

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

5

1970

„ЕЛМ“ НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭЛМ“
БАКЫ – БАКУ

А. Д. ИСКЕНДЕРОВ

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1°. Постановка задачи. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — точка n -мерного евклидова пространства, $\bar{D} = \{0 \leq x_k \leq l_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ — n -мерный параллелепипед с границей Γ , $D = \bar{D} \setminus \Gamma$, $\bar{\mathcal{Q}} = \bar{D} \times [0, T]$, $\mathcal{Q} = D \times (0, T]$. Пусть отыскивается решение следующей задачи:

$$u_t - \sum_{k=1}^n a_k(x, t, u, q(t)) u_{x_k x_k} + \sum_{k=1}^n b_k(x, t, u, q(t)) u_{x_k} + c(x, t, u, q(t)) u = f(x, t, u, q(t)), \quad (x, t) \in \mathcal{Q}, \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{\Gamma} = u(x, 0) = C, \quad x \in \bar{D}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

где $q(t) = \{q_r(t): q_r(t) = u(\xi_r, t), r = 1, 2, \dots, r_0; q_r(t) = u_{x_r}(\xi_r, t), r = r_0 + 1, \dots, r_1; \dots q_r(t) = u_{x_n}(\xi_r, t), r = r_{n-1} + 1, \dots, r_n\}$, $\xi_r, (r = 1, 2, \dots, r_n)$ — фиксированные точки области $\bar{D}$.

Функции $a_k(x, t, u, q) \geq \nu > 0$, $b_k(x, t, u, q)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $c(x, t, u, q)$, $f(x, t, u, q)$ и их производные по u, q равномерно непрерывны во всей области изменения аргументов $(x, t) \in \bar{\mathcal{Q}}, u, q$. Решением задачи (1)–(2) назовем функцию $u(x, t)$ если $u(x, t) \in C(\bar{\mathcal{Q}}) \cap C_{2,1}(\mathcal{Q})$, существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \xi_r} u_x(x, t)$, $r = 1, 2, \dots, r_0, r_0 + 1, \dots, r_n$ и удовлетворяются все соотношения (1), (2). Ниже предположим, что задача (1)–(2) имеет единственное решение, обладающее всеми требуемыми по ходу изложения производными.

Вопросам существования, единственности, устойчивости и гладкости решения задачи (1)–(2) посвящена отдельная статья автора. Отметим, что к задачам типа (1)–(2) приводят, например, некоторые обратные краевые задачи, то есть задачи, в которых наряду с решением данного дифференциального уравнения отыскиваются и его коэффициенты, и правая часть по некоторым дополнительным данным, являющиеся лишними в случае, когда коэффициенты и правая часть известны. Например, пусть требуется найти $\{a_k(t) > 0, b_m(t), u(x, t), k = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots, m_0\}$ из условий:

$$u_t - \sum_{k=1}^n a_k(t) u_{x_k x_k} = H(x, t, a_k(t), b_m(t), u, u_x), \quad (x, t) \in \mathcal{Q}, \quad (3)$$

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. Б. Абдуллаев (главный редактор), З. И. Халилов (зам. гл. редактора), Ю. М. Сеидов (зам. гл. редактора), Г. Н. Агаев, М. И. Алиев, Ю. А. Амензаде, Б. М. Аскеров, Н. А. Гулиев, А. И. Гусейнов, М. А. Джавадов, И. И. Ибрагимов, Л. М. Иманов, Ф. Г. Максудов, Э. И. Манафлы (отв. секретарь), Г. Ф. Султанов.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)».

п 53895

Центральная научная
БИБЛИОТЕКА

$$u(x, 0) = u(x, t)|_{\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \bar{D}, \quad (4)$$

$$F_p(t, a_k(t), b_m(t), u_x(\xi_r, t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \xi_r \in \Gamma, \quad (5)$$

где $r, p = 1, 2, \dots, p_0, p_0 = n + m_0$, функции H и F_p определены, соответственно, в областях $\bar{D}_1 = \{(x, t) \in \bar{D}, 0 \leq a \leq A, |b| \leq B, |u| \leq R, |u_x| \leq R\}$, $\bar{D}_2 = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq a \leq A, |b| \leq B, |u_x| \leq R\}$.

Дополнительные условия (5) обычно задаются в виде потоков через границы области. Например, условие (5) можно задавать в виде

$$-\sum_{k=1}^n a_k(t) u_{x_k}(\xi_r, t) \cos \varphi_k = g_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

$$-\sum_{k=1}^n a_k(t) u_{x_k}(\xi_r, t) \cos \varphi_k = b_r(t) \psi_r(t) + \bar{g}_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, m_0, \quad (7)$$

где φ_k — угол между нормалью в точке ξ_r к границе и осью x_k ; $g_r(t)$, $\psi_r(t)$, $\bar{g}_r(t)$ — заданные функции. Неизвестные коэффициенты $b_m(t)$ обычно фигурируют перед производными u_{x_k} и решением. Действительно, в случае теплообмена с окружающей средой, подчиняющегося закону Ньютона, количество тепла, рассчитанное на единицу длины и времени, равно

$$Q = c(u - \theta), \quad (8)$$

где θ — температура окружающей среды c — коэффициент теплообмена. При учете этого в уравнении появляется член $b_0 u$, а дополнительное условие при этом для определения $b_0(t)$ по указанному закону можно задавать в виде (7), где $r = 0$ и $\psi_0(t) = u|_{\Gamma} - \theta$. Если решение на границе задано (первая краевая задача), то $\psi_0(t)$ будет известная функция.

Теперь пусть твердое тело движется со скоростью компоненты, которой являются $v_k, k = 1, 2, \dots, n$. При вычислении потока через произвольную поверхность к тепловому потоку в неподвижном теле следует добавить член, обусловленный конвекцией, с составляющими $v_k u$. Тогда компоненты вектора теплового потока можно записать в виде

$$f_k = -a_k u_{x_k} + v_k u, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

При учете этого в уравнении появляются члены вида $b_k u_{x_k}, k = 1, 2, \dots, n$. Тогда дополнительные условия при указанном законе будут иметь вид (7).

2°. Разностный метод. Проводя плоскости $x_k^{(i_k)} = i_k h, i_k = 0, 1, 2, \dots, M_k, k = 1, 2, \dots, n$, разобьем область $\bar{D}$ на параллелепипеды и отрезок $0 \leq t \leq T$, точками $t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, N$ разобьем на N интервалов длиной $\tau = T/N$. Положим $x = x_i, t = t_j, y = y(x_1, t_j), \bar{y} = y(x_i, t_{j-1}), y^{\pm l_k} = y(x_{i_1 i_2 \dots i_k \pm 1 \dots i_n}, t_j), y_{\tau} = \tau^{-1}[y - \bar{y}], y_t = \tau^{-1}[\bar{y} - y], y_{x_k} = h^{-1}[y^{+l_k} - y], y_{x_k}^- = h^{-1}[y - y^{-l_k}], y_{x_k x_k} = h^{-2}[y^{+l_k} - 2y + y^{-l_k}].$

Пусть шаги настолько мелки, что точки $\xi_r, (r = 1, 2, \dots, r_n)$ попадают в узлы сетки. Внутри области D функцию $q_r(t) (r = r_0 + 1, \dots, r_n)$ заменим, например, левым разностным отношением. При попадании точки $\xi_r (r = r_0 + 1, \dots, r_n)$ на границу области Γ функцию $q_r(t)$ заменим левым (правым) разностным отношением, если соответствующий левый (правый) соседний узел принадлежит области D . Ниже всюду предположим, что $u \in C_{2,1}(\bar{Q}) \cap C_{4,2}(\bar{Q})$.

Укажем одну разностную схему для приближенного нахождения решения задачи (1)–(2):

$$y_{\tau} - \sum_{k=1}^n a_k(x, t, y, \sigma) y_{x_k x_k} + \sum_{k=1}^n b_k(x, t, y, \sigma) y_{x_k} + c(x, t, y, \sigma) y = f(x, t, y, \sigma), \quad (x, t) \in Q, \quad (10)$$

$$y(x, 0) = y(x, t)|_{\Gamma} = 0, \quad x \in \bar{D}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11)$$

где $\sigma = \{\sigma_r(t)\}, \sigma_r(t)$ — разностная аппроксимация функции $q_r(t)$. Пусть u — решение задачи (1)–(2), y — решение задачи (10)–(11). Найдем уравнение для погрешности $z = y - u$. Для этого из (10), (11) соответственно вычтем (1), (2);

$$z_{\tau} - \sum_{k=1}^n \sigma_k(x, t) z_{x_k x_k} + \sum_{k=1}^n \beta_k(x, t) z_{x_k} + \gamma(x, t) z = \sum_{r=1}^n \delta_r(x, t) \bar{Q}_r(t) + \psi(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (12)$$

$$z(x, t)|_{\Gamma} = z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{D}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_k(x, t) &= a_k(x, t, y, \sigma); \quad \beta_k(x, t) = b_k(x, t, y, \sigma) - \\ &- \sum_{k'=1}^n \frac{\partial a_{k'}}{\partial y_{x_k}} u_{x_{k'} x_{k'}} + \sum_{k'=1}^n \frac{\partial b_{k'}}{\partial y_{x_k}} u_{x_{k'}} + \frac{\partial c}{\partial y_{x_k}} u - \frac{\partial f}{\partial y_{x_k}}; \\ \gamma(x, t) &= - \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial y} u_{x_k x_k} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_k}{\partial y} u_{x_k} + \frac{\partial c}{\partial y} u - \frac{\partial f}{\partial y} + \\ &+ c(x, t, y, \sigma); \quad \delta_r(x, t) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial q_r} u_{x_k x_k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_k}{\partial q_r} u_{x_k} - \frac{\partial c}{\partial q_r} u + \frac{\partial f}{\partial q_r}; \quad Q_r(t) = \sigma_r(t) - q_r(t). \end{aligned}$$

Легко проверить, что погрешность аппроксимации уравнения $\psi(x, t)$ имеет порядок $O(h, \tau)$.

Теперь докажем, что при

$$2r_n \|\delta_r\|_0 \tau \leq h, \quad \text{где } \|\delta_r\|_0 = \max_{x,t} |\delta_r(x, t)|. \quad (14)$$

для решения разностной задачи (12)–(13) имеет место оценка

$$\|z\|_0 \leq \tau \|\psi\|_0. \quad (15)$$

Действительно, из принципа максимума для решения задачи (12)–(13) имеем:

$$\|z(x, t_1)\|_0 \leq \tau \|\psi\|_0,$$

$$\|z(x, t_2)\|_0 \leq \tau \|\psi\|_0 + 2r_n \tau h^{-1} \|\delta_r\|_0 \|z(x, t_1)\|_0 \leq 2\tau \|\psi\|_0,$$

$$\|z(x, t_3)\|_0 \leq \tau \|\psi\|_0 + 2r_n \tau h^{-1} \|\delta_r\|_0 \|z(x, t_2)\|_0 \leq 3\tau \|\psi\|_0.$$

Продолжая рассуждение, по индукции получим

$$\|z(x, t_j)\|_0 \leq j\tau \|\psi\|_0 = t_j \|\psi\|_0.$$

Из этой оценки и поведения функции ψ следует, что при $h \rightarrow +0, \tau \rightarrow +0$ решение разностной задачи (10)–(11) стремится к решению (1)–(2).

3°. Задачи типа (1)–(2) можно рассматривать также для других уравнений. Например, укажем такую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть требуется найти решение следующей задачи:

$$u_x(x) = f(x, u(x), q), \quad x \in [a, b], \quad (16)$$

$$u(\xi_0) = 0, \quad (17)$$

где $q = \{q_r: q_r = u(\xi_r), r = 1, 2, \dots, r_0\}$, ξ_r , ($r = 0, 1, 2, \dots, r_0$) — фиксированные точки отрезка $[a, b]$. Аналогичным образом рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача (16)–(17) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$u(x) = \int_{\xi_0}^x f(\eta, u(\eta), q) d\eta. \quad (18)$$

Пусть функция $f(x, u, q)$ непрерывна в области $a \leq x \leq b$, $-\infty < u, q < +\infty$ и удовлетворяет условию.

$$|f(x, u(x), q) - f(x, v(x), p)| \leq K \left[|u - v| + \sum_{r=1}^{r_0} |q_r - p_r| \right].$$

Отсюда следует, что

$$|f(x, u, q) - f(x, v, p)| \leq K(r_0 + 1) \max_x |u - v|. \quad (19)$$

Если $K(r_0 + 1)(b - a) < 1$, то отображение (18) будет сжимающим и при этих условиях задача (16)–(17) будет иметь единственное решение. Укажем, что подобные рассуждения применимы также к интегральным уравнениям вида

$$u(x) - \int_a^b K(x, \eta) f(\eta, u(\eta), q) d\eta = f(x). \quad (20)$$

Теперь укажем один простой разностный алгоритм (аналог метода Эйлера) для нахождения решения задачи (16)–(17). Выбрав h , положим

$$x_j = \xi_0 + ih, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть при некоторых значениях i_r точки x_i попадают в точки ξ_r . Задачу (16)–(17) заменим следующей разностной задачей:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hf(x_i, u(x_i), y(\xi_1), \dots, y(\xi_{r_0})), \quad (21)$$

$$u(\xi_0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Задача (21)–(22) является нелинейной и для нахождения ее решения можно применить метод последовательных приближений по схеме

$$y^{(s)}(x_{i+1}) = u(x_i) = hf(x_i, y(x_i), y^{(s-1)}(\xi_1), \dots, y^{(s-1)}(\xi_{r_0})),$$

$$y(\xi_0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Докажем сходимость метода последовательных приближений. Положим

$$z^{(s)}(x_i) = y^{(s)}(x_i) - u(x_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$z^{(s)}(x_{i+1}) = h [f(x_i, y(x_i), y^{(s-1)}(\xi_1), \dots, y^{(s-1)}(\xi_{r_0})) - f(x, y(x_i), y(\xi_1), \dots, y(\xi_{r_0}))],$$

$$z^{(s)}(x_{i+1}) = h \sum_{r=1}^{r_0} \frac{\partial f_{ir}}{\partial y(\xi_r)} z^{(s-1)}(\xi_r),$$

$$\sum_{r=1}^{r_0} |z^{(s)}(\xi_r)| = h \sum_{r=1}^{r_0} \left| \sum_{\rho=1}^{r_0} \frac{\partial f_{ir}}{\partial y(\xi_\rho)} z^{(s-1)}(\xi_\rho) \right| \leq Ch r_0 \sum_{\rho=1}^{r_0} |z^{(s-1)}(\xi_\rho)|.$$

Пусть $z = Chr_0 < 1$. Тогда из последнего неравенства следует, что

$$\sum_{r=1}^{r_0} |z^{(s)}(\xi_r)| \leq \text{const } z^s.$$

Поэтому

$$|z^{(s)}(x_i)| \leq \text{const } z^s.$$

Таким образом, метод последовательных приближений для нахождения решения разностной задачи (21)–(22) сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Теперь докажем сходимость решения разностной задачи (21)–(22) к решению дифференциальной задачи (16)–(17). Положим $z(x_i) = u(x_i) - u(x_i)$. Суммируя (21), получим

$$u(x_{i+1}) = h \sum_{k=0}^i f(x_k, u(x_k), y(\xi_1), \dots, y(\xi_{r_0})).$$

С другой стороны, эту формулу для приближенного решения задачи (16)–(17) можно получить, заменяя интеграл в (18) соответствующей интегральной суммой. Эта методика применима также для нахождения приближенного решения интегрального уравнения (20).

$$z(x_{i+1}) = \sum_{k=0}^i h [f(x_k, y, (x_k), y(\xi_1), \dots, y(\xi_{r_0})) - f(x_k, u(x_k), u(\xi_1), \dots, u(\xi_{r_0}))] + \psi,$$

где $\psi(x_i)$ — погрешность аппроксимации, которая имеет порядок h ;

$$z(x_{i+1}) = \sum_{k=0}^i \left[\frac{\partial f_k}{\partial u} z(x_k) + \sum_{\rho=1}^{r_0} \frac{\partial f_k}{\partial u(\xi_\rho)} z(\xi_\rho) \right] + \psi(x),$$

$$|z(x_{i+1})| \leq C(b-a) \left[\|z(x)\|_0 + \sum_{\rho=1}^{r_0} |z(\xi_\rho)| \right] + \|\psi\|_0$$

Если $C(b-a)(1+r_0) < 1$, то

$$\|z(x)\|_0 \leq [1 - C(b-a)(1+r_0)]^{-1} \|\psi(x)\|_0.$$

Отсюда следует требуемая сходимость решения разностной задачи (21), (22) при $h \rightarrow +0$. Приведенные выше рассуждения остаются в силе также для системы уравнений

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. ЖФМ и МФ, 2, 1962, № 4.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 6. X 1969

А. Д. Искандеров

Параболик тип тэнликләр үчүн бир сәрһәд мәсәләсинин сонлу фәргләр үсулу илә һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә әмсаллары, сәғ тәрәфи һәлл вә онун биринчи тәртиб төрәмәләринин областын фиксә едилмиш нөгтәләриндә кәтү-рүлмүш гijмәтләриндән дә асылы олан квазихәтти параболик тип тәнликләр үчүн биринчи сәрһәд мәсәләси өjrәнилмишдир. Бахылан мәсәлә үчүн сонлу фәргләр үсулу әсасландырылмышдыр. Бундан сонра аналожи мәсәлә ади диференциал тәнликләр үчүн тәдгиг олун-мушдур.

Е. А. ЛАРИОНОВ

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЧНЫХ НА ГРАНИЦЕ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть G —ограниченная область вещественного евклидова пространства R^m с кусочно-гладкой границей B . Рассмотрим на гладких функциях $u(x)$, определенных на G и принимающих значения в комплексном евклидовом пространстве E_k , дифференциальный оператор

$$Lu(x) = \sum_{i=1}^m A_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + K(x) u(x), \quad (1)$$

где $A_i(x)$ и $K(x)$ —квадратные матрицы $k \times k$. Предположим, что $a_{ij}(x) \in C^3(\bar{G})$, а функции $\kappa_{ij}(x)$ ограничены и измеримы в $\bar{G}$. Необходимо определить решение $u(x)$ из $L_2(G)$ уравнения $\lambda u(x) - Lu(x) = f(x)$ такое, при котором значение $g(x)$ на границе B принадлежит некоторому подпространству $B_+(x)$ пространства E_k , гладко зависящему от точки x на B , причем $f(x), g(x) \in L_2(G)$. Однозначная разрешимость этой задачи исследована в [1–8] для случая, когда матрицы $A_i(x)$ являются симметричными или эрмитовыми.

Рассмотрим матрицу

$$a(x, \xi) = \sum_{i=1}^m \xi_i A_i(x), \quad (2)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in R^m$. Пусть $\sum$ означает единичную сферу в R^m . Оператор L называется симметризуемым, если существует невырожденная для всех $x \in \bar{G}$ и $\xi \neq \{0\}$ матрица $r(x, \xi) \in C_{\xi\xi}^{3,\infty}(G \times \sum)$, такая, что

$$(ra)^* = ra, \quad (3)$$

и положительно симметризуемым, если, кроме того, матрица $r(x, \xi)$ является положительно определенной. Без ограничения общности можно считать, что $r(x, \xi)$ положительно однородна степени нуль, так как наряду с $r(x, \xi)$ и матрица $r(x, \xi) + r(x, -\xi)$ симметризует L .

Предположим, что для $x \in B$

$$\det a_n(x) \neq 0, \quad (4)$$

где $a_n(x) = a(x, n_x)$, а n_x —единичный вектор внутренней нормали к точке $x \in B$. Обозначим через $M_+(x)$ совокупность всех максимальных подпространств из $P_+(x) = \{n \in E_k: (a_n(x), \eta, \eta) \geq 0\}$,

где $(\eta, \eta) = \sum_{j=1}^k \eta_j \bar{\eta}_j$. В [9] при некоторых дополнительных условиях доказана нетеровость задачи

$$Lu(x) = f(x) \text{ в } G, \quad (5)$$

$$g(x) \in B_+(x), B_+(x) \in M_+(x) \quad (6)$$

в $L_2(G)$ для симметризуемого оператора L , $f(x), g(x) \in L_2(G)$, $g(x)$ —значение $u(x)$ в точке $x \in B$.

В [10] установлена однозначная разрешимость в $L_2(G)$ при любых $f(x)$ и $g(x)$ из $L_2(G)$ для достаточно больших $\text{Re } \lambda$ задачи $\lambda u(x) - Lu(x) = f(x)$, $g(x) \in B_+(x)$ при условиях:

(A) $\det a_n(x) \neq 0$ для $x \in B$,

(B) $r(x, n_x) \equiv 1$ на B ,

(C) $g(x) \in B_+(x), B_+(x) \in M_+(x)$,

(D) $B_+(x), a_n(x)$ —положительное подпространство E_k в положительно симметризуемом операторе L .

Теорема 1. При условиях (A), (B), (C) и положительно симметризуемом операторе L задача

$$\lambda u(x) - Lu(x) = f(x) \text{ в } G, \quad (7)$$

$$g(x) \in B_+(x) \text{ на } B \quad (8)$$

однозначно разрешима в $L_2(G)$ для достаточно больших $\text{Re } \lambda$ и любых $f(x), g(x)$ из $L_2(G)$.

Доказательство. Поскольку матрица $r(x, \xi)$ положительно определена, то существует [10] положительно определенный самосопряженный оператор R , ограниченный в $L_2(R^m)$ по норме $\|u\| =$

$= (u, u)^{\frac{1}{2}}$, а потому скалярные произведения $\langle u, v \rangle = (Ru, v)$ и (u, v) топологически эквивалентны в $L_2(R^m)$. Для функций u и v из $L_2(G)$ положим $\langle u, v \rangle_G = \langle u_0, v_0 \rangle$, где функции u_0 и v_0 совпадают с u и v на G и продолжены нулем вне G . Пространство $L_2(G)$, снабженное формой $\langle u, v \rangle_G$, обозначим $L_2 \langle G \rangle$. Для гладких функций u и v из $L_2 \langle G \rangle$ имеет место следующая [10] формула Грина:

$$\langle (L - S)u, v \rangle_G + \langle u, (L - S)v \rangle_G = \langle Du, v \rangle_G - (a_n u, v)_B, \quad (9)$$

где операторы S и D являются ограниченными в $L_2 \langle G \rangle$ по норме

$$\langle\langle u \rangle\rangle = \langle u, u \rangle_G^{\frac{1}{2}}.$$

Перепишем (9) в виде

$$\langle Lu, v \rangle_G + \langle u, Lv \rangle_G = \langle Su, v \rangle_G + \langle u, Sv \rangle_G + \langle Du, v \rangle_G - (a_n u, v)_B. \quad (10)$$

Пусть L_0 —сужение оператора L на линейал $D(L_0)$, состоящий из гладких функций $u(x)$ из $L_2(G)$, значения которых на границе B принадлежат фиксированным подпространствам $B_+(x)$ из $M_+(x)$, гладко меняющимся от точки к точке на B . Оператор L_0 допускает замыкание $\bar{L}_0$ в $L_2 \langle G \rangle$. В силу ограниченности операторов S и D и определения операторов L_0 и $\bar{L}_0$ из (10) следует соотношение

$$2 \text{Re } \langle \bar{L}_0 u, v \rangle_G \leq \alpha \langle u, v \rangle_G, \quad (11)$$

где α —некоторая ограниченная по модулю вещественная константа. Пусть $(u, v)_G$ —скалярное произведение в $L_2(G)$.

Тогда $(u, v)_G = (u_0, v_0)$, а потому

$$\langle u, u \rangle_G = \langle u_0, u_0 \rangle = (Ru_0, u_0) \leq \|R\| (u_0, u_0) = \|R\| (u, u)_G,$$

$$\langle\langle u \rangle\rangle_G \leq \|R\|^{\frac{1}{2}} \|u\|_G, \quad (12)$$

$$(u, u)_G = (u_0, u_0) \leq \|R^{-1}\| \langle u_0, u_0 \rangle = \|R^{-1}\| \langle u, u \rangle_G,$$

$$\|u\|_G \leq \|R^{-1}\|^{\frac{1}{2}} \langle u, u \rangle_G. \quad (13)$$

Из (12) и (13) получим, что замыкание пространства $L_2 \subset G$ по норме $\langle u, u \rangle_G$ состоит из элементов пространства $L_2(G)$. Оператор $\bar{L}_\alpha = L_0 - \alpha I$ задан на плотном в $L_2(G)$ линейном, замкнут, имеет спектр, лежащий в левой полуплоскости, а потому является максимальным диссипативным оператором в $L_2(G)$. Таким образом, для всех λ с $\operatorname{Re} \lambda > \alpha$ оператор $(\lambda I - L) = -(\bar{L} - \lambda I)$ отображает плотное в $L_2(G)$ множество $D(\bar{L}_0)$ на все $L_2(G)$, а потому существует ограниченный в $L_2(G)$ оператор $(\lambda I - L)^{-1}$.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = Lu, t \geq 0, \quad (14)$$

$$u(0) = u_0, \text{ где } u_0 \in D(L). \quad (15)$$

Задача Коши называется равномерно корректной, если для любого $u_0 \in D(L)$ существует ее единственное решение, и из $u_n(0) \rightarrow 0$ следует, что $u_n(t) \rightarrow 0$ равномерно по t на каждом конечном промежутке $[0, T]$. Оператор $\bar{L}_\alpha = \bar{L}_0 - \alpha I$, будучи максимальным диссипативным оператором, порождает полугруппу $U(t)$ нестягивающихся операторов в $L_2(G)$, а потому задача Коши:

$$\frac{du}{dt} = \bar{L}_\alpha u, t \geq 0, \quad (16)$$

$$u(0) = u_0 \in D(\bar{L}_\alpha) \quad (17)$$

равномерно корректна. С другой стороны, если $V(t)$ есть полугруппа порожденная оператором $\bar{L}_0$, то из (14) и (16) получим соотношение

$$V(t) = e^{at} U(t).$$

Теорема 3. Задача Коши:

$$\frac{du}{dt} = \bar{L}_0 u, t \geq 0, \quad (14')$$

$$u(0) = u_0, u_0 \in D(\bar{L}_0) \quad (15')$$

равномерно корректна.

В работе [9] установлено, что, если не предполагать положительной определенности матрицы $r(x, \xi)$, то имеет место соотношение

$$RL + L^{(*)} R^{(*)} = H + N,$$

где $L^{(*)}$ и $R^{(*)}$ — операторы, локально сопряженные с операторами L и R , оператор N вполне непрерывен из $L_2(G)$ в $L_2(G)$. Обозначим через $h(x, \xi)$ символ [11] оператора H .

Теорема 4. Пусть L — симметричный оператор и выполнены условия (A), (C), (D). Если существует невырожденная однородная степени нуль матрица $r(x, \xi)$, равная единице на B и

$$v \cdot h(x, \xi) v > 0$$

для всех векторов, аннулируемых матрицей $a(x, \xi)$, то оператор $\bar{L}$ взаимно-однозначно отображает $L_2(G)$ на $L_2(G)$.

Доказательство. В [9] установлено, что при выполнении условий теоремы 4 оператор $\bar{L}$ является нетеровым и имеет тем самым конечный индекс. С другой стороны, если включить оператор $L \equiv L_0$ в семейство операторов $L_\alpha = L_0 + \alpha I$, где α — действительное

число, то для достаточно больших α в силу теоремы 1 $\operatorname{ind} L_\alpha = 0$. Поскольку $\operatorname{ind} L_\alpha$ непрерывно зависит от α , то $\operatorname{ind} L_\alpha = 0$ для всех α . Теорема 4 доказана.

Следствие. Краевая задача $Lu(x) = f(x)$ в G , $g(x) \in B_+(x)$ на B , $B_+(x) \in M_+(x)$ при выполнении условий теоремы 4 однозначно разрешима для всех $f(x), g(x) \in L_2(G)$.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность проф. М. А. Наймарку за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дезин А. А. ДАН СССР 107, 1956 № 1.
2. Friedrichs K. O. Comm. Pure Appl. Math., 11 (1958), 333—418.
3. Дезин А. А. Матем. сб. 49 (91); 4 (1959).
4. Дезин А. А. УМН, 14, 1959, № 3.
5. Lax P. D. and Phillips R. S. Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 427—455.
6. Фридрихс К. О. Взаимно-согласованные задачи для линейных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1963.
7. Sarason L., Comm. Pure Appl. Math., 15 (1952), 237—288.
8. Phillips R. S., Sarason L. Journ. Math. and. Mech., 15, № 2 (1966), 235—271.
9. Friedrichs K. O. and Lax P. D. Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), 395—338.
10. Агранович М. С. Тр. Моск. матем. об-ва, т. 16, 1967.
11. Kohn J. J., Nirenberg L. Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), 269—305.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 16. IX 1969

Ж. А. Ларионов

Сәһәддә симметрик биртәртибли системләрин
биргилмәтли һәлли һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә (1) шәклиндә верилмиш дифференциал оператор үчүн

$$\lambda u(x) - Lu(x) = f(x)$$

тәңлијинин $L_2(G)$ -дән олан һәлли ахтарылып. Һәмин һәллин $x \in B$ олдуғда $g(x)$ гилмәти x -дән һамар асылы B сәһәддиндә тәјин олунмуш E_k фәзасынын $B(x)$ алт фәзасына дахил олсун вә һәм дә $f(x), g(x) \in L_2(G)$ тәјин едилсин. Бурада G —һәгиги R_m евклид фәзасында һиссә-һиссә һамар B сәһәдди мәнһуд областдыр.

А. М. ГАСАНОВ

ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗИРОВАННОЙ НЕФТИ

Для решения некоторых задач математической физики на БЭСМ иногда бывает удобно применять неявные алгоритмы. Так, например, явные алгоритмы задачи теплопроводности устойчивы при определенных условиях, а неявные алгоритмы этой же задачи бывают безусловно устойчивы [5]. Поэтому, если в интересах повышения точности шаг по координате— Δx выбирается достаточно малым, то в силу условия устойчивости при явном алгоритме шаг по времени Δt оказывается столь малым, что для завершения процесса решения задачи требуется огромное число таких шагов. Исходя из этих соображений, мы составили обобщенный неявный алгоритм некоторых одномерных задач фильтрации газированной нефти, включающий в себя как частный случай явные алгоритмы этих же задач.

Явные алгоритмы одномерных задач для общего управления фильтрацией газированной нефти на основе метода сеток впервые были составлены З. И. Халиловым [1]. Для конкретного уравнения фильтрации газированной нефти на основе метода сеток подобные алгоритмы составлены нами [2]. На их основе решена одномерная задача фильтрации газированной нефти с помощью вычислительной машины „Урал-1“ и найдены распределения давления и нефтенасыщенности в пласте [3].

В работе [2] рассмотренная одномерная задача фильтрации газированной нефти в безразмерных координатах сводится к решению системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \left[\frac{\rho_n}{\rho_r} (1 - \rho)^2 + \rho^3 \right] \left[P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ &+ P \left[2 \frac{\rho_n}{\rho_r} (\rho - 1) + 3\rho^2 \right] \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho^3 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \rho^2 \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при граничных и начальных условиях, соответственно;

$$P(x, t)|_{x=0} = P_r(t), \quad P(x, t)|_{x=1} = P_k(t); \quad (2)$$

$$P(x, t)|_{t=0} = P_0(x), \quad \rho(x, t)|_{t=0} = \rho_0(x), \quad (3)$$

$0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$, где x —координата точки нефтяного пласта, t —время, $x=0$ —галерея, $x=1$ —контур питания, $P(x, t)$ —давление, $\rho(x, t)$ —

нефтенасыщенность, ρ_n , ρ_r —вязкости, соответственно, нефти и газа, $P_r(t)$, $P_k(t)$, $P_0(x)$, $\rho_0(x)$ —заданные функции своих аргументов.

В статье [2] составлен явный алгоритм для решения задачи (1), (2), (3). Теперь составим обобщенный неявный алгоритм для этой же задачи.

С этой, целью введем следующие обозначения: если $f(x)$ является функцией от x , то полагают

$$(\delta f)_{i+\frac{1}{2}}^j = f[(i+1)\Delta x] - f(i\Delta x),$$

$$(\delta f)_i = f\left[\left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x\right] - f\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right],$$

$$(\delta^2 f)_i = f[(i+1)\Delta x] - 2f(i\Delta x) + f[(i-1)\Delta x]$$

и т. д.;

если f зависит и от t , то употребляют также и вторые индексы j , $j+1$ и т. д.; так например, полагаем

$$(\delta f)_{i+\frac{1}{2}}^j = f[(i+1)\Delta x, j\Delta t] - f(i\Delta x, j\Delta t),$$

$$(\delta f)_i^j = f\left[\left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x, j\Delta t\right] - f\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x, j\Delta t\right],$$

$$(\delta^2 f)_i^j = f[(i+1)\Delta x, j\Delta t] - 2f(i\Delta x, j\Delta t) + f[(i-1)\Delta x, j\Delta t]$$

и т. д.

Значения функций $f(x, t)$ в точке $x = i\Delta x$, $t = j\Delta t$ будем обозначать через $f_{i,j}$. Используя эти обозначения, производные, входящие в систему (1), на основе метода сеток будем заменять следующими обобщенными разностными отношениями, соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &\approx \frac{\theta(\delta P)_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} + (1-\theta)(\delta P)_{i+\frac{1}{2}}^j}{h}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} &\approx \frac{\theta(\delta \rho)_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} + (1-\theta)(\delta \rho)_{i+\frac{1}{2}}^j}{h}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &\approx \frac{\theta(\delta^2 P)_i^{j+1} + (1-\theta)(\delta^2 P)_i^j}{h^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &\approx \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\tau}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \frac{\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j}}{\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $h = \Delta x$ и $\tau = \Delta t$ —шаги сетки, соответственно, по x и t ; $P_{i,j}$ и $\rho_{i,j}$ являются приближенными значениями давления и нефтенасыщенности в узлах сетки, т. е. в точке $x = ih$, $t = \tau j$; θ —действительная постоянная, выбираемая в интервале $0 \leq \theta \leq 1$.

