z = f(t, x, p + \Delta p, v + \Delta v) - f(t, x, p, v), \quad (12)$$

удовлетворяющим нулевым начальным условиям Гурса и однородным граничным условиям, соответствующим (3). Решение этой задачи можно свести к следующему интегральному уравнению (см. [4]):

$$\Delta z(t, x) = \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 \int_0^1 K(x, \xi; t_1 - \tau_1; t_2 - \tau_2) [f(\tau, \xi, p + \Delta p, v + \Delta v) - f(\tau, \xi, p, v)] d\xi, \quad (13)$$

где $K(x, \xi; t_1 - \tau_1; t_2 - \tau_2)$ — матрица $n \times n$ с элементами

$$K_{ij}(x, \xi; t_1 - \tau_1; t_2 - \tau_2) = \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\lambda_k \sqrt{t_1 - \tau_1} \sqrt{t_2 - \tau_2}) y_k^{(i)}(x) y_k^{(j)}(\xi); \quad (14)$$

λ_k и $y_k(x) = (y_k^{(1)}(x), \dots, y_k^{(n)}(x))$ — собственное значение и собственная функция спектральной задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(A \frac{dy}{dx} \right) - By + \lambda^2 y &= 0, \\ My + N \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} &= 0; \\ Py + Q \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} &= 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$I_0(\lambda)$ — бesselова функция нулевого порядка.

Далее, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_G \left\{ u \left[\frac{\partial^2 \Delta z}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial \Delta z}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} A \right) \right] \Delta z \right\} dt dx = \\ = \int_0^1 u(T, x) \Delta z(T, x) dx - \int_0^1 dx \int_0^{T_1} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Delta z \Big|_{t_2=T_2} dt_1 - \\ - \int_0^1 dx \int_0^{T_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Delta z \Big|_{t_1=T_1} dt_2 + \int_0^1 dx \int_0^{T_1} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{t_2=h_2(T_2)+0} - \right. \\ \left. - \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{t_2=h_2(T_2)-0} \right) \Delta z(t_1, h_2(T_2), x) dt_1 + \int_0^1 dx \int_0^{T_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t_2} \Big|_{t_1=h_1(T_1)+0} - \right. \\ \left. - \frac{\partial u}{\partial t_2} \Big|_{t_1=h_1(T_1)-0} \right) \Delta z(h_1(T_1), t_2, x) dt_2 + \int_0^{T_1} dt_1 \int_0^{T_2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} A \Delta z - u A \frac{\partial \Delta z}{\partial x} \right] \Big|_{x=0}^{x=1} dt_2. \end{aligned}$$

Отсюда при помощи задач (1)–(3), (5)–(10) и функционала (4) найдем следующее выражение для приращения функционала (4):

$$\begin{aligned} \Delta S = - \int_0^1 c(x) \Delta z(T, x) dx = - \int_G \{ H[M, p(M) + \Delta p(M), u(M) u(M) + \\ + \Delta v(M)] - H[M, p(M), u(M), v(M)] \} dM + \\ + \int_G \frac{\partial H[M, p(M), u(M), v(M)]}{\partial p} \Delta p(M) dM. \end{aligned}$$

Применяя формулу Тейлора к интегральному выражению, получим

$$\begin{aligned} \Delta S = - \int_G \{ H[M, p, (M), u(M), v(M) + \Delta v(M)] - \\ - H[M, p(M), u(M) v(M)] \} dM - \\ - \int_G \left\{ \frac{\partial H[M, p(M) + \Delta \theta p(M), u(M), v(M) + \Delta b(M)]}{\partial p} - \right. \\ \left. - \frac{\partial H[M, p(M), u(M), v(M)]}{\partial p} \right\} \Delta p(M) dM, \end{aligned} \quad (16)$$

где $M = (t, x)$; $0 \leq \theta \leq 1$.

Зафиксируем точку $\bar{M} = (\bar{t}, \bar{x}) \in G$ и введем вариацию $\Delta v(M)$ следующим образом:

$$\Delta^* v(M) = \begin{cases} v^* - v(M) & \text{при } M \in G_\varepsilon, \\ 0 & \text{при } M \in G/G_\varepsilon, \end{cases}$$

где v^* — произвольная точка из V ; $G_\varepsilon = G_\varepsilon(\bar{t}_1 - q\varepsilon \leq t_1 \leq \bar{t}_1 + q\varepsilon;$

$$\bar{t}_2 - q\varepsilon \leq t_2 \leq \bar{t}_2 + q\varepsilon; \bar{x} - \varepsilon q \leq x \leq \bar{x} + \varepsilon q), \bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2),$$

q — произвольное положительное число; ε — достаточно малое положительное число. Тогда приращение функционала принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta^* S = - \int_{G_\varepsilon} \{ H[M, p(M), u(M), v^*] - H[M, p(M), u(M), v(M)] \} dM - \\ - \int_{G^*} \left\{ \frac{\partial H[M, p(M) + \theta \Delta^* p(M), u(M), v(M) + \Delta^* v(M)]}{\partial p} - \right. \\ \left. - \frac{\partial H[M, p(M), u(M), v(M)]}{\partial p} \right\} \Delta^* p(M) dM, \end{aligned} \quad (16^*)$$

где

$$G^* = G^*(\bar{t}_1 - \varepsilon q \leq t_1 \leq T_1; \bar{t}_2 - \varepsilon q \leq t_2 \leq T_2; \bar{x} - \varepsilon q \leq x \leq \bar{x} + \varepsilon q),$$

$$\Delta^* p(M) = 0$$

при $M \in G/G^*$. В линейном случае приращение функционала примет вид

$$\begin{aligned} \Delta S = - \int_G \{ H[M, p(M), u(M), v(M) + \Delta v(M)] - \\ - H[M, p(M), u(M), v(M)] \} dM, \end{aligned} \quad (17)$$

Будем говорить, что допустимое управление $v(M)$ в точке $\bar{M}$ удовлетворяет условию максимума, если в этой точке любого $v^* \in V$ выполняется неравенство

$$H[\bar{M}, p(\bar{M}), u(\bar{M}), v(\bar{M})] \geq H[\bar{M}, p(\bar{M}), u(\bar{M}), v^*]. \quad (18)$$

Используя приращение (1), легко доказать следующую теорему.

Теорема 1. Для того, чтобы допустимое управление $v(M)$ минимизировало функционал (4) в линейном случае, необходимо и достаточно, чтобы оно почти во всех точках в G удовлетворяло условию максимума.

В случае, когда A — диагональная матрица с элементами $a_i^2 (a_i > 0)$, M, P — единичные матрицы, B, N, Q — нулевые матрицы и f не зависит от первых производных искомой функции, справедлива следующая.

Теорема 2. Если допустимое управление $v(M)$ минимизирует функционал (4), то оно почти во всех точках $M \in G$ удовлетворяет условию максимума.

Доказательство. В рассмотренном случае $\Delta z(t, x)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений (см. [4])

$$\Delta z_i(t, x) = \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 \int_0^1 K_i(x, \xi; t_1 - \tau_1; t_2 - \tau_2) R_i[\tau, \xi, \Delta z(\tau, \xi), \Delta \bar{z}(\tau, \xi)] d\xi,$$

где

$$R_i[\tau, \xi, \Delta z(\tau, \xi), \Delta \bar{z}(\tau, \xi)] = f_i(\tau, \xi, z(\tau, \xi) + \Delta z(\tau, \xi), \bar{z}(\tau, \xi) + \Delta \bar{z}(\tau, \xi), v(\tau, \xi) + \Delta v(\tau, \xi)) - f_i(\tau, \xi, z(\tau, \xi), \bar{z}(\tau, \xi), v(\tau, \xi));$$

ядро

$$K_i(x, \xi; t_1 - \tau_1; t_2 - \tau_2) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} 2I_0(a_i^2 \kappa \pi \sqrt{(t_1 - \tau_1)(t_2 - \tau_2)}) \sin \kappa \pi x \sin \kappa \pi \xi.$$

Для каждой точки $M \in G$ область интегрирования можно разделить на несколько частичных подобластей, в каждой из которых вычисляется ядро. Например, для точки $M(t, x) \in G$, в которой

$$x > 2a_1 \sqrt{t_1 t_2}, \quad x + 2a_1 \sqrt{t_1 t_2} < 1,$$

получаем

$$\Delta z_i(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_i(t, x)} [4a_i^2(t_1 - \tau_1)(t_2 - \tau_2) - (x - \xi)^2]^{-\frac{1}{2}} R_i[\tau, \xi, \Delta z(\tau, \xi), \Delta \bar{z}(\tau, \xi)] d\tau d\xi, \quad (19)$$

где $\sigma_i(t, x)$ — область пространства τ_1, τ_2, ξ , определенная неравенствами $0 \leq \tau_1 \leq t_1, 0 \leq \tau_2 \leq t_2, (\xi - x)^2 \leq 4a_i^2(t_1 - \tau_1)(t_2 - \tau_2)$.

Из условий, наложенных на функцию f , следует, что

$$|R_i[\tau, \xi, \Delta z(\tau, \xi), \Delta \bar{z}(\tau, \xi)]| \leq \{ \|\Delta z(\tau, \xi)\| + \|\Delta \bar{z}(\tau, \xi)\| \} + \alpha(\|\Delta v(\tau, \xi)\|), \quad (20)$$

$$\left\| \frac{\partial H[M, p(M) + \theta \Delta p(M), u(M), v(M) + \Delta v(M)]}{\partial p} - \frac{\partial H[M, p(M), u(M), v(M)]}{\partial p} \right\| \leq L_1 \{ \|\Delta z(M)\| + \|\Delta \bar{z}(M)\| \} + \beta(\|\Delta v(M)\|), \quad (21)$$

где $\alpha(\eta)$ и $\beta(\eta)$ — монотонно возрастающие положительные функции при $\eta > 0$, стремящиеся к нулю при $\eta \rightarrow 0$.

Положим

$$y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sup_x |\Delta z_i(t_1, t_2, x)|,$$

тогда из (19) в силу (20) получим

$$|\Delta z_i(t, x)| \leq \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 \{ L[y(\tau_1, \tau_2) + \bar{y}(\tau_1, \tau_2)] + \alpha(\sup_{\xi} \|\Delta v(\tau, \xi)\|) \} d\tau_2.$$

Так как

$$\int_{x-2a_1\sqrt{(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)}}^{x+2a_1\sqrt{(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)}} 4a_i^2(t_1 - \tau_1)(t_2 - \tau_2) - (\xi - x)^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi = \pi$$

и

$$\int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 \bar{y}(\tau_1, \tau_2) \leq \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} y(\tau_1, \tau_2) d\tau_2,$$

то будем иметь

$$\int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 \{ 2nLy(\tau_1, \tau_2) + n\alpha(\sup_{\xi} \|\Delta v(\tau, \xi)\|) \} d\tau_2.$$

Отсюда в силу обобщенной леммы Гронуолла (см. [5])

$$y(t_1, t_2) \leq L_2 \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 \alpha(\sup_{\xi} \|\Delta v(\tau, \xi)\|) d\tau_2.$$

Таким образом, для $\Delta z(t, x)$ имеем оценку

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq L_2 \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 \alpha(\sup_{\xi} \|\Delta v(\tau, \xi)\|) d\tau_2. \quad (22)$$

Отсюда, в частности, получаем

$$\|\Delta^+ z(t, x)\| \leq L_2 \int_{t_1-\varepsilon q}^{t_1+\varepsilon q} d\tau_1 \int_{t_2-\varepsilon q}^{t_2+\varepsilon q} d\tau_2 \alpha(\sup_{\xi} \|\Delta^* v(\tau, \xi)\|) d\tau_2. \quad (22^*)$$

Если $\bar{M}$ является правильной точкой (см. [3]) для управления $v(M)$, то в силу оценок (21) и (22*) из (16*) получаем, что

$$\Delta^* S = - \{ H[\bar{M}, p(\bar{M}), u(\bar{M}), v^*] - H[\bar{M}, p(\bar{M}), u(\bar{M}), v(\bar{M})] \} \text{mes } G_G + \mu(\varepsilon),$$

где $\frac{\mu(\varepsilon)}{\text{mes } G_G}$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

По предположению управление $v(M)$ минимизирует функционал (4) поэтому $\Delta^* S \geq 0$. Тогда из соотношения (23) следует, что

$$H[\bar{M}, p(\bar{M}), u(\bar{M}), v(\bar{M})] \geq H[\bar{M}, p(\bar{M}), u(\bar{M}), v^*].$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Аналогичные результаты можно получить в случае, когда функционал (4) имеет более общий вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А. И. "Прикладная математика и механика", XXVII, 1963, № 4.
2. Егоров А. И. "Автоматика и телемеханика", т. XXV, 1964, № 5.
3. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., 1965.
4. Гасанов К. К. О решении смешанной задачи для гиперболического уравнения с двумерным временем и начальными условиями Гурса.
5. Berruti Onesti Natalia. Sopra un'estensione del lemma di Gronwall. "Rend. Ist. Lombardo Sci. Lett., Cl., Mat. Nat.", 1957, 91, 643—649.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступило 28. XI 1969

К. Г. Насэнов

Пајланмыш параметрли оптимал идарэтмә нәзәријјәсинин бир мәсәләси һаггында

ХҮЛАСӘ

Ишдә икиөлчүлү заман вә Гурса башлангыч шәртләри дахилиндә кечикән аргументли гиперболик тәнликләр системи илә тәсвир олуна (1)—(3) просесинә бахылыр. Елә идарәдечи u функцијасы ахтарылыр ки, (1)—(3) гарышыг мәсәләсинин һәлли (4) функционалына минимум версин.

Тәдгигатда v идарәдечи функцијасынын (4) функционалына минимум вермәси үчүн зәрури шәрт—Понтрјакинн максимум принципи исбат едилир. Систем хәтти олдугда бу шәрт һәм дә кафидир.

Р. Ю. КЕРИМОВ, Л. П. ХОРОШУН

КОМПЛЕКСНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПЛОСКИХ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В данной статье рассматривается применение комплексных представлений Колосова-Мусхелишвили к решению плоских физически нелинейных задач теории упругости, ползучести и малых упруго-пластических деформаций. Получены комплексные представления для напряжений, перемещений и граничных условий. Решение строится методом последовательных приближений. Исследован характер комплексных потенциалов для случаев многосвязной и бесконечной области. Дана постановка задачи о концентрации напряжений возле криволинейного отверстия в бесконечной плоскости и рассмотрены некоторые примеры для кругового и эллиптического отверстий.

§ 1. Нелинейные зависимости между деформациями и напряжениями в случае плоского напряженного состояния при малых упругих отклонениях от закона Гука, при ползучести и при упруго-пластических деформациях тела можно представить в виде

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[M_1 \sigma_{ij} + M_2 \sigma_{kk} \sigma_{ij} + M_3 \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \right] \quad (i, j = 1, 2), \quad (1)$$

где M_1, M_2 — линейные, M_3 — нелинейные операторы;

$$M_1 = 1, \quad M_2 = \frac{2\mu - 3K}{9K}, \quad M_3 = IT. \quad (2)$$

Для упругого материала, слегка отклоняющегося от закона Гука,

$$M_1 = 1 + \int_0^t \left[\frac{\mu}{\gamma} e^{-\frac{\alpha}{\gamma}(t-\tau)} + 2\mu\beta \right] d\tau,$$

$$M_2 = \frac{2\mu - 3K}{9K} - \frac{1}{3} \int_0^t \left[\frac{\mu}{\gamma} e^{-\frac{\alpha}{\gamma}(t-\tau)} + 2\mu\beta \right] d\tau, \quad M_3 = \delta \int_0^t T^k d\tau \quad (k \geq 1) \quad (3)$$

при неустановившейся ползучести материала;

$$M_1 = 1, \quad M_2 = \frac{2\mu - 3K}{9K}, \quad M_3 = f(T) \quad (4)$$

при малых упруго-пластических деформациях тела. Здесь K, μ — упругие постоянные, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — вязкие постоянные, e — постоянная, характеризующая отклонение упругого материала от закона Гука, $f(T)$ —

функция интенсивности касательных напряжений,

$$T = \frac{2}{9\mu^2} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2). \quad (5)$$

Введем функцию напряжений V и комплексные переменные, тогда напряжения и деформации можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = -4 \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2}; \\ \epsilon_x + \epsilon_y &= \frac{2}{\mu} \left(M_1 + 2M_2 + \frac{1}{3} M_3 \right) \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}}, \\ \epsilon_x - \epsilon_y + 2i\epsilon_{xy} &= \frac{2}{\mu} (M_1 + M_3) \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Из последнего выражения соотношений (6) имеем:

$$\begin{aligned} 4\mu(u + iv) &= M\varphi(z) - 4M_1 \frac{\partial U}{\partial z} - 4 \int M_3 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} \right) d\bar{z}, \\ 4\mu \frac{\partial(u + iv)}{\partial z} &= M\varphi'(z) - 4M_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} - 4 \frac{\partial}{\partial z} \int M_3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} \right) d\bar{z}, \end{aligned} \quad (7)$$

где M — некоторый линейный оператор, $\varphi(z)$ — функция одного z . С другой стороны,

$$4\mu \frac{\partial(u + iv)}{\partial z} = 4(M_1 + 2M_2) \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{4}{3} M_3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} \right) + 2\mu i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (8)$$

Исключая из (7) и (8) $\frac{\partial(u + iv)}{\partial z}$, найдем

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{1}{4} (\widetilde{M_1 + M_2}) M[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + 2(\widetilde{M_1 + M_2}) F(z, \bar{z}), \quad (9)$$

где $\widetilde{M_1 + M_2}$ — оператор, обратный $M_1 + M_2$, и введено обозначение

$$F(z, \bar{z}) = -\operatorname{Re} \left[\frac{\partial}{\partial z} \int M_3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} \right) d\bar{z} + \frac{1}{3} M_3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} \right) \right]. \quad (10)$$

$$\text{Полагая в (9)} \quad M = 8(M_1 + M_2), \quad (11)$$

окончательно будем иметь

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + 8MF(z, \bar{z})]. \quad (12)$$

На основании (12) из (6) и (7) получим

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 \left[\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z) + 8\bar{M} \int \frac{\partial F}{\partial z} d\bar{z} \right], \\ 2\mu(u + iv) &= (3M_1 + 4M_2) \varphi(z) - M_1 [z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}] - \\ &\quad - 8M_1 \bar{M} \int F dz - 2 \int M_3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} \right) d\bar{z}, \end{aligned} \quad (13)$$

а также выражение для главного вектора, действующего на дугу $s_0 s_1$

$$X + iY = -i \left[\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + 8\bar{M} \int F dz \right]_{s_0}^{s_1}. \quad (14)$$

Граничным условием будет

$$\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + 8\bar{M} \int F dz = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + C = f_1 + if_2 + C; \quad (15)$$

для первой основной задачи, когда на контуре заданы компоненты внешних усилий $X_n(s)$, $Y_n(s)$ и

$$(3M_1 + 4M_2) \varphi(z) - M_1 [z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}] - 8M_1 \bar{M} \int F dz - 2 \int M_3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} \right) d\bar{z} = 2\mu (g_1 + g_2), \quad (16)$$

а для второй основной задачи, когда на контуре заданы перемещения $g_1(s)$, $g_2(s)$.

Решение задач будем строить методом последовательных приближений, принимая за первое приближение решение соответствующей линейной задачи. Тогда $n = e$ приближения напряжений и перемещений, согласно (9), (13), определяются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(n)} + \sigma_y^{(n)} &= 2 [\varphi^{(n)'}(z) + \overline{\varphi^{(n)'}(z)} + 8\bar{M} F^{(n-1)}(z, \bar{z})], \\ \sigma_y^{(n)} - \sigma_x^{(n)} + 2i \tau_{xy}^{(n)} &= 2 \left[\bar{z} \varphi^{(n)'}(z) + \psi^{(n)}(z) + 8\bar{M} \int \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial z} d\bar{z} \right], \\ 2\mu(u^{(n)} + i v^{(n)}) &= (3M_1 + 4M_2) \varphi^{(n)}(z) - M_1 [z \overline{\varphi^{(n-1)'}}(z) + \overline{\psi^{(n)}(z)}] - 8M_1 \bar{M} \int F^{(n-1)} dz - 2 \int M_3^{(n-1)} \left(\frac{\partial^2 V^{(n-1)}}{\partial \bar{z}^2} \right) d\bar{z}, \end{aligned} \quad (17)$$

где комплексные потенциалы $\varphi^{(n)}(z)$, $\psi^{(n)}(z)$ в случае задачи I определяются из граничного условия

$$\varphi^{(n)}(z) + z \overline{\varphi^{(n)'}(z)} + \psi^{(n)}(z) = f_1 + i f_2 - 8\bar{M} \int F^{(n-1)} dz + C, \quad (18)$$

в случае задачи II из граничного условия

$$\begin{aligned} (3M_1 + 4M_2) \varphi^{(n)}(z) - M_1 [z \overline{\varphi^{(n-1)'}}(z) + \overline{\psi^{(n)}(z)}] = \\ 2\mu(g_1 + g_2) - 8M_1 \bar{M} \int F^{(n-1)} dz + 2 \int M_3^{(n-1)} \left(\frac{\partial^2 V^{(n-1)}}{\partial \bar{z}^2} \right) d\bar{z}. \end{aligned} \quad (19)$$

§ 2. Рассмотрим область, ограниченную простыми замкнутыми контурами $L_1, \dots, L_m, L_{m+1}$, из которых последний охватывает все предыдущие, и исследуем характер многозначности комплексных потенциалов $\varphi^{(n)}(z)$ и $\psi^{(n)}(z)$. Напряжения являются однозначными функциями при обходе по замкнутому контуру, поэтому неоднозначность выражения (10) может появиться только за счет операции интегрирования:

$$\int M_3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} \right) d\bar{z} = - \sum_{k=1}^m q_{1k}^{(n)}(z) \ln(z - z_k) + R_1(z, z). \quad (20)$$

Следовательно, функция $F^{(n)}(z, \bar{z})$ может быть представлена в виде

$$F^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m [q_{1k}^{(n)'}(z) \ln(z - z_k) + \overline{q_{1k}^{(n)'}(z)} \ln(z - z_k)] + R_2^{(n)}(z, \bar{z}). \quad (21)$$

Здесь z_k — точка внутри контура L_k , $q_{1k}^{(n)}$ — голоморфная функция $R_1(z, \bar{z})$, $R_2(z, \bar{z})$ — однозначные функции в рассматриваемой области. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \int F^{(n)} dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m [z \overline{q_{1k}^{(n)'}(z)} \ln(z - z_k) + q_{1k}^{(n)}(z) \ln(z - z_k) + \\ + \overline{q_{2k}^{(n)}(z)} \ln(z - z_k)] + R_3^{(n)}(z, \bar{z}). \end{aligned} \quad (22)$$

$$\int \frac{\partial F^{(n)}}{\partial z} d\bar{z} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m [q_{1k}^{(n)'}(z) \bar{z} \ln(z - z_k) + q_{2k}^{(n)'}(z) \ln(z - z_k)] + R_4^{(n)}(z, \bar{z}),$$

где $R_2^{(n)}(z, \bar{z})$, $R_3^{(n)}(z, \bar{z})$ — однозначные функции.

