

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

6

1970

„ЕЛМ НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭЛМ“

БАКЫ – БАКУ

333.31
Физико-математические науки
Азербайджанская ССР
Баку

К. И. ГАХРАМАНОВ, Г. Г. САФАРОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОЛОСЕ ПРИ СЖАТИИ СО СДВИГОМ

Данная статья посвящена исследованию возможности потери устойчивости типа шейки в упруго-пластической и в вязко-пластической полосах. Ранее [1] была рассмотрена задача об устойчивости пластического течения в бесконечной полосе при сдвиге.

1. Полоса из вязко-пластического материала

Компоненты тензора напряжений при плоской деформации вязко-пластического материала можно выразить через компоненты вектор скоростей перемещения:

$$\sigma_{xx} = \sigma + 2 \left[\frac{\kappa}{I} + \eta \right] \frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x}, \quad \sigma_{zz} = \sigma + 2 \left[\frac{\kappa}{I} + \eta \right] \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z}, \quad (1)$$
$$\tau_{zx} = \left[\frac{\kappa}{I} + \eta \right] \left(\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial x} \right),$$

где η —коэффициент вязкости; κ —передел текучести деформируемого материала на сдвиг; $\dot{V}_x$ и $\dot{V}_z$ —компоненты вектора скорости; σ —среднее гидростатическое давление в рассматриваемой точке;

$$I = \sqrt{2 \left(\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial x} \right)^2}.$$

Присоединив к уравнениям (1) два дифференциальных уравнения равновесия;

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

и условие несжимаемости материала

$$\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

получаем замкнутую систему уравнений, определяющих течение вязко-пластической среды.

Предположим, что по краям полосы дается возмущение в виде

$$z = h + \varepsilon_1(x), \quad z = -h + \varepsilon_2(x), \quad (4)$$

где $2h$ —ширина полосы, $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ —непрерывные функции в $-\infty < x < +\infty$, которые превращаются в нуль со своими первыми производными в бесконечности. После возмущения равномерность напряженного и деформированного состояния нарушается, и к основ-

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. Б. Абдуллаев (главный редактор), З. И. Халилов (зам. главного редактора), Г. Н. Агаев, М. И. Алиев, Ю. А. Амензаде, Б. М. Аскеров, Н. А. Гулиев, А. И. Гусейнов, М. А. Джавадов, И. И. Ибрагимов, Л. М. Иманов, Ф. Г. Максудов, Э. И. Манафлы (ответств. секретарь), Ю. М. Сеидов (зам. главного редактора), Г. Ф. Султанов.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“.

ному состоянию прибавляется варьированное состояние, характеризуемое вариациями соотношений, (1).

Итак, варьируем соотношения (1):

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{xx} &= \delta\sigma + 2 \left[\frac{\kappa}{I} + \eta \right] \frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial x} - \frac{2\kappa}{I^2} \frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x} \delta I, \\ \delta\sigma_{zz} &= \delta\sigma + 2 \left[\frac{\kappa}{I} + \eta \right] \frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial z} - \frac{2\kappa}{I^2} \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z} \delta I,\end{aligned}\quad (5)$$

$$\delta\tau_{xz} = \left[\frac{\kappa}{I} + \eta \right] \left(\frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial x} \right) - \frac{\kappa}{I^2} \left(\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial x} \right) \delta I,$$

где

$$\delta I = \frac{1}{I} \left[2 \frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z} \frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial z} + \left(\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial x} \right) \right]. \quad (6)$$

Для несжимаемых материалов имеет место следующее соотношение:

$$\frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

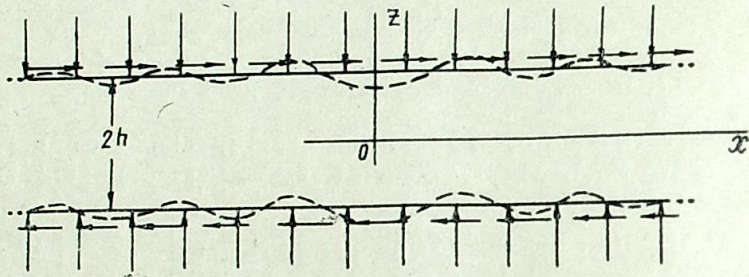


Рис. 1.

С учетом (3) и (7) выражение (6) принимает вид

$$\delta I = \frac{1}{I} \left[4 \frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial x} \right) \right]. \quad (8)$$

Подставив в (5), после упрощения получим:

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{xx} &= \delta\sigma + 2H_1 \frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial x} - 2H_3 \left(\frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial x} \right), \\ \delta\sigma_{zz} &= \delta\sigma + 2H_1 \frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial z} + 2H_3 \left(\frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial x} \right), \\ \delta\tau_{xz} &= H_2 \left(\frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial x} \right) - 4H_3 \frac{\partial \delta \dot{V}_x}{\partial x}; \\ H_1 &= \left[\frac{\kappa}{I} + \eta \right] - \frac{4\kappa}{I^3} \left(\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x} \right)^2, \quad H_2 = \left[\frac{\kappa}{I} + \eta \right] - \\ &\quad - \frac{\kappa}{I^3} \left(\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial x} \right), \\ H_3 &= \frac{\kappa}{I^3} \frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x} \left(\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (9)$$

Уравнения равновесия в вариациях будут:

$$\frac{\partial \delta\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \delta\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Умножим соотношения (9) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda_2 x}$ и, интегрируя их от $-\infty$ до $+\infty$, на основе преобразования Фурье.

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda_2 x} dx \quad (A)$$

получим:

$$\begin{aligned}\delta\bar{\sigma}_{xx} &= \delta\bar{\sigma} - 2iH_1\lambda_2\delta\bar{V}_x - 2H_3\delta\bar{V}_x' + 2i\lambda_2H_3\delta\bar{V}_z, \\ \delta\bar{\sigma}_{zz} &= \delta\bar{\sigma} + 2H_1\delta\bar{V}_x' + 2H_3\delta\bar{V}_x' - 2i\lambda_2H_3\delta\bar{V}_z', \\ \delta\bar{\tau}_{xz} &= H_2(\delta\bar{V}_x' - i\lambda_2\delta\bar{V}_z) + 4i\lambda_2H_3\delta\bar{V}_x.\end{aligned}\quad (11)$$

Аналогично из (7) и (10) будем иметь

$$\delta\bar{V}_z' - i\lambda_2\delta\bar{V}_x = 0 \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned}-i\lambda_2\delta\bar{\sigma}_{xx} + \delta\bar{\tau}_{xz} &= 0, \\ -i\lambda_2\delta\bar{\tau}_{xz} + \delta\bar{\sigma}_{zz}' &= 0,\end{aligned}$$

Вводя (11) в (12), получаем

$$\begin{aligned}-i\lambda_2\delta\bar{\sigma} + 2H_1\lambda_2^2\delta\bar{V}_x + i\lambda_2\delta\bar{V}_x' \cdot H_3 + 2H_3 \cdot \lambda_2^2\delta\bar{V}_z + H_2\delta\bar{V}_x' - \\ - iH_2\lambda_2^2\delta\bar{V}_z = 0,\end{aligned}\quad (13)$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\sigma}' + 2H_1\delta\bar{V}_z' + 2H_3\delta\bar{V}_x' + 4\lambda_2^2H_3\delta\bar{V}_x - 2i\lambda_2H_3\delta\bar{V}_z' - i\lambda_2H_2\delta\bar{V}_x - \\ - \lambda_2^2H_2\delta\bar{V}_z = 0;\end{aligned}\quad (14)$$

(12) и (13), (14) являются линейной однородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, причем в нее входят неизвестные функции, зависящие от z . Исключая из нее величины $\delta\sigma$ и $\delta\bar{V}_x$, систему можно свести к уравнению четвертого порядка относительно $\delta\bar{V}_z$:

$$\begin{aligned}\delta\bar{V}_z^{(IV)} + \frac{8H_3i\lambda_2}{H_2}\delta\bar{V}_z^{(III)} + 2(i\lambda_2)^2 \left(2\frac{H_1}{H_2} - 1 \right) \delta\bar{V}_z^{(II)} - \\ - 8\frac{H_3}{H_2}(i\lambda_2)^3\delta\bar{V}_z' + \lambda_2^4\delta\bar{V}_z = 0.\end{aligned}\quad (15)$$

На краях полосы необходимо удовлетворение следующих условий:

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{xx} \cos \nu x + (\tau_{xz} + \delta\tau_{xz}) \cos \nu z = \tau_{xz}, \\ (\tau_{zx} + \delta\tau_{zx}) \cos \nu x + (\sigma_{zz} - \delta\sigma_{zz}) \cos \nu z = \sigma_{zz} \quad \text{при } z = \pm h,\end{aligned}\quad (16)$$

где ν — нормаль к возмущенному краю полосы. Так как возмущения предполагаются малыми, то можно принять

$$\cos \nu x \approx -\frac{d\epsilon_1(x)}{dx} = -\frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial x}, \quad \cos \nu z = 1, \quad (17)$$

где $\delta \dot{V}_z$ — компонент вектора перемещения. Его можно выразить через компонент вектора скоростей:

$$\delta \dot{V}_z = \int_{t_0}^t \delta \dot{V}_z dt. \quad (18)$$

Следовательно

$$\cos \nu x = -\int_{t_0}^t \frac{\partial \delta \dot{V}_z}{\partial x} dt,$$

где t_0 — момент начала возмущения.

Пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка и учитывая (17) и (18), имеем

$$\delta\tau_{xz} = 0, \quad \delta\sigma_{zz} - \tau_{zx} \int_{t_0}^t \frac{\partial \delta \bar{V}_z}{\partial x} dt = 0 \quad \text{при } z = \pm h. \quad (19)$$

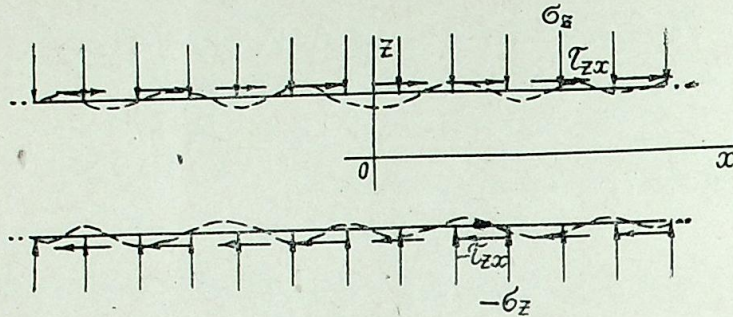


Рис. 2

На основе (A) и (11) из (19) получим;

$$H_2 (\delta \bar{V}_x' - i\lambda_2 \delta \bar{V}_z) + 4i\lambda_2 H_3 \delta \bar{V}_x = 0, \\ i\lambda_2 \tau_{zx} \int_{t_0}^t \delta \bar{V}_z dt + \delta \sigma + 2H_1 \delta \bar{V}_z' - 2H_3 \delta \bar{V}_x' - 2i\lambda_2 H_3 \delta \bar{V}_z = 0 \\ \text{при } z = \pm h, \quad (20)$$

С помощью систем (12), (14) исключим из (19) величины $\delta \sigma$ и $\delta \bar{V}_x$:

$$\delta \bar{V}_z'' + \lambda_2^2 \delta \bar{V}_z + \frac{4H_3}{H_2} i\lambda_2 \delta \bar{V}_z' = 0, \\ \frac{i\lambda_2 \tau_{zx}}{H_2} \int_{t_0}^t \delta \bar{V}_z dt + \lambda_2^2 \left(\frac{2H_1}{H_2} - 1 \right) \delta \bar{V}_z' - 8i\lambda_2 \frac{H_3}{H_2} \delta \bar{V}_z - \\ - 4i\lambda_2 \frac{H_3}{H_2} \delta \bar{V}_z - \delta \bar{V}_z''' = 0. \quad (21)$$

Таким образом решение поставленной задачи приведено к решению одного линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения (15) с граничными условиями (21).

2. Полоса из упруго-пластического материала

На участке образования шейки происходит активный процесс деформации и, следовательно, между компонентами девиатора напряжений и деформаций справедливо равенство

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + \frac{2\sigma_1}{3e_1} e_{ij}. \quad (B)$$

Чтобы исследовать устойчивость начального состояния полосы, рассмотрим деформированное состояние, близкое к начальному. Для этого варьируем равенство (B) около исходного состояния, которое характеризуется тем, что

$$e_{zz} = -e_{xx}, \quad e_{xz} \neq 0, \quad e_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_{xx}^2 + e_{xz}^2}. \quad (22)$$

После варьирования получаем:

$$\delta\sigma_{xx} = \delta\sigma + \frac{2}{3} \frac{\Phi(e_1)}{e_1} \delta e_{xx} + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{e_1} \frac{d\Phi(e_1)}{de_1} - \frac{\Phi(e_1)}{e_1^2} \right] e_{xx} \delta e_1, \\ \delta\sigma_{zz} = \delta\sigma + \frac{2}{3} \frac{\Phi(e_2)}{e_1} \delta e_{zz} + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{e_1} \frac{d\Phi(e_1)}{de_1} - \frac{\Phi(e_1)}{e_1^2} \right] e_{zz} \delta e_1, \quad (23) \\ \delta\tau_{xz} = \frac{1}{3} \frac{\Phi(e_1)}{e_1} \delta e_{xz} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{e_1} \frac{d\Phi(e_1)}{de_1} - \frac{\Phi(e_1)}{e_1^2} \right] e_{xz} \delta e_1.$$

В общем случае интенсивность деформаций e_1 определяется формулой

$$e_1 = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (24)$$

Тогда, варьируя (24), с учетом (22) имеем

$$\delta e_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e_{ij} \delta e_{ij}}{\sqrt{e_{ij} e_{ij}}} = \frac{2}{3} \frac{e_{ij} \delta e_{ij}}{e_1} = \frac{4}{3e_1} (e_{xx} \delta e_{xx} + e_{xz} \delta e_{xz}). \quad (25)$$

Подставляя (25) в (23), получим

$$\delta\sigma_{xx} = \delta\sigma + 2M \delta e_{xx} + 2N_1 \delta e_{xz}, \\ \delta\sigma_{zz} = \delta\sigma + 2M \delta e_{zz} - 2N_1 \delta e_{xz}, \quad (26) \\ \delta\tau_{xz} = M_1 \delta e_{xz} + N_1 \delta e_{xx},$$

где

$$M = \frac{4}{3} \frac{1}{e_1^2} (Ae_{xx}^2 + Be_{xz}^2), \\ N_1 = \frac{4}{3} \frac{1}{e_1^2} (A - B) e_{xx} e_{xz}, \\ M_1 = \frac{4}{3} \frac{1}{e_1^2} (Ae_{xz}^2 + Be_{xx}^2); \\ A = \frac{1}{3} \left(\frac{d\Phi(e_1)}{de_1} \right)^0, \quad B = \frac{1}{3} \left(-\frac{\Phi(e_1)}{e_1} \right)^0.$$

Функция $\Phi(e_1) = \sigma_1$ определяется из эксперимента на чистое растяжение. Нулики наверху означают, что в данное выражение входит величина возмущенного состояния, причем $M + M_1 = A + B$.

Применив к (26) преобразования (A) с учетом формул Коши

$$\delta e_{xx} = \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \quad \delta e_{zz} = \frac{\partial \delta w}{\partial z}, \quad \delta e_{xz} = \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial \delta w}{\partial x},$$

где δu и δw — компоненты вариации вектора перемещения, которые превращаются в нуль со своими первыми производными в $\pm \infty$, так как условиям удовлетворяют функции $\varsigma_1(x)$ и $\varsigma_2(x)$, и подставив полученное в (14) с учетом условия несжимаемости материала, получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-i\lambda_2 \delta \sigma - 2M\lambda_2^2 \delta \bar{u} - 2i\lambda_2 N_1 \delta \bar{u}' - 2\lambda_2^2 N_1 \delta \bar{w} - Mi\lambda_2 \delta \bar{w} - \\ - i\lambda_2 N_1 \delta \bar{u}'' = 0, \\ \delta \sigma' + 2M\delta \bar{w}'' - 2N_1 \delta \bar{u}'' + 2i\lambda_2 N_1 \delta \bar{w}' - i\lambda_2^2 \delta \bar{w} - \lambda_2^2 N_1 \delta \bar{u} = 0, \quad (27) \\ i\lambda_2 \delta \bar{u} - \delta \bar{w}' = 0.$$

Далее поступаем совершенно аналогично, как в предыдущем пункте, и получаем аналогичное (15) обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения $\delta \bar{w}$:

$$\delta \bar{w}^{(IV)} - 5i\lambda_2 N_2 \delta \bar{w}^{(IV)} + 2(i\lambda_2)^2 D \delta \bar{w}^{(II)} + 5(i\lambda_2)^3 N_2 \delta \bar{w}^{(I)} + \lambda_2^4 \delta \bar{w} = 0$$

с граничными условиями

$$\delta \bar{w}'' - (i \lambda_2)^2 \delta \bar{w} - i \lambda_2 N_2 \delta \bar{w}' = 0, \quad (28)$$

$$\delta \bar{w}''' - 5 i \lambda_2 N_2 \delta \bar{w}'' + (i \lambda_2)^2 (1 + 2 D) \delta \bar{w}' + (i \lambda_2)^3 \left(\frac{\tau_{zx}}{M_1} - 4 N_2 \right) \delta \bar{w} = 0, \quad (29)$$

где

$$N_2 = \frac{N_1}{M_1}, \quad D = 2 \frac{M}{M_1} - 1.$$

Следует отметить следующее:

$$M = \begin{cases} A & \text{при } \tau_{zx} = 0 \\ B & \text{при } \sigma_{zz} = 0, \end{cases} \quad M_1 = \begin{cases} B & \text{при } \tau_{zx} = 0 \\ A & \text{при } \sigma_{zz} = 0, \end{cases}$$

$$N_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau_{zx} = 0 \\ 0 & \text{при } \sigma_{zz} = 0, \end{cases} \quad N_1 \neq 0 \text{ при } \tau_{zx} \neq 0 \text{ и } \sigma_{zz} \neq 0 \text{ одновременно.}$$

Поэтому из (28), (29) при $\tau_{zx} = 0$ или $\sigma_{zz} = 0$ получаем соответственно уравнения со своими граничными условиями, которые были исследованы в (1).

3°. В связи с тем, что, соответственно, уравнения (15) и (28) и граничные условия (21) и (29) совершенно аналогичны, будем ограничиваться решением уравнения (28) с условиями (29).

Характеристическое уравнение для (28) имеет вид

$$v_1^4 - 5 i \lambda_2 N_2 v_1^3 + 2 (i \lambda_2)^2 D v_1^2 + 5 (i \lambda_2)^3 N_2 v_1 + (i \lambda_2)^4 = 0. \quad (30)$$

Введем замену $v_1 = i \lambda_2 x_1$, тогда (30) примет вид

$$x_1^4 - 5 N_2 x_1^3 + 2 D x_1^2 + 5 N_2 x_1 + 1 = 0.$$

Коэффициенты последнего уравнения суть действительные числа и поэтому, как известно, его корни совпадают с корнями двух следующих квадратных уравнений:

$$x_1^2 + (T - 5 N_2) \frac{x_1}{2} + \left[z_0 - \frac{5 N_2}{T} (z_0 + 1) \right] = 0, \quad (31)$$

где

$$T = \sqrt{2 N_2 - 8 (z_0 - D)},$$

а z_0 — какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8 z_0^3 - 8 D z_0^2 - (50 N_2^2 + 8) z_0 + 8 D - 50 N_2^2 = 0. \quad (32)$$

Последнее уравнение можно привести к виду

$$[8 (z_0 - D) (z_0 - 1) - 50 N_2^2] (z_0 + 1) = 0. \quad (33)$$

Следовательно, $z_0 = -1$ является действительным корнем кубического уравнения, поэтому корнями уравнения (30) будут:

$$v_{1,1,2} = \frac{i \lambda_2}{4 M_1} \left[5 N_2 + \sqrt{25 N_2^2 - 16 M M_1} \pm \sqrt{(5 N_2 + \sqrt{25 N_2^2 - 16 M M_1})^2 + 16 M_1^2} \right],$$

$$v_{1,3,4} = \frac{i \lambda_2}{4 M_1} \left[5 N_2 - \sqrt{25 N_2^2 - 16 M M_1} \pm \sqrt{(5 N_2 - \sqrt{25 N_2^2 - 16 M M_1})^2 + 16 M_1^2} \right].$$

Общим решением уравнения (28) будет

$$\delta \bar{w} = C_1 (\lambda_2) \cos \lambda_2 x_1 z + C_2 (\lambda_2) \cos \lambda_2 x_2 z + C_3 (\lambda_2) \cos \lambda_2 x_3 z + C_4 (\lambda_2) \cos \lambda_2 x_4 z; \quad (34)$$

x_j — корни уравнения (31).

Подставив (34) в (29), после упрощения получаем

$$\sum_{j=1}^4 C_j (\lambda_2) m_{nj} \cos \lambda_2 x_j h = 0, \quad (n = 1, 3)$$

$$\sum_{j=1}^4 C_j (\lambda_2) m_{nj} \sin \lambda_2 x_j h = 0,$$

где

$$m_{ij} = 1 + x_j N_2 - x_j^3,$$

$$m_{3j} = x_j^3 + 5 N_2 x_j^2 + (2 D + 1) x_j + \frac{\tau_{xz}}{M_1} - 4 N_2.$$

При $25 N_2 - 16 M_1 M \geq 0$ все x_j действительные.

Условием, при котором последняя система уравнений имеет нетривиальное решение относительно $C_j (\lambda_2)$, будет

$$\begin{vmatrix} m_{11} \cos \lambda_2 x_1 h & m_{12} \cos \lambda_2 x_2 h & m_{13} \cos \lambda_2 x_3 h & m_{14} \cos \lambda_2 x_4 h \\ m_{11} \sin \lambda_2 x_1 h & m_{12} \sin \lambda_2 x_2 h & m_{13} \sin \lambda_2 x_3 h & m_{14} \sin \lambda_2 x_4 h \\ m_{31} \cos \lambda_2 x_1 h & m_{32} \cos \lambda_2 x_2 h & m_{33} \cos \lambda_2 x_3 h & m_{34} \cos \lambda_2 x_4 h \\ m_{31} \sin \lambda_2 x_1 h & m_{32} \sin \lambda_2 x_2 h & m_{33} \sin \lambda_2 x_3 h & m_{34} \sin \lambda_2 x_4 h \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия этого определителя получим уравнение. Чтобы удовлетворялось полученное уравнение при любом значении параметра $-\infty \leq \lambda_2 \leq +\infty$, все коэффициенты должны равняться нулю одновременно, т. е.

$$\begin{aligned} m_{11} m_{33} (m_{12} m_{34} - m_{31} m_{14}) - m_{13} m_{31} (m_{32} m_{14} - m_{12} m_{34}) &= 0, \\ m_{11} m_{34} (m_{32} m_{31} - m_{33} m_{12}) - m_{14} m_{31} (m_{32} m_{13} - m_{12} m_{33}) &= 0, \\ m_{11} m_{32} (m_{31} m_{14} - m_{31} m_{34}) - m_{12} m_{31} (m_{33} m_{14} - m_{13} m_{34}) &= 0, \\ m_{13} m_{32} (m_{11} m_{34} - m_{32} m_{14}) - m_{12} m_{33} (m_{11} m_{33} - m_{31} m_{14}) &= 0, \\ m_{13} m_{34} (m_{12} m_{31} - m_{32} m_{11}) - m_{14} m_{33} (m_{12} m_{31} - m_{32} m_{11}) &= 0, \\ m_{12} m_{34} (m_{33} m_{11} - m_{31} m_{13}) - m_{14} m_{32} (m_{11} m_{33} - m_{31} m_{13}) &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для осуществления потери устойчивости в данном случае при напряжении τ_{zx} должно существовать хотя бы одно значение, которое будет являться корнем всех шести совершенно различных уравнений. Первое из них есть квадратичное уравнение, которое имеет корни

$$\tau_{zx \cdot 1} = M_1 \frac{m_{14} D_2 - m_{12} D_4}{m_{12} + m_{14}},$$

$$\tau_{zx \cdot 2} = M_1 \frac{m_{13} D_1 - m_{11} D_3}{m_{11} + m_{13}},$$

где

$$D_i = x_i^3 + 5 N_2 x_i^2 + (2 D + 1) x_i - 4 N_2, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Непосредственная проверка показывает, что ни один из этих корней не удовлетворяет всем остальным пяти уравнениям. Полученный результат свидетельствует о том, что и при сжатии со сдвигом для данного класса возмущений не осуществляется потеря устойчивости типа шейки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахраманов К. И. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“ 1968, № 4.
2. Гринштейн А. М. „Механика полимеров“, 1966, № 2.
3. Качанов Л. М. Ползучесть тонкого слоя при сжатии и сдвиге. В сб. „Исследование по упругости и пластичности“, № 5, изд. ЛГУ. 1966.

Институт математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступило 16. IX 1969

К. И. Гəһрəманов, Һ. Һ. Сəфəров

Ејни заманда, сыхылан вə сүрүшəн золагда пластик
ахманын дајаныглыгы

ХҮЛАСƏ

Мəгалəдə бəркидилмиш нөгтəси олмадан сонсуз золагда ејни вахтда сыхылма вə сүрүшмə заманы дајаныглыгын бојунчуг типли итмəсинин мумкунлүјү мəсəлəсиндəн бəһс олунмушдур. Ашкар едилмишдир ки, мүəјјəн функцијалар синфинə дахил олан нəјəчан нөвлəri үчүн золагын бу вəзијјəти нəмишə дајаныглыдыр.

АЗƏРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХƏБƏРЛƏРИ
Физика-техника вə ријазиијат елмлəri серијасы, 1970, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 6

К. С. АХВЕРДИЕВ

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В ПЛОСКИХ ДИФFUЗОРАХ С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА

Частное автомодельное решение нелинейных уравнений задачи об изотермическом течении вязкого газа в длинной трубе диффузорного типа рассматривалось в работе [1]. В данной статье описывается течение вязкого газа в плоской диффузорной трубе длиной L с шириной входного сечения $2h_0$ и выходного $2h_1$, с учетом теплообмена. Предположим, как и в [1], что давление в начальном сечении трубопровода поддерживается постоянным и $L \gg h_0, h_1$. Выберем начало координат во входном сечении и направим ось x вдоль оси симметрии трубы. В этом случае уравнения границ трубы записываются следующим образом:

$$y = \pm h(x) = \pm (h_0 + x \operatorname{tg} \alpha), \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{h_1 - h_0}{L}.$$

В уравнениях Навье—Стокса, а также в уравнении притока тепла, описывающих стационарное неизотермическое движение газа, пренебрегая членами порядка h/L , легко получим [2] уравнения движения газа в тонком слое*.

$$\begin{aligned} \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} = 0, \quad P = \rho RT, \\ \frac{\mu}{\mu_*} &= \left(\frac{T}{T_*} \right)^n, \quad C_p \rho \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь T —абсолютная температура газа, ρ —плотность газа, P —давление газа, $\kappa = \frac{\mu C_p}{\sigma}$ —коэффициент теплопроводности, μ —вязкость газа,

σ —число Прандтля, C_p —теплоемкость при постоянном давлении, v_x, v_y —составляющие вектора скорости частиц газа, μ_* и T_* —соответственно, характерная вязкость и характерная температура газа, R —газовая постоянная.

Система уравнений (1) решается при следующих граничных условиях: на стенках трубы заданы температуры и выполняется условие прилипания газа, в начальном сечении трубопровода известно давление. Если ввести в рассмотрение функцию тока ψ по формулам

$$\frac{P v_x}{RT} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{P v_y}{RT} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

то задача сводится к решению уравнений

$$\frac{d\psi}{dy} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T}{P} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T}{P} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -\frac{1}{R} \frac{dP}{dx} + \frac{\mu_*}{T_*} \frac{\partial}{\partial y} \left[T \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T}{P} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right], \quad (3)$$

$$P = pRT, \mu = \frac{\mu_*}{T_*} \cdot T, C_p \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{C_p \cdot \mu_*}{c T_*} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

при граничных условиях:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm h(x); \quad (4)$$

$$T = C_1 \quad \text{при } y = h(x); \quad T = C_2 \quad \text{при } y = -h(x);$$

$$P = P_1^* \quad \text{при } x = 0.$$

Здесь C_1 и C_2 — заданные температуры на стенках трубопровода, а P_1^* — заданное давление в начальном сечении трубы.

Решение краевой задачи (3) — (4) будем искать в виде:

$$\psi = \psi(\xi), \quad \xi = \frac{h}{h(x)}, \quad P = \frac{c}{h(x)}, \quad T = T(\xi). \quad (5)$$

После необходимых вычислений система уравнений (3) существенно упростится и примет следующий вид:

$$\frac{d}{d\xi} \left[T \frac{d}{d\xi} \left(T \frac{d\psi}{d\xi} \right) \right] = -\frac{c^2 T_* \operatorname{tg} \alpha}{R \mu_*}, \quad \frac{d}{d\xi} \left(T \frac{dT}{d\xi} \right) = 0. \quad (6)$$

Граничные условия (4) при этом запишутся в виде:

$$\frac{d\psi}{d\xi} = 0 \quad \text{при } \xi = \pm 1;$$

$$T = c_1 \quad \text{при } \xi = 1; \quad T = c_2 \quad \text{при } \xi = -1;$$

$$P = P_1^* \quad \text{при } x = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим сперва случай, когда температура на стенках ($\xi = \pm 1$) трубопровода одинакова, т. е. $c_1 = c_2 = \text{const}$. Тогда из второго уравнения системы (6) будем иметь $T = c_1 = \text{const}$ и значит $\mu = \text{const}$. Из симметрии течения, полагая $\psi(x, -y) = -\psi(x, y)$ и пользуясь при этом граничными условиями (7), для функции ψ после трехкратного интегрирования первого уравнения системы (6) будем иметь выражение, аналогичное полученному в работе [1]:

$$\psi = \frac{c^2 T_* \operatorname{tg} \alpha \cdot \xi}{2 R c_1^2 \mu_*} \left(1 - \frac{\xi^2}{3} \right). \quad (8)$$

Таким образом, симметричное течение в расширяющемся плоском диффузоре, как видно, возможно, когда течение близко к изотермическому ($\mu = \text{const}, T = \text{const}$). В случае, когда $c_1 \neq c_2$, из второго уравнения системы (6) будем иметь

$$T = \sqrt{a\xi + b}, \quad (9)$$

где a и b — постоянные интегрирования.

Для функции ψ , пользуясь формулой (9) и граничными условиями (7), из первого уравнения системы (6) получим следующее выражение:

* В уравнении притока тепла члены $Au_x dP/dx$, $A\mu (\partial u_x / \partial y)^2$ не приводятся (считаются малыми), в зависимости от температуры принимается $n = 1$.

$$\psi = -\frac{c^2 T_* \operatorname{tg} \alpha}{3 \mu_* R \cdot a} \cdot \xi^2 + \left(\frac{4 c^2 T_* b \operatorname{tg} \alpha}{3 a^2 \mu_* R} + \frac{2 \delta}{a} \right) \cdot \xi + \frac{2 \delta_1}{a} \sqrt{a\xi + b} - \frac{2 \delta_1 \sqrt{b}}{a}, \quad (10)$$

где

$$\delta = -\frac{c^2 T_* \operatorname{tg} \alpha}{3 \mu_* R} \cdot \frac{1 + \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{1 - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} - \frac{2 c^2 T_* b \operatorname{tg} \alpha}{3 a \mu_* R},$$

$$\delta_1 = \frac{2 c^2 T_* \operatorname{tg} \alpha \sqrt{b+a}}{3 \mu_* a R} - \frac{4 c^2 T_* b \operatorname{tg} \alpha \sqrt{b+a}}{3 a^2 \mu_* R} - \frac{2 \delta}{a} \sqrt{b+a}.$$

Как видно, в решение (10) входят три произвольных постоянных величины: a , b и c . Из граничных условий (7) будем иметь:

$$a = (c_1^2 - c_2^2)/2, \quad b = (c_1^2 + c_2^2)/2, \quad c = P_1^* h_0.$$

Итак, на основании формул (2), (5) и (10) для v_x , v_y , P , ρ , μ и T будем иметь:

$$v_x = -\frac{2 c T_* \operatorname{tg} \alpha \cdot T}{3 \mu_* \cdot a} \cdot \xi + \frac{4 c T_* b \operatorname{tg} \alpha \cdot T}{3 a^2 \mu_*} + \frac{2 R T \cdot \delta}{c \cdot a} + \frac{R T \delta_1}{c \sqrt{a\xi + b}}, \quad (11)$$

$$v_y = -\frac{2 c T_* \operatorname{tg}^2 \alpha T \xi^2}{3 \mu_* \cdot a} + \left(\frac{4 c T_* b \operatorname{tg}^2 \alpha T}{3 a^2 \mu_*} + \frac{2 R T \delta \operatorname{tg} \alpha}{c \cdot a} \right) \cdot \xi + \frac{R T \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta_1}{c \sqrt{a\xi + b}} \cdot \xi,$$

$$P = \frac{c}{h_0 + x \operatorname{tg} \alpha}, \quad \rho = \frac{c}{(h_0 + x \operatorname{tg} \alpha) R T}, \quad T = \sqrt{a\xi + b}, \quad \mu = \frac{\mu_*}{T_*} \cdot T.$$

Из найденного решения (11) на основании формулы (10) легко можно показать, что в расширяющемся диффузоре с увеличением температуры газа скорость газа растет, а плотность его уменьшается. Эта часть работы согласуется с теоретическими исследованиями Р. Н. Абрамовича [3] и И. П. Гинзбурга [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Снопов А. И. "Нефть и газ". 1967, № 7.
2. Кочин, Н. Е. Кибель, И. А. Розе И. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Физматгиз. 1963.
3. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика, М., ГИТТЛ, 1953.
4. Гинзбург И. П. Прикладная гидрогазодинамика. Изд. ЛГУ 1958.

Институт математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступило 6. X 1969

К. С. Нагвердијев

Сыхылмајан өзлү мајенин мүстәви диффузорда
истиликдәјишмәси мәсәләсинин бир автомодел һәлли һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә узунлуғу L , кириш кәсијин ени $2h_0$, чыхыш кәсијин ени $2h_1(x)$ олан мүстәви диффузор боруа өзлү сыхылмајан мајенин истиликдәјишмәси мәсәләсинин автомодел һәлли верилмишдир.

Тәдгигатда сүр'әт, тәзјиг вә температур саһәләри тәјин едилмишдир.

Мүстәви диффузорда өзлү сыхылмајан мајенин гејри-изотермик һәрәкәтинин варлыг шәртләри тәјин олунмуш вә диффузор бучағы олан $\alpha \rightarrow 0$ Пуазејл ахымы алынмышдыр.

Ш. М. МУТАЛЛИМОВ

НОРМАЛЬНЫЙ УДАР КОНУСОМ ПО УПРУГОЙ МЕМБРАНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Задача о нормальном ударе жестким круговым конусом по гибкой мембране рассмотрена рядом авторов [1], которые предполагают, что скорость движения точки излома b остается меньше скорости упругой волны a_0 . В работе [2] описан сверхзвуковой удар по упругой мембране в предположении непрерывности меридионального и кольцевого напряжений на фронте поперечной волны.

В настоящей статье рассматривается поперечный удар по упругой мембране острым конусом, при наличии трения в месте, где мембрана облегает поверхность конуса. При этом скорость удара (постоянная) предполагается настолько большой, что для заданного угла раствора конуса $b > a_0$, область меридионального движения разбивается на две: I — от вершины конуса до фронта упругой волны, II — от фронта упругой волны до фронта поперечной волны.

Когда ударяющее тело имеет вид тела вращения, уравнение движения в области прилегания записывается следующим образом [3]:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \cos \gamma \sigma_\theta}{r} - \mu \left(\frac{\sigma_\theta \sin \gamma}{r} + \frac{\sigma_r}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right); \quad (1)$$

μ — коэффициент трения, R — радиус кривизны ударяющего тела. Если же ударяющее тело имеет вид кругового конуса, то с учетом соотношений

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (e_r + \nu e_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (e_\theta + \nu e_r),$$

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r} - 1, \quad e_\theta = \frac{x(u)}{r} - 1, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \cos \gamma = \lambda = \text{const.}$$

уравнение (1) примет вид

$$\frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{A_1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{A_2}{r^2} u - \frac{A_3}{r}. \quad (2)$$

Здесь $A_1 = 1 - \mu \nu \sin \gamma$, $A_2 = \lambda^2 + \lambda \mu \sin \gamma$, $A_3 = (1 + \nu) [1 - \lambda - \mu \sin \gamma]$ — константы для заданного λ .

Общее решение в области II будем искать в виде

$$u_2 = r \varphi(\xi) + r \frac{A_3}{A_1 - A_2}, \quad (3)$$

где $\xi = \left(\frac{a_0 t}{r} \right)^2$.

Тогда уравнение (2) для $\varphi(\xi)$ приводится к виду

$$\xi(1 - \xi) \varphi''(\xi) + \left[\frac{1}{2} - \frac{(1 - A_1)}{2} \xi \right] \varphi'(\xi) - \frac{A_1 - A_2}{4} \varphi(\xi) = 0. \quad (4)$$

Общим решением уравнения (4) будет

$$\varphi(\xi) = C_1 F_1 \left(\alpha; \beta; \frac{1}{2}; \xi \right) + C_2 \xi^{1/2} F_2 \left(\alpha_1; \beta_1; \frac{3}{2}; \xi \right), \quad (5)$$

где F_1, F_2 — гипергеометрические функции;

$$\alpha = \frac{-(1 + A_1) + \sqrt{(1 + A_1)^2 - 4(A_1 - A_2)}}{4}, \quad \alpha_1 = \alpha + \frac{1}{2};$$

$$\beta = \frac{-(1 + A_1) - \sqrt{(1 + A_1)^2 - 4(A_1 - A_2)}}{4}, \quad \beta_1 = \beta + \frac{1}{2}.$$

Так как $\xi \leq 1$, то ряды для этих гипергеометрических функций сходятся. Для определения констант C_1 и C_2 воспользуемся условиями на фронте поперечной волны. Так как поперечный фронт (по предположению) распространяется со сверхзвуковой скоростью, то условия на поперечной волне $r = bt$ будут [4];

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\cos \gamma}. \quad (6)$$

Учитывая два последних равенства, находим, что

$$C_1 = \frac{n_2 \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{A_3}{A_1 - A_2} \right)}{m_2 n_1 + m_1 n_2} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{n_1 \left(\frac{A_3}{A_1 - A_2} - \frac{1}{\lambda} \right)}{m_2 n_1 + m_1 n_2},$$

где

$$n_1 = 4\alpha\beta \frac{a_0^2}{b} F_1 \left(1 + \alpha; 1 + \beta; \frac{3}{2}; \frac{a_0^2}{b^2} \right);$$

$$n_2 = a_0 F_2 \left(\alpha_1; \beta_1; \frac{3}{2}; \frac{a_0^2}{b^2} \right) + \frac{4}{3} \frac{a_0^2}{b^2} \alpha_1 \beta_1 F_2 \left(1 + \alpha_1; 1 + \beta_1; \frac{5}{2}; \frac{a_0^2}{b^2} \right);$$

$$m_1 = F_1 \left(\alpha; \beta; \frac{1}{2}; \frac{a_0^2}{b^2} \right) - \frac{a_0^2}{b^2} 4\alpha\beta F_1 \left(1 + \alpha; 1 + \beta; \frac{3}{2}; \frac{a_0^2}{b^2} \right);$$

$$m_2 = \frac{4}{3} \alpha_1 \beta_1 \frac{a_0^3}{b^3} F_2 \left(1 + \alpha; 1 + \beta_1; \frac{5}{2}; \frac{a_0^2}{b^2} \right).$$

В области I общее решение ищем в виде

$$u_1 = r \zeta^m \psi(\zeta) + r \frac{A_3}{A_1 - A_2},$$

где $\zeta = \left(\frac{r}{a_0 t} \right)^2$. Тогда для $\psi(\zeta)$ получается гипергеометрическое уравнение:

$$\zeta(1 - \zeta) \psi''(\zeta) + \left[\frac{3 + A_1 + 4m}{2} - \frac{4m + 3}{2} \zeta \right] \psi'(\zeta) - \frac{m(1 + 2m)}{2} \psi(\zeta) = 0, \quad (7_1)$$

где $m = \alpha$,

Общим решением уравнения (7₁) будет

$$\psi = C_3 F_3(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \varsigma) + C_4 \varsigma^{1-\gamma_2} F_4(\alpha_3; \beta_3; \gamma_3; \varsigma).$$

Здесь

$$\alpha_2 = \frac{4m+1}{4} + \sqrt{\left(\frac{4m+1}{4}\right)^2 - \frac{m(2m+1)}{2}},$$

$$\beta_2 = \frac{4m+1}{4} - \sqrt{\left(\frac{4m+1}{4}\right)^2 - \frac{m(2m+1)}{2}},$$

$$\gamma_2 = \frac{3 + A_1 + 4m}{2}, \quad \alpha_3 = \alpha_2 + 1 - \gamma_2, \quad \beta_3 = \beta_2 + 1 - \gamma_2, \quad \gamma_3 = 2 - \gamma_2,$$

$$\varsigma \leq 1.$$

Из граничного условия $u_1 = 0$ при $r = 0$ получим $C_4 = 0$, тогда решение будет иметь вид

$$u_1 = r^\varsigma C_3 F_3(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \varsigma) + r \frac{A_3}{A_1 - A_2}.$$

Для определения константы C_3 воспользуемся условием непрерывности смещения ($u_1 = u_2$) на фронте упругой волны $r = a_0 t$. При этом получим

$$C_3 = \frac{C_1 F_1\left(\alpha; \beta; \frac{1}{2}; 1\right) + C_2 F_2\left(\alpha_1; \beta_1; \frac{3}{2}; 1\right)}{F_3(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; 1)}. \quad (7)$$

Теперь рассмотрим те случаи, когда учитываются диссипация энергии, происходящая в результате трения между гибкой мембраной и ударяющим телом на фронте поперечной волны. В этом случае условия на поперечной волне $r = bt$ будут [2]:

$$u = \frac{r}{\lambda},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_0 \frac{1 - \lambda}{\sin \gamma}. \quad (8)$$

Решение задачи с условиями (8) находится аналогично. При этом константы C_1, C_2 выражаются следующим образом:

$$C_1 = \frac{n_2 \cdot \frac{A_1 - A_2 - \lambda A_3}{\lambda(A_1 - A_2)} - p_2 v_0 \frac{1 - \lambda}{\sin \gamma}}{p_1 n_2 - p_2 n_1},$$

$$C_2 = \frac{n_1 \cdot \frac{A_1 - A_2 - \lambda A_3}{\lambda(A_1 - A_2)} - p_1 v_0 \frac{1 - \lambda}{\sin \gamma}}{p_2 n_1 - n_2 p_1},$$

$$\text{где } p_1 = F_1\left(\alpha; \beta; \frac{1}{2}; \frac{a_0^2}{b^2}\right); \quad p_2 = \frac{a_0}{b} F_2\left(\alpha_1; \beta_1; \frac{3}{2}; \frac{a_0^2}{b^2}\right).$$

Зная C_1 и C_2 , константу C_3 определяем по формуле (7). Отметим, что в последнем случае, если не учитывать трения в месте облегания мембраной поверхности конуса, т. е. когда $A_1 = 1, A_2 = \lambda^2, A_3 = (1 + \nu)(1 - \lambda)$, получается решение [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматуллин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.
2. Ленский Э. В. "Вестник Московского университета" 1968, № 5.
3. Бектурсунов У. Нормальный удар по гибким связям по упруго-упруго-пластическим деформациям. Дисс. 1967.
4. Рябис А. А. "Вестник Московского университета", 1966, № 6.

Институт математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступило 16.IX 1969

Ш. М. Мүтәллімов

Сүртүнмәни нәзәрә алмагла, еластик мембрана конус илә дүзүнә зәрбә

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә зәрбәдән сонра, мембранын конуса јапышма сәтһиндә сүртүнмәни нәзәрә алмагла, конусла мембрана дүзүнә зәрбә мәсәләсинә бахылмышдыр.

Тәдгигатда һәрәкәт тәнлијинин һиперкиометрик функцијалар шәклиндә үмуми һәлли тапылмышдыр.

М.Б. А. БАБАЕВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная в квадрате $S = I \times I$, $I = [0, 1]$, функция. Обозначим

$$\|f\| = \sup_{x, y \in S} |f|.$$

Рассмотрим класс непрерывных на S функций вида $\varphi(x) + \psi(y)$. Определим

$$E[f; \varphi + \psi; Q]_c = E[f] = \inf_{\varphi + \psi} \|f - (\varphi + \psi)\|.$$

В работе [1] установлено, что если $f_{xy} \geq 0$, то

$$E[f] = \frac{1}{4} \iint_S f_{xy} d\Sigma = \frac{1}{4} [f(1, 1) - f(1, 0) + f(0, 0) - f(0, 1)].$$

В настоящей работе для некоторого класса функций, включающего в себя функции со свойством $f_{xy} \geq 0$, устанавливается простой способ точного вычисления значения наилучшего приближения. Кроме этого, в отличие от [1], нам удалось обойти использование метода математической индукции.

Обозначим через „П“ класс функций $f(x, y)$, определенных на некотором прямоугольнике $Q = [a, b, c, d]$ и удовлетворяющих условию

$$f(x'', y'') + f(x', y') \geq f(x'', y') + f(x', y'')$$

для произвольных $x'' \geq x'$, $y'' \geq y'$ из Q .

Нетрудно понять, что если $f_{xy} \geq 0$, то $f \in \Pi$. Действительно, для произвольных $x'' \geq x'$, $y'' \geq y'$ имеем

$$0 \leq \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} f_{xy} dx dy = f(x'', y'') + f(x', y') - f(x'', y') - f(x', y'').$$

Обратное вообще неверно, так как функция $f(x, y)$ может не быть дифференцируемой.

Теорема. Для произвольной непрерывной функции $f(x, y) \in \Pi$, определенной на Q , справедливо

$$E[f, \varphi + \psi; Q]_c = \frac{1}{4} [f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)].$$

Доказательство. С. Смоляк [2] и S. P. Diliberto и E. G. Straus [3] (см. также [4]) показали, что для непрерывной функции $f(x, y)$, ограниченной на прямоугольнике со сторонами, параллельными координатным осям,

$$E[f, \varphi + \psi] = \sup |r_m(f)| \quad (1)$$

где

$$r_m(f) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(x_k, y_k);$$

$$\left. \begin{aligned} x_{2j-1} &= x_{2j}; & x_{2j+1} &= x_{2j}; & j &= 1, 2, \dots \\ y_{2n+1} &= y_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и верхняя грань берется по всевозможным совокупностям точек $M = \{P_k\}$ с координатами, удовлетворяющими (2). В дальнейшем такую совокупность точек будем называть молнией.

Обозначим

$$r^0(f) = \frac{1}{4} [f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)].$$

Очевидно, совокупность точек $P_1(a, c)$, $P_2(a, d)$, $P_3(b, d)$, $P_4(b, c)$ является молнией. Поэтому в силу (1) имеем

$$|r^0(f)| \leq E[f].$$

Но рассматриваемая функция $f \in \Pi$. Тогда $r^0(f) \geq 0$ и мы получаем

$$r^0(f) \leq E[f]. \quad (3)$$

Рассмотрим всевозможные молнии M , для которых $r_m(f) \geq 0$. Пусть $P_{2k-1}(x_{2k-1}, y_{2k-1})$ и $P_{2k}(x_{2k}, y_{2k})$ — две последовательные точки некоторой молнии M и $y_{2k-1} < y_{2k}$. В силу определения молнии и того, что $f \in \Pi$, имеем

$$f(b, y_{2k}) - f(b, y_{2k-1}) - [f(P_{2k}) - f(P_{2k-1})] = f(b, y_{2k}) - f(b, y_{2k-1}) - f(x_{2k}, y_{2k}) + f(x_{2k}, y_{2k-1}) \geq 0.$$

Тогда в $r_m(f)$, заменяя $-f(x_{2k-1}, y_{2k-1}) + f(x_{2k}, y_{2k})$ выражением $-f(b, y_{2k-1}) + f(b, y_{2k})$, получим новую молнию M_1 , причем $r_{M_1}(f) \geq r_m(f)$.

Если же $y_{2k-1} > y_{2k}$, то аналогично, заменяя $-f(x_{2k-1}, y_{2k-1}) + f(x_{2k}, y_{2k})$ выражением $f(a, y_{2k}) - f(a, y_{2k-1})$, получим другую молнию M_2 с $r_{M_2}(f) \geq r_m(f)$. Каждый отрезок молнии, параллельной оси ординат, назовем „звеном“. Таким образом, „звено“ $P_{2k-1} P_{2k}$ молнии M проектируется на прямую $x = b$, если $y_{2k-1} < y_{2k}$, или на прямую $x = a$, если $y_{2k-1} > y_{2k}$. Причем от этого значение $r_m(f)$ может только расти.

Проделявая вышеприведенное проектирование для всех „звеньев“ $P_{2k-1} P_{2k}$ молнии M , получим некоторую молнию $\bar{M}$, все точки которой расположены на двух прямых $x = a$, $x = b$ и для которой

$$r_{\bar{M}}(f) \geq r_m(f).$$

Будем говорить, что звено $P_{2k-1} P_{2k}$ направлено вверх, если $y_{2k-1} < y_{2k}$ или же вниз в противном случае.

Если в молнии M два рядом стоящих звена $P_{2k-1} P_{2k}$ и $P_{2k+1} P_{2k+2}$ имеют одинаковое направление, т. е. у них вторые координаты растут ($y_{2k-1} < y_{2k}$, $y_{2k+1} < y_{2k+2}$) или убывают ($y_{2k-1} > y_{2k}$, $y_{2k+1} > y_{2k+2}$), то

в конечной точке первого звена и начальной точке второго в молнии $\bar{M}$ будет соответствовать одна и та же точка (ведь по определению молнии $y_{2k} = y_{2k+1}$). Но так как четность порядкового номера двух последовательных точек молнии различна, то значения функции f в этих точках взаимно уничтожаются.

Опуская пары точек, в которых значения функции f уничтожаются, получим новую молнию M' , у которой при переходе от одной точки к соседней вторые координаты y последовательно переходят от возрастания к убыванию и наоборот. Очевидно, $r_{\bar{M}}(f) = r_{M'}(f)$.

Утверждение. Количество точек молнии M' делится на 4.

Доказательство. а) Если первая точка молнии $\bar{M}$ является первой точкой молнии M' , то первое и последнее звенья молнии имеют противоположные направления, так как в противном случае в силу замкнутости молнии первая и последняя точки M „уничтожились“ бы взаимно. Если учесть, что каждое звено определяется двумя точками, то в этом случае количество точек молнии $\bar{M}$ будет делиться на 4.

б) Если первая (тогда, очевидно, и последняя) точка молнии $\bar{M}$ отсутствует в молнии M' , то количество точек молнии M' равно

$$2(2m + 1) - 2 = 4m,$$

так как ломаная, звенья которой последовательно меняют направление на противоположное и у которой направления первого и последнего звеньев одинаковы (иначе первая и последняя точки молнии $\bar{M}$ не „уничтожились“ бы), имеет нечетное число звеньев. Утверждение доказано.

Сохраняя нумерацию точек молнии M , можно утверждать, что в молнии M' после каждой точки с нечетным индексом следует точка с четным индексом (ведь пары уничтожающихся точек следуют друг за другом и имеют индекс разной четности). Очевидно также, что при переходе от молнии M к M' звено, направленное вверх, проектируется на прямую $x = b$, а направленное вниз — на прямую $x = a$. Возможны два случая:

1. Первое звено молнии M' имеет направление вверх. Тогда в молнии M' первая точка с четным индексом будет находиться на прямой $x = b$, следующая точка M' , очевидно, будет на прямой $x = a$, так как следующее звено M' будет направлено вниз. Таким образом четверка точек молнии M' , первой точкой которой является первая точка с четным индексом этой молнии, образует прямоугольник, схематически показанный на рис. 1. Очевидно,

$$P'_{2k} = P'_{2k}(b, y_{2k}), P'_{2k+1} = P'_{2k+1}(a, y_{2k}), P'_{2q} = P'_{2q}(a, y_{2q}), \\ P'_{2q+1} = P'_{2q+1}(b, y_{2q}), (q > k).$$

Ясно, что последующие четверки точек молнии M' будут иметь такое же расположение, как $P'_{2k}, P'_{2k+1}, P'_{2q}, P'_{2q+1}$. Покажем, что для каждой такой четверки точек справедливо соотношение

$$r^0(f) \geq \frac{1}{4} [f(P'_{2k}) + f(P'_{2q}) - f(P'_{2k+1}) - f(P'_{2q+1})]. \quad (4)$$

В силу $f \in \Pi$ имеем:

$$f(b, d) - f(a, d) - [f(P'_{2k}) - f(P'_{2k+1})] = f(b, d) + f(a, y_{2k}) - f(a, d) - \\ - f(b, y_{2k}) \geq 0; \quad (5)$$

$$f(a, c) - f(b, c) - [f(P'_{2q}) - f(P'_{2q+1})] = f(a, c) + f(b, y_{2q}) - f(b, c) - \\ - f(a, y_{2q}) \geq 0. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем справедливость (3):

$$r^0(f) = \frac{1}{4} [f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)] \geq \frac{1}{4} [f(P'_{2k}) + f(P'_{2q}) - \\ - f(P'_{2k+1}) - f(P'_{2q+1})].$$

2. Первое звено молнии M' направлено вверх. Аналогично случаю 1, теперь в молнии M' первая точка с четным индексом будет находиться на прямой $x = a$, следующая точка — на прямой $x = b$. Полученная при этом для первой четверки точек картина схематически представлена на рис. 2, где

$$P'_{2k} = P'_{2k}(a, y_{2k}), P'_{2q} = P'_{2q}(b, y_{2q}), \\ P'_{2k+1} = P'_{2k+1}(b, y_{2k}), P'_{2q+1} = P'_{2q+1}(a, y_{2q}).$$

Последующие четверки точек молнии M' будут иметь такое же расположение.

Рассуждая аналогично случаю 1, опять получаем справедливость соотношения 3. Итак, независимо от направления первого звена молнии M' , всегда справедливо (4).

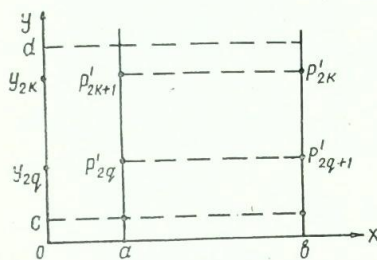


Рис. 1.

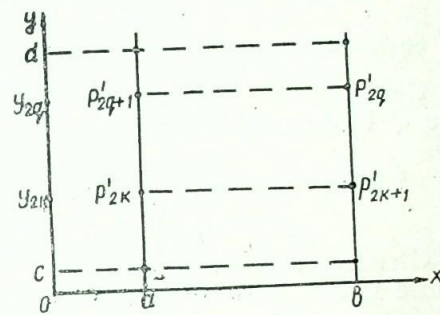


Рис. 2.

Разделяя вышеуказанным образом все точки молнии M' на группы по четыре точки в каждой, получим всего $m \leq \frac{n}{2}$ групп, где $2n$ — количество точек первоначальной молнии M . Резюмируя все вышесказанное, приходим к выводу, что для произвольной молнии M , для

которой $r_M(f) \geq 0$, справедливо $r_M(f) \leq r_{M'}(f) \leq \frac{4m}{2n} r^0(f) \leq r^0(f)$. (7)

В произвольной молнии $M\{P_1, P_2, \dots, P_{2n}\}$, меняя направление отсчета точек, получаем молнию $M_- = M\{P_{2n}, P_{2n-1}, \dots, P_1\}$, для которой $r_{M_-}(f) = -r_M(f)$, откуда $|r_{M_-}(f)| = |r_M(f)|$. Следовательно, отбрасывая ограничение о том, что $r_M(f) \geq 0$, в силу (7) имеем следующее: для произвольной молнии M справедливо

$$|r_M(f)| \leq r^0(f)$$

или учитывая (3),

$$|r_M(f)| \leq r^0(f) \leq E(f),$$

что в силу (1) завершает доказательство теоремы.

Обозначим через Π_- класс функций $f(x, y)$, определенных на прямоугольнике $Q = [a, b, c, d]$ и удовлетворяющих условию

$$f(x'', y'') + f(x', y') \leq f(x'', y') + f(x', y'')$$

для произвольных $x'' \geq x'$, $y'' \geq y'$ из Q . Нетрудно убедиться, что все функции, для которых $f_{xy} \leq 0$, содержатся в классе Π_- .