На основе (4) система дифференциальных уравнений (1) заменяется конечноразностными уравнениями вида:

$$\begin{aligned}
\rho_{i,j+1} = \rho_{i,j} + \frac{\tau}{h^2} & \left\{ \rho_{i,j}^3 \left[\theta (\delta^2 P)_i^{j+1} + (1-\theta) (\delta^2 P)_i^j \right] + \right. \\
& + 3\rho_{i,j}^2 \left[\theta (\delta P)_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} + (1-\theta) (\delta P)_{i+\frac{1}{2}}^j \right] \times \\
& \times \left[\theta (\delta \rho)_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} + (1-\theta) (\delta \rho)_{i+\frac{1}{2}}^j \right] \Big\}, \\
P_{i,j+1} = P_{i,j} + \frac{\tau}{h^2} & \left\{ \left[\frac{\nu_n}{\mu_\Gamma} (1 - \rho_{i,j})^2 + \rho_{i,j}^3 \right] \times \right. \\
& \times \left\{ P_{i,j} \left[\theta (\delta^2 P)_i^{j+1} + (1-\theta) (\delta^2 P)_i^j \right] + \right. \\
& + \left[\theta (\delta P)_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} + (1-\theta) (\delta P)_{i+\frac{1}{2}}^j \right]^2 \Big\} + \\
& + P_{i,j} \left[2 \frac{\nu_n}{\mu_\Gamma} (\rho_{i,j} - 1) + 3\rho_{i,j}^2 \right] \times \\
& \times \left[\theta (\delta P)_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} + (1-\theta) (\delta P)_{i+\frac{1}{2}}^j \right] \times \\
& \times \left[\theta (\delta \rho)_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} + (1-\theta) (\delta \rho)_{i+\frac{1}{2}}^j \right] \Big\},
\end{aligned} \quad (5)$$

где $i = 1, 2, \dots, M-1$; $j = 0, 1, 2, \dots$; M — натуральное число. При помощи системы разностных уравнений (5) можно вычислить $P_{i,j+1}$ и $\rho_{i,j+1}$ ($i = \overline{1, M-1}$), если известны $P_{i,j}$ и $\rho_{i,j}$ ($i = \overline{0, M}$). Значения $P_{0,j}$ и $P_{M,j}$ заданы граничными условиями (2):

$$P_{0,j} = P_\Gamma(\tau j), \quad P_{M,j} = P_K(\tau j). \quad (6)$$

Для вычисления $\rho_{0,j}$ и $\rho_{M,j}$ можно воспользоваться формулами

$$\rho_{0,j} = \rho_{1,j}, \quad \rho_{M,j} = \rho_{M-1,j}. \quad (7)$$

Системы уравнений (5) при условии (6) и (7) составляет обобщенный алгоритм для решения задачи (1), (2), (3). Если $\theta = 0$, то из (5) после подставления значений $(\delta^2 P)_i^j$, $(\delta P)_{i+\frac{1}{2}}^j$, $(\delta \rho)_{i+\frac{1}{2}}^j$ получается следующая рекуррентная система:

$$\begin{aligned}
P_{i,j+1} = P_{i,j} + \frac{\tau}{h^2} & \left\{ \left[\frac{\nu_n}{\mu_\Gamma} (1 - \rho_{i,j})^2 + \rho_{i,j}^3 \right] \times \right. \\
& \times [P_{i,j} (P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}) + (P_{i+1,j} - P_{i,j})^2] + \\
& + P_{i,j} \left[2 \frac{\nu_n}{\mu_\Gamma} (\rho_{i,j} - 1) + 3\rho_{i,j}^2 \right] (P_{i+1,j} - P_{i,j}) (\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}) \Big\}, \\
\rho_{i,j+1} = \rho_{i,j} + \frac{\tau}{h^2} & \left\{ \left[\rho_{i,j}^3 (P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}) \right] + \right. \\
& + 3\rho_{i,j}^2 (P_{i+1,j} - P_{i,j}) (\rho_{i+1,j} - \rho_{i,j}) \Big\}.
\end{aligned} \quad (8)$$

Система уравнений (5) при условии (6) и (7) называется явным алгоритмом решения задачи (1), (2), (3). В случае явного алгоритма неизвестные $P_{i,j+1}$ и $\rho_{i,j+1}$ непосредственно вычисляются из соответствующих уравнений через известные величины $P_{i,j}$ и $\rho_{i,j}$. Если θ отлична от нуля, то для вычисления $P_{i,j+1}$ и $\rho_{i,j+1}$ необходимо решать одновременно всю систему уравнений (5), в связи с этим ее и называют неявной

ЛИТЕРАТУРА

1. Халилов З. И. „ДАН Азерб. ССР“, т. XII, 1956, № 4.
2. Гасанов А. М. „ДАН Азерб. ССР“, т. XIII, 1957, № 2.
3. Гасанов А. М. „ДАН Азерб. ССР“ т. XVIII, 1961, № 2.
4. Коллац Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений, 1953.
5. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач, 1960.
6. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, т. II, 1959.

Институт математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступило 16. IX 1969

Э. М. Гасанов

Газлы нефтин бирелчүлү мәсәләләринин һәлли үчүн үмүмиләшмиш алгоритм

ХҮЛАСӘ

Мәгәлә газлы нефтин бирелчүлү мәсәләләринин әдәди һәллиә һәср олунмушдур. Шәбәкә үсүлү әсасында бахылан мәсәләләрин һәлли үчүн үмүмиләшмиш гејри-ашкар алгоритм һазырланмышдыр. Ашкар алгоритмләр үмүмиләшмиш алгоритмләрдән хусуси һал кими алынмышдыр.

С. Я. ЯКУБОВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, II

Данная статья является непосредственным продолжением работы [1], где даны постановка задачи и необходимые определения.

1. Рассмотрим задачу.

$u''(t) + A(t, u(t)) u(t) = f(t)$, $u(t_0) = u_0$, $u'(t_0) = u_1$, (1)
в гильбертовом пространстве H . Здесь $A(t, u)$ при каждом $t \in [t_0, T]$, $u \in M \subset H$ является самосопряженным положительно определенным оператором в H . Под решением задачи (1) на $[t_0, T]$ понимаем дважды непрерывно дифференцируемую на $[t_0, T]$ функцию $u(t)$, обладающую тем свойством, что функции $A(t, u(t)) u(t)$, $A^{1/2}(t, u(t)) u'(t)$ непрерывны на $[t_0, T]$.

Пусть $u(t)$ — решение задачи (1). Тогда функции

$$v_1(t) = \frac{1}{2} [i A^{1/2}(t, u(t)) u(t) + u'(t)], \quad (2)$$

$$v_2(t) = \frac{1}{2} [-i A^{1/2}(t, u(t)) u(t) + u'(t)]$$

непрерывно дифференцируемы на $[t_0, T]$ и

$$v_1'(t) = \frac{1}{2} [i (A^{1/2}(t, u(t)))' u(t) + i A^{1/2}(t, u(t)) u'(t) + u''(t)] =$$

$$= \frac{1}{2} [(i (A^{1/2}(t, u(t)))' - A(t, u(t))) u(t) + i A^{1/2}(t, u(t)) u'(t) + f(t)],$$

$$v_2'(t) = \frac{1}{2} [-(i (A^{1/2}(t, u(t)))' + A(t, u(t))) u(t) -$$

$$- i A^{1/2}(t, u(t)) u'(t) + f(t)].$$

Так как из (2) следует, что функции $u(t)$ и $u'(t)$ выражаются через $v_1(t)$ и $v_2(t)$ по формулам

$$u'(t) = v_1(t) + v_2(t),$$

$$u(t) = -i A^{1/2} \left(t, u_0 + \int_{t_0}^t (v_1(\tau) + v_2(\tau)) d\tau \right) (v_1(t) - v_2(t)),$$

то

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (v_1(\tau) + v_2(\tau)) d\tau = -i A^{-1/2} \left(t, u_0 + \int_{t_0}^t (v_1(\tau) +$$

$$+ v_2(\tau)) d\tau \right) (v_1(t) - v_2(t)). \quad (3)$$

Используя равенство (3), получаем

$$A(t, u(t)) u(t) = A \left(t, u_0 + \int_{t_0}^t (v_1(\tau) + v_2(\tau)) d\tau \right) \cdot \left[-i A^{-1/2} \left(t, u_0 + \int_{t_0}^t (v_1 + v_2) d\tau \right) (v_1 - v_2) \right] = -i A^{1/2} \left(t, u_0 + \int_{t_0}^t (v_1(\tau) + v_2(\tau)) d\tau \right) (v_1(t) - v_2(t)).$$

Значит вектор-функция $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, определенная равенствами (2), является решением системы

$$\begin{cases} v_1'(t) = i A^{1/2}(t, [Bv](t)) v_1(t) + \\ + \frac{1}{2} [(A^{1/2}(t, [Bv](t)))' A^{-1/2}(t, [Bv](t)) (v_1(t) - v_2(t)) + f(t)], \\ v_2'(t) = -i A^{1/2}(t, [Bv](t)) v_2(t) + \\ + \frac{1}{2} [-(A^{1/2}(t, [Bv](t)))' A^{-1/2}(t, [Bv](t)) (v_1(t) - \\ - v_2(t)) + f(t)], \\ v_1(0) = \frac{1}{2} (i A^{1/2}(t_0, u_0) u_0 + u_1), \\ v_2(0) = \frac{1}{2} (-i A^{1/2}(t_0, u_0) u_0 + u_1), \end{cases} \quad (4)$$

где $[Bv](t) = u_0 + \int_{t_0}^t (v_1(\tau) + v_2(\tau)) d\tau$.

Чтобы проверить обратное утверждение, необходимо для любого решения $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ системы (4) установить тождество

$$-i A^{-1/2}(t, [Bv](t)) (v_1(t) - v_2(t)) = u_0 + \int_{t_0}^t (v_1(\tau) + v_2(\tau)) d\tau. \quad (5)$$

Так как из (4) получаем равенство

$$-i \frac{d}{dt} [A^{-1/2}(t, [Bv](t)) (v_1(t) - v_2(t))] =$$

$$= i A^{-1/2}(t, [Bv](t)) (A^{1/2}(t, [Bv](t)))' A^{-1/2}(t, [Bv](t)) (v_1(t) - v_2(t)) -$$

$$- i A^{-1/2}(t, [Bv](t)) (v_1'(t) - v_2'(t)) = v_1(t) + v_2(t), \quad (6)$$

то, интегрируя (6), получим тождество (5).

Теперь нетрудно убедиться, что функция $u(t)$, определяемая равенствами

$$u(t) = -i A^{-1/2}(t, [Bv](t)) (v_1(t) - v_2(t)) = [Bv](t),$$

является решением задачи (1). Действительно, в силу (6) имеем

$$u'(t) = v_1(t) + v_2(t),$$

откуда получаем

$$u''(t) = v_1'(t) + v_2'(t) = i A^{1/2}(t, [Bv](t)) (v_1(t) - v_2(t)) + f(t) =$$

$$= -A(t, [Bv](t)) [Bv](t) + f(t) = -A(t, u(t)) u(t) + f(t).$$

Итак, эквивалентность задач (1) и (4) доказана.

п53895

В $H^2 = H \times H$ задачу (4) можно записать в виде

$$\begin{cases} v'(t) = A_1(t, [Bv](t))v(t) + A_2(t, [Bv](t))v(t) + F(t) \\ v(t_0) = v_0, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$v_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(iA_0^{1/2}u_0 + u_1) \\ \frac{1}{2}(-iA_0^{1/2}u_0 + u_1) \end{pmatrix},$$

$$A_1(t, v) = \begin{pmatrix} iA^{1/2}(t, v_1) - I & 0 \\ 0 & -iA^{1/2}(t, v_1) - I \end{pmatrix},$$

$$A_2(t, v(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A^{1/2}(t, v_1(t)))' A^{1/2}(t, \tau_1(t)) + I \\ -\frac{1}{2}(A^{1/2}(t, v_1(t)))' A^{-1/2}(t, \tau_1(t)) \\ -\frac{1}{2}(A^{1/2}(t, v_1(t)))' A^{-1/2}(t, v_1(t)) \\ \frac{1}{2}(A^{1/2}(t, v_1(t)))' A^{-1/2}(t, \tau_1(t)) + I \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}f(t) \\ \frac{1}{2}f(t) \end{pmatrix}, \quad [Bv](t) = \begin{pmatrix} u_0 + \int_{t_0}^t (\tau_1(\tau) + v_2(\tau)) d\tau \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = A(t_0, u_0).$$

Если к уравнению (7) применить теорему 1 из [1], то получится некая теорема разрешимости для задачи (1). Однако, таким образом доказанная теорема имеет очень громоздкую формулировку и трудно проверяемые в приложениях условия. Поэтому мы ее не приводим. Что касается более частной задачи:

$$u''(t) + g(t, u(t))u(t) = f(t), \quad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1, \quad (8)$$

то здесь такая теорема будет продуктивной. Итак, рассмотрим задачу (8). В этом случае операторы $A_1(t, v)$ и $A_2(t, v)$ имеют следующий вид:

$$A_1(t, v) = \begin{pmatrix} i\sqrt{g(t, v_1)} A^{1/2} - I & 0 \\ 0 & -i\sqrt{g(t, v_1)} A^{1/2} - I \end{pmatrix},$$

$$A_2(t, v(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{(g(t, v_1(t)))'}{g(t, v_1(t))} I + I & -\frac{1}{4} \frac{(g(t, v_1(t)))'}{g(t, v_1(t))} I \\ -\frac{1}{4} \frac{(g(t, v_1(t)))'}{g(t, v_1(t))} I & \frac{1}{4} \frac{(g(t, v_1(t)))'}{g(t, v_1(t))} I + I \end{pmatrix}.$$

Как легко заметить, что операторы $A_1(t, v)$ и $A_2(t, v(t))$ будут удовлетворять условиям 1°–3° теоремы 1 [1], если отображение $(t, u) \rightarrow g(t, u)$ действует из $[t_0, T] \times H(A^{1/2})$ в R^1 и имеет производные, удовлетворяющие условию Липшица по u . Это приводит нас к следующей теореме.

Теорема 1. Пусть:

1°. A — самосопряженный положительно определенный оператор в H .

2°. $g(t, u) \geq \gamma > 0$ действует из $[t_0, T] \times H(A^{1/2})$ в R^1 и имеет непрерывные производные g_t и g_u , причем эти производные удовлетворяют по u условию Липшица в каждом ограниченном множестве $\|A_0^{1/2}u\| \leq R$ с константой Липшица, зависящей лишь от R .

3°. Имеет место одно из двух условий:

а) функция $f(t)$ — непрерывно дифференцируема в $H(A^{1/2})$ по $t \in [t_0, T]$;

б) функция $f(t)$ непрерывна в $H(A)$ по $t \in [t_0, T]$.

4°. $u_0 \in D(A^{1/2})$, $u_1 \in D(A)$.

Тогда задача (8) имеет единственное решение на некотором отрезке $[t_0, t_0 + h] \subset [t_0, T]$.

Замечание. Если имеют место априорные оценки $\|A_0^{1/2}u(t)\| \leq C$, $\|Au'(t)\| \leq C$, то задача (8) имеет нелокальное решение на $[t_0, T]$.

2. Рассмотрим в цилиндре $Q = [0, T] \times \Omega$, где ограниченная область $\Omega \subset R^n$ принадлежит классу C^{2m} , уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + g\left(t, \int_{\Omega} \psi(t, x, |u(t, x)|^2, \dots, |D^l u(t, x)|^2) dx\right) \times \\ \times \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u(t, x) = f(t, x), \quad (9)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_{\kappa} = i \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}}$ ($\kappa = \overline{1, n}$),

с граничными условиями

$$B_j u|_{\Gamma} = \sum_{|\alpha| \leq \kappa_j} b_{\alpha, j}(x) D^{\alpha} u(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad \kappa_j \leq 2m - 1, \quad j = \overline{1, m}, \quad (10)$$

и начальными условиями

$$u(0, x) = u_0(x); \quad u_t(0, x) = u_1(x). \quad (11)$$

Частные случаи уравнения (9) исследованы С. Н. Бернштейном [2] и многими другими авторами.

Теорема 3. Пусть

1°. Функции $a_{\alpha}(x) \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$ и

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha}$$

— формально самосопряженный положительно эллиптический оператор в $\bar{\Omega}$, т. е. $A(x, D)$ совпадает с формально сопряженным оператором $A'(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} D^{\alpha}(\overline{a_{\alpha}(x)}u(x))$ и

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha} > 0,$$

для каждого вещественного $\xi \neq 0$ при этом $\xi^{\alpha} = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$.

2°. Функции $b_{\alpha, j}(x) \in C^{2m - \kappa_j}(\bar{\Omega})$ и система граничных операторов $\{B_j\}_1^m$ является нормальной [3], т. е. граница Γ не является характеристической поверхностью для операторов B_j , порядок которых различен: $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_m \leq 2m - 1$; система $\{B_j\}_1^m$ связана с оператором $A(x, D)$ посредством известного условия Шапиро-Лопатинского [4–5].

3°. Оператор A , порожденный системой $(A, \{B_j\}_1^m)$, является самосопряженным в $L_2(\Omega)$ с областью определения $D(A) = W_2^{2m}(\Omega, \{B_j\}_1^m)$; для оператора A имеет место неравенство Вишика-Гординга, т. е.

$$(Au, u) \geq C_1 \|u\|_{W_2^{2m}}^2 - C_2 \|u\|_{L_2}^2, \quad C_1 > 0, \quad (12)$$

при всех $u \in W_2^{2m}(\Omega, \{B_j\}_1^m)$.

4°. $n < 2m$; $|l| = l_1 + \dots + l_n < \frac{2m-n}{2}$; функции $g(t, r) \geq \gamma > 0$ и

$\psi(t, x, r) \geq 0$ являются непрерывными вместе со своими производными по t, r_k в области $\{t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}, r_k \in [0, \infty)\}$, причем эти производные удовлетворяют по r_k условию Липшица в каждом ограниченном множестве $0 \leq r_k \leq R$, с константой Липшица, зависящей от R ; функция $f(t, x)$ непрерывна в $[0, T] \times \bar{\Omega}$.

5°. $u_0(x), [A_0 u_0](x), u_1(x), f(t, x) \in W_2^{2m}(\Omega, \{B_j\}_1^m)$.

Тогда задача (9)–(11) имеет единственное решение в некотором цилиндре $Q_0 = [0, t_0] \times \Omega$.

Доказательство. Покажем, что к задаче (9)–(11) применима теорема 1. Из условия 3° следует, что при некотором $\omega > 0$ оператор $A + \omega I$ является самосопряженным, положительно определенным в $L_2(\Omega)$ (ради краткости обозначим его также через A). Более того, из неравенства (12) следует, что

$$(Au, u) \geq C \|u\|_{W_2^{2m}}^2$$

при всех $u \in D(A) = W_2^{2m}(\Omega, \{B_j\}_1^m)$. Значит имеет место топологическое включение $H(A^{1/2}) \subset W_2^m(\Omega)$. С другой стороны, так как $|l| \leq m - \frac{n}{2}$, то $W_2^m(\Omega) \subset C^{|l|}(\bar{\Omega})$ и значит функционал

$$g(t, u) = g\left(t, \int_{\Omega} \psi(t, x, |u(x)|^2, \dots, |D^l u(x)|^2) dx\right) \quad (13)$$

действует из $[0, T] \times H(A^{1/2})$ в R^1 . Легко заметить, что функционал $g(t, u)$ непрерывно дифференцируем и

$$g'_t(t, u) = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial r} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi(t, x, |u(x)|^2, \dots)}{\partial t} dx,$$

$$(g'_u(t, u), h) = \frac{\partial g}{\partial r} \int_{\Omega} \sum_{|k| \leq |l|} \frac{\partial \psi}{\partial r_k} D^k u(x) D^k h(x) dx.$$

Отсюда в силу условия 4° следует, что функционал, определенный равенством (13), удовлетворяет условию 2° теоремы 1. Так же легко проверяются остальные условия теоремы 1, откуда следует доказательство теоремы.

Замечание. Нетрудно заметить, что можно также исследовать случай, когда в уравнении (9) вместо

$$g\left(t, \int_{\Omega} \psi(t, x, |u(x)|^2, \dots, |D^l u(x)|^2) dx\right)$$

стоит функционал

$$g\left(t, \int_{\Omega} \psi_1(t, x, |u(x)|^2, \dots, |D^l u(x)|^2) dx, \dots\right)$$

$$\dots, \int_{\Omega} \psi_k(t, x, \dots, |D^l u|^2) dx),$$

где $g(t, r_1, \dots, r_k)$ — достаточно гладкая функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубов С. Я. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 3 (1970).
2. Бернштейн С. Н. „Изв. АН СССР, серия матем.“, 4 (1940).
3. Schechter M. General boundary value problems for elliptic partial diff. equat.. Comm. Pure. Math., 12 (1959) 457–486.
4. Шапиро З. Я. „Изв. АН СССР, серия матем.“, 17 (1953).
5. Лопатинский Я. Б. „Укр. матем. ж.“, 5, 2 (1953).

Институт математики и
механики АН Азерб. ССР

Поступило 16. IX 1969

С. Я. Якубов

Гејри-хэтти икинчи тәртиб гиперболик тәнликләр үчүн Коши мәсәләси, 2

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә H гильберт фәзасында

$$u''(t) + g(t, u(t)) Au(t) = f(t), \quad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1$$

мәсәләсинин һәллинин варлығы вә јеканәлији верилмишдир. Алынған абстракт нәтичә бир синиф гејри-хэтти гиперболик тип хусуси төрәмәли дифференциал тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләни өјрәнмәјә имкан верир.

Н. А. БУЧАЕВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Пусть 2π -периодическая функция $f(x)$ принадлежит $L(0, 2\pi)$ и ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx, \quad (1)$$

где

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Положим

$$\rho_n^2(f) = a_n^2(f) + b_n^2(f).$$

Пусть известно поведение ряда Фурье функции $f(x)$. Как ведет себя ряд Фурье функции $g(x)$, связанной с $f(x)$ соотношением

$$|g(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)|^2 \quad (2)$$

В 1964 году В. И. Прохоренко [3] обобщил результаты А. Бёрлинга [1] и Р. Боаса [2]. В данной работе обобщаются результаты В. И. Прохоренко [3] и дается приложение полученных результатов к безусловной сходимости тригонометрических рядов. Докажем, что справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ суть 2π -периодические функции из $L^2(0, 2\pi)$, связанные между собой соотношением (2), и пусть $\rho_n(f) \leq \gamma_n$. Тогда, если при некотором $\alpha \in \left(\frac{2}{3}; 2\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n k^2 \cdot [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega(n) \cdot \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} < \infty, \quad (3)$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \cdot \rho_n^{\alpha}(g) < \infty,$$

где функция $\omega(n)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$a) N^{1-\frac{\alpha}{2}} \omega(N) \cdot \left\{ \sum_{k=N+1}^{\infty} [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = o(1), \quad б) \sum_{n=\left[\frac{N}{2}\right]}^N n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot A_n \geq c_2 A_N N^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

$$в) 1 \leq [\omega(n)]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Доказательство. Функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $L^2(0, 2\pi)$, поэтому соотношение (2) можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi} [g(x+h) - g(x-h)]^2 dx \leq \int_0^{2\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx. \quad (4)$$

Из (1) следует, что

$$f(x+h) - f(x-h) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} [b_k(f) \cos kx - a_k(f) \sin kx] \cdot \sin kh,$$

откуда, используя равенство Парсеваля, получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \cdot \sin^2 kh.$$

Аналогично

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(x+h) - g(x-h)]^2 dx = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(g) \cdot \sin^2 kh.$$

Положим в двух последних равенствах $h = \frac{\pi}{2\varphi(n)}$. Тогда в силу (4) и условия $\rho_n(f) \leq \gamma_n$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(g) \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2\varphi(n)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2\varphi(n)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2\varphi(n)}. \quad (5)$$

Пусть

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^n [\varphi(k)]^{\alpha} \cdot \rho_k^{\alpha}(g), \quad \Phi_0 = 0, \quad 0 < \alpha < 2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Тогда, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\Phi_n \leq n^{\frac{2-\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n [\varphi(k)]^2 \cdot \rho_k^2(g) \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (7)$$

Так как из (6) имеем

$$\omega(n) \cdot \rho_n^{\alpha}(g) = n^{-\alpha} \cdot (\Phi_n - \Phi_{n-1}),$$

где $\omega(n) = n^{-\alpha} \cdot [\varphi(n)]^{\alpha}$,

то с помощью преобразования Абеля будем иметь

$$\sum_{n=1}^N \omega(n) \rho_n^{\alpha}(g) = \sum_{n=1}^{N-1} \Phi_n \cdot \frac{(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha} \cdot n^{\alpha}} + N^{-\alpha} \cdot \Phi_N. \quad (8)$$

Из теоремы о конечных приращениях Лагранжа можно получить

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha \leq c(\alpha) \cdot n^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Используя это неравенство и (7), из (8) получаем

$$\sum_{n=1}^N \omega(n) \cdot \rho_n^\alpha(g) \leq c(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{N-1} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n [\varphi(k)]^2 \cdot \rho_k^2(g) \right\}^{\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ N^{1-\frac{3\alpha}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^N [\varphi(k)]^2 \cdot \rho_k^2(g) \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = S_1 + S_2. \quad (9)$$

Если покажем, что S_1 и S_2 ограничены при $N \rightarrow \infty$, то этим сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \cdot \rho_n^\alpha(g)$ будет доказана. Так как $n \leq \varphi(n)$ и $\sin x \geq$

$\geq \frac{2}{\pi} x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то из (5) вытекает

$$\sum_{k=1}^n [\varphi(k)]^2 \cdot \rho_k^2(g) \leq [\varphi(n)]^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{[\varphi(k)]^2}{k^2} \cdot \rho_k^2(g) \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2\varphi(n)} \leq$$

$$\leq [\varphi(n)]^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\varphi(k)]^2}{k^2} \cdot \gamma_k^2 \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2\varphi(n)}.$$

Следовательно, из (9) получаем:

$$S_1 \leq c(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{N-1} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot [\varphi(n)]^\alpha \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\varphi(k)]^2}{k^2} \cdot \gamma_k^2 \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2\varphi(n)} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (10)$$

$$S_2 \leq N^{1-\frac{3\alpha}{2}} \cdot [\varphi(N)]^\alpha \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\varphi(k)]^2}{k^2} \cdot \gamma_k^2 \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2\varphi(n)} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (11)$$

С помощью неравенств $(|a| + |b|)^\beta \leq |a|^\beta + |b|^\beta$, $0 < \beta \leq 1$ (см. [4], стр. 31), $|\sin x| \leq |x|$, $|\sin x| \leq 1$ выводим из (11)

$$S_2 \leq c_1 \cdot N^{1-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^N [\varphi(k)]^2 \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ N^{1-\frac{3\alpha}{2}} \cdot [\varphi(N)]^\alpha \cdot \left\{ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{[\varphi(k)]^2}{k^2} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = T_1 + T_2.$$

Учитывая, что $\varphi(k) = k \cdot [\omega(k)]^{\frac{1}{\alpha}}$, нетрудно получить

$$T_1 = c_1 \cdot N^{1-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^N k^2 \cdot [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$T_2 = N^{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega(N) \cdot \left\{ \sum_{k=N+1}^{\infty} [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Обозначим первый ряд в (3) через $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot A_n$,

$$\text{где } A_n = \left\{ \sum_{k=1}^n k^2 \cdot [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}}.$$

В силу условия в) для функции $\omega(n)$ A_n не убывает с ростом n . Тогда в силу условия б)

$$\sum_{n=N}^{2N} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot A_n \geq A_N \cdot \sum_{n=N}^{2N} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \geq c_2 \cdot A_N \cdot N^{1-\frac{3\alpha}{2}},$$

и так как первый ряд в (3) сходится, то левая часть последнего неравенства стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Значит в силу условия

б) $T_1 = A_N \cdot N^{1-\frac{3\alpha}{2}} = 0(1)$. Так как второй ряд в (3) сходится в силу условий в) и а) для функции $\omega(n)$ его члены монотонны, то они имеют порядок $O\left(\frac{1}{N}\right)$, то есть

$$T_2 = N^{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega(N) \cdot \left\{ \sum_{k=N+1}^{\infty} [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = 0(1).$$

Итак, S_2 не только ограничена, но даже стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Применяя те же неравенства, что и при оценке S_2 , и учитывая $\varphi(k) = k \cdot [\omega(k)]^{\frac{1}{\alpha}}$, из (10) имеем:

$$S_1 \leq c_3(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{N-1} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n k^2 \cdot [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ c(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{N-1} n^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega(n) \cdot \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}}.$$

В силу (3) правая часть последнего неравенства ограничена при $N \rightarrow \infty$, следовательно, S_1 ограничена. Доказательство теоремы на этом заканчивается.

Из известных лемм ([3], стр. 55) и теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ суть 2π -периодические функции из $L^2(0, 2\pi)$, связанные между собой соотношением (2), и пусть $\rho_n(f) \leq \gamma_n$, причем $\gamma_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \cdot \gamma_n^2 < \infty$, $\frac{2}{3} < \alpha < 2$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \cdot \rho_n^\alpha(g) < \infty,$$

где функция $\omega(n)$ удовлетворяет условиям:

$$\text{а) } N^{1-\frac{\alpha}{2}} \omega(N) \cdot \left\{ \sum_{k=N+1}^{\infty} [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = 0(1), \quad \text{б) } \sum_{n=\left[\frac{N}{2}\right]}^N n^{-\frac{3\alpha}{2}} A_n \geq c_2 \cdot A_N \cdot N^{1-\frac{3\alpha}{2}}$$

$$\text{в) } 1 \leq [\omega(n)]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Доказательство. Покажем, что если $\gamma_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \cdot \gamma_n^{\alpha} < \infty$, $\frac{2}{3} < \alpha < 2$, то условие (3), выполнено, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n k^2 [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega(n) \cdot \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^2 [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = R_1 + R_2 < \infty.$$

Для доказательства сходимости первого ряда в (3) воспользуемся леммой 1. Положим в лемме 1

$$d_n = n^2 \cdot [\omega(n)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_n^2, \quad \beta = \frac{\alpha}{2}, \quad c = \frac{3\alpha}{2}.$$

Так как $\gamma_n \downarrow 0$, то $[\omega(n)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot n^{-2} \cdot d_n = \gamma_n^2 \downarrow 0$. Кроме того, так как $\frac{2}{3} < \alpha < 2$, то $0 < \beta < 1$, $c > 1$. Итак, лемма 1 дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n d_k \right\}^{\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n k^2 \cdot [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = R_1 \leq D \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot \left[n \cdot n^2 \cdot (\omega(n))^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_n^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}} = D \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \cdot \gamma_n^{\alpha} < \infty.$$

Следовательно, первый ряд в (3) сходится.

Сходимость второго ряда в (3) получим из леммы 2. Положим в условиях леммы 2 $d_k = \gamma_k^2 \cdot [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}}$, $\beta = \frac{\alpha}{2}$. По условию $\gamma_k \downarrow 0$, значит $d_k \downarrow 0$, $d \geq 0$. Кроме того, так как $\frac{2}{3} < \alpha < 2$, то $0 < \beta < 1$, и поэтому из леммы 2 следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \cdot \omega(n) \cdot \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} d_k \right\}^{\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega(n) \cdot \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = R_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n^2 \cdot [\omega(n)]^{\frac{2}{\alpha}} \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \cdot \gamma_n^{\alpha} < \infty.$$

Стало быть, второй ряд в (3) тоже сходится.

Итак, из условий $\gamma_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \cdot \gamma_n^{\alpha} < \infty$ вытекает, что условие (3) выполнено, а тогда теорема 2 следует из теоремы 1.

Замечание. Отметим, что при $\alpha = 1$ и $\omega(n) = 1$ из теоремы 2 получаем теорему Берлинга. Применим полученные результаты к безусловной сходимости рядов Фурье. С помощью известной теоремы Д. Е. Меньшова ([6], стр. 200) из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ суть 2π -периодические функции из $L^2(0; 2\pi)$, удовлетворяющие условию (2), и пусть $\rho_n(f) \leq \gamma_n$,

причем $\gamma_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \cdot \gamma_n^{\alpha} < \infty$ при некотором $\alpha \in (0; 2)$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $g(x)$, безусловно, сходится почти всюду. Где функция $\omega(n)$ удовлетворяет условиям:

$$a) N^{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \omega(N) \cdot \left\{ \sum_{k=N+1}^{\infty} [\omega(k)]^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} = o(1), \quad б) \sum_{n=\left[\frac{N}{2}\right]}^N n^{-\frac{3\alpha}{2}} \cdot A_n \geq c_2 \cdot A_N \cdot N^{1-\frac{3\alpha}{2}}$$

$$в) 1 \leq [\omega(n)]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Данная работа выполнена под руководством доцента А. С. Джафарова, которому автор приносит глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beurling A. On the spectral synthesis of bounded functions. „Acta math.“ 81, 225–238, 1949.
2. Boas R. Beurling's test for absolute convergence of Fourier series. „Bull. Amer. math. soc.“ 66, № 1, 44–47, 1960.
3. Прохоренко В. И. „Вестник Московского университета“, 1964, № 6.
4. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.
5. Конюшков А. А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. „Математический сборник“, 44 (86), 53–84, 1958.
6. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. Физматгиз М., 1958.

Институт математики
и механики АН Азерб. ССР

Поступило 10. IV 1970

Н. А. Бучаев

Фурье эмсалларынын бә'зи хассәләри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $f(x)$ функцијасынын Фурье эмсалларынын хассәләри мә'лум олдугда вә

$$|g(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)|$$

бәрабәрсизлији өдәнилдикдә $g(x)$ функцијасынын Фурье эмсаллары хассәләринин өдәнилмәсиндән бәһс едилмишдир.

А. М. АБАСОВ

О ТРЕТЬЕЙ ОДНОМЕРНОЙ НЕИДЕАЛЬНОЙ ТЕПЛОКОНТАКТНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

При решении многих задач аэродинамики больших скоростей весьма важно иметь простое математическое описание распределения температуры. Как показано в [1], задача о тепловом потоке в составной стенке ракетного двигателя в приближенной постановке может решаться на основе данных о теплопроводности в многослойной пластинке, каждый слой которой обладает постоянными термическими свойствами. Наиболее общей является следующая задача указанного типа.

1°. Рассмотрим на плоскости (x, t) области

$$S_T^{(i)} = \{(x, t), x_i(t) < x < x_{i+1}(t); 0 < t < T\} \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

относительно кривых $x = x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$), определяющих боковые границы области $S_T^{(i)}$ ($i = 1, 2$), предполагая $x_1(t) < x_2(t) < x_3(t)$ при $0 \leq t \leq T$, что удовлетворяет условию Жевре [2];

$$|x_i(t_1) - x_i(t_2)| \leq M \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha+1}{2}}, \quad 0 \leq t_1, t_2 \leq T \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где $M = \text{const} > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ — также постоянная.

Требуется найти такие функции $U_i(x, t)$ ($i = 1, 2$), которые в области (1) удовлетворяли бы однородному дифференциальному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \chi_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in S_T^{(i)} \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

где $\chi_i = K_i / C_i \rho_i$, K_i — теплопроводность, ρ_i — плотность, C_i — теплоемкость ($i = 1, 2$); начальные условия:

$$U_i(x, 0) = F_i(x), \quad x_i(0) \leq x \leq x_{i+1}(0) \quad (i = 1, 2); \quad (4)$$

краевые условия:

$$\pm \frac{\partial U_i [x_{2i-1}(t), t]}{\partial x} + \sigma_{2i-1}(t) U_i [x_{2i-1}(t), t] = \varphi_{2i-1}(t) \quad (i = 1, 2), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (5)$$

теплоконтактные условия:

$$-K_1 \frac{\partial U_1 [x_2(t), t]}{\partial x} = h [U_1 [x_2(t), t] - U_2 [x_3(t), t]], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$$K_1 \frac{\partial U_1 [x_2(t), t]}{\partial x} = K_2 \frac{\partial U_2 [x_2(t), t]}{\partial x}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7)$$

Здесь $h = 1/R$ — контактная проводимость, R — контактное сопротивление; при этом должны выполняться следующие условия согласования:

$$\pm F'_i [x_{2i-1}(0)] + \sigma_{2i-1}(0) F_i [x_{2i-1}(0)] = \varphi_{2i-1}(0) \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

$$-K_1 F'_1 [x_2(0)] = h [F_1 [x_2(0)] - F_2 [x_2(0)]], \quad (9)$$

$$K_1 F'_1 [x_2(0)] = K_2 F'_2 [x_2(0)]. \quad (10)$$

Предполагаем, что функции $\varphi_{2i-1}(t)$ ($i = 1, 2$) принадлежат классу Гельдера H_α с показателем α ($0 < \alpha \leq 1$).

Задачу (3)–(10) будем называть третьей неидеальной одномерной линейной теплоконтактно-краевой задачей. Для бесконечно больших значений h будем иметь случай идеального теплового контакта, при котором вместо условий (6) имеем непрерывный переход температуры через теплоконтактные границы. Соответствующую задачу, в отличие от нашей, будем называть идеальной. Третья идеальная теплоконтактно-краевая задача исследована в работах [3–6] и др.