Принимая во внимание (21), (22), из условия однозначности напряжений (12), (13) найдем

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)'}(z) &= 4\bar{M} \sum_{k=1}^m q_{1k}^{(n-1)'}(z) \ln(z - z_k) + \Phi_k^{(n)}(z), \\ \psi^{(n)'}(z) &= 4\bar{M} \sum_{k=1}^m q_{2k}^{(n-1)'}(z) \ln(z - z_k) + \Psi_k^{(n)}(z). \end{aligned} \quad (23)$$

Следовательно, комплексные потенциалы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(z) &= 4\bar{M} \sum_{k=1}^m q_{1k}^{(n-1)}(z) \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^m N_k^{(n)}(z - z_k) + \varphi_k^{(n)}(z), \\ \psi^{(n)}(z) &= 4\bar{M} \sum_{k=1}^m q_{2k}^{(n-1)}(z) \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^m N_k^{(n)} \ln(z - z_k) + \psi_k^{(n)}(z), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\Phi_k^{(n)}(z)$, $\Psi_k^{(n)}(z)$, $\varphi_k^{(n)}(z)$, $\psi_k^{(n)}(z)$ — голоморфные функции, $N_k^{(n)}$, $N_k^{(n)}$ — некоторые операторы (не пространственные), которые могут содержать комплексные постоянные.

Из условия однозначности комплексного перемещения, (17) и выражения для главного вектора (14) при обходе каждого из контуров L_k найдем

$$N_k^{(n)} = -\frac{1}{\pi} \bar{M} M_1 (X_k + i Y_k), \quad N_k^{(n)} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \bar{M} M_1 \right) (X_k - i Y_k). \quad (25)$$

Рассмотрим случай, когда контур L_{m+1} целиком уходит в бесконечность. Опишем из начала координат окружность L_R , которая охватывает все контуры. Напряжения на бесконечности ограничены, поэтому, как следует из вида оператора M_3 в (2), (3), (4), функции $q_{1k}^{(n)}(z)$, $q_{2k}^{(n)}(z)$ будут голоморфны вне L_R , включая бесконечно удаленную точку, т. е. при больших $|z|$ они будут иметь разложения:

$$q_{1k}^{(n)}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_{kr}^{(n)}}{z^r}, \quad q_{2k}^{(n)}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_{kr}^{(n)}}{z^r}. \quad (26)$$

Функции $\varphi_k^{(n)}(z)$, $\psi_k^{(n)}(z)$ из (24) будут иметь вид:

$$\varphi_k^{(n)}(z) = \Gamma_n z + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r^{(n)}}{z^r}, \quad \psi_k^{(n)}(z) = \Gamma_n z + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r^{(n)}}{z^r}. \quad (27)$$

Тогда комплексные потенциалы (24) при больших $|z|$ будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(z) &= \sum_{k=1}^m (a_{k0}^{(n-1)} + N_k) \ln z + \Gamma_n z + \varphi_0^{(n)}(z), \\ \psi^{(n)}(z) &= \sum_{k=1}^m (b_{k0}^{(n-1)} + N_k') \ln z + \Gamma_n z + \psi_0^{(n)}(z), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\varphi_0^{(n)}(z)$, $\psi_0^{(n)}(z)$ — функции, голоморфные вне L_R , включая бесконечно удаленную точку. Не изменяя напряженного состояния, можем поло-

$$\varphi_0^{(n)}(\infty) = \psi_0^{(n)}(\infty) = 0, \quad I_m \Gamma_n = 0. \quad (29)$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{8} \bar{M} F^{(n)}(z, \bar{z}) = Q_n \quad \text{при } |z| = \infty, \quad (30)$$

$$\frac{1}{8} \bar{M} \int \frac{\partial F^{(n)}}{\partial z} d\bar{z} = Q_n' \quad \text{при } |z| = \infty,$$

тогда из выражений (17), (28), (30) при $|z| = \infty$ найдем

$$\operatorname{Re} \Gamma_n = \frac{1}{4} (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) - \frac{1}{2} Q_{n-1},$$

$$\Gamma_n' = \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + 2i \tau_{xy}^\infty) - Q_{n-1}'. \quad (31)$$

§ 3. Пусть напряженное состояние неограниченной плоскости характеризуется напряжениями

$$\sigma_x^* + \sigma_y^* = 2 [\varphi_{1*}'(z) + \overline{\varphi_{1*}'(z)} + \bar{M} F_{1*}'(z, \bar{z})],$$

$$\sigma_y^* - \sigma_x^* + 2i \tau_{xy}^* = 2 \left[\bar{z} \varphi_{1*}'(z) + \psi_{1*}'(z) + 8 \bar{M} \int \frac{\partial F_{1*}'}{\partial z} d\bar{z} \right]. \quad (32)$$

Если в плоскости сделать отверстие, то будем иметь новое распределение напряжений $n = e$ приближения которых определяются согласно (17) формулами:

$$\sigma_x^{(n)} + \sigma_y^{(n)} = 2 [\varphi_1^{(n)'}(z) + \overline{\varphi_1^{(n)'}(z)} + 8 \bar{M} F_1^{(n-1)'}(z, \bar{z})],$$

$$\sigma_y^{(n)} - \sigma_x^{(n)} + 2i \tau_{xy}^{(n)} = 2 \left[\bar{z} \varphi_1^{(n)'}(z) + \psi_1^{(n)'}(z) + 8 \bar{M} \int \frac{\partial F_1^{(n-1)'}}{\partial z} d\bar{z} \right] \quad (33)$$

и на бесконечности принимают значения (32).

Принимая во внимание (30), комплексные потенциалы $\varphi_1^{(n)}(z)$, $\psi_1^{(n)}(z)$ можем представить в виде:

$$\varphi_1^{(n)}(z) + \varphi_{10}^{(n)}(z) + \varphi_{1*}'(z) + \frac{1}{2} (Q_* - Q_{n-1}) z,$$

$$\psi_1^{(n)}(z) = \psi_{10}^{(n)}(z) + \psi_{1*}'(z) + (Q_*' - Q_{n-1}') z, \quad (34)$$

где $\varphi_{10}^{(n)}(z)$, $\psi_{10}^{(n)}(z)$ — голоморфные функции, обращающиеся в нуль на бесконечности. Тогда задача сводится к отысканию функций $\varphi_{10}^{(n)}(z)$, $\psi_{10}^{(n)}(z)$, удовлетворяющих на контуре отверстия условию

$$\varphi_{10}^{(n)}(z) + z \overline{\varphi_{10}^{(n)'}}(z) + \overline{\psi_{10}^{(n)'}}(z) = f_{11}^{(n-1)}(z) + i f_{12}^{(n-1)}(z), \quad (35)$$

где приведенная контурная нагрузка имеет вид

$$f_{11}^{(n-1)}(z) + i f_{12}^{(n-1)}(z) = f_{11}(s) + i f_{12}(s) - [\varphi_{1*}'(z) + z \overline{\varphi_{1*}'(z)} + \psi_{1*}'(z) + z (Q_* - Q_{n-1}) + z (Q_*' - Q_{n-1}') + 8 \bar{M} \int F_1^{(n-1)} dz]. \quad (36)$$

Пусть функция

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{2} + Q_1 \zeta + \dots + Q_n \zeta^n \right) \quad (37)$$

конформно отображает плоскость вне отверстия на внутренность единичного круга. Переходя к преобразованной плоскости $\zeta = \rho e^{i\theta}$, получим следующие выражения для напряжений и перемещений:

$$\sigma_\rho^{(n)} + \sigma_\theta^{(n)} = 2 \left[\Phi^{(n)}(\zeta) + \overline{\Phi^{(n)}(\zeta)} + 8 \bar{M} F^{(n-1)}(\zeta, \bar{\zeta}) \right]$$

$$\sigma_\theta^{(n)} - \sigma_\rho^{(n)} + 2i \tau_\theta^{(n)} = 2 \frac{\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \left[\overline{\omega(\zeta)} \Phi^{(n)'}(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi^{(n)}(\zeta) + 8 \bar{M} \int \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial \sigma} \overline{\omega'(\zeta)} d\bar{\zeta} \right]; \quad (38)$$

$$2 \mu (u_\rho^{(n)} + i v_\theta^{(n)}) = \frac{\zeta \overline{\omega'(\zeta)}}{\rho |\omega'(\zeta)|} \left\{ (3M_1 + 4M_2) \varphi^{(n)}(\zeta) - M_1 \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi^{(n)'}(\zeta) + \psi^{(n)}(\zeta) \right] - 8M_1 \bar{M} \int F^{(n-1)} \omega(\zeta) d\zeta - \right.$$

$$\left. - 2 \int M_3^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial \zeta} \frac{1}{\omega'(\zeta)} \right] d\bar{\zeta} \right\},$$

где введены обозначения

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta),$$

$$\psi_1[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta), \quad F_1[\omega(\zeta)] = F(\zeta). \quad (39)$$

Комплексные потенциалы (34) и условия на контуре (35), (36) в преобразованной плоскости соответственно будут:

$$\varphi^{(n)}(\zeta) = \varphi_0^{(n)}(\zeta) + \varphi_*(\zeta) + \frac{1}{2} (Q_* - Q_{n-1}) \omega(\zeta), \quad (40)$$

$$\psi^{(n)}(\zeta) = \psi_0^{(n)}(\zeta) + \psi_*(\zeta) + (Q_*' - Q_{n-1}') \omega(\zeta),$$

$$\varphi_0^{(n)}(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0^{(n)'}}(\sigma) + \overline{\psi_0^{(n)'}}(\sigma) = f_1^{(n-1)}(\sigma) + i f_2^{(n-1)}(\sigma) + C, \quad (41)$$

$$f_1^{(n-1)}(\sigma) + i f_2^{(n-1)}(\sigma) = f_1(\sigma) + i f_2(\sigma) - \left[\varphi_*(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_*'(\sigma)} + \right.$$

$$\left. + \overline{\psi_*'(\sigma)} + \omega(\sigma) (Q_* - Q_{n-1}) + \overline{\omega(\sigma)} (Q_*' - Q_{n-1}') + 8 \bar{M} \int F^{(n-1)} \omega(\zeta) d\zeta \right]. \quad (42)$$

Здесь $\sigma = e^{i\theta}$ — точка единичной окружности.

Граничное условие (41) заменяем [3] двумя равносильными функциональными уравнениями:

$$\varphi_0^{(n)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_1^{(n-1)} + i f_2^{(n-1)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi_0^{(n)'}}(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \overline{\varphi_0^{(n)}}(\zeta),$$

$$\psi_0^{(n)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_1^{(n-1)} - i f_2^{(n-1)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\psi_0^{(n)'}}(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma. \quad (43)$$

Таким образом, задача об определении концентрации напряжений возле криволинейного отверстия в n -ом приближении сводится к отысканию функций $\varphi_0^{(n)}(\zeta)$, $\psi_0^{(n)}(\zeta)$ из функциональных уравнений (43) с последующим определением напряжений по формулам (38), если контур отверстия определяется выражением

$$\sigma_\theta^{(n)} = 2 \left[\frac{\varphi_0^{(n)'}(\sigma) + \varphi_*'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} + \frac{\overline{\varphi_0^{(n)'}}(\sigma) + \overline{\varphi_*'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} + (Q_* - Q_{n-1}) + 8 \bar{M} F^{(n-1)} \right]. \quad (44)$$

§ 4. Рассмотрим некоторые задачи концентрации напряжений возле кругового и эллиптического отверстий при упругой физической нелинейности и ползучести материала. При этом в выражении оператора M_3 из соотношений (3) положим $K = 1$, что соответствует многим реальным материалам, и введем обозначения:

$$x_{1,2} = \frac{-(3\alpha + E + 2\beta\gamma E) \pm \sqrt{(3\alpha + E + 2\beta\gamma E)^2 - 24\alpha\beta\gamma E}}{6\gamma},$$

$$E = \frac{9K\mu}{\mu + 3K}, \quad a = \frac{\alpha + \gamma x_1}{\gamma(x_1 - x_2)}, \quad b = \frac{\alpha + \gamma x_2}{\gamma(x_2 - x_1)}, \quad (45)$$

$$\varphi(t) = \frac{a}{x_1}(e^{x_1 t} - 1) + \frac{b}{x_2}(e^{x_2 t} - 1).$$

Нагрузку будем считать постоянной во времени.

1. Плоскость с круговым отверстием радиуса R при всестороннем растяжении на бесконечности ($\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = p$, $\tau_{xy}^\infty = 0$) и постоянном равномерном нормальном давлении на контуре $\sigma_r = -P$. Отображающая функция будет

$$\omega(\zeta) = R \frac{1}{\zeta}. \quad (46)$$

Первое приближение представляет решение соответствующей линейной задачи и будет одинаковым для двух случаев (2) и (3):

$$\varphi^1(\zeta) = \frac{Rp}{2} \frac{1}{\zeta}, \quad \psi^1(\zeta) = -R(P+p)\zeta. \quad (47)$$

Прделав все операции, указанные в предыдущем параграфе, найдем вторые приближения комплексных потенциалов (40):

$$\varphi^{(2)}(\zeta) = \frac{pR}{2\zeta} + \frac{IKp^3}{12(3K+\mu)\mu^2} \frac{R}{\zeta},$$

$$\psi^{(2)}(\zeta) = -(P+p)\zeta - \frac{IKR}{2(3K+\mu)\mu^2} \left[p(P+p)^2 + (P+p)^3 \right] \zeta \quad (48)$$

при упругой нелинейности материала и

$$\varphi^{(2)}(\zeta) = -\frac{pR}{2\zeta} + \frac{\delta Ep^3}{54\mu^2} \frac{R}{\zeta} \Omega(t), \quad (49)$$

$$\psi^{(2)}(\zeta) = -(P+p)\zeta - \frac{\delta Ep^3}{9\mu^2} [p(P+p)^2 + (P+p)^3] \zeta \Omega(t)$$

при установившейся ползучести материала. Окончательно на контуре отверстия найдем по формулам (38) соответствующие напряжения:

$$\sigma_\theta^{(2)} = 2p + P - \frac{IK}{(3K+\mu)\mu^2} [p(P+p)^2 + 2(P+p)^3],$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = 2p + P - \frac{2\delta E}{9\mu^2} [p(P+p)^2 + 2(P+p)^3] \Omega(t). \quad (50)$$

2. Плоскость с круговым отверстием при одноосном растяжении. Максимальные напряжения $\sigma_\theta^{(2)}$ на контуре отверстия соответственно будут:

$$\sigma_\theta^{(2)} = 3p - \frac{8683 Klp^3}{840(\mu + 3K)\mu^2},$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = 3p - \frac{8683 \delta Ep^3}{3780\mu^2} \Omega(t). \quad (51)$$

3. Плоскость с круговым отверстием при чистом сдвиге. Максимальные напряжения $\sigma_\theta^{(2)}$ на контуре отверстия для соответствующих материалов:

$$\sigma_\theta^{(2)} = 4p - \frac{165 Klp^3}{7(3K+\mu)\mu^2},$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = 4p - \frac{110 \delta Ep^3}{21\mu^2} \Omega(t).$$

4. Всестороннее растяжение плоскости с эллиптическим отверстием. Считаем, что эксцентриситет эллиптического отверстия m мал настолько, что можно пренебречь членами, содержащими m в третьей степени и выше. С этой точностью находим напряжение $\sigma_\theta^{(2)}$ на контуре отверстия соответственно при упругой нелинейности и ползучести материала:

$$\sigma_\theta^{(2)} = 2p(1 + 2m \cos 2\theta + 2m^2 \cos 4\theta) -$$

$$- \frac{Klp^3}{(3K+\mu)\mu^2} \left[3 + \frac{302}{5} m \cos 2\theta + m^2(20 + \frac{3656}{105} \cos 4\theta) \right], \quad (52)$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = 2p(1 + 2m \cos 2\theta + 2m^2 \cos 4\theta) -$$

$$- \frac{2\delta Ep^3}{9\mu^2} \left[3 + \frac{302}{5} m \cos 2\theta + m^2(20 + \frac{3656}{105} \cos 4\theta) \right] \Omega(t).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. ИИЛ, 1961.
2. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГТТЛ, 1951.
4. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. Физматгиз, 1961.
5. Цурпал И. А. „Прикладная механика“, т. VIII, вып. 2, 1962.

Институт механики АН УССР

Поступило 1. IV 1970

Р. Я. Кәрімов, Л. П. Хорошун

Бәрк чисимләр механикасынын физики гејри-хәтти
мәсәләсинин комплекс шәкилдә көстәрилмәси

ХҮЛАСӘ

Гојулан мәсәлә ардычыл јахынлашма методу илә ики һоломорф $\varphi^{(n)}(z)$, $\psi^{(n)}(z)$ функцијаларынын (40), (35), (36) вә (43) сәрһәд шәртләри даһилиндә тәјјининә кәтирилмишдир. Нәһајәт даирә вә еллипс шәклиндә зәифләдилмиш сонсуз лөвһәдә кәркинлик косентрасијасынын тәдгигинә даир мисаллара бахылмишдир.

Н. Т. АББАСОВ и Т. Г. ОРЛОВСКАЯ

СТРУКТУРА АЛГЕБР КВАЗИАЛЬТЕРНИОНОВ И ОСНОВНАЯ ИНВОЛЮЦИЯ В ЭТИХ АЛГЕБРАХ

Ранее [1, 2] нами была найдена структура алгебр альтернионов A_n и антиальтернионов 1A_n и выражения основной инволюции в этих алгебрах. Настоящая статья посвящена определению структуры алгебр квазиальтернионов A_n^m и выражения основной инволюции этих алгебр (§ 1 и 3 написаны Н. Т. Аббасовым, § 2 — Т. Г. Орловской).

§ 1. Алгебры квазиальтернионов

Первая попытка построения алгебры, с помощью которой можно было бы определить спинорные представления групп движений квазиэллиптических пространств S_n^m , была предпринята Н. Т. Аббасовым [3], однако построенная им алгебра позволяла определить спинорные группы не для полных групп движений пространств S_n^m , а только для некоторых их подгрупп. Алгебры, с помощью которых можно определить спинорные представления полных групп движений пространств S_n^m , были построены позже Т. Г. Орловской [4] и названы алгебрами квазиальтернионов A_n^m . Алгебра A_n^m является квазипростой алгеброй [4], получаемой из алгебры A_n альтернионов следующим предельным переходом: при инволюционном автоморфизме алгебры A_n , порождаемом преобразованием $e_a \rightarrow e_a$, $e_u \rightarrow -e_u$ ($a = 1, \dots, m$, $n = m+1, \dots, n$), часть базисных элементов $e_{i_1, \dots, i_k}$ остается инвариантной, а часть умножается на 1 (антиинвариантные элементы). Не изменяя структурных констант, определяемых разложениями по базисным элементам произведений двух инвариантных базисных элементов и произведений инвариантного базисного элемента на антиинвариантный, и умножая структурные константы, определяемые произведениями двух антиинвариантных элементов, на t , при $t \neq 0$ получим алгебру, изоморфную алгебре A_n , а при $t = 0$ получим новую алгебру — A_n^m . Ту же алгебру аналогичным предельным переходом можно получить из алгебры антиальтернионов 1A_n , у которых $e_a^2 = -1$, $e_n^2 = 1$. Применяя эти предельные переходы к алгебрам A_2 и 1A_2 изоморфных чисел относительно инволюционного автоморфизма $\alpha \rightarrow \alpha$ этих алгебр, получим алгебры A_2^0 изоморфную алгебре $R(\cdot)$ дуальных чисел. Применяя эти предельные переходы к алгебрам A_3 и 1A_3 , изоморфным соответственно телу $R(i, j)$ кватернионов и алгебре $R(i, e)$ антиква-

тернионов, изоморфной алгебре R_2 вещественных матриц второго порядка относительно инволюционного автоморфизма $\alpha \rightarrow i \alpha i^{-1}$ этих алгебр, получим алгебру A_3^0 , изоморфную алгебре $R(i, \epsilon)$ полукватернионов. Применяя эти предельные переходы к алгебре R_n вещественных матриц n -го порядка относительно инволюционного автоморфизма $\alpha \rightarrow E \alpha E$, где $E = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_{n-m} \end{pmatrix}$, причем I_m и I_{n-m} — единич-

ные подматрицы m -го и $(n-m)$ -го порядков, получим алгебру R_n^m квазиматриц, определенную М. П. Замаховским [4]. Алгебра R_2^1 изоморфна алгебре $R(e, \epsilon)$ полуантикватернионов, получаемой из алгебры $R(i, e)$ предельным переходом относительно инволюционного автоморфизма $\alpha \rightarrow e \alpha e$. Так как всякая простая вещественная алгебра изоморфна алгебре вещественных матриц R_n , алгебре комплексных матриц $R_n(i)$ и алгебре кватернионных матриц $R_n(i, j)$, всякая квазипростая алгебра, получаемая аналогичным предельным переходом из простой алгебры, соответственно изоморфна: 1) алгебре R_n^m квазиматриц и алгебре $R_{\frac{n}{2}}^m(i, \epsilon)$ полукватернионных матриц, 2) алгебре,

$R_n^m(i)$ комплексных квазиматриц, алгебре $R_n(e)$ дуальных матриц алгебре $R_{\frac{n}{2}}^m(i, j, \epsilon)$ матриц над дуокватернионами (дуальными кватернионами), 3) алгебре $R_n^m(i, j)$ кватернионных квазиматриц и алгебре $R_n(i, \epsilon)$ полукватернионных матриц [4].

Базис алгебры A_n^m , так же как базис алгебр A_n и 1A_n состоит из элементов $1, e_1, \dots, e_{n-1}$ и $e_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ ($i_a = 1, 2, \dots, n-1$) причем элементы $e_{i_1, \dots, i_k}$ кососимметричны по всем своим индексам, $e_a^2 = -1$, $e_n^2 = 0$ и в том случае, когда произведение $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} \neq 0$, это произведение равно элементу $e_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, однако $e_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ может быть отлично от 0 и в случае когда $e_{i_1} \cdot e_{i_2} \dots e_{i_k} = 0$.

Произвольный квазиальтернион может быть записан в виде

$$\alpha = a + \sum_i a^i e_i + \sum_{i,j} a^{ij} e_{ij} + \dots + \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} a^{i_1 \dots i_k} e_{i_1 \dots i_k} + \dots + a^{1^2 \dots n-1} e_{1^2 \dots n-1}. \quad (1)$$

Основной инволюцией алгебры A_n^m является переход квазиальтерниона (1) в квазиальтернион

$$\bar{\alpha} = a - \sum_i a^i e_i + \dots + \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} a^{i_1 \dots i_k} e_{i_1 \dots i_k} + \dots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{1^2 \dots n-1} e_{1^2 \dots n-1}. \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$, $\overline{\alpha \beta} = \bar{\beta} \bar{\alpha}$, $\overline{\alpha \alpha} = \alpha$. Так как алгебры A_n и 1A_n являются простыми или полупростыми, представляющими собой прямые суммы двух изоморфных простых, каждая алгебра A_n^m изоморфна одной из указанных нами квазипростых алгебр или прямой сумме двух изоморфных алгебр этого вида.