Теорема 2. Для произвольной непрерывной функции $f \in \Pi_-$ справедливо

$$E[f; \varphi + \psi; Q]_C = -\frac{1}{4} [f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)].$$

Доказательство. Очевидно, из $f \in \Pi_-$ следует, что $(-f) \in \Pi$, поэтому в силу теоремы 1 имеем

$$E[f; \varphi + \psi; Q]_C = -\frac{1}{4} [f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)].$$

Но, учитывая, что классы функций вида $\{\varphi(x) + \psi(y)\}$ и $\{-\varphi(x) - \psi(y)\}$ совпадают, очевидно

$$\begin{aligned} E[-f; \varphi + \psi; Q]_C &= \inf_{\varphi+\psi} \|-f - (\varphi + \psi)\| = \inf_{\varphi+\psi} \|f - (\varphi + \psi)\| = \\ &= E[f; \varphi + \psi; Q]_C. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из установленных теорем следует

Следствие 1. Если смешанное производное f_{xy} на прямоугольнике Q сохраняет знак, то

$$E[f; \varphi + \psi; Q]_C = \frac{1}{4} |f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)|.$$

Следствие 2. Пусть $f = x^\alpha y^\beta g(x, y)$; где $\alpha, \beta \geq 0$ — вещественные числа, и $Q = [0, b; 0, d]$. Тогда:

$$\text{а) если } f \in \Pi, \text{ то } E[f; \varphi + \psi; Q]_C = \frac{f(b, d)}{4};$$

$$\text{б) если } f \in \Pi_-, \text{ то } E[f; \varphi + \psi; Q]_C = -\frac{f(b, d)}{4}.$$

Следствие 3. Пусть $S = [0, 1; 0, 1]$. Тогда для произвольных вещественных $\alpha, \beta \geq 0$

$$E[x^\alpha y^\beta; \varphi + \psi; S]_C = E[xy; \varphi + \psi; S]_C = \frac{1}{4}.$$

Это с очевидностью следует из следствия 2 и того, что

$$x^\alpha y^\beta \in \Pi.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Rivlin T. J. and Sibner R. J. The degree of approximation of certain functions of two variables by a sum of functions of one variable. Amer. Math. Monthly, 1965, 72, № 10.
2. Офман Ю. П. „Изв. АН СССР, матем“. 1961, 25, № 2.
3. Diliberto S. P. and Straus E. G. On the approximation of a function of several variables by the sum of functions of fewer variables, Pacific, J. Math. 1 (1951).
4. Бабаев М.-Б. А. „ДАН Азерб. ССР“, 1967, № 2.

Институт математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступило 16. IX 1969

М.-Б. Ә.Бабајев

Ән јахшы јахынлашманын гијмәтини тә'јин етмәнин бир
үсулу һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $[a, b; c, d]$ дүзбучаглысында тә'јин олунмуш вә $f_{xy} \geq 0$ хассәли $f(x, y)$ функцијалар синфини өзүндә сахлајан икидәјишәнли функцијаларын бир синфинин функцијаларынын $\varphi(x) + \psi(y)$ шәклиндә чәмләрлә ән јахшы јахынлашмасынын гијмәтини һесабламағын садә үсулу верилмишдир.

В. М. МИРСАЛИМОВ

О СТРУКТУРЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ВЕРШИНЕ ТРЕЩИНЫ

Поставлена и приближенно решена задача о тонкой структуре конца трещины в идеально упруго-пластическом материале в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородное изотропное тело с трещинами нормального разрыва. Материал тела предполагается идеально упруго-пластическим, подчиняющимся условию пластичности Треска—Сен-Венана, согласно которому максимальное напряжение в каждой точке тела не превышает предела текучести на сдвиг τ_s ($2\tau_s = \sigma_s$); где σ_s —предел текучести на растяжение. Будем считать, что трещины удовлетворяют условию локальной симметрии. Допустим, что имеет смысл представление о тонкой структуре конца трещины, т. е. $d \ll L$, где d —характерный размер пластической области, L —характерный линейный размер тела. Условие $d \ll L$ характеризует квазихрупкое разрушение, при котором размер пластической области мал по сравнению с размером тела.

Как известно, указанное условие является наиболее типичным и выполняется для многих металлических конструкций в широком интервале их размеров, для различных скоростей деформирования, температур и начальных трещин [1]. Задачу о тонкой структуре конца трещины [2] (т. е. о распределении напряжений и деформаций на расстояниях r от конца трещины, удовлетворяющих условию $L \gg r \gg \rho$, где ρ —радиус кривизны конца трещины) можно ставить следующим образом. Рассмотрим окрестность конца трещины, которая мала по сравнению с характерным линейным размером тела, но больше сравнительно с характерным размером пластической области. Тогда трещина на плоскости xu представится полубесконечным разрезом вдоль $y=0$, $-\infty < x < 0$, свободным от внешних нагрузок. При этом, в окрестности начала координат будем иметь пластическую область, подлежащую определению. В бесконечно удаленной точке параметром нагружения является коэффициент интенсивности напряжений N , определяемый следующим образом:

$$\text{при } y=0 \quad x \rightarrow \infty, \quad \lim (\sigma_y \sqrt{x}) = N. \quad (1, 1)$$

Здесь σ_x , σ_y , τ_{xy} —напряжения. Будем считать, что пластические деформации сосредоточены вдоль некоторых линий скольжения, выходящих из вершины трещины. Из опыта хорошо известна общая тенденция к формированию пластических областей на первых стадиях их развития в виде узких полос скольжения, занимающих незначительный объем тела по срав-

нению с его упругой частью [3]. В особенности это характерно для материалов, обладающих четко выраженной площадкой текучести, а также при наличии напряженного состояния с достаточно большим градиентом напряжений. Так как поставленная задача автомодельна (роль времени в которой играет параметр N^2/μ^2 , где μ —модуль сдвига), то линии скольжения, удовлетворяющие условию автомодельности, могут быть только прямыми.

Перейдем к автомодельным безразмерным переменным

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{x \mu^2}{N^2}, & y_* &= \frac{y \mu^2}{N^2}, \\ \sigma_x^* &= \frac{\sigma_x}{\mu}, & \sigma_y^* &= \frac{\sigma_y}{\mu}, & \tau_{xy}^* &= \frac{\tau_{xy}}{\mu}, \\ \vec{u}_* &= \frac{\vec{u} \mu^2}{N^2}, & \tau &= \frac{\tau_s}{\mu}. \end{aligned} \quad (1, 2)$$

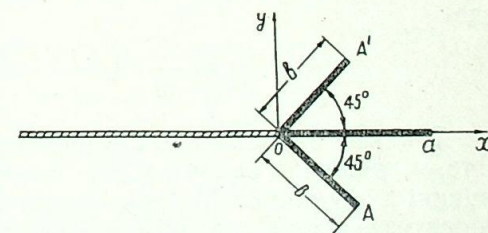
Здесь $\vec{u}$ —вектор смещения. В дальнейшем для простоты звездочку будем опускать. Экспериментальные данные по плоской деформации позволили установить характерную особенность формирования пластических деформаций, которая состоит в том, что начальные пластические деформации в окрестности конца щели локализуются вдоль узких полос под углом 45° к направлению трещины [4, 5, 6].

Согласно исследованиям [4, 7, 8] посвященным изучению пластических деформаций в окрестности трещины в тонких пластинах, начальные пластические деформации сосредоточиваются вдоль полос под углом 45° к направлению трещины. В ряде экспериментов [9—12] начальные пластические деформации развивались в виде узких зон на продолжении трещины, подтверждая гипотезу Дагдейла. Следует отметить работу [3], в которой изучалось появление и развитие начальных пластических деформаций для тонких пластин. Было найдено, что вначале развивается линия скольжения по направлению трещины, затем ее развитие останавливается и начинают расти боковые полосы пластичности. Возможность наличия двух систем линий скольжения в тонких пластинах не противоречит кинематически возможной схеме пластического течения. Согласно точным вычислениям, пластические области имеют тенденцию к локализации в линии скольжения одного из указанных типов [14, 15].

На основании вышеизложенного представляет интерес постановка и решение следующей задачи плоской теории упругости

$$\begin{aligned} y &= 0, \quad -\infty < x < 0, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad \sigma_y = 2\tau, \quad \tau_{xy} = 0; \\ y &= \pm x, \quad 0 < x < \frac{b}{\sqrt{2}}, \quad \tau_{r\theta} = \tau, \quad [\sigma_\theta] = 0, \quad [u_\theta] = 0; \\ y &= 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \lim (\sigma_y \sqrt{x}) = 1. \end{aligned} \quad (1, 3)$$

Здесь $r\theta$ —полярные координаты; квадратная скобка означает скачок величины при переходе через линию разрыва; a и b —безразмерные параметры, подлежащие определению (рис.). В частности, случай $a=0$ отвечает плоской деформации, а при $b=0$ получается известная постановка Дагдейла. Во второй и третьей строках записаны обычные



условия на поверхности разрыва тангенциального смещения в идеальном упруго-пластическом теле [16]. Случай $a \neq 0$ физически реализуется только в тонких пластинах (шейка) и соответствует плоскости скольжения под углом 45° к плоскости пластины [17].

2. **Решение краевой задачи.** Вначале получим точное решение следующей плоской задачи теории упругости:

$$y = 0, -\infty < x < 0, \sigma_y = \tau_{xy} = 0, 0 < x < a, \sigma_y = 2\tau, \tau_{xy} = 0;$$

$$y = \pm x, 0 < x < \frac{b}{\sqrt{2}}, [\sigma_\theta - i\tau_\theta] = 0, [u_r + iu_\theta] = f(r); \quad (2, 1)$$

$$y = 0, x \rightarrow \infty, \lim(\sigma_\theta \sqrt{x}) = 1.$$

При помощи соотношений Колосова—Мусхелишвили [18] и вспомогательной аналитической функции $\Omega(z)$

$$\Omega(z) = z\Phi'(z) + \psi(z). \quad (2, 2)$$

Граничную задачу (2, 1) можно свести к краевой задаче теории аналитических функций:

$$y = 0, -\infty < x < 0, \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \Omega(z) = 0, \\ 0 < x < a, \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \Omega(z) = 2\tau; \quad (2, 3)$$

$$y = \pm x, 0 < x < \frac{b}{\sqrt{2}}, [\Phi(z)] = g_1(t), [\Omega(z)] = g_2(t);$$

$$z \rightarrow \infty, \lim\{\sqrt{z}\Phi(z)\} = \frac{1}{2}, \lim\{\sqrt{z}\Omega(z)\} = 0.$$

Здесь

$$g_1(t) = \frac{2f'(r)}{x+1} \quad (t = re^{\pm \frac{\pi i}{4}})$$

$$g_2(t) = \frac{2}{x+1} \{rf''(r) \pm 2if'(r) \pm irf''(r)\}. \quad (2, 4)$$

Верхние знаки соответствуют разрезу OA' , а нижние— AO (рис.). Потребуем из физических соображений, чтобы функция $f(r)$ удовлетворяла условию;

$$r \rightarrow b \lim f(r) = \lim f'(r) = 0. \quad (2, 5)$$

Можно показать, что при этом условии решение краевой задачи (2, 3) будет иметь такую форму:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(t) dt}{t-z}; \quad \Omega(z) = \Omega_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_2(t) dt}{t-z}. \quad (2, 6)$$

Здесь контур L образован отрезками AO и OA' , проходимыми от $A \times A'$ (рис.), функции $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ аналитичны вне разреза вдоль $y = 0, x < 0$. Краевая задача (2, 3) сводится к следующей:

$$y = 0, x < 0, \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + \Omega_0(z) = 0$$

при

$$0 < x < a, \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + \Omega_0(z) = 2\tau + F(x), \quad (2, 7)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g_1(t) dt}{t-x} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_2(t) dt}{t-x}.$$

Так как напряжения в идеально упруго-пластическом теле ограничены, решение задачи (2, 7) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Теперь заметим, что в силу условий симметрии (2, 7) на всей действительной оси будет $\text{Im } \Omega_0 = 0$. Следовательно,

учитывая еще условие на бесконечности, получаем $\Omega_0(z) \equiv 0$. Решение задачи Дирихле для функции $\Phi_0(z)$ запишется так [19, 20]:

$$\Phi_0(z) = \frac{\sqrt{z-a}}{2\pi i} \int_{-\infty}^a \frac{F(x) dx}{\sqrt{x-a}(x-z)} + \tau \left(1 - \frac{1}{\pi i} \ln \frac{i\sqrt{a}-\sqrt{z-a}}{i\sqrt{a}+\sqrt{z-a}} \right). \quad (2, 8)$$

Здесь $\sqrt{z-a}$ считается положительным при $y = 0, x > a$, корень под интегралом представляет собой значение функции $\sqrt{z-a}$ на верхнем берегу разреза $y = 0, x < a$. Согласно условию на бесконечности должно выполняться соотношение

$$-\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^a \frac{F(x) dx}{\sqrt{x-a}} + \frac{4\tau\sqrt{a}}{\pi} = 1. \quad (2, 9)$$

Итак, формулы (2, 4) — (2, 9) дают полное решение задачи для дислокации произвольной мощности.

3. **Приближенное решение краевой задачи.** Используя формулу перестановки Пуанкаре—Бергмана [20], выражения (2, 8) и (2, 9) выразим через однократное интегрирование:

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{z-a}}{4\pi i} \left\{ \int_L \frac{[2g_1(t)+g_2(t)] dt}{(t-z)\sqrt{t-a}} - \frac{1}{\sqrt{z-a}} \int \frac{[2g_1(t)+g_2(t)] dt}{t-z} + \right. \\ \left. + \tau \left(1 - \frac{1}{\pi i} \ln \frac{i\sqrt{a}-\sqrt{z-a}}{i\sqrt{a}+\sqrt{z-a}} \right) \right\}; \quad (3, 1)$$

$$- \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{[2g_1(t)+g_2(t)] dt}{\sqrt{t-a}} \right\} + \frac{4\tau\sqrt{a}}{\pi} = 1. \quad (3, 2)$$

В дальнейшем будем рассматривать случай $a = 0$, который отвечает плоской деформации. Функцию $f(r)$ будем искать в виде

$$f(r) = A(b-r)^2.$$

Здесь A и b подлежат определению. Для этого, помимо условия (3, 2), будем использовать следующее приближенное соотношение:

$$\int_0^b \tau_{r\theta} dr = \tau b. \quad (3, 3)$$

Используя (2, 4), (2, 6) и (3, 1), в рассматриваемом случае будем иметь для функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ следующие выражения:

$$\Phi(z) = \frac{2A}{\pi(1+z)} \left\{ i \left(b - z \cos \frac{\pi}{4} \right) \ln \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} - \right. \\ \left. - z \sin \frac{\pi}{4} \ln \frac{(z - \bar{z}_0)(z - z_0)}{z^2} - 2i \left(b - 3z \cos \frac{\pi}{4} \right) \ln \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}} + \right. \\ \left. + 2b \ln \frac{(\sqrt{z} + \sqrt{z_0})(\sqrt{z} + \sqrt{z_0})}{z} + 6\sqrt{b}\sqrt{z} - 3b \right\}; \\ \Omega(z) = - \frac{4A}{\pi(1+z)} \left\{ \left(b - z \cos \frac{\pi}{4} \right) \ln \frac{(z - \bar{z}_0)(z - z_0)}{z^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{2}z \ln \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} - 3b \right\}. \quad (3, 4)$$

Здесь $z_0 = be^{-\frac{i\pi}{4}}$. После интегрирования условие (3, 2) можно записать в виде

$$4A\delta^{3/2} = \frac{\pi(1+\kappa)}{2\left(\sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\right)} \quad (3,5)$$

Соотношения (3, 4) и (2, 2) определяют τ_0 . Удовлетворяя условию (3, 3), будем иметь

$$\tau = \frac{7,52 A\delta}{\pi(1+\kappa)} \quad (3,6)$$

Окончательно из (3, 5) и (3, 6) найдем

$$\delta = 0,502 \frac{1}{\tau^2} = 0,502 \frac{N^2}{\tau_s^2} \quad (3,7)$$

$$A = 0,81(1+\kappa)\tau^3 \leq 0,81(1+\kappa) \frac{\tau_s^3 \mu}{N^4} \quad (3,8)$$

Используя (3,4), (2, 2) и (3,8), найдем раскрытие в конце трещины.

$$\delta = 0,308(1+\kappa) \frac{1}{\tau} \quad (3,9)$$

4. **Обсуждение результатов.** Для материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ соотношение (3,9) дает

$$\delta = 0,865 \frac{N^2}{\tau_s \mu} = 4,5 \frac{N^2}{E\sigma_s} \quad (4,1)$$

Напомним, что протяженность пластической зоны и раскрытие в конце трещины для плоско-напряженного состояния составляют, соответственно [2, 21]:

$$d = \frac{\pi^2 N^2}{4\sigma_s^2}, \quad \delta = \frac{2\pi N^2}{E\sigma_s} \quad (4,2)$$

Сравнение полученных результатов для плоской деформации с плоско-напряженным состоянием показывает, что величина протяженности пластической зоны d составляет 81% от значения при плоском напряженном состоянии, а раскрытие в конце трещины δ — 72% от значения при плоском напряженном состоянии. Приведенные значения близки к результатам [21], полученным американским ученым Райсом совершенно иным путем. Согласно [21] длина пластической зоны при плоской деформации составляет 73% значения длины пластической зоны при плоском напряженном состоянии, а раскрытие в конце трещины — 70% от значения при плоском напряженном состоянии.

Автор глубоко благодарен Г.П. Черепанову за ценные советы при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fracture Toughness Testing and its Applications, Philadelphia, Pa., ASTM, 1965. Русск. пер. Прикладные вопросы вязкости разрушения. Изд-во „Мир“, М., 1968.
2. Черепанов Г. П., ПММ, т. 32, 1968, вып. 6.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М., ИЛ, 1954.
4. Кошелев П. Ф., Ужик Г. В., Изв. АН СССР мех. и маш., 1959, № 1.
5. Ault R. T. and Spretnak J. W. J. W. Initial yielding and fracture in notched sheet molybdenum. Jnt. J. Mech. sci. 7, p. 87, 1965.
6. Hahn G. T., Rosenfield A. R. Experimental determination of plastic constraint ahead of a sharp crack under plane strain conditions. Ship structure committee Report, SSC-180, 1966.
7. Работнов Ю. Н., Станкевич О. Ф., Изв. АН СССР, „Механика“, 1965, № 2.
8. Gerberich W. W. Plastic strains and energy density in cracked plates. I. Experimental techniques and results. Experimental Mech 335—344, 1964.
9. Hahn G. T., Rosenfield A. R. Local yielding and extension of a crack under plane stress. Acta Metallurg, v. 13 № 3, p. 293, 1965.
10. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. Phys. Solids. v. 8, № 2, p. 100, 1960.

11. Rosenfield A. R., Dai P. K., Hahn G. T. Crack extension and propagation under plane stress. Jnt. Conf. on Fracture, Sendai, Japan, 1965.
12. Forman R. G. Experimental program to determine effect of crack buckling and specimen dimensions on fracture toughness of thin sheet materials Aerospace Res. Labs. Rep. No. AFFDL-TR-65-146. Wright-Patterson Air Force Base, 1966.
13. Леонов М. Я., Витвицкий П. М., Ярема С. Я. „ДАН СССР“, т. 148, 1963, № 3.
14. Southwell R., Allen G. Relaxation methods applied to engineering problems. Phil. Trans. Roy. Soc. L., Ser. A, v. 242, p. 379, 1950.
15. Черепанов Г. П. ПММ, т. 27, 1963, вып. 3.
16. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехтеориздат. М., 1956.
17. Hill R. On discontinuous plastic states, with special reference to a localized necking in thin sheets. J. Mech. and Phys. of solids, vol 1, 1952, № 1.
18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. „Наука“, М., 1966.
19. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. 2. Физматгиз, М., 1963.
20. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3. „Наука“ М., 1968.
21. Rice J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. J. Appl. Mech. Trans. ASME, ser. E, 1968, № 2.

Институт математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступило 27. II 1970

В. М. Мирсалимов

Ярыгын тэпэсиндэ пластик деформасијанын структуру һаггында

ХҮЛАСӘ

Идеал еластик-пластик материалларда мүстәви деформасијанын вә мүстәви кәркинлик вәзијјәтиндә јаранан јарыгын тэпэсиндәки пластик деформасијанын назик структуру һаггында мәсәлә гојулмуш вә тәҗриби һәлл едилмишдир.

Ф. Г. МАКСУДОВ, К. ХАМРАЕВ

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУПРЯМОЙ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Решению смешанных задач для гиперболических уравнений методом Фурье посвящено много работ. Первое строгое обоснования метода Фурье при решении смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au + f(x, t),$$

где A — отрицательно определенный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l(u) = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + c(x)u$$

и краевым условием типа Дирихле или Неймана на границе некоторой ограниченной области, было дано О. А. Ладыженской [1]. Наиболее общие результаты получены В. А. Ильиным [2], который сделал также подробный обзор работ по методу Фурье. Указанные методы применимы исключительно к операторам, обладающим чисто точечным спектром, что имеет место главным образом в случае ограниченных областей.

Решение смешанных задач в ограниченной области, когда переменные в уравнении не разделяются, было рассмотрено З. И. Халиловым [4], а в дальнейшем развито К. Г. Мамедовым [5], Ю. Ф. Коробейником [6]. В случае, когда переменные разделяются, метод Фурье для общих дифференциальных операторов с произвольным спектром обоснован К. Мореном [3].

Настоящая статья посвящена исследованию решения смешанных задач для гиперболического уравнения с неразделяющимися переменными в неограниченной области. В данном случае главная часть уравнения есть сингулярный дифференциальный оператор $2n$ -го порядка с произвольным спектром. Этот случай является наиболее интересным, поскольку ввиду наличия непрерывного спектра собственные функции дискретного спектра не образуют базиса пространства $L_2(0, \infty)$, а „собственные функции“ непрерывного спектра не интегрируемы в квадрате.

Рассмотрим самосопряженное по Лагранжу дифференциальное выражение

$$l(y) = (-1)^n (P_0(x) y^{(n)})^{(n)} + (-1)^{(n-1)} (P_1(x) y^{(n-1)})^{(n-1)} + \dots + P_n(x) y \quad (1)$$

на полуоси $(0, \infty)$, где $P_0(x), \dots, P_n(x)$ — локально суммируемые вещественные функции. Обозначим через D линейное многообразие в $L_2(0, \infty)$, состоящее из всех функций $u \in L_2(0, \infty)$, все квазипроизводные которых до $(2n-1)$ -го порядка включительно абсолютно непрерывны, а квазипроизводные $y^{[2n]} = l(y)$ принадлежит пространству $L_2(0, \infty)$. Определим оператор L в $L_2(0, \infty)$ следующим образом: область определения есть D и для $y \in D$ $Ly = l(y)$.

Обозначим через D_0 совокупность всех финитных функций из D а через L_0 — сужение оператора L на D_0 . L_0 является симметрическим оператором. Обозначим через L_0 какое-нибудь самосопряженное расширение оператора L_0 . Ставится следующая задача: найти в области $\varepsilon = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_0 u + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + b(x, t)u + c(x, t), \quad (2)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, t)|_{t=0} = f_1(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = f_2(x), \quad (3)$$

такое, что $u(x, t) \in D(L_0)$ при всех $t \in [0, T]$.

Определение. Решением задачи (2) — (3) будем называть всякую функцию $u(x, t) \in D(L_0)$ при всех $t \in [0, T]$, имеющую непрерывные по t производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L_2(0, \infty)$ и удовлетворяющие уравнению (2) и начальному условию (3) в смысле $L_2(0, \infty)$ при всех $t \in [0, T]$.

Нашей основной целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть сужение L_0 оператора L имеет индекс дефекта (n, n) и обладает полуограниченным самосопряженным расширением L_0 , и пусть удовлетворены следующие условия:

- 1) $f_1(x) \in D(L_0), f_2(x) \in D[(L_0 + m)^2]$ $m = \text{const}$;
- 2) $a(x, t)u_i(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), b(x, t)u_i(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$ при всех $t \in [0, T]$;
 $i = 1, n$;
- 3) функции $a(x, t), b(x, t)$ непрерывно дифференцируемы по t при всех $x \in [0, \infty]$ и $\frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \cdot u_i(x, \lambda), \frac{\partial b(x, t)}{\partial t} \cdot u_i(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$;
 $i = 1, n$;
- 4) $c(x, t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ в смысле $L_2(0, \infty)$, т. е. $\left\| \frac{c(x, t+n) - c(x, t)}{n} - \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} \right\|_{L_2(0, \infty)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда существует единственное, непрерывно зависящее от начальных данных, решение задачи (2) — (3) и оно представляется в виде

$$u(x, t) = \int_0^\infty \sum_{i,j=1}^n F_i(t, \lambda) u_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda).$$

Сначала приведем вспомогательные предложения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Как известно [9], каждому самосопряженному дифференциальному оператору L в $L_2(0, \infty)$ соответствует некая матричная функция $\sigma(\lambda) = (\sigma_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^n \in \infty < \lambda < \infty$, обладающая следующими свойствами:

- 1) при любом вещественном значении λ $\sigma(\lambda)$ есть эрмитова матрица;
- 2) при любом $\lambda < \mu$ разность $\sigma(\mu) - \sigma(\lambda)$ есть положительно определенная матрица;
- 3) все функции $\sigma_{ij}(\lambda)$ непрерывны справа. Матрица функции $\sigma(\lambda)$ называется спектральной функцией распределения оператора L .

Пусть R — совокупность всех ограниченных, кусочно-непрерывных вектор-функций $\varphi(\lambda) = \{\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)\}$, равных нулю вне некоторого конечного интервала (своего для каждой функции). Определим в R скалярное произведение, полагая для

$$\varphi, \psi \in R \quad (\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(\lambda) \overline{\psi_j(\lambda)} d\sigma_{ij}(\lambda).$$

Очевидно, R станет тогда предгильбертовым пространством, при этом две функции φ и ψ считаются одинаковыми векторами пространства R , если $(\varphi - \psi, \varphi - \psi) = 0$. Пополнение пространства R есть гильбертово пространство. Обозначим его через L_2^s . Определим в R оператор Λ_s , полагая для $\varphi \in R$ $\Lambda_s \varphi(\lambda) = \lambda \varphi = \{\lambda \varphi_1, \lambda \varphi_2, \dots, \lambda \varphi_n\}$.

Очевидно, Λ_s — симметрический оператор в L_2^s , а его замыкание Λ , как известно [9], есть самосопряженный оператор в L_2^s .

Обозначим через $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$ какие-нибудь линейно независимые решения уравнения (1), являющиеся целыми аналитическими функциями параметра λ и удовлетворяющие краевым условиям, которые описывают самосопряженное расширение L_0 . Тогда формулы

$$F_i(\lambda) = \int_0^\infty f(x) y_i(x, \lambda) dx, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n F_i(\lambda) y_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) \quad (5)$$

устанавливают взаимно обратные изометрические отображения $L_2(0, \infty)$ на $L_2^s(0, \infty)$ и $L_2^s(0, \infty)$ на $L_2(0, \infty)$, переводящие соответственно друг друга операторы L и Λ . При этом интегралы в формулах (4) и (5) сходятся в смысле метрики L_2^s и $L_2(0, \infty)$, соответственно.

Решение задачи (2) — (3) будем искать в виде

$$u(x, t) = \int_0^\infty \sum_{i,j=1}^n F_i(t, \lambda) y_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (2) и учитывая условие (3), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_i(t, \lambda)}{dt^2} = & -\lambda^2 F_i(t, \lambda) + \int_0^\infty \sum_{k,l=1}^n A_{il}^t(t, \lambda, \mu) \frac{dF_k(t, \mu)}{dt} d\sigma_{kl}(\mu) + \\ & + \int_0^\infty \sum_{k,l=1}^n B_{il}^t(t, \lambda, \mu) F_k(t, \mu) d\sigma_{kl}(\mu) + F_i(t, \lambda), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$A_{il}^t(t, \lambda, \mu) = \int_0^\infty a(x, t) y_i(x, \mu) y_l(x, \lambda) dx,$$

$$B_{il}^t(t, \lambda, \mu) = \int_0^\infty b(x, t) y_i(x, \mu) y_l(x, \lambda) dx.$$

$$C_i(t, \lambda) = \int_0^\infty c(x, t) y_i(x, \lambda) dx,$$

$$F_i(0, \lambda) = a_i^{(1)}(\lambda) = \int_0^\infty f_1(x) y_i(x, \lambda) dx, \quad (8)$$

$$F_i'(0, \lambda) = a_i^{(2)}(\lambda) = \int_0^\infty f_2(x) y_i(x, \lambda) dx. \quad (9)$$

Обозначим через G множество функций

$$v(t, \lambda) = \{v_1(t, \lambda), v_2(t, \lambda), \dots, v_n(t, \lambda)\} \in L_2^s$$

таких, что функция

$$\|v(t, \lambda)\| = \int_0^\infty \sum_{i,j=1}^n v_i(t, \lambda) \overline{v_j(t, \lambda)} d\sigma_{ij}(\lambda),$$

непрерывна на $[0, T]$. Нетрудно показать, что множество G с нормой $\max_t \|v(t, \lambda)\|$ является банаховым пространством. Исследование задачи Коши (7) — (9) произведем в пространстве G . Положим

$$[Av](t, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}^k(t, \lambda, \mu) v_j(t, \mu) d\sigma_{ij}(\mu),$$

$$[Bv](t, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^{2n} B_{ij}^k(t, \lambda, \mu) v_j(t, \mu) d\sigma_{ij}(\mu).$$

Имеет место следующая

Лемма 1. Если $a(x, t) y_i(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$ и $|a(x, t)| < M$ при всех $t \in [0, T]$, то оператор $A(t)$ ограниченно действует из G в G .

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} |(A(t)v, u)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n [Av](t, \lambda) u_l(t, \lambda) d\sigma_{kl}(\lambda) \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,l=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n A_{ij}^k(t, \lambda, \mu) v_j(t, \mu) d\sigma_{ij}(\mu) u_l(t, \lambda) d\sigma_{kl}(\lambda) \right|. \end{aligned}$$

Учитывая, что $A_{il}^k(t, \lambda, \mu) = \int_0^\infty a(x, t) y_k(x, \lambda) y_l(x, \mu) dx$,

будем иметь

$$\begin{aligned} |(A(t)v, u)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^\infty a(x, t) y_k(x, \lambda) y_l(x, \mu) dx \right) \times \right. \right. \\ &\quad \times v_j(t, \mu) d\sigma_{ij}(\mu) \left. \right] u_l(t, \lambda) d\sigma_{kl}(\lambda) \Big| = \\ &= \left| \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,j=1}^n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,l=1}^n \left(a(x, t) y_k(x, \lambda) y_l(t, \mu) v_j(t, \mu) d\sigma_{ij}(\mu) \right) u_l(t, \lambda) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \times d\sigma_{kl}(\lambda) \Big\} dx \Big|. \end{aligned}$$

Положим

$$\bar{v}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n y_i(t, \mu) v_j(t, \mu) d\sigma_{ij}(\mu),$$

$$\bar{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n y_k(t, \lambda) u_l(t, \lambda) d\sigma_{kl}(\lambda),$$

тогда получим

$$|(A(t)v, u)| = \left| \int_0^\infty a(x, t) \bar{u}(x) \bar{v}(x) dx \right|.$$

По условию Леммы $|a(x, t)| < M$, тогда

$$|(A(t)v, u)| \leq M \int_0^\infty \bar{u}(x) \bar{v}(x) dx.$$

В силу равенства Парсеваля получим

$$\int_0^\infty \tilde{u}(x) \tilde{v}(x) dx = \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |v_i(t, \lambda) u_j(t, \lambda)| d\sigma_{ij}(\lambda).$$

Тогда

$$|(A(t)v, u)| \leq M(\tilde{v}, u).$$

Отсюда следует, что оператор является ограниченным оператором в пространстве G , что и требовалось доказать.

Лемма 2. Если $b(x, t) y_j(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$ и $|b(x, t)| < M$ при $x \in [0, \infty]$, то оператор $B(t)$ ограниченно действует из G в G .

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Задачу Коши (7) — (9) запишем в абстрактном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \Lambda_0 u(t) &= A \frac{du(t)}{dt} + Bu(t) + E(t), \\ u(0) &= a'', \\ u'(0) &= a^{(2)}. \end{aligned}$$

К этой задаче будем применять результаты теории дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Для этого докажем некоторые леммы.

Лемма 3. Пусть функция $da(x, t)/dt$ существует и непрерывна по t , равномерно относительно $x \in [0, \infty]$ и $da(x, t)/dt y_j(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$ при любом $t \in [0, T]$. Тогда оператор $[A(t)v](\lambda) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} A_i^k(t, \lambda, \mu) v_j(\mu) d\sigma_{ij}(\mu)$ непрерывно дифференцируем по $t \in [0, T]$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$[P(t)v](\lambda) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \frac{\partial A_i^k(t, \lambda, \mu)}{\partial t} v_j(\mu) d\sigma_{ij}(\mu).$$

Так как $da(x, t)/dt \cdot y_j(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, то из леммы 1 следует, что $[P(t)v](\lambda)$ является ограниченным оператором в $L_2^s(0, \infty)$.

Положим

$$L_h = \sum_{i=1}^n \frac{A_i^k(t+h) - A_i^k(t)}{h} - P(t)$$

и рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} |(L_h v, v)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{A_i(t+h, \lambda, \mu) - A_i(t, \lambda, \mu)}{h} - \frac{\partial A_i(t, \lambda, \mu)}{\partial t} \right) \times \right. \\ &\quad \left. v_j(t, \mu) v_l(t, \lambda) d\sigma_{ij}(\mu) d\sigma_{kl}(\lambda) \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^\infty \frac{a(x, t+h) - a(x, t)}{h} - \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times y_k(x, \lambda) y_l(x, \mu) a x v_j(t, \mu) v_l(t, \lambda) d\sigma_{ij}(\mu) d\sigma_{kl}(\lambda) \right| = \\ &= \left| \int_0^\infty \left(\frac{a(x, t+h) - a(x, t)}{h} - \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \right) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n v_i(t, \mu) y_j(x, \mu) d\sigma_{ij}(\mu) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{k,l=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} v_l(t, \lambda) y_k(x, \lambda) d\sigma_{kl}(\lambda) \right| = \int_0^\infty \left| \frac{a(x, t+h) - a(x, t)}{h} - \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \right| \times \\ &\quad \times |\tilde{v}(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

В условиях Леммы для $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что при $h < \delta$

$$\left| \frac{a(x, t+h) - a(x, t)}{h} - \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \right| < \varepsilon$$

равномерно относительно $x \in [0, \infty]$.

Следовательно, $|(L_h v, v)| < \varepsilon \|v\|^2 = \varepsilon \|v\|$.

Ясно, что оператор L_h является симметрическим в $L_2^s(0, \infty)$.

В силу симметричности оператора L_h в $L_2^s(0, \infty)$ следует, что при $|h| < \delta$, $\|L_h\| < \varepsilon$, т. е. при $h \rightarrow 0$

$$\left\| \frac{A_i(t+h) - A_i(t)}{h} - \frac{\partial A_i(t)}{\partial t} \right\| \rightarrow 0.$$

Таким образом мы доказали, что оператор $A(t)$ непрерывно дифференцируем по $t \in [0, T]$ и $\frac{dA(t)}{dt} = L(t)$.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 4. Пусть выполнены условия:

- 1) $db(x, t)/dt$ существует и равномерно относительно $x \in [0, \infty]$;
- 2) $db(x, t)/dt \cdot y_j(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$ при любом $t \in [0, T]$.

Тогда оператор $[B(t)v](\lambda) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} B_i^k(t, \lambda, \mu) v_j(\mu) d\sigma_{ij}(\mu)$ непрерывно дифференцируем по $t \in [0, T]$, т. е.

$$\frac{dB(t)}{dt} v = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \frac{B_i^k(t, \lambda, \mu)}{dt} v_j(\mu) d\sigma_{ij}(\mu).$$

Лемма 5. Пусть $c(x, t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ в $L_2(0, \infty)$, т. е.

$$\left\| \frac{c(x, t+h) - c(x, t)}{h} - \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} \right\|_{L_2(0, \infty)} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Тогда $E(t) = \{C_i(t, \lambda)\} = \left\{ \int_0^\infty c(x, t) y_i(x, \lambda) dx \right\}$

непрерывно дифференцируема по $t \in [0, T]$.

Так как Λ_0 — полуограниченный самосопряженный оператор, то Леммы 1 — 5 показывают, что удовлетворяются все условия теоремы С. Я. Якубова [8]. Таким образом мы приходим к следующему результату.

Теорема 2. Пусть: 1) $a(x, t) y_j(x, \lambda) b(x, t) y_i(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$; 2) функции $d(x, t)$, $b(x, t)$ непрерывно дифференцируемы по t относительно $x \in [0, \infty]$ и $da(x, t)/dt \cdot y_i(x, \lambda)$, $db(x, t)/dt \cdot y_j(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$; 3) $c(x, t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ в $L_2(0, \infty)$, т. е.

$$\left\| \frac{c(x, t+h) - c(x, t)}{h} - \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} \right\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0;$$

- 4) $f_1(x) \in D(L)$, $f_2(x) \in D\left(L^{\frac{1}{2}}\right)$.

Тогда задача Коши (7) — (9) для интегро-дифференциального уравнения имеет единственное решение, которое обладает свойствами.

- а) вектор-функция $F_i(t, \lambda)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и вектор-функции $d^2 F_i(t, \lambda)/dt^2$, $\lambda^2 F_i(t, \lambda) \in L_2^s$ непрерывны на $[0, T]$;
- б) решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Теперь по найденному $F_i(t, \lambda)$ построим функцию $u(x, t)$ и покажем, что она является решением нашей задачи (2) — (3). Для этого сначала докажем, что $u(x, t) \in L_2(0, \infty)$ при любом фиксированном t . Учитывая равенство Парсеваля, имеем

$$\int_0^\infty |u(x, t)|^2 dt = \int_0^\infty \left| \sum_{i,j=1}^n F_i(t, \lambda) y_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) \right|^2 dx = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{i,j=1}^n F_i(t, \lambda) \right|^2 d\sigma_{ij}(\lambda) < \infty.$$

Аналогично доказывается, что $Lu, \partial u / \partial t, \partial^2 u / \partial t^2 \in L_2(0, \infty)$. Далее покажем, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2).

Рассмотрим функцию

$$\omega_1(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu - a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - b(x, t) - c(x, t).$$

Легко показать, что $\omega_1(x, t) \in L_2(0, \infty)$ при любом $t \in [0, T]$ и непрерывна на $[0, T]$. Определим ее обобщенное преобразование Фурье:

$$\int_0^\infty \omega_1(x, t) y_i(x, \lambda) dx = \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu - a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + \right. \\ \left. + b(x, t) u - c(x, t) \right) y_i(x, \lambda) dx.$$

Из равенства Парсеваля следует

$$\int_0^\infty |\omega_1(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{i,j=1}^n F_i^*(t, \lambda) + \lambda^2 F_i(t, \lambda) - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n A_i^k(t, \lambda, \mu) F_i^k(t, \mu) \times d\sigma_{ij}(\mu) - \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n B_i^k(t, \lambda, \mu) F_i(t, \mu) d\sigma_{ij}(\mu) - \right. \\ \left. - C_i(t, \lambda) \right|^2 d\sigma_{ij}(\lambda) = 0.$$

Отсюда видно, что почти всюду при каждом $t \in [0, T]$ $\omega_1(x, t) = 0$. Значит функция $u(x, t)$, определенная интегралами (6) при каждом $t \in [0, T]$, почти всюду удовлетворяет уравнению (2) и начальным условиям в среднем. Единственность решений, представимая в виде (6), следует из единственности функции $F(t, \lambda)$.

Непрерывная зависимость решения от начальных данных и правой части вытекает из неравенства

$$\|u_1(x, t) - u_2(x, t)\| \leq M (\|b_1(x, t) - b_2(x, t)\| + \|f_{11}(x) - f_{12}(x)\| + \\ + \|f_{21}(x) - f_{22}(x)\|),$$

где $u_i(x, t)$, $i = 1, 2$ есть решение нашей задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu_i + a(x, t) \frac{\partial u_i}{\partial t} + b(x, t) u_i + c(x, t)$$

при начальном условии $u_i(x, t)|_{t=0} = f_{iL}(x)$, $\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0} = f_{i2}(x)$,

$$u_i(x, t) \in D(L), i = 1, 2;$$

$b(x, t)$, $f_{iL}(x)$, $f_{i2}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Таким образом теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. Гостехиздат, 1953.
2. Ильин В. А. УМН, т. 15. 2(92) 1960.

3. Морен К. Методы гильбертова пространства. Изд-во „Мир“, 1965.

4. Халилов З. И. „ДАН СССР“ 83, (1953).

5. Мамедов К. Г. Тр. института физики и математики АН Азерб. ССР, серия матем. 7 (1955).

6. Коробейник Ю. Ф. „Уч. зап. РГУ“, т. 66, вып. 7, 1957.

7. Максудов Ф. Г., Салманова Д. Г. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1968, № 6.

8. Якубов С. Я. „Изв. вузов, матем.“, 11, 1969.

9. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

Институт математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступило 20. XII 1969

Ф. Г. Максудов, Г. Хамраев

**Гиперболик тип тэнликлэр үчүн јарымохда гарышыг
мәсәләнин үмумиләшмиш Фурје үсулу илә һәлли**

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә (2) тәнлијини санки һәр јердә, (3) башланғыч шәртләрини $L_2(0, \infty)$ фазасынын нормасы мәнада өдәјән $u(x, t)$ функцијасынын үмумиләшмиш Фурје үсулу илә тапылмасы мәсәләсинә бахылып. Бурада $L_0(1)$ дифференсиал ифадәси васитәсилә дүзәлдилмиш $L_2(0, \infty)$ фазасында тәсир едән өз-өзүнәгошма мүсбәт мүәјјән оператор, $D(L_0)$ исә онун тәјини областыдыр.

Г. А. ДЖАФАРЛИ

ТЕОРЕМА ФРАГМЕНА—ЛИНДЕЛЕФА ТИПА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Постановка задачи. В теории аналитических функций широко известна классическая теорема Фрагмена—Линделефа типа единственности, гласящая: *если регулярная в правой полуплоскости функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(z)| \leq C \exp\{-\varepsilon|z|\} \quad (\varepsilon > 0),$$

то она в этой области тождественно равна нулю.

Настоящая статья посвящена доказательству аналогичной теоремы для решения эллиптической системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами A_1 и A_2 в полупространстве $x \geq 0$.

Теорема. Пусть $\hat{u}(x, x_1, x_2)$ решение системы (1) в полупространстве $x \geq 0$. $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$, где A_1 и A_2 — постоянные матрицы порядка n , а $\hat{u}(x, x_1, x_2)$ — вектор, компонентами которого являются комплекснозначные функции действительных переменных x, x_1 и x_2 , непрерывные вместе с первыми частными производными вплоть до границы полупространства. Предположим, что собственные числа матриц A_1 и A_2 имеют отличную от нуля мнимую часть (условие эллиптичности системы (1)).

Если при всех x, x_1 и x_2 в этом полупространстве имеет место неравенство

$$\|\hat{u}(x, x_1, x_2)\| \leq C \exp\{\alpha x - \beta \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\} \quad (2)$$

с любым фиксированным α и $\beta > 0$, то $\hat{u}(x, x_1, x_2) \equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}(x, \xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x, x_1, x_2) \exp\{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2\} dx_1 dx_2. \quad (3)$$

На основании неравенства

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} (|x_1| + |x_2|)$$

и условия (2) имеем

$$\|\tilde{u}(x, \xi_1, \xi_2)\| \leq \exp\{\alpha x\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} \beta |x_1| - x_1 \operatorname{Re} \xi_1\right\} dx_1 \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} \beta |x_2| - x_2 \operatorname{Re} \xi_2\right\} dx_2.$$

Интегралы в правой части сходятся в области G пространства (ξ_1, ξ_2) , определяемой неравенствами:

$$|\operatorname{Re} \xi_1| < \frac{\sqrt{2}}{2} \beta; \quad |\operatorname{Re} \xi_2| < \frac{\sqrt{2}}{2} \beta.$$

Отсюда вытекает, что функция $\tilde{u}(x, \xi_1, \xi_2)$ при любом фиксированном $x \geq 0$ регулярна по ξ_1 и ξ_2 в области G .

Теперь докажем, что функция $\tilde{u}(x, \xi_1, \xi_2)$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = (A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2) \tilde{u}. \quad (4)$$

Умножая обе части системы (1) на $\exp\{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2\}$ и интегрируя по бесконечной области $(-\infty < x_1, x_2 < +\infty)$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} e^{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2} dx_1 dx_2 = A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} e^{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2} dx_1 dx_2 + \\ + A_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} e^{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2} dx_1 dx_2$$

Интеграл в левой части можно представить в виде.

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \exp\{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2\} dx_1 dx_2.$$

Для первого интеграла правой части имеем

$$A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} \exp\{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2\} dx_1 dx_2 = \\ = A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} (\hat{u} e^{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2}) dx_1 dx_2 + A_1 \xi_1 \tilde{u}.$$

Рассмотрим далее интеграл в правой части последнего равенства

$$A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} (\hat{u} e^{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2}) dx_1 dx_2 = A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{u} e^{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} dx_2.$$

Так как

$$(\hat{u} e^{-x_1 \xi_1}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\hat{u}(x, A, x_2) e^{-A \xi_1} - \hat{u}(x, -A, x_2) e^{+A \xi_1}]$$

и

$$\|e^{-A \xi_1} \hat{u}(x, A, x_2) - \hat{u}(x, -A, x_2) e^{+A \xi_1}\| \leq \\ \leq \|\hat{u}(x, A, x_2) e^{-A \xi_1}\| + \|\hat{u}(x, -A, x_2) e^{+A \xi_1}\| \leq \\ \leq e^{\alpha x - \beta \sqrt{A^2 + x_2^2} - A \operatorname{Re} \xi_1} + e^{\alpha x - \sqrt{A^2 + x_2^2} + A \operatorname{Re} \xi_1} \leq$$

$$\leq e^{\alpha x - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta |x_2|} \left[e^{-A \left(\operatorname{Re} \xi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \beta \right)} + e^{-A \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \beta - \operatorname{Re} \xi_1 \right)} \right] \rightarrow 0, \quad (A \rightarrow +\infty).$$

то

$$A_1 \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} e^{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2} dx_1 dx_2 = A_1 \xi_1 \tilde{u}, \quad |\operatorname{Re} \xi_1| < \frac{\sqrt{2}}{2} \beta.$$

Аналогично получаем

$$A_2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} e^{-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2} dx_1 dx_2 = A_2 \xi_2 \tilde{u}, \quad |\operatorname{Re} \xi_2| < \frac{\sqrt{2}}{2} \beta.$$

и потому функция $\tilde{u}(x, \xi_1, \xi_2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4).

Решая систему (4), получим

$$\tilde{u}(x, \xi_1, \xi_2) = \exp \{A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2\} \tilde{u}(0, \xi_1, \xi_2).$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} \xi_1 = z \cos \varphi \\ \xi_2 = z \sin \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

и обозначим

$$H(\varphi) = A_1 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi,$$

Тогда решение системы (4) можно представить в следующем виде:

$$\tilde{u}(x, z \cos \varphi, z \sin \varphi) = \exp \{z H(\varphi) x\} \tilde{u}(0, z \cos \varphi, z \sin \varphi).$$

Отсюда находим

$$\tilde{u}(0, z \cos \varphi, z \sin \varphi) = \exp \{-z H(\varphi) x\} \tilde{u}(x, z \cos \varphi, z \sin \varphi). \quad (5)$$

Обозначим через $E^+(\varphi)$ (соответственно $E^-(\varphi)$) оператор проектирования в сумму инвариантных подпространств, отвечающих собственным числам матрицы $H(\varphi)$, для которых $\operatorname{Im} a_k(\varphi) > 0$ (соответственно $\operatorname{Im} a_k(\varphi) < 0$). Из соотношения (5) имеем:

$$E^+(\varphi) \tilde{u}(0, z \cos \varphi, z \sin \varphi) = E^+(\varphi) \exp \{-z H(\varphi) x\} \tilde{u}(x, z \cos \varphi, z \sin \varphi), \quad (6)$$

$$E^-(\varphi) \tilde{u}(0, z \cos \varphi, z \sin \varphi) = E^-(\varphi) \exp \{-z H(\varphi) x\} \tilde{u}(x, z \cos \varphi, z \sin \varphi). \quad (7)$$

Используя (6), оценим $E^+(\varphi) \tilde{u}(0, z \cos \varphi, z \sin \varphi)$ при $z = i\tau$, $\tau < 0$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \|E^+(\varphi) \tilde{u}(0, z \cos \varphi, z \sin \varphi)\| &\leq \|E^+(\varphi) \exp \{-i\tau H(\varphi) x\}\| \times \\ &\times \left\| \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(x, x_1, x_2) \exp \{-i\tau x_1 \cos \varphi - i\tau x_2 \sin \varphi\} dx_1 dx_2 \right\| \leq \\ &\leq \operatorname{const} \|E^+(\varphi)\| \exp \{-|\tau| \min_k |\operatorname{Im} a_k(\varphi)| x + \alpha x\}. \end{aligned}$$

Левая часть полученного неравенства не зависит от x . Переходя в правой части к пределу при $x \rightarrow +\infty$, получим, что для всех достаточно больших по абсолютной величине отрицательных τ и при любом фиксированном $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$E^+(\varphi) \tilde{u}(0, i\tau \cos \varphi, i\tau \sin \varphi) = 0.$$

Известна следующая

Лемма. Если $f(\xi_1, \xi_2)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных в области D обращается в нуль в некоторой области $G \subset D$, то она обращается в нуль тождественно во всей области D .

Доказательство такого факта легко следует из разложения этой функции в ряд Тейлора. Тогда на основании леммы

$$E^+(\varphi) \tilde{u}(0, \xi_1, \xi_2) \equiv 0.$$

Аналогично убеждаемся, что

$$E^-(\varphi) \tilde{u}(0, \xi_1, \xi_2) \equiv 0.$$

Складывая последние соотношения, имеем

$$E \tilde{u}(0, \xi_1, \xi_2) \equiv 0,$$

т. е.

$$\tilde{u}(0, \xi_1, \xi_2) \equiv 0.$$

На основании формулы обращения имеем

$$\tilde{u}(x, x_1, x_2) \equiv 0.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аршон И. С., Джафарли Г. А. Оценка предельной скорости убывания решений эллиптической системы. Дифференциальные уравнения, т. 11, № 4.
2. Джафарли Г. А. „Уч. зап. АГУ им. С. М. Кирова“ 1965, № 1.

АзПИ

Поступило 16. IX 1969

К. Э. Чәфәрли

Эллиптик типли системин һәлли үчүн жарымфәзада
Фрагмен-Линделеф типли јеканәлик теореми

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ашағыдакы теорем тәклиф олунмушдур:
Теорем. Фәрс едәк ки, $u(x, x_1, x_2)$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = A_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}$$

системинин $x \geq 0$, $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$ областындакы һәллидир. A_1, A_2 — сабит матрисләр олмага бәрабәр, онларын мәхсуси әдәдләринин хәјали һиссәләри сыфырдан фәрглидир. $\tilde{u}(x, x_1, x_2)$ — вектор функциядыр.

$$\|\tilde{u}(x, x_1, x_2)\| \leq C \exp \{ \alpha x - \beta \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \}$$

бәрабәрсизлији өдәнилдикдә $\tilde{u}(x, x_1, x_2) \equiv 0$ олур.

У. Д. К. 517. 917

Г. Г. АЛИЕВ

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

В статье А. Н. Тихонова [1] рассматривается ограниченное решение уравнения теплопроводности на полубесконечной области при краевых и начальных условиях вида

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k \frac{\partial^k u(0, t)}{\partial x^k} = f(t), \quad u(x, 0) = 0,$$

где α_k — постоянные числа, $f(t)$ — заданная функция, и $m \geq 0$ — любое целое число. Эта задача имеет простой физический смысл. При $m=1$ — это условие теплообмена и решение задачи устойчиво, когда $\alpha_0 \alpha_1 < 0$. А при $\alpha_0 \alpha_1 > 0$ смысл задачи существенно меняется и становится неустойчивым в бесконечности. При $m=2$ это условие „сосредоточенной теплоемкости“, соединенной с концом стержня при $x=0$.

Настоящая статья посвящена решению „обратной задачи“, т. е. задачи об определении неизвестного коэффициента, входящего в краевые условия. Рассмотрим в области $Q = \{0 \leq t \leq T; 0 \leq x < \infty\}$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + F(x, t) \quad (1)$$

при граничном условии

$$\frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + \alpha(t) u(0, t) = f(t) \quad (2)$$

начальном

$$u(x, 0) = 0 \quad (3)$$

и дополнительном

$$u[\sigma(t), t] = \beta \alpha(t) - q, \quad (4)$$

где $f(t)$ — неотрицательная и непрерывная функция на $[0, T]$; $F(x, t)$ — неотрицательная, ограниченная и непрерывная по обоим аргументам функция в области Q ; β, q — постоянные числа и $\beta q > 0$; $\sigma(t)$ — любая неотрицательная и непрерывная на отрезке $[0, T]$ функция. Требуется найти пару функций $\alpha(t) > 0$ и $u(x, t)$, удовлетворяющих уравнению (1) и условиям (2), (3) и (4).

Известно, что решение уравнения (1) при условии (3) и ограниченное в бесконечности имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \varphi(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}} \right] F(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad (5)$$

где

$$\varphi(t) = u(0, t).$$

Выберем $\varphi(t)$ так, чтобы удовлетворилось граничное условие (2). Тогда получим

$$\varphi'(t) + \alpha(t) \varphi(t) = f_1(t), \quad (6)$$

где

$$f_1(t) = f(t) + F(0, t).$$

Решая это линейное уравнение, найдем

$$\varphi(t) = e^{-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} \cdot \left[\int_0^t f_1(\tau) e^{\int_0^\tau \alpha(s) ds} d\tau + c \right].$$

Так как $\varphi(0) = u(0, 0) = 0$, то

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) e^{-\int_\tau^t \alpha(s) ds} d\tau = \int_0^t f_1(\tau) e^{\int_\tau^t \alpha(s) ds} d\tau. \quad (7)$$

Подставляя значение $\varphi(t)$ в (5) и учитывая условие (4), будем иметь

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^t \frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \left[\int_0^\tau f_1(s) e^{\int_0^s \alpha(\theta) d\theta} ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{[\sigma(t)-\xi]^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{[\sigma(t)+\xi]^2}{4(t-\tau)}} \right] F(\xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{q}{\beta}. \quad (8)$$

Решим это уравнение методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем $\alpha_0 = \frac{q}{\beta}$. Тогда для последовательных приближений получим следующие рекуррентные соотношения:

$$\alpha_n(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^t \frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \left[\int_0^\tau f_1(s) e^{\int_0^s \alpha_{n-1}(\theta) d\theta} ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{[\sigma(t)-\xi]^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{[\sigma(t)+\xi]^2}{4(t-\tau)}} \right] F(\xi, \tau) d\tau d\xi = \frac{q}{\beta} \quad (9)$$

где $n = 1, 2, \dots$

Далее имеем

$$\alpha_n(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^t \frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \left[\int_0^\tau f_1(s) e^{\int_0^s \alpha_{n-1}(\theta) d\theta} ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[e^{-\frac{[\sigma(t)-\xi]^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{[\sigma(t)+\xi]^2}{4(t-\tau)}} \right] F(\xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{q}{\beta} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^{\tau} \frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \left[\int_0^{\tau} f_1(s) ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^{\infty} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \left[e^{-\frac{[\sigma(t)-\xi]^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{[\sigma(t)+\xi]^2}{4(t-\tau)}} \right] F(\xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{q}{\beta} \leq$$

$$\leq \frac{M_1 M_2}{2\sqrt{\pi}\beta} \frac{T^2}{2} + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{2\sqrt{\pi}\beta} + \frac{q}{\beta},$$

где

$$\frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \leq M_1; \quad f_1(t) \leq M_2; \quad F(x, t) \leq \kappa_1;$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \left[e^{-\frac{[\sigma(t)-\xi]^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{[\sigma(t)+\xi]^2}{4(t-\tau)}} \right] d\tau d\xi \leq \kappa_2.$$

Если обозначим

$$M = \frac{M_1 M_2}{4\sqrt{\pi}\beta} T^2 + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{2\sqrt{\pi}\beta} + \frac{q}{\beta},$$

то получим $0 < \alpha_n(t) \leq M$ при всех значениях n .