2°. Предположим сначала, что $\sigma_{2i-1}(t) = \sigma_{2i-1}^0 = \text{const} > 0$, линии $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) прямые, причем $x = x_1 = 0$, $x = x_2 = l/2$, $x = x_3 = l$ ($l > 0$). В этом случае области (1) перейдут в следующие:

$$S_T^{(i)}[(x, t), 0 < x < l/2; l/2 < x < l; 0 < t < T] \quad (i = 1, 2). \quad (1')$$

При этом задача (3)–(10) будет формулироваться следующим образом. Требуется найти такое распределение температуры, чтобы в области (1') удовлетворялось уравнение (3); начальные условия:

$$U_i(x, 0) = F_i(x), \quad 0 \leq x \leq l/2 \quad \text{при } i = 1; \quad l/2 \leq x \leq l \quad \text{при } i = 2; \quad (4')$$

границные условия:

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial U_1(0, t)}{\partial x} + \sigma_1^0 U_1(0, t) = \varphi_1(t), \quad - \frac{\partial U_2(l, t)}{\partial x} + \\ & + \sigma_3^0 U_2(l, t) = \varphi_3(t), \quad 0 \leq t \leq T; \end{aligned} \quad (5')$$

теплоконтактные условия:

$$K_1 \frac{\partial U_1(l/2, t)}{\partial x} = h [U_1(l/2, t) - U_2(l/2, t)], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6')$$

$$K_1 \frac{\partial U_1(l/2, t)}{\partial x} = K_2 \frac{\partial U_2(l/2, t)}{\partial x}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7')$$

где коэффициенты имеют прежний смысл; при этом условия согласования (8)–(10) запишутся так:

$$F'_1(0) + \sigma_1^0 F_1(0) = \varphi_1(0), \quad -F'_2(l) + \sigma_3^0 F_2(l) = \varphi_3(0), \quad (8')$$

$$-K_1 F'_1(l/2) = h [F_1(l/2) - F_2(l/2)], \quad (9')$$

$$K_1 F'_1(l/2) = K_2 F'_2(l/2). \quad (10')$$

Решение задачи (3), (4')–(10') будем искать в виде

$$U_i(x, t) = v_i(x, t) + w_i(x, t) \quad (i = 1, 2), \quad (A)$$

где $v_i(x, t)$ и $w_i(x, t)$ являются решениями следующих задач: относительно $v_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяются дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \chi_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l/2; \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = \chi_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}, \quad l/2 < x < l; \quad (11)$$

начальные условия:

$$v_1(x, 0) = F_1(x), \quad 0 \leq x \leq l/2; \quad v_2(x, 0) = F_2(x), \quad l/2 \leq x \leq l; \quad (12)$$

границные условия:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_1(0, t)}{\partial x} + \sigma_1^0 v_1(0, t) = 0, \quad - \frac{\partial v_2(l, t)}{\partial x} + \sigma_3^0 v_2(l, t) = 0, \\ & 0 \leq t \leq T; \end{aligned} \quad (13)$$

теплоконтактные условия:

$$-K_1 \frac{\partial v_1(l/2, t)}{\partial x} = h \{v_1(l/2, t) - v_2(l/2, t)\}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (14)$$

$$K_1 \frac{\partial v_1(l/2, t)}{\partial x} = K_2 \frac{\partial v_2(l/2, t)}{\partial x}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (15)$$

Относительно $w_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяются дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l/2, \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, \quad l/2 < x < l; \quad (16)$$

начальные условия:

$$w_1(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l/2; \quad w_2(x, 0) = 0, \quad l/2 \leq x \leq l; \quad (17)$$

граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1(0, t)}{\partial x} + \sigma_1^0 w_1(0, t) &= \varphi_1(t), \\ -\frac{\partial w_2(l, t)}{\partial x} + \sigma_2^0 w_2(l, t) &= \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T; \end{aligned} \quad (18)$$

теплоконтактные условия:

$$-K_1 \frac{\partial w_1(l/2, t)}{\partial x} = h \{w_1(l/2, t) - w_2(l/2, t)\}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (19)$$

$$K_1 \frac{\partial w_1(l/2, t)}{\partial x} = K_2 \frac{\partial w_2(l/2, t)}{\partial x}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (20)$$

1) Решение задачи (11)–(15) будем искать по методу разделения переменных, полагая

$$v_1(x, t) = X_1(x) T_1(t), \quad 0 \leq x \leq l/2; \quad v_2(x, t) = X_2(x) T_2(t), \quad l/2 \leq x \leq l; \quad 0 \leq t \leq T. \quad (21)$$

Подставив (21) в дифференциальные уравнения (11) и полагая $T_1(0) = T_2(0)$, легко найдем, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad T_1(t) = T_2(t) = T(t) = \exp(-\lambda^2 t)$$

и, следовательно, решение задачи (11)–(15) сведется к решению системы уравнений:

$$\alpha_1 X_1'' + \lambda^2 X_1 = 0, \quad 0 < x < l/2; \quad \alpha_2 X_2'' + \lambda^2 X_2 = 0, \quad l/2 < x < l, \quad (22)$$

к которым нужно присоединить следующие граничные и контактные условия:

$$X_1'(0) + \sigma_1^0 X_1(0) = 0, \quad -X_2'(0) + \sigma_2^0 X_2(0) = 0, \quad (23)$$

$$-K_1 X_1'(l/2) = h [X_1(l/2) - X_2(l/2)], \quad (24)$$

$$K_1 X_1'(l/2) = K_2 X_2'(l/2). \quad (25)$$

Общее решение уравнений (22) найдем в виде:

$$\begin{aligned} X_1(x) &= A_1 \cos \frac{\lambda x}{\sqrt{\alpha_1}} + B_1 \sin \frac{\lambda x}{\sqrt{\alpha_1}}; \quad X_2(x) = A_2 \cos \frac{\lambda x}{\sqrt{\alpha_2}} + \\ &+ B_2 \sin \frac{\lambda x}{\sqrt{\alpha_2}}, \end{aligned} \quad (26)$$

где произвольные постоянные A_1, B_1, A_2, B_2 определяются из краевых условий (23) и контактных условий (24)–(25). Подставляя (26) в условия (23)–(25), приходим к некоторой однородной системе алгебраических уравнений, которая для каждого корня λ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)

трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} \sin \frac{\lambda l}{2\sqrt{\alpha_1}} \sin \frac{\lambda l}{2\sqrt{\alpha_2}} \left[\lambda \left(\frac{\lambda}{\sigma_1^0 \sqrt{\alpha_1}} - \operatorname{ctg} \frac{\lambda l}{2\sqrt{\alpha_1}} \right) \left(\frac{\lambda}{\sigma_2^0 \sqrt{\alpha_2}} - \operatorname{ctg} \frac{\lambda l}{2\sqrt{\alpha_2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{h\sqrt{\alpha_2}}{K_2} \left(\frac{\lambda}{\sigma_1^0 \sqrt{\alpha_1}} - \operatorname{ctg} \frac{\lambda l}{2\sqrt{\alpha_1}} \right) \left(\frac{\lambda}{\sigma_2^0 \sqrt{\alpha_2}} \operatorname{ctg} \frac{\lambda l}{2\sqrt{\alpha_2}} - 1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{h\sqrt{\alpha_1}}{K_1} \left(\frac{\lambda}{\sigma_1^0 \sqrt{\alpha_1}} \operatorname{ctg} \frac{\lambda l}{2\sqrt{\alpha_1}} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{\sigma_2^0 \sqrt{\alpha_2}} - \operatorname{ctg} \frac{\lambda l}{2\sqrt{\alpha_2}} \right) \right] = 0. \quad (27) \end{aligned}$$

имеет некоторое решение ($A_{1n}, B_{1n}; A_{2n}, B_{2n}$). Между ними имеются следующие связи:

$$\frac{B_{1n}}{A_{1n}} = + \frac{\sigma_1^0 \sqrt{\alpha_1}}{\lambda_n}; \quad \frac{A_{2n}}{A_{1n}} = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{K_2} \frac{\Delta_{1n} \Pi_{1n}}{\Delta_{2n}} K_1; \quad \frac{B_{2n}}{A_{1n}} = - \frac{\sqrt{\alpha_2}}{K_2} \Delta_{1n} \Pi_{1n},$$

где

$$\Delta_{1n} = \frac{-1}{\sqrt{\alpha_1}} \sin \frac{\lambda_n l}{2\sqrt{\alpha_1}} + \frac{\sigma_1^0}{\lambda_n} \cos \frac{\lambda_n l}{2\sqrt{\alpha_1}}; \quad \Delta_{2n} = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\alpha_2}} \sin \frac{\lambda_n l}{2\sqrt{\alpha_2}} - \sigma_2^0 \cos \frac{\lambda_n l}{2\sqrt{\alpha_2}};$$

$$\Pi_{2n} = \sigma_2^0 \sin \frac{\lambda_n l}{\sqrt{\alpha_2}} + \frac{\lambda_n}{\sqrt{\alpha_2}} \cos \frac{\lambda_n l}{\sqrt{\alpha_2}}; \quad \Pi_{1n} = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\alpha_2}} \sin \frac{\lambda_n l}{\sqrt{\alpha_2}} = \sigma_2^0 \cos \frac{\lambda_n l}{\sqrt{\alpha_2}}.$$

Этим значениями $A_{1n}, B_{1n}, A_{2n}, B_{2n}$ (постоянных интегрирования) определяются собственные функции $X_{1n}(x), X_{2n}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Легко показать, что эти собственные функции становятся ортогональными после умножения на $\sqrt{c_1 \rho_1}$ и $\sqrt{c_2 \rho_2}$, соответственно, в смысле

$$\int_0^{l/2} c_1 \rho_1 X_{1m}(x) X_{1n}(x) dx + \int_{l/2}^l c_2 \rho_2 X_{2m}(x) X_{2n}(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \quad (28)$$

Следовательно, как и в [7], общее решение задачи (13)–(15) запишем в виде

$$v_{1,2}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n v_{1,2}^{(n)}(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_{1n}(x) T_n(t), & 0 \leq x \leq l/2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_{2n}(x) T_n(t), & l/2 \leq x \leq l; \\ 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (29)$$

Предполагая относительно начальных функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, что они дважды непрерывно дифференцируемы, удовлетворяя начальным условиям (12), введя безразмерные величины

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2x}{l}, \quad \xi_2 = \frac{2x}{l}, \quad \tau_1 = \frac{z_1 t}{(l/2)^2}, \quad \tau_2 = \frac{z_2 t}{(l/2)^2}, \\ \mu_{1n}^2 \tau_1 &= \mu_{2n}^2 \tau_2 = \lambda_n^2 \tau, \quad \mu_{1n}: \mu_{2n} = (z_1:z_2)^{1/2}, \\ N_1 &= (hl/2):K_1, \quad N_2 = (hl/2):K_2, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где N_1, N_2 — числовые критерии Био, решение задачи (11)–(15) можем переписать в безразмерном виде:

$$\tau_{1,2}(\xi, \tau) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_{1n}(\xi_1) T_n(\tau_1) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n (\cos \mu_{1n} \xi_1 + \\ + b_{1n} \sin \mu_{1n} \xi_1) \exp(-\mu_{1n}^2 \tau_1), & 0 \leq \xi_1 \leq 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_{2n}(\xi_2) T_n(\tau_2) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n (a_{2n} \cos \mu_{2n} \xi_2 + \\ + b_{2n} \sin \mu_{2n} \xi_2) \exp(-\mu_{2n}^2 \tau_2), & 1 \leq \xi_2 \leq 2, \end{cases} \quad (29')$$

При этом символические обозначения сохраняются прежними и после перехода к безразмерным величинам; амплитуды D_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) определяются по формуле

$$D_n = \frac{c_1 \rho_1 \int_0^1 F_1(\xi_1) X_{1n}(\xi_1) d\xi_1 + c_2 \rho_2 \int_1^2 F_2(\xi_2) X_{2n}(\xi_2) d\xi_2}{\int_0^1 X_{1n}^2(\xi_1) d\xi_1 + \int_1^2 X_{2n}^2(\xi_2) d\xi_2} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (31)$$

2) Применив принцип Дюамеля [8], решение задачи (16)–(20) без особого труда найдем в виде

$$\tau_{1,n}(\xi, \tau) = \begin{cases} \tau_{1,1}(\xi_1, \tau_1) = \int_0^{\tau_1} \left\{ \varphi_1(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_1} L_1(\xi_1, \tau_1 - \gamma) + \right. \\ \left. + \varphi_3(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_1} L_2(\xi_1, \tau_1 - \gamma) \right\} d\gamma, & 0 \leq \xi_1 \leq 1, \\ \tau_{1,2}(\xi_2, \tau_2) = \int_0^{\tau_2} \left\{ \varphi_1(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_2} \psi_1(\xi_2, \tau_2 - \gamma) + \right. \\ \left. + \varphi_3(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_2} \psi_2(\xi_2, \tau_2 - \gamma) \right\} d\gamma, & 1 \leq \xi_2 \leq 2, \end{cases} \quad (32)$$

где введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} L_1(\xi_1, \tau_1 - \gamma) &= D_{11}(\xi_1) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{1,2} (\cos \mu_{1n} \xi_1 + \\ &+ b_{1n} \sin \mu_{1n} \xi_1) \exp[-\mu_{1n}^2 (\tau_1 - \gamma)], \\ L_2(\xi_1, \tau_1 - \gamma) &= D_{12}(\xi_1) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{1,2} (\cos \mu_{1n} \xi_1 + \\ &+ b_{1n} \sin \mu_{1n} \xi_1) \exp[-\mu_{1n}^2 (\tau_1 - \gamma)] \\ \psi_1(\xi_2, \tau_2 - \gamma) &= D_{21}(\xi_2) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{1,2} (a_{2n} \cos \mu_{2n} \xi_2 + \\ &+ b_{2n} \sin \mu_{2n} \xi_2) \exp[-\mu_{2n}^2 (\tau_2 - \gamma)], \\ \psi_2(\xi_2, \tau_2 - \gamma) &= D_{22}(\xi_2) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{1,2} (a_{2n} \cos \mu_{2n} \xi_2 + \\ &+ b_{2n} \sin \mu_{2n} \xi_2) \exp[-\mu_{2n}^2 (\tau_2 - \gamma)] \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &0 \leq \xi_1 \leq 1; \\ &1 \leq \xi_2 \leq 2; \end{aligned}$$

$D_{ij}(\xi_i)$ ($i, j = 1, 2$) — известные линейные функции.

Принимая теперь во внимание (A), (29') и (31), решение задачи (3)–(10), можем записать в виде

$$\left. \begin{aligned} U_1(\xi_1, \tau_1) &= v_1(\xi_1) \tau_1 + w_1(\xi_1, \tau_1) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n (\cos \mu_{1n} \xi_1 + \\ &+ b_{1n} \sin \mu_{1n} \xi_1) \exp[-\mu_{1n}^2 \tau_1] + \\ U_2(\xi_2, \tau_2) &= v_2(\xi_2, \tau_2) + w_2(\xi_2, \tau_2) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n (a_{2n} \cos \mu_{2n} \xi_2 + b_{2n} \sin \mu_{2n} \xi_2) \exp[-\mu_{2n}^2 \tau_2] + \\ U_{1,2}(\xi, \tau) &= \begin{cases} + \int_0^{\tau_1} \left\{ \varphi_1(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_1} L_1(\xi_1, \tau_1 - \gamma) + \varphi_3(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_1} L_2(\xi_1, \tau_1 - \right. \\ \left. - \gamma) \right\} d\gamma, & 0 \leq \tau_1 \leq 1; \\ + \int_0^{\tau_2} \left\{ \varphi_1(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_2} \psi_1(\xi_2, \tau_2 - \gamma) + \right. \\ \left. + \varphi_3(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_2} \psi_2(\xi_2, \tau_2 - \gamma) \right\} d\gamma, & 1 \leq \tau_2 \leq 2, \end{cases} \quad (Б) \end{aligned}$$

где амплитуды D_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) определяются по формуле (31), μ_{1n} (или μ_{2n} , ($n = 1, 2, 3, \dots$)) являются корнями трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{l\sigma_1^0} \mu_{1n} \sin \mu_{1n} + \cos \mu_{1n} \right) \left(\frac{2}{l\sigma_3^0} \mu_{2n} \sin \mu_{2n} + \cos \mu_{2n} \right) - \\ &- N_2 \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} \left(\frac{2}{l\sigma_1^0} \mu_{1n} \sin \mu_{1n} + \cos \mu_{1n} \right) \left(\frac{2}{l\sigma_3^0} \sqrt{\frac{\chi_1}{z_2}} \cos \mu_{2n} - \right. \\ &- \frac{1}{\mu_{1n}} \sin \mu_{2n} \left. \right) + N_1 \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} \left(\frac{2}{l\sigma_1^0} \mu_{1n} \cos \mu_{1n} - \right. \\ &- \sin \mu_{1n} \left. \right) \left(\frac{2}{l\sigma_3^0} \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} \sin \mu_{2n} + \frac{1}{\mu_{2n}} \cos \mu_{2n} \right) = 0^{(*)}, \end{aligned}$$

функции $L_i(\xi_i, \tau_i - \gamma)$ и $\Psi_i(\xi_i, \tau_i - \gamma)$ ($i = 1, 2$) определяются прежними формулами.

3°. Вернемся к общему случаю задачи (3)–(10). Ввиду линейности уравнения (3) влияние всех существующих факторов теплового процесса, т. е. факторов, соответствующих начальной температуре, краевым и теплоконтактным режимам, можно учитывать в совокупности.

Повторяя рассуждения, изложенные в работе [9] и отыскивая подобным образом решение задачи (3)–(10) в виде суммы тепловых потенциалов простых слоев с неизвестными плотностями μ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), мы придем к следующей системе линейных интегральных уравнений типа Вольтерра для определения неизвестных плотностей $\mu_{2i-1+k}[\chi_{i+k}(\tau), \tau]$ ($i = 1, 2; k = 0, 1$).

* Это уравнение (27), только в иной записи.

$$\begin{aligned}
& \pm \mu_{2i-2} [x_{2i-1}(t), t] + \sum_{k=0}^1 \int_0^t \{ \sigma_{2i-1}(t) V_i^0 [x_{2i-1}(t), t; x_{1+k}(\tau), \tau] \pm \\
& \pm V_i^1 [x_{2i-1}(t), t; x_{1+k}(\tau), \tau] \} \mu_{2i-1+k} [x_{1+k}(\tau), \tau] d\tau = \\
& = f_{2i-1}(t) \quad (i=1, 2), \\
& \mu_2 [x_2(t), t] - \frac{h}{K_1} \sum_{k=0}^1 \int_0^t V_2^0 [x_2(t), t; x_{2+k}(\tau), \tau] \\
& \mu_{3+k} [x_{k+2}(\tau), \tau] d\tau - \sum_{k=0}^1 \int_0^t \{ V_1^1 [x_2(t), t; x_{k+1}(\tau), \tau] - \\
& - \frac{h}{K_1} V_1^0 [x_2(t), t; x_{k+1}(\tau), \tau] \} \mu_{k+1} [x_{k+1}(\tau), \tau] d\tau = \frac{1}{K_1} f_2(t), \\
& K_1 \mu_2 [x_2(t), t] + K_2 \mu_3 [x_2(t), t] - \\
& - K_1 \sum_{k=0}^1 \int_0^t V_1^1 [x_2(t), t; x_{k+1}(\tau), \tau] \mu_{k+1} [x_{k+1}(\tau), \tau] d\tau + \\
& + K_2 \sum_{k=0}^1 \int_0^t V_2^1 [x_2(t), t; x_{k+2}(\tau), \tau] \mu_{k+3} [x_{k+2}(\tau), \tau] d\tau = f_4(t).
\end{aligned} \quad (33)$$

Легко заметить, что система (33) может быть решена методом последовательных приближений. Действительно, в силу определения функций $V_j^0 [x, t; \xi, \tau]$ и $V_j^1 [x, t; \xi, \tau]$ ($j=1, 2$) [9] во всех интегралах ядра $V_j^0 [x_1(t), t; x_k(\tau), \tau]$ и $V_j^1 [x_1(t), t; x_k(\tau), \tau]$ ($j=1, 2; k, j=1, 2, 3$) полярности в точке $t=\tau$ вовсе не имеют при $k \neq i$, полярность в функ-

циях $V_j^0 [x_i(t), t; x_k(\tau), \tau]$ ($j=1, 2$) имеет вид $M(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}$ при $i=k$, а полярность в ядрах $V_j^1 [x_1(t), t; x_k(\tau), \tau]$ ($j, i, k=1, 2$), снижается за счет числителя и становится не сильнее $M_1 \cdot (t-\tau)^{-\beta}$ ($M, M_1, \beta = \text{const.} > 0$), $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$. Следовательно, система (33) имеет в точке $t=\tau$

слабую полярность с показателем полярности, равным, $\beta_1 \left(\frac{1}{2} \leq \beta_1 < 1 \right)$, что позволяет применить метод последовательных приближений [10] и найти единственное решение системы (33), подставив которое в соответствующие тепловые потенциалы, получим единственное решение нашей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

3. Йехтер М., Мейер Э. Вопросы теплопроводности. В кн. "Турбулентные течения и теплопроводности (серия Аэродинамика больших скоростей и ракетная техника вып. V" ИЛ. 1963.
2. Gevrey M. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. J. de Mathématiques pures et appliquées. t. 9, 11 1—4, 1913, 305—475.
3. Камынин Л. И. ЖВММФ, т. 2, 1962, № 5.
4. Камынин Л. И. СМЖ, т. IV, 1963, № 5.
5. Камынин Л. И. "ИАН СССР, серия матем.", т. 28, стр. 721—744.
6. Намазов Г. К. "ДАН СССР", т. 145, 1962, № 6.
7. Абасов А. М. "ДАН Азерб. ССР", 1967, № 6.
8. Карслоу Г. и Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд-во "Наука" М., 1964.
9. Абасов А. М. "Уч. зап. АГУ", 1967, № 1.
10. Мюнц Г. Интегральные уравнения, т. I. ГТТИ, Л.—М., 1934.

АГУ

Бирөлчүлү гејри-идеал үчүнчү истилик-контактлы сэрһэд мәсәләси һаггында

ХУЛАСӘ

Тәдгигатда сэрһэдләри (2) шәртини өдәјән (1) областында (3) тәнлијинин (4) башланғыч, (5) сэрһэд, (6)—(7) истилик-контактлы, (8)—(10) узлашма шәртләрини өдәјән һәлли тапылмышдыр.

Хүсуи һалда (1) областынын сэрһэдләрини тәшкил едән $x_i(t)$ ($i=1, 2, 3$) хәтләри дүз хәтләр олдугда, мәсәләмиз (1') областында (3) тәнлијинин (4')—(10') шәртләрини өдәјән һәллини тапылмасына кәтирилир. Сонунчу мәсәләнин һәллини (А) шәклиндә ахтардыгда (1') областында (11)—(15) вә (16)—(20) мәсәләләри алыныр. Бунлардан (11)—(15)-ин һәллини Фурје методу илә (29) формасында тапырыг, (30) исә өлчүсүз кәмијјәтләрә кечдикдән сонра һәлли (29') шәклиндә јазылыр. (16)—(20) мәсәләсинин һәлли Дүамел принципи вәситәсилә (32) шәклиндә тапылыр вә бундан сонра (А) ифадәсинә гајыдарат һәлли (Б) шәклиндә јазылыр.

Нәһәјәт, үмуми һалда $x_i(t)$ ($i=1, 2, 3$) функцијалары (2) Жевре шәртини өдәјән функцијалар олдугда, [9] ишиндә јүрүтдүјүмүз мұһакимәлар тәқрар едиләрәк (33) интеграл тәнликләр системи алынмыш вә һәмийн систем ардычыл јахынлашма методу илә һәлл едилмишдир

Поступило 4. VII 1967

Г. А. ДЖАФАРЛИ, Г. М. ГАШИМОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Пусть имеем ряд Дирихле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad (1)$$

абсолютно сходящийся на всей комплексной плоскости z . Пусть этот ряд ограничен на вещественной оси

$$|F(x)| < C, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Кроме того, предположим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \alpha, \quad 0 < \alpha < +\infty.$$

М. А. Евграфовым и И. А. Чегис [1] доказано, что если при этом

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{C}{n^{2+\varepsilon}}, \quad \varepsilon < 0, \quad (2)$$

то $F(z) \equiv 0$.

Сделаем следующее замечание. Обозначим

$$M_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\lambda_n x}.$$

Легко показать, что если имеет место неравенство (2), то выполняется следующее неравенство и наоборот:

$$M_F(x) < C_1 \exp\{\exp \rho x\}, \quad \rho < \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0.$$

Следовательно, доказанную теорему в [1] можно сформулировать и в другом виде: если ряд Дирихле ограничен на вещественной оси и удовлетворяет неравенству (3), то $F(z) \equiv 0$. В настоящей статье используется метод, отличный от принятого в [1] и доказывается следующая

Теорема. Пусть ряд Дирихле ограничен на вещественной оси и пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty.$$

Если при этом

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |F(x + iy)| < C \exp\{\exp \rho x\}, \quad \rho < \frac{\alpha}{2},$$

то $F(z) \equiv 0$.

При доказательстве этой теоремы будем пользоваться следующими леммами.

Лемма 1. Пусть аналитическая функция $f(z)$, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z = \sigma > 0$, удовлетворяет условиям:

1. $|f(iy)| < C \exp\left\{\left(\frac{\pi}{\alpha} + \eta\right)|y|\right\}$, $\alpha, \eta > 0$, $-\infty < y < +\infty$;
2. $|f(z)| = \exp\{o(|z|^2)\}$, $|z| \rightarrow +\infty$, $\operatorname{Re} z > 0$;
3. $|f(\sigma)| < C \exp\left\{-\frac{\sigma}{\rho} \ln \sigma\right\}$

Если при этом $\rho < \frac{\alpha}{2}$, то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F_M(z) = f(z) \Gamma\left(\frac{2}{\pi \rho_1} z + 1\right) \exp\{Mz\}$$

$$\left(\rho < \frac{\pi}{2} \rho_1 < \frac{\alpha}{\pi + \alpha \eta} \frac{\alpha}{2}\right).$$

Имея в виду оценку сверху гамма-функции на мнимой оси, получим

$$|F_M(iy)| < 1.$$

Оценка на действительной оси $\operatorname{Re} z = \sigma > 0$ даст

$$|F_M(\sigma)| < C \exp\left\{-\frac{1}{\rho} \sigma \ln \sigma + M\sigma + \frac{2}{\pi \rho_1} \sigma \ln \sigma\right\} < C_M.$$

Очевидно,

$$\ln |F_M(z)| = o(|z|^2), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} z = \sigma > 0.$$

Теперь применим классическую теорему Фрагмена—Линделефа для угла к $F_M(z)$. Для первой четверти имеем:

1. $|F_M(iy)| \leq 1$, $0 < y < +\infty$;
2. $|F_M(x)| < C_M$, $0 < x < +\infty$;
3. $|F_M(z)| = \exp\{o(|z|^2)\}$, $|z| \rightarrow \infty$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Поэтому в первой четверти при всех достаточно больших M будем иметь

$$|F_M(z)| < \max(1, C_M) = C_M.$$

Аналогичную картину имеем и для четвертой четверти — $\frac{\pi}{2} < \arg z < 0$.

Следовательно:

1. $|F_M(iy)| \leq 1$, $-\infty < y < +\infty$;
2. $|F_M(z)| \leq C_M$, $\operatorname{Re} z > 0$.

Применяя к функции $F_M(z)$ классическую теорему Фрагмена—Линделефа, для регулярных функций в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ получаем, что $F_M(z)$ должна быть ограниченной той же константой, что и на границе, т. е.

$$|F_M(z)| \leq 1, \quad \operatorname{Re} z \geq 0$$

при любом M , откуда

$$|f(z)| < \frac{\exp\{-Mz\}}{\Gamma\left(\frac{2}{\pi\rho_1}\tilde{x}+1\right)}.$$

Полагая $z = x$, получим

$$|f(x)| < \frac{\exp\{-Mx\}}{\Gamma\left(\frac{2}{\pi\rho_1}\tilde{x}+1\right)}.$$

Зафиксируем x и, перейдя к пределу при $M \rightarrow +\infty$, будем иметь $f(x) = 0$. Тогда на основании теоремы единственности $f(z) \equiv 0$.

Лемма 2. Пусть $\tilde{F}(x, \xi)$ является преобразованием Фурье функции $F(z)$:

$$\tilde{F}(x, \xi) = \int_0^{+\infty} F(x + iy) \exp\{-i\xi y\} dy, \quad \text{Im}\xi < 0.$$

Обозначим

$$\varphi(\xi) = \tilde{F}(x, \xi) \exp\{-\xi x\} + i \int_x^{+\infty} F(t) \exp\{-\xi t\} dt, \quad \text{Re}\xi > 0,$$

тогда имеет место неравенство

$$|\varphi(\sigma)| < C \exp\left\{-\frac{\sigma}{\rho} \ln \frac{\sigma}{\rho} (1 + o(1))\right\},$$

$$\sigma \rightarrow \infty, \quad \text{Re}\xi = \sigma, \quad \rho < \frac{\alpha}{2}.$$

Доказательство. Пусть $\text{Re}\xi = \sigma > 0$. Имеем

$$|\varphi(\sigma)| \leq \min_x \left\{ |\tilde{F}(x, \sigma)| \exp\{-\sigma x\} \right\} + \left| \int_x^{+\infty} F(t) \exp\{-\sigma t\} dt \right|.$$

Так как преобразование Фурье функции $F(z)$ имеет смысл при $\text{Im}\xi < 0$ то положим $\xi = \sigma - i\delta$, $\delta > 0$ и рассмотрим

$$|\tilde{F}(x, \sigma - i\delta)| < \int_0^{+\infty} |F(x + iy)| \exp\{-\delta y\} dy <$$

$$< C \exp\{\exp \rho x\} \int_0^{+\infty} \exp\{-\delta y\} dy = \frac{C}{\delta} \exp\{\exp \rho x\}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \min_x \{ |F(x, \sigma - i\delta)| \exp\{-\delta x\} \} &\leq C \min_x \exp\{-\sigma x\} \cdot \exp\{\exp \rho x\} = \\ &= C_1 \exp\left\{\frac{\sigma}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho} \ln \frac{\sigma}{\rho}\right\} = C_1 \exp\left\{-\frac{\sigma}{\rho} \ln \frac{\sigma}{\rho} (1 + o(1))\right\}, \quad \sigma \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

и

$$\left| \int_x^{+\infty} F(t) \exp\{-\sigma t\} dt \right| < C \exp\left\{-\frac{\sigma}{\rho} \ln \frac{\sigma}{\rho} (1 + o(1))\right\}, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Из последних двух неравенств получаем утверждение леммы 2.

Теперь перейдем к доказательству нашей теоремы, легко заметить, что $F(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Из (4) имеем

$$\frac{d\tilde{F}(x, \xi)}{dx} = -i \int_0^{+\infty} \frac{\partial F(x + iy)}{\partial y} dy. \quad (4)$$

Вычисляя последний интеграл по частям, находим, что $\tilde{F}(x, \xi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{F}(x, \xi)}{dx} - \xi \tilde{F}(x, \xi) = iF(x).$$

Решая это уравнение, находим

$$\tilde{F}(x, \xi) = \tilde{F}(0, \xi) \exp\{\xi x\} + i \int_0^x F(t) \exp\{\xi(t - x)\} dt,$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, \xi) \exp\{-\xi x\} + i \int_x^{+\infty} F(t) \exp\{-\xi t\} dt = \\ = \tilde{F}(0, \xi) + i \int_0^{+\infty} F(t) \exp\{-\xi t\} dt. \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства не зависит от x , обозначим ее через $u(\xi)$ и рассмотрим функцию

$$G(\xi) = u(\xi) \Phi(\xi),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right), \quad u(\xi) = \tilde{F}(x, \xi) \exp\{-\xi x\} + \\ + i \int_x^{+\infty} F(t) \exp\{-\xi t\} dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что $G(\xi)$ регулярна в $\text{Re}\xi > 0$.

Так как

$$|\tilde{F}(x, \sigma - i\tau)| < C \exp\{\exp \rho x\},$$

то

$$|\tilde{F}(x, \sigma - i\tau)| \exp\{-(\sigma - i\tau)x\} < C \max_x \exp\{\exp \rho x - \sigma x\} \leq C.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{+\infty} F(t) \exp\{-\xi t\} dt \right| = \\ = \left| \int_x^{+\infty} F(t) \exp\{-(\sigma - i\tau)t\} dt \right| < C \int_0^{+\infty} \exp\{-\sigma t\} dt < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $u(\xi)$ на мнимой оси ограничена:

$$|u(i\tau)| \leq C,$$

поэтому

$$|C(i\tau)| \leq C |\Phi(i\tau)| < C \exp\left\{\left(\frac{\pi}{\alpha} + \eta\right)|\tau|\right\}.$$

На вещественной оси $\Phi(\xi)$ ограничена. Тогда на основании леммы 2

$$|G(\sigma)| < C |u(\sigma)| < C \exp\left\{-\frac{\sigma}{\rho} \ln \frac{\sigma}{\rho} (1 + o(1))\right\}, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, функция $G(\xi)$ удовлетворяет всем требованиям леммы 1. Поэтому $G(\xi) \equiv 0$, откуда $u(\xi) \equiv 0$. А это, в свою очередь, означает, что

$$\tilde{F}(x, \xi) \exp\{-\xi x\} = -i \int_x^{+\infty} F(t) \exp\{-\xi t\} dt.$$

С другой стороны,

$$\tilde{F}(x, \xi) = \tilde{F}(0, \xi) \exp\{i\xi x\} + i \int_0^x F(t) \exp\{\xi(x-t)\} dt.$$

По формуле обращения имеем

$$\begin{aligned} F(x+iy) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(x, \xi) \exp\{i\xi y\} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left[\tilde{F}(0, \xi) \exp\{\xi x\} + \right. \\ &\quad \left. + i \int_0^x F(t) \exp\{\xi(x-t)\} dt \right] \exp\{i\xi y\} d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[-i \int_x^{+\infty} F(t) \exp\{\xi(x-t)\} dt \right] \exp\{i\xi y\} d\xi. \end{aligned}$$

Так как

$$\tilde{F}(0, \xi) = \int_0^{+\infty} F(iy) \exp\{-i\xi y\} dy = i \int_{-\infty}^0 F(t) \exp\{-\xi t\} dt$$

и

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \left[\tilde{F}(0, \xi) \exp\{\xi x\} + i \int_0^x F(t) \exp\{\xi(x-t)\} dt \right] \exp\{i\xi y\} d\xi = \\ = \int_{-\infty}^0 \left[i \int_{-\infty}^0 F(t) \exp\{\xi(x-t)\} dt + \right. \\ \left. + i \int_0^x F(t) \exp\{\xi(x-t)\} dt \right] \exp\{i\xi y\} d\xi = \\ = \int_{-\infty}^0 \left[i \int_{-\infty}^x F(t) \exp\{\xi(x-t)\} dt \right] \exp\{i\xi y\} d\xi, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} F(x+iy) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \left(i \int_{-\infty}^x F(t) \exp\{\xi(x-t)\} dt \right) \exp\{i\xi y\} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \left(-i \int_x^{+\infty} F(t) \exp\{\xi(x-t)\} dt \right) \exp\{i\xi y\} d\xi \right] = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^0 \exp\{\xi(x-t+iy)\} d\xi \right] F(t) dt - \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_x^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \exp\{\xi(x-t+iy)\} d\xi \right] F(t) dt = \\ &= \frac{i}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^x \frac{F(t)}{z-t} dt + \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{z-t} dt \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t)}{z-t} dt. \end{aligned}$$

Теперь напомним классическую теорему Фрагмена—Линделефа для полуполосы. Пусть $f(z)$ регулярна в полуполосе шириной h и ограничена на ее сторонах. Если внутри этой полуполосы имеет место неравенство

$$|f(z)| < C_1 \exp\left\{C_2 \exp\left(\frac{\pi}{h} - h\right)x\right\}, \quad \eta > 0, \quad (5)$$

то она ограничена во всей полуполосе. Чтобы применить эту теорему к функции $F(z)$, рассмотрим полосы шириной $h = \frac{2\pi}{a}$, содержащую действительную ось, и применим эту же теорему к каждой полуполосе в отдельности. Вне этой полосы и на границе функция $F(z)$ представима интегралом типа Коши и потому ограничена. На вещественной оси она ограничена по условию, внутри полосы удовлетворяет неравенству (5), поэтому она ограничена во всей полосе. Следовательно, получаем, что целая функция $F(z)$ ограничена во всей комплексной плоскости z . Тогда на основании теоремы Лиувилля она тождественная постоянная. А так как при $z \rightarrow -\infty$, $F(z) \rightarrow 0$, то $F(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евграфов М. А. и Чегис И. А. „ДАН СССР“, 134, 1960, № 2.