§ 2. Структура алгебр квазиальтернионов

Структура алгебр A_n^m может быть получена применением рассматриваемого нами предельного перехода к структуре алгебр A_n и A_n . Как мы видели в работах [1, 2], алгебры A_n и A_n при нечетном n изоморфны тензорному произведению алгебр $R(i, j)$ кватернионов и алгебр R_2 вещественных матриц второго порядка, а при четном n алгебр R_2 вещественных матриц второго порядка, а при четном n алгебр $R(i)$ комплексных чисел или алгебры $R(e)$ двойных чисел. При нашем предельном переходе некоторые тензорные сомножители $R(i, j)$ или R_2 переходят в алгебру $R(i, \epsilon)$ полукватернионов, некоторые тензорные сомножители R_2 переходят в алгебру R_2^1 квазиматриц, а некоторые тензорные сомножители $R(i)$ и $R(e)$ переходят в алгебру $R(\epsilon)$ дуальных чисел, однако в силу того, что A_n^m могут быть только квазипростыми алгебрами указанного вида, среди тензорных сомножителей алгебр A_n^m не может быть более одного квазипростого сомножителя.

Можно показать следующее: 1) Квазипростая алгебра, получающаяся предельным переходом из алгебры $\prod_{\alpha=1}^n R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^n R(i_\beta, e_\beta)$ (П — знак тензорного произведения), по отношению к инволюционному автоморфизму $i_\alpha \rightarrow -i_\alpha, i_\beta \rightarrow i_\beta, j_\alpha \rightarrow -j_\alpha, j_\beta \rightarrow -j_\beta$ изоморфна алгебре $\prod_{\alpha=1}^n R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{n-1} R(i_\beta, l_\beta) \times R(e, \epsilon)$. 2) Квазипростая алгебра, получающаяся предельным переходом из алгебры $\prod_{\alpha=1}^n R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{n+1} R(i_\beta, e_\beta)$, по отношению к инволюционному автоморфизму $i_\alpha \rightarrow -i_\alpha, j_\alpha \rightarrow -j_\alpha, i_\beta \rightarrow i_\beta, e_\beta \rightarrow -e_\beta$ изоморфна алгебре $\prod_{\alpha=1}^n R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^n R(i_\beta, e_\beta) \times R(i, \epsilon)$. 3) Квазипростая алгебра, получающаяся предельным переходом из алгебры $\prod_{\alpha=1}^{n+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^n R(i_\beta, e_\beta)$, по отношению к инволюционному автоморфизму $i_\alpha \rightarrow -i_\alpha, j_\alpha \rightarrow -j_\alpha, i_\beta \rightarrow i_\beta, e_\beta \rightarrow -e_\beta$ изоморфна алгебре $\prod_{\alpha=1}^n R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^n R(i_\beta, e_\beta) \times R(i, \epsilon)$. 4) Квазипростая алгебра, получающаяся предельным переходом из алгебры $\prod_{\alpha=1}^n R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^n R(i_\beta, i_\beta) \times R(\theta)$ ($\theta = i$ или e), по отношению к инволюционному автоморфизму $i_\alpha \rightarrow -i_\alpha, i_\alpha \rightarrow -i_\alpha, i_\beta \rightarrow i_\beta, e_\beta \rightarrow -e_\beta, \theta \rightarrow -\theta$ изоморфна алгебре $\prod_{\alpha=1}^n R(i_\alpha, i_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^n R(i_\beta, e_\beta) \times R(\epsilon)$. 5) Квазипростая алгебра, получающаяся предельным переходом из алгебры $\prod_{\alpha=1}^n R(i_\alpha, i_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{n+1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(\theta)$, по отношению к инволюционному автоморфизму $i_\alpha \rightarrow -i_\alpha, j_\alpha \rightarrow -j_\alpha, i_\beta \rightarrow i_\beta, e_\beta \rightarrow -e_\beta, \theta \rightarrow -\theta$ изоморфна алгебре $\prod_{\alpha=1}^n R(i_\alpha, i_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^n R(i_\beta, e_\beta) \times R(\epsilon)$. 6) Квазипростая

алгебра, получающаяся предельным переходом из алгебры $\prod_{\alpha=1}^{n+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^n R(i_\beta, e_\beta) \times R(\theta)$, по отношению к инволюционному автоморфизму $i_\alpha \rightarrow -i_\alpha, i_\alpha \rightarrow -i_\alpha, i_\beta \rightarrow i_\beta, e_\beta \rightarrow -e_\beta, \theta \rightarrow -\theta$ изоморфна алгебре $\prod_{\alpha=1}^{n+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^n R(i_\beta, e_\beta) \times R(\epsilon)$.

Можно показать также, что тензорное произведение алгебры квазиматриц R_k^h и алгебры матриц R_l изоморфно алгебре квазиматриц R_{kl}^h . Из изоморфизма алгебр A_n^m и A_n^{n-m-2} вытекает изоморфизм алгебр A_n^m и A_n^{n-m-2} .

В силу [1] алгебры A_n изоморфны тензорным произведениям:

$$\begin{aligned} A_{8m+1} &= \prod_{\alpha=1}^{2m} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) = R_{24m}, \\ A_{8m+2} &= \prod_{\alpha=1}^{2m} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(i) = R_{24m}(i), \\ A_{8m+3} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) = R_{24m}(i, j), \\ A_{8m+4} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(e) = R_{24m}(i, j, E), \\ A_{8m+5} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m+1} R(i_\beta, e_\beta) = R_{24m+1}(i, j), \\ A_{8m+6} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m+1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(i) = R_{24m+2}(i), \\ A_{8m+7} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+2} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m+1} R(i_\beta, e_\beta) = R_{24m+3}, \\ A_{8m+8} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+2} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m+1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(e) = R_{24m+3}(e). \end{aligned}$$

Из приведенных нами вспомогательных теорем вытекает, что алгебры A_n^m изоморфны тензорным произведениям:

$$\begin{aligned} A_{8m+1}^{4l} &= A_{8m+1}^{4l+3} = \prod_{\alpha=1}^{2m} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m-1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(e, \epsilon) = R_{24m}^{24m-1}, \\ A_{8m+1}^{4l+1} &= A_{8m+1}^{4l+2} = \prod_{\alpha=1}^{2m} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m-1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(i, \epsilon) = R_{24m-1}(i, \epsilon), \\ A_{8m+2}^{4l} &= \prod_{\alpha=1}^{2m} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(\epsilon) = R_{24m}(\epsilon), \\ A_{8m+2}^{4l+1} &= A_{8m+2}^{4l+3} = \prod_{\alpha=1}^{2m} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m-1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(e, \epsilon) \times \\ &\quad \times R(i) = R_{24m}^{24m-1}(i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{8m+2}^{4l+2} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m-1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(\varepsilon) = R_{2^{4m-1}}(i, j, \varepsilon), \\
A_{8m+3}^{4l} &= A_{8m+3}^{4l+1} = \prod_{\alpha=1}^{2m} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(i, \varepsilon) = R_{2^{4m}}(i, \varepsilon), \\
A_{8m+3}^{4l+2} &= A_{8m+3}^{4l+3} = \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m-1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(e, \varepsilon) = R_{2^{4m}}^{2^{4m-1}}(i, j), \\
A_{8m+4}^{4l} &= A_{8m+4}^{4l+2} = \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(\varepsilon) = R_{2^{4m}}(i, j, \varepsilon), \\
A_{8m+4}^{4l+1} &= \prod_{\alpha=1}^{2m} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(i, \varepsilon) \times R(e) = R_{2^{4m}}(i, \varepsilon, E), \\
A_{8m+4}^{4l+3} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m-1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(e, \varepsilon) = R(e) = R_{2^{4m}}^{2^{4m-1}}(i, j, E), \\
A_{8m+5}^{4l} &= A_{8m+5}^{4l+3} = \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(e, \varepsilon) = R_{2^{4m+1}}^{2^{4m}}(i, j), \\
A_{8m+5}^{4l+1} &= A_{8m+5}^{4l+2} = \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(i, \varepsilon) = R_{2^{4m+1}}(i, \varepsilon), \\
A_{8m+6}^{4l} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m+1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(\varepsilon) = R_{2^{4m+1}}(i, j, \varepsilon), \\
A_{8m+6}^{4l+1} &= A_{8m+6}^{4l+3} = \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(e, \varepsilon) \times \\
&\quad \times R(i) = R_{2^{4m+2}}^{2^{4m+1}}(i), \\
A_{8m+6}^{4l+2} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+2} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(\varepsilon) = R_{2^{4m+2}}(\varepsilon), \\
A_{8m+7}^{4l} &= A_{8m+7}^{4l+1} = \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m+1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(i, \varepsilon) = R_{2^{4m+2}}(i, \varepsilon), \\
A_{8m+7}^{4l+2} &= A_{8m+7}^{4l+3} = \prod_{\alpha=1}^{2m+2} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(e, \varepsilon) \times R_{2^{4m+3}}^{2^{4m+2}}, \\
A_{8m+8}^{4l} &= A_{8m+8}^{4l+2} = \prod_{\alpha=1}^{2m+2} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m+1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(e) = R_{2^{4m+3}}(\varepsilon), \\
A_{8m+8}^{4l+1} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+1} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m+1} R(i_\beta, e_\beta) \times R(i, \varepsilon) \times R(e) = R_{2^{4m+2}}(i, \varepsilon, E), \\
A_{8m+8}^{4l+3} &= \prod_{\alpha=1}^{2m+2} R(i_\alpha, j_\alpha) \times \prod_{\beta=1}^{2m} R(i_\beta, e_\beta) \times R(e, \varepsilon) \times R(e) = R_{2^{4m+3}}^{2^{4m+2}}(e).
\end{aligned}$$

§ 3. Основная инволюция

Произведя в алгебрах A_n^m основную инволюцию $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ и выясняя ее действие в каждом из тензорных сомножителей этой алгебры, указанных в § 2, мы получаем, что основная инволюция $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ в алгебре A_n^m имеет вид:

$$\begin{aligned}
A_{8m+1}^{4l+1} &= A_{8m+1}^{4l+2} = R_{2^{4m-1}}(i, \varepsilon), \\
A_{8m+2}^{4l} &= R_{2^{4m}}(\varepsilon), \\
A_{8m+2}^{4l+1} &= A_{8m+2}^{4l+3} = R_{2^{4m}}^{2^{4m-1}}(i), \\
A_{8m+2}^{4l+2} &= R_{2^{4m-1}}(i, j, \varepsilon), \\
A_{8m+3}^{4l} &= A_{8m+3}^{4l+1} = R_{2^{4m}}(i, \varepsilon), \\
A_{8m+3}^{4l+2} &= A_{8m+3}^{4l+3} = R_{2^{4m}}^{2^{4m-1}}(i, j), \\
A_{8m+4}^{4l} &= A_{8m+4}^{4l+2} = R_{2^{4m}}(i, j, \varepsilon), \\
A_{8m+4}^{4l+1} &= R_{2^{4m}}(i, \varepsilon, E), \\
A_{8m+4}^{4l+3} &= R_{2^{4m}}^{2^{4m-1}}(i, j, E), \\
A_{8m+5}^{4l} &= A_{8m+5}^{4l+3} = R_{2^{4m+1}}^{2^{4m}}(i, j), \\
A_{8m+5}^{4l+1} &= A_{8m+5}^{4l+2} = R_{2^{4m+1}}(i, \varepsilon), \\
A_{8m+6}^{4l} &= R_{2^{4m+1}}(i, j, \varepsilon), \\
A_{8m+6}^{4l+1} &= A_{8m+6}^{4l+3} = R_{2^{4m+2}}^{2^{4m+1}}(i), \\
A_{8m+6}^{4l+2} &= R_{2^{4m+2}}(\varepsilon), \\
A_{8m+7}^{4l} &= A_{8m+7}^{4l+1} = R_{2^{4m+2}}(i, \varepsilon), \\
A_{8m+7}^{4l+3} &= A_{8m+7}^{4l+3} = R_{2^{4m}}^{2^{4m-1}}, \\
A_{8m+7}^{4l+2} &= A_{8m+7}^{4l+3} = R_{2^{4m+2}}^{2^{4m+2}}, \\
A_{8m+8}^{4l} &= A_{8m+8}^{4l+2} = R_{2^{4m+3}}(\varepsilon), \\
A_{8m+8}^{4l+1} &= R_{2^{4m+2}}(i, \varepsilon, E), \\
A_{8m+8}^{4l+3} &= R_{2^{4m+3}}^{2^{4m+2}}(e).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &\rightarrow i \bar{\alpha}^T i^{-1}, \\
\alpha &\rightarrow \bar{\alpha}^T, \\
\alpha &\rightarrow \bar{\alpha}^T, \\
\alpha &\rightarrow i \bar{\alpha}^T i^{-1}, \\
\alpha &\rightarrow \bar{\alpha}^T, \\
\alpha &\rightarrow \bar{\alpha}^T, \\
\alpha &\rightarrow \bar{\alpha}^T, \\
\alpha &\rightarrow \bar{\alpha}^T, \\
\alpha &\rightarrow \bar{\alpha}^T, \\
\alpha &\rightarrow i \bar{\alpha}^T i^{-1}, \\
\alpha &\rightarrow \bar{\alpha}^T, \\
\alpha &\rightarrow \bar{\alpha}^T, \\
\alpha &\rightarrow i \bar{\alpha}^T i^{-1}, \\
\alpha &\rightarrow \bar{\alpha}^T,
\end{aligned}$$

$$\alpha \rightarrow \bar{\alpha}^T$$

$$\alpha \rightarrow \bar{\alpha}^T$$

$$\alpha \rightarrow i \bar{\alpha}^T i^{-1}$$

$$\alpha \rightarrow \bar{\alpha}^T$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аббасов Н. Т. „Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. наук“, 1967, № 4.
2. Аббасов Н. Т. „Уч. зап. АГУ, серия физ. матем. наук“, 1970.
3. Аббасов Н. Т. Тр. семинара по вект. и тенз. анализу при МГУ, вып. 11. 1961.
4. Розенфельд Б. А., Замаховский М. П., Орловская Т. Г., Семенова И. Н. „Изв. вузов, математика“, 1969, № 4 (83).

АГУ им. С. М. Кирова

Поступило 15. X 1970

Н. Т. Аббасов, Т. Г. Орловская

Квазиалтернионлар чэбрлэринин структуру вэ һэмин чэбрлэрдэ эсас инволүсијалар

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Н. Т. Аббасов тәрәфиндән өјрәнилмиш алтернионлар вэ антиалтернионлар чэбрлэринин структурларына эсасланараг, квазиалтернионлар чэбрлэринин структурлары верилмишдир. Көмәкчи бир сыра теоремләр исбат олундугдан сонра квазиалтернионлар чэбрлэринин структурлары һаггында үмуми теорем исбат едилмишдир. Ајдынлашмышдыр ки, бахылан чэбрләр, һэгиг, комплекс, икватернион вэ икигат кватернион квазиматрислэри дуал жарымгат, кватернион вэ икигат кватернион матрислэри чэбрлэринэ изоморфдур. Бундан башга, бахылан чэбрлэрдәки эсас инволүсијаларын һэгиги чэбрлэре изоморф олан чэбрлэрдә нә илә тәсвир олундуғу көстәрилмишдир.

Ю. Б. МАМЕДОВ

ОБ ОДНОМ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В данной статье рассматривается задача об оптимальном управлении процессами, которые описываются системой уравнений с частными производными четвертого порядка:

$$-\frac{\partial^4 u_i}{\partial t^2 \partial x^2} = f_i \left(t, x, u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u_i}{\partial t^2 \partial x}, \frac{\partial^3 u_i}{\partial t \partial x^2}, v \right) \quad (1)$$

($i = 1, 2, \dots, n$). Предполагается, что в области $D \left(\begin{matrix} 0 \leq t \leq a \\ 0 \leq x \leq b \end{matrix} \right)$ функции f_i имеют непрерывные производные третьего порядка по t и x и четыре раза непрерывно дифференцируемы по остальным аргументам.

За класс допустимых управлений возьмем множество кусочно-непрерывных и ограниченных функций $v(t, x)$, определенных на области D , и со значениями в некоторой выпуклой области V (открытой или замкнутой) n -мерного Евклидова пространства.

На функции $u_i(t, x)$, определяемые уравнениями (1), и на их производные накладываются дополнительные условия:

$$u_i(t, 0) = \varphi_{i1}(t), \quad u_{ix}(t, 0) = \varphi_{i2}(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq a, \quad (2)$$

$$u_i(0, x) = \psi_{i1}(x), \quad u_{ix}(0, x) = \psi_{i2}(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq b,$$

где функции $\varphi_{i1}(t)$, $\psi_{i1}(x)$, $\varphi_{i2}(t)$, $\psi_{i2}(x)$ непрерывно дифференцируемы по t и x в области D и удовлетворяют условиям сопряжения:

$$\varphi_{i1}(0) = \psi_{i1}(0), \quad \varphi_{i2}(0) = \psi_{i2}(0).$$

В дальнейшем всюду предполагается, что каждому допустимому управлению соответствует класс функций, в котором задача (1)–(2) разрешима однозначно.

Пусть $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ — заданная система вещественных чисел. Возьмем произвольное допустимое управление $v(t, x)$, обозначим через $u(t, x) = \{u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x)\}$ соответствующее ему решение задачи (1)–(2) и рассмотрим функционал

$$S = \sum_{i=1}^n A_i u_i(a, b), \quad (3)$$

где a и b — постоянные, входящие в определение области D . Ставится задача: среди всех допустимых управлений требуется найти такое управление $v(t, x)$ (если оно существует), чтобы на соответствующем

ему решению задачи (1)–(2) функционал S достигал своего наибольшего (наименьшего) значения. В случае, когда система уравнений (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u_i}{\partial t^2 \partial x^2} = & \sum_{j=1}^n \left[a_{ij}(t, x) \frac{\partial^3 u_j}{\partial t^2 \partial x} + b_{ij}(t, x) \frac{\partial^3 u_j}{\partial t \partial x^2} + \dots + \right. \\ & \left. + c_{ij}(t, x) \frac{\partial u_j}{\partial t} + d_{ij}(t, x) \frac{\partial u_j}{\partial x} + g_{ij}(t, x) u_j \right] + f_i(t, x, v), \quad (4) \end{aligned}$$

задачу (1)–(2)–(3) назовем линейной. Для данной задачи получены необходимые, а для линейной системы также и достаточные условия оптимальности принципа максимума Л. С. Понтрягина [1].

В наиболее общей форме задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами ставились в работах А. Г. Бутковского [2] и др. Следует отметить, что управляемая система, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, была исследована А. Н. Егоровым [3]. Следуя Л. И. Розоноэру [4], допустимое управление $v(t, x)$, реализующее максимум (минимум) функционала S , будем называть макс-оптимальным (мин-оптимальным) по S .

Для решения поставленной задачи введем вспомогательные функции $z_1, z_2, \dots, z_n$ при помощи уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 z_1}{\partial t^2 \partial x^2} = & \frac{\partial H}{\partial u_1} - \frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1t}} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1x}} \right)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1t^2}} \right)}{\partial t^2} + \\ & + \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1tx}} \right)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1x^2}} \right)}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1t^2 x}} \right)}{\partial t^2 \partial x} - \frac{\partial^3 \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1tx^2}} \right)}{\partial t \partial x^2} \quad (5) \end{aligned}$$

и дополнительных условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 z_1}{\partial t^2 \partial x} = & - \frac{\partial H}{\partial u_{1x}} + \frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1tx}} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1x^2}} \right)}{\partial x} - \\ & - \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1tx^2}} \right)}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1t^2 x}} \right)}{\partial t^2} \quad \text{при } x = b, \\ \frac{\partial z_1}{\partial t \partial x^2} = & - \frac{\partial H}{\partial u_{1t}} + \frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1tx}} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1t^2}} \right)}{\partial t} - \\ & - \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1t^2 x}} \right)}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1tx^2}} \right)}{\partial x^2} \quad \text{при } t = a, \quad (6) \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = & \frac{\partial H}{\partial u_{1x^2}} - \frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1tx^2}} \right)}{\partial t} \quad \text{при } x = b, \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = & \frac{\partial H}{\partial u_{1t^2}} - \frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial u_{1t^2 x}} \right)}{\partial x} \quad \text{при } t = a, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial^2 z_i}{\partial t \partial x} \right|_{\substack{t=a \\ x=b}} = -A_i,$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial u_i t x^2}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial u_i t^2 x} \text{ при } x=b, t=a$$

где A_i —постоянные, входящие в определение функционала S ,

$$H(z, p, v) = \sum_{m=1}^n z_m f_m(t, x, p, v), \quad (7)$$

$$P = \left\{ u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u_i}{\partial t^2 \partial x}, \frac{\partial^3 u_i}{\partial t \partial x^2} \right\},$$

$$z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть $v(t, x)$ —произвольное допустимое управление, а $u(t, x)$ и $z(t, x)$ решения задач (1)–(2) и (3)–(4), соответствующие управлению $v(t, x)$, тогда, если выполняется почти всюду в области D соотношение

$$H(z, p, v, (t, x)) = \sup_{v \in V} H(z, p, v), \quad (8)$$

то говорят, что допустимое управление $v(t, x)$ удовлетворяет условию максимума. Условие минимума определяется аналогично. Принцип максимума для вышеупомянутой оптимальной задачи излагается в следующей теореме.

Теорема. Для того, чтобы допустимое управление $v(t, x)$ было min-оптимальным (max-оптимальным) по S , необходимо, а для линейного случая и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию максимума (минимума).

Доказательство этой теоремы состоит из нескольких частей.

1. Формула приращения функционала S . Рассмотрим функционал

$$I[z, p, v] = \iint_D \left[\sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial^4 u_i}{\partial t^2 \partial x^2} - H(z, p, v) \right] dt dx. \quad (9)$$

Отметим, что если $v(t, x)$ —некоторое допустимое управление, а $u(t, x)$ —решение задачи (1)–(2), соответствующее этому управлению, то функционал $I[z(t, x), p(t, x), v(t, x)]$ равен нулю при произвольной функции $z(t, x)$. Дадим функции $v(t, x)$ произвольное допустимое приращение $\Delta v(t, x)$ и обозначим через $u_i(t, x) + \Delta u_i(t, x)$ решение задачи (1)–(2), соответствующее управлению $v(t, x) + \Delta v(t, x)$. Следует подчеркнуть, что $\Delta u_i(t, x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^4 (\Delta u_i)}{\partial t^2 \partial x^2} f_i(t, x, p + \Delta p, v + \Delta v) - f_i(t, x, p, v) \quad (10)$$

и дополнительным условиям:

$$\begin{aligned} \Delta u_i(0, x) &= 0, & \Delta u_i(t, 0) &= 0, \\ \Delta u_{ix}(0, x) &= 0, & \Delta u_{ix}(t, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее, согласно сделанному выше замечанию

$$\Delta I = I[z, p + \Delta p, v + \Delta v] - I[z, p, v] = 0.$$

С другой стороны,

$$\Delta I = \iint_D \left\{ z_i \frac{\partial^4 \Delta u_i}{\partial t^2 \partial x^2} - [H(z, p + \Delta p, v + \Delta v) - H(z, p, v)] \right\} dt dx. \quad (12)$$

Отсюда пользуясь формулой Грина [5], учитывая (5) и (6) и применяя формулу Тейлора, окончательно получим

$$\begin{aligned} \Delta I &= - \sum_{i=1}^n A_i \Delta u_i(a, b) - \int_0^a \int_0^b [H(z, p, v + \Delta v) - H(z, p, v)] dt dx - \\ &- \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H(z, p, v + \Delta v)}{\partial p_i} - \frac{\partial H(z, p, v)}{\partial p_i} \right] \Delta p_i dt dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H(z, p + \theta p, v + \Delta v)}{\partial p_i \partial p_j} \Delta p_i \Delta p_j dt dx. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения, будем иметь

$$\Delta S = - \int_D [H(z, p, v + \Delta v) - H(z, p, v)] dt dx - \eta, \quad (13)$$

где $\Delta S = \sum_{i=1}^n A_i \Delta u_i(a, b)$ —приращение функционала S , а $\eta = \eta_1 + \eta_2$,

$$\eta_1 = \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H(z, p, v + \Delta v)}{\partial p_i} - \frac{\partial H(z, p, v)}{\partial p_i} \right] \Delta p_i dt dx, \quad (14)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H(z, p + \theta p, v + \Delta v)}{\partial p_i \partial p_j} \Delta p_i \Delta p_j dt dx. \quad (15)$$

2. Оценка остаточного члена η в формуле (13). Для получения необходимых оценок величин η введем вспомогательные функции $\alpha_i(t, x)$ и $\beta_i(t, x)$, положив

$$\alpha_i(t, x) = \frac{\partial^3 \Delta u_i}{\partial t^2 \partial x}, \quad \beta_i(t, x) = \frac{\partial^3 \Delta u_i}{\partial t \partial x^2}.$$

Ввиду того что функции f_i удовлетворяют условию Липшица, начиная с третьего аргумента, из системы (10) и дополнительных условий (11) находим:

$$|\alpha_i| \leq M \int_0^x \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^3 \sum_{s+m=0}^r \left| \frac{\partial^r \Delta u_i(\tau, \xi)}{\partial \tau^s \partial \xi^m} \right| d\xi + N \int_0^x \sum_{v=1}^k |\Delta v_v| dx, \quad 0 \leq s, \quad m \leq 2 \quad (16)$$

$$|\beta_i| \leq M \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^3 \sum_{s+m=0}^r \left| \frac{\partial^r \Delta u_i(\tau, \xi)}{\partial \tau^s \partial \xi^m} \right| d\tau + N \int_0^t \sum_{v=1}^k |\Delta v_v| dt,$$

где M и N —определенные постоянные.