Из формулы (9) видно, что члены последовательности $\{\alpha_n(t)\}$ являются положительными, ограниченными и непрерывными функциями на $[0, T]$. Докажем, что последовательность $\{\alpha_n(t)\}$ сходится к некоторой функции $\alpha(t)$, удовлетворяющей уравнению (8). Оценим следующую разность;

$$|\alpha_{n+1}(t) - \alpha_n(t)| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \left| \int_0^{\tau} \frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \left\{ \int_0^{\tau} f_1(s) \left[e^{\int_0^s \alpha_n(\theta) d\theta} - e^{\int_0^s \alpha_{n-1}(\theta) d\theta} \right] ds \right\} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \left| \int_0^{\tau} \frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \left\{ \int_0^{\tau} f_1(s) e^{\int_0^s \eta(\theta) d\theta} \left[\int_0^s (\alpha_n(\theta) - \alpha_{n-1}(\theta)) d\theta \right] ds \right\} d\tau \right|.$$

Так как $\eta(\theta) \geq 0$ и $e^{\int_0^s \eta(\theta) d\theta} = e^{-\int_0^s \eta(\theta) d\theta} \leq 1$ при $s \leq \tau$, то

$$|\alpha_{n+1}(t) - \alpha_n(t)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \left| \int_0^{\tau} \frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \left\{ \int_0^{\tau} f_1(s) \left[\int_0^s (\alpha_n(\theta) - \alpha_{n-1}(\theta)) d\theta \right] ds \right\} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{M_1 M_2}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^{\tau} \left\{ \int_0^{\tau} \left[\int_s^{\tau} |\alpha_n(\theta) - \alpha_{n-1}(\theta)| d\theta \right] ds \right\} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{M_1 M_2}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^{\tau} \left\{ \int_0^{\tau} \left[\int_0^{\tau} |\alpha_n(\theta) - \alpha_{n-1}(\theta)| d\theta \right] ds \right\} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{M_1 M_2}{4\sqrt{\pi}\beta} T^2 \int_0^{\tau} |\alpha_n(\theta) - \alpha_{n-1}(\theta)| d\theta = c \int_0^{\tau} |\alpha_n(\theta) - \alpha_{n-1}(\theta)| d\theta,$$

где

$$c = \frac{M_1 M_2}{4\sqrt{\pi}\beta} T^2.$$

Таким образом получим

$$|\alpha_{n+1}(t) - \alpha_n(t)| \leq c \int_0^{\tau} |\alpha_n(\theta) - \alpha_{n-1}(\theta)| d\theta. \quad (10)$$

Из последнего неравенства при $n=1$ следует, что

$$|\alpha_2(t) - \alpha_1(t)| \leq c \int_0^{\tau} |\alpha_1(\theta) - \alpha_0(\theta)| d\theta \leq c M t \leq c M T.$$

А при $n=2$

$$|\alpha_3(t) - \alpha_2(t)| \leq c \int_0^{\tau} |\alpha_2(\theta) - \alpha_1(\theta)| d\theta \leq M \frac{c^2 t^2}{2!} \leq M \frac{c^2 T^2}{2!}.$$

Применяя метод полной математической индукции, получим

$$|\alpha_{n+1}(t) - \alpha_n(t)| \leq c \int_0^{\tau} |\alpha_n(\theta) - \alpha_{n-1}(\theta)| d\theta \leq M \frac{c^n t^n}{n!} \leq M \frac{c^n T^n}{n!}.$$

Так как числовой ряд с общим членом $b_n = M \frac{c^n T^n}{n!}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд вида

$$\alpha_0(t) + [\alpha_1(t) - \alpha_0(t)] + \dots + [\alpha_{n+1}(t) - \alpha_n(t)] + \dots$$

сходится равномерно. Следовательно, последовательность $\{\alpha_n(t)\}$ сходится равномерно на отрезке $[0, T]$ к некоторой положительной и непрерывной функции $\alpha(t)$.

Переходя к пределу в (9) при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^{\tau} \frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \left[\int_0^{\tau} f_1(s) e^{\int_0^s \alpha(\theta) d\theta} ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^{\infty} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \left[e^{-\frac{[\sigma(t)-\xi]^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{[\sigma(t)+\xi]^2}{4(t-\tau)}} \right] F(\xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{q}{\beta}.$$

Значит $\alpha(t)$ — искомое решение уравнения (8). Докажем единственность решения (8). Предположим, что существуют два решения: $\alpha(t)$ и $\bar{\alpha}(t)$. Тогда

$$|\alpha(t) - \bar{\alpha}(t)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^{\tau} \frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \left\{ \int_0^{\tau} f_1(s) \left[e^{\int_0^s \alpha(\theta) d\theta} - e^{\int_0^s \bar{\alpha}(\theta) d\theta} \right] ds \right\} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{M_1 M_2}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^{\tau} \left\{ \int_0^{\tau} \left[\int_s^{\tau} |\alpha(\theta) - \bar{\alpha}(\theta)| d\theta \right] ds \right\} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{M_1 M_2}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^t \left\{ \int_0^s \left[\int_0^t |\alpha(\theta) - \overline{\alpha}(\theta)| d\theta \right] ds \right\} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{M_1 M_2}{4\sqrt{\pi}\beta} T^2 \int_0^t |\alpha(\theta) - \overline{\alpha}(\theta)| d\theta,$$

вследствие чего имеем

$$|\alpha(t) - \overline{\alpha}(t)| \leq c \int_0^t |\alpha(\theta) - \overline{\alpha}(\theta)| d\theta. \quad (11)$$

Применяя лемму Гронуолла к неравенству (11), будем иметь $|\alpha(t) - \overline{\alpha}(t)| = 0$ для любого $t \in [0, T]$, т. е. $\alpha(t) \equiv \overline{\alpha}(t)$. Таким образом доказано, что уравнение (8) имеет единственное решение $\alpha(t)$, которое является пределом последовательности $\{\alpha_n(t)\}$.

Теперь покажем скорость сходимости этой последовательности к функции $\alpha(t)$. Рассмотрим разность

$$|\alpha_n(t) - \alpha(t)| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \left| \int_0^t \frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \left\{ \int_0^\tau f_1(s) \left[e^{-\int_0^s \alpha_{n-1}(\theta) d\theta} - e^{-\int_0^s \alpha(\theta) d\theta} \right] ds \right\} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{M_1 M_2}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^t \left\{ \int_0^\tau \left[\int_0^s |\alpha_{n-1}(\theta) - \alpha(\theta)| d\theta \right] ds \right\} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{M_1 M_2}{4\sqrt{\pi}\beta} \int_0^t \left\{ \int_0^\tau \left[\int_0^s |\alpha_{n-1}(\theta) - \alpha(\theta)| d\theta \right] ds \right\} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{M_1 M_2}{4\sqrt{\pi}\beta} T^2 \int_0^t |\alpha_{n-1}(\theta) - \alpha(\theta)| d\theta = c \int_0^t |\alpha_{n-1}(\theta) - \alpha(\theta)| d\theta$$

или

$$|\alpha_n(t) - \alpha(t)| \leq c \int_0^t |\alpha_{n-1}(\theta) - \alpha(\theta)| d\theta. \quad (12)$$

Из неравенства (12) при $n=1$ имеем

$$|\sigma_1(t) - \alpha(t)| \leq c \int_0^t |\sigma_0(\theta) - \alpha(\theta)| d\theta \leq c M t \leq c M T;$$

при $n=2$

$$|\alpha_2(t) - \alpha(t)| \leq c \int_0^t |\alpha_1(\theta) - \alpha(\theta)| d\theta \leq M \frac{c^2 t^2}{2!} \leq M \frac{c^2 T^2}{2!}.$$

Применяя метод полной математической индукции, получим

$$|\alpha_n(t) - \alpha(t)| \leq c \int_0^t |\alpha_{n-1}(\theta) - \alpha(\theta)| d\theta \leq M \frac{c^n t^n}{n!} \leq M \frac{c^n T^n}{n!}.$$

Итак, находим, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\alpha_n(t) - \alpha(t)| \leq M \frac{c^n T^n}{n!}. \quad (13)$$

Неравенство (13) показывает, что последовательность $\{\alpha_n(t)\}$ сходится к функции $\alpha(t)$ по норме $c[0, T]$ с факториальной скоростью. Теперь исследуем непрерывную зависимость решения $\alpha(t)$ от данных $f(t)$ и $F(x, t)$. Пусть $\alpha_i(t)$ есть решение при данных $f_i(t)$ и $F_i(x, t)$, где $0 \leq f_i(t) \in C[0, T]$ и $0 \leq F_i(x, t) \in C(Q)$; $i=1, 2$.

Тогда

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \left| \int_0^t \frac{\sigma(t)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma^2(t)}{4(t-\tau)}} \left\{ \int_0^\tau [\psi_1(s) e^{-\int_0^s \alpha_1(\theta) d\theta} - \psi_2(s) e^{-\int_0^s \alpha_2(\theta) d\theta}] ds \right\} d\tau \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \left| \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \left[e^{-\frac{[\sigma(t)-\xi]^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{[\sigma(t)+\xi]^2}{4(t-\tau)}} \right] [F_1(\xi, \tau) - \right.$$

$$- F_2(\xi, \tau)] d\tau d\xi \left| \leq \frac{M_1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^t \left[\int_0^\tau |\psi_1(s) - \psi_2(s)| e^{-\int_0^s \alpha_1(\theta) d\theta} ds + \right.$$

$$+ \left. \int_0^\tau \psi_2(s) \left| e^{-\int_0^s \alpha_1(\theta) d\theta} - e^{-\int_0^s \alpha_2(\theta) d\theta} \right| ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \left| \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \left[e^{-\frac{[\sigma(t)-\xi]^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{[\sigma(t)+\xi]^2}{4(t-\tau)}} \right] [F_1(\xi, \tau) - \right.$$

$$- F_2(\xi, \tau)] d\tau d\xi \left| \leq \frac{M_1 T}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_0^t |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds +$$

$$+ \frac{M_1 M_2}{4\sqrt{\pi}\beta} T^2 \int_0^t |\alpha_1(\theta) - \alpha_2(\theta)| d\theta + \frac{\kappa_2}{2\sqrt{\pi}\beta} \sup_Q \|F_1(x, t) - F_2(x, t)\|,$$

где

$$\psi_1(t) = f_1(t) + F_1(0, t); \quad \psi_2(t) = f_2(t) + F_2(0, t); \quad \psi_2(t) \leq M_3.$$

Таким образом имеем

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)| \leq \frac{M_1 T^2}{4\sqrt{\pi}\beta} \max_{0 \leq t \leq T} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| + \frac{\kappa_2}{2\sqrt{\pi}\beta} \sup_Q \|F_1(x, t) - F_2(x, t)\| +$$

$$+ \frac{M_1 M_3}{4\sqrt{\pi}\beta} T^2 \int_0^t |\alpha_1(\theta) - \alpha_2(\theta)| d\theta. \quad (14)$$

Применяя лемму Гронуолла к неравенству (14), находим

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)| \leq \frac{M_1 M_3}{4\sqrt{\pi}\beta} T^2 \left[\frac{M_1 T^2}{4\sqrt{\pi}\beta} \max_{0 \leq t \leq T} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| + \right.$$

$$+ \frac{\kappa_2}{2\sqrt{\pi}\beta} \sup_Q \|F_1(x, t) - F_2(x, t)\| \int_0^t e^{c_1(t-s)} ds + \frac{M_1 T^2}{4\sqrt{\pi}\beta} \max_{0 \leq t \leq T} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| +$$

$$+ \frac{\kappa_2}{2\sqrt{\pi}\beta} \sup_Q \|F_1(x, t) - F_2(x, t)\| \dots$$

Отсюда получаем, что

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)| \leq$$

$$\leq Be^{c_1 T} \left(\max_{0 \leq t \leq T} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| + \sup_Q \|F_1(x, t) - F_2(x, t)\| \right) \quad (15)$$

где

$$c_1 = \frac{M_1 M_3}{4 \sqrt{\pi} \beta} T^2; \quad B = \max \left\{ \frac{M_1 T^2}{4 \sqrt{\pi} \beta}; \quad \frac{\kappa_2}{2 \sqrt{\pi} \beta} \right\}.$$

Неравенство (15) показывает непрерывную зависимость решения уравнения (8) от данных. Значит малое изменение в данных задачи влечет за собой малое изменение функции. Таким образом можно показать, что решение задачи непрерывно зависит от функции. Подытожив эти результаты, получим следующую теорему.

Теорема. Если $0 \leq f(t) \in C[0, T]$, $0 \leq \sigma(t) \in C[0, T]$, $0 \leq F(x, t) \in C(Q)$, а β, q — постоянные числа и $\beta q < 0$, то
а) задача (1) — (4) имеет единственное решение $[u(x, t); \alpha(t)]$, причем $\alpha(t)$ можно найти методом последовательных приближений и эти приближения $\alpha_n(t)$ сходятся к $\alpha(t)$ по метрике $C[0, T]$ с факториальной скоростью;

б) решение задачи (1) — (4) непрерывно зависит от данных $f(t)$ и $F(x, t)$ в том смысле, что малому изменению чисел $\|f(t)\|$ и $\|F(x, t)\|$ соответствует малое изменение чисел $\|u(x, t)\|_{C(Q)}$ и $\|\alpha(t)\|_{C[0, T]}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. О краевых условиях, содержащих производные порядка превышающего порядок уравнения. Матем. сб., т. 26 (68), № 1, 1950.
2. Тихонов А. Н. и Саморский А. Уравнение математической физики, 1964
3. Карслоу Г. и Егер Д. Теплопроводность твердых тел. 1964.

АзПИ

Поступило 16. IX 1969

Н. Г. Әлиев

Жарымсонсуз областа истиликкечирмэ тэнлији
үчүн бир тэрс мэсэлэ һаггында

ХҮЛАСЭ

Тэдгигатда (1) — (4) мэсэлэсинин һәллинин варлыгы, јеканәлији вә верилән $f(t)$, $F(x, t)$ функцијаларындан кәсиммәз асылылыгы өјрәнилмишдир.

Ш. А. АХМЕДОВ

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей статье рассматриваются обобщенные решения однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Определяются достаточные условия для того, чтобы всякое такое решение, найденное в окрестности некоторого компакта, принадлежащего гиперплоскости в R^n , можно было продолжить в классе обобщенных функций бесконечного порядка, в окрестность большего компакта.

Запишем производную однородную систему

$$P(D)u = 0, \quad (1)$$

где D — вектор, образованный дифференциальными операторами $i \frac{\partial}{\partial \xi_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, а P — матрица размером $t \times s$, образованная произвольными полиномами с комплексными коэффициентами. Числа t и s произвольные. Будем искать продолжения обобщенных решений в классах типа $[(D_k^b)^*]^s$.

Символ D_k^b означает пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций в R^n с носителями в K и конечной нормой

$$\|\varphi\|^b = \sup_j \frac{1}{b(|j|)} \cdot \max_{\xi} |D^j \varphi(\xi)|,$$

$$\text{где } D^j = i^{|j|} \cdot \frac{\partial^{|j|}}{\partial \xi_1^{j_1} \dots \partial \xi_n^{j_n}}; \quad j = (j_1, \dots, j_n), \quad |j| = j_1 + \dots + j_n,$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — некоторая фиксированная система координат в R^n , а $b(\eta)$ — произвольная функция одного переменного, определенная на луче $\eta \geq 0$, положительная и неубывающая. K — произвольное замкнутое множество в R^n . Если функция $b(\eta)$ задается в виде $b(\eta) = B^{\eta} \cdot \eta^{\gamma, \beta}$, то пространство $(D_k^b)^*$ будем обозначать через $(D_k^{\beta, B})^*$.

Рассмотрим пространство обобщенных функций бесконечного порядка $U_k^{\beta} = U(D_k^{\beta, B})^*$, а также класс основных функций $D_k^{\beta} = \bigcap_{B > 0} D_k^{\beta, B}$.

Каждый элемент U_k^{β} является непрерывным функционалом над D_k^{β} . Пусть N — характеристическое множество системы (1), то есть алгебраическое многообразие в C^n , образованное точками z , в которых $\text{rang } P(z) < s$.

Далее рассмотрим конус $N^1 \subset C^n$, образованный комплексными прямыми, отвечающими несобственным точкам многообразия N .

Через v^1 обозначим множество точек в R_y^n , которые являются минимальными частями точек множества N^1 . Пусть y — вектор в R^n ; через H_y обозначим гиперплоскость в R^n , ортогональную к вектору y . Через $G(r)$ обозначим $(n-1)$ -мерный диск, лежащий в H_y , с центром в начале координат, радиуса $r > 0$. Через $K^\delta(r)$, где $\delta > 0$, обозначим объединение двух прямых конусов с общим основанием $G(r)$ и высотами $\delta \cdot r$.

Теорема. Пусть

$$v^1 \neq R_y^n \text{ и } y_0 \in R_y^n/v^1,$$

тогда существуют числа $\beta \geq 1$ и $\delta > 0$ такие, что всякое решение системы (1) из класса U_Γ^β , где Γ — замкнутая окрестность $G(r)$, может быть продолжено как решение системы (1) в окрестность множества $K^\delta(r)$ в классе U_K^β , где K — замкнутая окрестность $K^\delta(r)$. Число $r > 0$ произвольное.

Замечание 1. Из [2] (теор. 5. 5. 5) вытекает, что множество v^1 замкнуто, поэтому число r_0 положительно, так как $y_0 \notin v^1$. Если r_0 есть расстояние от точки y_0 до v^1 и $r_0 < |y_0|$, то число δ равно $\frac{r_0}{\sqrt{|y_0|^2 - r_0^2}}$. Если $r_0 = |y_0|$, то δ можно положить равным любому положительному числу.

Замечание 2. В частности, всякое обобщенное решение системы (1) конечного порядка, определенное в окрестности диска $G(r)$, можно продолжить в классе U_K^β в окрестность $K^\delta(r)$, однако неверно утверждать, что его можно продолжить в окрестность $K^\delta(r)$ в классе обобщенных функций конечного порядка. Это будет показано на примере в конце статьи.

Доказательство теоремы. С оператором P связан набор алгебраических многообразий N^λ , $\lambda = 0, 1, \dots, l$, $\bigcup_\lambda N^\lambda = N$, и дифференциальных операторов $d^\lambda(z, P)$, $\lambda = 0, 1, \dots, l$, с полиномиальными коэффициентами в C^n такой, что справедливо нижеследующее утверждение, вытекающее из теоремы В. П. Паламодова [1] (гл. VI, § 4, теор. 2) об экспоненциальном представлении решений однородной системы (1).

Пусть F_α , где $-\infty < \alpha < \infty$, — строго возрастающая последовательность выпуклых компактов R^n , а функции $\Gamma_{F_\alpha}(y) = \sup_{\xi \in F_\alpha} e \times p(h, \xi)$, где $-\infty < \alpha < \infty$, определены в R_y^n . Тогда при любом целом α любая функция $u \in [U_{F_\alpha}^\beta]^s$, являющаяся обобщенным решением системы (1) в классе $U_{F_\alpha}^\beta$ может быть записана в виде

$$(\overline{u}, \varphi) = \sum_{\lambda=0}^l \int_{N^\lambda} d^\lambda(z, D) \widetilde{\varphi}^*(z) \mu^\lambda \quad (2)$$

для любых функций $\varphi \in [D_{F_\alpha-A}^\beta]^s$, причем при некотором $B > 0$

$$\| \mu \|_{F_\alpha-A}^\beta = \sum_{\lambda=0}^l \int_{N^\lambda} \exp \left(-\frac{\beta}{e} \left(\frac{|z|}{B} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right) \cdot \Gamma_{F_\alpha-A}(y) |\mu^\lambda| < \infty.$$

Здесь $\widetilde{\varphi}$ — преобразование Фурье функции φ , символ* означает переход к комплексно сопряженной функции.

Обратно, всякий функционал u , заданный формулой (2) с конечной при некотором $B' > 0$ величиной $\| \mu \|_{F_\alpha+A}^{B'}$, непрерывен над пространством $[D_{F_\alpha}^\beta]^s$ и является решением системы (1) в пространстве

$U_{F_\alpha}^\beta$. Константа A зависит от оператора P и операторов d^λ . Выберем строго возрастающую последовательность положительных чисел ε_α , $-\infty < \alpha < \infty$, такую, что $\varepsilon_\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow -\infty$, и обозначим через G_α замкнутую ε_α -окрестность компакта $G(r)$. Пусть u — обобщенное решение системы (1) в окрестности $G(r)$, тогда в силу того, что $\varepsilon_\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow -\infty$, найдется такое α , что функция u будет решением системы (1) на компакте G_α .

Применяя вышесформулированное утверждение к последовательности компактов G_α , получим, что любая функция $u \in [U_{G_\alpha}^\beta]^s$, являющаяся обобщенным решением системы (1) в классе $U_{G_\alpha}^\beta$, может быть записана в виде (2), где меры μ^λ таковы, что $\| \mu \|_{G_\alpha-A}^\beta < \infty$ при некотором $B > 0$. Обозначим через K_α замкнутую ε_α -окрестность множества $K^\delta(r)$. Допустим, мы доказали, что при некотором γ и каком-то $B' > 0$ $\| \mu \|_{K_\gamma}^{B'} < \infty$, тогда в силу второй части вышеуказанного утверждения формула

$$(\overline{v}, \varphi) = \sum_{\lambda=0}^l \int_{N^\lambda} d^\lambda(z, D) \widetilde{\varphi}^*(z) \mu^\lambda$$

для любой функции $\varphi \in [D_{K_\gamma-A}^\beta]^s$ определяет обобщенное решение системы (1) в пространстве $U_{K_\gamma-A}^\beta$, то есть $v \in [U_{K_\gamma-A}^\beta]^s$.

Это решение v , очевидно, совпадает с решением u на компакте $G_\alpha \cap K_{\gamma-A}^\delta$, являющемся окрестностью диска $G(r)$.

Поэтому для доказательства теоремы нужно доказать неравенство

$$\| \mu \|_{K_\gamma}^{B'} < \infty \text{ при некотором } B' > 0.$$

Мы имеем

$$\| \mu \|_{K_\gamma}^{B'} = \sum_{\lambda=0}^l \int_{N^\lambda} \exp \left(-\frac{\beta}{e} \left(\frac{|z|}{B'} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right) \cdot \Gamma_{K_\gamma}(y) \cdot |\mu^\lambda|.$$

$$\text{Теперь положим } B' = \frac{B}{\left(\frac{B_0 \cdot e}{\beta} B^{\frac{1}{\beta}} + 1 \right)^\beta}, \quad \text{где } B_0$$

определим ниже и произведем оценку:

$$\begin{aligned} \| \mu \|_{K_\gamma}^{B'} &\leq \max_{\lambda} \sup_{z \in N^\lambda} \frac{\Gamma_{K_\gamma}(y) \cdot \exp \left(-B_0 |z|^{\frac{1}{\beta}} \right)}{\Gamma_{G_\alpha-A}(y)} \cdot \sum_{\lambda=0}^l \int_{N^\lambda} \exp \left(\frac{\beta}{e} \left(\frac{|z|}{B} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right) \Gamma_{G_\alpha-A}(y) \times \\ &\times |\mu^\lambda| = \sup_{z \in N} \frac{\Gamma_{K_\gamma}(y) \cdot \exp \left(-B_0 |z|^{\frac{1}{\beta}} \right)}{\Gamma_{G_\alpha-A}(y)} \cdot \| \mu \|_{G_\alpha-A}^\beta, \text{ так как } \bigcup_\lambda N^\lambda = N. \end{aligned}$$

Покажем, что конечен первый сомножитель, т. е.

$$\begin{aligned} \ln \sup_{z \in N} \frac{\Gamma_{K_\gamma}(y) \cdot \exp \left(-B_0 |z|^{\frac{1}{\beta}} \right)}{\Gamma_{G_\alpha-A}(y)} &= \\ &= \sup_{z \in N} \left[\sup_{\xi \in K_\gamma} (y, \xi) - \sup_{\xi \in G_\alpha-A} (y, \xi) - B_0 |z|^{\frac{1}{\beta}} \right] < \infty. \end{aligned}$$

Используем известное утверждение.

Лемма. Существуют постоянные $c > 0$ и $h < 1$ такие, что для любой точки $z \in N$ всегда существует точка $z' \in N'$ такая, что $|z - z'| < c(|z| + 1)^h$.

Обозначим $z'' = z - z'$, а через y' и y'' — мнимые части z' и z'' , причем $y = y' + y''$.

Для любого компакта F имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in F} (y', \xi) + \sup_{\xi \in F} |(y'', \xi)| &\geq \sup_{\xi \in F} (y, \xi) \geq \\ &\geq \sup_{\xi \in F} (y', \xi) - \sup_{\xi \in F} |(y'', \xi)|. \end{aligned}$$

Применяя эти неравенства к компактам $G_{\alpha-A}$ и K_γ , получим

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in K_\gamma} (y, \xi) - \sup_{\xi \in G_{\alpha-A}} (y, \xi) &\leq \left[\sup_{\xi \in K_\gamma} (y', \xi) - \right. \\ &\left. - \sup_{\xi \in G_{\alpha-A}} (y', \xi) \right] + \left[\sup_{\xi \in K_\gamma} |(y'', \xi)| + \sup_{\xi \in G_{\alpha-A}} |(y'', \xi)| \right]. \end{aligned}$$

Поскольку точка $y' \in N'$, а N' есть конус, то первое выражение в квадратных скобках оценивается так же, как и в работе [3], где доказано, что эта величина не превосходит нуля при некотором γ .

Оценим выражение во второй квадратной скобке. Так как $y'' = y - y'$, то из вышеуказанной леммы вытекает $|y''| \leq c(|z| + 1)^h$. И мы имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in G_{\alpha-A}} |(y'', \xi)| + \sup_{\xi \in K_\gamma} |(y'', \xi)| &\leq c(|z| + 1)^h \sup_{\xi \in G_{\alpha-A}} |\xi| + \\ &+ c(|z| + 1)^h \sup_{\xi \in K_\gamma} |\xi| = c_1(1 + |z|)^h, \text{ где } c_1 = \sup_{\xi \in K_\gamma} |\xi| + \sup_{\xi \in G_{\alpha-A}} |\xi|. \end{aligned}$$

На основе вышеизложенного получим неравенство

$$\begin{aligned} \sup_{z \in N} \left(\sup_{\xi \in K_\gamma} (y, \xi) - \sup_{\xi \in G_{\alpha-A}} (y, \xi) - B_0 |z|^{\frac{1}{\beta}} \right) &\leq \\ &\leq \sup_{z \in N} \left[c_1(1 + |z|)^h - B_0 |z|^{\frac{1}{\beta}} \right]. \end{aligned}$$

Теперь положим $\beta = \frac{1}{h}$, а $B_0 = c_1$, тогда правая часть этого неравенства будет равна

$$c_1 \sup_{z \in N} [(1 + |z|^h) - |z|^h].$$

Оценим величину $(1 + |z|^h) - |z|^h$. Очевидно, что при $|z| \leq 1$ и $h < 1$ она не больше двух. Покажем, что она ограничена при $|z| > 1$, и $h < 1$. При $t > 1$ и $h < 1$ имеем

$$\begin{aligned} (1 + t)^h - t^h &= \int_t^{t+1} d\tau^h = h \int_t^{t+1} \tau^{h-1} d\tau \leq \\ &\leq h \int_t^{t+1} d\tau = h < 1. \end{aligned}$$

И, следовательно, величина $(1 + |z|^h) - |z|^h$ ограничена при всех z , когда $h < 1$, а это значит

$$\sup_{z \in N} [(1 + |z|^h) - |z|^h] < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Возьмем уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, где

Δ — оператор Лапласа в R^n . Главная часть оператора $P(D)$ есть Δ . Множество N^1 есть характеристическое множество оператора Δ и, следовательно, оно задается уравнением $z_{n+1} = 0$ в C^{n+1} . Поэтому множество N' в R_y^n задается уравнением $y_{n+1} = 0$.

За вектор y_0 возьмем $-(0, \dots, 0, 1)$, тогда $r_0 = 1$ и, следовательно, за δ можно взять любое положительное число. Таким образом, из доказанной теоремы следует, что всякое решение уравнения теплопроводности, определенное в окрестности диска $G(r)$, лежащего в гиперплоскости $t = 0$, можно продолжить в классе U^β в окрестность любого конуса $K^\delta(r)$. Следовательно, решение продолжается в окрестность бесконечного цилиндра с основанием $G(r)$ и образующей осью t . С другой стороны, как известно, решение уравнения теплопроводности, заданное в окрестности $G(r)$, вообще говоря, нельзя продолжить в ту часть нашего цилиндра, где $t < 0$ в классе обобщенных функций конечного порядка.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность за постановку задачи проф. В. П. Паламонову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паламонов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М., Изд-во "Наука". 1967.
2. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., Изд-во "Мир". 1965.
3. Ахмедов Ш. А. "ДАН Тадж. ССР", т. XIII, 1970, 6.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступило 5. XI 1969

К. А. ШАРИФОВ

О РАСЧЕТЕ ЭНТРОПИИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВ ПО ОГРАНИЧЕННЫМ ДАННЫМ

1. Газы

Согласно положениям статистической термодинамики, энтропия газа в состоянии, близком к идеальному, в первом приближении равна сумме энтропий, соответствующих отдельным видам движения в молекуле и поступательному движению самой молекулы:

$$S = S_{\text{п}} + S_{\text{вращ}} + S_{\text{кол}} + S_{\text{внутр. вращ}} + S_{\text{эл}} + S_{\text{спин}}. \quad (1)$$

Из этих слагаемых $S_{\text{спин}}$ —энтропия ядерного спина не входит в величину практической энтропии, $S_{\text{эл}}$ —электронная составляющая энтропии становится ощутимой только при высоких температурах, $S_{\text{внутр. вращ}}$ также невелика и имеет место лишь в молекулах, обладающих внутренним вращением. Следовательно, тремя последними слагаемыми в (1) можно пренебречь (это можно сделать еще и потому, что нами рассматривается ряд однотипных веществ). Поэтому энтропия газа при обычных температурах приблизительно равна сумме поступательной, вращательной и колебательной долей энтропии [1]:

$$S = S_{\text{п}} + S_{\text{вращ}} + S_{\text{кол}}. \quad (2)$$

Воспользуемся этим выражением для выхода новых соотношений. Рассмотрим два однотипных газообразных вещества, для простоты AB и ab . Поступательная энтропия атомизации, т. е. разность энтропий компонентов и энтропии самого вещества, для них не равны между собой. Однако, если учесть, что поступательная энтропия одного моля частиц определяется формулой Сахура—Тетроде:

$$S_{\text{п}} = \frac{5}{2} R \ln T + \frac{3}{2} R \ln \Sigma m - R \ln P_{(\text{атм})} - 2,314, \quad (3)$$

и рассматривать оба вещества при одинаковых условиях, например при стандартных ($P = 1 \text{ атм}$, $T = 298,15^\circ \text{K}$), то можно написать

$$S_{\text{п},A} + S_{\text{п},B} - S_{\text{п},AB} - \frac{3}{2} R \ln \frac{[A] \cdot [B]}{[AB]} = S_{\text{п},a} + S_{\text{п},b} - S_{\text{п},ab} - \frac{3}{2} R \ln \frac{[a] \cdot [b]}{[ab]}$$

или, в общем случае, для вещества состава $A_{\nu_1} B_{\nu_2} C_{\nu_3}$ и $a_{\nu_1} b_{\nu_2} c_{\nu_3}$:

$$\nu_1 S_{\text{п},A} + \nu_2 S_{\text{п},B} + \nu_3 S_{\text{п},C} - S_{\text{п},A_{\nu_1} B_{\nu_2} C_{\nu_3}} - \frac{3}{2} R \ln \frac{[A]^{\nu_1} \cdot [B]^{\nu_2} \cdot [C]^{\nu_3}}{[A_{\nu_1} B_{\nu_2} C_{\nu_3}]} =$$

$$= \nu_1 S_{\text{п},a} + \nu_2 S_{\text{п},b} + \nu_3 S_{\text{п},c} - S_{\text{п},a_{\nu_1} b_{\nu_2} c_{\nu_3}} - \frac{3}{2} R \ln \frac{[a]^{\nu_1} \cdot [b]^{\nu_2} \cdot [c]^{\nu_3}}{[a_{\nu_1} b_{\nu_2} c_{\nu_3}]}. \quad (4)$$

Здесь $[A]$, $[B]$, $[C]$ и $[a]$, $[b]$, $[c]$ —атомные веса компонентов веществ $A_{\nu_1} B_{\nu_2} C_{\nu_3}$ и $a_{\nu_1} b_{\nu_2} c_{\nu_3}$ с молекулярными весами $[A_{\nu_1} B_{\nu_2} C_{\nu_3}]$ и $[a_{\nu_1} b_{\nu_2} c_{\nu_3}]$, соответственно; ν_1 , ν_2 , ν_3 —стехиометрические коэффициенты.

Из (4) видно, что это равенство может быть записано в виде

$$\Sigma \nu S_{\text{п},\text{элемент}} - S_{\text{п},\text{в-во}} - \frac{3}{2} R \ln \frac{m_1^{\nu_1} \cdot m_2^{\nu_2} \cdot m_3^{\nu_3}}{\Sigma m} = \kappa,$$

где κ —постоянная величина; m_1 , m_2 , m_3 —атомные веса компонентов вещества и Σm —его молекулярный вес.

Подставив значение $S_{\text{п},\text{в-во}}$ из (2) в последнее выражение, получим

$$\Sigma \nu S_{\text{п},\text{элемент}} - S^\circ + S_{\text{вращ}}^\circ + S_{\text{кол}}^\circ - \frac{3}{2} R \ln \frac{m_1^{\nu_1} \cdot m_2^{\nu_2} \cdot m_3^{\nu_3}}{\Sigma m} = \kappa_1. \quad (5)$$

В этом выражении сделаем еще одно упрощение—отбросим $S_{\text{кол}}^\circ$:

$$\Sigma \nu S_{\text{п}}^\circ - S^\circ + S_{\text{вращ}}^\circ - \frac{3}{2} R \ln \frac{m_1^{\nu_1} \cdot m_2^{\nu_2} \cdot m_3^{\nu_3}}{\Sigma m} = \kappa_2, \quad (6)$$

где S° —энтропия газообразного вещества и $S_{\text{вращ}}^\circ$ —его вращательная доля энтропии; $\Sigma \nu S_{\text{п}}^\circ$ —сумма поступательной энтропии компонентов вещества с учетом числа каждого атома ν в его молекуле; нолик наверху означает, что условия стандартные. Разумеется, уравнение (6) может быть применено в тех случаях, когда сравниваемые вещества имеют близкие значения $S_{\text{кол}}^\circ$.

Рассмотрим две группы веществ, удовлетворяющих этим требованиям.

1. Соединения водорода и его изотопов. В этих соединениях благодаря маленькой массе атомов частота их колебаний большая и поэтому колебательная доля энтропии вещества невелика.

а) Двухатомные молекулы.

Для двухатомных (и линейных многоатомных) молекул

$$S_{\text{вращ}}^\circ = R \ln T + R \ln I - R \ln \sigma + 177,67, \quad (7)$$

где σ —число симметрии молекулы и I —момент ее инерции, определяемый из величины межатомного расстояния l и приведенной массы μ выражением:

$$I = \mu l^2, \quad (8)$$

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}, \quad (9a)$$

здесь m_1 , m_2 —массы частиц. Поскольку наш подход носит сравнительный характер, то для удобства вместо массы частиц будем брать их атомные веса:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (9)$$

а межатомные расстояния выразим в ангстремах.

Подставив (7), (8) и (9), а также значение универсальной газовой постоянной в (6) и переходя к десятичным логарифмам, получим

$$\Sigma \nu S_{\text{п}}^\circ - S^\circ + 4,6 \lg \frac{l^2}{\sigma} - 2,31 \lg \frac{m_1 m_2}{\Sigma m} = \kappa_3. \quad (10)$$

Таблица 1

Эле- мент	$S^0_{п.}$ э.е.	Эле- мент	$S^0_{п.}$ э.е.	Эле- мент	$S^0_{п.}$ э.е.	Эле- мент	$S^0_{п.}$ э.е.	Эле- мент	$S^0_{п.}$ э.е.	Эле- мент	$S^0_{п.}$ э.е.
H	26,01	B	33,08	O	34,25	Hg	41,79	Tc	39,62	Sm	40,93
D	28,08	Al	35,81	S	36,32	Sc	37,33	Re	41,57	Eu	40,96
T	29,26	Ga	38,64	Se	39,01	J	39,36	Fe	37,98	Gd	41,07
Li	31,76	In	40,13	Te	40,44	La	40,70	Co	38,14	Dy	41,10
Na	35,36	Tl	41,85	Po	41,93	Ac	42,16	Ni	38,13	Tb	41,16
K	36,92	C	33,40	F	34,77	Ti	37,52	Ru	39,75	Ho	41,20
Rb	39,25	Si	35,93	Cl	36,62	Zr	39,44	Rh	39,80	Er	41,25
Cs	40,56	Ge	38,76	Br	39,05	Hf	41,44	Pb	39,90	Tu	41,28
Fr	42,11	Sn	40,23	I	40,43	V	37,70	Os	41,63	Jb	41,35
Be	32,54	Pb	41,89	At	41,93	Nb	39,50	Jr	41,66	Lu	41,38
Mg	35,50	N	33,85	Cu	38,36	Ta	41,48	Pt	41,71	Th	42,22
Ca	36,99	P	36,22	Ag	39,94	Cr	37,77	Ce	40,72	Pa	42,21
Sr	39,32	As	38,85	Au	41,74	Mo	39,59	Pr	40,74	I	42,30
Ba	40,66	Sb	40,30	Zn	38,45	W	41,53	Nd	40,81	Np	42,29
Ra	42,15	Bi	41,91	Cd	40,06	Mn	37,93	Pm	40,86	Pu	42,35

Таблица 2

Вещество	Число сим- метрии, σ	$S^0_{293,15}$, э.е.	K , э.е. по ур. (10)	K , э.е. по ур. (11)	Вещество	Число сим- метрии, σ	$S^0_{298,15}$, э.е.	K , э.е. по ур. (10)	K , э.е. по ур. (11)
H ₂	2	31,20	20,14	18,95	HBr	1	47,46	17,60	18,98
D ₂	2	34,62	20,16	18,97	DBr	1	48,85	17,61	18,99
T ₂	2	36,62	20,12	18,93	TBr	1	49,67	17,58	18,96
HD	1	34,35	20,14	18,95	HJ	1	49,35	17,09	18,98
HT	1	35,43	20,13	18,94	DJ	1	50,73	17,10	18,99
DT	1	37,02	20,14	18,95	TJ	1	51,56	17,05	18,94
HO	1	43,89	16,42	16,30	HN	1	43,30	16,62	16,77
DO	1	45,31	16,44	16,32	DN	1	44,72	16,65	16,80
TO	1	46,16	16,42	16,30	TN	1	45,57*	16,63	16,78
HS	1	46,74	15,61	16,77	HP	1	46,87	15,38	16,77
DS	1	48,14	15,62	16,78	DP	1	48,27	15,39	16,78
TS	1	48,95	15,62	16,78	TP	1	49,09*	15,38	16,77
HF	1	41,51	19,32	18,98	HBi	1	51,31	16,61	18,96
DF	1	42,92	19,34	19,00	DBi	1	52,72	16,58	18,93
TF	1	43,77	19,31	18,97	TBi	1	53,49*	16,59	18,94
HCl	1	44,64	18,01	18,97	HB	1	41,05	18,12	18,96
DCI	1	46,04	18,02	18,98	DB	1	42,51*	18,12	18,96
TCI	1	46,87	17,99	18,95	TB	1	43,35*	18,12	18,96

Можно также пренебречь изменением длины химической связи при замене водорода его изотопами и вместо (10) написать

$$\sum \nu S^0_{п.} - S^0 - 4,6 \lg \sigma - 2,3 \lg \frac{m_1 \cdot m_2}{\sum m} = \kappa_4. \quad (11)$$

К этому уравнению можно прибегнуть в тех случаях, когда неизвестно межатомное расстояние в молекулах.

Прежде, чем показать, как оправдывают себя эти уравнения, укажем на одно из преимуществ обсужденного метода. Оно состоит в том, что величина $S_{п.}$ легко находится для любых значений p и T . В частности, при $p=1$ атм и $T=298,15^\circ\text{K}$ значения $S^0_{п.}$ для 1 г. ат. элементов в состоянии одноатомного идеального газа, вычисленные по формуле

$$S^0_{п.} = 6,86 \lg m + 25,99, \quad (3)$$

приведены в табл. 1, а табл. 2 содержит значения κ_3 и κ_4 , вычисленные по уравнениям (10) и (11) для некоторых двухатомных молекул, содержащих водород и его изотопы.

Как видно из табл. 2, для веществ, отличающихся лишь изотопами водорода, разброс в значениях κ_3 и κ_4 не превышает возможную ошибку в значениях энтропии, приводимую в сводках, и поэтому можно уверенно предсказать отсутствующие значения энтропии, что и сделано для неизученных веществ. Эти значения здесь и далее (табл. 3—6) отмечены звездочкой.

б) Молекулы типа xu' (нелинейные),

Для трехатомных (и многоатомных) нелинейных молекул

$$S^0_{\text{вращ}} = \frac{3}{2} R \ln T + \frac{1}{2} R \ln (I_A \cdot I_B \cdot I_C) - R \ln \sigma + 267,54. \quad (12)$$

Подставив значение $S^0_{\text{вращ}}$ из (12) и (6), получаем

$$\sum \nu S^0_{п.} - S^0 + \frac{1}{2} R \ln (I_A \cdot I_B \cdot I_C) - R \ln \sigma - \frac{3}{2} R \ln \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3}{\sum m} = \kappa_5. \quad (13)$$

Для рассматриваемого типа молекул произведение главных моментов инерции

$$I_A \cdot I_B \cdot I_C = m_x \cdot m_y [m_x + m_y (1 - \cos \alpha)] \mu_1 (1 - \mu_2 \cdot \mu_x) l^6 \sin^2 \alpha, \quad (14)$$

где $\mu_1 = \frac{m_y + m_{y'}}{2 \sum m}$; $\mu_2 = \frac{m_x + 2m_y}{\sum m}$; $\mu_x = \frac{m_x}{\sum m}$, причем $m_y < m_{y'}$ и

межатомные расстояния $l_{xy} = l_{xy'} = l$.

Далее сделаем допущение, что при замене в молекуле атома водорода дейтерием или тритием остаются постоянными не только длины связей, но и угол α между связями xu и xu' .

В дальнейшем эти допущения будут распространены и на молекулы других типов.

Для молекулы H_2O при $\alpha = 104^\circ, 31'$ и $l = 0,957 \text{ \AA}$, (14) примет вид

$$I_A \cdot I_B \cdot I_C = m_x m_y (m_x + 1,25 m_y) \mu_1 (1 - \mu_2 \mu_x) \cdot 0,94.$$

Аналогично для молекул H_2S ($\alpha = 92^\circ, 13'$, $l = 1,336 \text{ \AA}$), H_2Se ($\alpha = 90^\circ 55'$, $l = 1,460 \text{ \AA}$) и H_2Te ($\alpha = 90^\circ 15'$, $l = 1,653 \text{ \AA}$) получается:

$$I_A \cdot I_B \cdot I_C = m_x m_y (m_x + 1,04 m_y) \mu_1 (1 - \mu_2 \mu_x) \cdot 5,68,$$

$$I_A \cdot I_B \cdot I_C = m_x \cdot m_y (m_x + 1,02 m_y) \mu_1 (1 - \mu_2 \mu_x) \cdot 9,69,$$

$$I_A \cdot I_B \cdot I_C = m_x m_y (m_x + 1,01 m_y) \mu_1 (1 - \mu_2 \mu_x) \cdot 20,40.$$

Таблица 3

Вещество	Число сим- метрии, σ	$S_{298,15}^0$, э.е.	$I_A \cdot I_B \cdot I_C$, $\Gamma^3 \text{ \AA}^6$	K , э.е. в ур. (13)	Вещество	Число сим- метрии, σ	$S_{298,15}^0$, э.е.	$I_A \cdot I_B \cdot I_C$, $\Gamma^3 \text{ \AA}^6$	K , э.е. в ур. (13) и (6)
H ₂ O	2	45,11	1,26	40,32	HO ₂	1	54,36	54,4	39,03
HDO	1	47,66	3,24	40,26	DO ₂	1	55,31	55,3	38,93
HTO	1	48,42	5,66	40,19	TO ₂	1	55,94	55,9	38,81
D ₂ O	2	47,38	8,66	40,30	NH ₃	3	46,04	7,81	66,22
DTO	1	49,47	14,2	40,20	NH ₂ D	1	49,16	16,6	66,20
T ₂ O	2	48,79	25,7	40,21	NHD ₂	1	50,07	32,5	66,13
H ₂ S	2	49,16	10,6	40,28	NH ₂ T	1	49,9	27,1	66,09
HDSe	1	51,67	29,4	40,26	NHDT	1	50,8	50,9	65,98
H ₂ Se	1	52,41	54,5	40,20	ND ₃	3	48,73?	63,3	65,11
HTS	1	51,40	78,0	40,21	ND ₂ T	1	51,5	88,3	65,98
D ₂ S	2	53,43	132	40,17	NHT ₂	1	51,4	78,3	65,93
DTS	1	52,82	242	40,04	NDT ₂	1	52,1	131	65,88
T ₂ S	2	52,30	19,0	40,31	NT ₃	3	50,51	203	65,84
H ₂ Se	1	54,82	55,2	40,27	SbH ₃	3	55,68	198	65,73
HTSe	1	55,6*	106	40,17	SbH ₂ D	1	58,89	440	65,52
D ₂ Se	2	54,56	147	40,17	SbHD ₂	1	59,91	872	65,22
DTSe	1	56,7*	265	40,00	SbH ₂ T	1	59,8	767	65,18
T ₂ Se	2	56,0*	477	39,93	SbHDT	1	60,8*	1450	64,85
H ₂ Te	2	54,69	41,0	40,08	SbD ₃	3	58,70	1540	64,85
HDTe	1	57,3*	121	40,00	SbD ₂ T	1	61,5	2380	64,66
HTTe	1	58,1*	234	39,85	SbHT ₂	1	61,3?	2270	64,78
D ₂ Te	2	57,0*	318	39,85	SbDT ₂	1	62,5	3540	64,06
DTTe	1	59,1*	585	39,74	SbT ₃	3	60,7	5070	64,03
T ₂ Te	2	58,4*	1040	39,65					
CH ₄	12	44,53	33,5	92,32	GeH ₄	12	51,9	246	91,60
CH ₃ D	3	48,2*	61,2	92,22	GeH ₃ D	3	55,56	462	91,35
CH ₃ T	3	48,70	92,5	92,14	GeH ₃ T	3	56,42	735	90,96
CHD ₃	3	49,7*	172	92,06	GeHD ₃	3	57,33	1290	90,96
CD ₄	12	47,6*	267	91,97	GeD ₄	12	55,42	1960	90,31
CD ₃ T	3	50,83	370	91,96	GeD ₃ T	3	58,82	2930	90,06
CHT ₃	3	51,27	475	91,85	GeHT ₃	3	59,37	3700	89,73
CDT ₃	3	51,89	679	91,72	GeDT ₃	3	60,05	5040	89,40
CT ₄	12	49,66	896	91,57	GeT ₄	12	57,87	6600	89,10
SiH ₄	12	48,89	204	91,74	SnH ₄	12	54,5*	471	91,04
SiH ₃ D	3	52,58	379	91,52	SnH ₃ D	3	58,4	885	90,56
SiH ₃ T	3	53,16	592	91,44	SnH ₃ T	3	59,3*	1420	90,08
SiHD ₃	3	54,29	1060	91,02	SnHD ₃	3	60,4	2470	89,64
SiD ₄	12	48,73?	1630	94,39	SnD ₄	12	58,6	3750	89,13
SiD ₃ T	3	55,7	2270	90,52	SnD ₃ T	3	62,1*	5270	88,67
SiHT ₃	3	53,64?	2970	92,86	SnHT ₃	3	62,9*	7020	88,19
SiDT ₃	3	56,48	4160	90,45	SnDT ₃	3	63,7*	9630	87,72
SiT ₄	12	53,92	5470	90,60	SnT ₄	12	61,7*	12600	87,24

Таблица 4

Вещество	Межат. расст. l , \AA	$S_{298,15}^0$, э.е.	K , э.е. в ур. (10)	Вещество	Межат. расст. l , \AA	$S_{298,15}^0$, э.е.	K , э.е. в ур. (10)	Вещество	Межат. расст. l , \AA	$S_{298,15}^0$, э.е.	K , э.е. в ур. (10)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
NBr	1,79	56,25	16,5	CCl	1,65	53,88	15,9	KI	3,05	61,64	16,7
PCl	2,05	56,6	16,3	SiF	1,60	54,2*	15,9	CsCl	2,91	61,3	16,7
NS	1,50	52,06	16,4	SiO	1,51	50,55	18,9	KAt	3,13	63,1*	16,7
PO	1,47	53,22	16,4	CS	1,54	50,3*	18,9	RbCl	2,79	59,6	17,1
								KBr	2,82	59,7*	17,1

Продолжение табл. 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F ₂	1,42	48,45	18,8	InBr	2,54	62,07	17,0				
FCI	1,63	52,06	18,8	Gal	2,57	62,1*	17,0	NaI	2,71	59,5	17,2
Cl ₂	1,99	53,29	18,4					CsF	2,35	58,7*	17,2
				BBr	1,88	53,79	18,6	NaAt	2,79	61,1*	17,2
BiS	2,55 ¹	61,7	16,9	GaF	1,78	54,4*	18,6				
SbTe	2,78 ¹	64,1	16,6					NaBr	2,50	57,1	17,4
BiSe	2,68 ¹	64,4	16,4	MgI	2,56	59,9	16,8	RbF	2,27	57,2	17,3
				BaF	2,24	59,1*	16,8				
SF	1,61	54,5	16,0					NaCl	2,36	54,88	17,9
OCi	1,55	54,14	16,1	CaF	2,02	54,8	17,2	KF	2,17	54,08	18,2
				MgCl	2,20	55,4*	17,2				
BCl	1,72	50,97	18,8								
AlF	1,65	51,40	18,8	RbI	3,18	63,8	16,5				
				CsBr	3,07	63,5	16,6				
AlO	1,62	54,40	15,3	RbAt	3,21	65,1*	16,6				
BS	1,61 ¹	53,9*	15,3								

¹ Значение межатомного расстояния найти не удалось. Вместо него взята сумма нормальных ковалентных радиусов элементов [3].

По величинам произведений главных моментов инерции, найденных по этим выражениям, вычислены значения K_s в уравнении (13) для молекул H₂O, H₂S, H₂Se и их D-, T-замещенных (табл. 3).

в) Молекулы типа xu_2 (нелинейные, несимметричные).
Произведение главных моментов инерции

$$I_A \cdot I_B \cdot I_C = \frac{m_x \cdot m_y^2}{(\sum m)^2} l_{xy}^2 \cdot l_{yy}^2 \cdot \sin^2 \alpha [m_x (m_x + m_y) l_{yy}^2 + 2m_x m_y l_{xy}^2 - 2m_x m_y l_{yy} \cdot \cos \alpha].$$

Для HO₂ $m_y = 16,00$; $l_{yy} = 1,49 \text{ \AA}$; $l_{xy} = 0,97 \text{ \AA}$; $\alpha = 110^\circ$. Сокращая это равенство на постоянную величину, равную $l_{xy}^2 \cdot l_{yy}^2 \sin^2 \alpha$, получим*

$$I_A \cdot I_B \cdot I_C = \frac{256 m_x}{(\sum m)^2} (81,5 m_x + 568,3). \quad (15)$$

Величины K_s , вычисленные по (15) и (13) для HO₂, DO₂ и TO₂ приведены в табл. 3.

г) Молекулы типа xu_2z (пирамидальные).
По соотношению Хиршфельдера [2] для молекулы этого типа

$$I_A \cdot I_B \cdot I_C = ABC - BE^2. \quad (16)$$

где

$$A = 2m_y u_1^2 + m_x z_1^2 + m_z z_2^2 - \frac{1}{\sum m} (m_x z_1 - m_x z_2)^2,$$

$$B = 2m_y x_1^2 + m_x x_2^2 + m_z z_1^2 + m_x z_2^2 - \frac{1}{\sum m} (2m_y x_1 - m_x x_2)^2 -$$

$$- \frac{1}{\sum m} (m_x z_1 - m_z z_2)^2,$$

* Следовательно, найденные значения $I_A \cdot I_B \cdot I_C$ будут неистинными.

$$C = 2m_y x_1^2 + m_z x_2^2 + m_y y_1^2 - \frac{1}{\sum m} (2m_y x_1 - m_z x_2)^2,$$

$$E = m_z x_2 z_2 - \frac{1}{\sum m} (2m_y x_1 - m_z x_2) (m_x z_1 - m_z z_2);$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} l_{xy} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} l_{xy} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad y_1 = l_{xy} \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$z_1 = \sqrt{l_{xy}^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3} l_{xy}^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$z_2 = \sqrt{l_{xz}^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3} l_{xz}^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - z_1.$$

В табл. 3 приведены также значения κ , найденные по уравнению (13) для молекул NH_3 ($\alpha = \angle \text{HNN} = 107^\circ 47'$, $l_{\text{N-H}} = 1,017 \text{ \AA}$), FH_3 ($\alpha = 93^\circ 30'$, $l_{\text{F-H}} = 1,421 \text{ \AA}$), AsH_3 ($\alpha = 91^\circ 50'$, $l_{\text{As-H}} = 1,519 \text{ \AA}$), SbH_3 ($\alpha = 91^\circ 18'$, $l_{\text{Sb-H}} = 1,707 \text{ \AA}$) и их D - и T -замещенных.

д) Молекулы типа xu_3z (тетраэдрические).

В случае, если $\alpha = \angle \text{xu} = 109^\circ 28'$, то для указанного типа молекул

$$\left. \begin{aligned} I_A = I_B = \frac{5}{3} m_y l_{xy}^2 + m_z l_{xz}^2 \frac{1}{\sum m} (m_y l_{xy} - m_z l_{xz})^2, \\ I_C = \frac{8}{3} m_y l_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Вычисленные по уравнению (13) значения κ для CH_4 ($l_{\text{C-H}} = 1,093 \text{ \AA}$) CH_3D , CH_3T , CD_3T , CHD_3 , CHT_3 , CDT_3 , CD_4 , CT_4 и аналогичных соединений кремния ($l_{\text{Si-H}} = 1,480 \text{ \AA}$), германия ($l_{\text{Ge-H}} = 1,527 \text{ \AA}$) и олова ($l_{\text{Sn-H}} = 1,701 \text{ \AA}$) также сведены в табл. 3.

По данным табл. 2 и 3 видно, что при переходе от одного ряда однотипных веществ к другому с уменьшением числа атомов в моле-

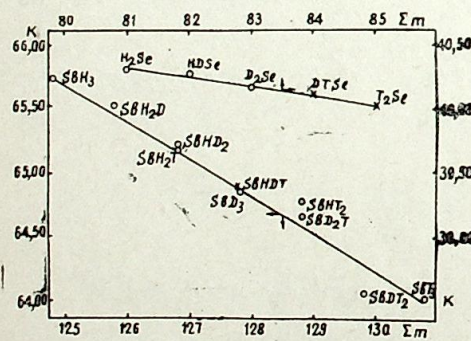


Рис. 1. Зависимость κ от молекулярного веса, ур. (13):

○ — рассчитано по известным значениям энтропии;
× — предсказываемые величины

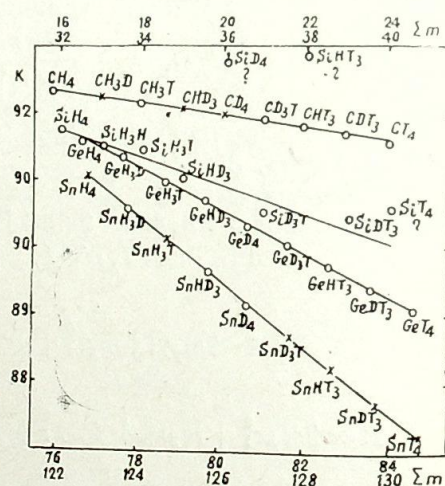


Рис. 2. Зависимость κ от молекулярного веса, ур. (13):

○ — рассчитано по известным значениям энтропии;
× — предсказываемые величины.