АзПИ

Поступило 16. IX 1969

К. Э. Чэфэрли, Н. М. Нашымов

Дирихле сыралары үчүн бир жеканэлик теоремн наггында

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә ашагыдакы теорем исбат олунмушдур.

Теорем. Тутаг ки, бүтүн z комплекс мүстәвисиндә мүтләг јы-
былан

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad \lambda_n > 0, \quad \lambda_n \uparrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = a, \quad 0 < a < +\infty \text{ - дур.}$$

Дирихле сырасы һәгиги охда мәһдуддур:

$$|F(x)| < C, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Онда

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |F(x+iy)| < C \exp\left\{\exp\left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right)x\right\}, \quad \varepsilon > 0$$

бәрабәрсизлији өдәниләрсә, $F(z) \equiv 0$ олар.

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, З. А. ИСКЕНДЕР-ЗАДЕ, М. Р. АХУНДОВ,
В. Н. КАЧУРИН, Ф. И. ПЛИЕВ, Э. А. ДЖАФАРОВА, Ш. А. АЛИХАНОВА

ПРИБОР ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАПИСИ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ДИОДОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НАПЯЖЕНИЯ СМЕЩЕНИЯ

Изменение полного сопротивления полупроводникового диода с $p-n$ -переходом (его активной и реактивной составляющих) в случае приложенного напряжения определяется теми физическими процессами, которые происходят в $p-n$ -переходе. Знание характера такого изменения, т. е. вольтемкостных характеристик диодов, позволяет получить целый ряд сведений о параметрах самих приборов и имеет важное значение при разработке полупроводниковых твердых схем с управляемой емкостью или индуктивностью. Так, например, исследования барьерной емкости в зависимости от обратного смещения позволяют нам получить сведения о структуре $p-n$ -перехода, о ширине слоя объемного заряда, о величине концентрации или градиента концентрации легирующей примеси, о величине контактной разности потенциалов на $p-n$ -переходе и ее зависимости от температуры, о наличии глубоких рекомбинационных центров и величине их концентрации [1, 2].

Исследование емкости прямосмещенных диодов, в частности явления инверсии знака реактивности диода (перехода емкости в индуктивность), может позволить получить сведения о локальной температуре $p-n$ -перехода, распределении потенциала вблизи этого перехода величине концентрации основных носителей в базовой области диода [3]. Отсюда ясно, что измерение составляющих полной проводимости диода имеет очень важное значение. В настоящее время такие измерения почти всегда производятся по точкам при фиксированном значении постоянного напряжения [4]. Основным недостатком построения вольтемкостных характеристик по точкам является их большая трудоемкость (нужно снять 40—45 точек). Кроме того, при таких измерениях невозможно определить изменение со временем величины емкости под действием приложенного напряжения; легко пропустить такие изменения в вольтемкостной характеристике, которые происходят в очень узком интервале напряжения. Метод непрерывной автоматической записи зависимости дифференциальной емкости и проводимости от приложенного постоянного смещения поможет преодолеть эти недостатки.

Известна работа [5], в которой рассматривается прибор для автоматической записи емкости и проводимости двухполюсников. Нами

собран видоизмененный вариант такого прибора, основанного на методе фазового детектирования.

Дифференциальная активная проводимость (или сопротивление) диода пропорциональна синфазной составляющей переменного тока через диод (или переменного напряжения на диоде), а дифференциальная емкость или индуктивность, т. е. реактивная проводимость (сопротивление) — квадратурной. Для выделения отдельно синфазной и квадратурной составляющих переменного сигнала используется фазосдвигающая цепочка RC , настроенная на сдвиг фаз 90° и фазочувствительный детектор (ФД).

Как известно, полупроводниковый диод можно представить в виде параллельной и последовательной схем. Рассмотрим величину переменного сигнала на диоде. Диод, имеющий параллельную эквивалентную схему, включен в цепь (рис. 1, а). Последовательно с диодом, имеющим комплексную проводимость вида $Y = G + j\omega C$, включено известное сопротивление R_s с помощью которого можно измерить переменный ток i_g через диод. Переменное напряжение v_s определяется выражением

$$v_s = v_g \frac{R_s}{R_s + \frac{1}{G + j\omega C}}, \quad (1)$$

где v_g — переменное напряжение на исследуемом диоде. Если все элементы измерительной схемы (R_s и R_g) выбраны так, что $R_s \ll \frac{1}{G + j\omega C}$

$R_g \ll \frac{1}{G + j\omega C}$, то амплитуда v_g будет постоянной: $|v_g| \gg |v_s|$, а выражение (1) упрощается до

$$v_s = R_s v_g (G + j\omega C). \quad (1a)$$

Напряжение v_s является „информационным“ сигналом: его синфазная с v_g составляющая пропорциональна дифференциальной проводимости G , а квадратурная — дифференциальной емкости C . Эта схема, в которой в процессе всего измерения сохраняется неизменной амплитуда переменного напряжения ($v_g = \text{const}$), называется схемой генератора напряжения.

В случае последовательной эквивалентной схемы (рис. 1, б) „информационным“ сигналом v_s служит переменное напряжение на диоде; v_s определяется выражением

$$U_s = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{R_g + R + \frac{1}{j\omega C}} \tilde{v}_g$$

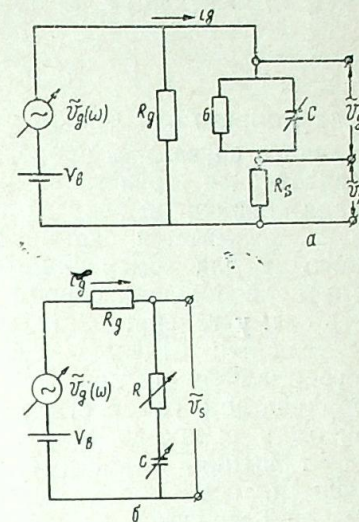


Рис. 1. Схема для измерения: а) комплексной проводимости вида $Y = G + j\omega C$ (схема генератора напряжения); б) комплексного сопротивления $Z = R + \frac{j}{\omega C}$ (схема генератора тока).

В этом случае $\tilde{v}_g$ — сигнал от генератора синусоидальных колебаний. Если R_g выбрать таким, чтобы $R_g \gg R + \frac{1}{j\omega C}$, то ток через диод $\tilde{v}_g$ будет постоянным по амплитуде и соотношение (2) примет вид

$$\tilde{v}_s = \tilde{v}_g \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right). \quad (2a)$$

Таким образом, в данном случае синфазная составляющая информационного сигнала $\tilde{v}_s$ пропорциональна активному сопротивлению R , а квадратурная — реактивному. Эта схема, в которой в процессе измерения неизменной сохраняется величина переменного тока через образец, называется схемой генератора тока. Схема генератора тока пригодна для измерения малых сопротивлений ($\sim 0 - 10^3 \text{ ом}$), а для измерения больших сопротивлений ($\sim 10^6 \div 10^8 \text{ ом}$) лучше использовать схему генератора напряжения.

Выделяя отдельно синфазную и квадратурную составляющие „информационного“ сигнала с помощью ФД, можно записать на двухкоординатном самописце зависимость $C(U)$ и $G(U)$. Описываемый прибор в принципе может измерять без ограничения по величине сопротивления, емкости и индуктивности, если только достижимо установление фазового баланса. Некоторые ограничения накладываются на амплитуду измерительного сигнала и на уровень шумов

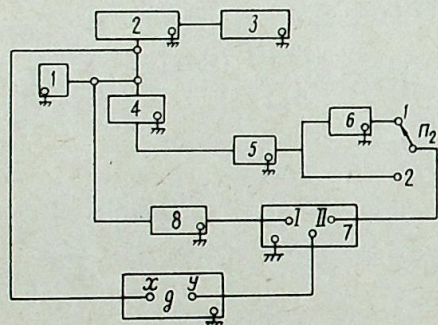
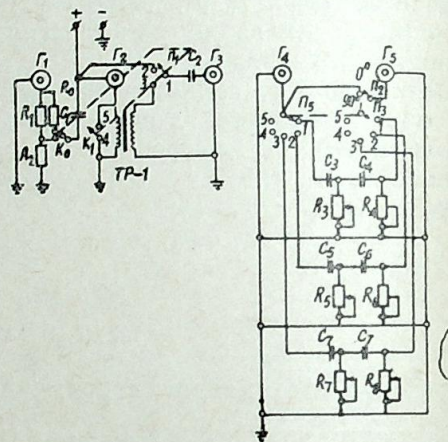


Рис. 2. Блок-схема прибора для автоматической записи $C(U)$ и $G(U)$

усилителя. Прибор для автоматической непрерывной записи $C(U)$ и $G(U)$ может быть применен в широком диапазоне частот; нами он испытывался в лабораторных условиях при частоте 100 кГц.

Блок-схема указанного прибора представлена на рис. 2. От генератора (1) переменный сигнал подается на диод (4). Информационный сигнал с диода или включенного последовательно с ним низкоомного сопротивления поступает на вход малошумящего усилителя (5), затем через фазосдвигающую цепь (6) или помимо нее поступает на второй измерительный вход ФД (7). Принцип действия ФД состоит в векторном сложении информационного полезного сигнала и напряжения шумов с опорным сигналом, поступающим на первый (опорный) канал ФД, с известной частотой и фазой. Общее результирующее напряжение выпрямляется таким образом, чтобы сигнал шума усреднялся за период времени, превышающий период опорного напряжения. В результате выпрямления на выходе ФД получается постоянное



фаз на 90° (рис. 2). Когда цепь сдвига фаз выключена (сдвиг фаз между информационным и опорным сигналом равен нулю), производится измерение активной проводимости G (синфазной составляющей информационного сигнала), когда же включена цепь сдвига фаз (сдвиг фаз равен 90°) измеряется емкость C (пропорциональная квадратурной составляющей информационного сигнала). Фазосдвигающая цепочка RC (6) настраивается на сдвиг 90° по стандартному прибору — фазометру Ф1-2 отдельно для каждой фиксированной частоты (30, 100 кГц и 500 кГц); данные цепочки приведены на рис. 3 (R_3-R_8 , C_3-C_8). Переключатель P_3 позволяет установить фазосдвигающую RC -цепочку на нужную частоту (положения 1, 2 и 3).

В схеме использованы приборы серийного выпуска и самодельные. Двухкоординатный самописец (9, рис. 3) собран из двух потенциометров ЭПП-09М и ЭПВ-2. Для записи по оси U использовался ЭПП-09М, а для записи по оси X — ЭПВ-2. Запись производилась на диаграмме размером 305×170 мм².

Схема подачи регулируемого постоянного смещения на диод

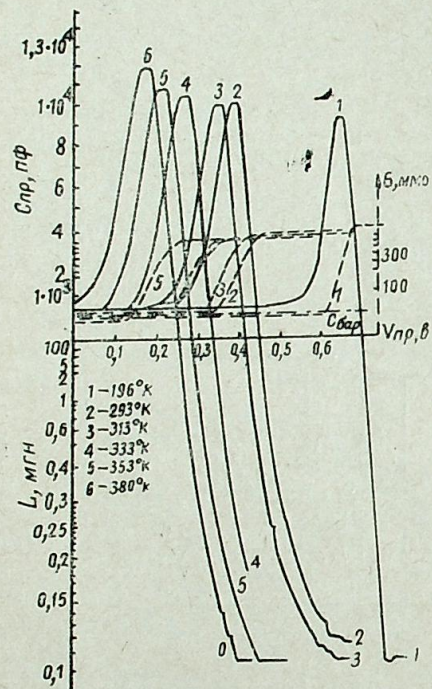


Рис. 5. Зависимость емкости C и эквивалентной параллельной проводимости G диффузионных кремниевых диодов от прямого смещения при 100 кГц и различных температурах.

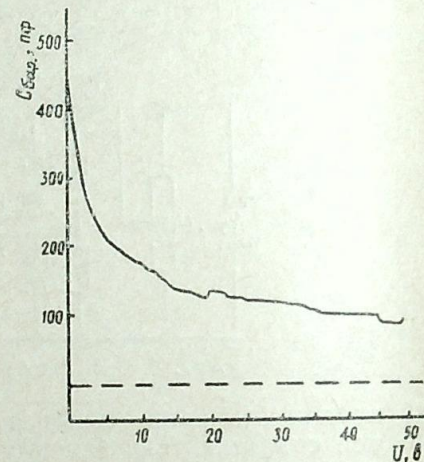


Рис. 6. Зависимость барьерной емкости от обратного напряжения при T_K и 100 кГц.

представлена на рис. 4. Ползунок регулируемого проволочного потенциометра R_1 вращается при помощи мотора, который меняет направление вращения при подходе ползунка потенциометра до одного из крайних положений. Переключатели P_1-P_4 в положении 1 позволяют подавать смещение на диод в прямом, а в положении 2 в обратном направлении.

Для проведения измерений и автоматической записи $C(U)$ и $G(U)$ прибор необходимо градуировать. Градуировка системы производится методом прямого замещения, для чего вместо диода включается градуировочный магазин емкостей и сопротивлений. Регулируя коэффициент усиления усилителя 6 (рис. 2) и ФД, можно измерять величину емкости в широких пределах. При максимальном коэффициенте усиления усилителя 6 (рис. 2) цена деления по оси U само-

писца равна $\sim 3,5$ пФ на 1 мм. Такая точность записи $C(U)$ достаточна для исследования барьерной емкости, а также для исследования $C(U)$ в тех областях смещения, где наблюдаются очень резкие изменения емкости. Оптимальный режим записи полной кривой $C(U)$ соответствует цене деления ~ 50 пФ на 1 мм.

Калибровка горизонтальной оси самописца: 0,38 в на 1 мм и 5,5 мВ на 1 мм в обратном и прямом направлениях, соответственно. Точность измерения совпадает с ценой деления, так что при изменении прямого смещения в интервале 0—700 мВ ошибка установления $U_{пр}$ составляет $\pm 5-6$ мВ, а при обратном смещении — $\pm (0,4 \div 0,5)$ в. Точность измерения емкости составляет $10 \div 15$ пФ при измерении емкостей порядка $500 \div 600$ пФ и ~ 100 пФ при измерении емкостей 10^4 пФ.

Относительно точности измерения активной составляющей полного сопротивления можно сказать, что она различна для разных интервалов; градуировка вертикальной оси самописца при измерении G нелинейна, участок значений проводимости $5 \cdot 10^{-3}$ мО — $1 \cdot 10^{-2}$ мО соответствует на диаграммной ленте отрезку в 52 мм, а изменение активной проводимости в интервале $(2,5-3,3) \cdot 10^{-3}$ мО — отрезку в 5 мм.

На рис. 5 представлены кривые непрерывной автоматической записи емкости и индуктивности от прямого смещения $C, L(U_{пр})$, а также проводимости $G(U_{пр})$ (пунктирные линии) при 100 кГц и различных температурах, а зависимость барьерной емкости от смещения при комнатной температуре и частоте 100 кГц — на рис. 6. Сравнение кривых на рис. 5 и рис. 3 [6] показывает, что наблюдается качественное согласие. Видно резкое изменение емкости до 0 при средних прямых смещениях и переход ее в индуктивность (на рис. 3 [6] вторая половина кривых, соответствующая индуктивному характеру реактивности, искусственно перенесена в верхнюю полуплоскость). С увеличением температуры напряжение инверсии смещается в сторону меньших $U_{пр}$. Однако пока нет точного количественного совпадения в величине $U_{инв}$, наблюдаемое отклонение, вероятно, связано со смещением нуля самописца при неоднократном механическом перемещении пера, а также с неточностью установления нулевого сдвига фаз ФД. Работа по наладке и усовершенствованию прибора продолжается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахундов Г. А., Джафарова Э. А., Искендер-заде З. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия ФТМН“, 1963, № 5.
2. Абдуллаев Г. Б., Искендер-заде З. А., Джафарова Э. А. „Радиотехника и электроника“, т. 10, 1965, № 4.
3. Абдуллаев Г. Б. и др. Solid State Electronics, 1968, 11, № 2, 233.
4. Джафарова Э. А. Канд. дисс., Баку, 1967.
5. Шевчин И., Ваксман А. Приборы для научных исследований, 1966, 37, 9, 1195—1201.
6. Абдуллаев Г. Б., Ахундов М. Р., Бадалов А. З., Джафарова Э. А., Дохман С. А., Искендер-заде З. А., Челноков В. Е. Сб. „Полупроводниковые элементы в приборостроении“. ОНТИ прибор, М., 1966. Институт физики АН Азерб. ССР Поступило 16. XII 1969

Н. Б. Абдуллаев, З. Э. Искендерзаде, М. Р. Ахундов,
В. Н. Качурин, Ф. И. Плиев, Е. Э. Чэфарова, Ш. Э. Элиханова

Ярымкечиричи диодларда актив вэ реактив
кечиричилијин кэркинликдэн асылылығыны
автоматик јазмаг үчүн чиһаз

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә тутумун вэ кечиричилијин кэркинликдэн асылылығыны јазмаг үчүн тәклиф олунан чиһазын ишләмә принципи вэ електрик схеми верилмишдир. Ејни заманда, чиһаз васитәсилә јазылан $C(U)$ вэ $G(U)$ әјриләри кәстәрилмишдир.

М. И. ШАХТАХТИНСКАЯ, Д. С. ТОМТИЕВ, А. А. МУСАЕВ,
М. Г. ШАХТАХТИНСКИЙ

О ВЫРАЩИВАНИИ МОНОКРИСТАЛЛОВ СИСТЕМ СО ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ СЕГРЕГАЦИЕЙ КОМПОНЕНТОВ, ИСПАРЯЮЩИХСЯ ПРИ ПЛАВЛЕНИИ

Значительные успехи в решении проблемы получения монокристаллов многокомпонентных систем связаны с последовательным учетом физико-химических особенностей процессов кристаллизации. В частности, именно благодаря этому, разработаны методы получения монокристаллов сильноиспаряющихся материалов, основанные на поддержании равновесного (или близкого к равновесному) давления пара летучего компонента над кристаллизующимся из расплава веществом. Другим не менее важным моментом кристаллизации из расплава является сегрегация компонентов, играющая решающую роль в получении однородных материалов и их планомерном легировании. Наиболее существенную роль играют сегрегационные явления при получении монокристаллов систем, представляющих собой твердые растворы. Для таких систем в результате сегрегации при кристаллизации может возникнуть не только неравномерное распределение компонентов, но и нарушение монокристалличности, вызываемое концентрационным переохлаждением. Для преодоления трудностей, связанных с этими явлениями, также разработан ряд методов, основанных на компенсации изменения состава расплава и специальных температурных режимах роста кристалла.

Наибольшие затруднения возникают при выращивании монокристаллов систем, как значительно испаряющихся при плавлении, так и обладающих сегрегацией компонентов при кристаллизации из расплава. В данной работе, на основе анализа условий роста из расплава монокристаллов указанных систем, впервые разработана установка для вытягивания с подпиткой расплава монокристаллов легкоиспаряющихся веществ.

Как известно, при росте монокристаллов из расплава систем, обладающих заметно отличающимся от единицы коэффициентом сегрегации, у фронта кристаллизации возникает слой расплава, обогащенный одним из компонентов. Это приводит к появлению переохлаждения (называемого „концентрационным“), которое, в свою очередь, является причиной возникновения микронеоднородностей и, в конечном счете, нарушения монокристалличности.

Для предотвращения этого явления необходимо, чтобы градиент температуры в расплаве у фронта кристаллизации отвечал соотноше-

$$G \geq \frac{VmC_0(1-K)}{KD}, \quad (1)$$

где V — скорость выращивания кристалла,
 m — наклон линии ликвидуса,
 C_0 — исходная концентрация примеси в расплаве,
 K — коэффициент распределения,
 D — коэффициент диффузии второго компонента в расплаве,

$$\text{или} \quad G \geq \frac{V\Delta T}{D}, \quad (2) \quad [2]$$

здесь ΔT — разность температуры ликвидуса и солидуса при заданной концентрации.

В данном случае предполагается, что перемешивание в расплаве происходит только за счет диффузии компонентов. Из соотношения (2) видно, что при известной скорости диффузии и ΔT градиент температуры в расплаве должен определяться лишь скоростью выращивания. В случае применения зонного выравнивания или направленной кристаллизации для предотвращения концентрационного переохлаждения таких, например, систем, как Bi—Sb, приходится либо повышать градиент температуры (иногда до 100 град/см), либо сильно снизить скорость кристаллизации (до 0,1 мм/час и меньше). Предпочтительнее оказывается второе, так как из теории кристаллизации следует, что наиболее совершенные кристаллы растут при минимальных градиентах температуры у фронта кристаллизации. Для уменьшения градиента температур обычно применяется дополнительный нагрев всего подвешиваемого зонной перекристаллизации слитка.

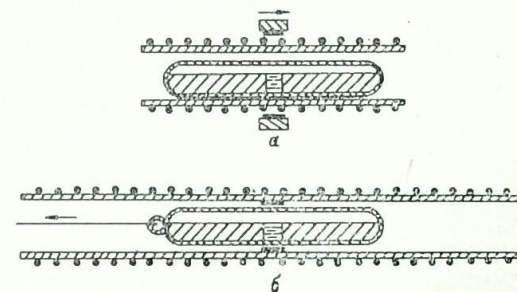


Рис. 1. Варианты схем зонной перекристаллизации с дополнительным прогревом ампулы.

Практическое осуществление такого прогрева связано либо с применением обычной установки зонной плавки с перемещающимся нагревателем и дополнительным неподвижным, внутри которого находится ампула с кристаллизующимся веществом (рис. 1, а), либо с применением двухзонного нагревателя, через который протягивается та же ампула (рис. 1, б). В первом случае неподвижная ампула позволяет легко добиться практически полного устранения влияния на процесс кристаллизации вибрации и механических перемещений расплавленной зоны, неизбежно сопутствующих движению ампулы. В то же время недостатком такой конструкции является трудность поддержания постоянства температуры в относительно длинном неподвижном нагревателе, что, в свою очередь, является причиной некоторого изменения температуры в расплавленной зоне по мере ее перемещения вдоль слитка.

В случае б отсутствие перемещения нагревателей создает наиболее благоприятные температурные условия, но при этом возникают трудности в сохранении полной механической неподвижности расплава. Последнее особенно важно при указанных выше малых скоростях роста.

Эксперименты показывают, однако, что в обоих случаях можно добиться результатов, практически зависящих лишь от возможности длительного (порядка месяцев) поддержания неизменных температурных режимов роста кристалла. Кроме того, дополнительный прогрев ампулы позволяет устранить конденсацию летучего компонента кристаллизующегося расплава и таким образом выращивать монокристаллы твердых растворов с летучими компонентами.

Наиболее существенным недостатком зонного выравнивания для сплавов полуметаллов УВ группы является необходимость применения чрезвычайно низких скоростей роста, вызываемая замедленностью диффузионного выравнивания состава расплава. Значительным преимуществом в этом отношении обладает метод вытягивания из расплава, при применении которого происходит дополнительное размешивание расплава за счет вращения затравки. Кроме того, при вытягивании из расплава выравнивается температура у фронта кристаллизации и исключается влияние стенок контейнера на рост кристалла. Наиболее благоприятными условиями для роста кристалла в смысле однородности состава и температурных режимов обладает метод вытягивания с подпиткой расплава (в частности с твердой подпиткой). Описываемая ниже установка, обладая всеми перечисленными преимуществами, позволяет также преодолеть затруднения, связанные с испарением расплава.

В основу разработанной установки положен принцип выращивания монокристаллов в ограниченном рабочем объеме над расплавом и с прогревом стенок контейнера во избежание конденсации испаряющегося компонента. Вытягивание производится в кварцевом цилиндре (1), служащем одновременно тиглем для расплавления материала (рис. 2). Цилиндр (1) вакуумно уплотняется в стакане (2), который снабжен вакуумным краном для откачки рабочего объема. Вращающийся водоохлаждаемый шток затравкодержателя (3) и поступательный шток подпитки (4) проходят в рабочий объем через уплотнение (5) в стакане (2), представляющее собой ряд чередующихся металлических и резиновых шайб. Дополнительная центровка штоков происходит благодаря их прохождению через отверстия металлического цилиндра (6), плотно входящего в кварцевый цилиндр (1) и образующего с ним диффузионный затвор, назначение которого будет описано ниже.

Стакан (2) вместе с кварцевым цилиндром крепится на траверсе (7), соединяющейся с неподвижными цилиндрическими стойками (8). Во избежание вибраций стол (9) со стойками (8) и двигателя для вращения затравки (10) и поступательного движения затравки и подпитки (11) крепятся раздельно на капитальной стене. Вращательное движение от двигателя (10) передается штоку затравки (3) через червячный редуктор (12) с вращающимся холодильником (13), служащим для охлаждения штока затравкодержателя проточной водой.

Узел вращения затравки крепится на траверсе (14), которая может перемещаться по стойкам (8). Поступательное движение траверсы (14) передается через жесткие тяги (15), связанные с нижней траверсой (16), на которой крепится накидная гайка, приводимая в зацепление с ходовым винтом (17) с помощью специального рычага. Ходовой винт (17) приводится во вращательное движение двухступенчатым червячным редуктором (18). Для быстрого опускания затравки до затравления растущего кристалла и последующего медлен-

ного подъема предусмотрено дискретное изменение скорости от 2 мм/час до 6 см/мин.

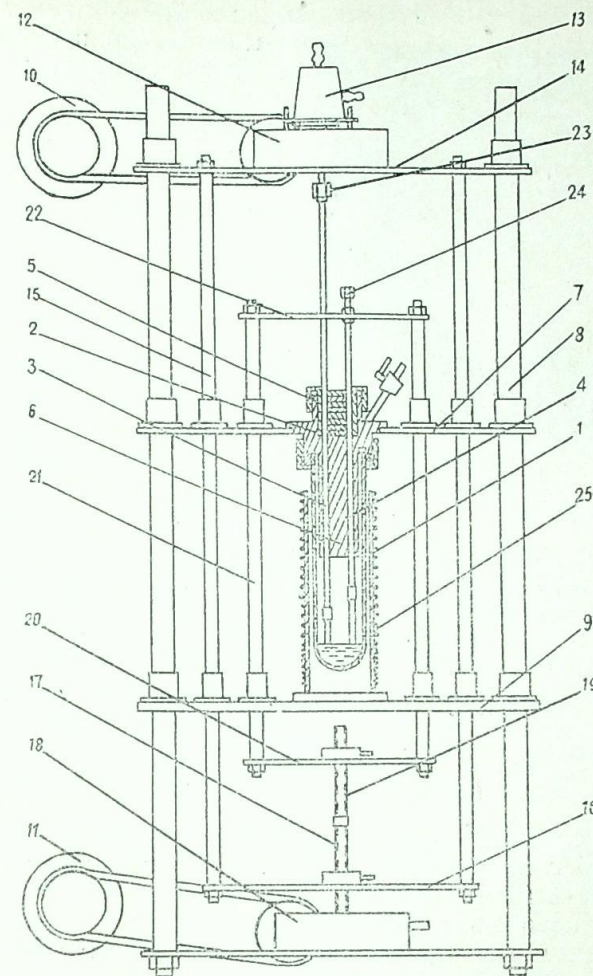


Рис. 2. Схема установки для вытягивания монокристаллов легконспаряющихся веществ с подпиткой расплава.

Поскольку наиболее выгодный режим вытягивания монокристаллов с подпиткой осуществляется при поддержании одинаковых диаметров растущего кристалла и подпитывающего слитка, необходимо равенство скоростей роста кристалла и опускания подпитывающего слитка. В данной установке это достигается благодаря жесткой связи ходовых винтов подъема кристалла (17) и опусканию подпитывающего слитка (19). Для того, чтобы при подъеме штока затравкодержателя шток подпитки опускался, ходовой винт последней (19) выполнен с левой резьбой.

Аналогично механизму подъема затравки движение к подпитывающему слитку передается через траверсу (20) с разъемной гайкой, жесткие тяги (21) и траверсу (22), на которой крепится шток подпитки (4). Благодаря разьему (23) на штоке затравки (3) и легкому разъединению штока подпитки (4) с траверсой (22) камера вытягивания со стаканом (2) легко отделяется от установки для заполнения материалом и укрепления затравки и подпитывающего слитка. После уплотнения кварцевого цилиндра (1) в стакане (2) его внутренний

объем эвакуируется через кран и заполняется инертным газом. Промывку внутреннего объема газом легко осуществлять благодаря возможности его подачи в нижнюю часть рабочей камеры через полный шток подпитки (4), имеющий отверстие у держателя слитка. После промывки шток подпитки герметизируется пробкой (24). Расплавление материала и прогрев стенок кварцевого цилиндра осуществляются двухсекционной печью (25), имеющей два окна для визуального наблюдения за ростом кристалла и освещения.

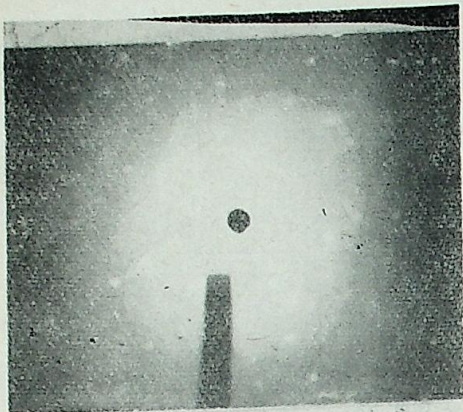


Рис. 3. Луэграмма монокристалла $\text{Bi}_{75}\text{Sb}_{25}\text{As}_3$

Конденсация вещества в области уплотнений, находящихся при комнатной температуре, предотвращается наличием внутреннего металлического цилиндра (6), нагреваемого вместе со стенками кварцевой камеры. В малом зазоре между металлическим (6) и кварцевым (1) цилиндрами перенос испаряющегося вещества в среде инертного газа не может происходить конвекционным путем, а скорость переноса диффузией мала. Это приближает условия выращивания кристаллов на данной установке к условиям выращивания их в замкнутом объеме.

На описываемой установке выращивались монокристаллы твердых растворов Bi-Sb , Sb-As и Bi-Sb-As . (Как показали наши исследования, о которых будет сообщено отдельно, растворимость мышьяка в сплавах Bi-Sb повышается по мере увеличения содержания сурьмы.

Проверка степени монокристалличности выращенных кристаллов проводилась по сколам производимым по плоскостям спайности, микрошлифам и лауэграммам. В качестве примера на рис. 3 представлена лауэграмма одного из кристаллов твердых растворов Bi-Sb-As . Подробные сведения о характеристиках выращенных кристаллов будут приведены в отдельной публикации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльбаум К. Успехи физики металлов, т. 5. Металлургиздат, 1963.
2. Brown D. M. and Neumann F. K. J. Appl. Phys. 35, 6, 1964.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 16. XII 1969

М. И. Шахтахтинская, Ч. С. Томтиев,
А. А. Мусаев, М. Г. Шахтахтинский

Сегрегасија едэн вэ эридикдэ бухарланан
системлэрин монокристалларынын көјәрдилмэси
наггында

ХУЛАСЭ

Тэдгигатларда компонентлэри сегрегасија едэн вэ эријэркэн бухарланан системлэрин кристаллашма шэрантинин тэһилили нэтичэлэринэ эсасланараг гурғу назырланмышдыр. Бу гурғу бэрк гидуаландырычдан истифадэ едэрэк, кичик ишчи һэчминдэ эринтидэн монокристал көјэртмэјэ имкан верир.

Г. Х. АЖДАРОВ, В. И. ТАГИРОВ, Б. С. АЛИЕВА, С. И. ТАИРОВ,
М. Г. ШАХТАХТИНСКИЙ

ТЕРМИЧЕСКИЕ АКЦЕПТОРЫ В СПЛАВАХ ГЕРМАНИЯ С КРЕМНИЕМ

Влияние различных примесей на электрические свойства сплавов Ge-Si и идентификация их энергетических уровней изучены пока очень мало. Неотъемлемой частью подобных исследований является введение примесей в чистый материал. Как известно, легирование осуществляется двумя методами: 1) в процессе роста кристалла и 2) диффузионным отжигом. Первый метод применяется главным образом в таком случае, когда примесь имеет значительную растворимость и коэффициент распределения ее не слишком мал (порядка $10^{-2} - 10^{-3}$). Второй метод практически применяется только в случае, если коэффициент диффузии примеси в твердом состоянии не слишком маленький (порядка $10^{-9} - 10^{-7} \text{ см}^2/\text{сек}$ или больше).

В сплавах германия с кремнием примеси Ag , Au , Fe , Co , Ni обладают малой растворимостью ($\sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$) и малым значением коэффициента распределения ($\sim 10^{-6}$), что чрезвычайно затрудняет введение их в кристалл в процессе роста в количестве, превышающем концентрацию посторонних примесей. Зато большая скорость диффузии дает возможность легировать сплавы германий-кремний упомянутыми элементами методом диффузии. При этом необходимо заранее знать влияние термического отжига на электрические свойства кристаллов. Подобные эксперименты ранее проводились для германия и кремния [1—19]. Однако результаты их крайне противоречивы. Кроме того, введение кремния в германий деформирует решетку кристалла и нельзя гарантировать, что полученные для чистых компонентов результаты будут справедливы также для их твердых растворов. Поэтому целью настоящей работы являлось изучение влияния термического отжига на электрические свойства сплавов германия с кремнием, выявление природы термических акцепторов и по возможности устранение их появления.