Положим

$$\alpha = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|, \quad \beta = \sum_{i=1}^n |\beta_i|, \quad \Delta v = \sum_{v=1}^k |\Delta v_v|. \quad (17)$$

Тогда из неравенств (16) получим:

$$\alpha(t, x) \leq M \cdot n \int_0^x \alpha(t, \xi) d\xi + M \cdot n \int_0^x \left[\sum_{r=0}^2 \sum_{s+m=0}^r \left| \frac{\partial^r \Delta u_i(t, \xi)}{\partial \tau^s \partial \xi^m} \right| + \beta \right] d\xi +$$

$$+ N \cdot n \int_0^b \Delta v(t, \xi) d\xi, \quad (18)$$

$$\beta(t, x) \leq M \cdot n \int_0^t \beta(\tau, x) d\tau + M \cdot n \int_0^T \left[\sum_{r=0}^2 \sum_{s+m=0}^r \left| \frac{\partial^r \Delta n_i(\tau, x)}{\partial \tau^s \partial \xi^m} \right| + \alpha \right] d\tau +$$

$$+ N \cdot n \int_0^a \Delta v(\tau, x) d\tau,$$

где $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq X$, (T, X) — некоторая фиксированная точка области D . Учитывая вспомогательные функции $\alpha_i(t, x)$, $\beta_i(t, x)$, будем иметь следующие неравенства:

$$\left| \frac{\partial^2 \Delta u_i}{\partial t^2} \right| \leq \int_0^x \alpha_i(t, \xi) d\xi, \quad \left| \frac{\partial^2 \Delta u_i}{\partial x^2} \right| \leq \int_0^t \beta_i(\tau, x) d\tau,$$

$$\left| \frac{\partial \Delta u_i}{\partial t} \right| \leq \int_0^x \int_0^t \alpha_i(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad \left| \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x} \right| \leq \int_0^t \int_0^x \beta_i(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad (19)$$

$$|\Delta u_i| \leq N \int_0^x \int_0^t \alpha_i(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad |\Delta u_i| \leq N \int_0^t \int_0^x \beta_i(\tau, \xi) d\tau d\xi.$$

Учитывая соотношения (19) и последовательно применяя неравенство Гронуолла [6] к неравенствам (18), окончательно получим следующие оценки:

$$|\Delta u_i|, \quad \left| \frac{\partial \Delta u_i}{\partial t} \right|, \quad \left| \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x} \right|,$$

$$\left| \frac{\partial^2 \Delta u_i}{\partial t \partial x} \right| \leq R \int_D \sum_{v=1}^K |\Delta v_v(t, x)| dt dx,$$

$$\left| \frac{\partial^2 \Delta u_i}{\partial x^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^3 \Delta u_i}{\partial t \partial x^2} \right| \leq R \int_D \sum_{v=1}^K |\Delta v_v(t, x)| dt dx +$$

$$+ Q \int_0^a \sum_{v=1}^K |\Delta v_v(t, x)| d\tau, \quad (20)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \Delta u_i}{\partial t^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^3 \Delta u_i}{\partial t^2 \partial x} \right| \leq R \int_D \sum_{v=1}^K |\Delta v_v(t, x)| dt dx +$$

$$+ Q \int_0^b \sum_{v=1}^K |\Delta v_v| d\xi.$$

Так как функции $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ удовлетворяют условию Липшица, то в силу неравенств (20) из (14) имеем

$$|\eta_1| \leq (T_1 a b + T_2 b + T_3 a) \int_D \left[\sum_{v=1}^K |\Delta v_v(t, x)| \right]^2 dt dx,$$

где T_1, T_2, T_3 — положительные постоянные, независимые от выбора Δv . Функции $\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}$ ограничены в области D , поэтому из (15) следует

$$|\eta_2| \leq (T_1 a b + T_2 b + T_3 a) \int_D \left[\sum_{v=1}^K |\Delta v_v(t, x)| \right]^2 dt dx.$$

Таким образом, для остаточного члена η в формуле (13) получим оценку

$$|\eta| \leq (A a b + B b + C a) \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{v=1}^K |\Delta v_v(t, x)| \right]^2 dt dx, \quad (21)$$

где A, B, C — определенные положительные постоянные. Допустим, что функции $\Delta v_v(t, x)$ отличны от нуля только в круге D_ε радиуса ε . Тогда из (21) получим

$$|\eta| \leq \varepsilon \cdot L \int_{D_\varepsilon} \left[\sum_{v=1}^K |\Delta v_v(t, x)| \right]^2 dt dx, \quad (22)$$

где L — положительная постоянная.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Предположим, что $v(t, x)$ — min-оптимальное по s управление, а $u(t, x)$ и $z(t, x)$ — соответствующие ему решения задач (1)–(2) и (3)–(4). Тогда при любом $\Delta v(t, x)$ справедливо неравенство $\Delta s \geq 0$. Допустим, что существует точка (τ, ξ) непрерывности управления, в которой не выполнено условие максимума, т. е. существует точка $v' \in V$ такая, что

$$H(z(\tau, \xi), p(\tau, \xi), v') > H(z(\tau, \xi), p(\tau, \xi), v(\tau, \xi)). \quad (23)$$

Так как точка (τ, ξ) является непрерывной точкой управления, то существует замкнутая окрестность этой точки $D' \subset D$, где управление $v(t, x)$ непрерывно и поэтому $z(t, x)$ и $p(t, x)$ также будут непрерывными в D' . Тогда из неравенства (23) следует, что существует такое положительное число δ , для которого

$$H(z(t, x), p(t, x), v') - H(z(t, x), p(t, x), v(t, x)) > \delta \quad (24)$$

при всех $(t, x) \in D_\varepsilon \subset D'$, где D_ε — круг радиуса ε , содержащийся в области D' .

Рассмотрим управление

$$\bar{v}(t, x) = \begin{cases} v(t, x) & \text{при } (t, x) \in D_\varepsilon, \\ v'(t, x) & \text{при } (t, x) \in D_\varepsilon^c, \end{cases}$$

тогда в силу соотношений (13), (22) и (24) будем иметь

$$\Delta s = - \int_{D_\varepsilon} [H(z, p, v') - H(z, p, v)] dt dx - \eta <$$

$$< - \left[\int_{D_\varepsilon} \delta dt dx - |\eta| \right] \leq - \int_{D_\varepsilon} \left[\delta - \varepsilon L \left(\sum_{v=1}^K |\Delta v_v(t, x)| \right)^2 \right] dt dx.$$

Так как Δv ограничены, то за счет произвольного $\varepsilon > 0$ выражение в квадратной скобке можно сделать положительным, тогда $\Delta s < 0$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, необходимое условие теоремы доказано. Докажем достаточность этого условия в случае линейных систем. Для линейного случая легко показать, что остаточный член η в формуле (13) равен нулю и поэтому она принимает вид

$$\Delta s = - \int_D [H(z, p, v + \Delta v) - H(z, p, v)] dt dx. \quad (25)$$

Отсюда, если выполнено условие максимума (минимума), то подынтегральное выражение неположительно (не отрицательно) и поэтому $\Delta s \geq 0$ ($\Delta s \geq 0$), а это означает, что управление дает функционалу (3) максимальное (минимальное) значение.

Замечание. Вышеизложенный метод можно применить для уравнения вида

$$\frac{\partial^{2n} u_i}{\partial t^n \partial x^n} = g_i \left[t, x, u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial u_i}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^r u_i}{\partial t^m \partial x^s}, v(t, x) \right]$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; s = 0, 1, 2, \dots, n; m = 0, 1, \dots, n-1; s + m = r \leq 2n-1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969.
2. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., 1965.
3. Егоров А. И. "Автоматика и телемеханика", т. XXV, 1964, № 5.
4. Розоноэр Л. И. "Автоматика и телемеханика", т. XX, 1959, № 10.
5. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. ИЛ, 1957.
6. Немыцкий В. В. и Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.
7. Атанс М. и Фалб П. Оптимальное управление. М., 1968.

АзПИ и.м. Ч. Ильдрыма

Поступило 30. XI 1970

Ј. Б. Мәммәдов

Пајланмыш параметрли оптималь идарә олуна мәсәлә һаггында

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда (1), (2), (3) мәсәләси үчүн Л. С. Понтрягинин максимум принципини тәмин едән зәрури шәртләр тапылмышдыр.

Хәтти мәсәлә үчүн һәмин шәртләрин, ејни заманда, кафи олдугу да кәстәрилмишдыр.

К. И. ГАХРАМАНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

Первая постановка задачи об устойчивости стержня при продольном ударе принадлежит Н. А. Лаврентьеву и А. Ю. Ишлинскому [1], в дальнейшем эта задача рассматривалась и другими авторами. Упруго-пластическая потеря устойчивости стержня при продольном ударе исследована Б. М. Малышевым [2].

Данная работа отличается от предыдущих тем, что исследуется вопрос устойчивости стержня при продольном ударе с учетом влияния упругой среды, в которой он находится. Сопротивлением сдвига среды в плоскости потери устойчивости стержня пренебрегаем.

Пусть к торцу стержня мгновенно прикладывается сила $P(t)$. Начало декартовой системы координат выберем в центре торца, ось ox направим вдоль оси стержня, а oy лежит в плоскости потери устойчивости (рисунок). До потери устойчивости упругая среда не участвует в процессе нагружения, но как только возникает малый прогиб, т. е. потеря устойчивости, среда оказывает на стержень поперечное реактивное усилие $g(x, t)$, которое определяется из уравнения

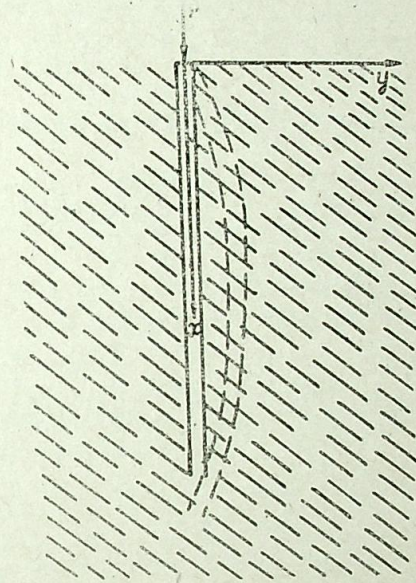


Рис.

$$g(x, t) + 4\tau \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2kv - 2m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где

$$k = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \int_0^H \psi^2(y) dy, \quad m_0 = m \int_0^H \psi^2(y) dy, \quad (2)$$

$$\tau = \frac{E_0}{4(t - v_0)} \int_0^H \psi^2(y) dy, \quad E_0 = \frac{E_{cp}}{1 - v_{cp}^2}, \quad v_0 = \frac{v_{cp}}{1 - v_{oc}};$$

H — толщина упругого напряженного слоя,
 m — плотность среды,
 k и τ — называются обобщенными характеристиками,
 m_0 — приведенная масса упругой среды,
 $\psi(y)$ — функция, характеризующая распределение перемещений по направлению оси Oy ,
 E_0 — модуль Юнга,
 v_{cp} — коэффициент Пуассона среды.
 Физический смысл коэффициента k и τ заключается в следующем:
 k — работа упругой среды при сжатии, в этом смысле данная величина аналогична коэффициенту постели.
 τ — характеризует работу упругой среды на сдвиг.

Сила инерции стержня будет $-m_1 \frac{d^2 v}{dt^2}$, где m_1 — линейная плотность стержня.

Следовательно, уравнение устойчивости стержня имеет вид

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{P(t) - 4\tau}{EJ} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{m_1 + 2m_0}{EJ} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{2k}{EJ} v = 0 \quad (3)$$

где E — модуль Юнга, J — момент инерции поперечного сечения.

Функция $\psi(y)$ считается известной.

Частное решение уравнения (3) ищем в виде:

$$V \equiv \sin ax T(t), \quad (4)$$

где $a = \frac{\pi n}{l}$, а $T(t)$ — неизвестная функция от времени. Подставим

(4) в (3) и тогда получим

$$\frac{m_1 - 2m_0}{JE} T''(t) + \left[\frac{\pi^4 n^4}{l^4} - \frac{P(t) - 4\tau}{EJ} \frac{\pi^2 n^2}{l^2} + \frac{2k}{EJ} \right] T(t) = 0 \quad (5)$$

В частности, при $P(t) = P_0 = \text{const}$

уравнение (5) имеет общее решение:

$$T(t) \equiv A \cos(\omega t + \eta), \quad (6)$$

где η — начальная фаза. По условию задачи начальный прогиб отсутствует, поэтому (6) будем брать так:

$$T(t) = A \cos \omega t \quad (7)$$

Для определения ω введем (7) в (5) и получим уравнение

$$\frac{m_1 - 2m_0}{EJ} \omega^2 = \frac{\pi^4 n^4}{l^4} - \frac{P_0 - 4\tau}{EJ} \frac{\pi^2 n^2}{l^2} - \frac{2k}{EJ}; \quad (8)$$

$\omega = 0$ соответствует прямолинейному положению стержня, а бесконечное приращение ω соответствует потере устойчивости. Поэтому при условии $\omega = 0$ уравнение (8) дает возможность определить критическое значение силы удара:

$$P_{окр} = EJ \frac{\pi^2 n^2}{l^2} + 4\tau + 2k \frac{l^2}{\pi^2 n^2}. \quad (9)$$

В частном случае, когда $n = 1$, $\tau = k = 0$, из (9) находим

$$P_{окр} = EJ \frac{\pi^2}{l^2} = P_3,$$

где P_3 — критическая сила по Эйлеру.

Для данного P_0 из (9) легко определить характерную длину стержня для случая мгновенного нагружения.

$$l_{хар} = \pi^2 n^2 \left[\frac{P_0 - 4\tau}{2EI} \pm \sqrt{\frac{(P_0 - 4\tau)^2}{4E^2 l^2} - \frac{2k}{EI}} \right]$$

Отсюда для случая $n = 1$, $\tau = k = 0$ имеем известную формулу:

$$l_{хар} = \pi \sqrt{\frac{EI}{P_0}}$$

Если представить, что стержень армирован по оси гибким, нерастяжимым, гладким и невесомым тросом, имеющим натяжение T , то уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{P_0 - 4\tau - T}{EJ} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{m_1 + 2m_0}{EJ} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{2k}{EJ} v = 0$$

Аналогичным путем для критической силы получаем выражение

$$P_{окр.р} = EJ \frac{\pi^2 n^2}{l^2} + 4\tau + T + 2k \frac{l^2}{\pi^2 n^2}$$

Следовательно, определили, что трос действует на критическую силу в порядке натяжения. Но он уменьшает характерную длину стержня. Это видно из следующей формулы:

$$l_{хар} = \pi^2 n^2 \left[\frac{P_0 - 4\tau - T}{2EI} \pm \sqrt{\frac{(P_0 - 4\tau - T)^2}{4E^2 l^2} - \frac{2k}{EI}} \right]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. и Ишлинский А. Ю. „ДАН СССР“, т. 64, 1949, №6.
2. Малышев Б. М. МТТ, 1966, №4.
3. Линдберг. „Прикладная механика“, т. 32, 1965, №2.
4. Власов В. З. и Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. Физматгиз. М., 1960.

Поступило 14. V 1970

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

К. И. Гәһрәманов

Эластик мүнхитдә јарымсонсуз эластик чубуғун узунуна зәрбә заманы дајаныглыгы һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә эластик мүнхитдә јерләшдирилмиш јарымсонсуз чубуғун узунуна зәрбә заманы дајаныглыгынын итмәси мәсәләсинә бахылмышдыр. Зәрбә гүввәсинин бөһран гијмәтинә вә чубуғун характеристик узунлуғуна эластик мүнхитин тәсири өјрәнилмишдир.

УДК 517 946

М. А. КУЛИЕВ

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе [1] рассматривается существование и единственность одномерной обратной задачи для телеграфного уравнения в полубесконечном пространстве. В данной статье доказывается существование и единственность решения обратной задачи и его непрерывная зависимость от данных в конечной области.

В области $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, a, u) \quad (1)$$

при условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

$$u(0, t) = (1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

$$u(x_0, t) = a(t)h(t) + Ft \quad (0 \leq t \leq T, \quad 0 < x_0 < 1), \quad (4)$$

где $\varphi(x)$, $x(\psi)$, $h(t)$, $F(t)$ и $f(x, t, a, u)$ — заданные функции.

Определение. Пару функций $(a(t), u(x, t))$ назовем решением задачи (1) — (4), если они удовлетворяют условиям:

1) $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема в D , $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$;

2) удовлетворяются условия (1) — (4) в классическом смысле.

Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$, $F(t)$ и $f(x, t, a, u)$ удовлетворяют следующим условиям:

1°. Функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$,

$$\varphi'''(x) \in L_2(0, 1) \text{ и } \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1).$$

2°. Функция $\psi(x)$ непрерывна дифференцируема на $[0, 1]$,

$$\psi''(x) \in L_2(0, 1) \text{ и } \psi(0) = \psi(1).$$

3°. Функции $h(t) \neq 0$, $F(t)$ непрерывны на $[0, T]$.

4°. $f(x, t, a, u)$ непрерывна по совокупности своих переменных в области $\Pi \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T, |a| \leq R_1, |u| \leq R_2\}$, где $R_1 > C_1$, $R_2 > C_2$;

$$C_1 = \frac{\|f''(t)\|_{C(0, T)}}{H} + \frac{1}{H\sqrt{3}} \|\varphi'(x)\|_{L_2(0, 1)} + \frac{1}{\sqrt{3}H} \|\psi(x)\|_{L_2(0, 1)},$$

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \|\varphi'(x)\|_{L_2(0, 1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \|\psi(x)\|_{L_2(0, 1)} \quad H = \min_{0 \leq t \leq T} |h(t)|.$$

5°. В области Π функция $f(x, t, a, u)$ удовлетворяет условию Липшица;

$$|f(x, t, a, u) - f(x, t, b, v)| \leq M(|a - b| + |u - v|).$$

6°. Функции $f'_x, f'_u, f''_{xu}, f''_{uu}, f''_{xx}$ непрерывны по совокупности своих аргументов в Π и $f(0, t, a, 0) = f(1, t, a, 0) \equiv 0$ для любых $t \in [0, T]$ и $a \in [-R_1, R_1]$. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1° — 6°. Тогда при $0 < T < \min \left\{ \frac{(R_1 - C_1)H}{NK}, \frac{R_2 - C_2}{NK} \right\}$ существует единственное решение $(a(t), u(x, t))$ задачи (1) — (4), удовлетворяющее для любого $(x, t) \in D$ условиям $|a(t)| \leq R_1, |u(x, t)| \leq R_2^*$, где

$$|G(x, \xi, \eta)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin k \pi \eta}{k} \sin k \pi \xi, \sin k \pi x \right| \leq K$$

в $Q = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq T\}$, $|f(x, t, a, u)| < N$ в Π .

Доказательство. Легко убедиться, что задача (1) — (4) эквивалентна следующей системе нелинейных интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= a_0(t) + \frac{1}{h(t)} \int_0^t \int_0^1 G(x_0, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau, a(\tau), u(\xi, \tau)) d\xi d\tau, \\ u(x, t) &= u_0(x, t) + \int_0^t \int_0^1 G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau, a(\tau), u(\xi, \tau)) d\xi d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$a_0(t) = -\frac{F(t)}{h(t)} + \frac{1}{h(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos k \pi t \sin k \pi x_0 +$$

$$\frac{1}{h(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k \pi} \sin k \pi t \sin k \pi x_0,$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos k \pi t \sin k \pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k \pi} \sin k \pi t \sin k \pi x.$$

φ_k, ψ_k — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x), \psi(x)$ по системе $\{\sin k \pi x\}_{k=1}^{\infty}$ на $[0, 1]$, соответственно.

Построим для системы (5) процесс последовательных приближений по схеме:

$$a_n(t) = a_0(t) + \frac{1}{h(t)} \int_0^t \int_0^1 G(x_0, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau, a_{n-1}(\tau), u_{n-1}(\xi, \tau)) d\xi d\tau, \quad (6)$$

$$u_n(x, t) = u_0(x, t) + \int_0^t \int_0^1 G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau, a_{n-1}(\tau), u_{n-1}(\xi, \tau)) d\xi d\tau, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Нетрудно видеть, что $\{a_n(t)\}$ и $\{u_n(x, t)\}$ — непрерывные функции своих аргументов соответственно на $[0, T]$ и D , $|a_n(t)| < R_1$, $|u_n(x, t)| < R_2$ для всех n .