куле κ убывает. Эта величина убывает также и внутри ряда при переходе к молекулам, включающим более тяжелые атомы, причем в ряду молекул с большим числом атомов скорость убывания κ выше (см. изменение наклона прямых на рис. 1, 2). Это связано с тем, что в простых и легких молекулах значения $S_{\text{кол}}$ меньше, чем в сложных и тяжелых, поэтому при отбрасывании $S_{\text{кол}}$ (см. стр. 2 и вывод ур. (6)) последние „теряют“ больше, чем простые и легкие. Но, благодаря наблюдаемой закономерности, очевидно, имеется возможность предсказания отсутствующих значений энтропии; в случае несложной молекулы это можно сделать даже по единичным данным (поскольку „ход“ убывания κ небольшой). Так, например, по известной величине энтропии для H_2Te могут быть найдены приближительные значения энтропии HDTe , HTTe , D_2Te , DTTe и T_2Te . Но если привлечь данные и для H_2S , H_2Se и их изотопных аналогов, то точность предсказываемых величин будет значительно выше (табл. 3).

В случае четырехатомных и более сложных молекул величину энтропии неизученных веществ можно найти путем интерполяции или экстраполяции данных для нескольких аналогов. Сущность таких расчетов ясна из рис. 1 и 2.

Возможности метода расчета не ограничиваются указанными типами молекул. В принципе он может быть распространен и на соединения изотопов других элементов. К сожалению, последние мало изучены. С другой стороны, различие в массе атомов сравнительно небольшое и поэтому различие в величинах энтропии также будет небольшим. Например, для молекул KCl^{35} (частота колебаний $\omega = 279,8$; межатомное расстояние $l = 2,667 \text{ \AA}$) и KCl^{37} простой подсчет показывает, что колебательная и вращательная энтропии этих молекул отличаются на величины $\Delta S_{\text{кол}} = 0,03$ и $\Delta S_{\text{вращ}} = 0,06$ э. е.; для $\text{Rb}^{85}\text{Br}^{79}$ и $\text{Rb}^{87}\text{Br}^{79}$ $\Delta S_{\text{кол}} = 0,01$, $\Delta S_{\text{вращ}} = 0,02$ э. е.; для N^{14}O и N^{15}O $\Delta S_{\text{кол}} = 0$, $\Delta S_{\text{вращ}} = 0,07$ э. е.; для $\text{Cl}^{35}\text{C}^{12}\text{N}^{14}$ ($l_{\text{C-Cl}} = 1,629$, $l_{\text{C-N}} = 1,160 \text{ \AA}$, $\omega_1 = 744,2$, $\omega_2 = 378,4$ (2), $\omega_3 = 2215,6$) и $\text{Cl}^{37}\text{C}^{12}\text{N}^{15}$ $\Delta \sum S_{\text{кол}} = 0,04$, $\Delta S_{\text{вращ}} = 0,12$ э. е. и т. д.

2. Двухатомные молекулы с близкими массами частиц. В таких молекулах $S_{\text{кол}}$ близки по своей величине и поэтому уравнение (10) и здесь может быть применено для расчета. Вычисленные по этому уравнению значения κ для NBr , PCl , SF , OCl и других молекул ($\sigma = 1$, за исключением F_2 и Cl_2) приведены в табл. 4. В этой таблице приведены также вычисленные значения стандартной энтропии для некоторых молекул (отмечено звездочкой) по величине κ , найденной для веществ с известными данными. Точность их тем выше, чем ближе молекулярные веса или, вернее, атомные веса компонентов в сравниваемых аналогах и, разумеется, точность метода зависит, как и во всех методах сравнения, от точности исходных данных*.

Рассмотренный способ требует знания структуры молекул. Это не всегда доступно и, кроме того, расчет момента инерции молекулы представляет некоторую трудность. Поэтому для приближенных расчетов уравнение (5) может быть упрощено. В нем $S_{\text{вращ}}$, $S_{\text{кол}}$ и последний член в левой части равенства обычно тем больше, чем больше число атомов n в молекуле и чем больше массы этих атомов. Поэтому эти три слагаемых заменим эмпирическим выражением

$$(3n - 5) \lg \sum m$$

* Следует отметить, что в данных различных авторов и даже в фундаментальных сводках по значениям энтропии нередко встречаются большие расхождения. Укажем на некоторые из них: стандартная энтропия POCl_3 , газ согласно [4] равна 77,4, а согласно [5] — 77,76 э. е.; SbCl_3 , газ — 80,9 и 80,71 э. е.; BiCl_3 , газ — 85,2 и 85,74 э. е.; $\text{Ge}_{\text{тв}}$ — 7,5 [5] и 10,1 э. е. [6] и т. д.

Таблица 5

Вещество	Число сим- метрии, σ	$S_{298,15}^0$, э. е.	K , э. е. в ур. (18)	Вещество	Число сим- метрии, σ	$S_{298,15}^0$, э. е.	K , э. е. в ур. (18)	Вещество	Число сим- метрии, σ	$S_{298,15}^0$, э. е.	K , э. е. в ур. (18)
O ₂	2	49,01	19,6	NF ₃	3	62,28	86,7	CF ₄	12	62,50	124,5
S ₂	2	54,50	18,6	PF ₃	3	65,15	86,8	CF ₃ Cl	3	68,16	124,2
Se ₂	2	60,22	18,6	NF ₂ Cl	1	67,97	85,6	CF ₂ Cl ₂	2	71,86	123,8
Te ₂	2	64,07	17,8	NFCl ₂	1	70,6*	85,4	CFCl ₃	3	74,05	123,2
Po ₂	2	67,88	17,2	PF ₂ Cl	1	71,6	84,9	CF ₃ Br	3	71,14	125,2
				PFCl ₂	1	73,60	85,2	CCl ₄	12	74,03	122,8
LiCl	1	50,80	19,2	NCl ₃	3	71,7*	84,4	CF ₂ ClBr	1	76,1	124,7
NaCl	1	54,88	18,8	AzF ₃	3	69,06		CCl ₃ Br	3	79,55	123,6
KCl	1	57,10	18,3	PCl ₃	3	74,50		CF ₃ I	3	73,44	125,4
RbCl	1	59,6	18,4	PF ₂ Br	1	74,1	85,9	CFCI ₂ Br	1	79,0	124,1
CsCl	1	61,3	18,1	AzCl ₃	3	77,97	84,4	CF ₂ Br ₂	2	77,71	125,2
FrCl	1	62,81	18,4	PCl ₂ Br	1	79,7	84,6	CF ₂ ClI	1	78,54	124,8
				PFBr ₂	1	80,0	85,3	CFCI ₂ Br ₂	1	81,95	124,5
F ₂	2	48,45	21,3	PClBr ₂	1	82,6	84,8	CCl ₂ Br ₂	2	83,1	124,1
FCI	1	52,06	21,1	SbCl ₃	3	80,9	83,6	CF ₃ BrI	1	81,77	124,8
Cl ₂	2	53,29	20,4	NBr ₃	3	80,7*	85,0	CFCBr ₃	3	82,64	124,8
Br ₂	1	54,8*	21,0	PBr ₃	3	83,2	85,0	CFCI ₂ BrI	1	84,2*	124,4
ClBr	1	57,2*	20,5	AzBr ₃	3	86,94	84,4	CClBr ₃	3	85,5	124,1
FI	1	56,42	21,0	BiCl ₃	3	85,2	81,9	CF ₂ I ₂	2	81,45	125,8
ClI	1	59,14	20,1	SbBr ₃	3	89,0	84,2	CBrI ₃	12	85,55	124,3
Br ₂	2	58,65	20,3	I ₂	3	86,9*	84,2	CBr ₂ I	3	90,6*	124,0
BrI	1	61,82	20,0	PI ₃	3	89,5	84,1	CBr ₂ I ₃	3	94,3*	124,0
J ₂	2	62,28	19,6	BiBr ₃	3	91,9	83,5	CI ₄	12	93,65	123,7
At ₂	2	63,9	21,2	AsI ₃	3	92,79	83,8				
POI ₃	3	68,10	124,7	HF	3	41,51	20,6	CH ₃ OH		57,29	133,6
NSF ₃	3	68,48	124,0	HCl	1	44,64	19,6	CH ₃ SH		60,96	134,7
POF ₂ Cl	1	72,1	125,3	HBr	1	47,46	19,5				
PSF ₃	3	71,4	124,1	HI	1	49,35	19,2	C ₂ H ₅ OH		66,45	227,3
POFCI ₂	1	76,55	123,3	NH	1	43,30	17,7	C ₂ H ₅ SH		70,77	227,8
POCl ₃	3	77,4	122,6	PH	1	46,87	16,9	C ₃ H ₇ OH		75,9	321,8
PSCl ₃	3	80,6*	121,9	BiH	1	51,31	18,9	(пропил спирт)			
POBr ₃	3	86,0	124,0					C ₃ H ₇ SH		80,40	322,5
PSBr ₃	3	89,1	123,7	H ₂ O	2	45,11	44,8	(пропан- тиол-1)			
POI ₃	3	92,2	123,2	H ₂ S	2	49,16	43,9	C ₃ H ₇ OH		73,2	324,5
PSI ₃	3	95,3	122,8	H ₂ Se	2	52,30	45,0	(изонтрп спирт)			
PF ₅	6	70,0	163,8	H ₂ Te	2	54,69	45,0	C ₃ H ₇ SH		77,51	325,4
PF ₂ Cl ₃	6	80,9	160,3	NH ₃	3	46,04	72,3	(пропан- тиол-2)			
PCl ₅	6	87,1	158,8	PH ₃	3	50,24	72,6	C ₆ H ₆ F		72,33	354,3
SbF ₅	6	84,4	156,5	AsH ₃	3	53,29	74,7	C ₆ H ₆ Cl		74,86	355,8
SbCl ₅	6	96,0	156,0	SbH ₃	3	55,68	75,1				
SF ₆	24	69,7	203,5	CH ₃ F	3	53,25	106,0	C ₄ H ₉ OH		84,8	417,9
SFCl ₄	4	76,38	203,0	CH ₃ Cl	3	56,04	106,9	C ₄ H ₉ SH		89,69	418,5
SeF ₆	24	75,0	202,9	CH ₃ Br	3	58,82	109,3				
TeF ₆	24	80,3	200,6	CH ₃ I	3	60,71	110,4	C ₆ C ₁₃ OH		99,3	590,0
								C ₆ H ₁₃ SH		108,54	586,5

(молекула с n атомами имеет $3n - 5$ колебательных степеней свободы или $3n - 6$ в нелинейных молекулах) и с учетом симметрии вместо (5) запишем

$$\sum \nu S_n - S^0 - 4,6 \lg \sigma + (3n - 5) \lg \sum m = \kappa_8. \quad (18)$$

В табл. 5 приведены вычисленные по (18) значения κ для различных веществ в газообразном состоянии. Часть их содержит водород,

который предъявляет особое требование в связи с тем, что он не имеет полного аналога. Поэтому в сравниваемых веществах число водородных атомов должно быть одинаково [6]. Помимо этого, для спиртов не указаны числа симметрии. Такая необходимость вообще отпадает, если сравниваются химические и структурные аналоги, в которых σ одна и та же. Как видно из табл. 5, величина κ в ряду сходных веществ изменяется закономерно и в небольших пределах. Следовательно, уравнение (18), хотя оно и весьма просто, успешно может быть применено для приближенных расчетов. Для этого достаточно знания энтропии двух-трех веществ из данной группы, по которым можно найти величину энтропии остальных членов группы (табл. 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельвин-Хьюз Э. А. Физическая химия, I ИЛ, М., 1962.
2. Hirschfelder J. O. J. chem. phys., 8, 431 (1940).
3. Справочник химика, I, Госхимиздат, М.—Л., 1962.
4. Медведев В. А., Юнгман В. С., Воробьев А. Ф. и др. Термические константы веществ, I, II, III. Изд-во АН СССР, М., 1965—1968.
5. Wagman D., Evans W., Halow I., Parker V., Bailey S., Schumm R. Selected Values of chemical Thermodynamic properties, Part 1, Tech. Note 270—I, NBS, Washington, 1965.
6. Rossini F., Wagman D., W. Evans W., Levine S., Zaffe I. Selected values of chemical Thermodynamic Uroperties, Natl. Bur. Standarts, circ. 500, Washington, 1952.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 21. XI 1969

К. Э. Шерифов

Мәһдуд гімәтләре көрә индивидуал маддәләрин энтропијасынын һесаблинамасына даир

I. Газлар

ХҮЛАСӘ

Термодинамик функцијаларын статистик үсулларла һесаблинамасы әсасында ашағыдакы тәнлик тәклиф едилмишдир:

$$\sum \nu S_n^0 - S^0 + S_{\text{вращ}}^0 - \frac{3}{2} R \ln \frac{m_1^{\nu_1} \cdot m_2^{\nu_2} \cdot m_3^{\nu_3}}{\sum m} = \kappa_1 \quad (1)$$

Бу тәнлик мугајисәли характер дашыјыр вә биртипли маддәләре тәт-биг едилір. Бурада $S_n^0 - m_1, m_2, m_3$ атом чәкили вә ν_1, ν_2, ν_3 әмсаллы маддә компонентләринин һәрәкәт энтропијасыдыр. S^0 —маддәнин өз энтропијасы, $S_{\text{вращ}}^0$ —фырланма энтропијасы, $\sum m$ —молекул чәкисидир. κ_1 —ишарәси көстәрир ки, тәзјиг 1 атмосфердир. κ_1 -ин гімәти молекул чәкисиндән хәтти асылыдыр. Она көрә охшар маддәләрдән икисинин энтропијасы мәлум оларса, јердә гаданларынын энтропијасыны һесаблимама мүмкүндүр.

(1) тәнлији илә һесабламанын һәчми бөјүкдүр. Бундан әләвә, молекулун гурулушуну билмәк ләзимдыр. Она көрә (1) тәнлији садәләшдирилмишдир:

$$\sum \nu S_n^0 - S^0 - 4,6 \lg \sigma + (3n - 5) \lg \sum m = \kappa_2 \quad (2)$$

Бурада σ —молекулун симметрија әдәди, n —исә молекулдакы атомларын сәјыдыр.

(2) тәнлији (1) тәнлијинә нисбәтән аз дәгигдир, лакин онунла һесаблама апармаг хәјли асандыр. Бу тәнликләрин һәр икиси молекулунда 2-дән 21-ә гәдәр атом олан мүхтәлиф типли 234 бирләшмәдә јохланылмышдыр. Јохламанын нәтичәсинә әсасән 44 маддәнин энтропијасы һесаблинамыш вә көстәрилмишдир ки, 7 маддәнин энтропијасынын әдәбијатда мәлум олан гімәтләри шүбһә доғурур.

Х. И. МАМЕДОВ и М. М. ХАЛИЛОВ

ТРАНСФОРМАЦИИ ПОЛОСАТОГО СПЕКТРА ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ В КВАЗИЛИНЕЙЧАТЫЕ РАДИКАЛА КСИЛОЛА В *n*-ПАРАФИНАХ ПРИ 77 и 55°K

1. Известно, что обычные полосатые электронные спектры ряда молекул при низкой температуре с выбором соответствующего растворителя из числа *n*-парафинов превращаются в квазилинейчатые спектры (эффект Шпольского). Такая закономерность наблюдается для электронного спектра свободных радикалов некоторых молекул, созданных ультрафиолетовым светом, в циклических [1—3] и нормальных парафинах при низкой температуре.

Кроме того, следует отметить, что для свободных радикалов ряда стабильных молекул в подходящей матрице — *n*-парафине в зависимости от концентрации и способа замораживания проявляются как полосатые, так и квазилинейчатые спектры, подобно наблюдаемому в соответствующих условиях для изучаемых молекул [4—10].

Ранее нами было замечено, что для некоторых молекул [11] в условиях эффекта Шпольского наблюдается сосуществование квазилиний и полос в спектре. В настоящей статье сообщается об аналогичном проявлении последовательностей полос и квазилиний в спектре люминесценции свободного радикала ксилола и указываются возможности получения по ним ряда сведений.

Изучение природы полос и квазилиний молекулы в виде свободного радикала удобно и в методическом отношении, так как позволяет постепенно, до определенного предела увеличить концентрацию свободного радикала в одном и том же образце, не изменяя структуры кристаллической матрицы и расположения примесной молекулы. Другим преимуществом такого рассмотрения является то, что высокая реакционная активность свободного радикала, проявляющаяся в изменениях интенсивности спектра свечения, может явиться дополнительным источником сведения об окружении центра излучения, а также для выяснения состояния исследуемой молекулы в матрице — при установлении наличия мономеров, димеров и сложной ассоциации.

2. Нами с целью выяснения природы полос и квазилиний исследованы спектры флуоресценции свободного радикала *m*-ксилола в матрице *n*-парафинов при 55°K и более высоких температурах (до температуры плавления матрицы), созданного путем облучения суммарным светом ртутной лампы ДРШ-250. При этом установлено, что небольшое температурное изменение в матрице стабилизирующего радикала существенно влияет на формы проявления спектра излучения, полученные при помощи спектрографа ИСП-51. Это особенно

четко выявляется в спектре флуоресценции радикала *m*-ксилола в пентане в температурном интервале 77—55°K.

Свободные радикалы *m*-ксилола в пентане при 55°K, созданные при этой же температуре суммарным светом, обладают полосатым спектром флуоресценции в видимой области в интервале 4662,5—5705 Å (рис. 1, а). В спектре совершенно незаметны признаки квазилинейчатой структуры. Однако для превращения этого узко-полосатого спектра в структурный квазилинейчатый спектр достаточно повысить температуру всего на 20°, в течение нескольких минут. В результате на месте всех узких полос проявляются квазилинии: как бы все полосы превращаются в линии. Если при этом еще повторно уменьшить температуру замороженного образца до первоначальной, подучается совершенно свободный от полос резкий квазилинейчатый спектр (рис. 1, б).

По внешнему виду подобный процесс наблюдается в эффекте Шпольского при выборе „подходящей“ матрицы из числа нормальных парафинов. Однако, если облучение суммарным светом проводить при 77°K и выше, то полосы не проявляются, и при пони-

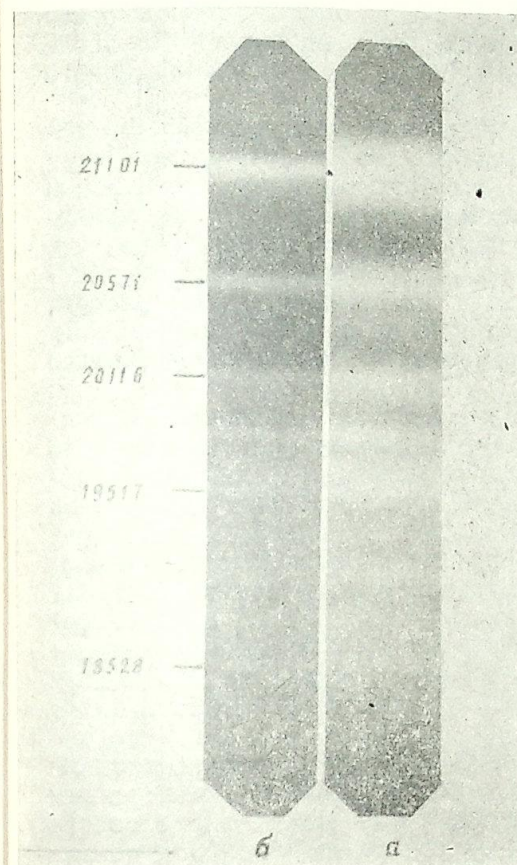


Рис. 1. Спектры флуоресценции свободного радикала *m*-ксилола в пентане при 55°K:
а) облучение при 55°K;
б) после нагрева до 77°K.

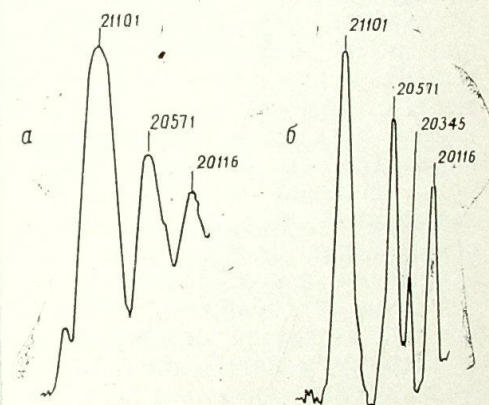


Рис. 2. Микрофотограмма спектра флуоресценции свободного радикала *m*-ксилола, снятая при 55°K:
а) облучение при 55°K;
б) после нагрева до 77°K.

жению температуры до 55°K спектр получается подобный полученному после облучения замороженного раствора при 55°K и проведения с ним процесса повышения температуры до 77°K, а затем снижения ее снова до 55°K.

Цикл прямое охлаждение (до 55°K) → нагревание → охлаждение (55°K), проведенный с разными концентрациями молекул свободного радикала *m*-ксилола в пентане, показал, что процесс превращения последовательности полос в линии при заданной дозе облучения УФ светом резко зависит от исходной концентрации исследуемого вещества и дозы облучения. При средних дозах облучения этот процесс

резко происходит при малых концентрациях ($10^{-3} - 10^{-5}$ м/л). При больших концентрациях преобладают спектры с квазилиниями. Но в этом случае на квазилинии накладываются следы слабых полос другого происхождения, причем полосы несимметричны относительно линии и не меняют интенсивности при изменении температуры (при проведении цикла).

Последние типы полос наблюдаются не только при больших концентрациях свободного радикала *м*-ксилола, но также в двухкомпонентных его смесях с гексаном в соотношении 1:1. Интересно то, что в спектре с исчезновением полос интенсивности линии увеличиваются. Эти изменения хорошо заметны на микрофотограмме (рис. 2) начальных линий спектра флуоресценции свободного радикала *м*-ксилола в пентане. Здесь приводятся сравнения общей интенсивности (полоса + линия) с интенсивностью линий (рис. 2, б), полученных после проведения операции повышения температуры ($\sim 20^\circ$) и повторного охлаждения до 55°K .

3. Мы предполагаем, что в замороженной массе *н*-пентана исследуемый свободный радикал молекулы *м*-ксилола находится в двух различных окружениях [5, 12] при этом, по-видимому, квазилинию дают молекулы, встроенные в решетку *н*-парафина [7], а полосы возникли из хаотически расположенных молекул, не встроенных в кристаллическую матрицу *н*-парафина [6, 7]. С такими предположениями согласуется сохранение структуры квазилиний до температуры, близкой к температуре плавления матрицы, со слабыми изменениями их интенсивности, а также сильное уменьшение интенсивности полос в процессе нагревания.

Причиной исчезновения полос или сильного уменьшения их интенсивности при повышении температуры от 55 до 77°K может быть увеличение степени свободного вращения молекулы радикала *м*-ксилола и его диффузионной подвижности в матрице. При этом часть молекулы вследствие вращения может ориентироваться, подобно примеси, с квазилиниями. В соответствии с этим в эксперименте наблюдается повышение интенсивности квазилиний, т. е. заметный вклад переориентации на общую интенсивность квазилиний. С другой стороны, большая вероятность рекомбинации диффузионно-подвижных радикалов уменьшает интенсивность полос. В результате происходит превращение полос, ответственных за радикалы *м*-ксилола в ином окружении, в квазилинии.

Если предположить, что за полосатый спектр флуоресценции *м*-ксилола в пентане ответственны молекулы с групповым внедрением в матрицу, в виде сложного ассоциата, тогда вследствие близкого расположения двух или более активных радикалов небольшие температурные изменения могут явиться основной причиной их рекомбинации. В этом случае с повышением температуры (на 20°K) от 55°K должно происходить значительное уменьшение интенсивности квазилиний вследствие вычета доли интенсивности излучения полосы из общей интенсивности (линия + полосы). Интенсивность излучения самих же квазилиний могла бы уменьшиться за счет температурного тушения.

Наблюдаемые в эксперименте изменения интенсивности линий и полос не подтверждают последнего предположения. Этому объяснению еще противоречит поведение спектра свободного радикала вещества в пропорции 1:1 с растворителем, где повышение температуры примерно на 20° и больше не приводит к исчезновению полосы свободного радикала.

Прекращение излучения полосатым спектром наблюдается намного ниже температуры плавления матрицы в результате рекомбинации и подтверждается односторонностью процесса, согласующегося с тем

экспериментальным фактом, что, во-первых, повторное понижение температуры без добавочного облучения не приводит к проявлению полосатого спектра, во-вторых, с тем, что облучение при 77°K и выше не приводит к проявлению полос. Это, возможно, связано с кратковременностью существования свободного радикала в случае облучения при указанных температурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ripoche J. „Spectrochem Acta“, Vol. 23A, № 4, 1003—1021, 1967.
2. Porter G. Internat Sumpo. Tol. Struct and Spe. Socio, 1—5, B 401/1—B 401/8, 1962.
3. Migirdicuan E. „Ber. Bunsenges phys. chem“, 72, № 2, 344—348, 1968.
4. Рузевич З. С. „Оптика и спектроскопия“, 15, 357, 1963.
5. Leach S. „I. chem et phys. chem. biol“, 61, 1629, 1964.
6. Болотникова Т. Н., Наумова Т. М. „Оптика и спектроскопия“, 25, 460, 1968.
7. Шпольский Э. В., Климова Л. А., Нерсесова Г. Н., Глядко-ский В. И. „Оптика и спектроскопия“, 24, 52, 1968.
8. Проскурова Н. С., Гобов Г. В. „Оптика и спектроскопия“, 24, 919, 1968.
9. Гобов Г. В., Нахимовская Л. А. ЖПС, 7, 731, 1968.
10. Утюгова Л. Н., Нахимовская Л. А. ЖПС, 9, 1053, 1968.
11. Левшин В. Л., Мамедов Х. И. „Вестник МГУ, серия физ.“ № 2, 30, 1963.
12. Мамедов Х. И. и Лайпалов Р. З. „Оптика и спектроскопия“, 20, 505, 1966.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 2. III 1970

Х. И. Маммәдов, М. М. Хәлилов

77 və 55°K -də парафинlərdə ксилол радикалынын золаглы спектрләринин квази-хәтти спектрә чеврилмәси

ХҮЛАСӘ

77 və 55°K -də *н*-парафинləрдә ксилолун ултрабәнөвшәји шүаларын тәсири илә јарадылмыш сәрбәст радикалынын квази хәтти спектри тәдгиг олунмушдур.

Мүәјјән едилмишдир ки, стабилләшдиричи матрисанын температурунун чох кичик интервалда ($\sim 20^\circ\text{K}$) дәјишдирилмәси нәтичәсиндә радикалын золаглы спектри, Шполски еффекиндә олдуғу кими, квази-хәтти спектрә чеврилир.

Г. Х. АЖДАРОВ, В. И. ТАГИРОВ, С. И. ТАИРОВ,
М. Г. ШАХТАХТИНСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ПРИМЕСИ КАДМИЯ В СПЛАВАХ ГЕРМАНИЯ С КРЕМНИЕМ

Элементы второй группы Zn, Cd, Hg в германии создают по два глубоких акцепторных уровня [1—5], что согласуется с заполнением тетраэдрической связи двумя приобретенными добавочными электронами. Представляет интерес проследить за изменением глубины залегания этих уровней при введении кремния в германий. Нами ранее были исследованы поведение и энергетические состояния примесей цинка [6, 7] и ртути [8] в сплавах германий—кремний.

В настоящей статье приводятся результаты исследований примесных состояний кадмия в сплавах германия с кремнием. Основная трудность при исследовании заключалась в легировании сплавов германий—кремний кадмием, так как при температурах порядка 1000°С кадмий обладает высоким давлением пара [9] и очень малой растворимостью (10^{14} см⁻³) [10]. Эти обстоятельства делают невозможным легирование материала кадмием в ходе выращивания монокристаллов вытягиванием из расплава [11]. Поэтому кадмий в сплавы вводился из паровой фазы в процессе зонной перекристаллизации, как и в случае цинка [6]. После легирования кристаллы имели проводимость *p*-типа. Из слитков, легированных кадмием, вырезали образцы в виде прямоугольного параллелепипеда размером $10 \times 3 \times 1$ мм³ и исследовали их электрические свойства.

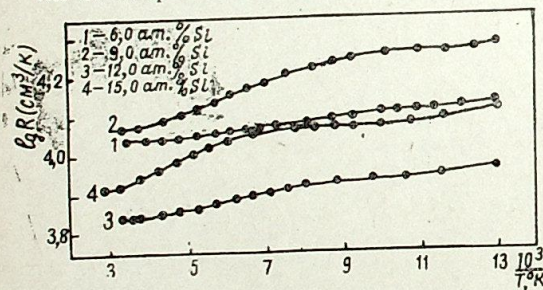


Рис. 1. Температурная зависимость коэффициента Холла (*R*) для различных составов сплава германий—кремний, легированных кадмием.

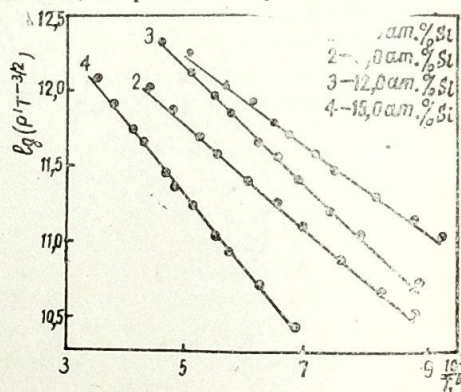


Рис. 2. Зависимость $\lg(P'T^{3/2})$ от $\frac{1000}{T}$ для различных составов сплава германий—кремний, легированных кадмием.

На рис. 1 показана температурная зависимость коэффициента Холла (*R*) для различных составов сплава. Такая зависимость объясняется тем, что в кристаллах, кроме кадмия, имеются еще и мелкие

акцепторы. Как следует из предыдущих экспериментов [12], мелкие акцепторы, количество которых неконтролируемо, во всем исследованном температурном интервале полностью ионизированы. Это обуславливает низкотемпературное плато кривых на рис. 1. Высокотемпературное плато соответствует полной ионизации первого акцепторного состояния примеси кадмия.

Для определения глубины залегания кадмия рассмотрим уравнение нейтральности кристалла:

$$P = N_a + (N - n). \quad (1)$$

Здесь *P*—концентрация дырок в валентной зоне, *N_a*—концентрация мелких акцепторов, *N*—общая концентрация кадмия, *n*—концентрация нейтральных центров первого акцепторного уровня кадмия. Можно показать [13], что при $N_a + N > P > N_a$ из уравнения (1) следует

$$P' = \frac{P^2 - PN_a}{(N_a + N) - P}, \quad (2)$$

где

$$P' = \frac{1}{\gamma} 2 \left(\frac{2\pi m^* T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\Delta\epsilon}{kT} \right). \quad (3)$$

Здесь *m**—эффективная масса дырок, *T*—абсолютная температура, *h*—постоянная Планка, *k*—постоянная Больцмана, γ —статистический вес первого уровня кадмия, $\Delta\epsilon$ —глубина его залегания.

Сравнение (2) и (3) показывает, что знание *P'* позволяет из наклона зависимости $\lg(P'T^{3/2}) = f\left(\frac{1000}{T}\right)$ определить $\Delta\epsilon$. При этом значения (*N_a* + *N*) и *N_a* вычисляются по высокотемпературному и низкотемпературному насыщениям *R*, соответственно. На рис. 2 представлены зависимости $\lg(P'T^{3/2})$ от $\frac{1000}{T}$ для различных составов сплава, из наклонов которых были определены значения глубин залегания первого акцепторного уровня кадмия.

Рис. 3 демонстрирует изменение глубины залегания $\Delta\epsilon$ с ростом концентрации кремния в сплаве. Аналогичное изменение наблюдалось также для цинка [7] и ртути [8]. Это показывает, что причины, вызывающие изменение в энергетических уровнях примесей Zn, Cd, Hg, одни и те же и не зависят от индивидуальностей указанных примесей.

Остановимся еще на одной детали рис. 1. После низкотемпературного насыщения с уменьшением температуры наблюдается рост коэффициента Холла, который, очевидно, связан с каким-то примесным уровнем. Такой рост наблюдается только в случае легирования материала ртутью и кадмием и, как следует из предыдущих экспериментов, не связан с мелкими акцепторами [8, 13]. Раньше мы предполагали, что такой рост связан с донорным состоянием ртути.

Это предположение находит подтверждение и в случае кадмия. Действительно, каждый атом кадмия, находясь в узле решетки, может принимать один или два электрона. С понижением температуры он воз-

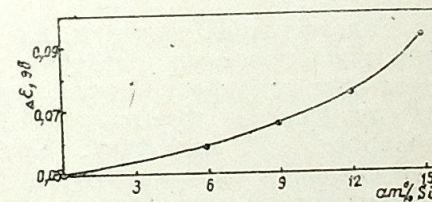


Рис. 3. Изменение глубины залегания ($\Delta\epsilon$) первого акцепторного состояния примеси кадмия в сплавах германий—кремний в зависимости от концентрации кремния

вращает эти электроны в валентную зону. Если при этом в кристалле имеются мелкие акцепторные уровни, находящиеся еще в активированном состоянии, то вследствие того, что уровень Ферми проходит ниже энергетического состояния валентных электронов атомов кадмия, они могут спускаться в пустые места валентной зоны (т. е. рекомбинировать с дырками). Естественно, это будет уменьшать концентрацию дырок и обеспечивать рост коэффициента Холла. Такая картина будет иметь место, если донорный уровень (или уровни) кадмия будет ниже его же первого акцепторного уровня, но выше мелких акцепторных уровней более чем на kT .

ЛИТЕРАТУРА

1. Dunlap W. C. Jr. Phys. Rev., **85**, 945, 1952.
2. Оксман Я. А., Николаев Б. М. "Физ. техн. полупроводников", **2**, 37, 1968.
3. Newman R. and Tyler W. W. Solid State Physics, **8**, 49, 1958.
4. Borrello S. R. Levinstein H. J. app. phys. **33**, 2947, 1962.
5. Schibli E., Milnes A. G., Moter, Sci. Eng., **2**, 173, 1967.
6. Аждаров Г. Х., Тагиров В. И. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1969, № 3.
7. Аждаров Г. Х., Тагиров В. И., Таиров С. И., Шахтактинский М. Г. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1969, № 6.
8. Аждаров Г. Х., Тагиров В. И., Таиров С. И. "Физ. техн. полупроводников", 1970 № 4.
9. Несмеянов Ан. Н. Давление пара химических элементов. Изд-во АН СССР, М., 1961.
10. Косенко В. Е. ФТТ, **1**, 1622, 1959.
11. Таиров С. И., Тагиров В. И., Шахтактинский М. Г., Вигдорович В. И., Кулиев А. А. "ДАН СССР, серия химия", **176**, 851, 1967.
12. Таиров С. И., Тагиров В. И., Алиева Б. С., Кулиев А. А. "Неорганич. материалы", **4**, 496, 1968.
13. Алиева Б. С., Тагиров В. И., Таиров С. И., Шахтактинский М. Г., Кулиев А. А. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1969, № 3.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 30. III 1970

Г. Х. Аждаров, В. И. Тагиров, С. И. Таиров, М. Г. Шахтактинский

**Кадмиум ашгарынын керманиум-силисиум бэрк
мәһлулларында јаратдығы ашгар сәвијјәләринин
тәдгиги**

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатларда кадмиум илә ашгарланмыш керманиум-силисиум бэрк мәһлулларынын електрик хассәләри тәдгиг едилмиш вә һолл әмсалынын температур асылылығы әсасында кадмиумун биринчи аксептор сәвијјәсинин дәринлијинин мәһлулун тәркибиндән асылы олараг дәјишмәси өјрәнилмишдир. Көстәрилмишдир ки, кадмиум керманиум-силисиум бэрк мәһлулунда өзүнүн биринчи аксептор сәвијјәсиндән ашағыда јерләшән донор сәвијјәси дә јарадыр.

УДК 535.373.4

А. Х. ХАЛИЛОВ, Ф. Г. АЛИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРИМЕСЕЙ НА ТЕРМИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ АКТИВАТОРНЫХ ЦЕНТРОВ ОКРАСКИ В ФОСФОРАХ NaCl + Ag, ОБЛУЧЕННЫХ УСКОРЕННЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Полосы поглощения и свечения активаторных центров окраски NaCl + Ag, в состав которых, кроме элементарных дефектов решетки, входят также ионы активатора (Ag^+), изучены в работах [1—10].

Настоящая статья посвящена исследованию влияния примесей на термическое разрушение и взаимное преобразование указанных центров окраски в облученных электронным пучком фосфорах NaCl + Ag. Монокристаллы NaCl + Ag (0,1), содержащие двухвалентные катионы Ca^{2+} и Cd^{2+} и не содержащие указанных примесей с концентрацией, ионов Ag^+ 0,025; 0,1; 1 и 3 моль % и ионов Ca и Cd 0,01 моль % были выращены в водных и тех же условиях методом Киропулоса с вращающимся холодильником. Спектры возбужденного поглощения указанных образцов изучались на приборе СФ-4. Облучение монокристаллов электронным пучком производилось на линейном электронном ускорителе с энергией пучка 3 Мев при токе 75 ма.

Для выяснения детального механизма термического разрушения и преобразования одних активаторных центров окраски в другие нами изучались спектры возбужденного поглощения фосфоров NaCl + Ag через 6 часов и через 6 месяцев после облучения их электронным пучком, а также, после нагрева облученных фосфоров в течение 30 минут при 80 и 150° С. Для нагрева облученных электронным пучком образцов использовались трубчатые печи, нагретые до определенной стабильной температуры.

Результаты исследования вышеуказанных монокристаллов представлены на рис. 1 (а, б) и 2 (а, б). Как видно из сравнения кривых 1 с кривыми 2 и 3 на рис. 1 (а, б), нагрев облученных электронным пучком фосфоров NaCl + Ag до 80° С и хранение облученных монокристаллов в темноте в продолжение 6 месяцев при малых концентрациях ионов Ag^+ (0,025 %) в решетке NaCl не приводит к разрушению В-центров окраски ($\lambda_m = 275 \text{ нм}$), в то время как при больших концентрациях ионов Ag^+ (1 моль %) указанные центры частично разрушаются, а при концентрациях их 3 моль % после указанных операций В-центры разрушаются полностью. Эти факты свидетельствуют об уменьшении термической стабильности В-центров окраски с ростом концентрации ионов Ag^+ .

Далее из сравнения вышеуказанных кривых на рис. 1 (а, б) видно, что если при малых концентрациях ионов Ag^+ (0,025 моль %) хранения в темноте в течение 6 месяцев или нагрев до 80°C облученных электронным пучком монокристаллов $\text{NaCl} + \text{Ag}$ не приводят к росту числа C -центров окраски ($\lambda_m = 302 \text{ нм}$) и D_1 -центров ($\lambda_m = 330 \text{ нм}$), то с ростом концентрации ионов Ag^+ до 3 моль % после указанных воздействий число этих центров возрастает. Число последних значительно увеличивается при частичном разрушении B -центров окраски, которое происходит при больших концентрациях ионов Ag^+ . Эти факты указывают на то, что если при малых концентрациях Ag^+ термически наиболее устойчивыми являются B -центры окраски, то при больших концентрациях этих ионов более устойчивыми становятся C -и D_1 -центры.

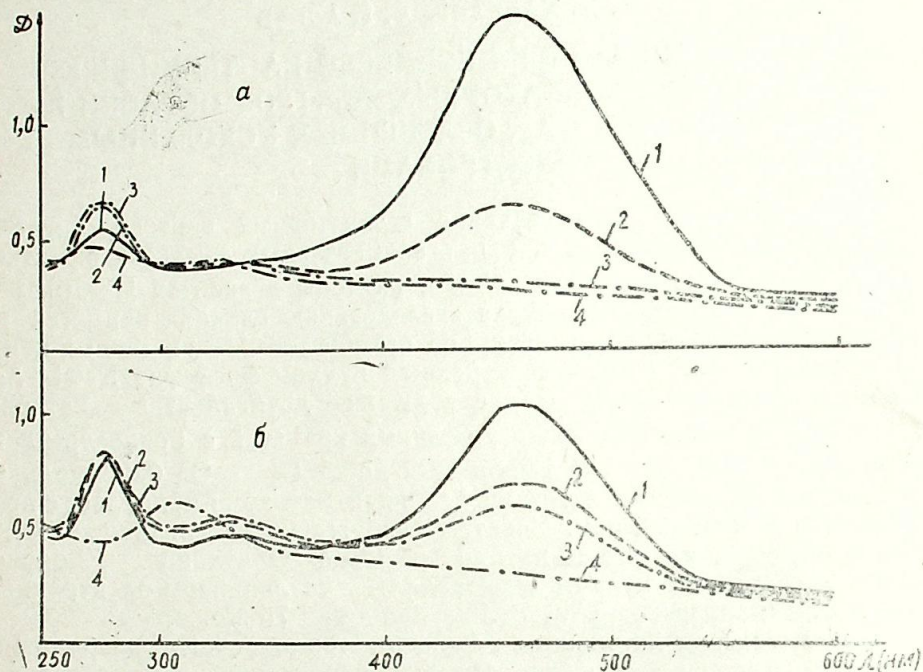


Рис. 1. Спектры возбужденного поглощения монокристаллов: а) $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,025); б) $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1), измеренных через 6 часов и через 6 месяцев после облучения монокристаллов электронным пучком (1 и 2); 3 и 4 — после нагрева до 80 и 150°C облученных электронным пучком кристаллов.

Наиболее значительные изменения в спектрах возбужденного поглощения фосфоров в $\text{NaCl} + \text{Ag}$ происходят после их нагрева до 150°C (сравните кривые 4 с кривыми 1 на рис. 1, а и б), при котором для всех исследованных нами концентраций Ag^+ наблюдается полное разрушение B -центров окраски и наибольшее возрастание интенсивности C -полос поглощения. D_1 -полосы поглощения при этом только частично разрушаются, хотя при концентрации Ag^+ 3 моль % они такие же интенсивные, как C -полосы поглощения. Таким образом, нагрев до 150°C вызывает сильное преобразование одних центров окраски (B -центров) в другие, термически более устойчивые C -центры окраски.

Результаты исследования влияния двухвалентных неактивирующих примесей на процесс термического разрушения B -, C - и D -центров окраски представлены на рис. 2, а, б (кривые 1, 2, 3 и 4). Как

видно из сравнения кривых 1, 2, 3, 4 на рис. 2 (а, б) и рис. 1 (а, б), при наличии в решетке $\text{NaCl} + \text{Ag}$ катионов Ca^{2+} и Cd^{2+} термическое разрушение C -и D -центров окраски существенно отличается от разрушения их в фосфорах, не содержащих указанных примесей.

Сравнение кривых 2 и 3 на рис. 1, а и 2 а показывает, что наличие в решетке $\text{NaCl} + \text{Ag}$ катионов Ca^{2+} очень сильно увеличивает термическую устойчивость C -и D -центров окраски, хотя указанное свойство B -центров почти не испытывает изменения в присутствии ионов Ca^{2+} .

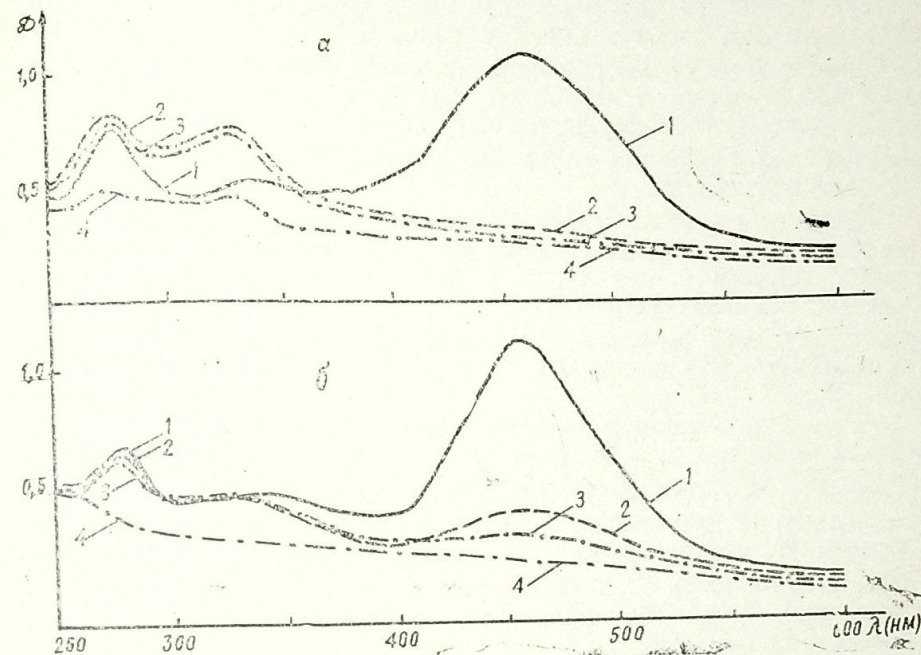


Рис. 2. Спектры возбужденного поглощения монокристаллов: а) $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1) + Ca (0,01); б) $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1) + Cd (0,01), измеренных через 6 часов и 6 месяцев после облучения монокристаллов электронным пучком (1 и 2); 3 и 4 — после нагрева до 80 и 150°C облученных электронным пучком монокристаллов.

Действительно, как видно из этого сравнения, если нагрев облученных электронным пучком фосфоров $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1) до 80°C приводит к небольшому ослаблению поглощения в области C -и D -полос, то после такого же нагрева фосфора $\text{NaCl} + \text{Ag}$, Ca поглощение в области этих полос не только не уменьшается, но очень сильно возрастает. Аналогичное усиление C -и D -полос поглощения наблюдается также после 6-ти месячного хранения в темноте облученных электронным пучком фосфоров $\text{NaCl} + \text{Ag}$, Ca . Эти результаты свидетельствуют о том, что в присутствии ионов Ca^{2+} в фосфорах $\text{NaCl} + \text{Ag}$ растет эффективность образования C -и D -центров окраски (даже при $+80^\circ\text{C}$) за счет освобождения электронов из центров окраски решетки основания и локализации их на активаторных центрах захвата.

Сравнение кривых 4 на указанных рисунках показывает, что даже нагрев облученного электронным пучком фосфора $\text{NaCl} + \text{Ag}$, Ca до 150°C не вызывает значительного уменьшения интенсивности C -и D -полос поглощения, которые в аналогичных условиях после нагрева до 150°C фосфора $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1) очень сильно ослабляются.

Следует отметить, что поведение *B*-полосы поглощения у фосфоров $\text{NaCl}+\text{Ag}$ с примесями Ca и без этих примесей существенно не отличается, т. е. при 150°C мы наблюдали почти полный распад указанных центров окраски в обоих фосфорах. На рис. 2, б представлены результаты исследования $\text{NaCl}+\text{Ag}$, Cd . Как видно из сравнения кривых 2, 3, 4 на рис. 1 (а) и 2(а, б), несмотря на одинаковую валентность катионов Ca^{2+} и Cd^{2+} , ионы Cd^{2+} оказывают иное влияние на эффективность образования и на процесс термического разрушения *C*- и *D*-центров окраски.

Так, сравнение кривых 2 и 3 с кривыми 1 на указанных рисунках показывает, что в отличие от ионов Ca^{2+} в присутствии ионов Cd^{2+} число *C*- и *D*-центров окраски очень мало растёт после нагрева до 80°C или после 6-месячного хранения в темноте облученных электронным пучком фосфоров $\text{NaCl}+\text{Ag}$, Cd , что свидетельствует о незначительном влиянии ионов Cd^{2+} на эффективность образования *C*- и *D*-центров окраски.

Кроме этого, в присутствии ионов Cd^{2+} после нагрева до 150°C облученных электронным пучком фосфоров $\text{NaCl}+\text{Ag}$, Cd происходит полное разрушение всех *B*-, *C*- и *D*-центров окраски, которые при указанной температуре в $\text{NaCl}+\text{Ag}$ (0,1) и $\text{NaCl}+\text{Ag}$, Ca разрушаются неполностью. Эти результаты показывают, что ионы Cd^{2+} уменьшают термическую стабильность *B*-, *C*- и *D*-центров окраски в фосфорах $\text{NaCl}+\text{Ag}$.

Однако, как следует из сравнения интенсивностей *F*-полос поглощения (кривые 1, 2, 3, 4 на рис. 1, а и 2, а и б), влияние ионов Ca^{2+} и Cd^{2+} на термическую стабильность *B*-, *C*- и *D*-центров окраски и *F*-центров противоположно направлено: если ионы Ca^{2+} сильно ослабляют термическую стабильность *F*-центров окраски и увеличивают стабильность *C*- и *D*-центров, то ионы Cd^{2+} , сильно уменьшая стабильность *C*- и *D*-центров, почти не влияют на указанное свойство *F*-центров окраски.

Таким образом, исследование влияния неактивирующих двухвалентных примесей на термическое разрушение активаторных центров окраски и на центры окраски чистой решетки позволяет выявить характерные различия взаимного влияния примесных дефектов при наличии в решетке различных концентраций активирующих примесных ионов и определенной концентрации чужеродных ионов с одинаковой валентностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Парфианович И. А., Шуралева Е. Н., Ивахненко П. С. и Бабин П. А. „Изв. АН СССР“, т. 29, 1965, № 3.
2. Парфианович И. А., Пензина Э. Э., Пензин Ю. Г. „Изв. АН СССР“ т. 29, 1965, № 3.
3. Кац М. Л. „ДАН СССР“, 85, 539, 1952.
4. Etsel und Schulman. J. Chem Phys., 22, 1549, 1954.
5. Кац М. Л. Люминесценция и электронно-дырочные процессы в фотохимически окрашенных кристаллах щелочно-галогидных соединений. Саратов, 1961.
6. Гиндина Р. И., Лушник Ч. Б. Тр. ИФА АН ЭССР, № 15, 1961.
7. Золотарев Г. К. Тр. ИФА АН ЭССР, 26, 1964.
8. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1963, № 6.
9. Халилов А. Х., Мамедов А. П. „Изв. АН. Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1963, № 5.
10. Халилов А. Х. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“ 1964, № 1, 2, 3, 5.

Институт физики АН Азерб. ССР

Э. Х. Халилов, Ф. Г. Элиев

Электрон дэстәси илә шүалындрылмыш $\text{NaCl}+\text{Ag}$ фосфорларында активатор рәнк мәркәзләринин термик дағылмасына ашгарларын тәсирийн тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $\text{NaCl}+\text{Ag}$ гәфәсини электрон дэстәси илә һәјәчанландырдыгдан сонра әмәлә кәлән активатор рәнк мәркәзләринин термик дағылмасынын тәдгиги нәтичәләри шәрһ едилмишдир.

Ч. Г. АГАЕВ, С. Г. АХМЕДОВ, М. А. БАГИРОВ, В. П. МАЛИН

ИЗМЕНЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРО- ТЕХНИЧЕСКОГО СТЕКЛОТЕКСТОЛИТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАЗРЯДОВ В ВОЗДУХЕ

Электротехнический стеклотекстолит применяется в изоляции электрических машин и аппаратов. В процессе эксплуатации электротехнических установок высокого напряжения детали из стеклотекстолита подвергаются действию электрических разрядов, возникающих в воздушных включениях и полостях изоляции, что может привести к изменению ее диэлектрических свойств и в конечном счете к пробою. Поэтому исследование изменений диэлектрических свойств стеклотекстолита под действием разрядов представляет научный и практический интерес. Следует также отметить, что такого характера исследование совершенно не описано в литературе.

В данной статье приводятся результаты исследования изменений диэлектрических характеристик: тангенса угла диэлектрических потерь ($\operatorname{tg} \delta$), диэлектрической проницаемости (ϵ), удельного объемного сопротивления (ρ_v) электротехнического стеклотекстолита марки СТЭФ-1 под действием электрических разрядов в воздухе.

Образцы СТЭФ-1 были изготовлены из стеклоткани марки „Э“ пропитанной эпоксидно-фенольным лаком „ЭИФ“, состоящим из эпоксидной смолы с добавлением для придания большей твердости фенолформальдегидной. Содержание смолы в образцах составляло 35 %. Толщина исследуемых образцов достигала 0,3 мм. Их подвергали действию электрических разрядов в специальной испытательной ячейке, состоящей из металлического заземляемого электрода, на который укладывали исследуемый образец, воздушного зазора и стеклянной пластины. Толщина воздушного зазора была равна толщине стеклянной пластины и составляла 1,5 мм. К внешней металлизированной поверхности стеклянной пластины подавали напряжение от высоковольтного трансформатора.

За характеристику воздействия разрядов нами было принято напряжение, приложенное к испытательной ячейке, поскольку, зная его и параметры ячейки, можно приблизительно оценить мощность и число разрядов, возникающих в ячейке [1]. В последующем для краткости используется термин „напряжение старения“ (U_{cm}).

Измерения $\operatorname{tg} \delta$ и емкости производили с помощью моста МЛЕ-1 в интервале 20–200° С и в диапазоне частот 0,4–10 кГц. Погрешность при измерении $\operatorname{tg} \delta$ составляла 2 % от измеряемых значений $\operatorname{tg} \delta$, а при измерении ϵ она не превышала 4 %. В качестве измерительных

электродов использовали станиолевую фольгу диаметром 5 см, которую притирали к образцу вазелиновой пастой. Сопротивление образцов измеряли тераомметром Е-6-3, используя латунные электроды с охранным кольцом. Толщину образцов определяли с помощью толщиномера ИЗВ-2.

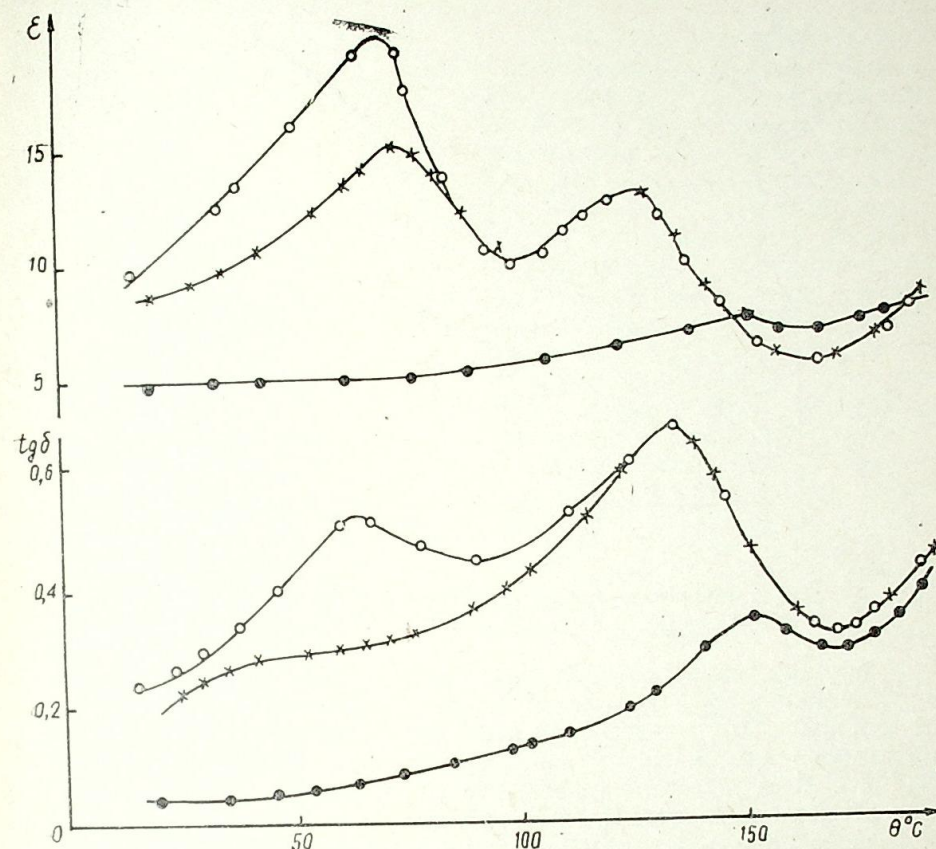


Рис. 1. Температурная зависимость $\operatorname{tg} \delta$ и ϵ СТЭФ-1 при $f = 10$ кГц:
— исходный образец, о, х — образец после действия электрических разрядов в воздухе при $U_{ст} = 9$ кВ, $t = 30$ часов; х — образец, прогретый после действия разрядов до 180°С.

На рис. 1 представлены температурные зависимости $\operatorname{tg} \delta$ и ϵ как для исходного образца, так и для подвергнувшегося действию электрических разрядов. В температурной зависимости $\operatorname{tg} \delta$ исходного образца в интервале 130–170° С наблюдается область потерь (рис. 1), обладающая релаксационным характером, поскольку и диэлектрическая проницаемость в этом интервале температур претерпевает дисперсию.