Образцы в виде прямоугольного параллелепипеда размером $10 \times 2 \times 1 \text{ мм}^3$, вырезанные из монокристаллических слитков, выращенных вытягиванием из расплава [20], после механической обработки и химического травления подвергались изотермическому отжигу в эвакуированных до вакуума 10^{-3} мм Hg кварцевых ампулах. Отжиг производился при 850°C в течение 30—50 часов. После отжига образцы резко охлаждали, опуская ампулы с содержимым в проточную воду. Выбор указанной температуры обусловлен тем, что эле-

Таблица 1

Результаты термического отжига в вакууме для сплава, содержащего 10 ат. % кремния, после соответствующей обработки поверхностей кристаллов и ампулы

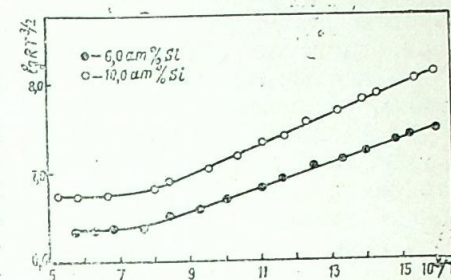
№ п/п	Обработка поверхностей кристаллов	Обработка кварцевой ампулы	Время отжига, час	Тип проводимости до отжига	Концентрация носителей тока до отжига, $\times 10^{-15} \text{ см}^{-3}$	Тип проводимости после отжига	Концентрация носителей тока после отжига, $\times 10^{-15} \text{ см}^{-3}$	Концентрация добавочных акцепторов, $\times 10^{-15} \text{ см}^{-3}$
1	Травление в 30% H_2O_2 , промывание дист. водой	В H_2SO_4 , HNO_3 и промывание дист. водой	50	n	1,5	p	1,6	3,1
2	"	"	"	n	1,51	p	1,9	3,4
3	Травление в HNO_3 , промывание дист. водой	В HNO_3 , промывание дист. водой	30	n	1,2	p	0,8	2,0
4	"	"	"	n	1,4	p	1,1	2,5
5	Травление в 30% H_2O_2 , промывание дист. водой	В HNO_3 , промывание дист. водой	"	n	2,0	p	0,5	2,5
6	"	"	"	n	1,4	p	1,0	2,4
7	Травление в $\text{HF}:\text{HNO}_3:\text{H}_2\text{O}=4:1:1$ промывание дист. водой	В HF , промывание дист. водой	"	n	1,0	p	1,1	2,1
8	"	"	"	n	1,1	p	0,8	1,9
9	Травление в 30% H_2O_2 , затем в $\text{HF}:\text{HNO}_3:\text{H}_2\text{O}=4:1:1$, промывание спиртом	В HF , промывание спиртом	"	n	1,2	p	0,5	1,7
10	"	"	"	n	1,0	p	0,9	1,9

менты с малой растворимостью Fe, Ni, Ag, Co имеют максимальную растворимость в германии при температуре, близкой к 850°C .

После отжига с целью удаления возможных загрязнений с поверхности образцы снова травили, а затем определяли их электропроводность и коэффициент Холла, по которому вычисляли концентрацию носителей тока. Сравнение результатов электрических измерений до и после отжига показало, что вследствие термического отжига в сплавах германия с кремнием возникают дополнительные акцепторы, возникновение которых может быть связано либо с появлением структурных дефектов в решетке кристалла, либо с проникновением чужеродных атомов внутрь образцов через их поверхности. В

табл. 1, приведены результаты термического отжига после соответствующей обработки поверхностей кристаллов и ампулы для сплава содержащего 10 ат. % кремния.

Из табл. 1 видно, что концентрация добавочных акцепторов больше в случае большего времени отжига. Поскольку концентрация добавочных акцепторов зависит от длительности отжига, то они не могут быть связаны с появлением структурных дефектов. Если это примесь с малым коэффициентом диффузии, то в поперечном сечении образцов должен быть градиент концентрации, а следовательно при снятии слоев с поверхностей можно наблюдать изменение концентрации носителей тока. Однако такого изменения мы не наблюдали. Остаются только быстродиффундирующие примеси, из которых наиболее вероятной является медь. Для проверки этого предположения были исследованы температурные зависимости коэффициента Холла кристаллов с "термическими" акцепторами. На рисунке для примера показаны зависимости $\lg(RT^{3/2})$ от $\frac{1000}{T}$ для двух образцов, содержащих 6 и 10 ат. % кремния (R —коэффициент Холла, T —абсолютная температура). Вычисленные из наклонов прямых (рис.) значения энергии активации 0,054 и 0,066 эв совпадают с глубиной залегания первого акцепторного уровня меди в сплавах германий—кремний, содержащих 6 и 10 ат. % кремния, соответственно [21].



Зависимость $\lg(RT^{3/2})$ от $\frac{1000}{T}$ для сплавов германий—кремний, содержащих 6 и 10 ат. % кремния, подвергнутых термическому отжигу при 850°C .

Таблица 2
Результаты термического отжига сплавов германия с кремнием в графитовом окружении в вакууме

№ п/п	ат. % кремния в сплаве	Время отжига, час	Тип проводимости до отжига	Концентрация носителей тока до отжига, $\times 10^{-15} \text{ см}^{-3}$	Тип проводимости после отжига	Концентрация носителей тока после отжига, $\times 10^{-15} \text{ см}^{-3}$	Обработка образцов	Обработка кварцевой ампулы и графитовой пробирки
1	6	30	n	1,3	n	1,3	Травление в смеси $\text{HF}:\text{HNO}_3:\text{H}_2\text{O}=4:1:1$ промывание спиртом	Ампула обрабатывалась в HF , графитовая пробирка выдерживалась в HNO_3 в течение 30 мин затем промывка спиртом
2	6	30	n	1,1	n	1,1		
3	6	30	n	1,7	n	1,6		
4	10	30	n	1,4	n	1,4		
5	10	30	n	1,3	n	1,3		
6	10	30	p	2,6	p	2,6		
7	15	30	n	1,1	n	1,0		
8	15	30	p	2,1	p	2,1		
9	15	30	n	1,5	n	1,5		
10	10	30	n	1,5	n	0,5	Травление в смеси $\text{HF}:\text{HNO}_3:\text{H}_2\text{O}=4:1:1$ и промывание спиртом	Ампула промывалась в HF , графитовая пробирка ничем не обрабатывалась
11	10	30	n	1,1	p	0,1		
12	6	30	n	1,4	n	0,5		
13	6	30	n	1,0	p	0,3		
14	15	30	n	1,2	n	0,1		
15	15	30	n	1,5	n	0,5		

Данные табл. 1 показывают, что при одной и той же длительности отжига концентрация добавочных акцепторов в пределах 25% остается постоянной, независимо от способа обработки поверхности кристалла и кварцевой ампулы. Значит медь входит в образцы не вследствие загрязнения поверхности образца и стенки кварца, а в результате диффузии из объема кварца в кристалл через поверхности соприкосновения. Для предотвращения нежелательного проникновения меди в сплавы германий—кремний при термическом отжиге образцы вставлялись в пробирку из спектрально чистого графита с толщиной стенок 2,5 мм, которую затем помещали в кварцевую ампулу. После вакуумирования ампулу отпайвали. До этого образцы, графитовую пробирку и ампулу травили в смеси $\text{HF}:\text{HNO}_3:\text{H}_2\text{O} = 4:1:1$ и промывали спиртом.

В табл. 2 представлены результаты отжига кристаллов после обеспечения графитового окружения. Как показывают данные после изолирования образцов от кварца графитовым слоем термический отжиг не изменяет концентрации носителей тока, если графитовая пробирка обрабатывается в азотной кислоте. Изменение концентрации носителей тока при отжиге в необработанной в HNO_3 графитовой пробирке связано с загрязнением при механической обработке или наличием в самом графите ничтожного количества примеси меди.

ЛИТЕРАТУРА

1. Seiler K., Geist D., Keller K., Blank K., *Naturwissenschaften*, 40, 56, 1953.
2. Esaki L., *Phys. Rev.* **89**, 1026, 1953.
3. Penning P., Wieringen A., *Philips Res Repts*, **8**, 241, 1953.
4. Mayburg S., Rotondi L., *Phys. Rev.*, **91**, 1015, 1953.
5. Hodgkinson R. I., *G. E. C. Journal*, **21**, 63, 1954.
6. Hodgkinson R. I., *Physica*, **20**, 1001, 1954.
7. Hodgkinson R. I., *Philos. Mag.*, **46**, 410, 1955.
8. Mauburg S., *Phys. Rev.*, **95**, 838, 1954.
9. Остробородова В. В., Калашников С. Г., „Ж. техн. физики“, 25, 1163, 1955.
10. Trousil Z., *Cékosl. casop. fis.*, **5**, 192, 1955.
11. Hopkins R. L., Clarke E. N., *Phys. Rev.*, **100**, 1786, 1955.
12. Logan R. A., *Phys. Rev.*, **101**, 1455, 1956.
13. Жидков В. А., Лашкарев В. Е., „Изв. АН СССР, серия физ.“, **20**, 1521, 1956.
14. Domenicali C. A., Li C. H., Nomura K. C., Stevenson A., *Acta metallurgica* **5**, 120, 1957.
15. Мацукура, Судзуки, Дэнки Сикэнсё ихо, *Bull. Electrotechn. Lab.*, **20**, 751, 789, 1956; Р. Ж. Ф. № 10, 1957, 25783.
16. Жидков В. А., Лашкарев В. Е., „Ж. техн. физики“ **27**, 877, 1957.
17. Kikuchi M. S., *Jizima*, **21**, 902, 949, 1957.
18. Fyller C. S., Logan R. A., *J. Appl. Phys.*, **28**, 1427, 1957.
19. Гиваргизов Е. И., Покровский Я. Е., „Ж. техн. физ.“, **28**, 974, 1958.
20. Таиров С. И., Тагиров В. И., Шахтагинский М. Г., Вигдорovich В. Н., Кулиев А. А., „ДАН СССР, серия химия“, **176**, 851, 1967.
21. Алиева Б. С., Тагиров В. И., Таиров С. И., Кулиев А. А., Шахтагинский М. Г., „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1962, № 3.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 13. II 1970

Б. Х. Эждаров, В. И. Таиров, Б. С. Алиева,
С. И. Таиров, М. Н. Шахтагинский

Германий-силиций барк мөлүлларында термик акцепторлар

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда термик ишләмәнин германий-силиций барк мөлүлларынын електрик хассәләринә тәсири өйрәнилмишдир. Нүмунәләр 10^{-3} мм Hg вакуум шәраитиндә 850°C температурда 30—50 саат гыздырылдыгдан сонра ичәрисиндә нүмунә олан ампула ахар суја салынмагла кәскин сојудулмушдур. Отаг температурунда апарылан електрик өлчмәләри кәстәрмишдир ки, бу заман нүмунәләрдә әләвә акцептор мәркәзләр јараныр. Тәдгигат нәтичәсиндә мүәјјән едилмишдир ки, бу акцептор мәркәзләр нүмунәјә мис ашгарынын диффузијасы нәтичәсиндә јараныр. Ејни заманда, термик ишләмәнин һансы шәраитдә кристалын јүкдашыјычылары сајыны дәјишмәдији кәстәрилмишдир.

А. А. АБДУРАХМАНОВ, М. Н. ЕЛЧИЕВ, Л. М. ИМАНОВ

МИКРОВОЛНОВЫЙ СПЕКТР ТРАНС-ФОРМЫ МОЛЕКУЛЫ $(\text{CH}_3)_2\text{CHOH}$

Конформационный анализ молекулы изопропилового спирта, произведенный по методу Скотта и Шерага, указал на возможность существования трех „устойчивых“ конфигураций, обусловленных поворотом гидроксила вокруг оси С—О. Одна из них соответствует транс-форме, имеющей плоскость симметрии; две другие—энергетически равноценные конформации—гош-формам, образуемым поворотом гидроксила от плоскости симметрии.

В связи с тем, что в молекуле изопропилового спирта изомерные формы различаются ориентацией только легкого атома водорода гидроксила относительно более тяжелого каркаса, отличия во вращательных постоянных для транс и гош конфигураций незначительны, т. е. линии, соответствующие однотипным переходам, как показал расчет, будут располагаться в одной и той же области частот. Такая картина вообще характерна для молекул с положительным параметром асимметрии, к которым и относится молекула изопропилового спирта. Это обстоятельство создавало дополнительные трудности при расшифровке спектра. Картина усложнялась еще и тем, что параметры спектров высших состояний, возбуждаемых различного рода колебаниями, как правило, незначительно отличаются от соответствующих значений основного состояния, в связи с чем повышалась вероятность возможной ошибки при интерпретации идентифицированного спектра. Все это требовало особого внимания и осторожности, что

Таблица 1

Идентифицированные переходы молекулы $(\text{CH}_3)_2\text{CHOH}$ в транс-форме

Переход	Частота, мГц		Переход	Частота, мГц	
	измерено	вычислено		измерено	вычислено
$4_{11}-4_{23}$	24428.8	24430.9	$3_{13}-3_{21}$	26713.5	26713.6
$5_{24}-5_{33}$	24401.1	24403.9	$4_{23}-4_{31}$	25991.6	25991.0
$6_{34}-6_{43}$	24375.7	24377.8	$5_{33}-5_{11}$	25211.0	25209.7
$7_{44}-7_{53}$	24367.2	24370.3	$6_{43}-6_{51}$	24454.6	24452.9
$8_{54}-8_{63}$	24405.2	24409.3			
$9_{64}-9_{73}$	24522.4	24526.7			
$10_{74}-10_{83}$	24759.2	24765.1			

Таблица 2

Частоты (мГц) и интенсивности линии молекулы $(\text{CH}_3)_2\text{CHOH}$ в диапазоне частот 20000—31500 мГц

Частота	интенсивность	Частота	интенсивность	Частота	интенсивность
1	2	3	4	5	6
20014	слабая	21418	„	22299.0	„
20029.2	средняя	21440	„	22320.0	сильная
20056	слабая	21470	„	22328	слабая
20072	„	21486.3	средняя	22340	сильная
20106	„	21492.4	слабая	22348	слабая
20110	„	21498.1	„	22360	„
20150	„	21540	„	22362	средняя
20164	„	21542	„	22397.8	сильная
20212	„	21548	„	22410	средняя
20308.3	средняя	21580	„	22422	слабая
20334.0	„	21585	„	22448	средняя
20346.8	слабая	21592	средняя	22462	„
20378.6	„	21609.6	сильная	22472	„
20400	„	21631.9	средняя	22545	„
20424	„	21647.4	сильная	22591.6	„
20438.7	средняя	21658.4	слабая	22605.0	слабая
20458.4	сильная	21693.6	средняя	22615.4	средняя
20482	слабая	21736	слабая	22525.9	слабая
20490	„	21740.5	сильная	22629.1	„
20500	„	21755.0	слабая	22631.1	„
20502.8	„	21762.0	„	22661.0	„
20512.4	„	21767.5	„	22670.5	„
20520	„	21768.5	сильная	22675.2	средняя
20536	„	21777.4	слабая	22683	слабая
20552	„	21786.3	„	22691.5	средняя
20558	„	21830	средняя	22694.4	„
20615.8	сильная	21860	„	22760	средняя
20631.8	„	21878	„	22762	„
20691.6	„	21890	„	22784.6	„
20720	слабая	21906.7	слабая	22798	„
20786	„	21911.0	„	22822	средняя
20825	„	21927.2	средняя	22834	сильная
20838	„	21948	„	22866.6	„
20840	„	21957	„	22896.2	средняя
20858	„	21964	„	22905	„
20871	сильная	21967	слабая	22907	средняя
20880	слабая	21968	„	22911	сильная
20903	„	21988.1	„	22920	слабая
20911	„	21997.0	„	22928.0	„
20931	„	22000	„	22944	„
20960	„	22044	„	22960	средняя
20986.5	сильная	22060	„	22970	„
20992.5	слабая	22080	„	22974	„
20997.2	„	22084	„	22981.3	сильная
21056	„	22100	„	22982.2	слабая
21110	„	22110	„	23010	„
21113	„	22127.0	„	23013	средняя
21124	„	22131.4	„	23024	слабая
21153	„	22136	„	23045.0	средняя
21172	„	22140	„	23047.8	сильная
21177	„	22144	„	23052.5	слабая
21180	„	22157.9	средняя	23056.3	средняя
21218	„	22192.8	„	23080	слабая
21224	„	22202	слабая	23096	сильная
21272	средняя	22212	„	23113	„
21274	„	22231.4	сильная	23119	слабая
21307.6	„	22235.3	средняя	23132	„
21322	слабая	22236.2	сильная	23135	„
21331.0	„	22253.2	средняя	23140	„
21380	„	22295.2	слабая	23143	„
21400	„	22294.8	„	23156	„

1	2	3	4	5	6
23166.0	сильная	24077.7	"	25198	слабая
23177.8	слабая	24082.8	"	25211.0	"
23201.4	средняя	24083.2	"	25218	средняя
23209.5	"	24092.8	средняя	25223	слабая
23214.2	сильная	24176.0	"	25269	"
23217.8	сильная	24333.3	"	25275	"
23226.7	средняя	24359.3	"	25312	средняя
23240	слабая	24367.2	"	25319	слабая
23242	"	24375.7	средняя	25327	"
23247	"	24401.1	слабая	25335	"
	"	24405.2	средняя	25391	"
23251	"	24414.0	средняя	25396	"
23253	"	24428.8	слабая	25414	"
23265.5	средняя	24433.0	"	25436	"
23289.9	"	24454.6	"	25448	"
23309	сильная	24491.4	"	25562	"
	слабая	24498.6	"	25642	средняя
	средняя	24499.0	"	25657	слабая
23327	"	24503.5	"	25672	"
23343	"	24511.6	средняя	25677	"
23371	"	24522.4	средняя	25695	"
23378	"	24532	"	25709	средняя
23385	слабая	24568	"	25749	слабая
23391	средняя	24583.2	"	25757	"
23393	слабая	24590.3	"	25788.6	средняя
23403.6	средняя	24606.4	"	25796.7	"
23419.6	"	24609.5	"	25792	слабая
23421	слабая	24614.6	"	25814	"
23424	"	24632	"	25818	"
23437	средняя	24643.1	средняя	25842	"
23452	слабая	24653.9	слабая	25847.0	средняя
23460.4	средняя	24665.6	"	25856.2	сильная
23472	слабая	24674	"	25889	слабая
23478.2	"	24676	"	25894	"
23488.2	сильная	24697	"	25939	"
23499.8	средняя	24700	"	25946	"
23512.3	сильная	24713.6	сильная	25956	средняя
23528	слабая	24734.7	слабая	25964	средняя
23544.3	средняя	24740	сильная	25978	слабая
23549.7	"	24743	слабая	25978	"
23557.7	сильная	24759.2	"	25991.6	"
23577	слабая	24774	сильная	26002	"
23588	сильная	24795	слабая	26008	"
	"	24800	средняя	26026.6	"
23596	слабая	24802	слабая	26072	"
23601	"	24826	"	26080	"
23633	"	24858.5	"	26152	"
23678	"	24862.9	"	26162	"
23706	"	24867.6	"	26194	средняя
	"	24871.4	"	26210	слабая
23740	"	24879.8	"	26236	"
23748	"	24882.8	средняя	26241	"
23750	"	24889	слабая	26247	"
23752	"	24926	"	26252	"
23765	"	24990	"	26286	сильная
23806	"	25003.7	средняя	26300	слабая
23810	"	25017	слабая	26304	"
23814	"	25068	"	26315	"
28883.0	"	25080	слабая	26345	"
23921.4	"	25110	"	26360	"
23949	"	25113.4	"	26508	"
23965.4	средняя	25120	"	26520	средняя
24009.8	слабая	25140	"	26532	слабая
24053.4	"	25150	"	26540	"
24055.7	средняя	25160	средняя	26546	"
24060.8	слабая	25177	слабая	26550	"
24062.4	"		"	26560	сильная
					слабая

1	2	3	4	5	6
26570	"	27530	слабая	30232.2	средняя
26575	средняя	27580	сильная	30258.3	средняя
26626	"	27588	слабая	30269.6	слабая
26636	слабая	27981.0	слабая	30277.6	средняя
26650	"	27997	слабая	30288.4	слабая
26654	"	28007.2	"	30303.2	средняя
26663	"	28020	"	30411	слабая
26673	"	28022	"	30420	"
26702.5	"	28040	"	30432	"
26713.5	"	28053	"	30439.7	"
26754	"	28078	"	30448	сильная
26757	"	28116	"	30460	"
26766	"	28135	"	30496	слабая
26774	"	28148	"	30502	"
26780	"	28192	"	30520	"
26835	сильная	28212	"	30524	"
26854	слабая	28252	"	30542	"
26870	"	28256	слабая	30558	"
26874	"	28300	"	30584	"
26880	средняя		"	30590	"
26886	"	28308	средняя	30611	сильная
26920	слабая	28336	"	30622	слабая
26923	"	28340	слабая	30640	"
26927	средняя	28360	"	30648.6	средняя
26952	"	28372	"	30676	слабая
26960	сильная	28378	"	30680	"
26970	слабая	28420	"	30689	"
26972	"	28427	"	307136	средняя
26974	"	28436	"	30784	слабая
26996	"	28454	"	30791	"
27050	"	28474	средняя	30862	"
27062	"	28482	"	30873.8	средняя
27080	"	28526	средняя	30886	слабая
27103	"	28554	"	30899.9	средняя
27143	"	28580	слабая	30907.5	"
27200	средняя	28586	"	30920.8	слабая
27208	слабая	28592	средняя	30941.0	"
27212	"	28604	"	30957.5	средняя
27240	"	28610.8	"	30962.2	слабая
27276	"	28623	"	30992	средняя
27286	средняя	28660.0	слабая	31000.8	"
27292	"	28661.9	"	31020.0	сильная
27318	слабая	28668.7	средняя	31050.1	средняя
27320	"	2868.2	слабая	31053.3	"
27330	сильная	28697	средняя	31149.8	"
27350	слабая	28704.7	сильная	31160.0	"
27356	"	28729	слабая	31185.8	"
27380	"	28742.5	сильная	31243.0	"
27387	"	28746	слабая	31282.3	"
27419	"	28770	"	31300.0	слабая
27430	сильная	29028.2	"	31303.7	средняя
27440	слабая	29473.0	"	31316.1	слабая
27465	"	29944.1	"	31336.9	средняя
27476	"	29960	"	31357	слабая
27478	"	29988	"	31401.0	средняя
27484	средняя	30005	слабая	31418.4	слабая
27500	слабая	30102.2	средняя	31422.9	"
27520	средняя	30180	"		
		30188	"		

делало вопрос идентификации спектров весьма трудоемкой задачей. Анализ экспериментально обнаруженного спектра изопропилового спирта привел к заключению, что идентификация переходов в работах (1, 2) произведена неточно.

В настоящей статье дается спектр и уточненные значения $A-C$ и χ , найденные по данным идентификации нескольких дополнительных серий Q -ветви. Исходя из значений дипольного момента вдоль связей $H-C$, $C-O$, $H-O$, полученных для этилового спирта [3] и подтвержденных в пропиловом спирте [4], рассчитывались частоты, интенсивности и штарк эффект переходов для транс-конформации.

Сопоставление рассчитанных значений с экспериментальными привело к расшифровке переходов Q^b -ветви с $J=4$ до $J=10$. Параметр, определяющий значение разности вращательных постоянных $A-C$, непосредственно получить не удалось, поскольку частота перехода $1_{01}-1_{10}$ лежит за пределами диапазона исследований. Это значение, равно как и параметр асимметрии χ , получены из графика, в котором представлены функции частот идентифицированных переходов от параметра асимметрии. По найденным значениям $A-C=3723,8$ $мгц$ и $\chi=+0,759815$ обнаружены переходы, связанные с μ_c компонентой дипольного момента с $J=3 \div 6$.

Идентифицированные переходы Q^b -и Q^c -ветвей приведены в таблице 2, в которой сопоставляются значения частот переходов, рассчитанных по значениям $A-C$ и χ , определенными из эксперимента.

Полученные результаты дают основания полагать, что обнаруженный спектр обусловлен существованием транс-изомера с гидроксилем, ориентированным в плоскости симметрии. Отсутствие в спектре переходов с перпендикулярной к плоскости симметрии компонентой дипольного момента μ_a является независимым подтверждением природы идентифицированного спектра.

В дополнение к списку линий, опубликованному в работе (1), в таблице 1 приводится спектр поглощения изопропилового спирта в диапазоне частот $20 \div 31,5$ Ггц с качественной оценкой интенсивности линий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдурахманов А. А., Елчиев М. Н., Иманов Л. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ. техн.“ 4, 1969.
2. Иманов Л. М., Абдурахманов А. А., Елчиев М. Н. Оптика и спектр, 3, 1970.
3. Абдурахманов А. А. Автореферат кандидатской диссертации, ИФАН Азерб. ССР, 1965.
4. Иманов Л. М., Абдурахманов А. А., Рагим'ова Р. А. Оптика и спектр, том. XXV, 1968.

Институт физики АН
Азерб. ССР

Поступило 26. II 1970

А. А. Абдуррахманов, М. Н. Жолчижев, Л. М. Иманов

$(CH_3)_2$ СНОН молекулу транс-формасынын
микродалгадакы спектри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә изопропил спирти молекулунун газ радиоспектроскопи-
ясы методу илә тәдгиг олунмуш удма хәтләринин $20 \div 31,5$ $кмhc$ тез-
лик диапазонунда сийаһысы верилір. Уҗунлашдырылмыш Q^b вә Q^c -
серијаларынын молекулун ОН гидроксил групунун симметрия мүстә-
висиндә јерләшмәсиндән алынган транс-изомер формасына аид олдуғу
фәрз едилір.

Т. Г. Дильбазов, А. Х. Халилов

ИССЛЕДОВАНИЕ Z-ЦЕНТРОВ ОКРАСКИ В НЕКОТОРЫХ NaCl-ФОСФОРАХ С ПРИМЕСЯМИ МЕДИ

Известно, что ионы щелочноземельных металлов, введенные в щелочно-галонидные кристаллы не только улучшают окрашиваемость кристаллов [1] путем увеличения числа локализованных электронов на пустых анионных узлах решетки, но и создают электронные центры, не принадлежащие чистой решетке. Последние, так называемые, Z-центры, впервые наблюдались Пиком [2, 3], а интерпретация их дана Зейтцем [4]. В дальнейшем исследованию Z_1 -и Z_2 -полос поглощения в щелочно-галонидных фосфорах, активированных неактивирующими двухвалентными примесями, был посвящен ряд работ [5—8]. В частности, правильность модели Зейтца, по которой Z_1 -центры окраски представляют собой двухвалентные ионы Ca^{2+} , Sr^{2+} , Ba^{2+} , захватившие электрон, подтверждена в работах [5, 6]. Согласно Зейтцу [4], Z_2 -центры окраски состоят из Z_1 -центра и присоединенной к нему пары вакансий противоположного знака.

Недавно появилась работа [7], авторы которой путем измерения температурной зависимости дихроизма аддитивно окрашенных $NaCl + Sr$ -фосфоров пришли к выводу, что Z_2 -центры окраски имеют два электрона с антипараллельными спинами. Отсутствие в литературе единого мнения о структуре Z-центров свидетельствует о необходимости дальнейших исследований оптических характеристик этих центров окраски. Кроме того, в литературе отсутствуют данные о влиянии активирующих примесей на образование Z-центров окраски в щелочно-галонидных фосфорах.

В настоящей статье приводятся результаты исследования влияния активирующих ионов меди на образование Z-центров окраски в кристаллофосфорах $NaCl + Ca$, $NaCl + Sr$, $NaCl + Ba$, рентгенизованных при комнатной температуре. Монокристаллы выращивались нами по методу Киропулоса из препарата марки „Особо чистый“. Возбуждение фосфоров производилось рентгеновской трубкой с вольфрамовым антикатодом ($U = 45$ кв, $I = 10$ ма). Спектры возбужденного поглощения измерялись на спектрофотометре СФ-4. Концентрация примесей соответствует их содержанию в шахте перед расплавлением.

В работе был применен метод определения положения полос поглощения Z_1 -и Z_2 -центров окраски в щелочно-галонидных фосфорах при комнатной температуре, путем приравнивания коэффициента при 465 $нм$, с последующим вычетом одной кривой из другой. Такой метод применялся ранее другими исследователями [8].

При всех исследованных нами концентрациях примесей Ca и Sr в фосфорах $NaCl + Ca$, $NaCl + Sr$, рентгенизованных при комнатной

температуре, образуется Z_1 -полоса. Однако из них представлена на рис. 1. Интенсивности кривых возбужденного поглощения рентгенизованного (кривая 1), облученного после рентгенизации F -светом (кривая 2), рентгенизованного после предварительного нагретого до 150°C и медленно охлажденного кристалла (кривая 3) приравнены в максимуме F -полос поглощения. Разница между кривыми 1 и 2 дает Z_1 -полосу (кривая 1'), а разница между 3 и 1 — Z_2 -полосу (кривая 2')

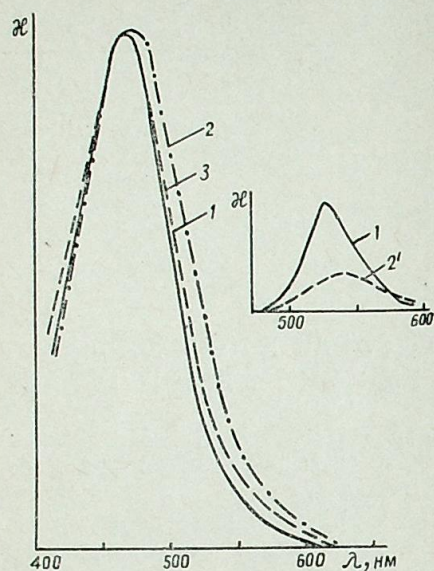


Рис. 1. Кривые возбужденного поглощения фосфора $\text{NaCl} + \text{SrCl}_2$ (1 моль %): 1—после рентгенизации; 2—после рентгенизации и облучения в F -полосе поглощения; 3—до рентгенизации предварительно нагретого до 150°C и медленно охлажденного; 1'—разность кривых 2 и 1; 2'—разность кривых 3 и 1.

(от 0,001 до 0,5 моль %). В области спектра 500—650 нм в $\text{NaCl} + \text{Cu}$ -фосфорах, рентгенизованных при комнатной температуре, полос возбужденного поглощения, аналогичных Z_1 -и Z_2 -полосам, мы не наблюдали как у закаленных от 700°C , так и у облученных в F -полосе кристаллах.

При наличии в монокристаллах NaCl одновременно двухвалентных примесей Ca , Sr , Ba и ионов меди в спектре возбужденного поглощения в области 500—650 нм наблюдаются некоторые изменения. На рис. 2 приведены разность кривых возбужденного поглощения рентгенизованных кристаллов и облученных после рентгенизации F -светом (кривая 1') и разницы кривых возбужденного поглощения рентгенизованных кристаллов и кристаллов, предварительно нагретых до рентгенизации до 150°C , а затем медленно охлаждаемых (кривая 2').

Как видно из разности кривых возбужденного поглощения (рис. 2), в спектре возбужденного поглощения облученных в F -полосе кристаллов $\text{NaCl} + \text{CuCl} + \text{CaCl}_2$ и $\text{NaCl} + \text{CuCl} + \text{SrCl}_2$ наряду с обычной Z_1 -полосой наблюдается новая полоса при 560 нм. С изменением концентрации примесей Ca , Sr и активатора Cu соотношение Z_1 -полосы и полосы с $\lambda_{\text{max}} = 560$ нм изменяется: в фосфорах $\text{NaCl} + \text{CuCl}$ (0,001 моль %) + CaCl_2 (0,1 моль %) и $\text{NaCl} + \text{CuCl}$ (0,001 моль %) + SrCl_2 (0,1 моль %) интенсивность Z_1 -полосы больше, тогда как в фосфорах $\text{NaCl} + \text{CuCl}$ (0,5 моль %) + CaCl_2 (1,0 моль %) и $\text{NaCl} + \text{CuCl}$ (0,5 моль %) + SrCl_2 (1,0 моль %) она не превышает интенсивности полосы при 560 нм (см. кривую 1' на рис. 2).

Положение полосы при 560 нм не зависит от рода примесей Ca , Sr и Ba . Если фосфоры $\text{NaCl} + \text{CuCl} + \text{CaCl}_2$, $\text{NaCl} + \text{CuCl} + \text{SrCl}_2$ нагреты до рентгенизации и медленно охлаждены, то на разностных кривых возбужденного поглощения нагретых и свежеприготовленных фосфоров в области 500—650 нм наблюдается только одна полоса, максимум которой хорошо совпадает с максимумом Z_2 -полосы поглощения, и мы считаем, что эта полоса обусловлена наличием в

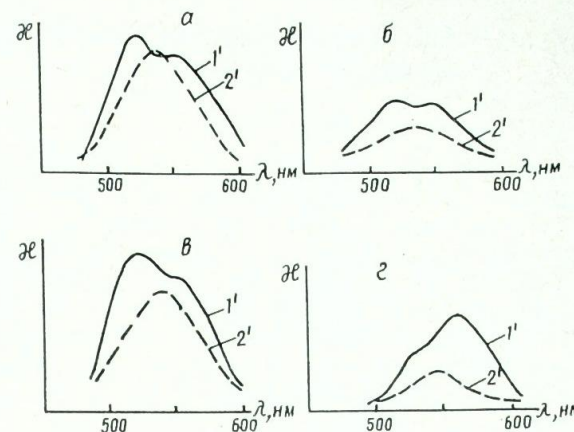


Рис. 2. Разность кривых возбужденного поглощения фосфоров $\text{NaCl} + \text{CuCl}$ (0,001) + CaCl_2 (0,1) — (а), $\text{NaCl} + \text{CuCl}$ (0,5) + CaCl_2 (1,0) — (б), $\text{NaCl} + \text{CuCl}$ (0,001) + SrCl_2 (0,1) — (в), $\text{NaCl} + \text{CuCl}$ (0,5) + SrCl_2 (1,0) — (г): 1'—свежевыращенных кристаллов и облученных после рентгенизации в F -полосе; 2'—свежевыращенных кристаллов и предварительно нагретых до рентгенизации.

фосфорах $\text{NaCl} + \text{CuCl}$ двухвалентных примесей. В фосфорах $\text{NaCl} + \text{CuCl} + \text{BaCl}_2$ тоже наблюдаются аналогичные полосы возбужденного поглощения, только с той лишь разницей, что здесь полосы Z_1 , Z_2 и 560 нм менее интенсивны. Надо отметить еще и тот факт, что Z_2 -полосы поглощения образуются более эффективно, если предварительно нагретые рентгенизованные кристаллы длительно облучались в F -полосе поглощения.

Полоса возбужденного поглощения с $\lambda_{\text{max}} = 560$ нм в фосфорах $\text{NaCl} + \text{CuCl} + \text{CaCl}_2$, $\text{NaCl} + \text{CuCl} + \text{SrCl}_2$, $\text{NaCl} + \text{CuCl} + \text{BaCl}_2$ обусловлена наличием ионов меди и двухвалентных неактивирующих примесей в решетке NaCl одновременно. Так как эта полоса образуется после F -облучения, то можно говорить о ее электронной природе. Приведенные в настоящей статье данные не позволяют определить микроструктуру этой полосы. Не исключено, что в состав центра с $\lambda_{\text{max}} = 560$ нм в фосфор $\text{NaCl} + \text{CuCl} + \text{CaCl}_2$, $\text{NaCl} + \text{CuCl} + \text{SrCl}_2$, $\text{NaCl} + \text{CuCl} + \text{BaCl}_2$, кроме двухвалентных неактивирующих примесей, входит ион активирующей примеси, ассоциированный с анионной вакансией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лушник Ч. Б. Тр. Ин-та физики и астрономии АН Эст. ССР, № 3, 3, 1955.
2. Pick H. Zs. f. Phys., 114, 127, 1939; Ann. d. Phys., 35, 73, 1939.
3. Pick H., Weber H. Zs. f. Phys., 128, 409, 1950.
4. Seitz F. Phys. rev., 83, 134, 1951.
5. Шмит О. А. Доклад на V совещ. по люминесценции, Тарту, 1956.
6. Giuliani G. J. Phys. and Chem Solids., 30, 217, 1969.

7. Gehrter G., Bock W., Lüscher F. Phys. Status. Solidi, 31, K13—K14, 1969.
 8. Зантов Ф. Н., Карт В. Я. Тр. Ин-та физики и астрономии Эст. ССР, № 6, 82, 1957.
 9. Парфианович И. А., Шуралева Е. И., Пензина Э. Э., Кронгауз В. Г. Изв. АН СССР, серия физ., 30, 581, 1966.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 16. IV 1970

Т. Б. Дилбазов, Э. Х. Халилов

Мис ашгарлы бэ'зи NaCl фосфорларында ε -рэнкләнмә мәркәзләринин тәдгиги

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә активләшдиричи мис ионларынын NaCl әсаслы бэ'зи фосфорларда иквалентли гәләви-торпаг ионларынын әмәлә кәтирдији ε удма мәркәзләринә тә'сири тәдгиг едилмишдир.