Покажем, что $\{a_n(t)\}$ и $\{u_n(x, t)\}$ сходятся соответственно к некоторым непрерывным функциям $a(t)$ и $u(x, t)$, которые являются решением системы (5). Для этого достаточно показать сходимость рядов:

$$a_0(t) + (a_1(t) - a_0(t)) + (a_2(t) - a_1(t)) + \dots + (a_n(t) - a_{n-1}(t)) + \dots, \\ u_0(x, t) + (u_1(x, t) - u_0(x, t)) + (u_2(x, t) - u_1(x, t)) + \dots + (u_n(x, t) - u_{n-1}(x, t)) + \dots \quad (7)$$

Имеем:

$$|a_1(t) - a_0(t)| = \left| \frac{1}{h(t)} \int_0^t \int_0^1 G(x_0, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau, a_0(\tau), u_0(\xi, \tau)) d\xi d\tau \right| \leq \frac{Nkt}{H}, \\ |u_1(x, t) - u_0(x, t)| = \left| \int_0^t \int_0^1 G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau, a_0(\tau), u_0(\xi, \tau)) d\xi d\tau \right| \leq Nkt$$

Применяя метод математической индукции, получим

$$|a_n(t) - a_{n-1}(t)| \leq N \frac{1}{H} \left(1 + \frac{1}{H}\right)^{n-1} M^{n-1} K^n \frac{t^n}{n!}, \\ |u_n(x, t) - u_{n-1}(x, t)| \leq N \left(1 + \frac{1}{H}\right)^{n-1} M^{n-1} K^n \frac{t^n}{n!} \quad (8)$$

Ряды (7) мажорируются соответственно сходящимися числовыми рядами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} N \frac{1}{H} \left(1 + \frac{1}{H}\right)^{n-1} M^{n-1} K^n \frac{T^n}{n!}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} N \left(1 + \frac{1}{H}\right)^{n-1} M^{n-1} K^n \frac{T^n}{n!} \quad (9)$$

Тогда последовательности $\{a_n(t)\}$ и $\{u_n(x, t)\}$ сходятся равномерно к некоторым непрерывным функциям $a(t)$ и $u(x, t)$, соответственно.

Переходя к пределу в (6), видим, что $(a(t), u(x, t))$ удовлетворяют системе (5). Легко убедиться, что полученная пара $(a(t), u(x, t))$ есть решение задачи (1) — (4).

Докажем единственность решения задачи (1) — (4), удовлетворяющей условиям (*). Допустим, что имеются два таких решения: $(a(t), u(x, t))$ и $(b(t), v(x, t))$, тогда они являются решениями системы (5). Учитывая 5°, получим:

$$|a(t) - b(t)| \leq \frac{1}{H} KM \int_0^t \int_0^1 (|a(\tau) - b(\tau)| + |u(\xi, \tau) - v(\xi, \tau)|) d\xi d\tau, \\ |u(x, t) - v(x, t)| \leq KM \int_0^t \int_0^1 (|a(\tau) - b(\tau)| + |u(\xi, \tau) - v(\xi, \tau)|) d\xi d\tau. \quad (10)$$

Отсюда следует, что

$$|a(t) - b(t)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t) - v(x, t)| \leq \left(1 + \frac{1}{H}\right) \int_0^t |a(\tau) - b(\tau)| + \max_{0 \leq \xi \leq 1} |u(\xi, \tau) - v(\xi, \tau)| d\tau.$$

Тогда в силу неравенства Гронуолла будем иметь

$$a(t) \equiv b(t) \text{ и } u(x, t) \equiv v(x, t). \text{ Теорема доказана.}$$

Пусть наряду с задачей (1) — (4) рассматривается и задача $(1)_1 - (4)_1$, соответствующая данным $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $\bar{h}(t)$, $\bar{F}(t)$, $\bar{f}(x, t, a, u)$. Предположим, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$, $F(t)$, $f(x, t, a, u)$ и $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $\bar{h}(t)$, $\bar{F}(t)$, $\bar{f}(x, t, a, u)$ удовлетворяют условиям (1) — (6), соответственно. Пусть задачи (1) — (4) и $(1)_1 - (4)_1$ имеют единственные решения, удовлетворяющие условию (*), и

$$\|\bar{\varphi}'(x) - \varphi'(x)\|_{L_2(0,1)} < \delta_0, \quad \|\bar{\psi}(x) - \psi(x)\|_{L_2(0,1)} < \delta_0, \\ \|\bar{F}(t) - F(t)\|_{C[0,T]} < \delta_0,$$

где $\delta_0 > 0$ — достаточно малые числа. Тогда для решения $(\bar{a}(t), \bar{u}(x, t))$ задачи $(1)_1 - (4)_1$ выполнены условия (*). Легко убедиться, что решение $(\bar{a}(t), \bar{u}(x, t))$ удовлетворяет системе интегральных уравнений (5), соответствующих данным $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $\bar{h}(t)$, $\bar{F}(t)$, $\bar{f}(x, t, a, u)$.

Вычитая (5) из $(5)_1$, получим:

$$|\bar{a}(t) - a(t)| \leq \frac{1}{HH} \left(\|F\|_{C[0,T]} + \frac{1}{\sqrt{3}} \|\varphi'\|_{L_2(0,1)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \|\psi\|_{L_2(0,1)} + KNT \right) \|\bar{h} - h\|_{C[0,T]} + \\ + \frac{1}{H} \|\bar{F} - F\|_{C[0,T]} + \frac{1}{\sqrt{3}H} \|\varphi' - \varphi'\|_{L_2(0,1)} + \frac{1}{\sqrt{3}H} \|\bar{\psi} - \psi\|_{L_2(0,1)} + \\ + \frac{TK}{H} \|\bar{f} - f\|_{C(D)} + \frac{KM}{H} \int_0^t (|\bar{a}(\tau) - a(\tau)| + \max_{0 \leq \xi \leq 1} |\bar{u}(\xi, \tau) - u(\xi, \tau)|) d\tau, \\ |\max_{0 \leq x \leq 1} |\bar{u}(x, t) - u(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|\bar{\varphi}' - \varphi'\|_{L_2(0,1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \|\bar{\psi} - \psi\|_{L_2(0,1)} + \\ + TK \|\bar{f} - f\|_{C(D)} + KM \int_0^t (|\bar{a}(\tau) - a(\tau)| + \max_{0 \leq \xi \leq 1} |\bar{u}(\xi, \tau) - u(\xi, \tau)|) d\tau,$$

где $\bar{H} = \min_{0 \leq t \leq T} |\bar{h}(t)|$.

Применив лемму Гронуолла, имеем

$$|\bar{a}(t) - a(t)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |\bar{u}(x, t) - u(x, t)| \leq \left\{ \frac{1}{HH} \left(\|F\|_{C[0,T]} + \right. \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \|\varphi'\|_{L_2(0,1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \|\psi\|_{L_2(0,1)} + KNT \right) \|\bar{h} - h\|_{C[0,T]} + \\ \left. + \frac{1}{H} \|\bar{F} - F\|_{C[0,T]} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{H} \right) \|\bar{\varphi}' - \varphi'\|_{L_2(0,1)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{H} \right) \|\bar{\psi} - \psi\|_{L_2(0,1)} + TK \left(1 + \frac{1}{H} \right) \|\bar{f} - f\|_{C(D)} \right\} \exp \left(\frac{HH}{H} KMT \right). \quad (11)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Пусть задачи (1)–(4) и (1), –(4)₁ имеют единственные решения. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $\|\bar{a}(t) - a(t)\|_{C[0, T]} < \varepsilon$ и $\|\bar{u}(x, t) - u(x, t)\|_{C(D)} < \varepsilon$, если только каждое из чисел $\|\bar{\varphi}' - \varphi'\|_{L_1(0, 1)}$, $\|\bar{\psi} - \psi\|_{L_1(0, 1)}$, $\|\bar{F} - F\|_{C[0, T]}$, $\|\bar{h} - h\|_{C(0, T)}$, $\|\bar{f} - f\|_{C(D)}$ меньше $\delta(\varepsilon)$.

Доказательство теоремы вытекает из неравенства (11).

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность доц. К. Н. Худавердиеву за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В. Н., „Дифференциальные уравнения“, т. V, 1938, № 1.
 2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Изд-во „Наука“, 1966.
 1. Худавердиев К. Н., „Уч. зап. АГУ им. С. М. Кирова, серия физ.-матем. и химич. наук“, 1960, № 4.
- Институт кибернетики
АН Азерб. ССР

Поступило 16. I 1970

М. Э. Гулиев

Икинчи сыра гиперболик тэнлик үчүн бир тэрс мәсələ

нагында

ХУЛАСƏ

Мəгалəдə квази-хəтти гиперболик тэнлик үчүн „тəрс мəсələ“ верилмишдир. Тəдгигатда гарышыг мəсələ өрəнилмиш вə əлавə шəрт дахилиндə намə'лум əмсал ахтарылмышдыр. Мəгалəдə „тəрс мəсələ“ нин хəллинин варлыгы, јеканəлији вə мəсələјə дахил олан верилмиш функцијалардан кəсилмəз асылылыгы исбат едилмишдир.

Р. А. БАЙРАМОВ

О РЕШЕТКАХ ПОДАЛГЕБР НЕКОТОРЫХ АЛГЕБР

Все рассматриваемые множества предполагаются принадлежащими некоторому фиксированному универсальному множеству. Пусть $A = \langle A; F \rangle$ — алгебра сигнатуры $F = \{f^{n_i}, i \in I\}$, где $n_i = n(f_i)$ есть конечная ариность операции f_i . Через $L(A)$ обозначим решетку подалгебр алгебры A ; иногда вместо $X \in L(A)$ будем писать $X \leq A$. В решетке $L(A)$ операция $\wedge$ совпадает с теоретико-множественным пересечением $\cap$, а операция $\vee$ есть суперпозиция (в указанном порядке) теоретико-множественного объединения $\cup$ и замыкания $[\]_F$ относительно сигнатуры F . Если F конкретизирована, то будем иногда (когда это не будет вызывать недоразумений) опускать F в символе $[\]_F$ (например, если A — мультипликативно записанный группоид, то вместо $[\]_F$ будем писать $[\]$). С целью достижения единообразия формально полагаем: пустое множество $\emptyset$ есть наименьший элемент в $L(A)$ для любой алгебры A , а также в любой решетке множеств. Цепь $C \subseteq L(A)$ (т. е. линейно упорядоченное по включению подмножество $C \subseteq L(A)$) назовем композиционной (или максимальной), если не существует строгих $L(A)$ -уплотнений для C , т. е. для любой цепи $C^* \subseteq L(A)$ из $C \subseteq C^*$ следует $C^* = C$ (сравнить и не путать с композиционным рядом мультиоператорной группы [1]). Множество всех композиционных цепей в $L(A)$ обозначим через $[comp(A)]$, а его подмножество композиционных цепей минимальной мощности через $[min_{comp}(A)]$ (так как всякое множество кардинальных чисел вполне упорядочено относительно естественного порядка, то пишем $\min$ вместо $\inf$). Назовем проводимостью решетки $L(A)$ и обозначим через $l_{\min}(A)$ мощность любой цепи из $[min_{comp}(A)]$; через $l_{\max}(A)$ обозначим $\sup_{C \in [comp(A)]} |C|$,

если он достигается на цепи из $L(A)$.

Всюду далее:

1) пользуемся функциональной записью отображений и поэтому в произведении отображений $\varphi \cdot \psi$ сначала действует ψ , затем φ : $(\varphi \cdot \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$;

2) $\neq$ есть знак прямой суммы множеств (т. е. объединения непересекающихся множеств), $\sim$ знак асимптотического равенства;

3) для любой алгебры A , любой цепи $C \subseteq L(A)$ и любого $Y_0 \in C$

$C \geq (Y_0) = \{X : X \in C, X \geq Y_0\}$, $C < (Y_0) = C / C \geq (Y_0)$;

4) $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, где $k \geq 2$ — натуральное число; для действительного числа $x \geq 0$ $[x] = \max_{n \leq x} n$, $|x| = \min_{n \geq x} n$;

5) $\mathcal{Q}_\kappa$ — симметрическая полугруппа на E_κ , $\mathcal{Q}_{\kappa,t}$ ее идеал вида $\mathcal{Q}_{\kappa,t} = \{\tau: \tau \in \mathcal{Q}_\kappa, r(\tau) \leq t\}$, где $r(\tau) = |\tau(E_\kappa)|$ называется рангом отображения τ , $\mathcal{Q}_\kappa^+ = \mathcal{Q}_{\kappa,t} \mathcal{Q}_{\kappa,t-1}$;

6) $\mathcal{Q}_\kappa^- = \mathcal{Q}_\kappa$ — симметрическая группа на E_κ , A_κ — знакопеременная группа.

Настоящая статья посвящена описанию $[\min_{\text{comp}}(A)]$ для некоторых алгебр, оценкам для $l_{\min}(A)$ и изучению алгебр с заданной проводимостью решеток подалгебр. В § 1 описание $[\min_{\text{comp}}(\mathcal{Q}_\kappa)$ сводится к описанию $[\min_{\text{comp}}(\sigma_\kappa)]$ и классификации подрूप группы σ_κ , в некотором смысле „имитирующих“ σ_κ (ниже это выражение будет определено строго). Доказывается, что $[\min_{\text{comp}}(\mathcal{Q}_\kappa)$ есть прямая сумма двух множеств цепей, одно из которых становится известным с описанием $[\min_{\text{comp}}(\sigma_\kappa)]$, а второе — совокупность „сдвигов“ цепей из первого (понятие „сдвига“ также будет определено строго). Приводятся оценки для $l_{\min}(\sigma_\kappa)$, $l_{\min}(\mathcal{Q}_\kappa)$. В § 2 в терминах идеалов универсальных алгебр и обобщенного на этот случай понятия сдвига цепи описывается $[\min_{\text{comp}}(A)]$ для довольно широкого класса универсальных алгебр. В § 3 рассматриваются алгебры, решетки подалгебр которых обладают заданной конечной проводимостью.

§ 1. Определение. Отображение $\tau \in \mathcal{Q}_\kappa$ ранга t имеет тип $v^t(\tau) = \|\nu_1, \dots, \nu_t\|$ (см., например, [2]), если $\nu_1 + \dots + \nu_t = \kappa$, $\nu_i > 0$, для любого $i \in \{1, \dots, t\}$ существует $a_i \in \tau(E_\kappa)$ такое, что $|\tau^{-1}(a_i)| = \nu_i$ (упорядоченность слагаемых ν_i не учитывается).

На множестве $\mathcal{Q}_\kappa$ (соответственно $\mathcal{Q}_\kappa^t$) введем бинарное отношение $\sim$ (соответственно $\sim^t$) по правилу $\tau \sim \psi \rightarrow v^{r(\tau)}(\tau) = v^{r(\psi)}(\psi)$ (соответственно $\tau \sim^t \psi \rightarrow v^t(\tau) = v^t(\psi)$). Очевидно, $\sim$ (соответственно $\sim^t$) будет эквивалентностью на $\mathcal{Q}_\kappa$ (соответственно $\mathcal{Q}_\kappa^t$), причем $\sim = \sim \cap \cap (\mathcal{Q}_\kappa^t \times \mathcal{Q}_\kappa^t)$ и $v^{r(\tau)}(\tau) = v^{r(\psi)}(\psi) \rightarrow r(\tau) = r(\psi)$. Через T_κ^t обозначим множество всех типов отображений из $\mathcal{Q}_\kappa^t$, через T_κ — множество всех типов отображений из $\mathcal{Q}_\kappa$ (имеем $T_\kappa = \bigcup_{1 \leq t \leq \kappa} T_\kappa^t$). Пусть далее $D(\kappa, t)$,

есть число всех разбиений числа (см. [3]) κ на t частей $D(\kappa) = \sum_{1 \leq t \leq \kappa} D(\kappa, t)$ — число всех разбиений числа κ , $\varepsilon(\kappa, t)$ — число всех эквивалентностей с t смежными классами на E_κ , $\varepsilon(\kappa) = \sum_{1 \leq t \leq \kappa} \varepsilon(\kappa, t)$ —

число всех эквивалентностей на E_κ . Не следует путать разбиения числа κ с эквивалентностями на E_κ ; каждому разбиению числа κ соответствует некоторое множество эквивалентностей на E_κ . Очевидно, $D(2) = \varepsilon(2) = 2$, при $\kappa \geq 3$ $D(\kappa) < \varepsilon(\kappa)$, $D(\kappa, t) \leq \varepsilon(\kappa, t)$, причем равенство достигается только при $t = 1$, $t = \kappa$: $D(\kappa, 1) = \varepsilon(\kappa, 1) = D(\kappa, \kappa) = \varepsilon(\kappa, \kappa) = 1$, $D(\kappa, \kappa - 1) = 1$, $D(\kappa, \kappa - 2) = 2$, $D(\kappa, 2) = [\kappa/2]$. Известно (см. [4]), что $\varepsilon(\kappa) \sim \kappa^k \cdot \left(\frac{1}{\ln \kappa}\right)^k$, однако для $D(\kappa)$

автору не удалось обнаружить в литературе по комбинаторике ни точного, ни асимптотического значения. Можно получить тривиальную асимптотическую верхнюю оценку для $D(\kappa)$, используя $D(\kappa) < \varepsilon(\kappa)$ и асимптотику для $\varepsilon(\kappa)$, а именно $D(\kappa) < \kappa^k \cdot \left(\frac{1}{\ln \kappa}\right)^k$, но это

будет очень грубая оценка. Легко видеть, что

$$|T_\kappa^t| = |\mathcal{Q}_\kappa^t / \sim^t| = D(\kappa, t), |T_\kappa| = |\mathcal{Q}_\kappa / \sim| = D(\kappa).$$

Введем обозначение: $\mathcal{Q}_\kappa^t(v_0^t) = \{\tau: \tau \in \mathcal{Q}_\kappa^t, v^t(\tau) = v_0^t\}$. Нетрудно проверить, что для всех $t \in \{1, \dots, \kappa - 1\}$ выполняются:

- (i) $(\forall v^t \in T_\kappa^t) (\forall \tau \in \mathcal{Q}_\kappa^t(v^t)) [\sigma_\kappa + \{\tau\}] \supset \mathcal{Q}_\kappa^t(v^t)$;
- (ii) $(\forall v^t \in T_\kappa^t) [\mathcal{Q}_\kappa^t(v^t)] \cap \mathcal{Q}_\kappa^t = \mathcal{Q}_\kappa^t(v^t)$;
- (iii) $(\forall v_1, v_2 \in T_\kappa^t) (\forall \tau_1 \in \mathcal{Q}_\kappa^t(v_1)) (\forall \tau_2 \in \mathcal{Q}_\kappa^t(v_2))$,
 $(r(\tau_1 \cdot \tau_2) = t \rightarrow \tau_1 \cdot \tau_2 \in \mathcal{Q}_\kappa^t(v_1^t))$.

Через $I(t, t+1)$ (где $1 \leq t \leq \kappa - 2$) обозначим интервал в решетке $L(\mathcal{Q}_\kappa)$, порожденный ее элементами $\mathcal{Q}_{\kappa,t} + \sigma_\kappa$ и $\mathcal{Q}_{\kappa,t+1} + \sigma_\kappa$. В силу (i), (ii), (iii) интервал $I(t, t+1)$ изоморфен решетке всех подмножеств множества T_κ^{t+1} , поэтому все композиционные цепи интервала $I(t, t+1)$ имеют одинаковую длину, равную $|T_\kappa^{t+1}| + 1 = D(\kappa, t+1) + 1$. Далее множество $\Gamma_\kappa = \bigcup_{1 \leq t \leq \kappa-2} I(t, t+1)$ образует подрешетку в $L(\mathcal{Q}_\kappa)$ с наименьшим элементом $\mathcal{Q}_{\kappa,1} + \sigma_\kappa$ и наибольшим элементом $\mathcal{Q}_\kappa = \mathcal{Q}_{\kappa,\kappa-1} + \sigma_\kappa$. Через $\Gamma_\kappa^{\text{co}}$ обозначим множество всех композиционных цепей решетки Γ_κ ; ясно, что все цепи из $\Gamma_\kappa^{\text{co}}$ имеют одинаковую длину $l(\Gamma_\kappa^{\text{co}}) = (\kappa - 1) + \sum_{2 \leq t \leq \kappa-2} D(\kappa, t) - 1 = D(\kappa) - 1$. Далее в силу тран-

зитивности группы σ_κ интервал $I(\sigma_\kappa, \mathcal{Q}_{\kappa,1} + \sigma_\kappa)$ решетки $L(\mathcal{Q}_\kappa)$ будет простым и поэтому

$$(\forall \gamma \in \Gamma_\kappa^{\text{co}}) (\forall C \in [\min_{\text{comp}}(\sigma_\kappa)] \gamma + C \in [\min_{\text{comp}}(\mathcal{Q}_\kappa)].$$

Определение. Для всякого $t \in \{1, \dots, \kappa - 1\}$ введем на $L(\sigma_\kappa)$ бинарное отношение $\sim$ (mod $\mathcal{Q}_{\kappa,t}$) по правилу $X \sim Y$ (mod $\mathcal{Q}_{\kappa,t}$) $\rightarrow$

$$(\forall q \in \{1, \dots, t\}) (\forall v^q \in T_\kappa^q) (\forall \tau \in \mathcal{Q}_\kappa^q(v^q)) (\sigma_{\kappa, \kappa-1} \cup [X + \{\tau\}])$$

$\not\sim \sigma_\kappa = (\sigma_{\kappa, \kappa-1} \cup [Y + \{\tau\}]) / \sigma_\kappa$ (множество $\mathcal{Q}_{\kappa,0}$ пусто по определению). Очевидно, $\sim$ (mod $\mathcal{Q}_{\kappa,t}$) будет эквивалентностью на $L(\sigma_\kappa)$; смежный

класс, содержащий $X \in L(\sigma_\kappa)$, обозначим $K_{\sigma_\kappa}^t(X)$ и положим $K_{\sigma_\kappa}^+(X) = K_{\sigma_\kappa}^t(X) \setminus \{X\}$, $K_{\sigma_\kappa}^-(X) = \bigcup_{t=1}^{\kappa-1} K_{\sigma_\kappa}^t(X)$. В частности, $X \in K_{\sigma_\kappa}^t(\sigma_\kappa) \rightarrow (X \in$

$\in L(\sigma_\kappa) \setminus \{\sigma_\kappa\} (\forall q \in \{1, \dots, t\}) (\forall v^q \in T_\kappa^q) (\forall \tau \in \mathcal{Q}_\kappa^q(v^q)) (\sigma_{\kappa, \kappa-1} \cup [X + \{\tau\}]) / \sigma_\kappa = \mathcal{Q}_{\kappa, \kappa-1} + \mathcal{Q}_\kappa^q(v^q)$). Если $X \sim Y$ (mod $\mathcal{Q}_{\kappa,t}$), то будем говорить, что подгруппы X, Y потенциально эквивалентны относительно идеала $\mathcal{Q}_{\kappa,t}$.