Вероятно, эта область потерь обусловлена эпоксидной смолой, входящей в состав СТЭФ-1, так как в исследованном нами интервале с повышением температуры $\operatorname{tg} \delta$ и ϵ стекла монотонно возрастают [2].

Воздействие электрических разрядов в воздухе радикально изменяет вид температурных зависимостей $\operatorname{tg} \delta$ и ϵ . Наряду с общим значительным увеличением $\operatorname{tg} \delta$ в его температурной зависимости появляется новая область потерь в интервале 20–90° С. Имеющаяся у исходного образца область при 130–160° С смещается в сторону более низких температур и величина $\operatorname{tg} \delta$ в максимуме этой области существенно возрастает.

Диэлектрическая проницаемость СТЭФ-1 после действия разрядов также увеличивается и в интервале температур, соответствующем новой области потерь, обладает дисперсией. Последнее может означать, что появляющаяся после действия разрядов новая область потерь также имеет релаксационный характер.

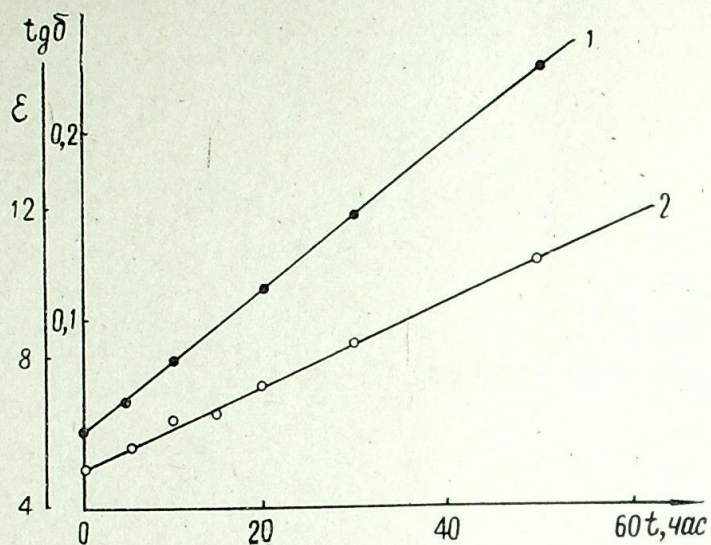


Рис. 2. Изменение $\text{tg}\delta$ и ϵ СТЭФ-1 со временем действия разрядов при $U_{\text{ст}} = 9 \text{ кВ}$, $f = 10 \text{ кГц}$, $\theta = 20^\circ \text{С}$, 1— $\text{tg}\delta$, 2— ϵ .

У образца, подвергнутого действию разрядов, после прогрева до 200°С величина $\text{tg}\delta$ в максимуме новой области потерь и ϵ в соответствующей области дисперсии заметно уменьшаются. Вместо резко выраженного максимума $\text{tg}\delta$ наблюдается лишь перегиб кривой $\text{tg}\delta = \varphi(\theta^\circ \text{С})$. Можно предположить, что новая область потерь, как и новая область дисперсии ϵ , обусловлена появлением в образце после действия разрядов новых химических групп и соединений, обладающих меньшей, чем у эпоксидной смолы, температурой плавления (разрушения). Во время прогрева до 200°С значительная часть этих соединений разрушается, что приводит к уменьшению величины $\text{tg}\delta$ в максимуме соответствующей области потерь и к понижению ϵ в новой области ее дисперсии.

Прогрев до 200°С не влияет на величину и положение старой области потерь (той области, которая имеется и у исходного образца). Сдвиг ее после воздействия электрических разрядов в воздухе в сторону более низких температур можно объяснить, предположив, что в эпоксидной смоле, являющейся полимером, под действием разрядов происходят те же процессы, что и в высокомолекулярных материалах.

В работах [3—5] было показано, что под действием разрядов в высокополимерных материалах (полиэтилен, полистирол и т. п.) происходят процессы сшивки и деструкции полимерных макромолекул, которые приводят к сдвигу областей дипольно-сегментальных потерь (ДСП) в температурно-частотных зависимостях $\text{tg}\delta$. Если в полимере под действием разрядов преобладает сшивка полимерных цепей, как в полистироле, то максимум ДСП сдвигается в сторону более высоких температур вследствие затруднения движения кинетических сегментов макромолекулы [4]. Если же преобладает процесс деструкции, то в результате уменьшения внутри- и межмолекулярного

взаимодействия максимум ДСП перемещается к более низким температурам, например, у политетрафторэтилена [5]. Очевидно, у эпоксидной смолы доминирующим процессом, вызванным действием электрических разрядов, является деструкция полимерных цепей, приводящая к сдвигу области потерь в сторону более низких температур.

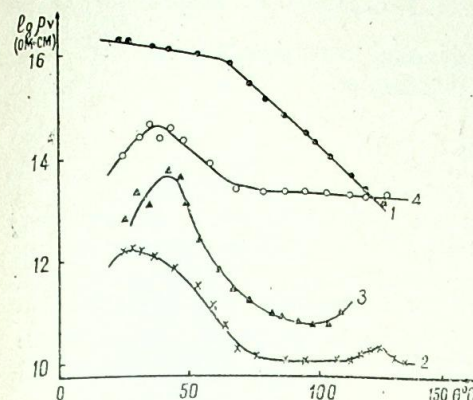


Рис. 3. Зависимость $\lg \rho_v$ СТЭФ-1 от температуры:

1—исходный образец; 2, 3, 4,—после действия разрядов в воздухе при $U_{\text{ст}} = 9 \text{ кВ}$; время действия разрядов: 2—10, 3—30 и 4—50 часов.

которой он практически не изменяется с дальнейшим ее повышением.

Следует также отметить, что хотя ρ_v образца, подвергнутого действию разрядов, всегда меньше ρ_v исходного образца, однако после некоторого времени действия разрядов (при наших условиях испытаний после 15 часов) наблюдается увеличение ρ_v во всей области температур. Так, например, кривая $\lg \rho_v = \varphi(\theta^\circ \text{С})$ для образца, подвергнутого действию разрядов в течение 30 часов, лежит выше аналогичной кривой для образца, выдержанного под разрядами в течение 10 часов, и т. д. (рис. 3).

Таким образом, действие электрических разрядов на СТЭФ-1 существенно изменяет не только величины его диэлектрических характеристик, но и характер их температурных зависимостей.

Выводы

1. Под действием электрических разрядов в воздухе тангенс угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta$ и диэлектрическая проницаемость ϵ электротехнического стеклотекстолита СТЭФ-1 возрастают, а удельное объемное сопротивление ρ_v уменьшается.
2. Электрические разряды в воздухе изменяют характер температурных зависимостей $\text{tg}\delta$, ϵ , ρ_v , что указывает на структурные изменения, происходящие в СТЭФ-1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Койков С. Н. „Вопросы радиоэлектроники“, сер. III, 1966.
2. Беркс Дж. и Шультман Дж. Г. Прогресс в области диэлектриков, т. II. Госэнергоиздат, 1963.
3. Койков С. Н., Парибок В. А., Цикин А. Н. Сб. „Пробой диэлектриков и полупроводников“. Изд-во „Энергия“, 1964.

4. Abasov S. A., Bagirov M. A., U. A. Plaste und Kautschuk, 15, № 3, 184, 1968.
5. Колесов С. Н. „Пластмассы“, № 1, 50, 1966.
6. Warfield R. W., Petree M. C. Nature 187, № 4734, 1960.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 30. III 1970

Ч. Г. Агајев, С. Г. Әнмәдов, М. А. Бағыров, В. П. Малин

Електротехники шүшә-текстолит материалынын диелектрик хассәләри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә һавада електрик бошалмаларынын тә'сириндән СТЕФ-1 маркалы електротехники шүшә текстолит материалынын диелектрик итки әмсалынын ($\text{tg } \delta$), диелектрик сабити (ϵ) вә хусуси һәчми мугавимәтинин (ρ_v) температурдән асылылығы көстәрилмишдир. Мүәјјән едилмишдир ки, бу заман $\text{tg } \delta$ вә ϵ артыр, ρ_v исә азалыр. Мәгаләдә, һәмчинин електрик бошалмаларынын тә'сириндән шүшә-текстолит материалын диелектрик характеристикаларынын дәјишмәсинин изаһы верилмишдир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмләри сәријасы, 1970, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 6

УДК 535.33/34:539.19

Л. М. ИМАНОВ, А. А. АБДУРАХМАНОВ, Р. А. РАГИМОВА, Э. И. ВЕЛИЮЛИН

ДЕФОРМАЦИЯ СТРУКТУРЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗОМЕРНЫХ ФОРМ В НЕКОТОРЫХ ПРОПАНО-И ПРОПЕНОЗАМЕЩЕННЫХ

Микроволновыми исследованиями молекул фтористого пропила [1], хлористого пропила [2], *n*-пропилового спирта [3], 3-фторпропена [4] установлено существование в них двух поворотных изомеров. Измерения относительных интенсивностей спектральных линий изомеров показали, что в первых трех молекулах более устойчивой является свернутая *гош*-конфигурация, а в молекуле 3-фторпропена — *цис*-конфигурация, при которой связи $\text{C}-\text{F}$ и $\text{C}=\text{C}$ затеяют друг друга (рис. а, б).

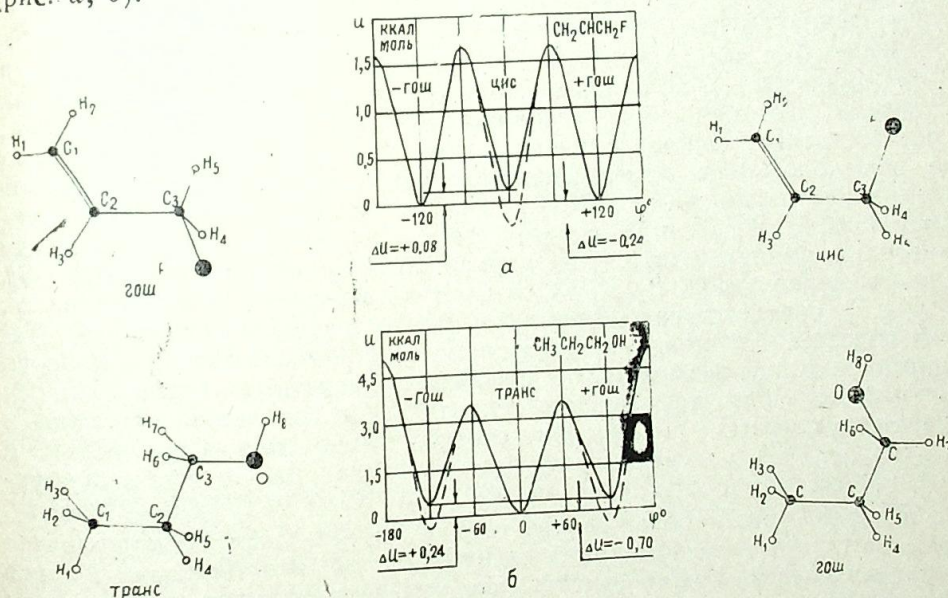


Рис. а) молекула 3-фторпропена и потенциальная кривая кручения группы CH_2F .
б) молекула *n*-пропанола и потенциальная кривая кручения группы CH_2OH :
(—) без учета деформаций структуры;
(---) с учетом деформаций структуры.

Для того чтобы рассмотреть влияние деформации структуры на устойчивость изомерных форм, нами произведен расчет потенциалов конформаций указанных молекул по полуэмпирическому методу [5].

Потенциал имеет вид

$$U_{\varphi} = \frac{U_0}{2}(1 + \cos 3\varphi) + \sum_{k=1}^m \left[a_k \exp(-b_k r_k) - \frac{c_k}{r_k^6} + \frac{d_k}{r_k} \right] + \sum_i \kappa_i (\theta_i - \theta_0)^2,$$

где первый член описывает отталкивательное взаимодействие смежных связей, второй — Ван-дер-Ваальсовские и диполь-дипольные взаимодействия несвязанных атомов и третий — энергетический вклад деформации валентных углов. Параметры U_0 , a_k , b_k , c_k и d_k получены полумпирическими методами по инфракрасным, микроволновым, кристаллографическим и термодинамическим данным [5].

Выражение, характеризующее вклад в потенциал деформации валентных углов $\sum_i \kappa_i (\theta_i - \theta_0)^2$, где θ_i и θ_0 — значения деформированного и нормального углов соответственно, не может быть непосредственно использовано при расчетах потенциалов, поскольку отсутствие достаточного количества экспериментальных данных по деформации структуры не позволяет получить значения параметров κ_i . Кроме того, трудно судить об углах θ_i при различных положениях группы вращения.

Расчеты, основанные только на двух первых членах потенциала, хотя и правильно указали на большую вероятность экспериментально найденных изомеров, однако не подтвердили превалирующей устойчивости гош-изомера молекул $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{F}$, $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{Cl}$, $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$ и цис-изомера молекулы $\text{CH}_2\text{CHCH}_2\text{F}$. Учет деформации структуры возможен в расчетах потенциалов тех молекул, для которых экспериментально получена структура изомеров в отдельности.

Надежные экспериментальные значения структурных параметров 3-фторпропена [4], полученные по вращательным постоянным восьми и девяти изотопических разновидностей для цис- и гош-изомеров, соответственно, свидетельствуют о том, что при переходе молекулы из гош-положения в цис- значительную деформацию претерпевают следующие параметры: $\angle \text{CSH}_3$, $\angle \text{CSH}_4$, $\angle \text{CCC}$ и $\angle \text{CCF}$ увеличиваются на 6° , 4° , 3° и 1° соответственно (рис. а). В этом свете заслуживает внимания и молекула нормального пропилового спирта [3], для которой углы $\text{CSH}_{2,3}$, CSO и COH в гош-форме оказались на 2° , 1° и $0,5^\circ$ соответственно большими, чем в транс-форме (рис. б). Таким образом, для молекул 3-фторпропена и нормального пропилового спирта имеется возможность сравнения расчетных потенциальных кривых без учета деформации структуры (с использованием гош- и транс-структурных параметров соответственно для $\text{CH}_2\text{CHCH}_2\text{F}$ и $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$) и с учетом ее (с использованием цис- и гош-структурных параметров соответственно для $\text{CH}_2\text{CHCH}_2\text{F}$ и $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$).

Полагая, что небольшие искажения структурных параметров не изменяют энергии обменных взаимодействий электронных облаков смежных связей, можно считать, что изменение энергии конформаций при деформации структуры связано в основном с изменением стерических взаимодействий, которые критичны к изменению расстояний между свободно взаимодействующими атомами.

Анализ вращения группы CH_2F в молекуле $\text{CH}_2\text{CHCH}_2\text{F}$ показал, что при расчетах с недеформированной гош-структурой более устойчивой оказывается гош-форма ($\Delta U = U_{\text{цис}} - U_{\text{гош}} = +80$ кал/моль); расчет энергии по деформированной цис-структуре привел к большей устойчивости цис-формы ($\Delta U = U_{\text{цис}} - U_{\text{гош}} = -245$ кал/моль) (рис. а).

Последний результат согласуется с экспериментальными данными Хирота: $\Delta U = U_{\text{цис}} - U_{\text{гош}} = -166 \pm 67$ кал/моль [4]. Понижение энергии цис-формы при учете деформации структуры связано в основном с уменьшением результирующего потенциала свободных взаимодействий атомов $\text{F} \dots \text{C}_2$, $\text{H}_4 \dots \text{C}_2$, $\text{H}_5 \dots \text{C}_2$, $\text{F} \dots \text{H}_4$ и $\text{F} \dots \text{H}_5$ (рис. а), поскольку при сравнительно небольших расстояниях между ними (порядка 2 Å и ниже) даже незначительное изменение последних заметно сказывается на значении потенциала.

Качественно аналогичные результаты получены и для молекулы нормального пропилового спирта. Сравнение потенциальных кривых вращения группы CH_2OH (рис. б), полученных без учета деформации валентных углов в гош-форме (сплошная линия) и с учетом таковых (пунктирная линия), показывает, что учет деформации в гош-форме приводит к большей стабильности гош-изомера по сравнению с транс-примерно на 100 кал/моль, что находится в согласии с экспериментальным результатом работы [6]: $\Delta U = U_{\text{гош}} - U_{\text{транс}} = -290 \pm 150$ кал/моль. К стабилизации гош-формы *n*-пропанола при учете деформаций приводит уменьшение потенциала свободных взаимодействий атомов $\text{O} \dots \text{C}_2$, $\text{H}_6 \dots \text{C}_2$, $\text{H}_7 \dots \text{C}_2$, $\text{O} \dots \text{C}_1$, $\text{H}_6 \dots \text{C}_1$ и $\text{H}_7 \dots \text{C}_1$ (рис. б). Примечательно, что как в 3-фторпропене, так и в *n*-пропанолу учет деформации структуры понизил энергию деформированных изомерных форм примерно на одинаковую величину — около 0,33 ккал/моль.

Изучение взаимосвязи между стабильностью конформаций и деформациями структурных параметров возможно на основе обширного экспериментального материала, однако, базируясь на результатах настоящей работы, можно предполагать, что в молекулах типа $\text{CH}_2 = \text{CHCH}_2\text{X}$ и $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{X}$ структура более устойчивой изомерной формы должна быть деформирована. Исследования большого числа изотопических разновидностей такого типа молекул и определение их точных структурных параметров дадут возможность проверить это предположение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Higota E. J. Chem. Phys., 37, 283 (1962).
2. Sarachman T. N. J. chem. phys., 39, 469 (1963).
3. Иманов Л. М., Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А. „Оптика и спектроскопия“, 22, 840 (1967).
4. Higota E. J. Chem. Phys., 42, 2070 (1965).
5. Scott R. A., Scheraga H. A. J. Chem. Phys., 42, 2209 (1965).
6. Рагимова Р. А. Канд. дисс. ИФАН Азерб. ССР, 1967.
7. Абдурахманов А. А., Велиюлин Э. И. „Изв. АН Азерб. ССР“ (в печати).
8. Абдурахманов А. А., Велиюлин Э. И., Иманов Л. М. „Ж. структурной химии“ (в печати).

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 12. V 1970

Л. М. Иманов, А. А. Абдурахманов, Р. Э. Рагимова, Е. И. Велиюлин

Пропан в пропенин бэ'зи төрэмэлэриндэ изомер формаларынын да'яныглыгы вэ гурулуш параметрлэринин деформасијасы

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә пропан вэ пропенин бэ'зи төрэмэлэриндэ гурулуш параметрлэринин деформасијасы илә изомер формаларынын да'яныглыгы арасындакы гаршылыглы әлағә бахылмышдыр. Бу мәгсәдлә 3-фторпропен вэ *n*-пропанол молекулларынын дахили фырланмасынын потенциалынын һесаблинамасындан алынған нәтичәләр тәчрүби мәлуматларла мугајисә едилмишдыр.

Э. Р. ГАСАНОВ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТОКА ПРИ ПАДАЮЩЕЙ ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

1. Известно, что диффузия и рекомбинация носителей могут изменить условия неустойчивости при отрицательной дифференциальной электропроводности; величины, характеризующие эти изменения, имеют порядок $D\kappa^2\tau$, где D —коэффициент диффузии, τ —время

жизни, а κ —волновой вектор возникающих колебаний, определяемый обычным размером кристалла. Возникает вопрос, могут ли сами по себе конечные размеры кристалла и наличие других характеристик времени так же изменить условие неустойчивости или его характер (апериодическое и колебательное).

2. Рассмотрим кристалл типа GaAs, в котором нижние и верхние долины характеризуются концентрациями электронов n_1 , n_2 и их подвижностями μ_1 , μ_2 , кроме того, в кристалле имеются дырки с концентрацией n_+ и подвижностью μ_+ . Мы пренебрегаем диффузией и рекомбинацией, но учитываем переходы электронов между верхней и нижней долинами так, чтобы уравнения неразрывности имели вид (штрих обозначает колебательные величины, пропорциональные $e^{i(\kappa x - \omega t)}$);

$$\begin{aligned} -e \frac{\partial n_1'}{\partial t} + \frac{\partial j_1'}{\partial x} &= \frac{n_1'(T_e) - n_1'}{\tau_{12}} - \frac{n_2'(T_e) - n_2'}{\tau_{21}}, \\ -e \frac{\partial n_2'}{\partial t} + \frac{\partial j_2'}{\partial x} &= \frac{n_2'(T_e) - n_2'}{\tau_{21}} - \frac{n_1'(T_e) - n_1'}{\tau_{12}}, \\ e \frac{\partial n_+'}{\partial t} + \frac{\partial j_+'}{\partial x} &= 0; \quad \frac{\partial E'}{\partial x} = \frac{4\pi e}{\epsilon} (n_+' - n_1' - n_2'). \end{aligned} \quad (1)$$

Принимаем, что электроны и дырки имеют эффективную температуру $T_e = T_e^0 + T_e'$, изменяющуюся вместе с колебаниями электрического поля $E = E_0 + E'$ и соответствующими колебаниями равновесных концентраций в обеих долинах, поэтому

$$n_1'(T_e) = -n_2'(T_e) = -\frac{n_1^0 n_2^0}{n} \cdot \frac{\Delta}{T_e^0} \cdot \frac{T_e'}{T_e^0},$$

где Δ —энергетическое расстояние между долинами, $n = n_1^0 + n_2^0$ —полная равновесная концентрация электронов в зоне проводимости. Подставив в (1) выражения линеаризованных величин

$$j_1' = \sigma_1 E' + e \mu_1 E_0 n_1', \quad n_2'(T_e) = \frac{n_1^0 n_2^0}{n} \cdot \frac{\Delta}{T_e^0} \left(\frac{dT_e'}{dn_1} n_1' + \frac{dT_e'}{dn_2} n_2' + \frac{dT_e'}{dn_+} n_+' \right),$$

аналогично и для j_2' , j_+' , получим дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\pi}{\epsilon} \sigma_+ - i\omega + i\kappa \mu_+ E_0 \right) &\left[\left(i\kappa \mu_1 F_0 + i\omega - \frac{1}{\tau_{12}} - \nu_1 - \frac{4\pi\sigma_1}{\epsilon} \right) \left(i\kappa \mu_2 E_0 + \right. \right. \\ &+ i\omega - \frac{4\pi\sigma_1}{\epsilon} - \frac{4\pi\sigma_2}{\epsilon} \left. \right) - \left(\frac{1}{\tau_{21}} - \frac{4\pi\sigma_1}{\epsilon} - \nu_2 \right) \left(i\kappa \mu_1 E_0 + i\omega - \right. \\ &- \frac{4\pi\sigma_1}{\epsilon} - \frac{4\pi\sigma_2}{\epsilon} \left. \right) \left. \right] + \left(\frac{4\pi}{\epsilon} \right)^2 \sigma_+ (\sigma_1 + \sigma_2) \left(i\kappa \mu_1 E_0 + i\omega - \frac{1}{\tau_{12}} - \right. \\ &- \frac{1}{\tau_{21}} - \nu_1 - \nu_2 \left. \right) + \frac{4\pi\sigma_+}{\epsilon} \left(\frac{4\pi\sigma_1}{\epsilon} - \nu_+ \right) (i\kappa \mu_2 E_0 - i\kappa \mu_1 E_0) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь σ —дифференциальная электропроводность, отрицательная для электронов в первой (нижней) долине, положительная для электронов во второй (верхней) долине и для дырок;

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{n_1^0 n_2^0}{n} \cdot \frac{\Delta}{T_e^0} \left(\frac{1}{\tau_{12}} + \frac{1}{\tau_{21}} \right) \frac{dT_e'}{dn_1}; \quad \nu_2 = \frac{n_1 n_2}{n} \cdot \frac{\Delta}{T_e^0} \left(\frac{1}{\tau_{12}} + \frac{1}{\tau_{21}} \right) \frac{dT_e'}{dn_2}; \\ \nu_+ &+ \frac{n_1 n_2}{n} \cdot \frac{\Delta}{T_e^0} \left(\frac{1}{\tau_{12}} + \frac{1}{\tau_{21}} \right) \frac{dT_e'}{dn_+}. \end{aligned}$$

Для кристалла GaAs $\mu_2 = \mu_1/25$, $\mu_+ + 2\mu_2$ [1].

Дисперсионное уравнение (2) мы исследуем в двух предельных случаях.

1) Кристалл не ограничен в направлениях электрического поля, т. е. $\kappa = 0$. В этом случае есть две ветви:

$$\omega_1 = -i \frac{4\pi}{\epsilon} \sigma, \quad \omega_2 = -i \left(\frac{1}{\tau_{12}} + \frac{1}{\tau_{21}} \right) (1 + a);$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_+, \quad a = \frac{n_1 n_2 \Delta}{T_e^0} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{ET}{2s} \cdot (n_1^0 \mu_1 + n_2^0 \mu_2 + n_+^0 \mu_+)^{-1/2} \times \\ &\times \left(\frac{n_1^0}{\mu_1} + \frac{n_2^0}{\mu_2} + \frac{n_+^0}{\mu_+} \right)^{-1/2} [2]. \end{aligned}$$

2) Кристалл ограничен в направлениях электрического поля так, что $\kappa \neq 0$, но зато переходы между долинами отсутствуют: $\frac{1}{\tau_{12}} =$

$\frac{1}{\tau_{21}} = 0$. Тогда дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \omega^3 + \left[\kappa E_0 (\mu_1 + \mu_2 - \mu_+) + i \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \right] \omega^2 + [\kappa^2 E_0^2 (\mu_1 \mu_2 - \mu_1 \mu_+ - \mu_2 \mu_+) + \\ + i \kappa F \frac{4\pi}{\epsilon} (\sigma_2 \mu_1 + \sigma_1 \mu_2 - \sigma \mu_+)] \omega - \kappa^3 E_0^3 \mu_1 \mu_2 \mu_+ - i \kappa^2 \frac{4\pi E^2}{\epsilon} \sigma_1 \mu_2 \mu_+ + \\ + \sigma_2 \mu_1 \mu_2 - \sigma_+ \mu_1 \mu_2 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В пределе малых значений κ , т. е. $\kappa \ll \frac{\sigma}{\mu_1 E}$,

$$\text{Im } \omega = -\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \left[1 + \left(\frac{\mu_+ - \mu_2}{\mu_1} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

В обратном предельном случае при больших κ ,
если

$$\frac{\sigma}{\mu_1 E_0} \ll \kappa \ll \frac{\sigma}{\mu_+ E_0}, \quad \omega = -\kappa \mu_1 E_0 \left(1 - \frac{\mu_2 \mu_+}{\mu_1^2}\right) - i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \left(1 + \frac{4\mu_2 \mu_+}{\mu_1^2}\right); \quad (5)$$

если же

$$\kappa > \frac{\sigma}{\mu_+ E_0}, \quad T_0 \omega = -\kappa \mu_1 E_0 \left[1 + \left(\frac{\mu_+ \mu_2}{\mu_1^2}\right)^{1/2}\right] - i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \left[1 + \left(\frac{\mu_2 + \mu_+}{\mu_1}\right)^2\right]. \quad (6)$$

Таким образом, условия неустойчивости во всех четырех случаях сохраняют вид $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_+) < 0$. Однако неустойчивость имеет в последних двух случаях существенно иной характер, чем в первых двух. А, именно: при $\kappa > \frac{\sigma}{\mu_1 E_0}$ или $L < \frac{\pi E_0}{en}$ (где L — длина образца) неустойчивость из практически аperiodической превращается в колебательную, при которой колебания нарастают медленно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маккамбер О. Д., Чайновес А., „Зарубежная Радиоэлектроника“, 12, 78, 1966.

2. Гуревич Л. Э. и Гасымов Т. М. ФТТ, 9, 106, 1967.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 16. VI 1970

Е. Р. Насанов

Дүшән волтампер характеристикасы олан һалда чэрэјан дајаныгсызлыгына даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә кифајәт гәдәр хырда өлчүлү GaAs типли кристалларда дүшән волтампер характеристикасынын һесабына јаранан чэрэјан дајаныгсызлыгынын тәҗриби аperiodикдән рәгси дајаныгсызлыға кечмәли олдугу көстәрилмишдир. Лакин дајаныгсызлыг шәртинә нә кристалын чэрэјан истигамәтиндәки өлчүсү, нә электронларын енержи минимумлары арасындакы кечид вә нә дә электронларла јанашы, дешикләрин олмасы тәсир көстәрмир.

УДК 681.3

Н. М. Джафарова, С. Р. Мусаев

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАНИЦЫ ПРОФИЛЕЙ НАКЛОННЫХ СКВАЖИН

При проектировании профилей скважины обычно делается ряд допущений: упрощающих решение задачи. Так, в работе П. П. Кулизаде и С. Р. Мусаева [1] рассматривается профиль, состоящий из трех участков, вертикального, участка набора кривизны и стабилизации угла искривления. Представляет интерес найти оптимальный профиль более общего вида, включающий участки набора, стабилизации и спада кривизны. Для решения этой задачи целесообразно выделить область допустимых траекторий бурения.

Пусть требуется пробурить наклонную скважину глубиной OH с отклонением HK (рис. 1).

Назовем траекторию бурения допустимой, если она удовлетворяет некоторым ограничениям, подробно описанным ниже. Все допустимые траектории будут находиться в прямоугольнике $OHKM$ и среди них найдутся две такие — OmK и $OAlK$, что выше OmK и ниже $OAlK$ не будет ни одной допустимой кривой. Варьируя в заданных пределах угол наклона α касательной в различных точках кривой к вертикальной оси, можно переходить от одной допустимой траектории к другой. Среди них оптимальной будет та, бурение по которой потребует минимальных затрат.

Возникает следующая задача теории оптимального управления — задача о минимуме функционала

$$I(\alpha) = \int_0^H F(y, \alpha) dx,$$

где α — управляющий параметр;

y — текущая координата кривой, связанная с α уравнением

$$y' = f(\alpha, y),$$

$$y(0) = 0,$$

$$y(H) = \kappa;$$

F — стоимость бурения,

f — непрерывная, дифференцируемая функция.

Ограничения на y и α задаются.

В работе [2] рассмотрены численные методы решения подобных задач в предположении, что границы области заданы определенным образом. В данном случае нет аналитически заданных границ области, где ищется решение, но их можно построить, используя ограничения на y и α . Тем самым исключается из рассмотрения большое число узлов сетки, накладываемой на область при численном реше-

нии, а это очень важно, так как скважины имеют большие глубины и отклонения. Нижняя граница приближенно определяется в виде ломаной $ОВК$ при помощи угла $ВКН$, который не может быть меньше заданного значения γ . При построении верхней границы встречаются определенные трудности, связанные с вычислениями. Ниже

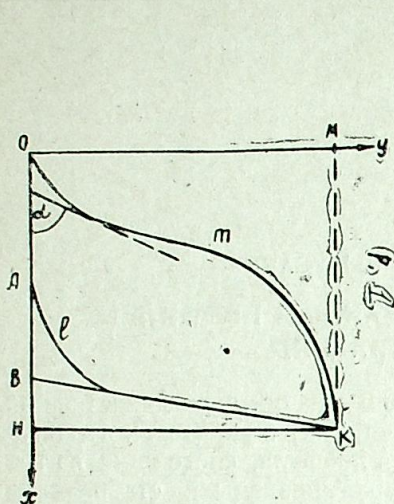


Рис. 1.

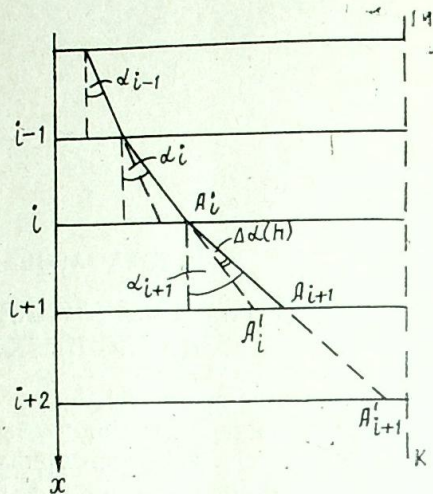


Рис. 2.

описывается алгоритм построения верхней границы. Подробной постановке и анализу численного решения всей задачи будет посвящена отдельная статья.

Алгоритм построения верхней границы

Прямоугольник $ОНKM$ разбивается на полосы шириной Δh линиями, параллельными оси ou . Величина Δh выбирается так, чтобы было практически возможно осуществить отклонение бурильного ствола от вертикали и вычислить координаты верхней границы через заданный интервал. Известно, что максимальное отклонение от вертикали в i -й полосе не может быть больше некоторого угла α_i . На каждой

линии $x_i = i \Delta h$ ($1 \leq i \leq N$, $N = \frac{OH}{\Delta h}$) рассматривается n точек, начиная от точки с координатами $(i \Delta h, y_{i-1} + \Delta h \operatorname{tg} \alpha_{i-1})$, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta \kappa_i$ таким, что

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{n \cdot \Delta \kappa_i}{\Delta h}.$$

Искомая кривая OmK должна удовлетворить следующим требованиям:

- 1) приращение угла набора кривизны на каждой полосе в Δh не должно превышать $\Delta \alpha(h)$;
- 2) угол набора не должен превышать максимально допустимого угла отклонения $\alpha_{\max}$;
- 3) уменьшение угла спада кривизны на каждой полосе в Δh не должно превышать $\Delta \beta(h)$;
- 4) угол спада не должен быть меньше минимально допустимого угла отклонения от вертикали $\beta_{\min}$;

5) если на некотором участке наблюдался спад, то дальше можно двигаться только с тем же или меньшим углом набора, т. е. невозможен набор после спада.

Кривая OmK будет описываться набором y -координат в точках пересечения с прямыми $x_i = i \Delta h$ ($1 \leq i \leq N$, $N = \frac{OH}{\Delta h}$) и углами α_i ,

которые отрезки ломаных, образующие OmT , составляют с вертикалью. В построении границы можно выделить четыре момента: набор (угол отклонения увеличивается), стабилизацию (сохраняется постоянный угол отклонения), спад (угол отклонения уменьшается) и исправление.

I. Набор осуществляется движением вправо по горизонтали с шагом $\Delta \kappa_1$. Пусть требуется построить отрезок, выходящий из точки $A_i(y_i, \alpha_i)$ (рис. 2).

Для этого угол α_i увеличивается на $\Delta \alpha(h)$ и определяется

$$\Delta \kappa_i = \frac{\Delta h (\operatorname{tg} \alpha_{i+1} - \operatorname{tg} \alpha_i)}{n},$$

где n — целое число, подбираемое для каждой конкретной задачи;

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \Delta \alpha(h).$$

Дальше начинается уточнение положения точки A_{i+1} с места A_i при помощи следующих проверок:

1) $\alpha_i - \alpha_{i-1} < 0$?

Если да, то при движении к точке A_i наблюдался бы спад и следовательно, продвижение к точке A_{i+1} с помощью набора невозможно, поэтому надо перейти на пункт III, т. е. к 2);

2) $\alpha_i = \alpha_{i-1}$?

Если да, то на участке, приводящем к A_i , наблюдалась бы стабилизация и поэтому к точке A_{i+1} можно двигаться, продолжая стабилизацию, т. е. перейдя к 3);

3) С этого пункта начинается собственно набор.

Угол α_{i+1} может быть меньше или больше угла $\alpha_{\max}$. Поэтому угол набора будет увеличиваться от значения α_i в соответствии с продвижением вправо по горизонтали на шаги $\Delta \kappa$ до тех пор, пока не будет достигнута величина α_{i+1} или $\alpha_{\max}$.

Итак, следует проверка:

$$\left(\alpha_{\text{текущ}} = \alpha_i + \arctg \frac{y - y_i}{\Delta h} \right) < (\alpha_{i+1} \vee \alpha_{\max})?$$

(здесь $y = y_i + j \Delta \kappa_i$, $j = \overline{1, n}$).

Если да, то перейти на увеличение угла $\alpha_{\text{текущ}}$, т. е. сделать новый шаг вправо на $\Delta \kappa_i$,

иначе — перейти к 4) (максимально возможный угол набран).

4) Не выходит ли точка A'_{i+1} на линии $i+2$ за границу KM , т. е.

$$y'_{i+1} \leq y_K?$$

Если да, то точка $A_{i+1}(y_{i+1}, \alpha_{i+1})$ „хорошая“, удовлетворяет всем условиям, ее координаты запоминаются и следует обращение на продолжение построения границы движением уже от точки A_{i+1} к A_{i+2} ; иначе — следует обращение на пункт III,

II. Стабилизация, т. е. движение с постоянным углом набора кривизны происходит, когда на некотором участке набора достигнут угол $\alpha_{\max}$ и y -координата точки на следующей полосе не превышает заданного отклонения скважины. Обращение на стабилизацию может продолжаться и после работы спада по той же причине. При работе этого блока делается только одна проверка, а именно; стабилизация продол-

жается до тех пор, пока y -координата не будет превышать отклонения. В противном случае следует обращение на пункт III.

III. Спад осуществляется движением влево по горизонтали с шагом Δk . Пусть требуется построить отрезок, выходящий из точки $A_i(\alpha_i, y_i)$ (рис. 3). Для этого угол α_i уменьшается на $\Delta\beta(h)$ и определяется Δk_i . Далее начинается уточнение положения точки A_{i+1} с места A_i при помощи следующих проверок:

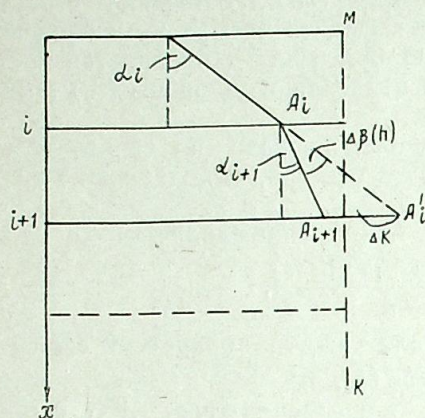


Рис. 3.

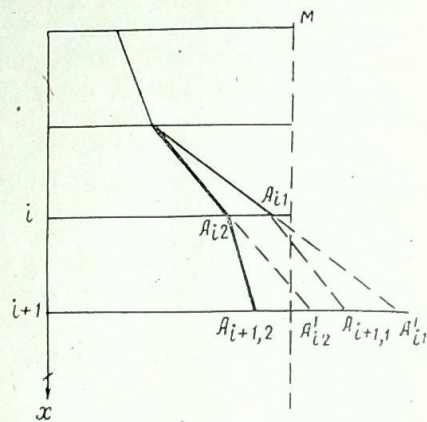


Рис. 4.

1) Угол α_{i+1} может быть меньше или больше угла $\beta_{\min}$. Тогда в первом случае уменьшение угла α_i будет идти до α_{i+1} , а во втором — до $\beta_{\min}$.

$$2) \left(\alpha_{\text{текущ}} = \alpha_i - \arctg \frac{y - y_i}{\Delta h} \right) < (\alpha_{i+1} \vee \beta_{\min})?$$

(здесь $y = y_i - j \Delta k_i$, $j = 1, n$).

Если да, то это значит, что, уменьшив угол отклонения от вертикали насколько возможно, мы не смогли вернуть точку A_i (рис. 3) в заданную область, т. е. y_i остается больше y_k . Тогда надо перейти к пункту IV, т. е. к 3).

3) Может быть одним шагом влево на Δk_i точка A_i стала левее прямой $МК$?

Если да, то спад для данной полосы окончен и, фиксируя координаты точки A_{i+1} , надо переходить к дальнейшему построению; иначе — повторяется пункт III.

IV. На рис. 4 показано положение точки A_{i+1} перед началом исправления. Жирной линией отмечено положение после исправления. В отличие от блока спада здесь исправляется положение уже ранее вычисленной точки $A_i = A_{i1}$, которая отодвигается с шагом Δk_i влево, например, в положение A_{i2} , и затем изучаются возможные положения точек на линии $i+1$. Точки A_i до тех пор отодвигаются влево, пока не будет превышен допустимый угол спада. Возможно, что до этого точка A_i уже подвинется левее линии $КМ$. Тогда запоминаются ее координаты и следует обращение на продолжение построения. В противном случае начинается исправление положения точек A_{i+1} , т. е. происходит „подъем“ на Δh и т. д., до тех пор, пока y_{i1} не станет меньше y_k .

Описанные построения выполняются следующим образом.

1) Уменьшается текущая глубина $H := H - \Delta h$, а также номер рассматриваемой линии $i := i - 1$ и определяются соответствующие $\Delta\beta_{\max}$, Δk_i , y_i , α_i ,

2) Вычисляются новые (исправленные) координаты

$$y_i := y_i - \Delta k_i,$$

$$\alpha = \arctg \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta h}.$$

3) $\alpha < \beta_{\min}$?

Если да, то надо перейти к 1), иначе — к 4).

4) Определяется величина угла спада α_i^* на полосе Δh . Здесь возможно два случая:

а) $\alpha_i > \alpha_{i-1}$,

тогда продвижение от линии $i-1$ к линии i осуществлялось с помощью набора, поэтому

$$\alpha_i^* = \alpha_i - \alpha;$$

б) $\alpha_i < \alpha_{i-1}$,

значит продвижение от линии $i-1$ к линии i осуществлялось с помощью спада. Поэтому величина угла спада на этой полосе будет

$$\alpha_i^* = \alpha_{i-1} - \alpha;$$

5) $\alpha_i^* > \Delta\beta_{\max}$?

Если да, то следует перейти к 1), иначе — к 6).

6) $y_i^1 = y_i + 2 \Delta h \tg \alpha$;

$y_i^1 < y_k$?

Не выходит ли точка на линии $i+1$ с координатой y_i^1 за границу $КМ$?

Если да, то надо перейти к 2), иначе осуществляется засылка исправленных координат y_i и $\alpha_i = \alpha$ в результирующие массивы и переход к пункту 1.

По описанному алгоритму составлена программа и произведены расчеты на машине БЭСМ-2М.

ЛИТЕРАТУРА

1. Программа шестой научной сессии, посвященной итогам научно-исследовательских работ республики в области естественных и общественных наук за 1968 год. Баку. Изд-во АН Азерб. ССР.
2. Моисеев Н. Н. „Ж. вычисл. матем. и матем. физики“, т. 5, 1965, № 1.

Институт кибернетики АН Азерб. ССР

Поступило 5. XI 1969

Н. М. Чэфарова, С. Р. Мусаев

Маили гујуларын профили сәрһәддинин
тә'јин едилмәсинин алгоритми

ХУЛАСӘ

Оптимал идарәетмә мәсәләләрини тәғриби һәлл етдикдә, адәтән, мүмкүн һәлләрин дәјишмә области сәрһәдди верилир. Бир чох практик мәсәләләрдә бир сәрһәд әввәлчәдән ајдын олмур. Лакин бу сәрһәдди ахтарылан һәллини үзәринә гојулан шәртләрдән тапмаг мүмкүндүр. Мәғаләдә маили гујуларын профилинин гурулмасы заманы алынган оптимал идарәетмә мәсәләсиндән бәһс едилмиш вә мүмкүн һәлләрин сәрһәддини тапмаг үчүн алгоритм верилимшир.

З. Ф. СЕИДОВ

ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ СЛАБО ВРАЩАЮЩИХСЯ КОНФИГУРАЦИЙ

1. Для слабо вращающихся конфигураций существует связь между m —отношением центробежной силы к силе тяжести на экваторе и σ —эллиптичностью слегка сжатой фигуры равновесия. При этом

$$m = \frac{\omega^2 R^2}{GM}, \quad \sigma = 1 - \frac{a}{b}, \quad (1)$$

где ω —угловая скорость вращения (предполагается твердотельность вращения); R , a , b —соответственно, средний, полярный и экваториальный радиусы тела; M —масса тела; R , иначе, равен радиусу равновеликой сферы; для эллипсоида вращения

$$R = (ab^2)^{1/3}. \quad (2)$$

Отношение m/σ зависит от распределения плотности внутри тела. Клеро (см., например, [1]) установил следующую связь для случая слабого вращения;

$$\frac{m}{2} \pm \sigma = \frac{4\pi}{5MR^2} \int_0^R \rho(c) d[c^5 \sigma(c)]. \quad (3)$$

Здесь c —радиус сферы, объем которой равен объему, заключенному внутри эквипотенциальной поверхности $\Phi(x, y, z) = \text{const}$, для всей конфигурации $c \equiv R$; $\sigma(c)$ —эллиптичность фигуры, ограниченной эквипотенциальной поверхностью. Для однородной конфигурации отсюда получим

$$\frac{\sigma}{m} = \frac{5}{4}. \quad (4)$$

В другом предельном случае бесконечной концентрации вещества к центру имеем

$$\frac{\sigma}{m} = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Следовательно (см. также [2]),

$$1 \leq \frac{5m}{4\sigma} < 2,5. \quad (6)$$

Для конфигураций, в которых отклонения от однородности не слишком велики, Дарвин [3] вывел следующую приближенную формулу:

$$\frac{I}{MR^2} = 1 - \frac{2}{5} \left(\frac{5m}{2\sigma} - 1 \right)^{1/2}, \quad I = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^4 dr, \quad (7)$$

где I —момент инерции тела (сферически-симметричного) относительно оси вращения, $\rho(r)$ —распределение плотности в отсутствие вращения. Далее известно [4], что для конфигураций, в которых выполняется условие

$$\bar{\rho}(r) \geq \rho(r), \quad (8)$$

$\sigma(r)$ является монотонно растущей функцией от r , подчиняющейся неравенству

$$\sigma \geq \sigma(r) \geq \sigma \left(\frac{r}{R} \right)^3. \quad (9)$$

Используя теорему вириала второго порядка, Чандрасекар и Робертс [5] с помощью формул (7)—(9) получили верхние и нижние пределы отношения $5m/4\sigma$:

$$\frac{5m}{4\sigma} < 5 \frac{-\Omega}{GM^2 R} - 2, \quad (10)$$

$$\frac{5m}{4\sigma} > 2,5 - \frac{4}{M^2 R^2} \int_0^R r^2 M(r) dM(r), \quad (11)$$

где Ω —гравитационная потенциальная энергия тела.

Таблица 1

Значения $5m/4\sigma$ для политропов

n	Нижний предел		Точное значение [6]	Верхний предел		Дарвин	I / MR ²	-Ω / GM ² /R
	автор	[5]		автор	[5]			
0	1	1	1	1	1	1	0,6	0,6
1	1,520	1,456	1,6449	1,867	1,750	1,655	0,392	0,750
1,5	1,733	1,661	1,9432	2,115	2,286	2,001	0,307	0,867
3	2,217	2,117	2,4298	2,448	...	...	0,113	1,500

В табл. 1, 2 приведены значения пределов, полученные в [5], вместе с точными значениями отношения $5m/4\sigma$ для политропов [6] и белых карликов [7], а также приближенными значениями по формуле Дарвина. Неравенства Чандрасекара—Робертса не дают разумного верхнего предела для политропов с индексами $n > 5/3$ и для белых карликов с $y_0^{-2} < 0,5$ (при этом отношение центральной плотности к средней больше 7,35).

В статье мы хотим показать, что пределы для величины $5m/4\sigma$, найденные с помощью формул (3), (8), (9), являются более точными, чем пределы (10), (11). Часть результатов, полученных нами, была очень кратко доложена [8]. Рассмотрим более подробно и полно этот вопрос.

2. Вывод пределов в $5m/4\sigma$. Вычислить отношение m/σ по формуле (3) не удастся, так как остается неизвестной зависимость $\sigma(c)$. Однако с помощью (3) можно установить пределы m/σ более точные, чем у Чандрасекара и Робертса. Вычислим для этого интеграл в (3) в нулевом приближении, то есть заменим c на текущий радиус r и для $\rho(r)$ возьмем распределение в отсутствие вращения. В результате получим

$$\frac{5m}{4\sigma} = \frac{5}{2} \left[1 + \frac{4\pi}{5MR^2} \int_0^R \frac{\sigma(r)}{\sigma} r^5 dr \right]. \quad (12)$$

Отсюда уже следует, что $5m/4\sigma < 2,5$ для всех конфигураций, у которых $d\rho/dr < 0$, но не только для $n < 5/3$.

Таблица 2

Значения $5m/4\sigma$ для белых карликов

y_0^{-2}	Нижний предел		Точное значение [7]	Верхний предел		Дарвин	I/MR^2	$-Q/GM^2/R$
	автор	[5]		автор	[5]			
0,8	1,747	1,674	1,963	2,128	2,373	2,026	0,301	0,8745
0,4	1,796	1,721	2,026	2,191	2,553	2,114	0,281	0,9107
0,1	1,905	1,886	2,156	2,253	3,030	2,314	0,238	1,0060
0,01	2,071	1,997	2,354	2,368	4,039	2,644	0,172	1,2079

Далее, при соблюдении неравенства $d\rho/dr < 0$ имеет место и (8), а следовательно и (9). Поэтому, подставляя (9) в (12), получим соответствующие пределы для m/σ . Заменяя $\sigma(r)$ в (12) на σ и интегрируя по частям, получим, используя (7),

$$\frac{5m}{4\sigma} > \frac{5}{2} \left(1 - \frac{I}{MR^2} \right). \quad (13)$$

Аналогично, подставляя $\sigma(r) = \sigma \cdot (r/R)^3$ в (12), будем иметь

$$\frac{5m}{4\sigma} < \frac{5}{2} \left[1 - \frac{32\pi}{5MR^5} \int_0^R \rho(r) r^7 dr \right]. \quad (14)$$

Формулы (13), (14) устанавливают пределы для величины $5m/4\sigma$, которые мы в следующих разделах применим для политроп и белых карликов.

3. Политропы. Для гравитационной энергии политропы имеем хорошо известную формулу [9]:

$$\Omega = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (15)$$

В таком случае неравенство (10) дает следующий верхний предел:

$$\frac{5m}{4\sigma} < \frac{5+2n}{5-n}. \quad (16)$$

Так как всегда $5m/4\sigma < 2,5$, то отсюда следует, что должно быть $n < 5,3$. Неравенство (11) преобразуется с помощью эмденовских переменных [9] в следующее:

$$\frac{5m}{4\sigma} > 2,5 - \frac{12}{(n+7) \eta_1^2 \left(\eta^2 \frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta_1}^2} \left[\eta_1^2 \left(\eta^2 \frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta_1}^2 - 12 \int_0^{\eta_1} \eta^3 \theta^2 d\eta \right]. \quad (17)$$

Аналогично формулы (13), (14) вычисляются с помощью эмденовских функций:

$$\frac{5m}{4\sigma} > \frac{5}{2} \left[1 + \frac{1}{\eta_1^2 \left(\eta^2 \frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta_1}^2} \int_0^{\eta_1} \eta^4 \theta^n d\eta \right], \quad (18)$$

$$\frac{5m}{4\sigma} < \frac{5}{2} \left[1 + \frac{1}{5\eta_1^5 \left(\eta^2 \frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta_1}^5} \int_0^{\eta_1} \eta^7 \theta^n d\eta \right]. \quad (19)$$

Заметим, что выражения в квадратных скобках (18), (19) меньше единицы, так как для политроп всегда $(\eta^2 d\theta/d\eta)_{\eta_1} < 0$. Интегралы в (18), (19) при $n=0$ и $n=1$ берутся непосредственно. При $n=0$ имеем $\eta_1 = \sqrt{6}$, $(\eta^2 d\theta/d\eta)_{\eta_1} = -2\sqrt{6}$, а при $n=1$ получим $\eta_1 = -\pi$, $(\eta^2 d\theta/d\eta)_{\eta_1} = -\pi$, $\theta = \sin \eta/\eta$ и

$$\frac{I}{MR^2} = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \eta^3 \sin \eta d\eta = 1 - \frac{6}{\pi^2}, \quad (20)$$

$$\frac{32\pi}{5MR^5} \int_0^R \rho r^7 dr = \frac{8}{5\pi^6} \int_0^\pi \eta^6 \sin \eta d\eta = \frac{8}{5} \left[1 - \frac{30}{\pi^2} + \frac{360}{\pi^4} - \frac{1440}{\pi^6} \right]. \quad (21)$$

При других значениях n интегралы в (18), (19) вычислялись численно с использованием эмденовских функций. Результаты приведены в табл. 1. Как нижний, так и верхний пределы оказываются точнее пределов [5], причем, в противоположность [5], у нас точность верхнего предела тем больше, чем больше n .

4. Белые карлики. Преобразуем в единицах Чандрасекара [9] неравенства (13), (14):

$$\frac{5m}{4\sigma} > \frac{5}{2} \left[1 - \frac{(1-y_0^{-2})^{3/2}}{\eta_1^2 \left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_{\eta_1}} \int_0^{\eta_1} \frac{\rho(\eta)}{\rho_0} \eta^4 d\eta \right], \quad (22)$$

$$\frac{5m}{4\sigma} < \frac{5}{2} \left[1 - \frac{8(1-y_0^{-2})^{3/2}}{5\eta_1^5 \left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_{\eta_1}} \int_0^{\eta_1} \frac{\rho(\eta)}{\rho_0} \eta^7 d\eta \right]. \quad (23)$$

Используя расчеты внутренней структуры белых карликов [9], мы вычислили по формулам (22), (23) верхние и нижние пределы отношения $5m/4\sigma$ для белых карликов с различными значениями параметра y_0^{-2} . Результаты приведены в табл. 2. Здесь же даны вычисленные нами значения безразмерного момента инерции I/MR^2 , отношения $5m/4\sigma$ по формуле Дарвина, а также значения пределов по формулам (10), (11) и взятые из работы [10] значения безразмерной потенциальной энергии белых карликов $-Q/(GM^2/R)$. Результаты сравниваются с точными значениями отношения $5m/4\sigma$, полученными нами с использованием расчетов Суда [7], где приведены значения величины

$$S = \frac{\sigma}{v} = \frac{\sigma}{\omega^2/2\pi GBy_0^3}. \quad (24)$$

Можно, однако, показать, что имеет место соотношение

$$\frac{5m}{4\sigma} = \frac{5}{8} \frac{1}{S \left(\frac{1}{\eta} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_{\eta_1}}, \quad (25)$$

с учетом которого и вычислены значения $5m/4\sigma$.

Из табл. 2 видно, что пределы (13), (14) верны и для вырожденных конфигураций, тогда как пределы (верхние) Чандрасекара—Робертса не подходят при $y_0^{-2} < 0,5$ (при этом отношение центральной плотности к средней больше 7,35). Формула Дарвина дает значение $5m/4\sigma$ больше 2,5 при $y_0^{-2} < 0,05$.

В заключение заметим, что в работе [7] делался следующий вывод: „совершенно невозможно, чтобы коэффициенты, выражающие эффекты вращения для белых карликов, стремились к значениям, соответствующим политропе $n=3/2$, при $y_0^{-2} \rightarrow 1$ “ ([7], стр. 311). Однако, как видно из табл. 2, значения $5m/4\sigma$ для белых карликов с $y_0^{-2} \rightarrow 1$ и $y_0^{-2} \rightarrow 0$ стремятся в действительности к значениям $5m/4\sigma$ для политроп $n=1,5$ и $n=3$. То же самое верно для верхних и

нижних пределов отношения $5m/4\sigma$, для значений всех других "вращательных" коэффициентов, а также значений $1/MR^2$ и $Q/(GM^2/R)$. Ошибочность вывода в [7] обусловлена неправильным определением соответствующих коэффициентов. Частично эта ошибка исправлена в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крат В. А. Фигуры равновесия небесных тел. ГИТТЛ, М.—Л., 1950
2. Chandrasekhar S. MN, 93, 539, 1933.
3. Darwin G. H. MN, 60, 92, 1899.
4. Джеффрис Г. Земля, ИЛ, М., 1960
5. Chandrasekhar S., Roberts P. H. Ap. J. 138, 801, 1963.
6. Chandrasekhar S., Lebovitz N. R. Ap. J. 136, 1082, 1962.
7. Suda K. Sci. Repts. Tohoku Univ., ser. 1, 37, 307, 1953.
8. Сеидов З. Ф. Астрофизика, 5, 503, 1969.
9. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. ИЛ, М., 1950
10. Эминзаде Т. А. "ДАН Азерб. ССР", 15, 1005, 1959.
11. Pik—Sin The, "Contr. Bosscha Observ. № 24, 1964.