Мүәјјән едилмишдир ки, мис ионлары дахил едилмиш NaCl + CaCl₂, NaCl + SrCl₂ вә NaCl + BaCl₂ фосфорлары отаг температурунда ренткенләшдирилдикдән сонра онларда мә'лум ε_1 вә ε_2 удма мәркәзләриндән башга јени мүрәккәб типли удма мәркәзләри дә јараныр. Мәгаләдә кәстәрилмишдир ки, бу мәркәзләрин әмәлә кәлмәси мис вә гәләви-торпаг елементләринин гаршылыглы тә'сири илә әләгә-дардыр.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийјат елмләри сәријасы, 1970, № 5.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 5

А. М. ПАШАЕВ

ИЗМЕРЕНИЕ ХОЛЛОВСКОЙ ПОДВИЖНОСТИ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ НА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

Краткое сообщение

В работах [1, 2] показано, что влияние частоты на механизм переноса носителей и коэффициент Холла не проявляется до 24000 Мгц, т. е. подвижность в общем случае, равная

$$\mu_H = \frac{e}{m(\omega_c + j\omega)}, \text{ не зависит от } \omega, \text{ пока } \omega \ll \omega_c;$$

e —заряд электрона,

m —эффективная масса зарядов,

ω_c —частота столкновения носителей заряда,

ω —круговая частота электромагнитного поля.

Расчетная формула для таких измерений имеет вид [3]

$$\mu_H = \frac{1}{H} \left(\frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{вх}}} \right)^{1/2},$$

где $P_{\text{вых}}$ —фиксируемая мощность при приложении магнитного поля,
 $P_{\text{вх}}$ —приложенная к образцу мощность СВЧ поля.

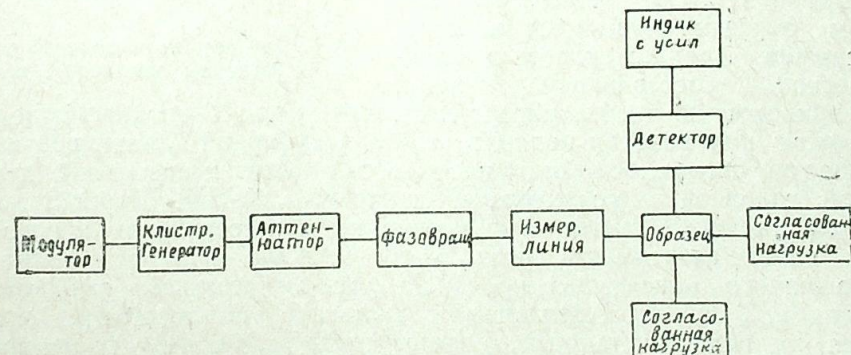


Рис. 1. Ячейка образца

Авторы работ [3, 4, 5, 6] для измерения μ_H применили прямоугольный бимодальный резонатор. Использование прямоугольных резонаторов для измерения подвижности, на наш взгляд, обладает рядом недостатков: во-первых, сложность изготовления прямоугольного

резонатора; во-вторых, при работе с ним необходимо предусмотреть резонатора во время измерений элементы подстройки. Подстройка резонатора особенно необходима при температурных измерениях, когда малейшая деформация резонатора приводит к расстройке системы и к значительным искажениям результатов измерения.

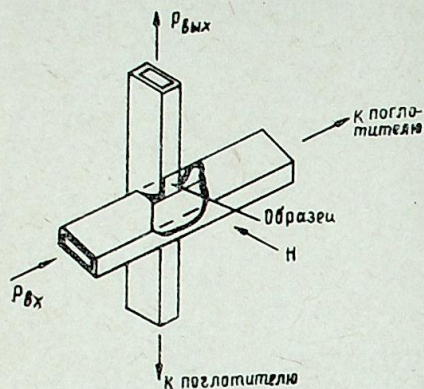


Рис. 2. Установка для измерения подвижности на частоте 9200 МГц; $P_{\text{вых}}$ — выходная холловская мощность; $P_{\text{вх}}$ — входная мощность; H — приложенное магнитное поле.

клистронного генератора, развязывающего аттенюатора, фазовращателя, измерительной линии для определения КСВН, держателя образца (криостата), поглощающей согласованной нагрузки, детектора и индикатора-усилителя 28-ИМ.

Генератор СВЧ на частоте 9200 МГц питает образец СВЧ мощностью. Для получения КСВН, близкой к единице, применены развязывающий аттенюатор, согласующий трансформатор и поглощающая нагрузка. Удалось достичь КСВН=1,15. Посредством фазовращателя меняется фаза распространяющейся электромагнитной волны таким образом, чтобы образец оказывался в месте максимума напряженности электрической составляющей поля.

При приложении постоянного магнитного поля благодаря повороту плоскости поляризации волны в перпендикулярной линии возникает холловский сигнал, который фиксируется в линии настроенной детекторной головкой с усилителем-индикатором 28-ИМ. Другой конец этой линии также имеет поглощающую согласованную нагрузку. Была снята зависимость выходного сигнала $U_{\text{вых}}$ от величины приложенного магнитного поля. На рис. 3, показана зависимость между $U_{\text{вых}}$ и H . Абсолютная величина подвижности, полученная на нашей установке, согласуется с величиной подвижности, полученной при измерениях обычными методами. На этой же установке возможны исследования геликонных волн в полупроводниках [7—9].

Условия, при которых в плазме твердого тела может с малым затуханием распространяться геликонная волна, следующие:

$$\omega \ll \omega_c, \quad \omega_c \tau \gg 1, \quad \frac{en}{\omega H} = \epsilon_n \gg \epsilon_c,$$

$n \neq p$ или $\nu_e \gg \nu_p$, где

ω — частота электромагнитной волны;
 ω_c и τ — соответственно, циклотронная частота и время релаксации более подвижных носителей (электронов);
 n и p — соответственно, концентрация и подвижность электронов и дырок;
 H — внешнее магнитное поле;
 ϵ_c и ϵ_n — диэлектрические проницаемости, обусловленные полупроводниковой плазмой и решеткой;
 e — заряд электрона.

Метод геликонных волн представляет собой бесконтактный способ исследования электрофизических свойств полупроводниковых материалов и находит в настоящее время широкое применение [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Hambleton G., Gärtner. Journ. Chem. Phys. Solids 8, 329, 1959.
2. Hambleton G., Gärtner W. Microwave Res. Inst. Symp. Ser. 9, 87, 1959.
3. Nishina Y., Spry W. Journ. Appl. Phys. 29, 230, 1958.
4. Nishina Y., Danielson G. C. Rev. Sci Instrum 32, 790, 1971.
5. Lin S. H., Nishina Y., Good R. H., Rev. Sci Instrum 32, 784, 1961.
6. Watanabe N. Journ. Phys. Soc. Japan 14, 218, 1959.
7. Aigrain P., Proceeding of the International Conference on Semiconductors, Prague, 1960.
8. Константинов О. В. и Перель В. А. ЖЭТФ, 38, 161, 1960.
9. Bowers R. Proceeding of the Symposium on Plasma Effects in Solids, Paris, 1964.
10. Пожела Ю. К., Толутис Р. Б. ФТП, т. 3, 1969, № 6.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 21. IV 1970

А. М. Пашаев

Жарымкечиричилэрин жүрүклүүнүн ифрат жүксак тезликлерде өлчүлмэси

ХУЛАСА

Мәгаләдә жүксак ифрат тезликләр диапазонунда ишләјән жарымкечиричи маддэлэрин тәдгиги үчүн јарадылмыш өлчү гурғусу тәсвир едилмишдир.

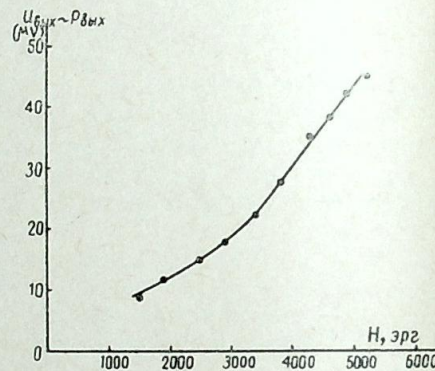


Рис. 3. Зависимость выходного сигнала от величины магнитного поля.

А. К. АБАС-ЗАДЕ, Т. А. АПАЕВ, А. М. КЕРИМОВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОТНОСТИ ОКТЕНА-1 И ЦИКЛОГЕКСЕНА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ

В настоящей статье приводятся экспериментальные результаты измерений плотности в интервале температур от 10 до 150°C и давлений от 1 до 500 кг/см². Подобное исследование имеет огромное теоретическое значение для создания более строгой теории жидкостей и разработки уравнения жидкого состояния, а полученные при этом экспериментальные данные находят широкое практическое применение в нефтеперерабатывающей промышленности, в особенности в химическом синтезе.

Выбор исследованных в данной работе веществ объясняется тем что в литературе приводятся значения плотности октена-1 и циклогексена только при атмосферном давлении в температурном интервале 10—40°C.

Измерение плотности производилось методом гидростатического взвешивания на оригинальной установке, разработанной проф. И. Ф. Голубевым. [1, 2, 3]. Сущность этого метода заключается в измерении выталкивающей силы, действующей на подвесную систему, находящуюся в испытуемой среде. Подвесная система состоит из кварцевого поплавка, ферромагнитного сердечника и соединяющей их манганиновой нити, помещаемой в сосуд высокого давления из нержавеющей стали марки 1X18H9T, головка которого изготовлена из немагнитного материала—титана. Измерительный прибор с исследуемой жидкостью герметически закрывается. Связь подвесной системы с аналитическими весами АДВ-200 осуществляется электромагнитной катушкой, висющей на одной из чашек весов. В катушку-соленоид и катушку-датчик во время опыта через центрирующую электронно—следующую систему (ЭСС) подается ток. В их образованных при этом магнитных полях оказываются концы сердечника подвесной системы, уже пришедшей во взвешенное состояние. Центрирование при помощи магнитного подшипника и строгая вертикальность установки полностью исключают соприкосновение подвесной системы со стенками прибора.

После того как в приборе созданы необходимые давление и температура, сначала взвешивается электромагнитная катушка отдельно (без подачи тока), а затем вместе с подвесной системой. Разность этих двух взвешиваний и представляет собой искомую выталкивающую силу. Таким образом, зная вес жидкости, вытесненной подвесной

системой, объем которой калибровкой отдельных частей заранее определен, можно найти ее плотность по следующей расчетной формуле:

$$\rho = \frac{G - (G_2 - G_1) - \rho_c(V_c + 0,5V_n)}{V_n\Delta_1\Delta_2 + 0,5V_n},$$

где G — вес подвесной системы в пустоте,
 G_1 — вес электромагнитной катушки,
 G_2 — вес электромагнитной катушки вместе с подвесной системой,
 ρ_c — плотность жидкости в зоне сердечника,
 V_c — объем сердечника,
 V_n — объем поплавка,
 V_n — объем нити,
 Δ_1 — поправка на изменение объема поплавка от температуры,
 Δ_2 — поправка на изменение объема поплавка от давления.

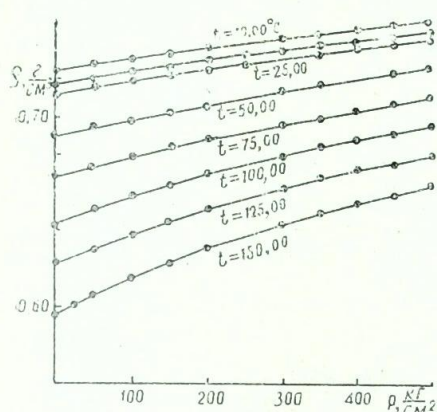


Рис. 1. Зависимость плотности октена-1 от давления при постоянных температурах

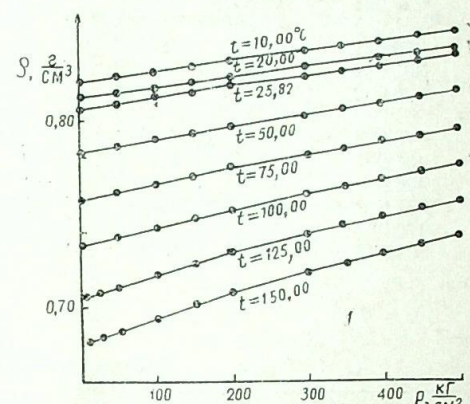


Рис. 2. Зависимость плотности циклогексена от давления при постоянных температурах

Чистота исследованных веществ составляла 99,98%. Температура опытов создавалась электропечью с грубой и тонкой регулировкой, а измерялась образцовым термометром сопротивления с точностью до 0,02°C ($R_0 = 10,0601$ абс. ом, $R_{100}/R_0 = 1,36258$), который был стабилизирован и проверен во ВНИМ им. Менделеева в Ленинграде. Постоянство температуры опытов поддерживалось регулирующей хромель-копелевой термопарой с точностью до 0,005°C.

Схема измерения и регулирования температуры содержала в себе потенциометры типа Р306 и Р307, гальванометры типа М17/3 и М17/4, термостатированные образцовые катушки сопротивления и нормальные элементы. Давление в опытах создавалось и измерялось грузопоршневыми манометрами МП-60 и МП-2500 класса 0,05; учитывалось также барометрическое давление.

Опыты проводились на следующих изотермах:

для октена-1

10,00; 18,01; 25,00; 50,00; 75,00; 100,00; 125,00; 150,00°C;

для циклогексена

10,00; 20,00; 25,82; 50,00; 75,00; 100,00; 125,00; 150,00°C;

Контрольные опыты проводились на изобарах 150 и 300 кг/см². При этом результаты с точностью до 0,06% совпали с данными, полученными на изотермах. Шаг изменения давления составлял 25 кг/см² — а вблизи линии насыщения — 0,2÷4 кг/см². Каждое измерение повто-

Таблица 1

Плотность октена — 1, г/см ³								
$t, ^\circ\text{C}$	10,00	18,01	25,00	50,00	75,00	100,00	125,00	150,00
$P, \text{кг/см}^2$								
1,033	0,7235	0,7165	0,7106	0,6892	0,6676	0,6444	0,6221	—
26,033	0,7252	0,7185	0,7126	0,6915	0,6704	0,6480	0,6258	0,6011
51,033	0,7269	0,7204	0,7146	0,6938	0,6732	0,6515	0,6299	0,6065
76,033	0,7286	0,7223	0,7165	0,6961	0,6758	0,6549	0,6339	0,6116
101,032	0,7303	0,7241	0,7184	0,6983	0,6784	0,6581	0,6375	0,6162
126,032	0,7319	0,7258	0,7202	0,7005	0,6809	0,6613	0,6411	0,6204
151,032	0,7335	0,7276	0,7220	0,7025	0,6834	0,6642	0,6444	0,6251
176,032	0,7350	0,7293	0,7237	0,7045	0,6858	0,6671	0,6476	0,6280
201,033	0,7365	0,7310	0,7253	0,7064	0,6881	0,6697	0,6507	0,6315
226,031	0,7380	0,7326	0,7270	0,7083	0,6905	0,6723	0,6537	0,6349
251,031	0,7395	0,7342	0,7286	0,7101	0,6927	0,6748	0,6565	0,6381
276,031	0,7410	0,7357	0,7302	0,7119	0,6949	0,6771	0,6593	0,6413
301,032	0,7424	0,7372	0,7316	0,7135	0,6970	0,6794	0,6619	0,6444
326,032	0,7438	0,7386	0,7332	0,7154	0,6990	0,6816	0,6644	0,6472
351,033	0,7455	0,7400	0,7347	0,7171	0,7008	0,6836	0,6668	0,6499
376,033	0,7465	0,7414	0,7362	0,7190	0,7027	0,6857	0,6691	0,6525
401,033	0,7478	0,7428	0,7376	0,7207	0,7045	0,6877	0,6714	0,6550
426,033	0,7491	0,7460	0,7390	0,7224	0,7064	0,6899	0,6736	0,6575
451,032	0,7503	0,7472	0,7404	0,7241	0,7082	0,6919	0,6759	0,6599
476,032	0,7515	0,7474	0,7418	0,7258	0,7100	0,6939	0,6780	0,6622
501,032	0,7526	0,7476	0,7431	0,7274	0,7117	0,6959	0,6802	0,6645

Таблица 2

Плотность циклогексена, г/см ³								
$t, ^\circ\text{C}$	10,00	20,00	25,82	50,00	75,00	100,00	125,00	150,00
$P, \text{кг/см}^2$								
1,033	0,8230	0,8131	0,8075	0,7836	0,7586	—	—	—
26,033	0,8244	0,8146	0,8092	0,7854	0,7608	0,7352	0,7093	0,6834
51,033	0,8258	0,8160	0,8107	0,7872	0,7629	0,7380	0,7127	0,6873
76,033	0,8272	0,8174	0,8124	0,7890	0,7652	0,7407	0,7160	0,6911
101,032	0,8284	0,8188	0,8138	0,7908	0,7673	0,7432	0,7191	0,6947
126,032	0,8297	0,8201	0,8153	0,7925	0,7693	0,7458	0,7221	0,6982
151,032	0,8310	0,8216	0,8168	0,7942	0,7714	0,7482	0,7249	0,7016
176,032	0,8322	0,8230	0,8183	0,7960	0,7733	0,7506	0,7277	0,7048
201,033	0,8335	0,8244	0,8198	0,7977	0,7752	0,7529	0,7304	0,7080
226,031	0,8348	0,8258	0,8212	0,7994	0,7771	0,7551	0,7330	0,7110
251,031	0,8361	0,8271	0,8226	0,8010	0,7789	0,7572	0,7355	0,7138
276,031	0,8373	0,8285	0,8240	0,8026	0,7806	0,7593	0,7380	0,7165
301,032	0,8385	0,8299	0,8254	0,8040	0,7822	0,7613	0,7404	0,7191
326,032	0,8398	0,8312	0,8267	0,8056	0,7840	0,7632	0,7427	0,7217
351,033	0,8411	0,8325	0,8280	0,8070	0,7858	0,7652	0,7450	0,7242
376,033	0,8423	0,8337	0,8292	0,8085	0,7874	0,7670	0,7472	0,7266
401,033	0,8435	0,8349	0,8305	0,8100	0,7892	0,7689	0,7492	0,7288
426,033	0,8447	0,8362	0,8317	0,8114	0,7908	0,7708	0,7512	0,7311
451,032	0,8457	0,8372	0,8329	0,8128	0,7924	0,7725	0,7531	0,7333
476,032	0,8468	0,8382	0,8340	0,8141	0,7940	0,7742	0,7549	0,7353
501,032	0,8477	0,8393	0,8350	0,8154	0,7955	0,7759	0,7566	0,7374

ряли дважды. Воспроизводимость и разброс экспериментальных данных, соответственно, не превышали $\pm 0,02$ и $0,05\%$.

Экспериментальные значения плотности октена-1 и циклогексена приведены в табл. 1 и 2, а изотермы представлены на рис. 1 и 2. Сравнение литературных данных при атмосферном давлении [4] с полученными нами показало, что расхождение не превышает $\pm 0,05\%$. Максимальная относительная погрешность определения плотности с учетом возможных ошибок измерений и ошибки отнесения составляет $\pm 0,1\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев И. Ф. Тр. ГИАП, т. VII, 1957.
2. Голубев И. Ф., Добровольский О. А. „Газовая промышленность“, 1964, № 5.
3. [Абасзаде А. К.], Керимов А. М., Агаев Н. А., Апаев Т. А. Тр. III Всесоюзной теплофизической конференции по свойствам веществ при высоких температурах. Сборник трудов по теплофизическим свойствам жидкостей.
4. Forziati A. F., Camin D. L., Rossini F. D. „Плотности, показатели преломления, температуры кипения и давления насыщенного пара восьми 1-алкенов, шести пентадиенов и двух цикленов“ T. Research Nat. Bur. Standards, 1950, 45, № 5, 406—410.

АПИ им. Ленина

Поступило 5. II 1970

А. К. Абасзаде, Т. А. Апаев, Э. М. Керимов

Октен-1 в тсиклохексен сыхлыгынын температурдан
вэ тэзјигдэн асылылыгынын экспериментал
үсулла тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә октен-1 вэ тсиклохексен сыхлыгынын 10—150°C температурдан вэ 1—500 кг/см² тэзјигдэн асылылыгынын тәчрүби јолла тэдгигинин нәтичәләри изаһ олунмушдур. Ејни заманда, сечилмиш экспериментал метод гысача шәрһ едилмиш, алынмыш нәтичәләр график вэ чәдвәлләр васитәсилә көстәрилмишдир.

П. Р. АМНУЭЛЬ, О. Х. ГУСЕЙНОВ

МАГНИТНЫЙ ЗАХВАТ ПРИ АККРЕЦИИ, I

Одним из способов наблюдения нейтронных звезд является наблюдение процесса аккреции ими межзвездного газа (или вещества, перетекающего с главной компоненты, если нейтронная звезда входит в состав двойной системы). При аккреции может возникнуть рентгеновское излучение, которое имеет тормозной [1], а при наличии у нейтронной звезды магнитного поля—синхротронный характер [2, 3]. Излучение аккреции может ионизовать межзвездный газ, вследствие чего смещается максимум излучения в сторону ультрафиолета [4], если излучение тормозное. Если излучение синхротронное, то максимум может остаться в области рентгена, однако, в обоих случаях ионизация понижает мощность излучения.

Ниже будет показано, что при аккреции нейтронной звездой может возникать не только рентгеновское, но также мягкое оптическое и радиоизлучение (если нейтронная звезда обладает магнитным дипольным моментом). Излучение это возникает на расстоянии 10^7 — 10^9 см от центра звезды (магнитного диполя) и может, следовательно, иметь место и при аккреции на белый карлик. В ряде случаев описанный ниже механизм может повлиять также на вид спектра при попадании газа на обычную (карликовую) звезду.

Процесс аккреции в двойной системе и процесс несимметричной аккреции одиночной нейтронной звездой будут рассмотрены в приближении отдельных частиц.

§ 1. Симметричная аккреция

Существенное влияние на аккрецию газа одиночной звездой оказывают параметры межзвездного газа, обладающего замороженным магнитным полем, которое распределено в основном хаотически. Магнитное давление определяется из $\frac{H_0^2}{8\pi}$, где H_0 — средняя напряженность межзвездного магнитного поля. В галактических рукавах $H_0 \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$ зс. Аккреция может начаться лишь в том случае, когда плотность гравитационной энергии становится больше плотности магнитной энергии:

$$\frac{\rho_0 GM}{R_1} > \frac{H_0^2}{8\pi},$$

откуда

$$R_1 < \frac{8\pi\rho_0 GM}{H_0^2} \quad (1)$$

Гравитационная энергия при аккреции (в сверхзвуковом режиме) растет как $V^{-5/2}$ [5], в то время как магнитная энергия растет как R^{-2} [6]. Следовательно, замороженное, в межзвездный газ магнитное поле не влияет на динамику газа в процессе аккреции. Вывод этот усиливается также тем обстоятельством, что замороженное магнитное поле приобретает при аккреции радиальный характер. Растущее магнитное давление становится перпендикулярно скорости потока и замороженное магнитное поле оказывается бессильным.

Существенно влияет на величину аккреции температура межзвездного газа. Аккреция начинается с расстояния, при котором

$$\frac{GM}{R_2} \geq \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_0$$

или

$$R_2 \leq \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{GM}{RT_0}. \quad (2)$$

Если $R_1 < R_2$, то величина аккреции определяется не температурой межзвездного газа, а его магнитным полем. Иначе, говоря влияние магнитного поля на величину аккреции становится преобладающим, если

$$T_0 \leq \frac{\gamma-1}{8\pi\gamma} \frac{H_0^2}{R\rho_0}, \quad (3)$$

где R — универсальная газовая постоянная, γ — показатель адиабаты для межзвездного газа, ρ_0 — средняя плотность вещества в межзвездной среде. При $H_0 = 10^{-6}$ зс, $\rho_0 = 10^{-24}$ г/см³ и $\gamma = 1,4$ величина аккреции определяется магнитным полем если, температура межзвездного газа не выше 136°К. Если принять $H_0 = 10^{-5}$ зс, то $T_0 = 1,36 \cdot 10^4$ °К. Дальнейшее движение газа к звезде можно считать практически свободным, и на расстоянии от центра звезды, меньшем

$$R_k \leq \frac{5-3\gamma}{4} \frac{GM}{a_0^2},$$

можно применять рассмотрение отдельных частиц. Здесь R_k — расстояние, на котором скорость потока достигает скорости звука. Кинетическое давление набегающего потока на больших расстояниях превышает давление дипольного магнитного поля звезды. Это приводит к тому, что все магнитное поле звезды оказывается сосредоточенным в ограниченном объеме, определяемом из соотношения

$$W_{\text{кин}}^{\text{поток}} = W_{\text{маг}}^{\text{зв}}. \quad (4)$$

Когда начинает выполняться равенство (4), дальнейшее движение потока частиц перестает быть свободным и определяется уже дипольным магнитным полем звезды. Поэтому условие (4) можно считать условием захвата частиц магнитным полем звезды. Образуется, таким образом, фронт захвата, внутри которого движение частицы происходит по силовой линии. В области фронта захвата частицы испытывают интенсивное торможение, и может возникнуть магнитно-тормозное (циклотронное) излучение. Мощность и частота такого излучения определяются видом фронта захвата и его расстоянием от центра звезды. Найдем уравнение фронта захвата для симметричной аккреции в первом приближении, пренебрегая искажением дипольного поля звезды.

Напряженность магнитного поля диполя с моментом μ [7].

$$H^2 = \frac{\mu^2}{r^6} (1 + 3\sin^2\varphi),$$

где φ — магнитная широта точки измерения. Захват плазмы магнитным полем звезды происходит, если выполнено (4) причем $W_{\text{магн}} = \frac{H^2}{8\pi}$, а кинетическое давление газа (в случае упругого удара)

$$W_{\text{кин}} = 2\rho v^2 \sin^2 \theta,$$

где θ — питч-угол между траекторией частицы и направлением магнитного поля, v — скорость потока, ρ — плотность вещества в точке захвата. Таким образом, уравнение фронта захвата [8] имеет вид

$$\frac{H^2}{8\pi} = 2\rho v^2 \sin^2 \theta. \quad (6)$$

В случае если удар частиц о магнитную стенку неупругий, то в правой части следует брать $\frac{1}{2} \rho v^2 \sin^2 \theta$, что практически не влияет на картину захвата, так как систематически увеличивается радиус фронта захвата в $4^{2/7}$ раз. При радиальном движении частиц к диполю (симметричная аккреция) питч-угол зависит лишь от магнитной широты [9]:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi, \quad (7)$$

откуда получаем

$$\sin^2 \theta = \frac{\cos^2 \varphi}{1 + 3 \sin^2 \varphi}. \quad (8)$$

Для величин плотности вещества и скорости набегающего потока используем (при $\gamma = 1,4$) выражения из [5]:

$$\rho = \frac{\rho_0}{2,24} \left(\frac{GM}{ra_0^2} \right)^{3/2}, \quad (9)$$

$$V^2 = \frac{2GM}{r}. \quad (10)$$

Подставляя (5), (8) — (10) в (6), получим для радиуса-вектора точки захвата частицы магнитным диполем при симметричной аккреции:

$$r_{\text{захв}} = \left[\frac{a_0^3 \mu^2}{14,3 \pi \rho_0 (GM)^{3/2}} \frac{(1 + 3 \sin^2 \varphi^2)}{\cos^2 \varphi} \right]^{2/7} \quad (11)$$

При втекании плазмы в область, ограниченную $r_{\text{захв}}$ (рис. 1), может образоваться ударная волна. Мощность ее наиболее велика в экваториальной области. Магнитный дипольный момент нейтронной звезды можно принять $\sim 10^{28} - 10^{30}$ гс·см³. В достаточно плотных облаках можно положить $\rho = 10^{-23}$ г/см³. Скорость звука в межзвездной среде $\sim 10^5 - 10^6$ см/сек. Варьируя эти значения параметров, получаем значения $r_{\text{захв}}$ для частиц, набегающих на нейтронную звезду со стороны магнитного экватора (табл.). При хаотизации скоростей частиц на ударной волне устанавливается высокая температура и может возникнуть циклотронное излучение плазмы. Характеристическая частота этого излучения приведена также в таблице.

Мощность излучения на ударном фронте в случае белого карлика лишь в несколько раз меньше полного излучения от аккреции (когда вещество падает непосредственно на поверхность белого карлика). В случае же нейтронной звезды излучение на ударном фронте обладает мощностью, меньшей на 2—4 порядка, чем мощность излучения

M/M_0	μ , гс·см ³	a_0 , см/сек	$r_{\text{захв}}$, см	ν , гц
0,5	10^{28}	10^5	$8,9 \cdot 10^7$	$2,5 \cdot 10^{11}$
		10^6	$6,4 \cdot 10^8$	$6,7 \cdot 10^8$
		10^7	$1,2 \cdot 10^9$	$9,5 \cdot 10^8$
0,8	10^{30}	10^5	$8,9 \cdot 10^9$	$2,5 \cdot 10^7$
		10^6	$6,1 \cdot 10^7$	$7,8 \cdot 10^{11}$
		10^7	$4,4 \cdot 10^8$	$2,1 \cdot 10^9$
1,0	10^{28}	10^5	$8,4 \cdot 10^8$	$2,9 \cdot 10^{10}$
		10^6	$6,1 \cdot 10^9$	$7,8 \cdot 10^7$
		10^7	$5,1 \cdot 10^7$	$1,3 \cdot 10^{12}$
1,5	10^{30}	10^5	$3,7 \cdot 10^8$	$3,6 \cdot 10^9$
		10^6	$7,1 \cdot 10^8$	$4,9 \cdot 10^{10}$
		10^7	$5,1 \cdot 10^9$	$1,3 \cdot 10^8$
1,5	10^{28}	10^5	$3,8 \cdot 10^7$	$3,2 \cdot 10^{12}$
		10^6	$2,7 \cdot 10^8$	$8,6 \cdot 10^9$
		10^7	$5,3 \cdot 10^8$	$1,2 \cdot 10^{11}$
1,5	10^{30}	10^5	$3,8 \cdot 10^9$	$3,2 \cdot 10^8$
		10^6	$3,8 \cdot 10^9$	$3,2 \cdot 10^8$
		10^7	$3,8 \cdot 10^9$	$3,2 \cdot 10^8$

от аккреции при прямом падении вещества на поверхность нейтронной звезды. Однако по чувствительности современные радиотелескопы значительно превосходят рентгеновские счетчики. Если нейтронная звезда находится на расстоянии 1 кпс от Земли и приняты условия $\mu = 10^{30}$ гс·см³, $\rho_0 = 10^{-23}$ г/см³, $a_0 = 10^6$ см/сек (то есть $T_0 = 10^4$ К), то скорость аккреции $\sim 10^{12}$ г/сек, и полная мощность излучения на ударном фронте составляет $\sim 10^{28}$ эрг/сек. Наблюдаемая в районе Земли мощность излучения в радиодиапазоне ($\nu = 300$ Мгц) составит $\sim 10^{-28}$ Вт/м²гц, что вполне обнаружимо. Если звезда не имеет магнитного поля, ве-

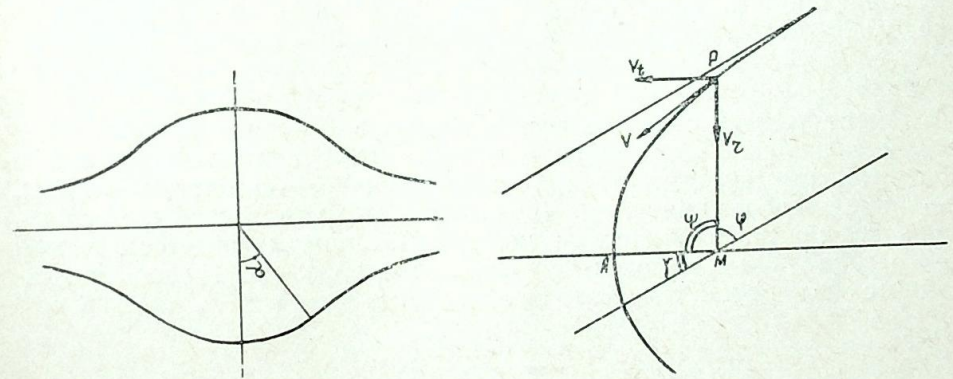


Рис. 1. Фронт захвата при симметричной аккреции (магнитная ось горизонтальна).

Рис. 2. К расчету траектории частицы: V_t и V_r — тангенциальная и радиальная составляющие; А — точка периастро.

щество достигает ее поверхности и возникает рентгеновское излучение, которое в районе Земли дает 10^{-5} кев/сек²·кев, что невозможно обнаружить даже с помощью наиболее чувствительных современных счетчиков. Аналогичная картина наблюдается и в случае аккреции на белый карлик, с той лишь разницей, что рентгеновское излучение здесь может вообще не возникнуть.

Таким образом, магнитную нейтронную звезду (или белый карлик) легче, по-видимому, обнаружить по радиоизлучению от аккреции. После хаотизации скоростей на фронте захвата и излучения плазма стекает по магнитным силовым линиям к полюсам звезды и здесь может возникнуть синхротронное рентгеновское излучение (в случае

нейтронной звезды) или видимое излучение (в случае белого карлика). Спектр излучения дан в работе [3].

Излучение как на фронте захвата, так и при непосредственном падении вещества на звезду может оказаться переменным, с периодом, равным периоду пульсаций нейтронных звезд (белых карликов). Излучение у поверхности звезды возникает вблизи магнитных полюсов, и если магнитная ось не совпадает с осью вращения, то источник будет иметь еще один тип переменности с периодом, равным периоду вращения звезды [2].

§ 2 Несимметричная аккреция

Рассмотрим образование фронта захвата при несимметричной аккреции, когда нейтронная звезда (или белый карлик) движется относительно межзвездного газа со скоростью V_0 . Найденные ниже выражения мы позднее, в следующей работе, применим также для расчета фронта захвата при переносе массы в двойной системе. В тесной двойной системе мощность излучения на фронте захвата значительно больше, чем в случае одиночной звезды, так как больше переносимая масса.

Пусть на звезду со стороны ее магнитного экватора набежит параллельный поток частиц, имеющих на бесконечности скорость V_0 и различные значения прицельных параметров. Если звезда не обладает магнитным полем, то захватывается (падает на звезду) лишь небольшая часть потока с прицельными параметрами, меньшими $b_{кр}$. Если звезда обладает дипольным магнитным полем, то критическое значение прицельного параметра, как будет показано ниже, возрастает на несколько порядков, и мощность аккреции при наличии магнитного поля намного выше, чем при его отсутствии. Значения $b_{кр}$ для несимметричной аккреции без магнитного поля можно найти в [5, 10].