Замечание 1. На первый взгляд t -кратная транзитивность подгруппы X кажется необходимым условием для $X \sim \sigma_\kappa$ (mod $\mathcal{Q}_{\kappa,t}$), однако это неверно: например, $A_\kappa \sim \sigma_\kappa$ (mod $\mathcal{Q}_{\kappa, \kappa-1}$) при $\kappa \geq 4$, однако A_κ лишь $(\kappa - 2)$ -кратно транзитивна. Обычная (1-кратная) транзитивность X уже является необходимой для $X \sim \sigma_\kappa$ (mod $\mathcal{Q}_{\kappa,t}$) при любом $t \in \{1, \dots, \kappa - 1\}$. Очевидно также, что t -кратной транзитивности X достаточно для $X \sim \sigma_\kappa$ (mod $\mathcal{Q}_{\kappa,t}$) при любом $t \in \{1, \dots, \kappa - 1\}$. Возьмем цепь $\gamma \in \Gamma_\kappa^{\text{co}}$ и занумеруем ее элементы в порядке убывания:

$$Q_1 = \sigma_\kappa, Q_2 = \mathcal{Q}_{\kappa, \kappa-2} + \sigma_\kappa, Q_3 = \mathcal{Q}_{\kappa, \kappa-3} + \sigma_\kappa, Q_4 = \mathcal{Q}_{\kappa, \kappa-4} + \sigma_\kappa, \dots, Q_{D(\kappa)-1} = \mathcal{Q}_{\kappa, 1} + \sigma_\kappa; \text{ положим } R_m = Q_m / \sigma_\kappa, 1 \leq m \leq D(\kappa) - 1 \text{ (тогда } Q_m = R_m + \sigma_\kappa \text{)}. \text{ Для данного натурального } q, 1 \leq q \leq D(\kappa) - 1, \text{ соотношения } \mathcal{Q}_{\kappa, \mu(q)-1} < R_q \leq \mathcal{Q}_{\kappa, \mu(q)} \text{ однозначно (но не$$

взаимоднозначно) определяют натуральное число $\mu(q)$, $1 \leq \mu(q) \leq \kappa - 1$. Введем также обозначения: $\gamma^q(X) = \{R_q + X, \dots, R_{D(\kappa)-1} + X = S_{\kappa,1} + X, X\}$,

где $X \in L(\sigma_\kappa)$, $1 \leq q \leq D(\kappa) - 1$; $R_q(C \geq (X)) = \{Q_q = R_q + \sigma_\kappa, \dots, R_q + X\}$, где

$$X \in C \subset L(\sigma_\kappa), \{ \sigma_\kappa, \dots, X \} = C \geq (X), 1 \leq q \leq D(\kappa) - 1.$$

Определение. Пусть $\gamma \in \Gamma_\kappa^{\text{co}}$, $C \in [\text{comp}(\sigma_\kappa)]^{\min}$. Подмножество $\Delta^1(\gamma + C) \subset L(\sigma_\kappa)$ назовем одноступенчатым сдвигом цепи $\gamma + C$, если существуют число $t \in \{2, \dots, D(\kappa) - 2\}$ и и подгруппа $X \in C \cap \hat{K}_{\sigma_\kappa}^{\mu(t)}(\sigma_\kappa)$ такие, что

$$\Delta^1(\gamma + C) = \gamma \geq (Q_{t-1}) + R_t(C \geq (X)) + \gamma^{t+1}(X) + C < (X).$$

Обобщая эту ситуацию, определим многоступенчатый сдвиг цепи $\gamma + C$: подмножество $\Delta^q(\gamma + C) \subset L(\sigma_\kappa)$ назовем q -ступенчатым сдвигом цепи $\gamma + C$, если существуют числа $t_1, \dots, t_q$ ($1 < t_1 < \dots < t_q < D(\kappa) - 1$) и подгруппы $X_1, \dots, X_q$ ($X_1 > \dots > X_q$) такие, что

$$X_1 \in C \cap \hat{K}_{\sigma_\kappa}^{\mu(t_1)}(\sigma_\kappa), \text{ для } i \geq 2 \quad X_i \in C \cap \hat{K}_{\sigma_\kappa}^{\mu(t_i)}(X_{i-1})$$

и

$$\Delta^q(\gamma + C) = \gamma \geq (Q_{t_1-1}) + R_{t_1}(C \geq (X_1)) + (\gamma^{t_1+1}(X_1) / \gamma^{t_2}(X_1)) + R_{t_2}(C \geq (X_2) / C \geq (X_1)) + (\gamma^{t_2+1}(X_2) / \gamma^{t_3}(X_2)) + R_{t_3}(C \geq (X_3) / C \geq (X_2)) + \dots + R_{t_q}(C \geq (X_q) / C \geq (X_{q-1})) + \gamma^{t_q+1}(X_q) + C < (X_q)$$

Замечание 2. Так как

$$(\forall s \in \{1, \dots, \kappa - 1\}) (\forall X \in \hat{K}_{\sigma_\kappa}^s(\sigma_\kappa)) \hat{K}_{\sigma_\kappa}^s(X) = \hat{K}_{\sigma_\kappa}^s(\sigma_\kappa),$$

то в определении $\Delta^q(\gamma + C)$ можно положить для $i \geq 2$ $X_i \in C \cap \hat{K}_{\sigma_\kappa}^{\mu(t_i)}(\sigma_\kappa)$.

Замечание 3. Приведенное нами определение сдвига эквивалентно другому, менее простому, но более естественному (которым необходимо пользоваться в начальной стадии доказательства теоремы 1, лишь затем сведя его к более удобному определению, которое здесь мы привели сразу). Дадим пояснения по этому поводу для случая одноступенчатого сдвига. Второе определение $\Delta^1(\gamma + C)$ отличается от приведенного нами тем, что подгруппа X берется из $\text{Di} C \cap \{Y: Y \in L(\sigma_\kappa), Y \sim \sigma_\kappa \pmod{R_t, \gamma}\}$, где $Y \sim \sigma_\kappa \pmod{R_t, \gamma} \iff (\forall q \in \{t, \dots, D(\kappa) - 1\}) (\forall \tau \in R_q / R_{q+1}) (R_{q+1} \cup [Y + \{\tau\}]) / \sigma_\kappa = R_q$ (здесь $R_{D(\kappa)}$ пусто по определению). Нетрудно показать, что

$$(\forall t \in \{1, \dots, \kappa - 1\}) (\forall \nu_1^t, \nu_2^t \in T_\kappa^1) (\forall X \in L(\sigma_\kappa))$$

$((\forall \tau \in \sigma_\kappa^t(\nu_1^t)) [X + \{\tau\}] \supset \sigma_\kappa^t(\nu_1^t)) \iff ((\forall \psi \in \sigma_\kappa^t(\nu_2^t)) [X + \{\psi\}] \supset \sigma_\kappa^t(\nu_2^t))$ откуда, в свою очередь, легко извлекается эквивалентность двух определений $\Delta^1(\gamma + C)$. Для $\Delta^q(\gamma + C)$ рассуждения аналогичны, но записываются довольно громоздко и поэтому мы их опускаем.

Мы приняли первое определение сдвигов $\Delta^1(\gamma + C)$, $\Delta^q(\gamma + C)$, так как оно удобнее второго: отношений вида $\sim \sigma_\kappa \pmod{R_t, \gamma}$ гораздо меньше, чем вида $\sim \sigma_\kappa \pmod{R_t, \gamma}$, и, кроме того, отношения $\sim \sigma_\kappa \pmod{R_t, \gamma}$ не зависят от выбора $\gamma \in \Gamma_\kappa^{\text{co}}$, так как

$$\{\sigma_{\kappa,1} + \sigma_\kappa\}_{1 \leq t \leq \kappa-1} = \bigcap_{t \in \Gamma_\kappa^{\text{co}}} \gamma.$$

Множество всех цепей вида $\gamma + C$, где $\gamma \in \Gamma_\kappa^{\text{co}}$, $C \in [\text{comp}(\sigma_\kappa)]^{\min}$, обозначим через $[\Gamma_\kappa^{\text{co}}, \sigma_\kappa]$, а множество всех их сдвигов через $\Delta([\Gamma_\kappa^{\text{co}}, \sigma_\kappa])$. Доказательство нижеприводимой теоремы 1 использует следующие утверждения.

Лемма 1. Если подполугруппа $B < \sigma_\kappa$ максимальна в подполугруппе

$$A \leq \Phi_\kappa, \text{ то } (B \cap \sigma_\kappa = A \cap \sigma_\kappa) \dot{\vee} (B \cap \sigma_{\kappa-1} = A \cap \sigma_{\kappa-1}),$$

где $\dot{\vee}$ — дизъюнкция Шеффери (исключительное „или ... или“).

Следствие. Если подполугруппа $B < \sigma_\kappa$ максимальна в подполугруппе $A \leq \sigma_\kappa$ и $B \cap \sigma_{\kappa-1} = A \cap \sigma_{\kappa-1}$, то подгруппа $B \cap \sigma_\kappa$ максимальна в подгруппе $A \cap \sigma_\kappa$.

Лемма 2. $l_{\min}(\sigma_\kappa) \leq \lfloor \kappa/2 \rfloor + 3$.

Лемма 3. Для любых $\gamma \in \Gamma_\kappa^{\text{co}}$, $C \in [\text{comp}(\sigma_\kappa)]$ всякий сдвиг цепи $\gamma + C$ является композиционной цепью.

Лемма 4. Все сдвиги цепи $\gamma + C$ (где $\gamma \in \Gamma_\kappa^{\text{co}}$, $C \in [\text{comp}(\sigma_\kappa)]$) равномогущны и эта мощность равна $|\gamma + C|$, следовательно, равномогущны и любые два сдвига любых двух цепей

$$\gamma_1 + C_1, \gamma_2 + C_2 \text{ (где } \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_\kappa^{\text{co}}, C_1, C_2 \in [\text{comp}(\sigma_\kappa)]^{\min} \text{)}.$$

Теорема 1. $[\text{comp}(\sigma_\kappa)]^{\min} = [\Gamma_\kappa^{\text{co}} + \Delta([\Gamma_\kappa^{\text{co}}, \sigma_\kappa])]$, то есть $[\text{comp}(\sigma_\kappa)]^{\min}$ исчерпывается цепями вида $\gamma + C$, где $\gamma \in \Gamma_\kappa^{\text{co}}$, $C \in [\text{comp}(\sigma_\kappa)]^{\min}$ и их всевозможными сдвигами.

Следствие. $l_{\min}(\sigma_\kappa) = (D(\kappa) - 1) + l_{\min}(\sigma_\kappa) \sim D(\kappa)$.

§ 2. Перейдем к обобщению на универсальные алгебры. Скажем, что A есть алгебра с условием максимальности, если $L(A)$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. Если A — алгебра с условием максимальности, то всякая цепь $C \in [\text{comp}(A)]$ вполне упорядочена относительно $\supseteq$, но может не быть таковой относительно $\subseteq$. Кроме того, всякая алгебра с условием максимальности будет наследственно конечнопорожденной и, следовательно, наследственно цорновской. Всюду далее в § 2 ограничимся рассмотрением алгебр с условием максимальности; другие ограничения будут налагаться в ходе рассуждений.

Подалгебру B алгебры $A = \langle A; F \rangle$ назовем идеалом в A , если $(\forall f_i \in F) (\forall j \in \{1, \dots, n_i\}) x_j \in B \rightarrow f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_{n_i}) \in B$.

Множество всех собственных (отличных от $A, \emptyset$) идеалов в A обозначим $I(A)$ и назовем A I -алгеброй, если $I(A)$ непусто. Ограничимся рассмотрением I -алгебр. Далее назовем I -алгебру A I -отделимой, если $\exists I \in I(A)$ такой, что $A \setminus I \supset L(A) \setminus [A, \emptyset]$, то есть, если A обладает простым собственным идеалом. Через $I_{\text{pr}}(A)$ обозначим множество всех простых собственных идеалов в A .

Лемма 5. Если A I -отделимая I -алгебра, $B, D \in L(A)$ и D максимальна в B , то

$$(\forall I \in I_{\text{pr}}(A)) (B \cap I = D \cap I) \dot{\vee} (B \cap (A/I) = D \cap (A/I)).$$

Пусть $[_1(A)]$ — множество всех собственноидеальных цепей в $L(A)$ (то есть $(\forall C \in [_1(A)]) (\forall X \in C) X \in I(A)$). Цепь $C \in [_1(A)]$ назовем I -неуплотняемой, если $(AC^* \in [_1(A)]) (C \subseteq C^* \rightarrow C^* = C)$; множество всех I -неуплотняемых цепей из $[_1(A)]$ обозначим $[_1^{\text{pr}}(A)]$. Пусть $I_1^{\text{pr}}(A)$ — максимальный элемент цепи $C \in [_1^{\text{pr}}(A)]$; положим $[_1^{\text{pr}}(A)] = \{C: C \in [_1^{\text{pr}}(A)], I_1^{\text{pr}}(A) \in C\}$. Назовем I -отделимую I -алгебру A сильно I -отделимой I -алгеброй (сокращенно II^* -алгеброй) если $[_1^{\text{pr}}(A)]$ непусто. Пусть цепь $C \in [_1^{\text{pr}}(A)]$ имеет вид $I_1^{\text{pr}} > \dots > I_\alpha > \dots (\alpha \in \Lambda)$. Через $I_\alpha^{\text{pr}}(\alpha + 1, \alpha)$ обозначим

начим интервал в $L(A)$, порожденный ее элементами $I_{\alpha+1} + (A \setminus I_1^c)$, $I_1 + (A \setminus I_1^c)$ причем, если A имеет последний элемент и он есть α^* , то под $I_1^c(\alpha^* + 1, \alpha^*)$ понимается интервал, порожденный элементами $A \setminus I_1^c$, $I_{\alpha^*} + (A \setminus I_1^c)$ далее $\Gamma_c(A) = \bigcup_{\alpha \in A} I_{\alpha}^c(\alpha + 1, \alpha)$. Через $\Gamma_c^{co}(A)$ обозначим множество всех композиционных цепей решетки $\Gamma_c(A)$ то, что $\Gamma_c(A)$ будет подрешеткой в $L(A)$, очевидно и пусть $\Gamma^{co}(A) = \bigcup_{C \in [\Gamma]^{co}(A)} \Gamma^{co}(A)$, $[0](A) = \{\gamma \cup C; \gamma \in \Gamma^{co}(A), C \in [\text{comp}(A/I_1^c)]\}$.

Очевидно, для любой II^* -алгебры с условием максимальности $[0](A)$ непусто. Через $[0]^{min}(A)$ обозначим множество всех цепей из $[0](A)$, имеющих минимальную (по сравнению с другими цепями из $[0](A)$) мощность

Замечание 4. Пусть $F_{(A)}^*(A/I_1^c)$ — главный фильтр в $L(A)$, порожденный A/I_1^c . $[\Gamma^{co}(C)]^{co}(A)$ — множество всех его композиционных цепей и $\Gamma_{F^*(C)}^{co}(A) = \Gamma^{co}(A) \cap [\Gamma^{co}(C)]^{co}(A)$. Пусть далее

$$\Gamma^{co,min}(A) = \{\gamma : \gamma \in \Gamma^{co}(A), (A \setminus \gamma) \in \Gamma^{co}(A) \mid \gamma \leq \gamma'\},$$

$$\Gamma_{F^*(C)}^{co,min}(A) = \{\gamma : \gamma \in \Gamma_{F^*(C)}^{co}(A), (\forall \gamma' \in \Gamma_{F^*(C)}^{co}(A)) \mid \gamma \leq \gamma'\}.$$

Тогда имеем:

$$\gamma \cup C \in [0]^{min}(A) \rightarrow C \in [\text{comp}(A/I_1^c)], \gamma \cup C \in [0]^{min}(A) \rightarrow \gamma \in \Gamma_{F^*(C)}^{co,min}(A),$$

однако из $\gamma \cup C \in [0]^{min}(A)$ не следует $\gamma \in \Gamma^{co,min}(A)$.

Аналогично тому, как это было сделано в § 1, вводится понятие сдвига цепи $\gamma \cup C \in [0]^{min}(A)$ „вдоль“ цепи $C \in [\text{comp}(A/I_1^c)]$ и доказываются леммы, аналогичные леммам 3, 4. Для дальнейшего требуется следующая детализация. Обозначим через $[0]^{fin}(A)$ множество всех конечных цепей из $[0](A)$; представляются две возможности: а) $[0]^{fin}(A)$ непусто, б) $[0]^{fin}(A)$ пусто.

В случае а) с помощью вышеуказанных аналогов всех необходимых лемм из § 1 получаем аналог теоремы 1:

Теорема 2. Если для II^* -алгебры A $[0]^{fin}(A)$ непусто, то

$$[\text{comp}(A)]^{min}(A) = [0]^{min}(A) \cup \Delta([0]^{min}(A)).$$

Замечание 5. Здесь в отличие от теоремы 1 пишем $\cup$ вместо $+$, так как сдвиг цепи $\gamma \cup C$ может оказаться цепью $\gamma' \cup C'$.

Рассмотрим теперь случай б). Здесь все цепи из $[0](A)$ бесконечны, и потребуется понятие обобщенного сдвига; для простоты определим лишь одноступенчатый обобщенный сдвиг (многоступенчатый определяется аналогично). Пусть

$$\gamma \cup C \in [0]^{min}(A), X \in C \cap K_{A/I_1^c}^A(A/I_1^c);$$

обычным одноступенчатым сдвигом цепи $\gamma \cup C$, соответствующим подалгебре X и кардиналу α , мы называли цепь

$$\gamma \cup (Q_\alpha) + R_{\alpha+1}(C \setminus X) + \gamma^{\alpha+2}(X) + C \setminus X$$

(обозначения имеют смысл, аналогичный обозначениям § 1). Мы получим определение одноступенчатого обобщенного сдвига цепи $\gamma \cup C$ (соответствующего X и α), если заменим слагаемое $\gamma^{\alpha+2}(X)$ любым его внутренним уплотнением, не увеличивающим мощности. Множество всех обобщенных сдвигов всевозможных цепей из $[0]^{min}(A)$ обозначим $\Delta([0]^{min}(A))$. Очевидно, $\Delta([0]^{min}(A)) \subseteq \Delta([0]^{min}(A))$.

Теорема 3. Если для II^* -алгебры A $[0]^{min}(A)$ пусто, то

$$[\text{comp}(A)]^{min}(A) = [0]^{min}(A) \cup \Delta([0]^{min}(A)),$$

Итак $[\text{comp}(A)]^{min}(A)$ описано любой II^* -алгебры с условием максимальности. Класс (фиксированной сигнатуры) всех таких алгебр абстрактен (замкнут относительно изоморфизмов). Возникает вопрос об аксиоматизируемости этих классов (в различных сигнатурах), о мощностях систем аксиом и т. п.

§ 3. Рассмотрим алгебры, решетки подалгебр которых обладают заданной конечной проводимостью.

Теорема 4. Для всякого бесконечного кардинала α , любого натурального $m \geq 3$ и любой сигнатуры

$$F = \{f_i^{n_i}, i \in I, n_i \geq 1, |I| \leq 2^\alpha, (\exists i \in I) n_i \geq 2\}$$

существует алгебра $A = \langle A; F \rangle$ мощности α такая, что $l_{min}(A) = m$, но „почти все“ цепи из $[\text{comp}(A)]$ имеют мощность α .

Доказательство. Пусть $A = A_1 + A_2$, $|A_1| = \tau$, $|A_2| = m$. Каждому функциональному символу $f_i \in F$ арности n_i следующим образом сопоставим определенную на A операцию $f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$. Пусть $n_i \geq 2$, тогда

$$f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in \{x_1, \dots, x_{n_i}\}, \text{ если } (x_1, \dots, x_{n_i}) \in A_1 \vee (x_1, \dots, x_{n_i}) \in A_2;$$

если же $x_{i_1}, \dots, x_{i_s} \in A_1 (s < n_i)$, а остальные x_j принадлежат A_2 , то вполне упорядочив A_1 по теореме Цермело некоторым линейным порядком π и обозначив через x_* π -максимальный элемент множества $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$ (такой x_* существует в силу конечности s), а через x_* непосредственно π -следующий за x_* элемент в A_1 , полагаем:

$$f_i(x_{\tau_0(1)}, \dots, x_{\tau_0(n_i)}) = a_1, (\forall \tau \in \sigma_{n_i} / \{\tau_0\}) f_i(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n_i)}) = x_*,$$

где a_1 есть π -наименьший элемент в A_1 и τ_0 — некоторая фиксированная подстановка из σ_{n_i} . Пусть теперь $n_i = 1$, тогда полагаем $(\forall x \in A_1) f_i(x) = x$, на $A_2 f_i(x)$ действует как цикл длины 3 (т. е. перемещает лишь 3 элемента из A_2 , оставляя остальные неподвижными).

Нетрудно прозреть, что $A = \langle A; F \rangle$, где сигнатура F реализована вышеуказанным образом, является искомой алгеброй. Теорема доказана.

Замечание 6. Требование $m \geq 3$ в формулировке теоремы 4 существенно, так как при $m = l_{min}(A) = 2$ $[\text{comp}(A)]$ состоит из единственной цепи $A > \emptyset$.

Для конечных алгебр, используя функции Шеффера и функции из некоторых замкнутых классов конечнозначной логики, получаем нижеследующее.

Теорема 5. Для любых натуральных m, n ($2 \leq m \leq n$) и любой сигнатуры $F = \{f_i^{n_i}, i \in I, n_i \geq 1, |I| \leq \omega\}$ существует алгебра $A = \langle A; F \rangle$ мощности n такая, что $l_{min}(A) = m$.

Часть II, подготавливаемая автором в виде отдельной публикации, будет посвящена изучению ряда свойств и числовых характеристик решеток $L(\sigma_k), L(\Omega_k), L(P_k)$, где P_k — алгебра Поста ранга k (см. [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош Г. Лекции по общей алгебре. Физматгиз. М., 1962.
2. Саломая А. „Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики“. Киберн. сб. вып. 8, 7—32 (1964).
3. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963.
4. Epstein L. E. A function related to the series for $e^{1/x}$, IMP, 18, № 3 (1939).

Р. А. Байрамов

Бэ'зи чэбрлэрин алт чэбрлэринин гэфэси наггында, I

ХУЛАСЭ

Тэдгигатларда симметрик жарымгруп вэ бэ'зи универсал чэбрлэр үчүн алт чэбрлэринин гэфэси өјрэнилмишдир. Нэтичэлэр 5 теорем шэклиндэ исбат олунмушдур.

З. А. АЛИЕВА

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ $\bar{E}_s^\alpha$

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_s)$ периодическая, с периодом, равным единице по каждой из переменных $x_1, \dots, x_s$, и разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье:

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \dots, m_s) \exp(2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)). \quad (1)$$

Если коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенству

$$|C(m_1, \dots, m_s)| \leq \frac{K}{\bar{m}_1^{\alpha_1} \bar{m}_2^{\alpha_2} \dots \bar{m}_s^{\alpha_s}}, \quad \alpha_i > 1, \alpha_1 > 1;$$

$$\bar{m} = \max(1, |m|),$$

то, следуя [2], будет говорить, что функция принадлежит классу $\bar{E}_s^\alpha(K)$.

Легко проверить, что класс $\bar{E}_s^\alpha(K)$ является полным метрическим пространством в метрике равномерной сходимости. В дальнейшем рассмотрим случай $\alpha_1 = 1 + \varepsilon$. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $f_1(x_1, \dots, x_s) \in E_s^\alpha(C_1)$ и $f_2(x_1, \dots, x_s) \in E_s^\alpha(C_2)$, тогда при любых a_1 и b_2 ; $b_1 f_1 + b_2 f_2 \in E_s^\alpha(|b_1|C_1 + |b_2|C_2)$ и $f_1 \cdot f_2 \in \bar{E}_s^\alpha(AC_1 C_2)$, где

$$A = \left[2^{\alpha+1} \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right) \right]^{1+(s-1)\alpha_1}$$

Теорема 2. Пусть 1.) $\varphi(x_1, \dots, x_s) \in \bar{E}_s^\alpha(C)$;

$$2) f(x_1, \dots, x_s, u) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_1, \dots, x_s) u^k \text{ в области}$$

$$D \left(0 \leq x_i \leq 1, |u| < |\varphi| \leq C \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right) \left(3 + \frac{2}{\alpha_1-1} \right) \right)$$

и $a_k(x_1, \dots, x_s) \in \bar{E}_s^\alpha(C)$, $k = 1, 2, \dots$,

$$3) 0 < C \leq \frac{1}{2A},$$

тогда $f[x_1, \dots, x_s, \varphi(x_1, \dots, x_s)]$ принадлежит классу $\bar{E}_s^\alpha(C)$.