ШАО

Поступило 15. I 1970

З. Ф. Сеидов

Фырланма сүр'эти кичик олан конфигурасияларын

еллиптиклији һаггында

ХҮЛАСӘ

Клеро тәнлији вә Чеффрис бәрабәрсизлијиндән истифадә едиб, кичик сүр'әтлә фырланан конфигурасиялар үчүн m/σ кәмијјәтинин јухары вә ашағы һүдудлары тапылмышдыр. Бурада m —экваторда мәркәздән гачма гүввәсинин чазибә гүввәсинә олан нисбәти вә σ таразлыгдакы фигурун еллиптиклијидир. Һәмин һүдудлар политроп вә ағ чыртданлар үчүн һесапланмышдыр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри серијасы, 1970, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 6

А. А. ГУСЕЙНЗАДЕ

ВОЗМОЖНЫЙ ЭВОЛЮЦИОННЫЙ СМЫСЛ АЗОТНОЙ И УГЛЕРОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЗВЕЗД ВОЛЬФ—РАЙЕ

Основная цель как предыдущих [1, 2, 3], так и данной работы заключается в попытке установления начальной и конечной стадии эволюции звезд WR. Установление начала и конца эволюции звезд является основной и пока еще нерешенной проблемой астрофизики. Ввиду трудности прямого решения данной задачи изыскиваются окольные пути. Поэтому рассматриваются случаи, представляющие интерес с точки зрения эволюции.

Звезды WR подразделяются на две параллельные последовательности по наблюдаемой интенсивности эмиссионных линий азота, углерода и кислорода. Эмиссионные линии не являются общими для обеих последовательностей. Особенность этого подразделения заключается в том, что в азотной последовательности звезд наблюдаются лишь линии неоднократно ионизованного азота, а для углерода и кислорода подобные линии не обнаруживаются, в то время как в звездах углеродной последовательности происходит обратная картина. Разделение звезд WR на две последовательности было первым фактом, свидетельствующим о закономерном различии между этими звездами. Поэтому изучение азотной и углеродной последовательностей представляет интерес.

Проведенные в указанном направлении исследования позволяли выявить весьма сложную картину неоднородности в этой группе звезд. Бертола [4] впервые отметил схематичность подразделения звезд WR на две последовательности при попытке распространения ее на слабые объекты. Поэтому им в добавление к имеющимся были предложены два новых критерия: отношение интенсивностей линий NIII $\lambda 4634$ — $40/NV \lambda 4603$ — 19 и CIV $\lambda 5806$ — $12/HeI \lambda 5875$. Расширенная классификация также оказалась неполной. Хилтнер и Шайльд [5] подразделили азотную последовательность на две подгруппы: WN — А и WN — В.

В подгруппу WN — А были включены те звезды, у которых линии узкие и непрерывный спектр сильный, т. е. преимущественно двойные звезды. В группу WN — В выделены звезды с широкими линиями. Звезды WC-последовательности также можно разделить на подгруппы. Учитывая, что звезды WR являются членами O-ассоциаций, исследование Робертса [6], можно придавать выявленным последовательностям эволюционный смысл. Робертс установил, что звезды WN-последовательности встречаются в ассоциациях, а представители WC-последовательности имеют тенденцию находиться вне ассоциаций.

Звезды, образуясь в ассоциациях, с течением времени рассеиваются в Галактике. На этом основании можно сделать вывод, что звезды WC-последовательности более старые, чем WN-последовательности. Поэтому мы можем видоизменить раннее предложенную схему эволюции звезд WR, т. е.

$O \rightarrow Of \rightarrow WR_{N-A} \rightarrow WR_{N-B} \rightarrow WC.$

Учитывая нахождение двойных звезд в группе WN — A, можно уточнить последнюю схему:

$O \rightarrow Of \rightarrow WR_{N-A} \rightarrow WR_{N-B} \rightarrow WC.$

Как отмечено выше, в подгруппе WN — A линии узкие, а в WN — B — широкие. Можно предполагать, что истечение материи наибольшим является в звездах подгруппы WN — B. Иначе говоря, не все звезды WR имеют одинаковую неустойчивость. Среди их подгруппы звезды WN — B максимально неустойчивые. Звезды подгруппы WN — A относятся к ранней стадии начала неустойчивости. Из этого следует, что звезды WC-последовательности более устойчивы. Поэтому в них при наблюдении следует ожидать появления узких эмиссионных линий. Выявление этого эффекта подтвердило бы сделанное предположение.

Представляет интерес определение средней скорости истечения материи из звезд WR. Андерхилл [7] определила скорость истечения для нескольких звезд WR. С целью выявления возможной закономерности следует определить скорость истечения для достаточного количества звезд из обеих последовательностей. Классификация звезд WR по скорости истечения будет иметь возрастной смысл, что позволит установить направление эволюции звезд WR более надежно. По перечисленным причинам выполнение этой работы представляет большой интерес. Следует отметить, что проведенные наблюдения в красной части спектра указывают на четкость подразделения звезд WR на азотную и углеродную последовательность в видимой области спектра, т. е. выявленная закономерность относится к небольшому участку спектра. Это усиливало тенденцию объяснения обнаруженного различия в спектре условием возбуждения атмосферы, а не различием в химическом составе.

Если наблюдаемые различия в спектре звезд WR обусловлено условием возбуждения в атмосфере, то следует ожидать систематического различия в температуре и светимости звезд обеих последовательностей. Проведенные наблюдения указывают на возможность такого эффекта. Даже в наблюдениях Пайпера [8] и Фейнштейна [9], выполненных в последние годы фотоэлектрическим методом, а также Кухи [10] методом фотоэлектрического сканирования реальность обнаруженного различия ставится под сомнение. Основная трудность заключается в том, что звезды WR являются малочисленными (в данное время известно 143) и распространены они по всей Галактике. Как известно, эффект межзвездного поглощения определяется статистически и сильно меняется по всей Галактике. Поэтому учет межзвездного поглощения требует весьма серьезного отношения. В последние годы за решение этой задачи взялся Лимбер [11].

Если разделение звезд WR на две параллельные последовательности обусловлено различием химического состава, то опять-таки следует ожидать различия в их температуре и светимости. Отметим, что звезды WR образуются в ассоциациях. Возраст ассоциаций составляет 10^6 лет и не может быть больше 10^7 лет. Возраст звезд спектрального типа O составляет 10^7 лет, а звезд WR — 10^6 лет. Как видно из этих данных, возраст звездных ассоциаций и их членов (звезд WR) сравним. Поэтому мы можем сделать вывод о возможности старения

звезд WR в звездных ассоциациях. Эти соображения приводят нас к заключению о возможности систематического различия в температуре и светимости звезд WR.

Таким образом, приведенные объяснения наличия азотной и углеродной последовательностей звезд WR с трех точек зрения приводит нас к одному и тому же выводу: возможно систематическое различие в температуре и светимости между звездами азотной и углеродной последовательностей. Это может быть в том случае, если указанные причины являются следствием одного и того же явления.

Приведенные объяснения были следующими:

1) наличие азотной и углеродной последовательностей звезд WR обусловлено различием химического состава, 2) различием условий возбуждения в атмосфере звезд WR и 3) старением звезд в звездных ассоциациях.

Поскольку звезды WR образуются в звездных ассоциациях, то первоначальный их состав одинаков. Поэтому реальное различие химического состава может быть следствием эволюции.

По степени возбуждения непрерывного спектра звезды WR относятся к спектральному классу звезд O и занимают узкий интервал в этом спектральном классе. Даже при одинаковом химическом составе наблюдаемый спектр зависит от условия возбуждения. Поскольку спектральный интервал звезд WR небольшой, то обычные эффекты будут пренебрежимо малы. Одним из специальных механизмов образования эмиссионных линий может быть селективное излучение. Это направление развивается Андерхилл [13]. Отметим, что селективное излучение может приводить к образованию нескольких линий. Наличие же многочисленных линий в спектре звезд WR объяснить селективным механизмом весьма трудно. С другой стороны, образование эмиссионных линий в звездах WR объясняется стратификацией коротковолнового излучения в их атмосфере. Нами [13] выявлены быстрая переменность эмиссионных линий звезд WR, такая же переменность непрерывного спектра и отсутствие полной корреляции между ними. Поэтому было выдвинуто предположение об образовании эмиссионных линий дополнительными механизмами. В дальнейшем явление быстрой переменности эмиссионных линий было подтверждено Хутчингом [15].

Естественно, быстрая переменность эмиссионных линий WR обусловлена такими же изменениями в условиях, приводящих к их образованию. Различие в условиях возбуждения атмосферы звезд может обуславливаться явлениями, приводящими к быстрой переменности эмиссионных линий.

Звезды WR имеют протяженные атмосферы. Разработанная теория протяженных атмосфер встречается с принципиальными затруднениями. Поэтому дальнейшее изучение переменности эмиссионных линий, в частности, дает возможность путем наблюдения решить задачу об условиях возбуждения атмосферы. Это можно выявить посредством сравнительного изучения переменности эмиссионных линий звезд азотной и углеродной последовательностей.

Поскольку быстрая переменность эмиссионных линий относится к стадии неустойчивости звезд WR, которая является кратковременной и носит преходящий характер, то различие в условиях возбуждения их и носит преходящий характер с процессами, имеющими эволюционный характер. Таким образом мы пришли к общему заключению о том, что изложенные три объяснения наблюдаемого спектра звезд WR является следствием одного и того же явления — эволюции звезд WR.

Иначе говоря, наблюдаемое различие в спектре звезд WR, т. е.

разделение их на азотную и углеродную последовательности, является результатом их эволюции. Поскольку эволюция является непрерывным процессом, то это разделение также должно быть нечетким, непрерывным, что и показали наблюдения.

На возможности старения звезд в звездных ассоциациях впервые указал В. А. Амбарцумян [16]. В примере звезд WR старение звезд в звездных ассоциациях наблюдается непосредственно, что является примером, указывающим на правдоподобность предложенной схемы эволюции и на возможности описания наблюдаемых явлений этой схемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-заде А. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук.“ 1969, № 4.
2. Гусейн-заде А. А. ДАН Азерб. ССР.
3. Гусейн-заде А. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“ (в печати).
4. Bertola F. Contr obs Ap. J. Aslago, 137, 1968.
5. Hiltner W. A. and Schild R. E. Ap. J. 143, 770, 1966.
6. Roberts M. S. Ap. J. 67, 79, 1962.
7. Underhill A. B. Early type of stars, 1966.
8. Poyer D. M. Ap. J. 144, 13, 1968.
9. Feinstein A. PASP, 76, 399, 1964.
10. Kyhi L. V. Ap. J. 143, 753, 1966.
11. Reddish V. C. Publ. Royal observatory, 6, № 2, 1967.
12. Underhill A. B. Earlytype of stars Dordrecht, 1966.
13. Гусейн-заде А. А. „Астрофизика“, 2, 325 1966.
14. Hutchings M. C. Observatory, 87, 273, 1967.
15. Амбарцумян В. А. Научные труды, т. 2. Изд-во АН Арм. ССР, 1960.

ШАО

Поступило 9. IX 1969

3. УСЕЙНОВА

ОБ ОДНОЙ РАБОТЕ НАСИРЭДДИНА ТУСИ ПО ОПТИКЕ

Выдающийся азербайджанский ученый Насирэддин Туси, живший в период с 1201—1274 гг., известен в научном мире прежде всего как математик и астроном. Однако он является автором ряда работ по физике, геологии и минералогии, литературе и философии, архитектуре и экономике и др. К настоящему времени нам известны пять небольших трактатов Насирэддина Туси, которые содержат весьма ценные и интересные с точки зрения физики идеи:

1. Трактат о верном утре („О предрассветных сумерках“ или в другом переводе „Объяснение лжеутра“).
2. Трактат об изучении радуги.
3. Трактат о теологии и метафизике.
4. Трактат о жаре и холоде.
5. Об отражении и преломлении света.

В данное время мы располагаем только двумя последними работами. Рукопись „О жаре и холоде“ хранится в библиотеке Института востоковедения Академии наук Узбекской ССР (562—VI). Ее фотокопия в свое время была любезно прислана нам руководством этого Института и хранится в Шемахинской астрофизической обсерватории.

Рукопись трактата „Об отражении и преломлении света“ хранится в Берлине (Немецкая государственная библиотека), фотокопия которой была получена ШАО из Берлина и опубликована в монографии Г. Д. Мамедбеги „Основатель Маррагинской обсерватории Насирэддин Туси“. Этой рукописи посвящена настоящая статья. Воззрения ученого на саму природу света изложены им в сочинении „Таджрид-аль-калам“, в данной работе он в основном делает попытку математически доказать закон отражения и преломления светового луча. Рукопись содержит всего две страницы с тремя рисунками. В отличие от своих других крупных работ, которые обычно Насирэддин Туси снабжал исторической справкой, показывающей состояние изучаемого вопроса к моменту рассмотрения его самим Туси, здесь не содержится такой информации. Поэтому предварительно опишем, в каком состоянии находился вопрос об отражении и преломлении светового луча к моменту написания данной работы.

Первое систематическое изложение явлений оптики принадлежит математику Евклиду, жившему в Александрии около 300 лет до н. э. Исходя из факта, что лучи света суть прямые линии и что они от-

* М. Н. Болтаев. „Вопросы гносеологии и логики в произведениях Ибн-Сины и его школы“, стр. 269.

брасываются согласно закону отражения, Евклид занимался отражением света, положением и кажущейся величиной изображений. Интересна 31-я теорема „Катоптрики“, согласно которой „вогнутыми зеркалами, направленными против Солнца, может быть зажжен огонь“. Но при этом ошибочно утверждается, что такое воспламенение имеет место не только между зеркалом и центром кривизны, но и в самом этом центре.

Известна к настоящему времени следующая формула линзы:

$$F_1 = -\frac{1}{(n_{21}-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \quad F_1 = -F_2; \quad n_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

Евклид ошибочно предполагал, что фокус находится либо в центре кривизны, либо между этим центром и зеркалом. Один из наиболее известных опытов над преломлением света также был знаком Евклиду, который сообщает о нем следующими словами: „Если положить предмет на дно сосуда и отодвинуть последний настолько, что предмет как раз исчезает от взора, то предмет этот снова становится видимым, когда в сосуд наливает воды“ (7-я теорема „Катоптрики“ Евклида).

Впервые подробное описание преломления мы встречаем у Клеомена (50 г. до н. э.). В его сочинении „Циклическая теория метеоров“ мы находим сведения об изменении угла при переходе света из более плотной среды в менее плотную. Он знает, что луч, переходя из среды менее плотной в более плотную, приближается к перпендикуляру; он считает, что, аналогично опыту с кольцом, Солнце виднеется за горизонтом вследствие преломления солнечных лучей. Прямое же упоминание о преломлении света мы находим у Аристотеля, который ставит вопрос, почему палка в воде кажется преломленной.

Замечательные начатки индуктивного рассмотрения оптической проблемы мы находим гораздо позднее у Птолемея. Им были установлены величины углов преломления, соответствующих ряду данных углов падения. С помощью подготовленного для этой цели особого инструмента он измерял углы преломления, соответствующие углам падения в 10°; 20°; 30° и т. д. Этот инструмент состоял из круга, разделенного на градусы и погруженного до середины в воду (рис. 1). Наблюдение заключалось в следующем: луч света BC направлялся через отмеченную точку B из выдающейся из воды части круга к центру последнего (уровень воды обозначен линией MN). В этом месте при вступлении луча в воду совершалось преломление. Преломленный луч CD продолжал свой путь в воду, пока не попадал в точку D окружности, которая может быть отсчитана с помощью градусного деления. На основе данных Птолемея была составлена следующая таблица:

Угол падения	Угол преломления	Вместо
10°	8°	7°17
20°	15°5	14°47
30°	22°5	21°54
40°	28°	28°40
50°	35°	34°52
60°	40°5	40°16

Хотя на основании своих опытов Птолемей не смог вывести закономерной связи между данными и найденными величинами, все

же он высказал основной закон диоптрики: луч света при переходе из менее плотной среды в более плотную приближается к нормали. Герон Александрийский дал свое доказательство равенства углов падения и отражения: расстояние SMS' , проходящее светом при зеркальном отражении, короче любого расстояния SMS' , т. е. свет,

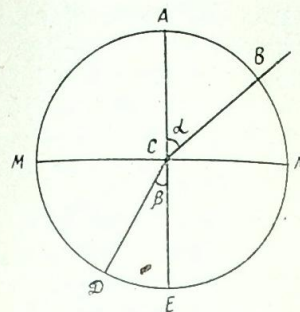


Рис. 1.

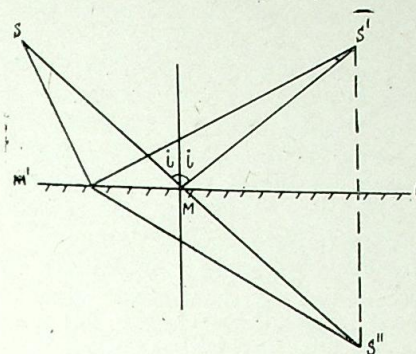


Рис. 2.

распространяясь от одной точки к другой с заходом на зеркало, достигает ее в кратчайшее время, если путь изламывается на зеркале по закону отражения. В самом деле, если опустить из точки S' перпендикуляр на поверхность зеркала, продолжить его до точки S'' , так, что $S'O = S''O$, и затем соединить S'' с M и M' , то, очевидно,

$$\Delta S'OM = \Delta S''OM,$$

$$\Delta S'M'O = \Delta S''M'O,$$

$$\angle S'MO = \angle S''MO = \frac{\pi}{2} - i = \angle SMM',$$

т. е. линия $S''MS$ —прямая (рис. 2). Но прямая короче всякой ломанной, следовательно,

$$S''M + MS < S''M' + M'S$$

или

$$S'M + MS < S'M' + M'S,$$

что доказывает предположение.

Познания ученых Востока раннего средневековья в области оптики наиболее полно переданы нам в произведениях знаменитого ученого Аль-Хайсама, известного под именем Альхазена, жившего в период 962—1038 гг. Птолемей нашел, что каждому углу падения соответствует известный угол преломления, Аль-Хайсам же добавил к этому закону еще то, что падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости, перпендикулярной поверхности, на которую падает луч. Более древнее предположение, что отношение между углом падения и углом преломления постоянно, Аль-Хайсам признает верным только для малых углов.

В своей работе „Об отражении и преломлении“ Насирэддин Туси использует три леммы.

Первая лемма следующая: „Луч простирается от светящегося предмета к лучевоспринимающему непрерывно и без уплотнения, предмета к лучевоспринимающему непрерывно и без уплотнения, где на протяжении луча нет места свободного от луча“. Эта лемма Насирэддина вообще-то есть аксиома Евклида о прямолинейном распространении светового луча, но дополнительным здесь является то, что Насирэддин говорит не только о прямолинейности, но и о непрерывности и невозможности деформации светового луча.

Вообще, в книгах по истории физики как советских, так и зарубежных авторов сообщается, что спор между сторонниками корпус-

кулярной и волновой теорий начался в XVII веке, а древними мыслителями были высказаны всего лишь некоторые догадки относительно самой природы света. В своей работе „Таджрид аль-калам“ — „Трактат о теологии и метафизике“ Насирэддин Туси пишет: „Некоторые ученые полагают, что свет представляет собой частицы вещества, которые, выделяясь из своего источника, соприкасаясь с телами, освещают последние“.

„Не может быть сомнения в том, что звук образуется из волн, возникающих вследствие удара или столкновения в воздухе двух тел. Эти волны подобны волнам воды, которые образуются прерывными движениями. Причем следует признать, что это движение, перемещаясь из одной части воздуха в другую, постепенно ослабляется и, доходя до того места, где дальше не в состоянии двигать воздух, звук прекращается. Это движение воздуха подобно волнам воды, которые образуются в результате бросания камня в воду. По этой причине подобное движение воздуха именуют звуковыми волнами. Распространение света аналогично движению звуковых волн“.

Отсюда ясно видно, что Насирэддин Туси высказывал не догадки, а вполне определенные мысли о волновой природе света еще в XIII веке. И лишь только в XVII веке такая же мысль была введена в науку Гюйгенсом в виде волновой теории.

Во второй лемме Насирэddина Туси говорится: „Луч отражается от плоской поверхности шлифованных поверхностей зеркал в ту сторону, откуда он приходит.“

Если поверхности состоят из поверхностей прозрачных тел, например, из поверхности неподвижных вод, тогда луч пронизывает их, отражается от них.

Отражения и преломления конкретны и их существование несомненно“.

Следующая лемма Насирэddина Туси рассматривает сам закон отражения и преломления. Он считает, что падающий, отраженный и преломленный лучи распространяются в одинаковой оптической среде.

Третья лемма такова: „Если от края одной линии, например, от точки A линии AD выходят в обе стороны две линии, например, AB и AC , если они охватывают линию AD двумя равными углами, если один из этих равных углов мысленно накладывается на другой, например, CAD на BAD , если вершина угла BAD накладывается на вершину угла CAD , далее, если сторона AC накладывается на сторону AB , то другая сторона его (угла CAD) обязательно будет совпадать со стороной AD . Это так потому, что эти два угла равны.“

Далее, если мы наложим мысленно угол CAD на неравный ему угол BAD так, чтобы сторона AC была наложена на соответствующую ей сторону AB , тогда другая сторона не может упасть на AD , так как если она упадет вне угла BAD , например на AE , тогда пришлось бы сжаться поверхности между углами BAE и CAD и упасть на поверхность DAD , или, если она упала бы внутрь поверхности BAD , например на AG , тогда поверхность между углами BAG и CAD встретила бы пустоту на поверхности угла DAG . Здесь, вероятно, AD является границей двух сред (рис. 3).

На основе этих лемм Насирэddин утверждает следующее: „...отражение луча от принятой его поверхности в противоположную сторону может быть только единственным способом.“

В этом способе может быть только то, что сам луч и его отражение находятся на двух противоположных направлениях, так что если мысленно провести от центра источника и воспринимающего луча некоторую поверхность, то это пройдет и через центр отраженного луча, на поверхности воспринимающего тела только одно место

может находиться, в которое упадет луч. Это место может находиться лишь в том случае, если угол (приходящего) луча и отраженного будут равными“.

После соответствующего геометрического доказательства Насирэddин приходит к следующему выводу: „...равны все углы, образованные падающим и отраженным лучами“, и далее: „...я утверждаю, что угол луча падения равен углу отклонения и они должны находиться на одной поверхности“.

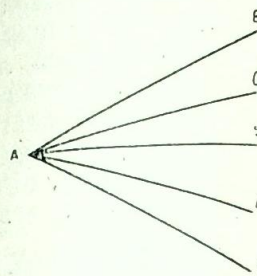


Рис. 3.

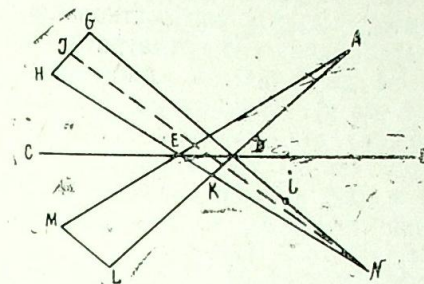


Рис. 4.

Исходящее предположение неверности третьей леммы ясно видно из следующей части работы.

Приводится следующий рисунок и доказательство (рис. 4): „...лучевоспринимающей поверхностью является вода и конус лучей, пронизывая ее, продолжается до M и L , затем J (отраженного конуса) преломляется в сторону K . Я утверждаю, что угол луча ADB равен углу преломления BDi и точки A, D, E, i, K должны находиться на одной плоскости“.

Доказательство; „Если угол GDE , т. е. BDi не равен углу EDL , т. е. если мы представим себе наложение друг на друга линий GD и DL , если при этом DE не совпадет сама с собой, тогда (DE) должна падать на промежуток между сечениями ADE и $LDEM$, что означает наличие здесь пустоты или сжатия. Так как это невозможно, то значит, что эти два угла равны (между собой). Не только равны между собой такие углы, как AEB и CEH , но и любые два других угла, находящиеся на плоскости BEC , встречающиеся в одной точке ее, образованные между ней и другими приходящими и преломленными. В этом состояло наше желание“.

Далее говорим: равны между собой углы ADE и iDE . Так как углы AED и KED равны, сторона ED общая, если мы продолжим DiK и EK , они должны пересекаться в одной точке, например в N .

Значит треугольники NDE и ADE равны и подобны. Отсюда становится ясным, что сечение преломления NDE и сечение ADE встречаются в виде конуса, что конус NGH и конус ALM равны и подобны.

Сечение ADE есть сечение самого ALM и NDE есть конус отражения. Отсюда становится ясным, что угол луча падения равен углу отражения и также углу преломления.

Таким образом Насирэddин считает, что если углы падения и преломления были бы равны между собой, тогда преломленный луч встретил бы на своем пути пустоту или же сжатие, то есть луч сам

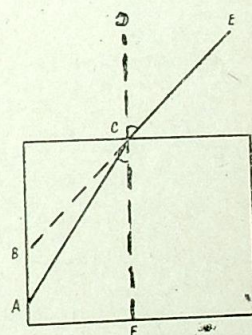


Рис. 5.

или разорвался бы, или сжался бы, что противоречит его первой лемме. Здесь он не может предположить увеличение или уменьшение плотности среды, через которую проходит луч, а считает, что луч сам должен был бы уплотниться или разорваться.

Заключительные слова работы следующие: „Отражение и преломление могут происходить только в определенном месте в отношении источника света“.

Можно предположить, что если бы работы Птолемея в области оптики были известны Насирэддину, то им были бы поставлены новые опыты, которые способствовали бы обнаружению правильного закона преломления. В геометрических доказательствах Насирэддин ошибок не допускает. К сожалению, ошибочность третьей леммы приводит его к неверному выводу закона преломления. Окончательное решение эта проблема получила лишь в XVII веке благодаря Снеллиусу. Он открыл, что длина пути луча (CD), переходящего из воздуха в воду и затем падающего на вертикальную стенку, относится к длине пути того же луча CB , по которому он прошел без преломления, как 3:2 (рис. 5).

В настоящее время этот закон выражается так: синус угла падения (DEC) находится в определенном соотношении с синусом угла преломления (AC). В случае воздуха и воды это соотношение равно 3:2.

Такая формулировка закона преломления еще не была известна Снеллиусу, она была введена в науку Декартом (вторая глава его „Диоптрики“, 1611 г.).

ШАО

Поступило 17. III 1970

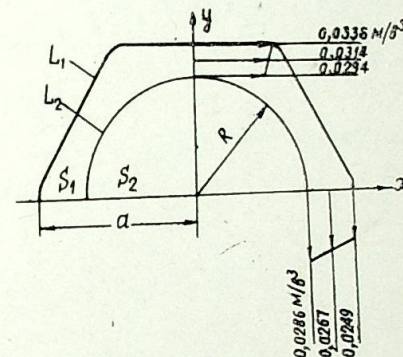
УДК 539.384/385

У. К. ДЖАФАРОВ

КРУЧЕНИЕ ПРАВИЛЬНОЙ ШЕСТИГРАННОЙ ПРИЗМЫ, АРМИРОВАННОЙ КРУГОВЫМ СТЕРЖНЕМ

Предложенный в работах [2, 3] способ применяется для достаточно эффективного решения задачи о кручении правильной шестигранной призмы, армированной круговым стержнем.

§ 1. Рассмотрим нестесненное кручение шестигранной призмы, в концентрическую круговую полость которой впаян круговой брус из другого материала. Обозначим в плоскости $z = x + iy$ через S_1 двухсвязную область, занимаемую поперечным сечением призмы, ограниченную извне криволинейным равносторонним шестиугольником L_1 , достаточно хорошо аппроксимирующим равносторонний шестиугольник с полудиagonalью a , а изнутри — окружностью L_2 радиуса R ; через S_2 — круг радиусом R (рисунок).



Как известно [1], изучение кручения составного бруса сводится к нахождению двух комплексных функций $\varphi_j(z)$ ($j = 1, 2$), регулярных соответственно в областях S_1 и S_2 , из граничных условий:

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = t\bar{t} + E_1 \quad \text{на } L_1, \quad (11)$$

$$\mu_1 [\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)}] - \mu_2 [\varphi_2(t) + \overline{\varphi_2(t)}] = (\mu_1 - \mu_2) t\bar{t} + E_2, \quad \text{на } L_2, \quad (1, 2)$$

$$[\varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)}] - [\varphi_2(t) - \overline{\varphi_2(t)}] = 0, \quad \text{на } L_2. \quad (1, 3)$$

Здесь μ_j — соответственно, модули сдвига; t — аффикс точки L_j ; $\varphi_j = -iF_j(z)$, где $F_j(z)$ — функции кручения; E_1, E_2 — постоянные величины, одну из которых можно выбрать произвольно, исходя из этого примем $E_1 = (\mu_1 - \mu_2) R^2 + E_2$.

Введем на окружности L_2 вспомогательную неизвестную вещественную функцию $\omega(t)$:

$$\sum_{j=1}^2 [\varphi_j(t) + \overline{\varphi_j(t)}] = 2\omega(t). \quad (1, 4)$$

Сложив почленно (1, 3) и (1, 4), получим

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_2(t)} = \omega(t). \quad (1, 5)$$

На основании (1, 5) из условия (1, 2) на L_2 найдем

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) + \lambda \omega(t), \quad (1, 6)$$

где

$$\lambda = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}.$$

Согласно свойствам интеграла типа Коши формула (1, 6) может быть записана в виде

$$\varphi_1(t) - \lambda \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ \text{извне } L_2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z} dt_1 = -\lambda \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ \text{изнутри } L_2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z} dt_1 + \varphi_2(t). \quad (1, 7)$$

На основании этого равенства функция

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \lambda \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z} dt_1. \quad (1, 8)$$

аналитически продолжима в область S_2 . Таким образом функция является регулярной в области $S = S_1 + S_2$.

В силу (1, 2) и (1, 8) в области S_2 имеем

$$\varphi(z) = \varphi_2(z) - \lambda \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z} dt_1. \quad (1, 9)$$

Подставив в условие (1, 1), граничные значения функции $\varphi^1(z)$, из (1, 8) на L_1 получим

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = -\lambda \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - t} dt_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - \bar{t}} d\bar{t} \right\} + t\bar{t} \quad (1, 10)$$

Используя разложение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - t} dt_1 = - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{R}{t} \right)^{k+1}, \quad (1, 11)$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i R^{k+1}} \int_L \omega(t_1) t_1^k dt_1, \quad (1, 12)$$

на L_1 получаем

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left[\left(\frac{R}{t} \right)^{k+1} + \left(\frac{R}{\bar{t}} \right)^{k+1} \right] + t\bar{t}. \quad (1, 13)$$

Все α_k будем считать вещественными, что в дальнейшем не примем как противоречие.

Известно, что регулярную в области S функцию $\varphi(z)$ можно представить в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(t_1)}{t_1 - z} dt_1 + iC, \quad (1, 14)$$

где $f(t)$ — некоторая вещественная плотность, подлежащая определению; C — вещественная постоянная величина. Граничное значение функции $\varphi(z)$ на L_1 при $z \rightarrow t$ на основании теоремы Сохоцкого — Племеля будет

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(t_1)}{t_1 - t} dt_1 + iC. \quad (1, 15)$$

Исходя из (1, 15), на основании (1, 13) получим для определения $f(t)$ интегральное уравнение Фредгольма:

$$f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} f(t_1) d \ln \frac{t_1 - t}{t_1 - \bar{t}} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{R}{t} \right)^{k+1} + \left(\frac{R}{\bar{t}} \right)^{k+1} \right] \alpha_k + t\bar{t}. \quad (1, 16)$$

§ 2. Приведем функцию, конформно отображающую внешность взятого шестиугольника на внешность единичной окружности τ в плоскости ζ [4]:

$$z = A \left(\zeta + \frac{m}{\zeta^5} \right), \quad \left(A = \frac{a}{1+m}, m = \frac{1}{25} \right). \quad (2, 1)$$

Совершив замену переменных в (1, 16) при помощи (2, 1) и используя разложение бинорма, после перестановки порядка суммирования вместо (1, 16) получим

$$f^*(\tau) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau} f^*(\tau_1) \left[\frac{d\tau_1}{\tau_1} + \sum_{k=1}^{\infty} m^k (\beta^{k+1} d\beta - \alpha^{k+1} d\alpha) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\tau^n + \frac{1}{\tau^n} \right), \quad (2, 2)$$

где $\alpha = \sum_{n=0}^4 \tau^{-(n+1)} \tau^{n-5}$; $\beta = \sum_{n=0}^4 \tau_1^{5-n} \tau^{n+1}$; $f(t) = f^*(\tau)$;

$$b = b_n + \frac{1}{2} \varepsilon_n^{(0)} A^2 (1+m^2) + \varepsilon_n^{(6)} A^2 m \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

$$b_n^* = \lambda \sum_{k=E^*(n)}^{n-1} \left(\frac{R}{A} \right)^{k+1} m^{\frac{n-(k+1)}{6}} C_{-(k+1)}^{\frac{n-(k+1)}{6}} \alpha_k; \quad (2, 3)$$

$$\varepsilon_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & n=k \text{ при } k=0, 6; \\ 0, & k > 6 \end{cases}; \quad E^*(n) = (n-1) - 6E \left(\frac{n-1}{6} \right);$$

$$E \left(\frac{n-1}{6} \right) - \text{наибольшее целое число, заключающееся в } \frac{n-1}{6}.$$

§ 3. Учитывая малость параметра m , решение уравнения (2, 2) будем искать в виде ряда

$$f^*(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n f_n(\tau). \quad (3, 1)$$

Подставим (3, 1) в уравнение (2, 2) и приравняем в обеих его частях коэффициенты при одинаковых степенях параметра m . Тогда получим рекуррентное соотношение, которое позволяет определить последовательно одну за другой все $f_n(\tau)$. Мы ограничились определением первых шести функций $f_n(\tau)$. Собрав их вместе и учитывая (3, 1), будем иметь

$$f^*(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\tau^n + \frac{1}{\tau^n} \right); \quad (3, 2)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 + \frac{1}{2} A^2 (1+m^2); & a_6 &= (1 - 15m^2 + 225m^4) b_6 + \\ &+ (-40m^3 + 600m^5) b_{12} - 45m^4 b_{18} - 24m^5 b_{24}; \\ a_{12} &= (-20m^3 + 300m^5) b_6 + (1 - 243m^4) b_{12} - 910m^5 b_{18}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{18} &= -15 m^4 b_6 - 620 m^5 b_{12} + b_{18}; \\ a_{24} &= b_{24} - 6 b_6 m^5; \quad a_n = b_n \quad (n = 30, 36, \dots). \end{aligned} \quad (3, 3)$$

§ 4. Выражение для ζ через z ищем в виде

$$\zeta = \frac{z}{A} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \left(\frac{A}{z} \right)^{6k}. \quad (4, 1)$$

Возведем обе части (4, 1) в степень n ; тогда

$$\zeta^n = \left(\frac{z}{A} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(n)} \left(\frac{A}{z} \right)^{6k}. \quad (4, 2)$$

Учитывая (4, 1) и (4, 2) в (2, 1), получим

$$\frac{z}{A} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \left(\frac{A}{z} \right)^{6k-1} + \frac{m}{D_0} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{A}{z} \right)^{6k+5}, \quad (4, 3)$$

где
$$d_n = -\frac{1}{D_0} \sum_{k=1}^n d_{n-k} D_k^{(n)}; \quad d_0 = 1. \quad (4, 4)$$

Здесь коэффициенты $D_k^{(n)}$ вычисляются по рекуррентной формуле:

$$D_k^{(n)} = \frac{1}{k \cdot a_0^*} \sum_{k_1=1}^k [n k_1 + k_1 - k] a_{k_1}^* D_{k-k_1}^{(n)} \quad (k \geq 1). \quad (4, 5)$$

Учитывая (4, 3) и (4, 4) в (4, 5), для a_k^* ($k = 0, 1, \dots, 9$) получим:

$$a_0^* = 1, \quad a_1^* = -m, \quad a_2^* = -5m^2, \quad a_3^* = -40m^3, \quad a_4^* = -385m^4, \\ a_5^* = -4095m^5.$$

На основании (1, 14) и (4, 2)

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{6}\right)} D_k^{(n)} \left(\frac{z}{A} \right)^{n-6k} + iC, \quad (4, 6)$$

где z — аффикс точки, лежащий внутри L_1 .

Введя в (4, 6) новый индекс $\nu = n - 6k$ и переставляя порядок суммирования, найдем

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} \left(\frac{z}{A} \right)^{\nu} + iC. \quad (4, 7)$$

где

$$d_{\nu} = \left(\frac{R}{A} \right)^{\nu} \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n D_{\frac{n-\nu}{6}}^{(n)}. \quad (4, 8)$$

§ 5. Подставим $\varphi_j(t)$ из равенства (1, 8) и (1, 9) в (1, 5) и, используя теоремы о предельных значениях интеграла типа Коши, после некоторых преобразований на L_2 получим [3]

$$\omega(t) = \varphi(t) + \overline{\varphi(t)} + \lambda \alpha_{-1}. \quad (5, 1)$$

Здесь α_{-1} — вещественная постоянная, равная $\alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_1)}{t_1} dt_1$.

Подставляя (4, 7) в соотношение (5, 1), найдем

$$\omega(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} \left\{ \left(\frac{t}{R} \right)^{\nu} + \left(\frac{R}{t} \right)^{\nu} \right\} + \lambda \alpha_{-1}. \quad (5, 2)$$

На основании последней формулы (5, 2) из (1, 12) будем иметь

$$\alpha_{-1} = \lambda \alpha_{-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_{\frac{n}{6}}^{(n)}, \quad (5, 3)$$

$$\alpha_e = - \left(\frac{R}{A} \right)^{e+1} \sum_{n=e+1}^{\infty} a_n D_{\frac{n-e-1}{6}}^{(n)} \quad (e = 0, 1, 2, \dots). \quad (5, 4)$$

В силу (2, 4) и (3, 3)

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n,k} b_k^* + \delta_{n,0} A^2 (1 + m^2) + \delta_{n,6} A^2 m. \quad (5, 5)$$

Здесь

$$\delta_{0,k} = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0), \end{cases} \quad \delta_{18,k} = \begin{cases} -15m^4 & (k=6) \\ -620m^5 & (k=12) \\ 1 & (k=18) \\ 0 & (k > 18), \end{cases}$$

$$\delta_{6,k} = \begin{cases} 1 - 15m^2 + 225m^4 & (k=6) \\ -40m^3 + 600m^5 & (k=12) \\ -45m^4 & (k=18) \\ -24m^5 & (k=24) \\ 0 & (k > 24), \end{cases} \quad \delta_{24,k} = \begin{cases} -6m^5 & (k=6) \\ 1 & (k=24) \\ 0 & (k > 24), \end{cases}$$

$$\delta_{12,k} = \begin{cases} -20m^3 + 300m^5 & (k=6) \\ 1 - 243m^4 & (k=12) \\ -910m^5 & (k=18) \\ 0 & (k > 18), \end{cases} \quad \delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & (k=n) \quad (n=30, 36, \dots) \\ 0, & (k \neq n). \end{cases}$$

Подставляя величины a_n из формул (5, 5) в (5, 4) и учитывая, что $\delta_{n,0} = 0$ ($n \neq 0$), $\delta_{n,6} \neq 0$ ($n = 6, 12, 18, 24$) и $\delta_{n,6} = 0$, для всех остальных n после перестановки порядка суммирования получим

$$\alpha_e = \sum_{k=1}^{\infty} M_{e,k} b_k^* - A^2 m \left(\frac{R}{A} \right)^{e+1} \sum_{n=6}^{24} \delta_{n,6} D_{\frac{n-e-1}{6}}^{(n)} \quad (e=0, 1, 2, \dots), \quad (5, 6)$$

где

$$M_{e,k} = - \left(\frac{R}{A} \right)^{e+1} \sum_{n=e+1}^{\infty} D_{\frac{n-e-1}{6}}^{(n)} \delta_{n,k}. \quad (5, 7)$$

Принимая во внимание (2, 3) и (5, 6), после перестановки порядка суммирования для определения неизвестных коэффициентов c_{k_1} получим следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$\alpha_e = \sum_{k_1=0}^{\infty} q_{k_1,e} \alpha_{k_1} + f_e \quad \left(e = 5, 11, 17, \dots \right), \quad (5, 8)$$

$$\text{где } q_{k,e} = \lambda \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \left(\frac{R}{A} \right)^{k_1} M_{e,k}^* m^{\frac{k-(k_1+1)}{6}} C_{(k+1)}^{\frac{k-(k_1+1)}{6}}, \quad (5, 9)$$

$$f_e = -A^2 m \left(\frac{R}{A} \right)^{e+1} \sum_{n=6}^{24} \delta_{n,6} D_{\frac{n-e-1}{6}}^{(n)} \quad \text{при } e < 23,$$

$$f_e = 0 \quad \text{при } e > 23.$$

Система уравнений (5, 8) относительно неизвестных a_e ($e = 4, 10, 16, \dots$) и a_e ($e = 6, 12, 18, \dots$) является однородной. В силу того, что они могут быть определены лишь единственным образом, следует положить их равными нулю. Положим в этой системе $1 - q_{e,e} = C_{v,v}$, $-q_{\kappa,e} = C_{n,v}$, $a_e = x_v$, $f_e = f_v^{(0)} \left(v = \frac{e-5}{6}, n = \frac{\kappa_1-5}{6} \right)$ и преобразу-

ем ее к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,v} x_n = f_v^{(0)} \quad (n, v = 0, 1, 2, \dots). \quad (5, 10)$$

Из последней системы при $R = 0,86 A$ и $\mu_2 = 20 \mu$ методом последовательных приближений решены десять первых уравнений, причем понадобилось найти всего лишь четыре приближения, чтобы прийти к весьма точному решению.

Таблица 1

v	0	1	2	3	4
$\frac{x_v}{A^2}$	$-0,195422 \cdot 10^{-1}$	$-0,135405 \cdot 10^{-2}$	$0,14126 \cdot 10^{-3}$	$-0,6411 \cdot 10^{-5}$	$-0,5224 \cdot 10^{-6}$
v	5	6	7	8	9
$\frac{x_v}{A^2}$	$0,1657 \cdot 10^{-6}$	$-0,3351 \cdot 10^{-7}$	$0,2662 \cdot 10^{-8}$	$-0,235 \cdot 10^{-9}$	$0,133 \cdot 10^{-10}$

После определения коэффициентов a_k , являющихся в силу (1, 10) коэффициентами разложения функции $\omega(t)$ в ряд Фурье, можем написать:

$$\omega(t) = - \sum_{k=5}^{\infty} a_k \left\{ \left(\frac{t}{R} \right)^{k+1} + \left(\frac{R}{t} \right)^{k+1} \right\} + a_{-1}, \quad (5, 11)$$

В силу равенств (4, 4), (4, 5) и (5, 4) получим

$$\varphi(z) = - \sum_{k=5}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R} \right)^{k+1} + iC + d_0. \quad (5, 12)$$

Это разложение, вообще говоря, пригодно лишь для точек вписанного в шестиугольник круга. Для точек, лежащих вне этого круга, следует пользоваться формулой (4, 6).

Из равенств (1, 8) и (5, 12), учитывая направление обхода окружности L_2 , в области S_1 будем иметь

$$\bar{\varphi}_1(z) = \varphi(z) - \lambda \sum_{k=5}^{\infty} a_k \left(\frac{R}{z} \right)^{k+1}. \quad (5, 13)$$

В силу выражения (5, 12) имеем:

$$\varphi_1(z) = - \sum_{k=5}^{\infty} a_k \left\{ \left(\frac{z}{R} \right)^{k+1} + \lambda \left(\frac{R}{z} \right)^{k+1} + d_0 + iC \right\}. \quad (5, 14)$$

К этой формуле относится сказанное применительно к (5, 12). Наконец, из равенств (1, 8), (5, 12) и (5, 13) в области S_2 будем иметь

$$\varphi_2(z) = -(1-\lambda) \sum_{k=5}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R} \right)^{k+1} + \lambda a_{-1} + d_0 + iC. \quad (5, 15)$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой, что найденные функции точно удовлетворяют контактными условиям (1, 1) и (1, 2) на окружности L_2 . Значения величины

$$\Delta\% = \frac{\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} - t \bar{t}}{t \bar{t}} \cdot 100\%,$$

характеризующие степень точности, с которой найденная $\varphi_1(z)$ удовлетворяет граничным условиям в точках $t = a$, $t = be^{i\frac{\pi}{2}}$ для рассматриваемого примера, соответственно равны 0,0042—0,0063%. Таким образом, граничное условие выполняется весьма точно и на границе L_1 .

Таблица 2

z	a	$\frac{R+a}{2}$	R	$Re^{i\frac{\pi}{2}}$	$\frac{R+b}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$	$be^{i\frac{\pi}{2}}$
$\frac{\mu}{b^3} \tau^{(1)}$	0,0249	0,0267	0,0286	0,0294	0,0315	0,0336
$\frac{\mu}{b^3} \tau^{(2)}$			0,5712	0,5872		

§ 6. На основании (2, 1), (5, 14) и (5, 15) известная формула для определения жесткости при кручении [1] примет вид

$$D = \frac{1}{2} \frac{\pi R^4}{\mu_1} \left\{ \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{A}{R} \right)^4 \left[1,5344 - \frac{\pi}{2} \left(\frac{R}{A} \right)^4 \right] + \right.$$

$$\left. + 6 \mu_1 A^2 m \pi \left\{ \sum_{n=6}^{\infty} a_n \times \sum_{v=0}^n D_{\frac{n-v}{6}}^{(n)} \left(C_v^{\frac{v+6}{6}} m^{\frac{v+6}{6}} - C_v^{\frac{v-6}{6}} m^{\frac{v-6}{6}} \right) - \lambda a_5 \left(\frac{R}{A} \right)^6 \right\} \right\}.$$

Для разбираемого примера $D = 34,88 \mu_1 R^4$ и значения компонентов касательных напряжений приведены в табл. 2.

На рисунке показаны эпюры полных касательных напряжений в долях μb^{-3} в точках сечения, лежащих на осях x и y . Из этих эпюр видно, что при армировании происходит сильное снижение напряжений как периферийной, так и центральной частей армированного бруса. Наибольшее напряжение в средней точке стороны криволинейного шестиугольника армированного бруса составляет лишь 5,04% от расчетного напряжения в сплошном брус. Отсюда видно, что значительная часть крутящего момента приходится на ядро.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954.
2. Шерман Д. И. Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инженерный сб. Ин-та механики АН СССР, т. X, 1951.
3. Амензаде Ю. А. Кручение призматического бруса с квадратным сечением армированного круговым стержнем, т. 2, АН Азерб. ССР, 1958.

4. Нейман М. Н.—Кручение кругового цилиндра, имеющего соосную многогранную полость. В сб. "Расчеты на прочность", вып. 3, 1958.
5. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1951.

АзПИ

Поступило 3. VII 1967

У. К. Чэфаров

Даирэви чубугла долдурулараг мөһкәмләндирилмиш дүзкүн алтыбучаглы призманын бурулмасы мәсәләсинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә мәркәزلәри бир-биринин үзәринә дүшмәк шәрти илә дүзкүн алтыбучаглы призмаја кејдирилмиш, мүхтәлиф бирчинсли вә изотроп материаллардан һазырланмыш призматик брусун бурулмасы мәсәләсинә бахылмышдыр. Брусун ен кәсији мәркәзиндән даирә чыхарылмыш S_1 вә S_2 даирәшәкилли областларындан ибарәтдир. Брусун кәркинликли вәзијјәтини тәјин едән вә ујғун сурәтдә S_1 вә S_2 областларында регулјар олмагла (1, 1), (1, 2), (1, 3) сәрһәд шәртләрини өдәјән $\varphi_1(z)$ вә $\varphi_2(z)$ функцијалары тәјин едилмишдир. Гүввәт сырасы шәклиндә тәјин олунан бу функцијаларын мәчһул әмсалларыны тапмаг үчүн сонсуз хәтти чәбри тәнликләр системи (5, 8) гурулмушдур. Кәсијин мүәјјән нисби өлчүләри үчүн системин биринчи өн тәнлији һәлл едилиб, $\varphi_1(z)$ вә $\varphi_2(z)$ регулјар функцијалары, һәмчинин бахылан брусун бурулмада сәртлији һесапланмышдыр. Бундан башга, кәсијин характер нөгтәләриндә кәркинликләр тәјин едилмиш вә бу кәркинликләрин епүрләри гурулмушдур.

Һесабламалардан көрүнүр ки, ишин бөјүк һиссәси кәсијин өзәјинә дүшүр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийјат елмләри серијасы, 1970, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 6

УДК 621. 036—2

Н. Б. КАДИРОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОТДАЧИ ОТ ГАЗА К СТЕНКЕ ЦИЛИНДРА КОМПРЕССОРА

В работе [1] рассмотрено явление взаимодействия газовых частиц с соприкасающейся с ними стенкой и выведены формулы для определения проекций скоростей молекул газа в конце их удара об атомы этой стенки. Указанные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} u'_{1x} &= v_{10} - \frac{2(v_{10} - v_{20})}{1 + \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1 c_2}{m_2 c_1} \frac{v_{20}}{v_{10} - v_{20}}}, \\ u'_{2x} &= v_{10} - \frac{2(v_{10} + v_{20})}{1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1 c_2}{m_2 c_1} \frac{v_{20}}{v_{10} + v_{20}}}. \end{aligned} \quad (1)$$

С помощью (1) в настоящей статье дается вывод формулы для определения коэффициента теплоотдачи от газа к стенке цилиндра на основе кинетической теории материи. Как известно из кинетической теории материи [2], число молекул, ударяющихся в единицу времени об элемент стенки площадью, равной единице, составляет $\frac{v v_{10}}{6}$. Будем считать, что половина этих молекул соударяется с атомами, движущимися в направлении внешней нормали, а другая половина — с атомами, движущимися в направлении внутренней нормали к элементу стенки. Тогда на основании теоремы о количестве движения применительно к удару газовых молекул об атомы стенки можем написать

$$P = \frac{v v_{10}}{12} (2 m_1 v_{10} - m_1 u'_{1x} - m_1 u''_{1x}), \quad (2)$$

где P — давление газа на единицу площади стенки цилиндра. Количество энергии, отдаваемое в единицу времени молекулами газа атомам стенки, отнесенное к единице ее площади, будет

$$q = \frac{v v_{10}}{12} \left[m_1 v_{10}^2 - \frac{m_1 (u'_{1x})^2}{2} - \frac{m_1 (u''_{1x})^2}{2} \right]. \quad (3)$$

В соответствии с основными положениями кинетической теории материи [2]

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{848}{N} T_n, \quad \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{848}{N} T_c,$$

где N — число молекул в одном килограмм-моле газа.

Из этих выражений находим

$$v_{10} = \sqrt{\frac{2544 g T_n}{\mu_1}} \quad \text{и} \quad v_{20} = \sqrt{\frac{2544 g T_c}{\mu_2}}, \quad (4)$$

где μ_1 и μ_2 — веса в килограммах одного моля и газа и паров металла стенки.

Подставляя в (3) значения u'_{1x} и u'_{2x} из формул (1), после необходимых преобразований с учетом выражений (2) и (4) получим

$$q = \sqrt{\frac{2544 g}{\mu_1}} \sqrt{T_n} P_c \cdot \frac{\varphi_1\left(\frac{T_c}{T_n}\right) - \varphi_1^2\left(\frac{T_c}{T_n}\right) + \varphi_2\left(\frac{T_c}{T_n}\right) - \varphi_2^2\left(\frac{T_c}{T_n}\right)}{\varphi_1\left(\frac{T_c}{T_n}\right) + \varphi_2\left(\frac{T_c}{T_n}\right)}, \quad (5)$$

где

$$\varphi_1\left(\frac{T_c}{T_n}\right) = \frac{1 - \sqrt{\frac{\mu_1 T_c}{\mu_2 T_n}}}{1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1 c_2}{m_2 c_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_2 T_n}{\mu_1 T_c} - 1}}};$$

$$\varphi_2\left(\frac{T_c}{T_n}\right) = \frac{1 + \sqrt{\frac{\mu_1 T_c}{\mu_2 T_n}}}{1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1 c_2}{m_2 c_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_2 T_n}{\mu_1 T_c} + 1}}}.$$

Найдем теперь значение неизвестной величины $\frac{m_1 c_2}{m_2 c_1}$, входящей в это выражение. Указанную величину можно определить из следующего условия: если температура T_n в пограничном слое газа равна температуре стенки, то количество тепла, отданное газом стенке, должно равняться нулю. Принимая, следовательно, $T_n = T_c$ и имея в виду, что для соударяющихся молекул воздуха и атома стенки из серого чугуна $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{28,95}{55} = 0,527$, на основании вышеизложенного, приравнявая нулю правую часть выражения (5), находим подходящее значение $\frac{m_1 c_2}{m_2 c_1} = 0,473$.

Следует отметить, что формула (5) справедлива для одноатомного газа, молекулы которого обладают тремя степенями свободы. В случае многоатомного газа с молекулами, имеющими n степеней свободы, правую часть формулы (5) следует умножать на коэффициент $\frac{n}{3}$.

Исходя из вышеизложенного, подставляя значение $\frac{m_1 c_2}{m_2 c_1} = 0,473$, в формулу (5) и умножив ее правую часть на $\frac{n}{3,427}$, получим окончательное выражение для определения количества тепла, отданного газом (воздухом) в процессе теплообмена единице площади стенки в единицу времени (в тепловых единицах):

* Это вытекает из положения Максвелла—Больцмана о том, что энергия, подведенная к системе материальных точек, каковой является газ, равномерно распределяется по степеням свободы газовых молекул.

$$q = 0,124 \frac{n P \sqrt{T_n}}{\sqrt{\mu_1}} \cdot \varphi\left(\frac{T_c}{T_n}\right), \quad (6)$$

где

$$\varphi\left(\frac{T_c}{T_n}\right) = \frac{\varphi\left(\frac{T_c}{T_n}\right) - \varphi_1^2\left(\frac{T_c}{T_n}\right) + \varphi_2\left(\frac{T_c}{T_n}\right) - \varphi_2^2\left(\frac{T_c}{T_n}\right)}{\varphi_1\left(\frac{T_c}{T_n}\right) + \varphi_2\left(\frac{T_c}{T_n}\right)}.$$

С другой стороны, на основании закона Ньютона

$$q = \alpha (T - T_c), \quad (7)$$

где T — температура газа, α — коэффициент теплоотдачи от газа к стенке цилиндра.

Исключив из выражений (6) и (7) величину q , получим формулу для определения коэффициента теплоотдачи от газа к стенке цилиндра:

$$\alpha = \frac{0,124 n P \sqrt{T_n}}{\sqrt{\mu_1} (T - T_c)} \cdot \varphi\left(\frac{T_c}{T_n}\right). \quad (8)$$

Эта формула показывает, что коэффициент теплоотдачи зависит от давления газа P на стенку, температуры T_n в его пограничном слое, от средней температуры газа T и от температуры стенки T_c . Кроме того, коэффициент теплоотдачи зависит от молярных весов газа и материала стенки, а также от свойств сил сцепления между ее атомами.

Найдем теперь значение температуры T_n в пограничном слое газа, входящей в формулу (8). При работе компрессора вблизи стенок цилиндра образуется так называемый тонкий пограничный слой газа, соприкасающийся со стенками цилиндра, где температура газа значительно меньше температуры в основной его массе (в ядре), которую с достаточной степенью точности можно принимать за среднее значение температуры газа.

При движении поршня происходит непрерывный процесс тепло- и массообмена между пограничным слоем и основным ядром газа за счет перемещения частиц из ядра в пограничный слой и обратно. Эти перемещения частиц обусловлены в основном движением газовых молекул, которое усиливается вихревым движением газа в цилиндре. Частицы газа, обладающие большей энергией, попадая в пограничный слой, отдают часть своей энергии частицам этого слоя, которые, в свою очередь, передают полученную ими энергию стенке цилиндра. Затем эти частицы вытесняются другими и снова возвращаются в турбулентное ядро газа, после чего описанное явление вновь повторяется.

Если пренебречь влиянием вихревого движения газа в цилиндре на процесс теплообмена, то количества тепла, отданное в единицу времени турбулентным ядром пограничному слою газа, отнесенное к единице его площади, составит

$$q_1 = \frac{\lambda}{\delta} (T - T_n),$$

где δ — толщина слоя турбулентного ядра, через который проходит тепло.

Заметим, что количество тепла q_1 передается от турбулентного ядра к пограничному слою газа как в направлении нормали к боковой стенке, так и в осевом направлении цилиндра. В соответствии с этим

величина δ для указанных направлений перехода тепла может быть принята, соответственно, равной одной шестой диаметра цилиндра D и четверти расстояния $S_p - S$ между крышкой цилиндра и поршнем в данный момент времени τ . Тогда последнее выражение применительно ко всей поверхности цилиндра примет вид

$$q_1 = \frac{2\lambda \left(3 \frac{S_p - S}{D} + \frac{D}{S_p - S} \right) (T - T_n)}{\frac{D}{2} + S_p - S}, \quad (9)$$

где S_p — ход поршня, S — пройденный путь поршнем за промежуток времени τ , который определяется из выражения

$$S = \frac{S_p}{2} (1 - \cos \omega \tau); \quad (10)$$

ω — угловая скорость вращения вала компрессора.