Фронт захвата в случае несимметричной аккреции можно найти, решая уравнение (6) совместно с уравнением движения частицы в поле тяжести звезды. Введем обозначения: φ —магнитная широта, b —прицельный параметр, v_0 —начальная скорость частицы. Частицы движутся по гиперболическим траекториям, причем асимптоты гипербол параллельны плоскости магнитного экватора. Из [11] для движения частицы массы m в поле силы тяжести имеем

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{\kappa}{r} - \frac{GMm^2}{\kappa}}{\sqrt{2mE + \frac{G^2 M^2 m^4}{\kappa^2}}} \quad (12)$$

где φ —угол, отсчитываемый от точки периастра, K —момент частицы ($K=mbv_0$), E —энергия частицы ($E=\frac{mv_0^2}{2}$). Подставив значения, получим

$$\psi = \arccos \frac{\frac{b_0}{r} - \frac{GM}{b\tau_0}}{\sqrt{\tau_0^2 + \frac{G^2 M^2}{b^2 v^2}}} \quad (13)$$

Для упрощения следующих выражений перейдем в (13) арксинуса к арктангенсу, тогда

$$\varphi = \arctg \frac{\frac{b\tau_0^2}{GM} \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{2GM}{rv_0^2}}}{\frac{b^2 v_0^2}{rGM} - 1} \quad (14)$$

Как видно из рис. 2, $\psi = 180^\circ - \varphi - \xi$, где ξ —угол, величина которого будет определена ниже. Поскольку $\lg \psi = -\lg(\varphi + \xi)$, то

$$\psi = -\xi + \arctg \frac{\frac{bv_0^2}{GM} \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{2GM}{rv_0^2}}}{1 - \frac{b^2 v_0^2}{rGM}} \quad (15)$$

Очевидно, что при $r \rightarrow \infty$ будет $\varphi \rightarrow 0$. Тогда

$$\xi = \arctg \frac{bv_0^2}{GM} \quad (16)$$

$$\varphi = -\arctg \frac{b\tau_0^2}{GM} + \arctg \frac{\frac{b\tau_0^2}{GM} \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{2GM}{rv_0^2}}}{1 - \frac{b^2 \tau_0^2}{rGM}} \quad (17)$$

Рассмотрим произвольное положение частицы на ее траектории (рис. 2). В этой точке скорость частицы v раскладывается на v_t и v_r , причем скорость v определяется из сохранения энергии частицы:

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2GM}{r} \quad (18)$$

а тангенциальная составляющая v_t из сохранения момента:

$$v_t = \frac{bv_0}{r} \quad (19)$$

Из (18) и (19) находим, что

$$v_r = v_0 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{2GM}{rv_0^2}} \quad (20)$$

Введем параметр $x = \frac{v_t}{v_r}$, который, как видно из (19) и (20), равен

$$x = \frac{bv_0}{\sqrt{2GMr - v_0^2(r^2 - b^2)}} \quad (21)$$

Подставляя найденное выражение для x в (17), выпишем окончательное уравнение движения частицы в поле тяжести звезды, где в качестве текущих переменных использованы расстояние от центра звезды r и магнитная широта φ :

$$\varphi = \arctg \frac{b\tau_0^2}{GM} + \arctg \frac{1}{x \left(\frac{GM}{b^2 \tau_0^2} r - 1 \right)} \quad (22)$$

Уравнение (22) определяет траекторию частицы в полярном сечении (плоскости, в которой лежат магнитная ось звезды и вектор движения потока). Если рассматривать экваториальное сечение, то уравнение движения будет иметь вид

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{bv_0^2}{GM} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x \left(\frac{GM}{b^2 v_0^2} r - 1 \right)}, \quad (23)$$

отличающийся от (22) только тем, что вместо магнитной широты взята долгота x , отсчитываемая от направления, обратного направлению движения потока.

Фронт захвата мы также рассмотрим в двух сечениях—полярном и экваториальном. В обоих случаях фронт захвата определяется уравнением движения и уравнением (6), причем напряженность H находим из (5) (в экваториальном сечении нужно положить просто $\varphi=0$), скорость v^2 из (18), плотность массы в каждой точке находим, воспользовавшись выражением, найденным в [12]:

$$\rho = \frac{\rho_0}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4GM}{r v_0^2 (1 + \cos \varphi)}}} + \sqrt{1 + \frac{4GM}{r v_0^2 (1 + \cos \varphi)}} \right], \quad (24)$$

где ρ_0 —плотность газа на бесконечности. В ряде случаев это выражение можно упростить:

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{GM}{r v_0^2 (1 + \cos \varphi)}} \quad (25)$$

(в экваториальном сечении нужно вместо φ брать x).

Формула (25) верна при всех r , удовлетворяющих условию

$$r \ll \frac{2GM}{v_0^2}.$$

Что касается питч-угла θ , то в экваториальном сечении его нужно положить равным 90° , и $\sin \theta = 1$. В полярном сечении $\sin^2 \theta$ определяется следующим образом. Как видно из рис. 3, питч-угол θ есть разность наклонов к оси x скорости частицы и линии напряженности магнитного поля. Силовая линия магнитного поля наклонена к оси x под углом η , причем [9].

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (26)$$

Скорость движения частицы в данной точке наклонена к оси x под углом λ , причем этот угол, в свою очередь, есть разность магнитной широты φ и угла λ_1 между v и v_r . Тогда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \eta - \operatorname{tg} \lambda}{1 + \operatorname{tg} \eta \operatorname{tg} \lambda}. \quad (27)$$

и

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \lambda_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \lambda_1}. \quad (28)$$

В выражении (28) $\operatorname{tg} \lambda_1 = x$, где x определяется из (21). Подставляя (21), (26) и (28) в (27), после несложных преобразований получаем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2x \operatorname{tg} \varphi - 1}{2 \operatorname{tg} \varphi + x},$$

откуда

$$\sin^2 \theta = \frac{(2x \operatorname{tg} \varphi - 1)^2}{(1+x^2)(1+4 \operatorname{tg}^2 \varphi)}. \quad (29)$$

Уравнение захвата (6) после подстановки всех величин в полярном сечении принимает следующий вид (при $r \ll \frac{2GM}{v_0^2}$):

$$r = \left[\frac{v_0^2}{32 \pi \rho_0 (GM)^{3/2}} \frac{(1+x^2)(1+3 \sin^2 \varphi)^2 \sqrt{1+\cos \varphi}}{\cos^2 \varphi (2x \operatorname{tg} \varphi - 1)^2} \right]^{2/9}, \quad (30)$$

а в экваториальном сечении ($r \ll \frac{2GM}{v_0^2}$)

$$r = \left[\frac{v_0^2 \sqrt{1+\cos x}}{32 \pi \rho_0 (GM)^{3/2}} \right]^{2/9}. \quad (31)$$

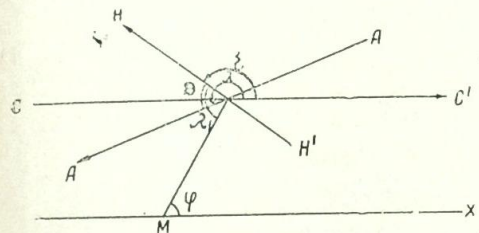


Рис. 3. К расчету фронта захвата; HH' —касательная к силовой линии; AA' —касательная к траектории частицы. Обозначения углов: $\angle HPA = \theta$, $\angle C'PH = \eta$, $\angle C'PA = \lambda$, $\angle APM = \lambda_1$, $\angle PMX = \varphi$.

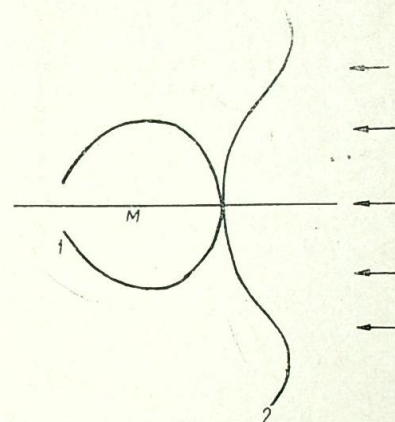


Рис. 4. Фронт захвата при несимметричной аккреции. Направление потока показано стрелками: 1—экваториальное сечение; 2—полярное сечение.

Таким образом, вид фронта захвата в полярном сечении полностью определяется совместным решением уравнений (22) и (30), а в экваториальном сечении—решением (23) и (31). Фронт захвата при набегании на звезду параллельного магнитному экватору потока частиц показан на рис. 4.

При движении нейтронной звезды в межзвездном газе со скоростью V_0 наличие у нее магнитного поля принципиально меняет картину аккреции. Действительно, если у звезды нет магнитного поля, то критический прицельный параметр определяется условием прямого падения частицы на звезду [10]. Если $V_0 = 10^7$ см/сек, $\rho_0 = 10^{-23}$ г/см и $M = 3 \cdot 10^{33}$ г $= 1,5 M_\odot$, то критический прицельный параметр $b_{кр} = 2 \cdot 10^9$ см, и скорость аккреции совершенно ничтожна: $\sim 10^3$ г/сек. Если при тех же начальных условиях нейтронная звезда обладает магнитным моментом $\mu = 10^{30}$ гс·см³, то захватываются частицы с прицельным параметром до $\sim 10^{13}$ см. Фронт захвата расположен здесь на очень далеком от звезды расстоянии $\sim 10^{11}$ — 10^{12} см и не дает выхода энергии. Однако захваченные магнитным полем частицы в конце концов достигают поверхности звезды и могут дать жесткое излучение. Резкое увеличение $b_{кр}$ повышает скорость аккреции на 8—9 порядков, и полная мощность излучения у полюсов звезды составляет $\sim 10^{31}$ —

10^{32} эрг/сек. Аналогичная картина получается и при несимметричной аккреции на белый карлик.

Таким образом, наличие у нейтронной звезды сильного магнитного поля приводит к следующим эффектам при аккреции ею межзвездного газа:

а. При симметричной аккреции наличие у нейтронной звезды (белого карлика) магнитного момента приводит к образованию фронта захвата, на котором может возникнуть наблюдаемое радиоизлучение. Вероятность обнаружения нейтронных звезд при симметричной аккреции, по-видимому, выше по радионаблюдениям, чем по наблюдениям ультрафиолетового или рентгеновского излучения.

б. При несимметричной аккреции наличие у звезды магнитного момента приводит к резкому увеличению скорости аккреции. Наблюдение излучения на фронте захвата в этом случае малоэффективно, так как фронт образуется на далеких от звезды расстояниях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Шакура Н. И. „Астр. ж.“, 46, 225, 1969.
2. Амнуэль П. Р., Гусейнов О. Х. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1968, № 3.
3. Бисноватый-Коган Г. С., Фридман А. М. „Астр.ж“, 46, 721, 1969.
4. Шварцман В. Ф. Препринт ИПМ, 57, 1969.
5. Зольдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. Изд-во „Наука“, М., 1967.
6. Шкловский И. С. Сверхновые звезды. Изд-во „Наука“, М., 1966.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Изд-во „Наука“, М., 1967.
8. Кахилл Ф. В. сб. „Космическая физика“. Изд-во „Мир“, 1966.
9. Альвен Г., Фельтхаммар К. Г. Космическая электродинамика. Изд-во „Мир“, М., 1967.
10. Salpeter E. Ap. J., 140, 796, 1964.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Изд-во „Наука“, М., 1965.
12. Радзиевский В. В., Дагаев М. М. „Астр. ж.“ 46, 56, 1969.

ЩАО

Поступило 13. II 1970

П. Р. Амнуел, О. Х. Гусейнов

Аккресија заманы магнит саһәси тәрәфиндән тутулма

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда тәк вә гоша системләрә дахил олан, магнит моментли нейтрон вә ағ чыртдан улдузларына аккресија заманы бахылмышдыр. Бу вахт һиссәчикләрин магнит саһәсиндә тутулма сәрһәддинин тәнлији тапылмыш вә конкрет һаллар үчүн һәлл едилмишдыр. Галактиканын магнит саһәсинин вә маддәнин температурунун аккресијага тәсири мütәјјән олунмушдыр. Магнит саһәли нейтрон улдузларын вә ағ чыртданларын аккресија заманы тсиклатрон шүаланма мәнбәји олмасы ајдынлашдырлымышдыр.

А. А. ГУСЕЙН-ЗАДЕ

ДВА ВОЗМОЖНЫХ ПУТИ ЭВОЛЮЦИИ ЗВЕЗД ВОЛЬФ-РАЙЕ

В предыдущих работах [1, 2] обсуждались вопросы о происхождении звезд Вольф-Райе и о неустойчивости звезд спектрального типа О. В настоящей статье рассматриваются два возможных пути эволюции звезд Вольф-Райе. На основе данных наблюдений отдается предпочтение эволюции звезд Вольф-Райе, обусловленная перемешиванием вещества. Указывается на невозможность образования звезд Вольф-Райе в начале эволюции таковыми, какими они наблюдаются в данное время.

Впервые Кемпбелл [3] определил интенсивность и длину волн 30 линий звезд Вольф-Райе, расположенных в области спектра $\lambda\lambda$ 4000 — 6500 Å. Райт [4] отождествил линии для звезд Вольф-Райе, принадлежащие ядрам планетарных туманностей. Пласскетт [5] определил длину волн линий, отождествил их, исследовал физические условия возбуждения атомов и сделал вывод о том, что атмосфера звезд WR находится в высоковозбужденном состоянии. Перрайнс [6, 7] и Пейн [8], [9] сделали это для звезд Вольф-Райе южного неба. В дальнейшем отождествление линий, имеющих в спектре звезд Вольф-Райе, было произведено Свингсом [10], Смитом [11], Эдленом [12] и Андерхилл [13].

Наблюдения звезд Вольф-Райе в близкой инфракрасной части спектра и отождествление линий были произведены Свингсом и Джозом [14], Смитом [11], Андрия [15]. Благодаря перечисленным исследованиям, в данное время мы имеем полное представление о спектре звезд Вольф-Райе, который состоит из линий следующих элементов и их ионов: H, HeI, HeII, CII, CIII, CIV, OIII, OIV, OV, OVI, NIII, NIV, NV, SIII, SIV, AlIII, MgII, TiIV. Впервые Эдлен [16, 17] отметил, что большинство ярких линий в спектре звезд Вольф-Райе принадлежат легким элементам и их ионам.

Известно, что основное содержание элементов в звездах составляет водород. Поэтому наблюдаемые сильные линии излучения ионов азота, углерода и кислорода в звездах Вольф-Райе, представляют большой интерес. Может быть, что в протяженной атмосфере звезд Вольф-Райе сильные эмиссионные линии возбуждаются селективным излучением. Это направление развивает Андерхилл [18]. Нам кажется, что селективным механизмом возбуждения могут образоваться отдельные эмиссионные линии, но наличие многочисленных линий излучения в спектре звезд Вольф-Райе объяснить ими трудно. Поэтому представ-

ляет интерес классифицировать звезды Вольф-Райе по наблюдаемым линиям ионов азота, углерода и кислорода.

Билс [19, 20, 21, 22] обнаружил, что звезды Вольф-Райе подразделяются на две параллельные последовательности: азотную WN и углеродную WC. Критериями этой классификации служат отношения интенсивностей линий, оценки эмиссий и сравнение со стандартными звездами. В звездах азотной последовательности наблюдаются линии излучения ионов NIII, NIV, NV, а в звездах углеродной последовательности—ионов CII, CIII, CIV, OII, OIII, OIV, OV. Линии водорода, HeI, HeII являются общими для обеих последовательностей. Билс [21] объяснил наличие WN и WC последовательностей звезд Вольф-Райе реальным различием в их химическом составе.

Аллер [23] определил химический состав этих звезд. В звездах азотной последовательности гелия примерно в 20 раз больше, чем азота, и в триста раз он превышает содержание углерода, в звездах углеродной последовательности гелия в 50 раз больше, чем кислорода, и в 15 раз больше, чем углерода. Отметим, что эти результаты получены применением распределения Больцмана, поэтому они не претендуют на точность. Каковы же причины реального различия химического состава таких молодых объектов, как звезды Вольф-Райе? Гамов [24] дал этому явлению нижеследующую интерпретацию. Он предположил полное превращение водорода в гелий в звездах Вольф-Райе и при этом получил следующее: атмосфера звезд углеродной последовательности содержит около 2% углерода с пренебрежимо малым количеством азота, а в атмосфере азотной последовательности—17% азота и меньше 0,2% углерода. Так как скорость N-цикла реакций от температуры зависит сильнее, чем скорость C-цикла, то в звездах Вольф-Райе разной массы и светимости отношение азота к углероду N/C должно быть неодинаковым. Гамов нашел, что с изменением температуры от $2 \cdot 10^7$ до $5 \cdot 10^7$ °C отношение N/C может изменяться в 10 раз. Это не противоречит наблюдениям. Если водород в звездах Вольф-Райе полностью превратился в гелий, то мы можем предполагать, что гелия в них содержится больше, чем водорода. А это имеет место (см. Аллер [23, 25], С. Г. Слюсарев [26]).

Из изложенного следует, что несмотря на кратковременную стадию звезд Вольф-Райе, они вообще являются весьма старыми объектами. Продолжительностью стадии звезд Вольф-Райе по количеству истекающей материи составляет 10^6 лет. Звездные ассоциации имеют возраст 10^6 лет. Поскольку звезды Вольф-Райе являются членами звездных ассоциаций, то их возраст не может быть больше указанной величины. Возраст звезд спектрального типа O, определяемый по ядерным превращениям, составляет 10^7 лет. Мы предполагаем, что звезды Вольф-Райе образуются из звезд спектрального типа O. Поэтому их возраст не может быть больше возраста звезд спектрального типа O. За это время в ядерных превращениях могут участвовать только легкие элементы. Из этого следует, что мы в атмосферах звезд Вольф-Райе наблюдаем линии тех элементов, которые в данное время принимают участие в ядерных превращениях внутри них. Естественно, возникает вопрос о причине передачи вещества из весьма глубоких внутренних слоев звезды в самые наружные части ее атмосферы. Выход материи из внутренних слоев звезды в ее наружные части может осуществиться по двум причинам.

Первая причина—истечение материи из звезд Вольф-Райе. Вследствие истечения основной массы звезд Вольф-Райе может быть, что в данное время мы наблюдаем их бывшее конвективное ядро. Если это так, то в двойных системах, одним из компонентов которых является звезда Вольф-Райе, следовало наблюдать аномалию в их компо-

нентах спектрального типа O. В данное время трудно найти указание на это явление из наблюдений. Отметим, что специальные наблюдения для этой цели не проводились. Как следует из вышеизложенного, эта задача представляет большой интерес.

Второй причиной возможности наблюдения продукции ядерных реакций может быть перемешивание звездного вещества. Благодаря перемещению вещества звезды из внутренних слоев в ее наружные части, мы можем наблюдать продукцию ядерных реакций без потери большого количества вещества из звезд Вольф-Райе. На основе данных наблюдений мы можем выбрать один из двух возможных механизмов.

Известно, что звезды Вольф-Райе подразделяются на две последовательности: азотную и углеродную. Допустим, что это обусловлено истечением материи. Наблюдения указывают на то, что звезды of также разделяются на азотную и углеродную последовательности. Из звезд of заведомо не истекало большое количество материи. Этот факт ставит под сомнение возможности наблюдения в звездах Вольф-Райе продукции ядерных реакций вследствие истечения материи из них. Поэтому можно сделать вывод о том, что звезды Вольф-Райе эволюционируют перемещением вещества из внутренних слоев в их наружные части. Можно привести некоторые соображения, указывающие на правдоподобность отмеченного.

1. На диаграмме Герцшпрунга—Рессела звезды Вольф-Райе расположены наверху, на левой стороне от главной последовательности. Звезды могут уйти влево от главной последовательности, эволюционируя перемешиванием вещества.

2. Звезды Вольф-Райе встречаются в звездных ассоциациях, т. е. в начале эволюции они имели такой же нормальный химический состав, как и другие их члены. Поэтому за небольшой промежуток времени аномалия в химическом составе может наблюдаться вследствие перемешивания.

3. Конвективное ядро массивных звезд содержит больше половины всей массы звезды (см. Блеклер [27]). Это создает благоприятное условие для осуществления перемешивания вещества. Из вышеизложенного ясно вытекает, что звезды Вольф-Райе не могут быть образованы самостоятельно в начале эволюции. По этой причине они должны образоваться из других звезд. Поскольку звезды Вольф-Райе распределены вдоль всей спирали Галактики, то этот процесс имеет место для всей плоской составляющей Галактики. В работе [1] указано, что звезды Вольф-Райе могут образоваться из звезд спектрального типа O.

Из обсуждаемых вопросов в данной статье вытекают следующие задачи:

- 1) проверить количественным анализом эмиссионных полос возможную роль селективного излучения;
- 2) наблюдением O-компонентов двойных звезд проверить возможности аномалии о химическом составе их атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-заде А. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук. 1969. № 4.
2. Гусейн-заде А. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук. 1969. № 4.
3. Campbell W. Astron. and Astrophys. 13, 448, 1894.
4. Wright W. H. Publ. Lick obs. 13, 258, 1918.
5. Plaskett T. S. Publ. Dom. Astron. obs. 1, 287, 1924.
6. Perrine C. D. Ap. J., 47, 52, 1918.
7. Perrine C. D. Ap. J., 51, 39, 1920.
8. Payne C. H. Harvard Bull., № 843, 1927.
9. Payne C. H. Harvard Bull., № 845, 1927.

10. Swings P. Ap. j., 95, 112, 1942.
11. Smith I. H. Fthesis Harvard University, 1955.
12. Edlen B. Vistas in astronomy, 1, 373, 1956.
13. Underhill A. B. Publ. Dom. Astr. obs. victoria, 11, 209, 1959.
14. Smings P. and Iose. Ap. j., 111, 513, 1950.
15. Edlen I. Fthesis, Univesie de Lyon, 1955.
16. Edlen B. Zs. Ap., 7, 378, 1933.
17. Edlen B. Observatory, 55, 115, 1933.
18. Underhill A. B. Early type of stars Dordrecht, 1966.
19. Beals C. S. Publ D. A. O. victoria, 4, 290, 1930.
20. Beals C. S. Publ D. A. O. victoria, 6, 95, 1934.
21. Beals C. S. Trans. I A U, 1935.
22. Beals C. S. Trans. I A U, 1938.
23. Aller L. H. Ap. j., 96, 135, 1943.
24. Gamov G. Ap. j., 97, 500, 1943.
25. Аллер Л. Х. Астрофизика 1957, т. 2. ИЛ, М., 1955.
26. Слюсарев С. Г. "Астроном. ж.", 37. вып. 4, 1955.
27. Blackler T. M. N., 118, 37, 1958

ШАО

Поступило 8. IX 1969

Ә. Ә. Нүсейзада

Волф-Раје улдузларынын ики мүмкүн олан
тәкамүл јолу

ХҮЛАСӘ

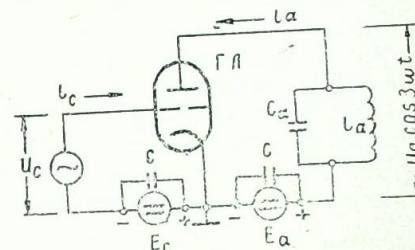
Мәгаләдә кениш атмосферә малик олан улдузларын тәкамүл јолларына бахылмышдыр.

Фәрз едилир ки, Волф-Раје улдузларынын тәкамүлү маддәнин гарышмасы илә кедир. Мә'лум олмушдур ки, Волф-Раје улдузлары өз тәкамүлүнүн башлангычында һазырда мүшәһидә олундуғу кими јарана билмәз.

Т. К. ИСМАИЛОВ

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМА УТРОИТЕЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ УЧЕТЕ ОГРАНИЧЕНИЯ РОСТА К. П. Д. ГЕНЕРАТОРА ТЕПЛОВЫМИ ПОТЕРЯМИ НА СЕТОЧНОМ ЭЛЕКТРОДЕ ЛАМПЫ

В случае ограничения роста к. п. д. умножителя высокочастотных колебаний предельно допустимыми тепловыми потерями на сеточном электроде генераторной лампы (ГЛ), что весьма характерно для современных генераторных триодов [1—5], режим оптимального к. п. д. по анодной цепи ГЛ-утроителя (рис. 1) может быть реализован при выполнении следующего условия:



$$\left(\frac{\eta_a}{P_{\text{сдоп}}} \right)_{\text{макс}} = \left(\frac{P_3}{P_0 P_{\text{сдоп}}} \right)_{\text{макс}} \quad (1)$$

где $\eta_a = \frac{P_3}{P_0}$ — коэффициент полезного действия ГЛ-утроителя по анодной цепи;

$P_{\text{сдоп}} = (P_{c1} + P_{c0})$ — предельно допустимая мощность потерь на сетке ГЛ;

$P_3 = \frac{R_3}{2} \left[\frac{S_a U_c \gamma_{a3}}{1 + \gamma_{a2} F_{13} (1 + 2 \cos \theta_a)^2} \right]^2$ — колебательная мощность ГЛ-утроителя с учетом реакции анодного напряжения;

$P_0 = E_a \frac{S_a U_c \gamma_{a0}}{1 + \gamma_{a3} F_{13} (1 + 2 \cos \theta_a)^2}$ — подводимая к ГЛ-утроителю мощность источника анодного питания с учетом реакции анодного напряжения.

При работе ГЛ-утроителя на настроенную R_3 косинусоидальным импульсом анодного тока высотой $i_{\text{амакс}}$ величины, входящие в (3), (4) и (5), имеют следующие значения:

$U_c = \frac{i_{\text{амакс}}}{S_a} \frac{1 + \gamma_{a3} F_{13} (1 + 2 \cos \theta_a)^2}{1 - \cos \theta_a}$ — напряжение возбуждения ГЛ-утроителя;

$$\gamma_{a3} = \frac{2}{3\pi} \sin^3 \theta_a \cos \theta_a$$

— коэффициент разложения третьей гармоники [1] импульса анодного тока; (7)

$$\gamma_{a0} = \frac{1}{\pi} (\sin \theta_a - \theta_a \cos \theta_a)$$

— коэффициент разложения постоянной составляющей [1] импульса анодного тока; (8)

$$\theta_a = \arccos \left(\frac{E_c - E'_c}{U_c - DU_a} \right)$$

— угол отсечки [1] импульса анодного тока; (9)

$$U_a = R_3 \frac{S_a U_c \gamma_{a3}}{1 + \gamma_{a3} F_{13} (1 + 2 \cos \theta_a)^2}$$

— колебательное напряжение на анодном контуре ГЛ-утроителя; (10)

$$P_{c1} = \frac{S_c U_c^2 \gamma_{c1}}{2}$$

— мощность возбуждения ГЛ; (11)

$$P_{c0} = -S_c U_c^2 \gamma_{c0} \cos \theta_c$$

— мощность, потребляемая из сеточной цепи (или поставляемая в нее) источником напряжения смещения; (12)

$$\gamma_{c1} = \frac{K_{c1}}{2\pi} (2\theta_c - \sin 2\theta_c)$$

— коэффициент разложения первой гармоники некосинусоидального [3] импульса сеточного тока; (13)

$$\gamma_{c0} = \frac{K_{c0}}{\pi} (\sin \theta_c - \theta_c \cos \theta_c)$$

— коэффициент разложения постоянной составляющей некосинусоидального [3] импульса сеточного тока; (14)

$$\theta_c = \arccos \left(-\frac{E_c}{U_c} \right)$$

— угол отсечки [3] импульса сеточного тока; (15)

$$F_{13} = \frac{R_3}{R_1}$$

— относительное сопротивление анодной нагрузки ГЛ-утроителя; (16)

$$Ri = \frac{1}{S_a D}$$

— „эквивалентное“ внутреннее сопротивление ГЛ; (17)

$$S_a, D$$

— „эквивалентные“ параметры [2] генераторной лампы; — „эквивалентное“ напряжение геометрического смещения [2].

Преобразуем (2) с учетом (4), (5) и (6):

$$\eta_a = \frac{\gamma_{a3}^2}{2\gamma_{a0}(1 - \cos \theta_a)} \frac{i_{a \max} R_3}{E_a} \quad (18)$$

В результате подстановки (6), (11) и (12) в (13) получим:

$$P_{\text{сдop}} = \frac{S_c (\gamma_{c1} - 2\gamma_{c0} \cos \theta_c)}{2} \left[\frac{i_{a \max}}{S_a} \frac{1 + \gamma_{a3} F_{13} (1 + 2 \cos \theta_a)^2}{1 - \cos \theta_a} \right]^2 \quad (19)$$

Введем обозначения:

$$A_{13} = [1 + \gamma_{a3} F_{13} (1 + 2 \cos \theta_a)^2]^2 \quad (20)$$

— коэффициент реакции анодного напряжения ГЛ-утроителя;

$$B_{13} = \gamma_{c1} - 2\gamma_{c0} \cos \theta_c \quad (21)$$

— коэффициент режима сеточной цепи ГЛ-утроителя.

Подставив значения (20) и (21) в (19), получим выражение для предельно допустимой мощности потерь на сетке ГЛ-утроителя:

$$P_{\text{сдop}} = \frac{A_{13} B_{13}}{2} \frac{S_c}{S_a^2} \left(\frac{i_{a \max}}{1 - \cos \theta_a} \right)^2 \quad (22)$$

Принимая во внимание (18) и (22), запишем условие (1) в виде

$$\left(\frac{\eta_a}{P_{\text{сдop}}} \right)_{\max} = \left(\frac{S_a^2}{S_c} \frac{R_3}{i_{a \max} E_a} \frac{1 - \cos \theta_a}{\gamma_{a0}} \frac{\gamma_{a3}^2}{A_{13} B_{13}} \right)_{\max} \quad (23)$$

Из (23) следует, что величина сопротивления нагрузки ГЛ-утроителя, при которой реализуется режим оптимального к. п. д., определится из выражения;

$$\frac{d}{dR_3} \left(\frac{S_a^2}{S_c} \frac{R_3}{i_{a \max} S_a} \frac{1 - \cos \theta_a}{\gamma_{a0}} \frac{\gamma_{a3}^2}{A_{13} B_{13}} \right) = 0. \quad (24)$$

Выполнив дифференцирование (24), получим:

$$R_{\text{зopt}} = \frac{A_{13} B_{13}}{A_{13} \frac{dB_{13}}{dR_3} + B_{13} \frac{dA_{13}}{dR_3}} \quad (25)$$

Из рассмотрения формулы (25) видно, что величина сопротивления нагрузки ГЛ-утроителя в режиме оптимального к. п. д. зависит от параметров как анодной (A_{13}), так и сеточной цепи (B_{13}) генератора. Однако указанная взаимосвязь цепей анода и сетки в (25) дана не в явном виде, что, безусловно затрудняет проведение дальнейшего анализа исследуемого режима. Поэтому возникает необходимость в расшифровке формулы (25) и доведения ее до вида, удобного для использования в инженерной практике. С целью выполнения этой задачи исследуем формулу (25). Прежде всего, представим коэффициент реакции анодного напряжения (20) в следующем виде:

$$A_{13} = A_{13}^{(1)} + R_3 A_{13}^{(2)}, \quad (26)$$

где

$$A_{13}^{(1)} = 1 + \gamma_{a3} F_{13} (1 + 2 \cos \theta_a)^2, \quad (27)$$

$$A_{13}^{(2)} = \frac{\gamma_{a3} (1 + 2 \cos \theta_a)}{R_1} A_{13}^{(1)}. \quad (28)$$

Используя (6), (9), (10), (15), (17), и (26)–(28), можно установить следующую взаимосвязь между углами отсечки токов анода и сетки ГЛ-утроителя:

$$\theta_c = \arccos \left\{ \frac{1 - \cos \theta_a}{A_{13}^{(1)}} \left\{ \frac{\cos \theta_a}{1 - \cos \theta_a} [1 + 2\gamma_{a3} F_{13} (1 + 2 \cos \theta_a) \cos \theta_a] - \kappa \right\} \right\}, \quad (29)$$

$$\theta_a = \arccos \left\{ \frac{A_{13}^{(1)}}{1 + 2\gamma_{a3} F_{13} (1 + 2 \cos \theta_a) \cos \theta_a} \left[\cos \theta_c + \kappa \frac{1 - \cos \theta_a}{A_{13}^{(1)}} \right] \right\}, \quad (30)$$

где

$$\kappa = \frac{E_c^1 S_a}{i_{a \max}} \text{ — параметр режима.}$$

Принимая во внимание (29) и (31), рассмотрим отдельные составляющие (25). В частности, выполнив дифференцирование (21), получим

$$\frac{dB_{13}}{dR_3} = \frac{d\gamma_{c1}}{dR_3} - 2 \cos \theta_c \frac{d\gamma_{co}}{dR_3} 2 \gamma \cos \theta_c \frac{d\theta_c}{dR_3}$$

или

$$\frac{dB_{13}}{dR_3} = \frac{1,38}{\pi} \frac{A_{13}^{(2)}}{A_{13}} m_{13} \sin 2\theta_c, \quad (32)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{d \cos \theta_c}{dR_3} &= \frac{2\gamma_{a3}(1+2\cos\theta_a)}{1+\gamma_{a3}F_{13}(1+2\cos\theta_a)^2} \frac{\cos^2\theta_a}{Ri} - \\ &- \frac{\gamma_{a3}(1+2\cos\theta_a)^2}{Ri} \frac{(1-\cos\theta_a)\left\{ \frac{\cos\theta_a}{1-\cos\theta_a} [1+2\gamma_{a3}F_{13}(1+2\cos\theta_a)^2 \right.}{+ 2\cos\theta_a \cos\theta_a] - \kappa \}}{[1+\gamma_{a3}F_{13}(1+2\cos\theta_a)^2]^2} = \frac{2\gamma_{a3}(1+2\cos\theta_a)^2}{A_{13}^{(1)}} \frac{\cos^2\theta_a}{Ri} - \\ &- \frac{\gamma_{a3}(1+2\cos\theta_a)^2}{A_{13}^{(1)}} \frac{\cos\theta_c}{Ri} = - \frac{\gamma_{a3}(1+2\cos\theta_a)^2}{A_{13}^{(1)}} \frac{\cos\theta_c}{Ri} \left[1 - \right. \\ &- \left. \frac{2}{1+2\cos\theta_a} \frac{\cos^2\theta_a}{\cos\theta_c} \right] = - \frac{A_{13}^{(2)}}{A_{13}} m_{13} \cos\theta_c; \\ \frac{d\theta_c}{dR_3} &= - \frac{1}{V 1 - \cos^2\theta_c} \frac{d \cos \theta_c}{dR_3} = \frac{A_{13}^{(2)}}{A_{13}} m_{13} \operatorname{ctg} \theta_c; \\ \frac{d\gamma_{c1}}{dR_3} &= \frac{0,72}{\pi} (1 - \cos 2\theta_c) \frac{d\theta_c}{dR_3} = \frac{1,44}{\pi} \sin^2\theta_c \frac{d\theta_c}{dR_3} = \\ &= - \frac{1,44}{\pi} \frac{\sin^2\theta_c}{V 1 - \cos^2\theta_c} \frac{d \cos \theta_c}{dR_3} = \frac{0,72}{\pi} \frac{A_{13}^{(2)}}{A_{13}} m_{13} \sin 2\theta_c; \\ \frac{d\gamma_{co}}{dR_3} &= \frac{0,66}{\pi} \theta_c \frac{d \cos \theta_c}{dR_3} = - \frac{0,66}{\pi} \frac{A_{13}^{(2)}}{A_{13}} m_{13} \theta_c \cos \theta_c; \\ m_{13} &= 1 - \frac{2}{1+2\cos\theta_a} \frac{\cos^2\theta_a}{\cos\theta_c}. \end{aligned}$$

В результате дифференцирования выражения (20) получим

$$\frac{dA_{13}}{dR_3} = \frac{2\gamma_{a3}(1+2\cos\theta_a)^2}{Ri} [1 + \gamma_{a3}F_{13}(1+2\cos\theta_a)^2]$$

или, с учетом (26)÷(28),

$$\frac{dA_{13}}{dR_3} = 2A_{13}^{(2)}. \quad (33)$$

Принимая во внимание (27), (28), (32) и (33) преобразуем (25):

$$R_{3\text{опт}} = \frac{A_{13\text{опт}}}{A_{13\text{опт}}^{(2)}} \frac{B_{13\text{опт}}}{2B_{13\text{опт}} + \frac{1,38}{\pi} \sin 2\theta_{c\text{опт}}}$$

или

$$R_{3\text{опт}} = Ri F_{13\text{опт}}, \quad (34)$$

где

$$F_{13\text{опт}} = \frac{1}{\gamma_{a3}(1+2\cos\theta_a)^2 \left(1 + \frac{1,38}{\pi} \frac{\sin 2\theta_{c\text{опт}}}{B_{13\text{опт}}} \right)} \quad (35)$$

— относительное сопротивление ГЛ-утроителя в режиме оптимального к. п. д.