Теорема 3. При условии 1) теоремы 2 для любых φ_1 и φ_2 из класса $\bar{E}_s^a(C)$ удовлетворяется неравенство

$$|f(x_1, \dots, x_s, \varphi_1) - f(x_1, \dots, x_s, \varphi_2)| \leq L |\varphi_1 - \varphi_2|,$$

где

$$L = 4C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^s.$$

Теперь определим функцию $P(x_1, \dots, x_s)$ из равенства

$$P(x_1, \dots, x_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f \left[\left\{ \frac{\kappa}{p} \right\}, \left\{ \frac{a\kappa}{p} \right\}, \dots, \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{a^{s-1}\kappa}{p} \right\} \right] \sum_{\substack{\bar{m}_1, (\bar{m}_2, \dots, \bar{m}_s) \\ \bar{m}_1, (\bar{m}_2, \dots, \bar{m}_s) \in N_1}} e^{2\pi i \left[m_1 \left(x_1 - \frac{\kappa}{p} \right) + \dots + m_s \left(x_s - \frac{a^{s-1}\kappa}{p} \right) \right]},$$

где $N_1 = \left[N^{\frac{1}{2}} \right]$ — простое число ($P = N$).

Теорема 4. Если функция $f(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит классу $\bar{E}_s^a(C)$ и тригонометрический полином $P(x_1, \dots, x_s)$ определен равенством (1), то справедлива оценка

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 |f(x_1, \dots, x_s) - P(x_1, \dots, x_s)|^2 dx_1 \dots dx_s = O \left(\frac{1}{N^{\alpha - \frac{1}{2}}} \right)$$

Теорема 5. Если функция $f(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит классу $\bar{E}_s^a(C)$ и тригонометрический полином $P(x_1, \dots, x_s)$ определен равенством (1), справедлива оценка

$$f(x_1, \dots, x_s) - P(x_1, \dots, x_s) = O \left(\frac{1}{N^{\alpha - \frac{1}{2}}} \right)$$

равномерно относительно всех $x_1, \dots, x_s$.

В работе [1] для класса функций $\bar{E}_s^a$ построен интерполяционный полином и даны оценки погрешности

$$R = O \left(\frac{\ln^7 N}{N^{\alpha - \frac{1}{2}}} \right)$$

в пространстве L_2 и

$$R = O \left(\frac{\ln^7 N}{N^{\frac{\alpha-1}{2}}} \right)$$

в пространстве C .

Сравнивая эти оценки погрешности с результатами теорем 4 и 5 увидим, что они улучшены. Теперь рассмотрим интегральное уравнение Гаммерштейна:

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = g(x_1, \dots, x_s) + \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) f(y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)) dy_1 \dots dy_s. \quad (2)$$

Теорема 6. Пусть

$$g(x_1, \dots, x_s) \in \bar{E}_s^a \left(\frac{C}{2} \right), \quad K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) \in \bar{E}_s^a(C)$$

и $f(y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s))$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Если

$$|\lambda| < \lambda^* = \min \left\{ \frac{1}{2C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{2s}}, \frac{1}{LC \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{2s}} \right\},$$

то уравнение (2) имеет единственное решение, принадлежащее классу $\bar{E}_s^a(C)$, где L определяется теоремой 3.

Доказательство. Обозначим коэффициенты Фурье функции

$$\psi(x_1, \dots, x_s) = \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) \times$$

$\times f(y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)) dy_1 \dots dy_s$ через $C(m_1, \dots, m_s)$, а коэффициенты Фурье $K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s)$ через $C_1(n_1, \dots, n_s, m_1, \dots, m_s)$. Покажем, что оператор A , где

$$A\varphi = \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) \times \\ \times f(y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)) dy_1 \dots dy_s,$$

переводит элементы пространства $\bar{E}_s^a \left(\frac{C}{2} \right)$ в себя.

Действительно,

$$C(m_1, \dots, m_s) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \psi(x_1, \dots, x_s) e^{-2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} dx_1 \dots dx_s =$$

$$= \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{n_1, \dots, n_s, K_1, \dots, K_s = -\infty}^{\infty} C_1(n_1, \dots, n_s, K_1, \dots, K_s) \right.$$

$$\left. e^{2\pi i(n_1 x_1 + \dots + n_s x_s + K_1 y_1 + \dots + K_s y_s)} \times f(y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)) \times \right.$$

$$\left. \times dy_1 \dots dy_s \right\} e^{-2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} dx_1 \dots dx_s = \lambda \sum_{K_1, \dots, K_s = -\infty}^{\infty} C_1(m_1, \dots, m_s,$$

$$K_1, \dots, K_s) \int_0^1 \dots \int_0^1 f(y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)) e^{2\pi i(K_1 y_1 + \dots + K_s y_s)} dy_1 \dots dy_s.$$

Тогда

$$|C(m_1, \dots, m_s)| \leq \frac{|\lambda|C}{\bar{m}_1 (\bar{m}_2 \dots \bar{m}_s)^{\alpha \cdot \alpha_1}} \sum_{K_1, \dots, K_s = -\infty}^{\infty} \frac{1}{K_1 (K_2 \dots K_s)^{\alpha \cdot \alpha_1}} \times \\ \times C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s \leq \frac{|\lambda|C^2 \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^{2s}}{\bar{m}_1 (\bar{m}_2 \dots \bar{m}_s)^{\alpha \cdot \alpha_1}} \leq \frac{C}{\bar{m}_1 (\bar{m}_2 \dots \bar{m}_s)^{\alpha \cdot \alpha_1}},$$

т. е. $\psi(x_1, \dots, x_s) \in \bar{E}_s^a \left(\frac{C}{2} \right)$.

Теперь покажем, что оператор A есть оператор сжатия. Так как

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \leq |\lambda|C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^{2s} \cdot L\rho(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$|\lambda|LC \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^{2s} < 1,$$

то получим, что оператор A является оператором сжатия. Таким образом, выполняются условия принципа сжатых отображений и поэтому уравнение (2) имеет единственное решение в классе $\bar{E}_s^a(C)$. Теорема доказана.

Далее вместо $f[y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)]$ положим интерполяционный полином, построенный для класса $\bar{E}_s^a(C)$:

$$f[y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f[M_k, \varphi(M_k)] \cdot \psi_k(y_1, \dots, y_s) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{N^{\frac{\alpha-1}{2}}}\right),$$

$$\varphi(P) = g(P) + \lambda \int_{G_s} K(P, Q) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(M_k, \varphi(M_k)) \psi_k(Q) \right] dQ +$$

$$+ \lambda O\left(\frac{1}{N^{\frac{\alpha-1}{2}}}\right) \int_{G_s} K(P, Q) dQ.$$

Вместо P , взяв точки $M_j + \left(\left\{ \frac{j}{N} \right\}, \left\{ \frac{aj}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a^{s-1}j}{N} \right\} \right)$ и отбросив остаточные члены, получим

$$\bar{\varphi}(M_j) = g(M_j) + \frac{\lambda}{N} \sum_{k=1}^N f(M_k, \bar{\varphi}(M_k)) \int_{G_s} K(M_j, Q) \psi_k(Q) dQ.$$

Обозначим

$$A_{jk} = \int_{G_s} K(M_j, Q) \psi_k(Q) dQ =$$

$$= \sum_{\bar{m}_1(\bar{m}_2 \dots \bar{m}_s)^{\alpha_1} < N_1} \int_0^1 \dots \int_0^1 K(M_j, Q) e^{2\pi i \left[m_1 \left(y_1 - \frac{k}{N} \right) + \dots + m_s \left(y_s - \frac{a^{s-1}k}{N} \right) \right]} \times$$

$$\times dy_1 \dots dy_s = \sum_{\bar{m}_1(\bar{m}_2 \dots \bar{m}_s)^{\alpha_1} < N_1} \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 K(M_j, Q) e^{2\pi i (m_1 y_1 + \dots + m_s y_s)} dy_1 \dots \right.$$

$$\left. \dots dy_s \right) e^{-2\pi i \frac{m_1 + m_2 a + \dots + m_s a^{s-1}}{N} k} = \sum_{\bar{m}_1(\bar{m}_2 \dots \bar{m}_s)^{\alpha_1} < N_1} \sum_{k_1, \dots, k_s = -\infty}^{\infty} C_k(k_1, \dots, k_s, -$$

$$- m_1, \dots, -m_s) e^{2\pi i \left[k_1 \left(\frac{j}{p} - \frac{k}{p} \right) + \dots + k_s \left(\frac{a^{s-1}j}{p} - \frac{a^{s-1}k}{p} \right) \right]},$$

где $C_k(k_1, \dots, k_s, m_1, \dots, m_s)$ — коэффициенты Фурье функции $K(P, Q)$. Оценим A_{jk} ;

$$|A_{jk}| \leq C \left(3 + \frac{1}{\alpha - 1} \right)^s \frac{1}{\bar{m}_1(\bar{m}_2 \dots \bar{m}_s)^{\alpha_1} < N_1} \frac{1}{\bar{m}_1(\bar{m}_2 \dots \bar{m}_s)^{\alpha_1}} =$$

$$= C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s \cdot B,$$

где

$$B = \sum_{\bar{m}_1(\bar{m}_2 \dots \bar{m}_s)^{\alpha_1} < N_1} \frac{1}{[\bar{m}_1(\bar{m}_2 \dots \bar{m}_s)^{\alpha_1}]^s}.$$

Обозначим $\bar{\varphi}(M_j) = z_j$, тогда получим

$$z_j = b_j + \frac{\lambda}{N} \sum_{k=1}^N A_{jk} f(M_k, z_k). \quad (3)$$

Рассмотрим множество R :

$$R = \left\{ z_k, |z_k| \leq C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s \right\}.$$

Очевидно, что множество R полное. Пусть $|f(M_k, z_k)| \leq M$ и $f(M_k, z_k)$ удовлетворяет по z_k условию Липшица с константой L , тогда, если

$$|\lambda| < \lambda^* = \min \left\{ \frac{1}{2B \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s M}, \frac{1}{CBL \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s} \right\},$$

то система (3) имеет единственное решение, принадлежащее множеству R , и его можно определить методом последовательных приближений. Пусть нулевое приближение есть $z^{(0)}$, тогда n -е приближение будет

$$z_j^{(n)} = b_j + \frac{\lambda}{N} \sum_{k=1}^N A_{jk} f(M_k, z_k^{(n-1)}).$$

Далее оценим $|z_j^{(n)} - z_j^{(n-1)}|$:

$$\max_j |z_j^{(n)} - z_j^{(n-1)}| \leq \frac{|\lambda|}{N} CB \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s L \max_j |z_j^{(n-1)} - z_j^{(n-2)}| \cdot N.$$

Положим $\max_j |z_j^{(n)} - z_j^{(n-1)}| = v_n$. Тогда

$$v_n \leq |\lambda| CB \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s \cdot L v_{n-1},$$

Полагая $n = 1, 2, \dots$, имеем

$$v_n \leq \left(|\lambda| CB \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s \cdot L \right)^n \cdot v_0.$$

Так как

$$|\lambda| LCB \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s < 1,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[|\lambda| CBL \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s \right]^n$$

сходится и сумма его равна

$$\frac{|\lambda| CBL \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s}{1 - |\lambda| CBL \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s}.$$

Пусть z_j^* — точное j -е решение системы (3), тогда

$$|z_j^* - z_j^{(n)}| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = v_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = q^{n+1} v_0 \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q} \cdot v_0.$$

где

$$q = |\lambda| CBL \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s.$$

Теперь оценим $\varphi(M_j) - z_j^{(n)}$. Имеем
 $|\varphi(M_j) - z_j^{(n)}| \leq |\varphi(M_j) - z_j| + |z_j - z_j^{(n)}|.$

Легко показать, что

$$|\varphi(M_j) - z_j| = O\left(\frac{1}{N^{\frac{\alpha-1}{2}}}\right).$$

Таким образом,

$$\varphi(M_j) = z_j^{(n)} + O\left(\frac{1}{N^{\frac{\alpha-1}{2}}}\right) = O(q^n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.
2. Солодов В. М. ЖВМ и МФ, т. 9. 1969, № 1.

Институт
кибернетики АН Азерб. ССР

Поступило 22. V 1970

З. Ә. Әлијева

$\bar{E}_s^\alpha$ Синфиндә гејри-хәтти интеграл тәнликләрин тәғриби
һәлли һағғында

ХҮЛАСӘ

Тәдғигатда $\bar{E}_s^\alpha$ синфиндә әдәди нәзәри шәбәкәләр үчүн интерполјасија чохәдлисиди гурулмуш вә галыг һәдд гијмәтләндирилмишдир. Сонра һаммерштејн типли интеграл тәнлијин һәммин синифдә һәллинин варлығы вә јеканәлији кәстәрилмишдир. Интерполјасија чохәдлисиди тәтбиг едәрәк интеграл тәнлик гејри-хәтти чәбри тәнликләр системинә кәтирилмиш вә бу систем ардычыл јахынлашма үсулу илә һәлл едилмишдир. Ејни заманда, хәталар гијмәтләндирилмишдир.

Т. К. ИСМАЙЛОВ

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМА УТРОИТЕЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ УЧЕТЕ ОГРАНИЧЕНИЯ МОЩНОСТИ ГЕНЕРАТОРА ТЕПЛОВЫМИ ПОТЕРЯМИ НА АНОДНОМ И СЕТОЧНОМ ЭЛЕКТРОДАХ ЛАМПЫ

Анализ утроителя высокочастотных колебаний в оптимальном режиме, при учете ограничения мощности генератора одновременным воздействием предельно допустимых тепловых потерь на анодном и сеточном электродах генераторной лампы (ГЛ), представляет определенный практический интерес, особенно при работе генератора в диапазоне СВЧ и более коротких волн. Последнее во многом объясняется тем, что с возрастанием частоты весьма интенсивно увеличиваются тепловые потери к конструкции лампы и, в первую очередь, на самом массивном ее электроде-аноме, температурный режим которого в основном определяет эквивалентную температуру нагрева отдельных элементов конструкции лампы. В силу этого обстоятельства на СВЧ величина предельно допустимой мощности потерь на аноде ГЛ достаточно часто начинает выполнять функции одного из наиболее критичных расчетных параметров энергетического режима генератора [1, 2].

В указанных случаях с целью уменьшения тепловых потерь на аноде ГЛ часто прибегают к максимальному использованию лампы по току при пониженных анодных напряжениях, что сопряжено с необходимостью работы со значительными величинами токов и напряжений, действующих в сеточной цепи ГЛ. Однако использование ГЛ при пониженных анодных напряжениях и повышенных амплитудах сеточных токов и напряжений, в свою очередь приводит к увеличению тепловых потерь на сетке лампы. При этом необходимо учесть, что величина указанных потерь достаточно резко возрастает с повышением номера гармонической составляющей анодного тока.

В рассматриваемом случае целесообразно выполнить исследования генератора в таком режиме, когда ГЛ отдает в нагрузку требуемую (необходимую) мощность, но не используется одновременно по двум предельно допустимым параметрам, так как последнее противоречит нормальным условиям эксплуатации лампы.

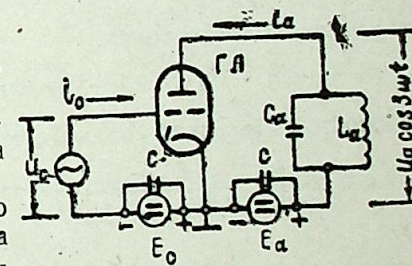


Рис. 1.

Проведем указанное исследование, используя схему триодного генератора (рис. 1), работающего в качестве утроителя высокочастотных колебаний. Потери на аноде ГЛ-утроителя могут быть определены по формуле [3—5]:

$$P_a = P_0^{(a)} - P_3^{(a)}, \quad (1)$$

где

$$P_0^{(a)} = E_a \frac{S_a U_c^{(a)} \gamma_{a_0}}{1 + \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2 \cos \theta_a)^2} \quad (2)$$

— подводимая к ГЛ-утроителю мощность источника анодного питания

$$P_3^{(a)} = \frac{R_3^{(a)}}{2} \left[\frac{S_a U_c^{(a)} \gamma_{a_0}}{1 + \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2 \cos \theta_a)^2} \right]^2 \quad (3)$$

— полезная мощность ГЛ-утроителя.

В то же время потери в сеточной цепи ГЛ-утроителя представляются выражением [1—3]

$$P_c^{(a)} = P_{c_1}^{(a)} + P_{c_0}^{(a)}, \quad (4)$$

где $P_{c_1}^{(a)} = \frac{S_c U_{c_1}^{(a)} \gamma_{c_1}^{(a)}}{2}$ — мощность возбуждения ГЛ-утроителя; (5)

$P_{c_0}^{(a)} = -S_c U_{c_0}^{(a)} \gamma_{c_0}^{(a)} \cos \theta_{c_0}^{(a)}$ — мощность, потребляемая из сеточной цепи (или поставляемая в нее) источником напряжения смещения. (6)

При работе ГЛ-утроителя на настроенную нагрузку $R_3^{(a)}$ косинусоидальным импульсом анодного тока $i_{a \text{ макс}}$ величины в (2), (3), (5) и (6) имеют следующие значения:

$U_c^{(a)} = \frac{i_{a \text{ макс}}}{S_a} \frac{1 + \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2 \cos \theta_a)^2}{1 - \cos \theta_a}$ — напряжение возбуждения ГЛ-утроителя; (7)

$\gamma_{a_0} = \frac{2}{3\pi} \sin^3 \theta_a \cos \theta_a$ — коэффициент разложения третьей гармоники [3]

импульса анодного тока; (8)

$\gamma_{a_0} = \frac{1}{\pi} (\sin \theta_a - \theta_a \cos \theta_a)$ — коэффициент разложения постоянной составляющей импульса анодного тока [3]; (9)

$\theta_a = \arccos \left(-\frac{E_c - E_c'}{U_c^{(a)} - D U_a^{(a)}} \right)$ — угол отсечки импульса [3] анодного тока; (10)

$U_a^{(a)} = R_3^{(a)} \frac{S_a U_c^{(a)}}{1 + \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2 \cos \theta_a)^2}$ — колебательное напряжение на анодном контуре ГЛ-утроителя; (11)

$\gamma_{c_1}^{(a)} = \frac{K_{c_1}}{2\pi} (2\theta_{c_1}^{(a)} - \sin 2\theta_{c_1}^{(a)})$ — коэффициент разложения первой

гармоники некосинусоидального [4, 6] импульса сеточного тока (13);

$\gamma_{c_0}^{(a)} = \frac{K_{c_1}}{\pi} (\sin \theta_{c_0}^{(a)} - \theta_{c_0}^{(a)} \cos \theta_{c_0}^{(a)})$ — коэффициент разложения посто-

янной составляющей некосинусоидального [4, 6] импульса сеточного тока (13);

$\theta_c^{(a)} \arccos \left(-\frac{E_c'}{U_c^{(a)}} \right)$ — угол отсечки [4, 6] сеточного тока (14);

$F_{13}^{(a)} = \frac{R_3^{(a)}}{R_1}$ — относительное сопротивление анодной нагрузки ГЛ-утроителя; (15)

$R_1 = \frac{1}{S_a D}$ — эквивалентное внутреннее сопротивление генераторной лампы; (16)

S_a, D — эквивалентные параметры [4] генераторной лампы;

E_c' — эквивалентное напряжение [4, 6] геометрического смещения.

Принимая во внимание (2), (3) и (5), (16), энергетический баланс в цепях анода и сетки ГЛ-утроителя можно записать в следующем виде:

$$P_a = \frac{1}{2} \frac{S_a U_c^{(a)} \gamma_{a_0}}{1 + \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2 \cos \theta_a)^2} \left[\frac{2\gamma_{a_0} F_{a_0} - R_3^{(a)}}{\gamma_{a_0}^2} \frac{S_a U_c^{(a)} \gamma_{a_0}}{1 + \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2 \cos \theta_a)^2} \right]$$

и

$$P_c^{(a)} = \frac{S_c (\gamma_{c_1}^{(a)} - 2\gamma_{c_0}^{(a)} \cos \theta_{c_0}^{(a)})}{2} \left[\frac{i_{a \text{ макс}}}{S_a} \frac{1 + \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2 \cos \theta_a)^2}{1 - \cos \theta_a} \right]$$

или

$$P_a = \frac{(S_a U_c^{(a)} \gamma_{a_0})^2}{2 A_{13}^{(a)}} \left[\frac{2\gamma_{a_0} (1 - \cos \theta_a)}{\gamma_{a_0}^2} \frac{E_a}{i_{a \text{ макс}}} - R_3^{(a)} \right] \quad (17)$$

и

$$P_c = \frac{A_{13}^{(a)} B_{13}^{(a)} S_c}{2} \left(\frac{i_{a \text{ макс}}}{1 - \cos \theta_a} \right)^2 \quad (18)$$

В выражениях (17) и (18)

$$A_{13}^{(a)} = \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2 \cos \theta_a)^2 \quad (19)$$

— коэффициент реакции анодного напряжения ГЛ-утроителя в исследуемом режиме,

$$B_{13}^{(a)} = \gamma_{c_1}^{(a)} - 2\gamma_{c_0}^{(a)} \cos \theta_{c_0}^{(a)} \quad (20)$$

— коэффициент режима сеточной цепи ГЛ-утроителя в том же режиме. Используя (17) и (18), запишем

$$\frac{P_a}{P_c^{(a)}} = \frac{S_a^2}{S_c} \frac{\gamma_{a_0}^2}{A_{13}^{(a)} B_{13}^{(a)}} \left[\frac{2\gamma_{a_0} (1 - \cos \theta_a)}{\gamma_{a_0}^2} \frac{E_a}{i_{a \text{ макс}}} - R_3^{(a)} \right] \quad (21)$$

В оптимальном режиме ГЛ-утроителя, у которой рост полезной мощности ограничивается одновременным взаимодействием мощностей потерь на аноде и сетке лампы, отношение (21) при условии равенства $P_c = P_{c \text{ доп}}$ должно принять максимальное значение, т. е.

$$\left(\frac{P_a}{P_{c \text{ доп}}} \right)_{\text{макс}} = \left\{ \frac{S_a^2}{S_c} \frac{\gamma_{a_0}^2}{A_{13}^{(a)} B_{13}^{(a)}} \left[\frac{2\gamma_{a_0} (1 - \cos \theta_a)}{\gamma_{a_0}^2} \frac{E_a}{i_{a \text{ макс}}} - R_3^{(a)} \right] \right\}_{\text{макс}} \quad (22)$$

Очевидно, сопротивление нагрузки, при котором реализуется искомый режим, определится из условия

$$\frac{d}{dR_3^{(a)}} \left\{ \frac{S_a^2}{S_c} \frac{\gamma_{a_0}^2}{A_{13}^{(a)} B_{13}^{(a)}} \left[\frac{2\gamma_{a_0} (1 - \cos \theta_a)}{\gamma_{a_0}^2} \frac{E_a}{i_{a \text{ макс}}} - R_3^{(a)} \right] \right\} = 0. \quad (23)$$

Из (23) следует, что

$$R_{3 \text{ опт}}^{(a)} = \frac{2\gamma_{a_0}(1 - \cos \theta_a)}{\gamma_{a_0}^2} \frac{E_a}{i_{a \text{ макс}}} - \frac{A_{13}^{(a)} B_{13}^{(a)}}{A_{13}^{(a)} \frac{dB_{13}^{(a)}}{dR_3^{(a)}} - B_{13}^{(a)} \frac{dA_{13}^{(a)}}{dR_3^{(a)}}} \quad (24)$$