Количество тепла, передаваемое в единицу времени турбулентным ядром пограничному слою в результате вихревого движения газа в цилиндре, можно определить из выражения

$$q_2 = \omega \gamma C_v (T - T_n), \quad (11)$$

где ω — скорость видимого движения частиц газа в направлении к стенке, возникающего в результате протекания газа по каналу в щели открытого клапана, а также движения поршня внутри цилиндра.

Найдем скорость ω , исходя из следующих соображений. Если в единицу времени через щель клапана из фиксированного объема цилиндра компрессора вытекает весовое количество газа G_k со скоростью $\bar{w}_k$ и одновременно в результате движения поршня со скоростью $\bar{w}_n$ возникает количество движения, равное $F_n \bar{w}_n \frac{\gamma}{g} \bar{w}_n$, то на основании теоремы Эйлера можем написать

$$F_n \bar{w}_n \frac{\gamma}{g} \bar{w}_n - \frac{G_k}{g} \bar{w}_k = \bar{R}_n, \quad (12)$$

где $F_n = \frac{\pi D^2}{4}$ — площадь поршня,

$\bar{R}_n$ — главный вектор поверхностных сил, возникающих в результате движения газа через щель открытого клапана и поршня.

Сила $\bar{R}_n$, действующая на находящийся в цилиндре газ, в свою очередь, вызывает видимое его движение внутри цилиндра.

Согласно теореме о количестве движения газа в направлениях нормалей к боковой и торцевой стенкам цилиндра со скоростями, соответственно равными $\bar{w}_6$ и $\bar{w}_t$, будем иметь

$$\bar{R}_n = 2\pi D (S_p - S) \bar{w}_6 \frac{\gamma}{g} \bar{w}_6 - 4 F_n \frac{\gamma}{g} \bar{w}_t \cdot \bar{w}_t. \quad (13)$$

Проектируя векторные выражения (12) и (13) на указанные выше направления движения газа, получим, соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{G_k}{g} \bar{w}_k &= 2\pi D (S_p - S) \frac{\gamma}{g} \bar{w}_6^2, \\ F_n \frac{\gamma}{g} \bar{w}_n^2 &= 4 F_n \frac{\gamma}{g} \bar{w}_t^2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Согласно закону сохранения массы газа можем написать:

$$G_k = F_n \bar{w}_n \gamma - V \frac{d\gamma}{d\tau}, \quad (15)$$

где V — объем газа внутри цилиндра в данный момент времени τ .

Пренебрегая изменением удельного веса газа $\frac{d\gamma}{d\tau}$ внутри цилиндра в периоды протекания его через клапан, из выражений (14) с учетом зависимости (15) находим скорости видимого движения газа в направлениях к боковой и торцевой стенкам цилиндра:

$$\bar{w}_6 = \frac{\bar{w}_n}{2} \sqrt{\frac{D}{2(S_p - S)}} \cdot \frac{\bar{w}_k}{\bar{w}_n} \text{ и } \bar{w}_t = \frac{\bar{w}_n}{2}. \quad (16)$$

Тогда выражение (11) применительно ко всем направлениям движения газа внутри цилиндра запишется следующим образом:

$$q_2 = \frac{\frac{\bar{w}_n D}{2} \left(\sqrt{\frac{\bar{w}_k}{\bar{w}_n} \frac{S_p - S}{2D}} + \frac{1}{2} \right) \gamma C_v (T - T_n)}{\frac{D}{2} + S_p - S}.$$

Сложив почленно это выражение с (9), получим формулу для определения количества тепла, передаваемого в единицу времени турбулентным ядром пограничному слою газа внутри цилиндра, отнесенного к единице площади последнего:

$$q = \frac{\left[\frac{2\lambda}{D} \left(3 \frac{S_p - S}{D} + \frac{D}{S_p - S} \right) + \frac{1}{2} + \frac{S_p - S}{D} \right] + \frac{\bar{w}_n}{2} \left(\sqrt{\frac{\bar{w}_k}{\bar{w}_n} \frac{S_p - S}{2D}} - \frac{1}{2} \right) \gamma C_v}{(T - T_n)} \quad (17)$$

Исключив из выражений (6) и (17) величину q , с учетом зависимости (10) будем иметь

$$\left[\frac{2}{\Pi_g} \left(\frac{3 S_p \cos^2 \frac{\omega \tau}{2}}{D} + \frac{D}{S_p \cos^2 \frac{\omega \tau}{2}} \right) + \frac{\left(\sqrt{\frac{\bar{w}_k}{\bar{w}_n} \frac{S_p}{2D} \cos^2 \frac{\omega \tau}{2}} + \frac{1}{2} \right) \sin \omega \tau}{\frac{1}{2} + \frac{S_p}{D} \cos^2 \frac{\omega \tau}{2}} \right] \left(\frac{T}{T_n} - 1 \right) = \sqrt{\frac{T}{T_n}} \varphi \left(\frac{T_c}{T} \cdot \frac{T}{T_n} \right), \quad (18)$$

где $\Pi_d = \frac{0,124 n D p}{\sqrt{\mu_1} \cdot \lambda \sqrt{T}}$, $\Pi_n = \frac{C_v \sqrt{\mu_1} \omega S_p}{0,496 n z R \sqrt{T}}$.

Из выражения (18) находим неизвестное значение симплекса температуры:

$$\frac{T}{T_n} = \psi \left(\Pi_d, \Pi_n, \frac{T_c}{T}, \omega \tau \right).$$

Подставляя, наконец, значение $\frac{T}{T_p}$ в формулу (8), получим окончательную формулу для определения коэффициента теплоотдачи от газа к стенке цилиндра компрессора в данный момент времени τ :

$$\alpha = \frac{0,124 \cdot nP}{\sqrt{\rho_1} \sqrt{T}} \cdot \theta \left(P_d, P_n, \frac{T_c}{T}, \omega\tau \right), \quad (19)$$

$$\text{где } \theta \left(P_g, P_n, \frac{T_c}{T}, \omega\tau \right) = \frac{\varphi \left[\frac{T_c}{T} \cdot \psi \left(P_g, P_n, \frac{T_c}{T}, \omega\tau \right) \right]}{\left(1 - \frac{T_c}{T} \right) \sqrt{\psi \left(P_d, P_n, \frac{T_c}{T}, \omega\tau \right)}}.$$

Формула (19) показывает, что коэффициент теплоотдачи от газа к стенкам цилиндра зависит от температуры и давления газа, а также от отношения температур стенки и газа и безразмерных параметров P_g, P_n , которые, в свою очередь, являются сложными функциями параметров состояния газа и других факторов, определяющих процесс передачи тепла от стенок цилиндра к охлаждающей их воде в данный момент времени τ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадилов Н. Б. „Изв. АН Азерб. ССР“, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1968, № 2.
2. Тимирязев А. К. Кинетическая теория материи. МГУ. 1954.
3. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И. Курс теоретической механики. Гостехиздат, 1955.

АзПИ

Поступило 3. IV 1969

Н. Б. Гадиров

Газдан цилиндр диварына истиликвермэ эмсалынын тапылмасы үчүн нэзери формул

ХҮЛАСЭ

Эввэлки тэдгигатда газ хиссэциклэринин онунла тохунан цилиндр дивары илэ гаршылыгы тэ'сир надисэсинэ бахылмыш вэ газ молекуларынын дивар атомларына вурдугу зэрбэдэн сонракы сүр'этлэринин тапылмасы үчүн формуллар чыхарылмышдыр. Нэмин формуллардан истифадэ едэрэк, бу мэгалэдэ маддэнин кинетик нэзэријјэсинэ эсасэн, газ илэ цилиндр дивары арасында баш верэн истилик мүбадилэси просеси өјрэнилмишдир.

Бу мэгсэдлэ газын сэрһэд тэбэгэсинин цилиндр диварына вердиј, енержини кэмийјэтчэ несабламаг үчүн формул јазылмышдыр. Нэмин енержијэ газын турбулент нүвэсинин истиликкечирмэ вэ газ хиссэциклэринин көрүнэн јердэјишмэси нэтичэсиндэ сэрһэд тэбэгэсинэ вердиј истилик мигдары кими бахараг, даһа сонра газын сэрһэд тэбэгэсинин температуруну тапмаға имкан верэн асылылыг чыхарылмышдыр. Бу формул вэ асылылыға эсасэн, газдан компрессоруна формул алынмышдыр. Нэмин формулдан истифадэ едэрэк, газын һал параметрлэри, диварын температур вэ физики хассэсиндэн, нэмчинин лэрини тэ'јин едэн дикэр амиллэрдэн асылы олараг, газдан цилиндр несабламаг мүмкүндүр.

И. А. АЛИЕВА, Н. ИЮЩЕНКОВА

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В СТРУЕ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ Ag С ПРИМЕСЬЮ CO₂

Исследование процессов релаксации электронной температуры в потоке низкотемпературной плазмы представляет существенный интерес для расчетов электрофизических параметров течения в соплах МГД-генераторов и аэродинамических плазменных установок. Из работ [1, 2] следует, что в неравновесной плазме изменение температуры электронов может происходить вследствие неупругих процессов обмена энергией с молекулами по механизму $AB = e \rightarrow AB^{-V} \rightarrow AB^{-V} + e$, где AB — молекулы CO₂, N₂, H₂.

В настоящей работе исследовалось влияние примеси CO₂ на релаксацию электронной температуры и распределение концентрации электронов в сверхзвуковом расширяющемся потоке низкотемпературной плазмы Ag. Экспериментальные исследования проводились в вакуумной аэродинамической установке с плазменным электродуговым подогревом, описанной в [3]. Область исследований соответствовала параметрам торможения: $T_{ог} = 3000 - 4000^\circ\text{K}$ (определявшейся по тепловому балансу плазмотрона), $T_{e0} = 6000 - 8000^\circ\text{K}$ (измеренной оптическим методом с помощью кварцевого световода, введенного в ресивер), $P_0 = 100 - 200$ мм рт. ст. и степени ионизации плазмы $\alpha_e = 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}$, т. е. при слабом влиянии ионизационных процессов на грузовую динамику течения.

Для создания сверхзвуковых потоков применялись сверхзвуковые конические сопла с различными расширениями, позволявшими получать различные числа Маха на срезе (табл. 1). Определение газодинамических параметров в потоке производились на основании измерения давлений полного напора и параметров на входе в сопло с использованием формул $\frac{P_0}{P_0} f(M, \gamma)$ и Рэлея; поправки в показания зондов

полного напора за счет вязкости, разреженности и термической неравновесности вводились на основании [4]. Для определения концентрации и температур электронов в сверхзвуковой струе применялся зонд Ленгмюра, работавший в молекулярном режиме обтекания. Электронная температура измерялась также методом относительных интенсивностей спектральных линий AgI: $\lambda_1 = 4272 \text{ Å}$ и $\lambda_2 = 4259 \text{ Å}$ [5]. Экспериментальные исследования течения в сопле и струе показали, что созданная сверхзвуковая струя чистой аргоновой плазмы характеризовалась слабым изменением T_e при $M \geq 5$ и заморожен-

ными степенями ионизации при $M \approx 1$. Замораживание температур электронов в струе чистой аргонной плазмы при числах $M = 8 \div 10$ позволяло при введении примеси CO_2 экспериментально определить влияние процесса неупругого обмена энергией на релаксацию T_e . Для теоретической оценки кинетической картины течения применялось отношение τ_r/τ_p , характеризующее степень отклонения релаксирующего параметра от равновесных значений [6]. Время релаксии химических, электронно-ионных и колебательных процессов в потоке аргона с примесью CO_2 (табл. 2) рассчитывалось на основании [7, 8, 9] и измеренного распределения газодинамических параметров в потоке.

Таблица 1

Параметры на срезе сопел (a —срез сопла; $кр$ —критическое сечение сопла)

Сопло	$d_{кр}$ [мм]	d_a [мм]	ξ	$M_{aид}$	$M_{aид}$	P_a [мм рт. ст.]	n_a [см $^{-3}$]
1	4,5	50	21°	12,1	8,7	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{15}$
2	4,6	15	19°	5,3	5,2	$4,2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{16}$
3	4,5	3,1	15°	3,5	3,2	$8,6 \cdot 10^{-1}$	10^{16}

Обозначения:

T —температура,
 P —давление,
 M —число Маха,
 τ —время релаксации,
 W —скорость обмена энергии электрона с молекулой

Для выяснения влияния CO_2 на релаксацию T_e были применены различные методы вдува примеси, позволившие варьировать значение колебательной температуры: 1—в дозвуковую часть сопла; 2—перпендикулярно основному потоку за срезом сверхзвукового сопла; 3—в камеру истечения сверхзвуковой струи Ar (рис. 1). При введении CO_2 в дозвуковую часть сопла в смеси $\text{Ar}-\text{CO}_2$ протекают химические реакции и процессы колебательного возбуждения молекул (табл. 2).

Таблица 2

Основные элементарные процессы в слабоионизированном аргоне с примесью CO_2 при $T=4000:2000^\circ\text{K}$ и $T_e=6000:3000^\circ\text{K}$

Химические реакции	Колебательные процессы	Электронно-ионные процессы
I. $\text{CO}_2 + \text{Ar} \rightleftharpoons \text{CO} + \text{O} + \text{Ar}$ II. $\text{CO}_2 + \text{O} \rightleftharpoons \text{CO} + \text{O}_2$ III. $\text{O} + \text{O} + \text{Ar} \rightleftharpoons \text{O}_2 + \text{Ar}$	(IV) $\text{CO}_2(100) + M = \text{CO}_2(010) + M$ (V) $\text{CO}_2(010) + M = \text{CO}_2(000) + M$ (VI) $\text{CO}_2(001) + M = \text{CO}_2(110) + M$ (VII) $\text{CO}_2(001) + M = \text{CO}_2(100) + M$, где $M = \text{Ar}, \text{CO}_2$ (VIII) $\text{CO}_2 + e = \text{CO}_2(001) + e$ (IX) $\text{CO}_2 + e = \text{CO}_2(002) + e$ (X) $\text{CO}_2 + e = \text{CO}_2(010) + e$	(XI) $\text{Ar} + \text{Ar} \rightleftharpoons \text{Ar}^+ + e + \text{Ar}$ (XII) $\text{Ar} + \text{Ar} \rightleftharpoons \text{Ar}^+ + 2e$ (XIII) $\text{Ar} + \text{AB} \rightleftharpoons \text{AB}^+ + \text{Ar}$ (XIV) $\text{AB}^+ + e \rightleftharpoons \text{AB} + \text{B}$ (XV) $\text{AB} + e \rightleftharpoons \text{AB} + \text{B}^-$ AB—молекулярный газ

Из сопоставления величин времени τ и $\tau_{р\text{хим}}$ следует, что в области течения $M \leq 0,2$ происходит неравновесное протекание химических реакций (I), реакции II, III заморожены; в области $M \approx 1$ состав смеси замораживается (табл. 3). Замораживание энергий колебатель-

ных степеней свободы CO_2 (v_2) и CO_2 (v_3) происходит в сверхзвуковой области (при числах $M_{\text{зам}} = 1,3 \div 1,1$, что соответствует $T_{v_{\text{зам}}} = 2800-3000^\circ\text{K}$). Расчет времени релаксации электронно-ионных процессов показал, что рекомбинационные процессы замораживаются вблизи критического сечения сопла, т. е. степень ионизации газа не изменяется в сверхзвуковом потоке. Оценка времени релаксации T_e , обусловленная процессами обмена энергией электронов с Ar и Ar^+ (τ_{em} и τ_{ei}) и произведенная на основании данных по сечениям [10], показала (табл. 3), что T_e замораживается при числах Маха $8 \div 10$

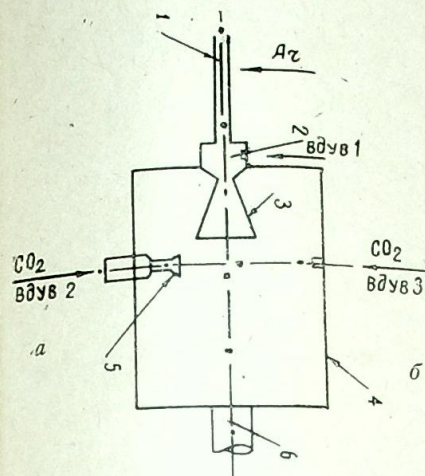


Рис. 1а. Схема проводимого эксперимента: 1—вольфрамовый катод (—); 2—ресивер плазмотрона; 3—медное сопло (+); 4—вакуумная камера; 5—сопло вдува; 6—отвод к насосам.

Рис. 1б. Фотография струи при сверхзвуковом вдуве.

($T_e = 3800^\circ\text{K}$). Следовательно, вдув (I) соответствует $\frac{T_{v_{\text{зам}}}^{\text{CO}_2}}{T_e} = 0,8 \div 0,7$ в рабочем участке течения. Количество вдуваемого газа составляло 3—5% от расхода аргона, что соответствовало частоте столкновения электрона с CO_2 в рабочем участке при $M = 8 \div 10$, $v = 2 \div 5 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$.

Таблица 3

Параметры течения в дозвуковой и сверхзвуковой части сопла и струе аргонной плазмы с примесью CO_2 (95% $\text{Ar} + 5\% \text{CO}_2$) $\tau_r = 10^{-5} - 10^{-6} \text{ сек}$ при $M \geq 1$, $t = 10^{-3} \text{ сек}$ при $M < 1$

M	$T_r [^\circ\text{K}]$	n [см $^{-3}$]	$\tau_{р\text{хим}}$ [сек]	$\tau_{\text{пол}}$ [сек]	τ_{em} [сек]	τ_{ei} [сек]
0,2	4000	$4 \cdot 10^{17}$ (I)	10^{-4}	$8 \cdot 10^{-6}$ (v_1)	10^{-5}	$3 \cdot 10^{-6}$
		(II)	$8 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-7}$ (v_2)		
		(III)	$2 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-6}$ (v_3)		
1	3000	$2 \cdot 10^{17}$ (I)	$2 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-6}$ (v_1)	$6 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$
		(II)	$8 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-6}$ (v_2)		
		(III)	$2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-5}$ (v_3)		
3	1500	$6 \cdot 10^{16}$ (I)	10^{-1}	10^{-3} (v_1)	$6 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-6}$
		(II)	> 1	10^{-4} (v_2)		
		(III)	> 1	10^{-3} (v_3)		
5,2	179	$7 \cdot 10^{15}$ (I, II, III)	> 1	> 1 (v_1)	$7 \cdot 10^{-4}$	10^{-5}
8,7	73	$2 \cdot 10^{15}$ (I, II, III)	> 1	> 1 (v_2)	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$
13	35	$9 \cdot 10^{14}$ (I, II, III)	> 1	> 1 (v_3)	10^{-2}	10^{-4}

Сверхзвуковой вдув газа (CO_2 или Ar) в струю плазмы аргона сопровождался образованием ударной волны (рис. 1б). Исследование параметров течения проводилось за фронтом ударной волны — в зоне смещения потоков. Расход вдуваемых газов (Ar или CO_2) составлял 0,1 от расхода плазмы аргона, истекавшей через основное сопло.

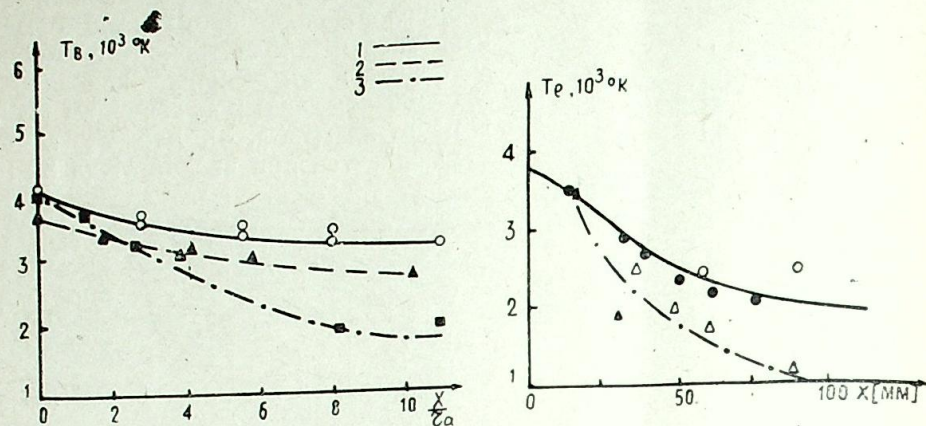


Рис. 2. Распределение T_e вдоль оси струи $\text{Ar}-\text{Ar}$ (1), $\text{Ar}-\text{CO}_2$ (2, 3); 2—введение CO_2 в дозвуковую часть сопла; 3—введение в вакуумную камеру; $\bullet \triangle \blacksquare$ — оптический метод; $\circ \triangle \square$ — зондовый метод; а) $\frac{x}{r_a} = 0$ — срез сопла 2; б) $x = 0$ — срез сопла 3 ($r_a = 7,5$ мм).

Число Ма на срезе сопла вдува, оцененное на основании одномерной теории расширения, составляло $4,2 \div 3,2$.

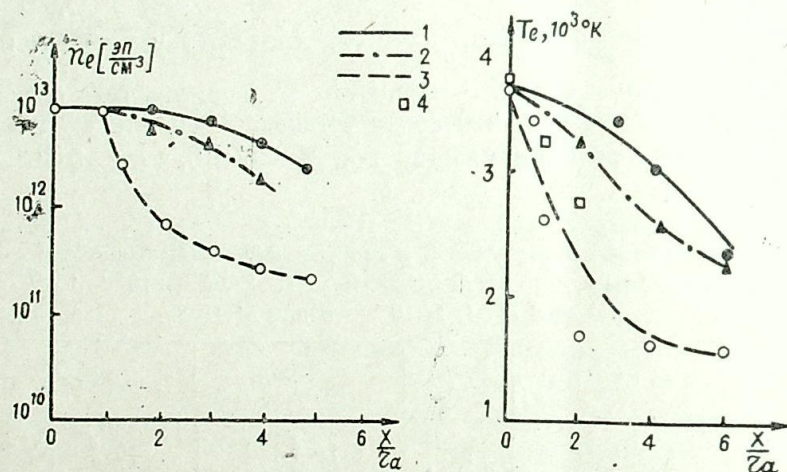


Рис. 3. Распределение n_e и T_e вдоль оси струи Ar (1) $\text{Ar}-\text{Ar}$ (2) и $\text{Ar}-\text{CO}_2$ (3, 4) при сверхзвуковом вдуве CO_2 и 1, 2, 3 — зондовый метод; 4 — оптический метод; $\frac{x}{r_a} = 0$ — срез сопла 1 ($r_a = 25$ мм).

Третьим способом, позволяющим создать смесь $\text{Ar}-\text{CO}_2$, являлось введение CO_2 в вакуумную камеру. Из-за низких давлений в струе ($P = 20 - 10$ мм рт. ст.) время релаксации процессов колебательного возбуждения различных степеней свободы CO_2 в зоне смещения больше газодинамического времени ($\tau_r = 10^{-5}$ сек, $\tau_{rv} = 10^{-3} \div 10^{-2}$ сек), что приводило к низким колебательным температурам CO_2 ($T_{v_{\text{зам}}} - 300^\circ\text{K}$

и значению $\frac{T_{v_{\text{зам}}}}{T_e} = 0,1$. Результаты измерений электрофизических параметров на срезе экспериментальных сопел (при вдуве 1) и в потоке смеси $\text{Ar}-\text{CO}_2$ (при вдувах 1, 2, 3) показали, что и T_e в смеси $\text{Ar}-\text{CO}_2$ отличаются от соответствующих значений их в потоке чистой аргонной плазмы, что указывает на влияние неупругого обмена энергией при столкновении CO_2 с электроном. Снижение T_e на $700 \div 800^\circ\text{K}$ (вдув 1) происходило в той области течения ($M = 8 \div 10$), где без CO_2 температура электронов сохранялась замороженной вдоль потока. Введение холодного Ar как в дозвуковую часть сопла, так и в струю Ar за срезом практически не изменяло N_e и T_e .

При введении CO_2 (вдув 2) концентрация электронов в зоне смещения струи уменьшалась в 2—3 раза, а T_e — в 1,5—2 раза (рис. 3). При введении примеси CO_2 в камеру (вдув 3) температура уменьшалась на $800 \div 1000^\circ\text{K}$ (рис. 2). Снижение T_e при вдувах CO_2 подтверждает, что процесс неупругого обмена энергией между электроном и CO_2 характеризуется существенно большим сечением, чем процесс обмена энергией при столкновениях электрона с Ar и Ar^+ . Результаты экспериментальных исследований по полю T_e ($\frac{dT_e}{dt} = 4 \div 2 \cdot 10^{10}$

К/сек) при $M = 8 \div 12$) позволили оценить скорость обмена энергией между электронами и CO_2 вследствие механизма $\text{CO}_2 + e \rightarrow \text{CO}_2^+ + e$. Обработка опытных данных показала, что величина скорости обмена энергией электронов с CO_2 $W_{\text{кол}} = 10^{-22}$ эрг·см³/сек, а это существенно больше скорости обмена энергией при упругих столкновениях ($W_{\text{упр}} = 10^{-23}$ эрг·см³/сек) и скорости неупругого обмена при передаче энергии во вращение ($W_{\text{вр}} = 10^{-24}$ эрг·см³/сек). Результаты данной работы соответствуют теоретическим данным [2] для аналогичных механизмов с участием N_2 и медленных электронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герл И. Р. Сб. "Низкотемпературная плазма". М., 1967.
2. Биберман Л. М., Мнацаканян А. Х. ТВТ, 4, 491, 1966.
3. Ющенкова Н. И. и др. Тр. Всесоюз. конф. по теплофизическим свойствам веществ при высоких температурах. М., 1969.
4. Костерин С. И., Ющенкова Н. И., Камаев Б. Д., Белова Н. Т. "Инженерно физический журнал." т. 5, 1962, № 12.
4. Гольдфарб В. М., Ильина Е. В. Костыгина И. Е., Лукьянов Г. А. Силантьев В. А. ПМТФ, 1, 1967.
6. Kosterin S. A., Luchenkova N. L. X symposium (international) on combustion, 1963.
7. Кондратьев В. Н. Константы скорости газозных реакций. Справочник М., 1970.
7. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физики ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., 1966.
9. Ющенкова Н. И., Каленов Ю. А. "Ж. прикл. спектроскопии", II, 617, 1969.
10. Мэсси Г., Бархон Е. Электронно-ионные столкновения.

Институт химической физики АН СССР

Поступило 17. VII 1969

А. А. КУЛИЕВ, С. М. ГАДЖИЕВ, Р. Г. БАХЫШОВ, Х. Г. ХУДИЕВ

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ As—Se—T

Исследованию физических свойств халькогенидов типа $A^V B^VI C^{VII}$ посвящены работы [1, 2]. Известно, что физические свойства полупроводников сильно зависят от совершенства получаемых кристаллов. Поэтому в ряде исследований уделяется внимание изучению условий получения кристаллов соединения типа $AsB^{VI}C^{VII}$.

В работе [3] приводится диаграмма состояния системы As_2Se_3 — AsJ_3 , на которой показано, что в этой системе образуется соединение $AsSeJ$. Однако в литературе отсутствуют данные по термодинамическим и физико-химическим свойствам указанного соединения. Следует отметить, что для получения соединения стехиометрического состава, разлагающегося при плавлении, необходимы данные о давлении и составе пара над расплавом.

Настоящая статья посвящена изучению температурной зависимости давления пара, его состава и взаимодействия в паровой фазе системы $AsSeJ$ в широком интервале температур. Нами были измерены давления паров чистого йода, триодида мышьяка и над системой $As—Se—J$ статическим методом с кварцевым мембранным нуль-манометром [4]. В системе $As—Se—J$ количества компонентов соответствовали стехиометрическому составу соединения $As—Se—J$.

Использованные исходные вещества имели следующую чистоту: мышьяк марки В-5, селен марки „для выпрямителей“, йода марки „ЧДА“. Мышьаком и селеном в стехиометрических количествах, соответственно, заполняли ампулы, снабженные тонкими наконечниками. Затем их припаивали к предметной камере мембранного нуль-манометра. Систему обезвоживали, дегазировали непрерывной откачкой и нагреванием до $800^\circ C$. После охлаждения прибора до комнатной температуры (под откачкой) $0,0278$ г йода загружали непосредственно в предметную камеру мембранного нуль-манометра. Заполненный прибор помещали в печь и измеряли давление пара чистого йода. Методика измерения давления пара была такой же, как и в работе [5].

Давление измерялось U-образным ртутном манометром с точностью ± 3 мм рт. ст., температура хромель-алюмелевой термопары — с точностью $\pm 1^\circ C$. Во всех опытах для получения достоверных данных измерения давления пара производились как при нагревании, так и при охлаждении системы. По совпадению полученных данных судили о равновесности процесса. Объем реакционной камеры мембранного нуль-манометра определялся с точностью $\pm 0,1$ см³.

Результаты измерения представлены на рис. 1 и в таблице. Исходя из координат точки перехода А и объема реакционной камеры, определяли количество исходного йода, введенного в камеру мем-

№ п.п.	T, °K	P _{общ.}	P _J ⁰ = 0,6807	P _{As} ⁰ = 0,6537	P _{(AsSeJ)₃}	P _{AsJ}	P _{J₂}	P _{As₂Se₃}	10 ³ /T	lgK _p
1	726	200	493,68	474,08	141,9	45,8	11,0	1,1	1,377	0,5507
2	761	224	517,48	496,93	141,0	66,6	13,0	2,6	1,314	0,7882
3	783	242	532,44	511,29	140,0	82,5	14,7	4,3	1,277	0,9376
4	800	270	544,00	522,40	131,8	114,7	16,6	6,2	1,250	1,1614
5	837	314	569,16	546,56	119,5	152,9	28,01	12,3	1,195	1,5542
6	846	340	575,28	552,44	111,6	185,2	27,0	14,8	1,182	1,85,2
7	863	363	586,84	563,54	106,6	204,1	30,0	19,5	1,159	1,7602
8	877	386	596,36	572,68	100,3	221,1	36,4	25,7	1,140	1,9044
9	898	417	610,64	586,39	91,6	238,8	46,6	36,3	1,114	2,0856
10	913	456	620,84	596,19	77,5	271,1	56,2	46,3	1,095	2,2838
11	931	490	633,08	607,94	66,5	284,3	70,9	61,6	1,074	2,4790
12	943	510	641,24	615,78	61,1	285,8	82,0	73,1	1,060	2,5939
13	957	540	650,76	624,92	51,3	291,3	97,7	89,5	1,045	2,7441
14	979	594	665,72	639,29	32,4	348,3	103,6	96,7	1,021	3,0502
15	995	623	676,60	649,73	31,0	278,6	142,6	151,0	1,005	3,1163
16	1011	647	687,48	660,18	19,5	230,7	187,8	185,4	0,989	3,3467

бранного нуль-манометра, которое оказалось равным $0,0275$ г. После измерения и определения количества йода кончик ампулы, содержащей мышьяк, разбивали и измеряли общее давление пара над системой $As—J$.

Как видно из рис. 1, сначала давление пара йода убывает вследствие взаимодействия мышьяка и образования триодида [6]. Этот процесс заканчивается около $180^\circ C$, так как при данной температуре давление пара над системой $As—J$ равно 2—3 мм рт. ст. Начиная с $200^\circ C$, с увеличением температуры давление в системе растет, что объясняется испарением уже образовавшегося и расплавленного триодида мышьяка.

В работе [6] в интервале $285—455^\circ K$ приведены значения давления пара твердого и жидкого триодида мышьяка, а в [7] — давление пара жидкого триодида мышьяка в интервале $450—600^\circ K$. Полученные нами данные для указанных температурных интервалов согласуются с результатами работ [6, 7].

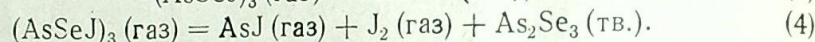
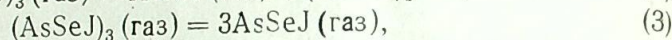
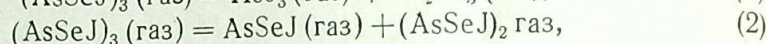
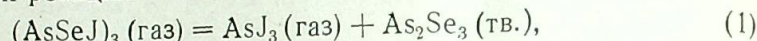
Как видно, в точке С для триодида мышьяка наблюдается переход из области насыщенного пара в область ненасыщенного. Исходя из значения координат этой точки и объема реакционной камеры мембранного нуль-манометра, определялось содержание триодида мышьяка ($0,0335$ г). Из найденного количества AsJ_3 (газ) определяли содержание йода, равное $0,0279$ г. Удовлетворительное совпадение найденного количества йода ($0,0279$ г) с исходным доказывает правильность предполагаемого механизма реакции образования и испарения триодида мышьяка. После измерения давления пара триодида мышьяка разбивали кончик ампулы, содержащей селен, и измеряли давление пара над системой $As—Se—J$. Полученные результаты также представлены на рис. 1. В присутствии селена кривая, отвечающая испарению AsJ_3 , в зависимости от температуры (выше точки В) давление, как в тер. В области ненасыщенного пара (выше точки В) давление, как в случае йода и триодида мышьяка (на рис. 1 линии P_m и P_n), не изменяется по линии термического расширения. При охлаждении системы давление воспроизводится по той же кривой.

Полученные данные позволяют произвести расчеты состава пара над системой $As—Se—J$. При расчете паровой фазы предполагалось, что от 200 до $300^\circ C$ уменьшение давления пара в системе $As—Se—J$ связано с взаимодействием компонентов и образованием $AsTeJ$ (тв.),

В работе [3] установлено, что температура плавления AsSeJ равна 240°C . Выше этой температуры увеличение значения давления в системе, по-видимому, связано с испарением или разложением AsSeJ . При протекании процесса разложения образующегося AsSeJ давление в системе резко возрастало бы за счет испарения AsJ_3 , поскольку давление пара As_2Se_3 [9] становится заметным выше 600°C . Полученные значения давления пара соответствовали значениям давлений трииодида мышьяка.

Исходя из координат точки B и объема реакционной камеры мембранного нуля-манометра и предполагая, что при температуре, соответствующей данной точке, в состав паровой фазы входит одна из газообразных молекул: (AsSeJ) , $(\text{AsSeJ})_2$, $(\text{AsSeJ})_3$, рассчитывались количества указанных газообразных соединений, которые равны, соответственно: $m_{\text{AsSeJ}} = 0,0202 \text{ г}$; $m_{\text{AsSeJ}_2} = 0,0404 \text{ г}$; $m_{\text{AsSeJ}_3} = 0,0606 \text{ г}$. Из этих величин определялось содержание йода, равное, соответственно: $0,000914$; $0,01827$ и $0,0277 \text{ г}$. Соответствие количества йода, содержащегося в $(\text{AsSeJ})_3$ исходному свидетельствует о том, что паровая фаза в интервале $330\text{--}350^\circ\text{C}$ состоит только из тримера $(\text{AsSeJ})_3$.

В работе [8] показано существование подобного типа молекулы тримера в газовой фазе системы Sb S—J (Sb—S—J)₃. Выше точки R с ростом температуры значение давления возрастает, что по-видимому, объясняется диссоциацией $(\text{AsSeJ})_3$ (газ) по одной из следующих возможных реакций:



При возможности протекания реакции (1) до начала заметной сублимации As_2Se_3 (тв.) [9] (600°C) значение давления пара в системе следовало бы по линии термического расширения (P_e). Однако, как видно из рис. 1, этого не наблюдается. Произведенные расчеты паровой фазы в предположении протекания реакций (2) и (3) не подтверждают этих механизмов равновесия. Состав паровой фазы рассчитывался в предположении, что равновесие в паре соответствует реакции (4), исходя из следующих уравнений, описывающих модель данной реакции:

1. Уравнения баланса парциальных давлений из экспериментального определения общего давления:

$$P_{\text{общ}} = P_{(\text{AsSeJ})_3} + P_{\text{AsJ}} + P_{\text{J}_2} + P_{\text{J}} + P_{\text{As}_2\text{Se}_3}. \quad (I)$$

2. Уравнения, отражающего изменение числа молей в реакции (4):

$$P_{\text{AsJ}} = P_{\text{J}_2}. \quad (II)$$

3. Уравнения сохранения количества исходного йода при пересчете на атомарный йод:

$$N_{\text{J}} \frac{RT}{V} = P_{\text{J}}^0 = 3 P_{(\text{AsSeJ})_3} + 2 P_{\text{J}_2} + P_{\text{AsJ}} + P_{\text{J}} \quad (III)$$

4. Молекулярный йод в зависимости от значения общего давления и температуры частично диссоциирует на атомарный [10]:

$$\lg k = \lg \frac{P_{\text{J}}^2}{P_{\text{J}_2}}. \quad (IV)$$

5. Уравнения сохранения количества исходного мышьяка при пересчете на атомарный мышьяк:

$$N_{\text{As}} \frac{RT}{V} = P_{\text{As}}^0 = P_{(\text{AsSeJ})_3} + P_{\text{AsJ}} + 2P_{\text{As}_2\text{Se}_3}. \quad (V)$$

В уравнениях (III) и (V) N_{J} и N_{As} — числа грамм-атомов исходного йода и мышьяка, соответственно; V — объем реакционной камеры мембранного нуля-манометра. Решая совместно систему вышеприведенных уравнений I—V относительно парциальных давлений $(\text{AsSeJ})_3$, AsJ , J_2 , J и As_2Se_3 , рассчитывался состав паровой фазы в интервале $450\text{--}850^\circ\text{C}$. Результаты расчета парциальных давлений, а также значений констант равновесия реакции (4) приведены в таблице.

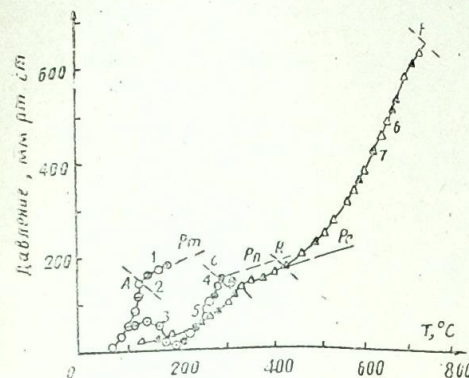


Рис. 1. Температурная зависимость давления пара системы As—Se—J : 1—нагрев; 2—охлаждение для чистого йода; 3—для системы As—J ; 4—нагрев; 5—охлаждение до точки C для AsJ_3 ; P_m, P_n, P_e — линия термического газового расширения; 6—нагрев; 7—охлаждение.

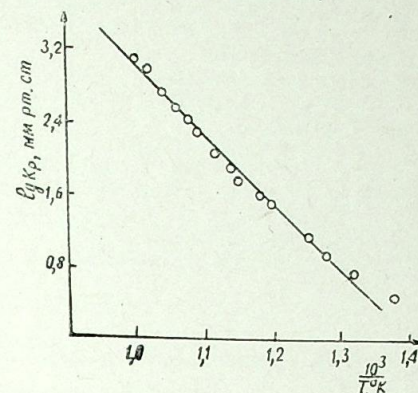


Рис. 2. Зависимость константы равновесия реакции $(\text{AsSeJ})_3 (\text{газ}) = \text{AsJ} (\text{газ}) + \text{J}_2 (\text{газ}) + \text{As}_2\text{Se}_3 (\text{тв})$ от температуры.

На рис. 2 представлена зависимость $\lg k_p$ реакции (4) от $\frac{1}{T}$. Значения $\lg k_p$ удовлетворительно ложатся на одну прямую линию в координатах $\lg k_p - \frac{1}{T}$. Это свидетельствует о том, что реакция (4) и составленные уравнения (I—V) удовлетворительно описывают предполагаемое равновесие в исследуемом температурном интервале ($725\text{--}1010^\circ\text{K}$).

Методом наименьших квадратов определялись коэффициенты уравнения зависимости $\lg k_p$ от температуры для реакции (4):

$$\lg k_p (\text{мм рт. ст.}) = -\frac{(7300 \pm 112)}{T} + 10,291 \pm 0,165.$$

Отсюда рассчитывались значения изменения энтальпии и энтропии реакции (4):

$$\Delta H_{800^\circ\text{K}} = 33 \pm 1 \text{ ккал/моль}; \quad \Delta S = 34 \pm 2 \text{ кал/моль. град.}$$

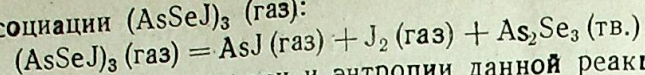
Выводы

1. Статистическим методом с кварцевым мембранным нуля-манометром измерено общее давление пара над системой As—Se—J в интервале $200\text{--}740^\circ\text{C}$.

2. Показано, что при 400°C состав паровой фазы в основном состоит из молекул $(\text{AsSeJ})_3$.

3. На основании полученных данных в интервале $450\text{--}740^\circ\text{C}$ рассчитаны состав паровой фазы и температурная зависимость кон-

станты диссоциации $(\text{AsSeJ})_3$ (газ):



Рассчитано изменение энтальпии и энтропии данной реакции, равные 33 ± 1 ккал/моль и 34 ± 2 кал/моль. град, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arnadt R., Niggli A. Naturwissenschaften, 51, 7, 1964.
2. Mori T., Tamura H. f. Phys. soc. Japan, 19, 1247, 1964.
3. Чернов А. П., Дембовский С. А., Кириленко И. А. „Неорг. материалы“, 6, 2, 262 (1970).
4. Новиков Т. И., Суворов А. В. „Заводская лаборатория“, 6, 750 (1959).
5. Суворов А. В., Добротин Р. Б., Гаджиев С. М. „Ж. неорганич. хим.“ 10, 6, 1307 (1965).
6. Роберт Ф. Ролстен. Иодидные металлы и иодиды металлов. М., 1968.
7. Subciotti D., Eding H. J. Phys. chem., 69, 2743 (1965).
8. Рязанцев А. А. Автореф. канд. дисс., МГУ, 1969.
9. Устюгов Г. П., Кудрявцев А. А., Куадже Б. М., Вигдорович Е. Н. „Неорг. материалы“, 5, 2, 378 (1969).
10. Кристаллизация из газовой фазы. Под ред. Шефтеля. М., 1965.

Поступило 11. IX 1970

АГУ

Э. А. Гулиев, С. М. Начыев, Р. Н. Бахышов, Х. Г. Худижев

As—Se—J системинин термодинамики тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Тэдгигатда статик кварс мембранын сыфыр-манометр васитәсилә 200—740°С интервалда As—Se—J системи үзәриндә үмуми бухар тәзјигинин температур асылылығы өлчүлмүшдүр.

Мәлүм олмушдур ки, 400°С температурда бухар фазасы әсасән $(\text{AsSeJ})_3$ молекулларыннан ибарәтдир. Алынған тәчрүби мәлүматлара әсасән, 450—740°С интервалында бухар фазасынын тәркиби, $(\text{AsSeJ})_3$ молекулунун диссоциация реакциясынын таразлыг сабитинин температур асылылығы мүүјән едилмиш вә һәммин асылылыгдан реакциянын энталпија, энтропија дәјишикликләри һесаблинмышдыр.

С. А. КУЛИЕВ

К ВОПРОСУ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С ЭКСЦЕНТРИЧНЫМ КРУГЛЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ, ПОДРЕРЖЕННОЙ ВНУТРЕННЕМУ РАВНОМЕРНОМУ ДАВЛЕНИЮ

В работе [2] была рассмотрена задача об исследовании напряженного состояния в правильной многоугольной пластине с эксцентричным круговым вырезом, подверженной равномерно распределенному давлению. Решение ее, как известно [1], сводится к определению двух аналитических функций, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих определенным граничным условиям. Для определения этих функций построены две системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_k и b_k ($k = 1; 2; \dots; \infty$). Из решения в [2] получаются решения для случаев, когда внешний контур вырождается в эллипс и окружность, т. е. как частный случай в формуле (1) из [2] при $M = \frac{a-b}{a+b}$, $q = 2$ получается эллипс с полу-

осями a и b , а при $M = 0$, очевидно, получим окружность с радиусом $R = A$.

В настоящей статье на основе [2] дается числовой пример. В случае эллипса системы (9) и (10) из [2] соответственно принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=\nu-2E\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}^{\nu} A_1^{(m)} \left(\frac{e}{A}\right)^m M^{\frac{\nu-m}{2}} C_{-m}^{\frac{\nu-m}{2}} + \\ & + A \eta_1 \sum_{m=\nu}^{\infty} (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r}\right)^m M^{\frac{m-\nu}{2}} C_m^{\frac{m-\nu}{2}} + \\ & + AM \eta_2 \sum_{m=\nu}^{\infty} (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r}\right)^m M^{\frac{m-\nu}{2}} C_m^{\frac{m-\nu}{2}} + \\ & + e \sum_{m=\nu}^{\infty} (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r}\right)^m M^{\frac{m-\nu}{2}} C_m^{\frac{m-\nu}{2}} + \end{aligned}$$

Таблица 1

№	Форма сечений	M	e	r	a/b
I		0,2	0,5a	0,2a	1,5
II		-0,2	0,7 e	0,15e	1,5
III		0,2	0	0,2a	1,5
IV		0	0,5R	0,2R	1

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=v}^{\infty} A_4^{(m)} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{m-v}{2}} C_{\frac{m-v}{2}}^{\frac{m-v}{2}} + \sum_{m=v}^{\infty} B_1^{(m+2)} \left(\frac{A}{e} \right)^m M^{\frac{m-v}{2}} C_{\frac{m-v}{2}}^{\frac{m-v}{2}} + \\
& + A \eta_3 \sum_{m=v-1-2E(\frac{v-2}{2})}^{v-1} A_2^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^{m+1} M^{\frac{v-m-1}{2}} C_{\frac{v-m-1}{2}}^{\frac{v-m-1}{2}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_4 \sum_{m=2E(\frac{v+1+a}{2})-v}^{\infty} b_m \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{v+m}{2}} C_{\frac{v+m}{2}}^{\frac{v+m}{2}} + \\
& + AM \eta_5 \sum_{m=2E(\frac{v+1+a}{2})-v}^{\infty} (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{v+m}{2}} C_{\frac{v+m}{2}}^{\frac{v+m}{2}} + \\
& + \frac{A}{r} Mb_1 \cdot \eta_6 = 0; \quad (2) \\
& \sum_{m=v}^{\infty} b_m \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{m-v}{2}} C_{\frac{m-v}{2}}^{\frac{m-v}{2}} + \sum_{m=v-2E(\frac{v-1}{2})}^v B_2^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^E M^{\frac{v-m}{2}} C_{\frac{v-m}{2}}^{\frac{v-m}{2}} + \\
& + A \eta_7 \sum_{m=v-1-2E(\frac{v-2}{2})}^{v-1} A_2^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^{m+1} M^{\frac{v-m-1}{2}} C_{\frac{v-m-1}{2}}^{\frac{v-m-1}{2}} + \\
& + AM \eta_8 \sum_{m=v-1-2E(\frac{v-2}{2})}^{v-1} A_2^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^{m+1} M^{\frac{v-m-1}{2}} C_{\frac{v-m-1}{2}}^{\frac{v-m-1}{2}} + \\
& + \eta_7 \sum_{m=v-2-2E(\frac{v-3}{2})}^{v-2} A_3^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^{m+2} M^{\frac{v-m-2}{2}} C_{\frac{v-m-2}{2}}^{\frac{v-m-2}{2}} + \\
& + A \sum_{m=2E(\frac{v+1+a}{2})-v}^{\infty} (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{v+m}{2}} C_{\frac{v+m}{2}}^{\frac{v+m}{2}} + \\
& + e \eta_1 \sum_{m=v-1-2E(\frac{v-2}{2})}^{v-1} A_2^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^{m+1} M^{\frac{v-m-1}{2}} C_{\frac{v-m-1}{2}}^{\frac{v-m-1}{2}} + \\
& + \sum_{m=v-2-2E(\frac{v-2}{2})}^{v-2} B_3^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^{m+2} M^{\frac{v-m-2}{2}} C_{\frac{v-m-2}{2}}^{\frac{v-m-2}{2}} + \\
& + AM \eta_8 \sum_{m=2E(\frac{v+1+a}{2})-v}^{\infty} (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{v+m}{2}} C_{\frac{v+m}{2}}^{\frac{v+m}{2}} + \\
& + \eta_4 \sum_{m=2E(\frac{v+1+a}{2})-v}^{\infty} A_4^{(m)} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{v+m}{2}} C_{\frac{v+m}{2}}^{\frac{v+m}{2}} + \\
& + e \eta_4 \sum_{m=2E(\frac{v+1+a}{2})-v}^{\infty} (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{v+m}{2}} C_{\frac{v+m}{2}}^{\frac{v+m}{2}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_4 \sum_{m=2E\left(\frac{\nu+1+\alpha}{2}\right)-\nu}^{\infty} B_1^{(m+2)} \left(\frac{A}{e}\right)^m M^{\frac{\nu+m}{2}} C_m^{\frac{\nu+m}{2}} + \\
& + \eta_9 B_1^{(1)} \frac{A}{e} (-M)^{\frac{\nu-1}{2}} + \frac{A}{r} b_1 \eta_{10} = \\
& = \sum_{m=\nu-1-2E\left(\frac{\nu-2}{2}\right)}^{\nu-1} p \frac{r^2}{e} (-1)^m \left(\frac{e}{A}\right)^{m+1} M^{\frac{\nu-m-1}{2}} C_{-m-1}^{\frac{\nu-m-1}{2}}; \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 1 \\ 1 & \text{при } \nu \neq 1, \end{cases} & \eta_2 &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu < 2 \\ 1 & \text{при } \nu \geq 2, \end{cases} \\
\eta_3 &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \geq 0 \\ 1 & \text{при } \nu < 0, \end{cases} & \eta_4 &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 0 \\ 1 & \text{при } \nu \neq 0, \end{cases} \\
\eta_5 &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \geq 2 \\ 1 & \text{при } \nu < 2, \end{cases} & \eta_6 &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq 1 \\ 1 & \text{при } \nu = 1, \end{cases} \\
\eta_7 &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 1; 2 \\ 1 & \text{при } \nu \neq 1; 2, \end{cases} & \eta_8 &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \leq 0 \\ 1 & \text{при } \nu > 0, \end{cases} \\
\eta_9 &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq 2n-1 \\ 1 & \text{при } \nu = 2n-1, \end{cases} & \eta_{10} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq 1 \\ 1 & \text{при } \nu = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Звездочка над знаком суммы означает, что индекс m увеличивается на 2 при переходе к следующему слагаемому; C_m^k и C_{-m}^k — биномиальные коэффициенты: $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ и $C_{-m}^k = (-1)^k C_{m+k-1}^k$.

Из полученных систем (2) и (3) для первого и второго случаев выделено по пять, а для третьего и четвертого по три уравнения. Найденные коэффициенты соответственно помещены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

K	M=0,2		M=-0,2	
	a_k/pr	b_k/pr	a_k/pr	b_k/pr
1	$-0,485701 \cdot 10^{-1}$	$0,197683 \cdot 10^{-1}$	$-0,215522$	$0,226450 \cdot 10^{-1}$
2	$0,206560 \cdot 10^{-1}$	$-0,720823 \cdot 10^{-2}$	$0,278802 \cdot 10^{-1}$	$-0,368990 \cdot 10^{-2}$
3	$0,184593 \cdot 10^{-3}$	$0,206723 \cdot 10^{-2}$	$-0,348093 \cdot 10^{-2}$	$0,326760 \cdot 10^{-3}$
4	$0,783258 \cdot 10^{-4}$	$0,477080 \cdot 10^{-4}$	$0,189029 \cdot 10^{-3}$	$-0,234411 \cdot 10^{-4}$
5	$-0,636193 \cdot 10^{-4}$	$-0,605521 \cdot 10^{-4}$	$-0,380640 \cdot 10^{-5}$	$0,358123 \cdot 10^{-5}$

Таблица 3

K	M=0,2; e=0		M=0	
	a_k/pr	b_k/pr	a_k/pr	b_k/pr
1	0,013501	0,032118	$0,242541 \cdot 10^{-1}$	$0,219900 \cdot 10^{-1}$
2	0	0	$0,361200 \cdot 10^{-2}$	$-0,40677 \cdot 10^{-2}$
3	$-0,111765 \cdot 10^{-4}$	$-0,362733 \cdot 10^{-1}$	$0,00854 \cdot 10^{-3}$	$0,412200 \cdot 10^{-3}$

Далее формула определения компонентов напряжения σ_r и σ_θ для рассматриваемых случаев приведена к виду:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-\kappa(\kappa+3)r^\kappa}{\rho^{\kappa+1}} + \frac{\kappa(\kappa+2)r^{\kappa+2}}{\rho^{\kappa+3}} + \frac{\kappa\rho^{\kappa-1}}{r^\kappa} \right] a_k \cos(\kappa+1)\theta + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\kappa(\rho-e)^{\kappa-1}}{r^\kappa} - \frac{\kappa(\kappa-1)\rho \cdot (\rho-e)^{\kappa-2}}{r^\kappa} - \frac{\kappa r}{\rho^2} \left(\frac{r}{\rho} - \frac{e}{r} \right)^{\kappa-1} - \right. \\
&\left. - \frac{\kappa r}{\rho^2} \cdot \left(\frac{\rho-e}{r} \right)^{\kappa-1} + \frac{\kappa \cdot (\kappa-1)r \cdot (\rho-e)^{\kappa-2}}{\rho \cdot r^{\kappa-1}} \right] b_k \cos(\kappa+1)\theta - p \frac{r^2}{\rho^2}; \\
\sigma_\theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\kappa(\kappa-1)r^\kappa}{\rho^{\kappa+1}} - \frac{\kappa(\kappa+2) \cdot r^{\kappa+2}}{\rho^{\kappa+3}} - \frac{\kappa \cdot \rho^{\kappa-1}}{r^\kappa} \right] a_k \cos(\kappa+1)\theta + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\kappa(\rho-e)^{\kappa-1}}{r^\kappa} + \frac{\kappa(\kappa-1) \cdot \rho \cdot (\rho-e)^{\kappa-2}}{r^\kappa} + \frac{\kappa \cdot r}{\rho^2} \cdot \left(\frac{r}{\rho} - \frac{e}{r} \right)^{\kappa-1} + \right. \\
&\left. + \frac{\kappa \cdot r}{\rho^2} \left(\frac{\rho-e}{r} \right)^{\kappa-1} - \frac{\kappa(\kappa-1) \cdot r \cdot (\rho-e)^{\kappa-2}}{\rho \cdot r^{\kappa-1}} \right] b_k \cos(\kappa+1)\theta + p \frac{r^2}{\rho^2}.
\end{aligned}$$

Таблица 4

Z	M=0,2		M=-0,2	
	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ
$-(a-e)$	$0,00402 \cdot p$	$0,8319 \cdot p$	$0,014 \cdot p$	$+1,4896 \cdot p$
$-\frac{r+a-e}{2}$	$-0,18335 \cdot p$	$+1,25397 \cdot p$	$-0,327 \cdot p$	$+1,678 \cdot p$
$-r$	$-p$	$+1,7402 \cdot p$	$-p$	$+2,6557 \cdot p$
r	$-p$	$+1,2385 \cdot p$	$-p$	$+1,96077 \cdot p$
e	$-0,1067 \cdot p$	$+0,07736 \cdot p$	$-0,165 \cdot p$	$+0,4235 \cdot p$
$e + \frac{a}{2}$	$-0,032 \cdot p$	$+0,01652 \cdot p$	$-0,075 \cdot p$	$0,035 \cdot p$
$e+a$	$0,00215 \cdot p$	$-0,024 \cdot p$	$-0,0046 \cdot p$	$0,0126 \cdot p$

Таблица 5

Z	M=0,2; e=0		Z	M=0	
	σ_r	σ_θ		σ_r	σ_θ
r	$-p$	$1,183 \cdot p$	$-(a-e)$	$-0,00126 \cdot p$	$0,974 \cdot p$
$\frac{a-r}{2}$	$-0,164 \cdot p$	$0,06 \cdot p$	$\frac{r+a-e}{2}$	$-0,416 \cdot p$	$1,114 \cdot p$
a	$0,00174 \cdot p$	$0,75 \cdot p$	$-r$	$-p$	$1,212 \cdot p$
ir	$-p$	$1,587 \cdot p$	r	$-p$	$1,013 \cdot p$
$i \frac{b-r}{2}$	$-0,286 \cdot p$	$1,31 \cdot p$	e	$-0,156 \cdot p$	$0,36 \cdot p$
ib	$-0,0034 \cdot p$	$0,984 \cdot p$	$e = \frac{a}{2}$	$0,025 \cdot p$	$0,026 \cdot p$
			$e+a$	$0,00114 \cdot p$	$0,0011 \cdot p$

На основе этих формул и вычислены напряжения (табл. 4 и 5). По данным табл. 4 и 5 построены эпюры напряжений σ_r и σ_θ (рис. 1, 2, 3, 4).