В целях упрощения вида формулы (24) проведем ее исследование. Прежде всего, используя (7), (10), (11), (14) и (16), установим взаимосвязь между углами отсечек токов анода и сетки ГЛ-утроителя:

$$\theta_a = \arccos \left[\frac{A_{13}^{(1a)}}{1 + 2\gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2\cos \theta_a) \cos \theta_a} \left(\cos \theta_c + \kappa \frac{1 - \cos \theta_a}{A_{13}^{(1a)}} \right) \right], \quad (25)$$

$$\theta_c = \arccos \left\{ \frac{1 - \cos \theta_a}{A_{13}^{(1a)}} \left\{ \frac{\cos \theta_a}{1 - \cos \theta_a} \left[1 + 2\gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2\cos \theta_a) \cos \theta_a \right] - \kappa \right\} \right\}. \quad (26)$$

В выражениях (25) и (26) коэффициент реакции анодного напряжения (19) представлен в виде

$$A_{13}^{(a)} = A_{13}^{(1a)} + R_3 A_{13}^{(2a)}, \quad (27)$$

где

$$A_{13}^{(1a)} = 1 + \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2\cos \theta_a)^2, \quad (28)$$

$$A_{13}^{(2a)} = \frac{\gamma_{a_0} (1 + 2\cos \theta_a)^2}{R_1} A_{13}^{(1a)}. \quad (29)$$

Коэффициент

$$\kappa = \frac{E_c S_a}{i_{a \text{ макс}}} \quad (30)$$

в выражениях (25) и (26) может рассматриваться как параметр режима. Дальнейшее исследование (24) показывает, что

$$\frac{dB_{13}^{(a)}}{dR_3^{(a)}} = \frac{d\gamma_{c_1}^{(a)}}{dR_3^{(a)}} - 2\cos \theta_c^{(a)} \frac{d\gamma_{c_0}^{(a)}}{dR_3^{(a)}} + 2\gamma_{c_0}^{(a)} \sin \theta_c^{(a)} \frac{d\theta_c^{(a)}}{dR_3^{(a)}} \quad (31)$$

или

$$\frac{dB_{13}^{(a)}}{dR_3^{(a)}} = \frac{1,38}{\pi} \frac{A_{13}^{(2a)}}{A_{13}^{(a)}} m_{13}^{(a)} \sin 2\theta_c^{(a)} \quad (31)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{c_1}^{(a)}}{dR_3^{(a)}} &= \frac{1,44}{\pi} \sin^2 \theta_c^{(a)} \frac{d\theta_c^{(a)}}{dR_3^{(a)}} = \frac{0,72}{\pi} \frac{A_{13}^{(2a)}}{A_{13}^{(a)}} m_{13}^{(a)} \sin 2\theta_c^{(a)}, \\ \frac{d\gamma_{c_0}^{(a)}}{dR_3^{(a)}} &= \frac{0,66}{\pi} \theta_c^{(a)} \frac{d\cos \theta_c^{(a)}}{dR_3^{(a)}} = -\frac{0,66}{\pi} \frac{A_{13}^{(2a)}}{A_{13}^{(a)}} m_{13}^{(a)} \theta_c^{(a)} \cos \theta_c^{(a)}, \\ \frac{d\theta_c^{(a)}}{dR_3^{(a)}} &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_c^{(a)}}} \frac{d\cos \theta_c^{(a)}}{dR_3^{(a)}} = \frac{A_{13}^{(2a)}}{A_{13}^{(a)}} m_{13}^{(a)} \operatorname{ctg} \theta_c^{(a)}, \\ \frac{d\cos \theta_c^{(a)}}{dR_3^{(a)}} &= \frac{2\gamma_{a_0} (1 + 2\cos \theta_a)}{1 + \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2\cos \theta_a)^2} = \frac{\cos^2 \theta_a}{R_1} - \\ &- \frac{\gamma_{a_0} (1 + 2\cos \theta_a)^2}{[1 + \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2\cos \theta_a)^2]^2} \frac{1 - \cos \theta_a}{R_1} \left\{ \frac{\cos \theta_a}{1 - \cos \theta_a} [1 + 2\gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2\cos \theta_a) \cos \theta_a] - \kappa \right\} = \\ &= \frac{2\gamma_{a_0} (1 + 2\cos \theta_a) \cos^2 \theta_a - \gamma_{a_0} (1 + 2\cos \theta_a)^2 \cos \theta_c^{(a)}}{A_{13}^{(1a)} R_1} = \\ &= -\frac{\gamma_{a_0} (1 + 2\cos \theta_a)^2 \cos \theta_c^{(a)}}{A_{13}^{(1a)} R_1} \left(1 - \frac{2}{1 + 2\cos \theta_a} \frac{\cos^2 \theta_a}{\cos \theta_c^{(a)}} \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{A_{13}^{(2a)}}{A_{13}^{(a)}} m_{13}^{(a)} \cos \theta_c^{(a)};$$

$$m_{13}^{(a)} = 1 - \frac{2}{1 + 2\cos \theta_a} \frac{\cos^2 \theta_a}{\cos \theta_c^{(a)}}.$$

После дифференцирования (19) получим

$$\frac{dA_{13}^{(a)}}{dR_3^{(a)}} = \frac{2\gamma_{a_0} (1 + 2\cos \theta_a)^2}{R_1} [1 + \gamma_{a_0} F_{13}^{(a)} (1 + 2\cos \theta_a)]$$

или, с учетом (28) и (29),

$$\frac{dA_{13}^{(a)}}{dR_3^{(a)}} = 2 A_{13}^{(2a)}. \quad (32)$$

Преобразуем вычитаемый член в правой части (24) с учетом (28), (29), (31) и (32):

$$\begin{aligned} \frac{A_{13}^{(a)} B_{13}^{(a)}}{A_{13}^{(a)} \frac{dB_{13}^{(a)}}{dR_3^{(a)}} + B_{13}^{(a)} \frac{dA_{13}^{(a)}}{dR_3^{(a)}}} &= \frac{A_{13}^{(a)} B_{13}^{(a)}}{A_{13}^{(a)} 2B_{13}^{(a)} + \frac{1,38}{\pi} m_{13}^{(a)} \sin 2\theta_c^{(a)}} = \\ &= \frac{R_1}{\gamma_{a_0} (1 + 2\cos \theta_a)^2 \left(1 + \frac{1,38}{\pi} m_{13}^{(a)} \frac{\sin 2\theta_{13}^{(a)}}{B_{13}^{(a)}} \right)}. \quad (33) \end{aligned}$$

Подставим в (24) значение (33);

$$\begin{aligned} R_{3 \text{ опт}}^{(a)} &= \frac{2\gamma_{a_0} (1 - \cos \theta_a)}{\gamma_{a_0}^2} \frac{F_a}{i_{a \text{ макс}}} - \frac{R_1}{\gamma_{a_0} (1 + 2\cos \theta_a)^2 \left(1 + \frac{1,38}{\pi} m_{13}^{(a)} \frac{\sin 2\theta_{\text{сонм}}^{(a)}}{B_{13 \text{ сонм}}^{(a)}} \right)} = \\ &= R_1 \left[\frac{2\gamma_{a_0} (1 - \cos \theta_a)}{\gamma_{a_0}^2} m_a - \frac{1}{\gamma_{a_0} (1 + 2\cos \theta_a)^2 \left(1 + \frac{1,38}{\pi} m_{13}^{(a)} \frac{\sin 2\theta_{\text{сонм}}^{(a)}}{B_{13 \text{ сонм}}^{(a)}} \right)} \right], \quad (34) \end{aligned}$$

где $m_a = \frac{E_a}{i_{a \text{ макс}} R_1}$ — постоянный коэффициент.

Введем обозначение

$$F_{13 \text{ сонм}}^{(a)} = \frac{1}{\gamma_{a_0} (1 + 2\cos \theta_a)^2 \left(1 + \frac{1,38}{\pi} m_{13}^{(a)} \frac{\sin 2\theta_{\text{сонм}}^{(a)}}{B_{13 \text{ сонм}}^{(a)}} \right)} \quad (36)$$

— относительное сопротивление нагрузки ГЛ-утроителя в оптимальном режиме при ограничении роста полезной мощности генератора одно-временным взаимодействием предельно допустимых потерь на аноде и сетке лампы.

Сопротивление нагрузок ГЛ-утроителя в исследуемом режиме с учетом (36) может быть определено по формуле:

$$R_{3 \text{ сонм}}^{(a)} = R_1 F_{13 \text{ сонм}}^{(a)}. \quad (37)$$

Решение (37) по сути сводится к решению (36), так как для выбранного типа лампы величина R_1 обычно бывает либо заданной, либо легко определяется из статических ламповых характеристик. Выражение (36) не имеет решения в общем виде, поэтому оно было запрограммировано и решено на ЭВМ БЭСМ-2М по итерационной схеме [7] для наиболее часто встречающихся в практике значений κ , θ_a и R_1 . Таким образом, решение задачи оптимального режима утрителя высокочастотных колебаний (22), составленной с учетом ограничения

роста полезной мощности ГЛ одновременным воздействием предельно допустимых тепловых потерь на анодном и сеточном электродах лампы, сведено к решению уравнения относительного сопротивления ГЛ в исследуемом режиме (36).

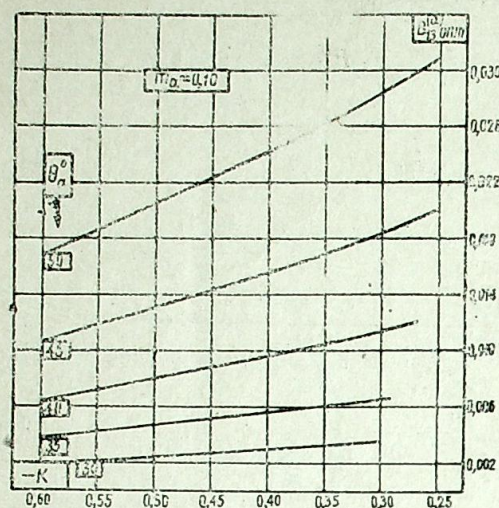


Рис. 2.

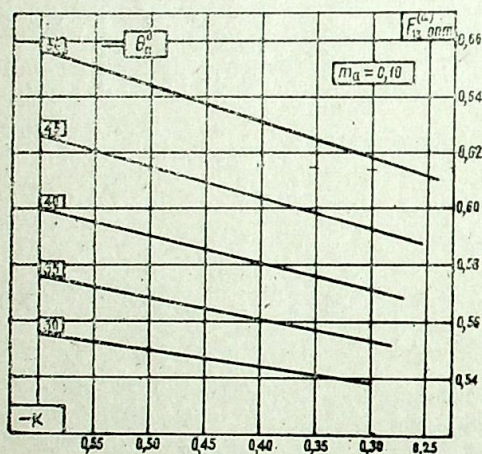
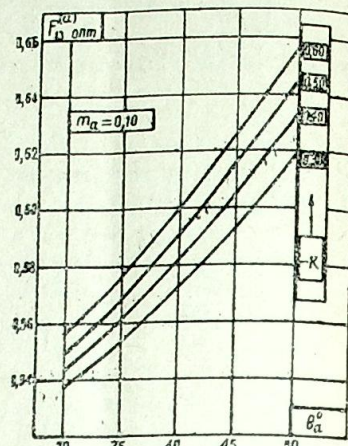


Рис. 3.

Результаты полученных решений представлены на рис. 2, 3. Наличие указанных на этих рисунках зависимостей приводит к ряду новых интересных выводов о взаимодействии между цепями входа и выхода ГЛ в случае оптимального использования. В частности, закономерности изменений $F_{13\text{опт}}(\theta_{\text{опт}})$, $F_{13\text{опт}}$, $\theta_{\text{опт}}(-K, \theta_a)$ и др. установлены впервые и представляют, на наш взгляд, определенный теоретический и практический интерес.

В заключение отметим, что результаты настоящей работы могут быть использованы при проектировании радиопередающих устройств, мощных усилителей самого разнообразного назначения, а также при разработке новых генераторных ламп СВЧ диапазона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонов Б. С. Расчет эксплуатационных режимов генераторных ламп. Госэнергоиздат, 1962.
2. Линде Д. П. Основы расчета ламповых генераторов СВЧ. Госэнергоиздат, 1959.
3. Марголин М. Г. Ламповый усилитель мощности (анализ и расчет). Госэнергоиздат, 1957.
4. Хацкелевич В. А. Расчет режимов новых генераторных триодов. Связьиздат, 1961.
5. Исмаилов Т. К. Некоторые вопросы теории и расчета ламповых генераторов с веерообразными статическими анодно-сеточными характеристиками. Сб. тезисов докладов XVIII научной конференции АзПИ, 1967.
6. Исмаилов Т. К., Агаев Э. А. Применение ЭВМ для решения задачи максимального к. п. д. генераторного триода с веерообразными статическими характеристиками. Сб. "Реферативная информация по радиоэлектронике", 1969, № 9.
7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Физматгиз, 1959.
8. Электровакuumные приборы. Справочник, т. V, НИИ МЭП СССР, 1966.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 1. XII 1969

Т. К. Исмаилов

Кенераторун ф. и. э.-нин, лампанын анод вэ тор электродларындакы истилик иткиләрилә мәһдудлашмасыны нәзәрә алмагла, жүксәк тезликли рәгс үчгәтләшдирәчысынын оптимал режиминин тәдгиги мәсәләсинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә Ф. И. Э.-нин жүксәк тезликли рәгс үчгәтләшдирәчысынын оптимал һәллинин дәстурлашдырылмасы верилмишдир, Бу һалда нәзәрәдә тутулур ки, кенераторун Ф. И. Э.-нын артмасы, лампанын анод вэ тор электродларындакы мүмкүн олан истилик иткиләринин гижмәти илә мәһдудлашдырылмышдыр. Гојулмуш мәсәлә электрон һесаблајычы машины васитәсилә "итерасија" методу илә һәлл олунмушдур.

Мүәјјәнләшдирилмишдир ки, ишләнмиш методикаја көрә, һесабламакын нисби хәтасы лампалы параметрләрдә јол верилән кәнарачыхмалары ашмыр.

ДЕПОНИРОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 518:517. 944/947

АННОТАЦИЯ

Д. А. ИСМАИЛОВ

О СХОДИМОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

Рассматривается задача Коши

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t, x), \quad x(0) = \bar{x}_0, \quad (1)$$

в некотором гильбертовом пространстве H . Здесь $A(t)$ — при каждом $t \in [0, T]$ действующий в H линейный, неограниченный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A(t))$, причем $D(A(t)) = D(A(0))$; $f(t, x)$ ($0 \leq t \leq T$) семейство нелинейных операторов, действующих в H ; $x(t)$ — искомая функция со значениями из H .

Для численного решения задачи 1 отрезок $[0, T]$ разбивается на n равных частей точками $t = t_k = kh$ и задача (1) заменяется системой операторных уравнений

$$2(x_k - x_{k-1}) + hA_k x_k + hA_{k-1} x_{k-1} = h(f_k + f_{k-1}), \quad x_0 = \bar{x}_0, \quad (2)$$

где

$$A(t_i) = A_i \text{ и } f(t_i, x_i) = f_i \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Доказывается, что

$$\|x(t_k) - x_k\| \leq ch^2,$$

где $x(t_k)$ — точное решение задачи (1) в точке t_k .

Во второй части работы для решения нелинейной системы (2) применяется приближенный метод — квазилинеаризация, т. е. система (2) заменяется системой

$$2(x_k - x_{k-1}) + hA_k x_k + hA_{k-1} x_{k-1} = h[f(t_k, x_{k-1}) + f_x(t_k, x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + f(t_{k-1}, x_{k-1})], \quad x_0 = \bar{x}_0,$$

и доказывается, что порядок погрешности этого метода такой же как и порядок погрешности метода (2).

* Статья депонирована во ВИНТИ (Москва, А-219, ул. Балтийская, 14, отдел справочной информации ВИНТИ).

МҮНДӘРИЧАТ

- Б. И. Әлиев. Гильберт фәзасында Фурје сырасынын бәзи хәссәләри һаггында 3
- А. Н. Әләскәров. Бир синиф интегрофункционал тәнликләр һаггында. 9
- Н. А. Бучаев. Икигәт Фурје сырасынын әмсалларынын бәзи хәссәләри. 16
- М. Б. Ә. Бабаев. Икидәјишәнли чохдәдиләрин бирдәјишәнли функцијаларын чәмләрилә јахынлашдырылмасы һаггында 23
- А. Д. Искәндәров. Филтрәсија едән мүнһитләрин параметрләрини тәјин етмәк үчүн тәрс сәрһәд мәсәләләри 30
- Н. Сваричевскаја, М. Јагубов. Данми кечикән диференсиал тәнликләрин бир мәсәләсинә даир 35
- К. М. Мусаев. Үмумиләшмиш аналитик функцијаларын бәзи синифләри һаггында 40
- А. Н. Әләскәров. Нејтрал типли һиперболик тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәлә 47
- Ч. Н. Ағаларов. Чевик рабитәләрә енинә зәрбә вахты материалда заман эффектләринин һәрәкәтә тәсири һаггында 55
- Б. Б. Гулиев. Сфера үзәриндә үмумиләшмиш Валле-Пуссен интегралы васитәсилә јығылма вә јығылма тәртиби һаггында 59
- А. Ш. Гәһрәманов. Јарымохда икинчи тәртиб парабolik тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләнин һәллинин варлығынын оператор үсулу илә тәдгиги. 64
- Х. М. Нәчәфов. Чырлашма хәтти үзәриндә сингулар әмсаллары олан сәрһәддә чырлашан һиперболик типли бир тәнлик үчүн Коши мәсәләси 69
- М. С. Кушелеман. 2 өлчүлү дүјүмләр үзәриндә будагланмыш 4 өлчүлү гапонтик сфераларын гурулмасы 78
- Г. Н. Әмрәев. Параболик тип тәнликләр үчүн јарымохда гарышыг мәсәләнин үмумиләшмиш Фурје үсулу илә һәлли 83
- Н. Н. Ағажев. Чохлајлы системдәки галерејанын иш режиминин дәјишмәси 89
- Ә. Р. Мәһмәдәдов. Кечикән аргументли бир синиф диференсиал тәнликләрин һәллинин тәдгиги 93
- Ә. Р. Мәһмәдәдов. Кечикән аргументли диференсиал тәнликләр үчүн варлыг вә јекәнәлик теоремләри 102
- М. М. Нүсәјнов. Бир гејри-хәтти мәсәләнин һәллинин варлығы, јекәнәлији вә дајаныглығы һаггында 108
- К. Г. Нәсәнов. Пајланмыш параметрли оптимал идәрәетмә нәзәријәсинин бир мәсәләси һаггында 114
- Р. Ј. Кәримов, Л. П. Хорошун. Бәрк чисимләр механикасынын физики гејри-хәтти мәсәләсинин комплекс шәкилдә көстәрилмәси 120
- Н. Т. Аббасов, Т. Г. Орловскаја. Квазиалтернионлар чәбрләринин структуру вә һәмин чәбрләрдә әсас инволүсијалар 128
- Ј. Б. Мәһмәдәдов. Пајланмыш параметрли оптимал идәрә олунан мәсәлә һаггында 134
- К. И. Гәһрәманов. Еластик мүнһитдә јарымсонсуз еластик чубуғун узунуна зәрбә заманы дајаныглығы һаггында 141
- М. Ә. Гулиев. Икинчи сыра һиперболик тәнлик үчүн бир тәрс мәсәлә һаггында 149
- Р. А. Бајрамов. Бәзи чәбрләрин алт чәбрләринин гәфәси һаггында, 1. 149
- З. Ә. Әлијева. E_α^s Синфиндә гејри-хәтти интеграл тәнликләрин тәҗриби һәлли һаггында 157
- Т. К. Исмајлов. Кенераторун ф. и. ә.-нин, лампанын анод вә тор электродларындакы истилик иткиләрилә мәһдудлашмасыны нәзәрә алмагла, јүксәк тезликли рәгс үчгәтләшдырычысынын оптимал режиминин тәдгиги мәсәләсинә даир 169
- Сифариш көзләјән мәғаләләр 170

СОДЕРЖАНИЕ

Б. И. Алиев. О некоторых свойствах рядов Фурье в гильбертовом пространстве	3
А. Г. Алескеров. Об одном интегро-функциональном уравнении	9
Н. А. Бучаев. Некоторые свойства коэффициентов двойного ряда Фурье	16
М.-Б. А. Бабаев. О приближении многочленов двух переменных суммами функций одной переменной	23
А. Д. Искендеров. Обратные краевые задачи для определения параметров фильтрующих сред	30
Н. Сваричевская, М. Ягубов. Об одной задаче возмущенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием	35
К. М. Мусаев. Некоторые классы обобщенных аналитических функций	40
А. Г. Алескеров. О смешанной задаче для гиперболического уравнения нейтрального типа	47
Д. Г. Агаларов. О влиянии временных явлений в материале гибкой связи на движение при поперечном ударе	55
Б. Б. Гулиев. О сходимости и порядке сходимости на сфере обобщенного интервала Валье—Пуссена	59
А. Ш. Кахраманов. Применение операционного метода к исследованию разрешимости смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка на полуоси	64
Х. М. Наджафов. Задача Коши для одного уравнения гиперболического типа, вырождающегося на границе, с сингулярными коэффициентами на линии вырождения	69
М. С. Кушельман. Построение гомотопических 4-сфер, разветвленных над двумерными узлами	78
К. Хамраев. Решение смешанной задачи для параболического уравнения на полупрямой	83
Н. Г. Агаев. Изменение режима работы галереи в многопластовой системе	89
А. Р. Магомедов. Исследование решения одного класса дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом	93
А. Р. Магомедов. Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом	102
М. М. Гусейнов. О существовании, единственности и корректности решения одной нелинейной задачи	108
К. К. Гасанов. Об одной задаче теории оптимального управления с распределенными параметрами	114
Р. Ю. Керимов, Л. П. Хорошун. Комплексные представления плоских физически нелинейных задач механики твердого тела	120
Н. Т. Аббасов и Т. Г. Орловская. Структура алгебр квазиальтернионов и основная инволюция в этих алгебрах	128
Ю. Б. Мамедов. Об одном оптимальном управлении с распределенными параметрами	134
К. И. Гахраманов. Устойчивость упругого полубесконечного стержня, находящегося в упругой среде при продольном ударе	141
М. А. Кулиев. Об одной обратной задаче для гиперболического уравнения второго порядка	144
Р. А. Байрамов. О решетках подалгебр некоторых алгебр	149
З. А. Алиева. О приближенном решении нелинейных интегральных уравнений в классе E^a	157
Т. К. Исмаилов. К вопросу исследования оптимального режима утронителя высокочастотных колебаний при учете ограничения мощности генератора тепловыми потерями на анодном и светочном электродах лампы	163

Депонированные статьи

Д. А. Исмаилов. О сходимости двухслойной схемы для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве	170
--	-----

Сдано в набор 3/V 1971 г. Подписано к печати 24/VIII 1971 г. Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$. Бум. лист. 5,38. Печ. лист. 12,73. Уч.-изд. лист. 12,09. ФГ 11895. Заказ 137. Тираж 820. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Государственного Комитета Совета Министров Азербайджанской ССР по печати. Баку, Ази Асланова, 80.