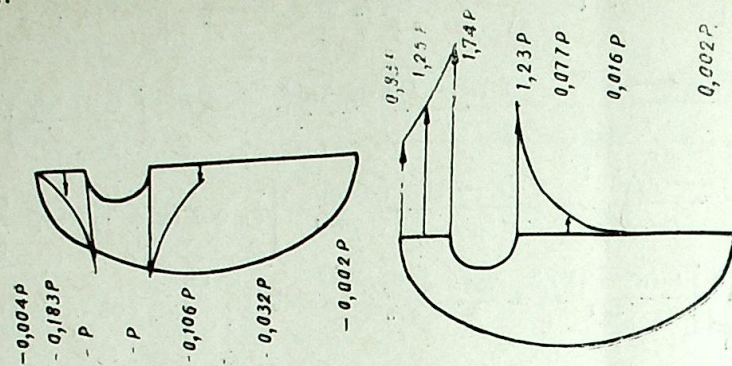


Рис. 1

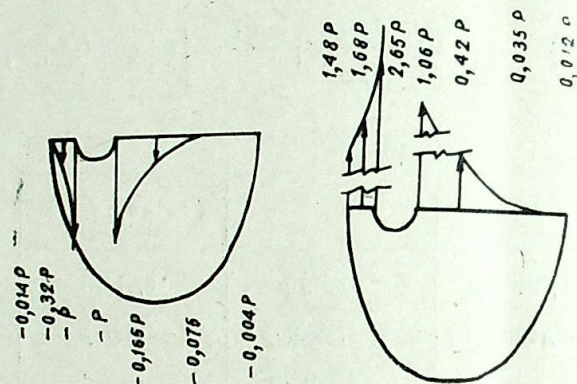


Рис. 2

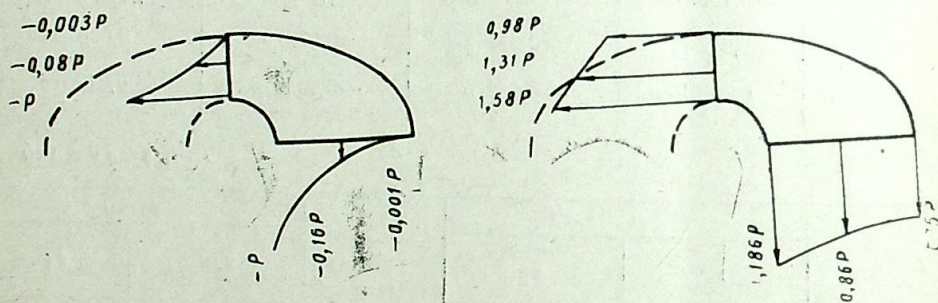


Рис. 3

Критерий точности, с которой полученные решения удовлетворяют граничным условиям, определяется по следующей формуле:

$$\Delta = \frac{\dot{\varphi}(t) + t \dot{\varphi}'(t) + \varphi(t)}{pr \cdot e^{i\theta}} \cdot 100\%.$$

В характерных точках $t = -(a - e)$ и $t = (b - e)$ при решении десяти уравнений для первого и второго случаев Δ соответственно приняло значения 1,23 и 9,8%, для третьего и четвертого случаев в точках $t = -a$, $t = ib$ и $t = -(R - e)$ при решении шести уравнений соответственно 0,94; 2,2 и 1,56%. Из этих данных видно, что граничные условия удовлетворяются достаточно точно.

Следует отметить, что при $M = 0$ и $e = 0$, $A = R$ получаем толстостенный цилиндр, т. е. задачу Ляме. В этом случае полученные формулы для напряжений полностью совпадают с известными формулами Ляме.

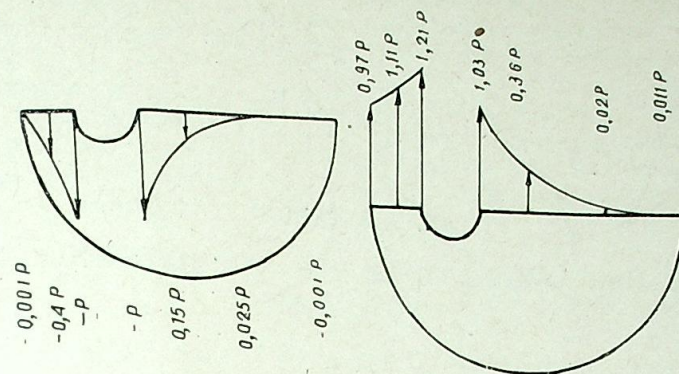


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во "Наука", 1966.
2. Кулиев С. А. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук" 1969, № 5.

АзПИ

Поступило 9. II 1970

С. А. Гулиев

Екссентрик цилиндр бoшлуға малик олан еллиптик борунун дахили мўнтəзəм тəзјигдэн кəркинлик вəзијјəти мəсəлəсинə даир

ХУЛАСƏ

Əvvəlki тəдгигатымыза əсəсən, екссентрик цилиндр бoшлуға малик олан еллиптик борунун дахилиндэн мўнтəзəм пəјланмыш тəзјигдэн кəркинлик мəсəлəси өјрəнилмиш вə бир сыра хўсуси халлар үчүн əдəди мисаллара бəхылмышдыр. Алынмыш нəтичəлэрə əсəслəнараг, кəсијин характер нөгтəлəri үчүн кəркинлик епүрлəri гурулмышдыр.

О. Б. АБДИНОВ

ВЫБИВАНИЕ α -КЛАСТЕРОВ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ПРОТОНАМИ

Проблема ассоциирования нуклонов в ядре является одной из центральных проблем физики ядра. Как показывает анализ некоторых экспериментальных данных, например, касающихся появления α -частиц в звездах, которые образуются на ядрах фотоэмульсии нуклонами больших энергий, среди частиц, вылетающих из ядра на каскадной стадии, имеются наряду с нуклонами и α -частицы. Доля этих частиц довольно значительна ($\sim 15\%$), что указывает на необходимость учета влияния корреляционных α -группировок при расчетах.

Реакции квазиупругого рассеяния быстрых протонов на кластерах дают прямую информацию об основных свойствах ассоциирования, поскольку оно является непосредственной причиной, вызывающей реакцию. Так как экспериментальная информация о кластерах еще очень бедна, представляет интерес и другой подход, когда величины, характеризующие образования кластеров в ядре, закладываются в теории феноменологически и в последующем определяются из сравнения результатов расчетов с опытом. Такие возможности представляет Монте-Карловское моделирование внутриядерных каскадов.

В данной работе на примере взаимодействия 660-мэвных протонов на ядре углерода показано, как влияет выбор параметров α -ассоциаций на угловые и энергетические распределения каскадных α -частиц. Ядро рассматривается в виде потенциальной ямы с прямолинейными краями, с радиусом $R = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ А}^{1/3} \text{ см}$, а нуклоны уподоблялись полностью вырожденному газу Ферми. Мы ограничились рассмотрением только α -кластеров, равномерно распределенных в ядре. Это позволяет выяснить, какие экспериментальные данные можно воспроизвести в рамках такой простой работы, требующей сравнительно небольшого объема вычислительной работы, и послужит основой для дальнейшего анализа влияния более тонких деталей структуры ядра.

Вероятность упругого столкновения каскадного нуклона с α -группировкой выбирался в виде $\omega_{\alpha}(T) = \omega \frac{\sigma_{N\alpha}^{\text{tot}}(T)}{\sigma_{M\alpha}^{\text{rem}}}$, где ω_{α} рассматривается

как параметр, который подбирался из условия наилучшего согласия результатов расчета с экспериментом. Прослеживалось дальнейшее движение α -частиц внутри ядра и учитывалось их упругое рассеяние на внутриядерных нуклонах, с учетом принципа Паули. Мы учитывали также возможность последующих неупругих столкновений α -частиц с нуклонами ядра, характеризуя их вероятность.

$$\omega^{\text{inel}} = \frac{\alpha_N^{\text{inel}}(T)}{\sigma_{N\alpha}^{\text{tot}}(T)}$$

Однако поскольку энергия рассеявшихся α -частиц, как правило, оказывалась очень малой, то эти частицы не могли преодолеть барьер и поглощались ядром. Распределение α -частиц по импульсам в ядре углерода было выбрано нами в виде $N(p) \sim e^{-\frac{p^2}{a^2}}$ [1], где $a \sim 250 - 270 \text{ Мэв/с}$.

Как обычно принято в расчетах по внутриядерному каскаду [2], угловые распределения α -частиц определялись методом Монте-Карло по интегральному угловому распределению в с. п. м. $N + \alpha$, которое было получено интегрированием дифференциальных угловых распределений для свободных $N + \alpha$ столкновений [3–10] в виде $W(>\theta) =$

$$= \text{const} \cdot e^{-\left[\sum_{l=0}^4 b_l T^l\right] \sin^2 \theta}, \text{ где } b_0 = 0,615; b_1 = 11,12; b_2 = 424,7; b_3 = -1461; b_4 = 1288.$$

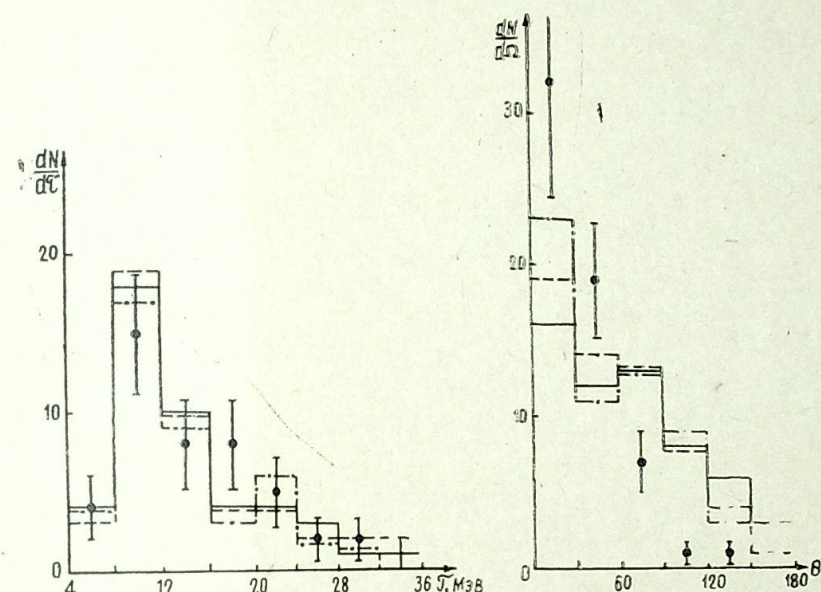


Рис. 1. Энергетические и угловые распределения каскадных α -частиц. Сплошная гистограмма—расчет при параметрах $\omega_{\alpha}=0,2$; $a=260 \text{ Мэв/с}$; $v=1 \text{ Мэв}$. Пунктирная—расчет для $v=11 \text{ Мэв}$, точечная для $v=12 \text{ Мэв}$.

Сечения взаимодействия нуклонов и α -частиц выбраны такими же, как в работе [11]. α -частица считалась вылетевшей, если она попадала за сферу с радиусом $R_{\alpha} = R_{\text{с.я.}} - r_{\alpha}$, где r_{α} — радиус α -частицы, и было выполнено условие $\tau_{\alpha} \geq V_{\text{с.я.}}^{\alpha} (V_{\text{с.я.}}^{\alpha} - \text{высота кулоновского})$

Среднее число каскадных α -частиц

w_{α}	$\alpha, \text{ Мэв/с}$	$v, \text{ Мэв}$	n_{α}
Эксперимент			$0,15 \pm 0,02$
0,2	260	10	0,166
0,2	260	11	0,139
0,2	260	12	0,120
0,2	250	10	0,139
0,2	270	10	0,175
0,15	260	10	0,118
0,25	260	10	0,190

барьера для α -частицы, т. е. мы считали, что в случаях, когда α -частица удалена от центра ядра на расстояние $r > R_\alpha$ то во внешней области уже не осталось нуклонов, с которыми могла бы взаимодействовать эта частица).

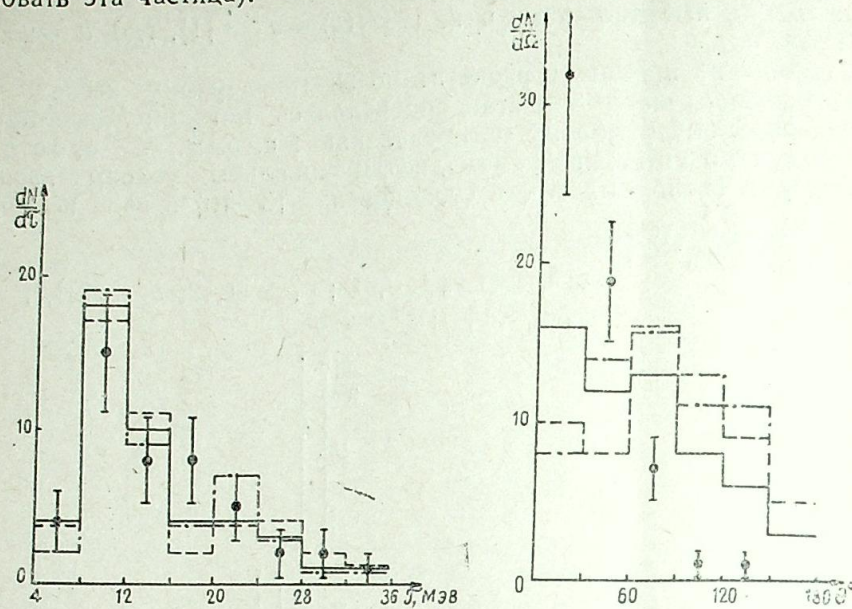


Рис. 2. Энергетические и угловые распределения каскадных α -частиц. Сплошная гистограмма—расчет с параметрами; $\omega_\alpha=0,2$; $a=260$ Мэв/с, $v=1$ Мэв. Пунктирная—расчет для $\omega_\alpha=0,15$; точечная—для $\omega_\alpha=0,25$.

В данной статье рассмотрены лишь энергетические и угловые распределения каскадных α -частиц, приведенные совместно с экспе-

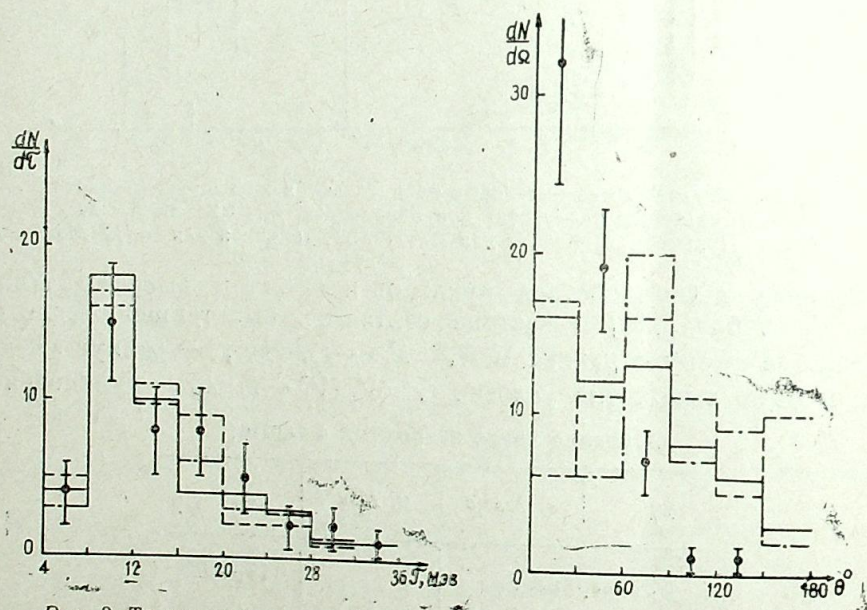


Рис. 3. То же, что на рис. 1 и 2. Сплошная— $\omega_\alpha=0,2$; $a=270$ Мэв/с $v=50$ Мэв; пунктирная— $a=250$ Мэв/с; точечная— $a=360$ Мэв/с

риментальными данными из работы [12]. В таблице даны значения n_α — среднее число α -частиц в зависимости от выбора параметров α — ассоциирования. Здесь надо отметить, что учет α -кластеров заметно

улучшает согласие теории с экспериментом для распределения каскадных нуклонов, спектр энергии возбуждения остаточных ядер и выход их по изотопам (подробнее см. в [13]).

На рис. 1—3 показаны энергетические и угловые распределения каскадных α -частиц, где один из параметров изменился, а два других остались постоянными. Из сравнения гистограмм, представленных на рис. 2 и 3, видно, что лучшее согласие с экспериментом получается при выборе параметров $\omega_\alpha=0,2$ и $a=260$ Мэв/с.

Гистограммы рис. 1 отличаются только глубиной ямы для α -частицы, т. е. различным числом α -частиц с энергией $\tau > 32$ Мэв. Очевидно, что, чем больше вылетает α -частиц с $\tau > 32$, тем больше их вылетает под малыми углами (что согласуется также с работой [16]). Доля α -частиц с $\tau > 32$ у нас получается не более 3—6%, это согласуется с значением $\sim 3\%$ из эксперимента [14] (см. также [15]). Однако это намного меньше, чем наблюдалось в работе [12], где доля таких α -частиц составляла около 30% и прослеживалась до энергий $\tau_\alpha=70$ Мэв. Видимо, этим и объясняется расхождение расчетных и экспериментальных угловых спектров α -частиц под малыми углами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sammau A. J. Phys. et Rad, 18, 77 (s), 1957.
2. Барашенков В. С., Гудима К. К., Тонев В. Д. Препринт ОИЯИ Р2—4065, Дубна, 1968.
3. Freemantle By R. G. et al. Philos Mag, 45, 1090, 1954.
4. Camberlain O. et al Phys. Rev., 102, 1659, 1956.
5. Brussel M. K and Williams J. H. Phys. Rev., 106, 286, 1957.
6. Selove W and Teem J. M. Phys. Rev., 112, 1658, 1958.
7. Cormack A. M. et al. Phys. Rev., 115, 599, 1958.
8. Tyren H, Tibell G. and Maris Th. A. J. Nucl. Phys., 4, 277, 1957.
9. Козодаев М. С. и др. ЖЭТФ, 38, 798, 1960.
10. Palevsky H, et al. Phys. Rev. Lett., 18, 1200, 1967.
11. Барашенков В. С., Елисеев С. М. Сообщение ОИЯИ Р2—4333, Дубна 1969.
12. Жданов А. П., Федотов П. И. ЖЭТФ, 41, 1870, 1961; 43, 835, 1962; 45, 455, 1963.
13. Барашенков В. С., Абдинов О. Б. Препринт ОИЯИ Р2—4568, Дубна, 1969.
14. Остроумов В. И., Филлов Р. А. ЖЭТФ, 31, 913, 1956.
15. Бриль О. Д., Вихров Б. И. и др. Ядерные взаимодействия в защите космических кораблей. Армиздат, 1968.
16. Комаров В. И., Косарев Г. Е., Савченко О. В. Препринт ОИЯИ Р1—4227, Дубна, 1968.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 25, IX 1969

О. Б. Абдинов

Јүксәк енержили протонларла α -кластерларин чыхарылмасы

ХҮЛАСӘ

600 мев-ли протонларын көмүр нүвәсилә гејри-эластик гаршылыгылы тәсири әсасында, каскад протонларла α -кластерларинин дүзүнә гаршылыгылы тәсирини нәзәрә алараг, јүнкүл нүвәдә нүвә дахили каскадлар моделинә бахылмышдыр. Нуклонларын α -кластерләрә чеврилмә еһтималы тәхминән 20% олдугда тәчрүбә илә јахшы ујғунлуг алыныр.

ДЕПОНИРОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК—003 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

А. Г. АЛЕСКЕРОВ

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЗЕЙДЕЛЯ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕН- ЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ*

В работе рассматриваются следующие задачи:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}[\vec{t}, \vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau(t))] \quad (t - \tau(t) \geq 0; 0 \leq t \leq T), \quad (1)$$

$$\vec{x}(t) = \vec{\Phi}(t) \quad (-\tau \leq t \leq 0; \vec{x}(0) = \vec{\Phi}(0) = \vec{x}_0), \quad (2)$$

где

$$\vec{x} = (x', \dots, x^m), \vec{x}_0 = (x'_0, \dots, x_0^m), \vec{f} = (f_1, \dots, f^m),$$

$$\vec{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_m) \text{ и } 0 \leq \tau(t) \leq \tau (\tau = \text{const}).$$

Строятся последовательные приближения Зейделя и Тикара для задачи (1) — (2). Доказывается, что скорость сходимости последовательных приближений Зейделя выше, чем обычных приближений. Выяснено, что наличие запаздывания ускоряет процесс последовательных приближений. В ходе доказательства показано существование и единственность решения задачи (1) — (2). Полученные результаты выражаются в доказанной лемме и теореме.

Аз ПИ им. Ч. Ильдрыма

Поступило 15. V 1970

* Статья депонирована во ВИНТИ (Москва, А-219, ул. Балтийская, 14, отдел справочной информации ВИНТИ).

ДЕПОНИРОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 621 382. 323

АННОТАЦИЯ

Н. Д. ГАДЖИЕВА, Ф. Д. КАСИМОВА, В. М. МАМИКОНОВОЙ

ВЛИЯНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ НА СВОЙСТВА ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА КРЕМНИЙ-ДВУОКИСЬ КРЕМНИЯ СТРУКТУР МЕТАЛЛ- ОКИСЕЛ-ПОЛУПРОВОДНИК*

Измерены вольт-емкостные ($C-V$) характеристики кремниевых МОП-структур под локальным механическим давлением в пределах $1000 \div 4000 \text{ кг/см}^2$. МОП-структуры изготавливались на кремниевой подложке n -типа с удельным сопротивлением $\rho = 10 \text{ м} \times \text{см}$, с плоскостью ориентации (111). Толщина окисла составляла $0,1 \text{ мк}$.

Показано, что воздействие давления приводит к сдвигу ($C-V$) характеристик в сторону больших напряжений смещения, что указывает на увеличение поверхностного заряда на границе раздела $\text{Si}-\text{SiO}_2$.

Отмечено, что линейная зависимость емкости МОП-структур от давления при малых смещениях может быть использована для создания датчиков давления. Библ. 8 назв., рис. 2.

Поступило 8. X 1970

* Статья депонирована во ВИНТИ (Москва, А-219, ул. Балтийская, 14, отдел справочной информации ВИНТИ).

ДЕПОНИРОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 511.311.33

АННОТАЦИЯ

И. Г. КЕРИМОВ, А. М. МУСАЕВ, Ф. Ю. АЛИЕВ, А. Г. РУСТАМОВ,
Э. И. МАНАФЛЫ

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА РАССЕЯНИЯ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА МОНОКРИСТАЛЛОВ ХАЛЬКОГЕНИДОВ МЕДИ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ*

С целью выяснения механизма рассеяния носителей тока при более низких температурах, где тепловые колебания малы, нами были исследованы электропроводность (σ), коэффициент термо-эдс. (α) и постоянная Холла (R_0) монокристаллов Cu_2Se и Cu_2Te , а также поликристалла Cu_2S в интервале $2 \div 300^\circ\text{K}$.

Обнаружен минимум в температурной зависимости σ и R_0 , а у α — изменение наклона при температуре 120°K у Cu_2Se . Предполагается, что проводимость Cu_2Se и Cu_2Te осуществляется переходом электронов из валентной зоны в акцепторную, сливающуюся во всем исследуемом интервале температур. Такой же механизм проводимости наблюдается и для Cu_2S до 20°K . Выше этой температуры электроны переходят на акцепторный уровень с энергией активации $0,1 \text{ эв}$. При $4,2 \div 10^\circ\text{K}$ в образцах Cu_2Se и Cu_2Te носители тока рассеиваются на ионизированных дефектах ($n \sim T^\circ$) а при высоких температурах (где $n \sim T^{-1}$) — на тепловых колебаниях решетки.

В Cu_2S до 10°K рассеяние происходит преимущественно на нейтральных, а в интервале $20 \div 100^\circ\text{K}$ — на ионизированных дефектах. Выше 100°K преобладает рассеяние на тепловых колебаниях решетки.

Институт физики АН Азерб. ССР.

Поступило 30. X 1970

ДЕПОНИРОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК. 621.382

АННОТАЦИЯ

Н. Д. ГАДЖИЕВ, Ф. Д. КАСИМОВ, Г. Г. КАДЫМОВ

МОП-ТРАНЗИСТОР, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЙ К ДАВЛЕНИЮ*

Предлагается модель чувствительного электромеханического преобразователя на основе МОП-транзистора, затвор которого находится в непосредственном контакте с пьезоэлектрическим материалом. Расчет для титаната бария, произведенный по формуле

$$\Delta P = \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0}{g \cdot t \cdot d} \cdot \Delta I_c,$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость титаната бария,

d — пьезоэлектрическая константа,

t — толщина диэлектрика,

g — крутизна транзистора,

ΔI_c — изменение тока стока,

показывает, что чувствительность прибора может быть порядка 10^{-4} кг/см^2 .

Чувствительность можно регулировать в широких пределах выбором толщины изолирующей пленки затвора транзистора, изменением длины канала, а также подбором соответствующего пьезоматериала. Библ. 3 назв.

Поступило 6. XI 1970

* Статья депонирована во ВИНТИ (Москва, А-219, ул. Балтийская, 14, отдел справочной информации ВИНТИ).

* Статья депонирована во ВИНТИ (Москва, А-219, ул. Балтийская, 14, отдел справочной информации ВИНТИ).

ДЕПониРОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 535—193/194

АННОТАЦИЯ

И. А. МУХТАРОВ, В. А. КУЛИЕВ

МИКРОВОЛНОВЫЙ СПЕКТР 3,3 3-ФТОРПРОПИЛЕНА *

С помощью газового радиоспектрометра с молекулярной электрической модуляцией записан в области 11—30 тыс. Мгц спектр молекулы $\text{H}_2\text{C}=\text{CH}-\text{CF}_3$.

Идентифицирован ряд переходов $R, = P$ -ветви спектра в основном и возбужденных колебательных состояниях $v = 0, 1, 2, 3$. Из частот переходов определены вращательные постоянные молекулы в этих состояниях:

$v = 0, A = 5479,7 \text{ Мгц}, B = 2943,6 \text{ Мгц}, C = 2873,2 \text{ Мгц}, \chi = -0,9460;$
 $v = 1, A = 5625,2 \text{ Мгц}, B = 2942,9 \text{ Мгц}, C = 2880,9 \text{ Мгц}; \chi = -0,9554;$
 $v = 2, A = 5778,7 \text{ Мгц}, B = 2941,8 \text{ Мгц}, C = 2889,7 \text{ Мгц}; \chi = -0,9640;$
 $v = 3, A = 5776,8 \text{ Мгц}, B = 2941,1 \text{ Мгц}, C = 2897,8 \text{ Мгц}, \chi = -0,9699$

Из штрак-эффекта переходов в основном колебательном состоянии определены компоненты дипольного момента по главным осям инерции:

$$\mu_a = 2,17 \pm 0,05D, \mu_b = 0,42 \pm 0,05D, \mu_c = 0,00.$$

По относительным интенсивностям линий и сателлитов вычислена частота колебаний $\omega = 86 \pm 5 \text{ см}^{-1}$.

Институт физики АН Азерб. ССР

УКАЗАТЕЛЬ

СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В «ИЗВЕСТИЯХ АКАДЕМИИ НАУК
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР, СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ
И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК» В 1970 г.

- Абасов С. А., Багиров М. А., Аббасов Т. Ф., Гусейнов Т. И., Кабулов У. А. Изменение механических свойств полимерных пленок под действием электрических разрядов, № 1—2, стр. 136.
- Абасов С. А., Багиров М. А., Гусейнов Т. И., Кабулов У. А. Влияние озона на прочностные свойства полистирольной пленки, № 4, стр. 57.
- Абасов А. М. О третьей одномерной неидеальной теплоконтактно-краевой задаче, № 5, стр. 28.
- Аббасов Р. А. Исследование порядка наилучшего приближения почтипериодических функций Степанова с ограниченным спектром, № 3, стр. 8.
- Аббасов Дж. А. Задача Гурса для гиперболического дифференциального уравнения второго порядка, № 3, стр. 52.
- Аббасов А. С., Мамедов К. Н. Система индийсурьма, № 3, стр. 86.
- Абас-заде А. К., Апаев Т. А., Керимов А. М. Экспериментальное исследование плотности октена-1 и циклогексана в зависимости от температуры и давления, № 5, стр. 70.
- Абдинов О. Б. Выбивание α -кластеров высокоэнергетическими протонами, № 6, стр. 138.
- Абдуллаев Г. Б., Абдинов Д. Ш. Ленин и современное естествоведение, № 1—2, стр. 63.
- Абдуллаев Г. В., Искендер-заде З. А., Джафарова Э. А., Ахундов М. Р., Алиханова Ш. А. Исследование физических процессов в диффузионных кремниевых р-п-переходах при высоких уровнях инжекций и в сильных электрических полях, № 1—2, стр. 84.
- Абдуллаев Г. Б., Ибрагимов Н. И., Мамедов Ш. В., Абуталыбова З. М. Влияние предварительной термообработки на проводимость поликристаллического селена, № 1—2, стр. 116.
- Абдуллаев Г. Б., Искендер-заде З. А., Ахундов М. Р., Джафарова Э. А. и Алиханова Ш. А. Реактивные свойства диффузионных кремниевых вентиляных фотоэлементов, № 4, стр. 65.
- Абдуллаев Г. Б., Искендер-заде З. А., Ахундов М. Р., Качурин В. Н., Плиев Ф. И., Джафаров Э. А., Алиханова Ш. А. Прибор для автоматической непрерывной записи составляющих полной проводимости полупроводниковых диодов в зависимости от напряжения смещения, № 5, стр. 42.
- Абдуллаев М. Н. К теории оптического поглощения в ферромагнитных кристаллах с примесью, № 3, стр. 106.
- Абдурахманов А. А., Велиулин Э. И. О поворотном изомеризме молекулы *n*-бутанола, № 3, стр. 101.
- Абдурахманов А. А., Елчиев М. Н., Иманов Л. М. Микроволновый спектр транс-формы молекулы $(\text{CH}_3)_2\text{CHOH}$, № 5, стр. 58.
- Агаев Ч. Г., Ахмедов С. Г., Багиров М. А., Малин В. П. Изменение диэлектрических свойств электротехнического стеклотекстолита под действием разрядов в воздухе, № 6, стр. 76.
- Агаев А. Б., Азизов Т. Х., Муратов А. Х., Нагдалиева Ю. Р., Шарифов К. А. Упрощенный способ определения энтальпий высокотемпературных процессов в калориметре, № 3, стр. 72.
- Агаев А. Б., Джалилов Н. З. Изменение некоторых физических параметров монокристаллов Cd_2Se_3 , выращенных газотранспортным методом, № 3, стр. 92.

* Статья депонирована во ВИНТИ (Москва, А—219, ул. Балтийская, 14, отдел справочной информации ВИНТИ).

Аждаров Г. Х., Тагиров В. И., Таиров С. И., Шахтактинский М. Г. Исследование энергетических состояний примеси кадмия в сплавах германия с кремнием, № 6, стр. 68.

Аждаров Г. Х., Тагиров В. И., Алиева Б. С., Таиров С. И., Шахтактинский М. Г. Термические акцепторы в сплавах германия с кремнием, № 5, стр. 53.

Азимов Б. А. Решение на ЭВМ некоторых задач разработки нефтегазовых месторождений, № 1—2, стр. 143.

Алиев Б. И. О некоторых свойствах коэффициентов Фурье функции по ортогональным системам, № 3, стр. 31.

Алиев Г. Г. Об одной задаче для уравнения теплопроводности на полубесконечной области, № 6, стр. 42.

Алиев М. М., Талиби М. А. Влияние примеси хлора на электрические свойства n -слоя в переходных Se—CdSe , № 3, стр. 79.

Алиев С. А., Гаджиев Т. Г., Алиев Э. М. и Алиев М. И. О механизме рассеяния электронов в HgTe , № 4, стр. 76.

Алиев Н. А., Маггеррамова Ф. Г., Мамедов Б. А. Исследование влияния термообработки на теплопроводность стали марки 36Г2С, № 4, стр. 81.

Алиев Т. А. и Гашимзаде Ф. М. К теории рассеяния электронов в полупроводниках типа n - ZnSb , № 4, стр. 98.

Алиев Н. А., Аюбян Р. А., Маггеррамова Ф. Г., Ахмедов Б. А. Термическая обработка стали 36Г2С, № 5, стр. 93.

Алиева И. А., Ющенко Н. И. Релаксационные процессы в струе низкотемпературной плазмы Ag с примесью CO_2 , № 6, стр. 121.

Алиева М. Х., Беленький Г. Л., Мамедова А. З., Алиев Т. И., Исаев Ф. К. О фотопроводимости монокристаллов GaSe и GaTe , легированных оловом, № 3, стр. 117.

Ализаде А. А., Кулиев Д. А. Сравнительная оценка параметров молнии в горных и низменных условиях, № 4, стр. 122.

Аллахвердиев К. Р., Антонов В. Б., Нани Р. Х., Салаев Э. Ю. Измерение диффузии дырок в монокристаллах CdZn_2S_4 , № 4, стр. 53.

Аллахвердиев К. Р., Алиева А. Н. Обратимое переключение на контакте металл-монокристалл CdZn_2S_4 , № 3, стр. 115.

Амнуэль П. Р., Гусейнов О. Х. Магнитный захват при аккреции, I, № 5, стр. 74.

Арихов Д. И. О решении одного нелинейного интегро-экстремального уравнения, № 4, стр. 8.

Аскеров Б. М. Кинетические эффекты в теллуристом висмуте, № 4, стр. 103.

Ахвердиев К. С. Автомодельные течения вязкого газа в плоских диффузорах с учетом теплообмена, № 6, стр. 11.

Ахвердиев К. С. Об одном автомодельном решении задачи о теплообмене вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре, № 5, стр. 98.

Ахмедов Ш. А. О продолжении решений дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, № 6, стр. 49.

Ахундзаде М. Ю., Шабанбеков З. И., Мусаев Х. И. Определение усилий в характерных сечениях некруговых железобетонных цилиндрических оболочек, № 3, стр. 138.

Ахундов Д. А. Задача рассеяния для квазилинейного уравнения первого порядка и ее приложения, № 3, стр. 23.

Багиров М. А., Николаев В. П., Малин В. П. Распределение температуры в нефтеносном пласте при движущемся очаге горения с учетом изменений расхода воздуха, нагнетаемого в пласт, № 4, стр. 71.

Багиров М. А., Малин В. П. Электрическое старение полимерных диэлектриков, № 1—2, стр. 171.

Бабаев М. Б. А. Об одном способе определения значений наилучшего приближения, № 6, стр. 18.

Бабаев М. Б. Спектрофотометрическое исследование непрерывного спектра затменно-двойной звезды AWPeg , № 4, стр. 109.

Бабаев С. Х., Караев З. Ш., Рустамов А. Г. Синтез и исследование электрических свойств GdQaSe_3 , № 3, стр. 56.

Бучаев Н. А. Некоторые свойства коэффициентов Фурье, № 6, стр. 22.

Гадиев С. М., Лурье М. В., Мирзабабаев А. М. Поперечные колебания в сваях большой длины при забивке высокочастотными ударными механизмами, № 4, стр. 136.

Гаджиев Т. Г., Алиев Э. М., Алиев С. А. Исследование эффектов Нернста—Эттингсгаузена и Риш-Ледюка в n - HgTe , № 3, стр. 111.

Ганиев Р. М., Абузаров Р. М. Применение графо-аналитического способа водохозяйственного расчета внутригородского регулирования с использованием электронно-вычислительных машин (на примере гидроузла Аракс) на уровне 1970, 1975 и 1980 гг., № 3, стр. 125.

Гасанов Э. Р. О неустойчивости тока при падающей вольтамперной характеристике, № 6, стр. 84.

Гасанов А. М. Обобщенный алгоритм для решения одномерных задач фильтрации газированной нефти, № 6, стр. 12.

Гасанов Г. М. О порядке сходимости интерполяционных процессов Эрмита—Фейера в хаусдорфовой метрике, № 3, стр. 3.

Гасымов М. Г. Разложения по собственным функциям дифференциальных операторов с непрерывной частью спектра, № 1—2, стр. 19.

Гахраманов К. И., Сафаров Г. Г. Устойчивость пластического течения в полосе при сжатии со сдвигом, № 6, стр. 3.

Гусейнзаде А. А. Два возможных пути эволюции звезд Вольфа-Райе, № 5, стр. 83.

Гусейнзаде А. А. Возможный эволюционный смысл азотной и углеродной последовательностей звезд Вольфа-Райе, № 6, стр. 97.

Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш., Магомедов А. М. О некоторых свойствах класса $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$, № 1—2, стр. 51.

Гусейнзаде А. А. Возможный эволюционный смысл азотной и углеродной последовательностей звезд Вольфа-Райе, № 6, стр. 97.

Гусейнов Ф. Г. Эквивалентные упрощения сложных энергетических систем, № 1—2, стр. 152.

Гладких А. Н. О прочности и пластичности иттрия, № 5, стр. 115.

Джафарли Г. А. Теорема Фрагмента—Линделёфа типа единственности для решения эллиптической системы в полупространстве, № 6, стр. 38.

Джафарли Г. А., Гашимов Г. М. Об одной теореме единственности для рядов в Дирихле, № 5, стр. 36.

Джафаров У. К. Кручение правильной шестигранной призмы, армированной круговым стержнем, № 6, стр. 107.

Джафаров З. А., Алиев С. А., Алиев М. И. Теплопроводность в сильнолегированных кристаллах ZnAs , GaSb и ZnSb , № 4, стр. 84.

Джафарова Н. М., Мусаев С. Р. Алгоритм определения границы профилей наклонных скважин, № 6, стр. 87.

Джуварлы Ч. М., Нурмамедов Т. А. Поведение линейной изоляции в условиях солончаковых загрязнений, № 4, стр. 116.

Джуварлы Ч. М., Вечхайзер Г. В., Штейншрайбер В. Я. Поле во включении в форме эллиптического цилиндра при учете поверхностей проводимости, № 1—2, стр. 162.

Джуварлы Ч. М., Джафаров Э. М. Определение параметров ЛЭП с учетом поверхностного эффекта в земле, № 1—2, стр. 195.

Джуварлы Ч. М., Мухарская Л. А. Ионизационные характеристики трансформаторных масел, № 5, стр. 120.

Дильбазов Т. Г., Халилов А. Х. Исследование Z -центров окраски в некоторых NaCl -фосфорах с примесями меди, № 5, стр. 63.

Еремина А. Ф., Нуриева З. Д., Мамедов К. П., Шахтактинский М. Г., № 4, стр. 93.

Ибрагимов И. И. Интерполирование функций с конечным числом особенностей с помощью рациональных функций, № 1—2, стр. 10.

Иманов Л. М., Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А., Велиюлин Э. И. Деформация структуры и устойчивость изомерных форм в некоторых пропано- и пропензамещенных, № 6, стр. 81.

Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э. Диэлектрические исследования и строение жидкостей, № 1—2, стр. 103.

Исаев Ф. К. О фотопроводимости монокристаллов GaSe и GaTe , легированных оловом, № 3, стр. 117.

Искендеров Р. Н. Исследование электропроводности и термоэдс монокристаллов MnO , № 4, стр. 89.

Искендеров А. Д. Разностные методы решения одной краевой задачи для уравнения параболического типа, № 5, стр. 3.

Искендерзаде З. А., Ахундов М. Р. О некоторых свойствах диффузионных кремниевых диодов с различной длиной базы, № 3, стр. 96.

Исмаилов Т. К. К вопросу исследования оптимального режима устроителя высокочастотных колебаний при учете ограничения роста К.П.Д. генератора тепловыми потерями на сеточном электроде лампы, № 5, стр. 87.

Кадиров Н. Б. Теоретическая формула для определения коэффициента теплоотдачи от газа к стенке цилиндра компрессора, № 6, стр. 115.

Кадымов Я. Б., Кулиев З. Я., Мячин С. И. Применение ВМНД для исследования влияния параметров электрической системы, включающей длинную линию, на переходный процесс в ней, № 5, стр. 104.

Кадымов Я. Б., Агаларов Т. И., Мамедов Ф. А. К анализу процесса пуска несимметричного асинхронного двигателя, № 5, стр. 132.

Кулиев С. А. К вопросу о напряженном состоянии эллиптической трубы с эксцентричным кругом цилиндрическим отверстием, подверженной внутреннему равномерному давлению, № 6, стр. 131.

Кулиев А. А., Гаджиев С. М., Бахышов Р. Г., Худиев Х. Г. Термодинамическое исследование системы As—Se—T , № 6, стр. 126.

- Кулиев Б. И., Недлин Г. Н. Характер колебания низкочастотной ветки ферритов в неколлинеарной фазе, № 3, стр. 121.
- Ларионов Е. А. К теории устойчивости гамильтоновых уравнений в гильбертовом пространстве, № 4, стр. 13.
- Ларионов Е. А. Об однозначной разрешимости некоторых симметричных на границе систем первого порядка, № 5, стр. 8.
- Листенгартен Б. А., Заирова Т. А., Ализаде Г. Б. Применение теории импульсных систем к исследованию переходных процессов в системе тиристорный широтно-импульсный преобразователь—двигатель постоянного тока, № 5, стр. 126.
- Максудов Ф. Г., Хамраев К. Решение смешанной задачи для гиперболического уравнения на полупрямой обобщенным методом Фурье, № 6, стр. 30.
- Мамедов К. П., Бакиров М. Я., Багиров С. Б. Текстурирование при кристаллизации селена и его влияния на характеристику селеновых вентилях, № 3, стр. 67.
- Мамедов Х. И. и Халилов М. М. Трансформации полосатого спектра люминесценции в квазилинейчатые редикалы ксилола в *n*-парафинах при 77 и 55°K, № 6, стр. 64.
- Мамедов М. А. Сопоставление теоретического и эмпирического распределения комет, № 1—2, стр. 122.
- Мирсалимов В. М. О структуре пластических деформаций в вершине трещины, № 6, стр. 24.
- Музафаров И. И., Сафаров У. С. Устойчивость сжатого круглого стержня при ползучести, № 4, стр. 19.
- Мусаев Самандар. Метод последовательного анализа вариантов для систем с монотонно-рекуррентным функционалом, № 4, стр. 31.
- Мустафаев Ф. М., Аббасов А. С. Термодинамические свойства сульфида серебра (Ag₂S), № 3, стр. 90.
- Мухтаров И. А., Кулиев В. А. Исследование микроволнового спектра молекулы 1, 1, 2, 2-фторэтана, № 1—2, стр. 132.
- Муталлимов Ш. М. Нормальный удар конусом по упругой мембране при наличии трения, № 6, стр. 14.
- Насибов Ф. Г. Некоторые результаты о порядке наилучших приближений функций многих переменных, № 4, стр. 45.
- Никитин С. А. К вопросу об изотермическом течении вязкого газа в круглой трубе, № 4, стр. 132.
- Пашаев А. М. Измерение холловской подвижности носителей тока в полупроводниках на сверхвысоких частотах, № 5, стр. 67.
- Рзаев К. Ц. Вариационная и краевая задача, № 3, стр. 61.
- Рзаев К. И., Оруджева Ш. О. Температурные зависимости упругих констант монокристаллов TiSe и GaSe, № 3, стр. 76.
- Рза-Кулиев Ю. А. Перспективы развития термохимического способа умягчения морской воды, № 3, стр. 133.
- Расулов М. Л. Оценка фундаментальной матрицы эллиптической системы с комплексным параметром, № 1—2, стр. 40.
- Сабзиев Н. М. Экстремальные свойства целых функций конечного порядка и конечного типа в заданном угле комплексной плоскости, № 4, стр. 37.
- Салимов А. Х., Таиров М. А., Ширинов К. Ф. Решение задачи неустановившегося движения газа в трубе при смешанном законе трения, № 1—2, стр. 178.
- Сеидов З. Ф. Об эллиптичности слабо вращающихся конфигураций, № 6, стр. 92.
- Сеидов З. Ф. Политропы с фазовым переходом, III политропа и п-О с нейтральным ядром, 1—2, стр. 128.
- Тагиров Р. И., Аждаров Г. А., Алиева Б. С., Алекперов А. И., Таиров С. И., Шахтахтинский М. Г. Исследование примесных уровней и донорно-акцепторного взаимодействия в сплавах германий—кремний, № 1—2, стр. 76.
- Таирова Ж. И. Толстостенная труба из упрочняющегося несжимаемого материала под действием пульсирующего давления и переменного крутящего момента, № 4, стр. 3.
- Талиби М. А., Алиев М. М. О реактивных свойствах и природе западного слоя меднозакисных выпрямителей, № 4, стр. 62.
- Усейнова З. Об одной работе Насирэдина Туси по оптике, № 6, стр. 101.
- Фейзинов С. А. О представлении и аппроксимации функций пространства $L_{p,r}^{(s,\psi)}(E_n^t)$, № 4, стр. 23.
- Фейзуллаев Р. Б. Идеалы полугруды гомоморфизмов графа, № 3, стр. 37.
- Фейзуллаев Р. Б. Биидеалы полугруд, № 3, стр. 43.
- Халилов А. Х., Алиев Ф. Г. Исследование влияния примесей на термическое разрушение активаторных центров окраски в фосфорах NaCl+Ag, облученных ускоренными электронами, № 6, стр. 71.
- Халилов З. И. К теории динамических систем автоматического управления с распределенными параметрами, № 1—2, стр. 3.
- Шарифов К. А. О расчете энтропии индивидуальных веществ по ограниченными данным, № 6, стр. 54.
- Шахтахтинская М. И., Томтиев Д. С. Концентрационное переохлаждение расплава при вытягивании монокристаллов, № 3, стр. 82.
- Шахтахтинская М. И., Томтиев Д. С., Мусаев А. А., Шахтахтинский М. Г. О выращивании монокристаллов систем со значительной сегрегацией компонентов, испаряющихся при плавлении, № 5, стр. 48.
- Эфендизаде А. А., Листенгартен Б. А., Тагиров С. М. Анализ переходных режимов тиристорного частотно-регулируемого асинхронного электропривода, № 1—2, стр. 185.
- Якубов С. Я. Задача Коши для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка, I, № 3, стр. 16.
- Якубов С. Я. Задача Коши для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка, II, № 5, стр. 16.

Депонированные статьи

- Алескеров А. Г. О сходимости последовательных приближений Зейделя к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, № 6, стр. 142.
- Алиев Г. Ф. О сходимости метода прямых при решении краевых задач для квазилинейного управления параболического типа, № 3, стр. 145.
- Гаджиев Н. Д., Касимов Ф. Д., Мамиконova В. М. Влияние локального давления на свойства границы раздела кремний—двуокись кремния структур металл—окисел—полупроводник, № 6, стр. 143.
- Гаджиев Н. Д., Касимов Ф. Д., Кадымов Г. Г. МОП-транзистор, чувствительный к давлению, № 6, стр. 145.
- Кадымов Я. Б., Бабаев Р. Р. Аннотация к статье «Теоретическое исследование мощности, затрачиваемой на холостое вращение колонны бурильных труб при бурении наклонных скважин», № 4, стр. 141.
- Керимов И. Г., Мусаев А. М., Алиев Ф. Ю., Рустамов А. Г., Манафлы Э. И. Исследование механизма рассеяния носителей тока монокристаллов халькогенидов меди при низких температурах, № 6, стр. 144.
- Мухтаров Н. А., Кулиев В. А. Микроволновый спектр 3,3,3-фтопропилена, № 6, стр. 142.

МҮНДӘРИЧАТ

К. И. Гәһрәманов, Н. Н. Сәфәров. Ејни заманда сыхылан вә сүрүшән золагда пластик ахманын дајаныглыгы	3
К. С. Нагвердиев. Сыхылмајан өзлү мајенин мүстәви диффузорда истиликдәјишмәси мәсәләсинин бир автомодел һәлли һаггында	11
Ш. М. Мутәллимов. Сүртүмәни нәзәрә алмагла, еластик мембрана конус илә дүзүнә зәрбә	14
М.-Б. Ә. Бабејев. Ән јахшы јахынлашманын гүјмәтини тәјин етмәнин бир үсулу һаггында	18
В. М. Мирсәлимов. Јарыгын тәпәсиндә пластик деформасијанын структуру һаггында	24
Ф. Г. Максудов, Г. Нәмрәјев. Гиперболик тип тәнликләр үчүн јарымохда гарышыг мәсәләнин үмумиләшмиш Фурје үсулу илә һәлли	30
К. Ә. Чәфәрли. Еллиптик типли системин һәлли үчүн јарымфзада Фрагмен-Линделеф типли јеканәлик теорем	38
Н. Г. Әлијев. Јарымсонсуз областа истиликкечирмә тәнлији үчүн бир тәрс мәсәлә һаггында	42
Ш. А. Әһмәдов. Даими әмсаллы дифференциал тәнликләрин һәллинин давамы һаггында	49
К. Ә. Шәрифов. Мәһдуд гүјмәтләрә көрә индивидуал маддәләрин энтропијасынын һесаблинамасына даир	54
Х. И. Мәмәдов, М. М. Хәлилов. 77 вә 55°К-дә парафинләрдә ксилол радикалынын золаглы спектрләринин квази-хәтти спектрә чеврилмәси	64
Н. Х. Әждәров, В. И. Таһиров, С. И. Таиров, М. Н. Шах-таһтински. Кадмиум ашгарынын керманнум-силисиум бәрк мәһлулларында јаратдыгы ашгар сәвијәләринин тәдгиги	68
Ә. Х. Хәлилов, Ф. Г. Әлијев. Електрон дәстәси илә шүаландырыл-мыш NaCl+Ag фосфорларында активатор рәнк мәркәзләринин термик дағыл-масына ашгарларын тәсиринин тәдгиги	71
Ч. Г. Агајев, С. Г. Әһмәдов, М. А. Бағыров, В. П. Малин. Електротехники шүшә-текстолит материалынын диелектрик хәссәләри	76
Л. М. Иманов, А. А. Әбдүррәһманов, Р. Ә. Рәһимова, Е. И. Вәлијулин. Пропан вә пропенин бәзи төрәмәләриндә изомер форма-ларынын дајаныглыгы вә гурулуш параметрләринин деформасијасы	81
Е. Р. Нәсәнов. Дүшән вольтметр характеристикасы олан һалда чәрәјан дајаныгсызлыгына даир	84
Н. М. Чәфәрова, С. Р. Мусајев. Маили гујуларын профили сәр-һәддинин тәјин едилмәсинин алгоритми	87
З. Ф. Сејидов. Фырланма сүр'әти кичик олан конфигурацијаларын ел-липтикалији һаггында	92
А. А. Нүсәјнзадә. Волф-Раје улдузларынын азот вә карбон арды-чылыгы	97
З. Усәјнов. Нәсрәддин Тусинин оптикаја анд бир әсәри һаггында	101
У. К. Чәфәров. Даирәви чубугла долдурулараг мөһкәмләндирилмиш дүзкүн алтыбучаглы призманын бурулмасы мәсәләсинә даир	107
Н. Б. Гәдіров. Газдан цилиндр диварына истиликвермә әмсалынын тапылмасы үчүн нәзәри формул	115
И. А. Әлијева, Н. И. Јушәнкова. CO ₂ ашгарлы AgC ашағы температурлу плазмасы ахынында релаксасија просесләри	121
Ә. А. Гулијев, С. М. Нәчәјев, Р. Н. Бахышов, Х. Г. Ху-дијев. As—Se—J системинин термодинамики тәдгиги	126
С. А. Гулијев. Ексцентрик цилиндр башлуға малик олан еллиптик борунун дахили мунтәзәм тәзјигдән кәркинлик вәзијјәти мәсәләсинә даир	131
Ә. Б. Абдинов. Јүксәк енержили протонларла α-кластерләрин чыха-рылмасы	138
Сифариш көзләјән мәгаләләр	142—146
Көстәричи	147

СОДЕРЖАНИЕ

К. И. Гахраманов, Г. Г. Сафаров. Устойчивость пластического течения в полосе при сжатии со сдвигом	3
К. С. Ахвердиев. Автомодельные течения вязкого газа в плоских диффузорах с учетом теплообмена	11
Ш. М. Муталлимов. Нормальный удар конусом по упругой мембране при наличии трения	14
М.-Б. А. Бабаев. Об одном способе определения значения наилучшего приближения	18
В. М. Мирсалимов. О структуре пластических деформаций в вершине трещины	24
Ф. Г. Максудов, К. Хамраев. Решение смешанной задачи для гиперболического уравнения на полупрямой обобщенным методом Фурье	30
Г. А. Джафарли. Теорема Фрагмена—Линделефа типа единственности для решения эллиптической системы в полупространстве	38
Г. Г. Алиев. Об одной обратной задаче для уравнения теплопроводности на полубесконечной области	42
Ш. А. Ахмедов. О продолжении решений дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	49
К. А. Шарифов. О расчете энтропии индивидуальных веществ по ограниченному данным	54
Х. И. Мамедов и М. М. Халилов. Трансформации полосатого спектра люминесценции в квазилинейчатые радикала ксилола в н-парафинах при 77 и 55°K	64
Г. Х. Аждаров, В. И. Тагиров, С. И. Таиров, М. Г. Шахтахтинский. Исследование энергетических состояний примеси кадмия в сплавах германия с кремнием	68
А. Х. Халилов, Ф. Г. Алиев. Исследование влияния примесей на термическое разрушение активаторных центров окраски в фосфорах NaCl+Ag, облученных ускоренными-электронами	71
Ч. Г. Агаев, С. Г. Ахмедов, М. А. Багиров, В. П. Малин. Изменение диэлектрических свойств электротехнического стеклотекстолита под действием разрядов в воздухе	76
Л. М. Иманов, А. А. Абдурахманов, Р. А. Рагимова, Э. И. Вәлијулин. Деформация структуры и устойчивость изомерных форм в некоторых пропано-и пропензамещенных	81
Э. Р. Гасанов. О неустойчивости тока при падающей вольтамперной характеристике	84
Н. М. Джафарова, С. Р. Мусаев. Алгоритм определения границы профилей наклонных скважин	87
З. Ф. Сеидов. Об эллиптичности слабо вращающихся конфигураций	92
А. А. Гусейнзаде. Возможный эволюционный смысл азотной и углеводородной последовательностей звезд Вольф-Райе	97
З. Усейнова. Об одной работе Насирәддина Туси по оптике	101
У. К. Джафаров. Кручение правильной шестигранной призмы, армированной круговым стержнем	107
Н. Б. Кадиров. Теоретическая формула для определения коэффициента теплоотдачи от газа к стенке цилиндра компрессора	115
И. А. Алиева, Н. И. Юшәнкова. Релаксационные процессы в струе низкотемпературной плазмы Ag с примесью CO ₂	124
А. А. Кулиев, С. М. Гаджиев, Р. Г. Бахышов, Х. Г. Худиев. Термодинамическое исследование системы As—Se—T	126
С. А. Кулиев. К вопросу о напряженном состоянии эллиптической трубы с эксцентричным круглым цилиндрическим отверстием, подверженной внутреннему равномерному давлению	131
О. Б. Абдинов. Выбивание α-кластеров высокоэнергетическими протонами	138

Депонированные статьи

А. Г. Алескерова. О сходимости последовательных приближений Зейделя к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом	142
Н. Д. Гаджиева, Ф. Д. Касимова, В. М. Мамиконова. Влияние локального давления на свойства границы раздела кремний-диоксид кремния	143
И. Г. Керимов, А. М. Мусаев, Ф. Ю. Алиев, А. Г. Рустамов, Э. И. Манафлы. Исследование механизма рассеяния носителей тока монокристаллов халькогенидов меди при низких температурах	144
И. Д. Гаджиев, Ф. Д. Касимов, Г. Г. Кадымов. Моп-транзистор, чувствительный к давлению	145
И. А. Мухтаров, В. А. Кулиев. Микроволновый спектр 3,3,3-фторпропилена	146
Указатель	147

Сдано в набор 28/XII 1970 г. Подписано к печати 7/V 1971 г. Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бум. лист. 4,88. Печ. лист. 13,36. Уч.-изд. лист. 12,5. ФГ 13584. Заказ 497. Тираж 680 Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Государственного комитета Совета Министров Азербайджанской ССР по печати. Баку, ул. Ази Асланова, 80.