Анализ разработанного выше аналитического аппарата показывает, что решение задачи оптимального к. п. д. утроителя высокочастотных колебаний, у которого рост к. п. д. ограничивается предельно допустимыми тепловыми потерями на сеточном электроде ГЛ, принципиально сводится к определению по уравнению (34) величины опти-

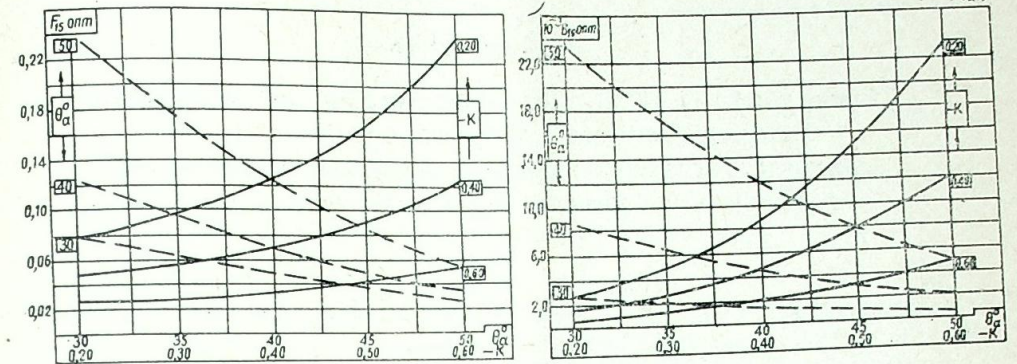


Рис. 2.

мального сопротивления нагрузки генератора в искомом режиме. Подчеркнем, что определение $R_{3\text{опт}}$ по (34) сводится к решению уравнения (35), так как для выбранного типа лампы величина Ri известна. В то же время величина $F_{13\text{опт}}$ зависит от $R_{3\text{опт}}$, что следует из рассмотрения (13), (14), (21) и (29). Следствием указанной взаимосвязи между $R_{3\text{опт}}$ и $F_{13\text{опт}}$ является то, что уравнение (34) и (35) не могут быть решены в общем виде. Поэтому они были запрограммированы и решены с высокой точностью на ЭВМ БЭСМ-2М по итерационной схеме [6] для наиболее часто встречающихся в практике значений κ , θ_a и Ri (рис. 2).

Анализ результатов полученных решений уравнений (34) и (35) позволил установить и исследовать ряд новых качественных и количественных соотношений в цепях ГЛ в режиме оптимального к. п. д. (например, всевозможные изменения в форме управляющего напряжения, связанные с реакцией анода; зависимость угла отсечки сеточного тока от величины отсечки тока анода и сопротивления нагрузки ГЛ; зависимость угла отсечки сеточного тока от величины отсечки анодного тока в динамическом режиме и т. д.)

В заключение отметим, что результаты настоящей работы, позволяющие достаточно полно и точно исследовать физические явления в цепях утроителя высокочастотных колебаний в оптимальном режиме, на наш взгляд, практически могут быть использованы как проектантами мощных генераторных устройств, так и разработчиками новых генераторных ламп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марголин М. Г. Ламповый усилитель мощности (анализ и расчет). Госэнергоиздат, 1957.
2. Линде Д. П. Основы расчета ламповых генераторов СВЧ. Госэнергоиздат, 1959.
3. Хацкелевич В. А. Расчет режимов новых генераторных триодов. Связь издат, 1961.
4. Исмаилов Т. К., Агаев Э. А. Применение ЭВМ для решения задачи оптимального к. п. д. генераторного триода с веерообразными статическими характе-

ристиками при удвоении частоты. Сб. „Реферативная информация по радиоэлектронике“, 1969, № 9.

5. Исмаилов Т. К., Агаев Э. А. Номограммы расчета генераторных триодов с веерообразными статическими характеристиками при умножении частоты. Сб. „Реферативная информация по радиоэлектронике“, 1969, № 9.

6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Физматгиз, 1959.

7. Электроваккуумные приборы. Справочник, т. V, НИИ МЭП СССР, 1966.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 1. XII 1969

Т. К. Исмаилов

Генераторун Ф. И. Э.-нин, лампанын тор электродундакы
истилик иткилэрилэ мѣдудлашмасыны нѣзэрѣ
алмагла, јүксѣк тезликли рѣгс үчгатлашдырычысынын
оптимал режиминин тѣдгиги мѣсѣлѣсинѣ даир

ХҮЛАСӘ

Мѣгалѣдѣ јүксѣк тезликли рѣгс үчгатлашдырычысынын оптимал Ф. И. Э.-нин ѣллинин дүстурлашдырылмасы верилмишдир. Бу ѣалда генераторун Ф. И. Э.-нин артмасы, лампанын тор электродундакы мүмкүн олан итилик иткилеринин гѣјмѣтилѣ мѣдудлашдырылмасы нѣзѣрдѣ тутулмушдур. Гојулмуш мѣсѣлѣ ѣлектрон-ѣесаблајычы машынын кѣмѣклији илѣ „итерасија“ методуна ѣсасѣн ѣѣлл олунмушдур.

Гѣјд ѣтмѣк лазымдыр ки, ишлѣнмиш методикаја кѣрѣ, ѣесаблама-нын нисби хѣтасы лампалы параметрлѣрдѣ јол верилѣн кѣнарачыхмалары ашмыр.

АЗѢРБАЈҘАН ССР ЕЛМЛѢР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХѢБѢРЛѢРИ
Физика-техника вѣ рѣјазѣјјат елмлѣри сѣријасы, 1970, № 5.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 5

Н. А. АЛИЕВ, Р. А. АКОПЯН, Ф. Г. МАГЕРРАМОВА, Б. А. АХМЕДОВ

ТЕРМИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА СТАЛИ 36Г2С

При бурении нефтяных скважин в трубах из стали 36Г2С были обнаружены трещины и разрывы. Результаты исследований показали [1], что одновременно с упрочнением путем легирования в прокатанных трубах образуются напряжения I рода, для снятия которых необходимо подвергнуть их соответствующей термообработке. Целью настоящей работы являлось рентгенографическое исследование труб из стали 36Г2С, подвергнутой различным видам термообработки. Исследуемые трубы прокатывались из трех серий плавок вышеуказанной стали с различным содержанием марганца, состав которых приведен в табл. 1.

Таблица 1

Марка стали	№ плавки	Химический состав, %						
		C	Mn	Cr	Ni	Si	S	P
36Г2С	1	0,27	1,50	0,04	0,08	0,45	0,026	0,034
	2	0,40	1,93	0,03	0,06	0,40	0,020	0,024
	3	0,36	1,60	0,04	0,08	0,45	0,026	0,034

Прокатка производилась на трубопрокатном агрегате с автоматическим станом. Исходной заготовкой для проката служил металл, отлитый в мартеновской печи и обжатый на блюминге и трубозаготовочном стане. Начальная температура прокатки достигала $1150 \div 1200^\circ\text{C}$ и конечная $650-700^\circ\text{C}$, число оборотов мотора прошивного стана $n=115 \text{ об/мин}$, угол наклона валков прошивного стана к оси прошивки составлял 8° . Дальнейшее охлаждение производилось на воздухе.

Для сравнительного исследования структурных изменений и некоторых физико-механических свойств охлаждение при закалке производилось водой и сжатым воздухом (при давлении $p=2 \text{ атм}$). Рентгенографирование исследуемых образцов осуществлялось методом, описанным в [2].

Известно, что при горячей прокатке металлов одновременно с процессом пластической деформации происходит рекристаллизация, которая продолжается и после окончания деформации, пока температура не снизится ниже температуры рекристаллизации. Это обстоятельство проявляется на рентгенограммах в полном разделении K_α -дублета линий, соответствующих большому углом отражения. Несмотря на это, на всех полученных рентгенограммах от вышеупомянутых трех

партий стали наблюдалась размытость $K\alpha$ -дублета линии (220). Расшифровка рентгенограмм производилась методом аппроксимации [3]. Стандартом служил образец из стали 36Г2С, отожженный при 800°C в течение 5 часов в вакууме. Ширина рентгеновских линий (110) и (220) стандарта соответственно составляла $9,05$ и $13,04 \times 10^{-3}$ рад. Результаты вычислений полученных рентгенограмм приведены в табл. 2. B_1 и B_2 — ширина линий (110) и (220), соответственно.

D — размеры блоков,
 ϵ — микронскажения.

Таблица 2

Вид термообработки	I партия				II партия				III партия			
	$B_1 10^{-3}$ рад	$B_2 10^{-3}$ рад	$D 10^{-6}$ см	$\epsilon 10^{-3}$	$B_1 10^{-3}$ рад	$B_2 10^{-3}$ рад	$D 10^{-6}$ см	$\epsilon 10^{-3}$	$B_1 10^{-3}$ рад	$B_2 10^{-3}$ рад	$D 10^{-6}$ см	$\epsilon 10^{-3}$
Прокатка	13,2	40,1	5,9	2,1	14,4	41,1	3,0	1,2	12,8	36,2	5,0	1,2
Нормализация	11,5	29,2	7,0	0,7	11,8	34,0	7,9	1,5	11,5	29,5	6,9	0,6
Закалка в воде	19,0	68,8	2,5	4,2	20,2	74,5	2,4	4,8	17,9	62,2	2,4	4,1
Закалка в воде и отпуск	14,4	40,0	3,7	1,8	16,8	41,9	3,3	1,4	13,7	36,7	3,7	1,0
Закалка обдувкой	13,5	41,6	4,9	2,1	19,2	71,9	2,7	4,8	18,3	51,6	3,2	2,6
Закалка обдувкой и отпуск	13,0	36,5	4,4	1,2	12,5	35,8	5,5	1,5	12,5	33,2	4,6	0,7

Как видно из табл. 2, ширина линий на рентгенограммах исследуемых образцов обусловлена как микронскажениями кристаллической решетки, так и дисперсностью блоков. Вычисления показывают, что для исследуемых партий стали максимальное значение микронскажений кристаллической решетки $(4,1—4,8) \cdot 10^{-3}$ и минимальное значение размеров блоков $(2,4—2,5) \cdot 10^{-6}$ см соответствуют образцам, закаленным в воде. Указанные величины являются одной из основных характеристик упрочнения и разупрочнения металлов. Исходя из этого, на основании проведенного рентгенографического исследования можно сказать, что среди рассматриваемых видов термообработки исследуемых партий стали наибольшее упрочнение происходит в случае закалки в воде [4]. Охлаждение в воде исключает образование троостита, а протекающее мартенситное превращение часто вызывает появление трещин. Одной из причин образования трещин при закалке в воде стальных деталей является не большая скорость охлаждения в области мартенситного превращения, а неодновременность мартенситообразования в разных зонах охлаждаемого изделия. В результате создается сложнапряженное состояние, характеризующееся возникновением в отдельных зонах детали больших растягивающих напряжений.

В первый период охлаждения больших напряжений возникнуть не может. Однако при температурах ниже 600—500°C растягивающие напряжения на поверхности резко возрастают и, по-видимому, являются одной из причин возникновения трещин в образцах. Ширина интерференционной линии, полученная от образца, закаленного в воде, больше, чем у закаленного сжатым воздухом, поэтому можно полагать, что при закалке обдувкой реализуется уже частично "отпущенная" структура α -фазы. Возможно, при сравнительно медленном охлаждении

сжатым воздухом в стали успевает частично произойти процесс распада.

При закалке сжатым воздухом размеры блоков и микронапряжения исследуемых трех партий стали отличаются. Подобное различие размеров блоков и микронапряжений вряд ли можно объяснить различным содержанием марганца в сталях. Вероятно, такое различие может быть объяснено неоднородной полосчатой структурой, состоящей из феррито-перлитной основы, с участками промежуточной структуры, в которых наблюдается ликвация марганца. Исходя из этого, однородную структуру и в соответствии с этим постоянные гарантированные свойства труб из стали 36Г2С можно получить после закалки с высоким отпуском.

Выяснение сущности процессов отпуска, установление деталей структурных превращений при отпуске и связи между структурой и свойствами, возникающими в различных температурных областях отпуска, являются актуальными задачами металловедения. Высокий отпуск производится при температурах примерно 500—650°C для создания однородной структуры сорбита отпуска. Его основное назначение сводится к тому, чтобы получить достаточно высокую твердость в сочетании с высокой вязкостью. Этот вид отпуска применяется в основном для деталей, подвергающихся действию высоких напряжений. Предварительные рентгенографические исследования стали 36Г2С [4] показали, что образцы, закаленные от 900°C сжатым воздухом и подвергавшиеся отпуску при температуре 600°C, обладают удовлетворительной характеристикой тонкой структуры (размеры блоков и микронскажения) для получения оптимального сочетания механических свойств.

Таблица 3

Вид термообработки	Температура, °C		B_1	B_2	D	ϵ
	закалки	отпуска	10^{-3} рад	10^{-3} рад	10^{-6} см	10^{-3}
Закалка обдувкой с отпуском	950	550	6,20	28,9	11,3	0,90
		600	6,10	28,4	12,4	0,86
		650	6,05	27,5	12,5	0,76
Закалка в воде с отпуском	"	550	6,8	32,9	10,7	1,40
		600	6,4	30,4	12,3	1,13
		650	6,0	27,8	14,2	0,85
Закалка обдувкой с отпуском	900	550	6,0	32,0	10,8	1,44
		600	6,1	27,4	12,3	0,74
		650	5,8	27,3	14,2	0,73
Закалка в воде с отпуском	900	550	6,6	34,7	11,6	1,40
		600	6,3	30,2	12,9	1,11
		650	6,2	29,0	14,0	1,01
Нормализация	"	550	4,5	22,6	14,6	0,35
		600	5,6	22,9	14,5	1,40
		650	5,6	22,9	14,5	1,40
Исходное состояние	900		12,5	53,7	3,2	3,20
Закалка в воде	900		8,1	37,8	6,1	1,70
Закалка обдувкой	900					

Рентгенографическое исследование образцов двух серий труб, подвергнутых отпуску при температуре 550, 600 и 650°C и закаленных от 900 и 950°C показали (табл. 3), что с увеличением температуры отпуска на рентгенограммах наблюдается уменьшение ширины линий, а у нормализованного образца происходит полное разделение $K\alpha$ -дублета.

В работе [5] на основании полученных данных автор пришел к выводу, что выделяющиеся при температуре отпуска ниже 300°C карбиды весьма бедны легирующими элементами. Значительное количество марганца (малоуглеродистая сталь, легированная 1,83% Mn) в выделяющихся карбидах появляется лишь примерно при $350-450^{\circ}\text{C}$ и начинает быстро расти при отпуске выше 500°C .

Как видно из табл. 3, независимо от температуры закалки при высокотемпературном отпуске с увеличением температуры отпуска наблюдается уменьшение ширины рентгеновской линии (220), что приводит к изменению значений микроискажений и размеров блоков. Это объясняется, по-видимому, тем, что при высокотемпературном отпуске происходит изменение степени коагуляции составляющих α -фазы. Исходя из вышесказанного можно сказать, что среди отпущенных образцов, закаленных в воде, оптимальными механическими свойствами будет обладать образец, подвергнутый закалке от 950°C и отпущенный при температуре 600°C . В этом случае значения микроискажения достигают $1,13 \cdot 10^{-3}$, а размеры блоков составляют $12,3 \cdot 10^{-6}$ см [6]. Из этой же таблицы следует, что при закалке обдувкой с последующим отпуском наименьшие размеры блоков имеют образцы, закаленные от 950°C и отпущенные при 550°C . В этом случае значение микроискажения достигает $1,4 \cdot 10^{-3}$, а размеры блоков $11,3 \cdot 10^{-6}$ см. Такой режим термической обработки можно рекомендовать для получения оптимального сочетания механических свойств (твердости, ударной вязкости, пластичности) стали 36Г2С.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Н. А., Магеррамова Ф. Г., Ахмедов Б. А., Мусазаде М. М., Изв. АН СССР, Металлы, 1969, № 5.
2. Алиев Н. А., Магеррамова Ф. Г., Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1961, № 5.
3. Лысак Л. И. Вопросы физики металлов и металловедения. Изд. АН Укр. ССР, Киев, 1955.
4. Алиев Н. А., Акопян Р. А., Ахмедов Б. А., Мусазаде М. М., Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1969, № 1.
5. Завьялов К. Теории легирования и термической обработки стали. Изд. ЦНИИ НКТП, 1943.
6. Алиев Н. А., Ахмедов Б. А., Акопян Р. А., Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1969, № 5.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 21. IV 1970

Н. Э. Элиев, Р. А. Аюпджан, Ф. Г. Мәһәррәмова, Б. А. Әһмәдов

36Г2С маркалы поладын термик е'малы

ХҮЛАСӘ

Мәгалә 36Г2С маркалы поладын термик е'малына һәср едилмишдир. Көстәрилән полад $900, 950^{\circ}\text{C}$ температура гәдәр гыздырыларак су вә сыхылмыш һава илә ($P=2$ атм) табландырылмышдыр. Табәксилтмә исә һәр ики һалда $550, 600$ вә 650°C температурларда апарылмышдыр. Термик е'малдан сонра нүмунәләр ренткенографик тәдгиг олунмушдур.

Ренткенографик тәдгигатын нәтичәләри көстәрир ки, мөһкәмлији характеризә едән кәмијәтләрдән блокларын хәтти өлчүсүнүн ән кичик $(2,4-2,5) \cdot 10^{-6}$ см вә микроәркинлијин ән бөјүк $(4,1-4,8) \cdot 10^{-3}$ гижмәти су илә сојудулмуш нүмунәләрә тәвафүг едир. Нүмунәләрин бәрклијинин өлчүлмәси дә онун ән бөјүк гижмәтинин бу һала ујғун кәлдијини көстәрир. Лакин су илә сојутма заманы сојудулан нүмунәләрдә чат-

лар әмәлә кәлир. Бунун сәбәби мартенсит областында сојума сүр'әтинин бөјүк олмасы дејил, сојудулан нүмунәләрин мұхтәлиф јерләриндә мартенситин мұнтәзәм пәјланмәмәсидир.

Нүмунәләри сыхылмыш һава илә табландырылды исә сојума сүр'әтинин азалмасы илә әләгәдар, мартенсит гисмән парчаланыр. Ренткенографик тәдгигат көстәрмишдир ки, бу һалда блокларын хәтти өлчүсү вә микроәркинлик тәдгиг олунан үч груп нүмунә үчүн гејри-мұнтәзәм дәјишир. Бунун сәбәби сојутма заманы бирчинс олмајан золаглы гурулушун әмәлә кәлмәсидир. Демәли, бирчинс гурулуш вә сабит хәссәләр әлдә етмәк үчүн нүмунәләр табландырылдыгдан сонра јүксәк температурда табәксилтмә просесинә уғрадылмалыдыр.

Тәдгигат нәтичәсиндә мұәјјән едилмишдир ки, бахылан 36Г2С маркалы поладда оптимал механики хәссәләр әлдә етмәк үчүн һәмин поладдан һазырланмыш борулары 950°C температура гәдәр гыздырыгдан сонра сыхылмыш һава илә табландырмаг, сонра исә 550°C температурда табыны әксилтмәк лазымдыр.

К. С. АХВЕРДИЕВ

ОБ ОДНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОБМЕНЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ДИФFUЗОРЕ

Одномерное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя наклоненными друг к другу стенами под углом рассматривалось в работах [1, 2], в которых показано, что сходящиеся и расходящиеся течения в диффузоре имеют при некоторых условиях совершенно разный характер.

Ниже рассматривается автомодельное решение задачи о теплообмене вязкой несжимаемой жидкости в плоской диффузорной трубе длиной L с шириной входного сечения $2h_0$ и выходного $2h_1(x)$. Предположим, что давление в начальном сечении трубопровода поддерживается постоянным и $L \gg h_0, h_1$. Выберем начало координат во входном сечении и направим ось x вдоль оси симметрии трубы. Тогда уравнения границ трубы записываются так:

$$y = \pm h(x) = \pm (h_0 + x \operatorname{tg} \alpha), \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{h_1 - h_0}{L}.$$

В уравнениях Навье—Стокса, а также в уравнении притока тепла, описывающих стационарное неизотермическое движение вязкой жидкости, пренебрегая членами порядка h/L , мы получим уравнения движения вязкой жидкости в тонком слое*:

$$\begin{aligned} \rho \left(v_x \frac{dv_x}{dx} + v_y \frac{dv_y}{dy} \right) &= - \frac{dP}{dx} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}, \\ \frac{dP}{dy} &= 0, \quad \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} = 0, \\ C_p \rho \left(v_x \frac{dT}{dx} + v_y \frac{dT}{dy} \right) &= \kappa \frac{d^2 T}{dy^2} + A \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь T —абсолютная температура жидкости, ρ —плотность, P —давление, κ —коэффициент теплопроводности, μ —вязкость, C_p —теплоемкость при постоянном давлении, A —термический эквивалент работы, v_x, v_y —составляющие вектора скорости частиц жидкости.

*Так как температура не входит в уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости, то последнее уравнение системы (1) в дальнейшем будем решать отдельно, после того как поле скоростей будет определено.

Система уравнений (1) решается при следующих граничных условиях: на стенах трубы заданы температуры и выполняется условие прилипания жидкости, в начальном сечении трубы известно давление. Если ввести в рассмотрение функцию тока ψ по формулам

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

то задача сводится в решении уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \\ C_p \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + A \mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

При следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm h(x); \quad (4)$$

$$T = f_1(x) \text{ при } y = h(x); \quad T = f_2(x) \text{ при } y = -h(x); \\ P(x) = P_* \text{ при } x=0$$

Здесь $f_1(x)$ и $f_2(x)$ —заданные температуры на стенках трубопровода, а P_* —заданное давление в начальном сечении трубы.

Будем искать решение задачи (3)—(4) в виде:

$$\psi = \psi(\xi), \quad \xi = \frac{y}{h(x)}, \quad P = \varphi(x), \quad T = \frac{\bar{T}\xi}{h^2(x)}. \quad (5)$$

После небольших вычислений система уравнений (3) сильно упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 &= \frac{h^3(x)}{\rho} \varphi'(x), \\ \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + 2C_p \rho \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \bar{T}(\xi) + A \eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из первого уравнения системы (6) видно, что как левая, так и правая части являются постоянными величинами. Отсюда для определения функции $\varphi(x)$ получим уравнение

$$\varphi'(x) = \rho C / (h_0 + x \operatorname{tg} \alpha)^3 \quad (7)$$

С другой стороны, функция ψ должна удовлетворять уравнению

$$\nu \psi'''(\xi) + \operatorname{tg} \alpha \psi'^2 - c = 0.$$

Введем для простоты обозначение $\psi' = u(\xi)$, тогда будем иметь уравнение

$$\nu u''(\xi) + \operatorname{tg} \alpha u^2(\xi) - c = 0 \quad (8)$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= 0 \quad \text{при } \xi = \pm 1; \quad \int_{-1}^1 u(\xi) d(\xi) = Q; \\ u'(\xi) &= 0 \quad \text{при } \xi = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

вытекающие из условий (4), вследствие того, что при $y = \pm h(x)$ (т. е. $\xi = \pm 1$) v_x, v_y должны обращаться в нуль, а при $y = 0$; $\partial v_x / \partial y$ должно обращаться в нуль в силу симметрии течения. Кроме того,

следует учесть, что через любое поперечное сечение диффузора в каждую единицу времени проходит определенный объем жидкости (т. е. расход Q будем считать заданным).

Введем в рассмотрение безразмерную величину $R = \bar{L} \cdot v / \nu$, где R — число Рейнольдса, v — характерная скорость, а $\bar{L}$ — характерная длина. Из (2) следует, что в нашем случае расход Q имеет размерность длины. Поэтому будем определять число Рейнольдса формулой $R = Q / \nu$. Вместо $u(\xi)$ введем в рассмотрение безразмерную величину, полагая

$$u(\xi) = Q u(\xi). \quad (1)$$

Тогда уравнение (8) запишется следующим образом:

$$u''(\xi) + R' g \alpha u^2(\xi) - D = 0, \quad (11)$$

где $D = C / \nu Q$ — новая произвольная постоянная. Граничные условия (9) при этом примут вид:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= 0 \quad \text{при } \xi = \mp 1; \\ u'(\xi) &= 0 \quad \text{при } \xi = 0; \end{aligned} \quad \int_{-1}^1 u \xi d\xi = 1. \quad (12)$$

Так как рассматривается течение одного направления (в сторону расширения диффузора) и, как известно [1], симметричное течение относительно оси диффузора в этом случае возможно только для малых чисел Рейнольдса, то полагая R малым, в последнем уравнении можно пренебречь членом $R' g \alpha U^2(\xi)$, в результате будем иметь $U''(\xi) = D$. Отсюда посредством интегрирования найдем

$$U(\xi) = D \frac{\xi^2}{2} + D_1 \xi + D_2, \quad (13)$$

где D, D_1, D_2 — произвольные постоянные, подлежащие определению. Из граничных условий (12) будем иметь

$$D_1 = 0; \quad D_2 = -\frac{D}{2}, \quad D = -\frac{3}{2}, \quad (14)$$

Для функции $u(\xi)$ на основании (10) и (14) получим

$$u(\xi) = -\frac{3Q}{4} (\xi^2 - 1). \quad (15)$$

Теперь, пользуясь формулами (2), (5), (15), для составляющих u_x, u_y — векторов скорости жидкости найдем следующие выражения;

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{3Q}{4(h_0 + x' g \alpha)} \left[\left(\frac{y}{h_0 + x' g \alpha} \right)^2 - 1 \right], \\ v_y &= -\frac{3 \operatorname{tg} \alpha \cdot Q y}{4(h_0 + x' g \alpha)} \left[\left(\frac{y}{h_0 + x' g \alpha} \right)^2 - 1 \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Как видно из формулы (16), распределение скоростей v_x, v_y получилось по параболе. В предельном случае при $\alpha \rightarrow 0$ из формул (7), (16) будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \rho c / h_0^3 = \text{const}, \\ v_y &= 0, \quad v_x = -\frac{3Q}{4h_0} \left(\frac{y^2}{h_0^2} - 1 \right), \end{aligned}$$

т. е. получаем течение между двумя параллельными стенками. Теперь найдем решение второго уравнения системы (6), удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{aligned} \bar{T}(\xi) &= f_1(x) h^2(x) \quad \text{при } \xi = 1; \\ \bar{T}(\xi) &= f_2(x) h^2(x) \quad \text{при } \xi = -1 \end{aligned} \quad (17)$$

вытекающим из предельных условий (4). Это уравнение на основании (10) и (15) можно записать в виде:

$$\frac{\kappa}{\mu} \frac{d^2 \bar{T}}{d\xi^2} - \frac{3}{2} R C_p' g \alpha (\xi^2 - 1) \bar{T}(\xi) + \frac{9 A Q^2}{4} \xi^2 = 0. \quad (18)$$

Так как R считается малым, то в последнем уравнении, пренебрегая членом, содержащим R , получим

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\xi^2} = -\frac{9 A Q^2 \mu}{4 \kappa} \xi^2.$$

После двукратного интегрирования этого уравнения найдем

$$\bar{T} = -\frac{3 A Q^2 \mu}{16 \kappa} \xi^4 + \delta_1 \xi + \delta_2, \quad (19)$$

где δ_1, δ_2 — произвольные постоянные, подлежащие определению.

Из граничных условий (17) и найденного решения (19) следует, что функции $f_1(x), f_2(x)$, заданные на границе трубопровода, должны иметь следующий вид: $f_1(x) = d_1 / h^2(x), f_2(x) = d_2 / h^2(x)$, где d_1, d_2 — заданные постоянные величины. Только при этих условиях возможно неизоэотермическое течение вязкого газа в плоском расширяющемся диффузоре. В частном случае при $f_1(x) = f_2(x)$, т. е. когда температура на границах ($\xi = \pm 1$) одинакова, из условия (17) на основании (19) получим

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = d_1 + \frac{3 A Q^2 \mu}{16 \kappa}. \quad (20)$$

Тогда с учетом (5), (19), (20) температура T будет иметь следующее выражение:

$$T = \frac{1}{(h_0 + x' \operatorname{tg} \alpha)^2} \left\{ \frac{3 A Q^2 \mu}{16 \kappa} \left[1 - \left(\frac{y}{h_0 + x' \operatorname{tg} \alpha} \right)^4 \right] + d_1 \right\}. \quad (21)$$

В предельном случае (при $\alpha \rightarrow 0$) получим

$$T = \frac{1}{h_0^2} \left[\frac{3 A Q^2 \mu}{16 \kappa} \left(1 - \frac{y^4}{h_0^4} \right) + d_1 \right]. \quad (22)$$

Как видно из полученных формул (21) и (22), наибольшее значение температуры T достигается на оси трубы, т. е. там, где скорость в силу симметрии течения имеет максимальное значение.

§ 2. Рассмотрим теперь случай очень больших чисел Рейнольдса R . При этом, как известно [1], симметричное течение рассматриваемого типа возможно только тогда, когда течение происходит в сторону сужения диффузора. Будем исходить из установленного нами выше уравнения (11). Умножая обе его части на $U'(\xi)$ и интегрируя получим

$$U^{12}(\xi) + \frac{2}{3} R' g \alpha U^3(\xi) - 2 D U(\xi) = D^*, \quad (2, 1)$$

где D — произвольная постоянная. Разрешая уравнение (2, 1) относительно $U(\xi)$, разделив при этом переменные и интегрируя, будем иметь

$$\sqrt{-\frac{R \operatorname{tg} \alpha}{6}} \xi = \pm \int \frac{dU(\xi)}{\sqrt{4U^3(\xi) - \frac{12DU(\xi)}{R \operatorname{tg} \alpha} - \frac{D^{**}}{R \operatorname{tg} \alpha}}} + D^{**}, \quad (2, 2)$$

где D^{**} — новая произвольная постоянная. Формула (2, 2) дает зависимость U от ξ , которая может непосредственно выражаться через эллиптическую функцию f [3, 4]. Итак

$$U(\xi) = f\left(\sqrt{-\frac{R \operatorname{tg} \alpha}{6}} \xi + D^{**}\right), \quad (2, 3)$$

где f — функция Вейерштрасса с инвариантами

$$g_2 = 12D|R \operatorname{tg} \alpha, \quad g_3 = D^3|R \operatorname{tg} \alpha,$$

Формула (2, 3) содержит при произвольных постоянных: D, D^*, D^{**} , для нахождения которых мы имеем как раз три условия (12).

При определении функции T из второго уравнения системы (6) на основании (10) и (2, 3) приходим к следующему уравнению:

$$\kappa \frac{d^2 T}{d\xi^2} + 2C_p \rho \operatorname{tg} \alpha Q f\left(\sqrt{-\frac{R \operatorname{tg} \alpha}{6}} \xi + D^{**}\right) \bar{T}(\xi) + A_p Q^2 \left[f'\left(\sqrt{-\frac{R \operatorname{tg} \alpha}{6}} \xi + D^{**}\right) \right]^2 = 0. \quad (2, 4)$$

Если пренебречь в (2, 4) последним членом (т. е. диссипативной функцией), получим уравнение вида Ламе:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\xi^2} = -\frac{2C_p \rho \operatorname{tg} \alpha Q}{\kappa} \kappa \left(\sqrt{-\frac{R \operatorname{tg} \alpha}{6}} \xi + D^{**}\right) \bar{T}(\xi). \quad (2, 5)$$

Введем безразмерную функцию $\bar{T}$ и переменную ξ' по формулам

$$\bar{T} = T_{ct} h_0^2 \bar{T}(\xi), \quad \sqrt{-\frac{R \operatorname{tg} \alpha}{6}} \xi + D^{**} = \xi'. \quad (2, 6)$$

Тогда уравнение (2, 5) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\xi'^2} = M f(\xi') \bar{T}(\xi'), \quad (2, 7)$$

где $M = 12C_p \rho \nu / \kappa$.

Имеются методы [3, 4] решения уравнения (2, 7) при помощи специального выбора постоянной M . Более подробно исследован случай $M = n(n+1)$, где n — натуральное число. Таким образом, уравнение (2, 7) может быть записано в виде

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\xi'^2} = n(n+1) \xi(\xi') \bar{T}(\xi'). \quad (2, 8)$$

При $n=1$ решениями уравнения (2, 8) являются функции

$$\bar{T} = \frac{\sigma(\xi' \pm \bar{\alpha})}{\sigma(\xi')} e^{\pm \xi' \xi(\bar{\alpha})},$$

где $\bar{\alpha}$ определяется из условия $f(\bar{\alpha})=0$ и δ , ξ — функции Вейерштрасса, известные из теории эллиптических функций. При $n=2$ решение уравнения (2, 8) имеет вид

$$\bar{T} = \frac{d}{d\xi'} \frac{\sigma(\xi' + \bar{\alpha})}{\sigma(\xi')} e^{-\xi' [\xi(\bar{\alpha}) + \beta]},$$

здесь $\bar{\alpha}$ — корень уравнения,

$$f(\bar{\alpha}) = \frac{g_3}{-g_2}, \quad \beta = \frac{f'(\bar{\alpha})}{2f(\bar{\alpha})}.$$

Известны решения уравнения (2, 8) и для других значений n . Например, уравнения

$$\begin{aligned} \bar{T}'' &= 12f(\xi') \bar{T}(\xi'), \\ 4\bar{T}''(\xi') &= 3f(\xi') \bar{T}(\xi'), \end{aligned}$$

соответственно, имеют следующие решения:

$$\bar{T}(\xi') = f'(\xi'), \quad \bar{T}_1 = \left[f'\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \bar{T}_2 = f\left(\frac{\xi'}{2}\right) \bar{T}_1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе И. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Физматгиз 1963.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1953.
3. Айнс, Ахнер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. 1948.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. 1958.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд-во „Наука“, М., 1965.

Институт математики и механики
АН Азерб ССР

Поступило 26. IX 1969

К. С. Нагвердиев

Истиликдәјишмәни нәзәрә алмагла өзлү газын мүстәви диффузорларда автомодел ахыны

ХҮЛАСӘ

Магаләдә кириш кәсијинин ени $2h_0$, чыхыш кәсијинин ени $2h_1$, узунлугу L олан мүстәви диффузорда өзлү газын ахыны мәсәләсинин гејри-хәтти тәнликләринин хүсуси автомодел һәлли верилмишдир. Тәдгигатда температур, тәзјиг вә сүр'әтләр саһәси дә тәјин едилмишдир.

ПРИМЕНЕНИЕ ВМНД ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ВКЛЮЧАЮЩЕЙ ДЛИННУЮ ЛИНИЮ, НА ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В НЕЙ

Знание функций чувствительности для параметров системы позволяет установить параметры наиболее влияющие и незначительно влияющие на переходный процесс. Выявление первого типа параметров системы облегчает задачу управления переходными процессами, а пренебрежение вторым типом параметром упрощает математическое описание их, что важно для расчета переходных процессов, а также при моделировании длинной линии на ВМНД. При моделировании электрических систем на ВМНД необходимо оценивать точность, с которой получается решение. Знание функций чувствительности дает возможность измерять погрешность выходного напряжения от неточностей установки передаточных коэффициентов.

104

$$u_{1x}^0(t) = i_{1x}^0(t) + \kappa [i_{1x}^0(t-T) + u_{1x}^0(t-T)]: \quad (1)$$

$$\frac{di_{1x}(t)}{dt} = \frac{z}{L_1} u_0^0(t) - \frac{R_1}{L_1} i_{1x}^0(t) - \frac{z}{L_1} u_{1x}^0(t). \quad (2)$$

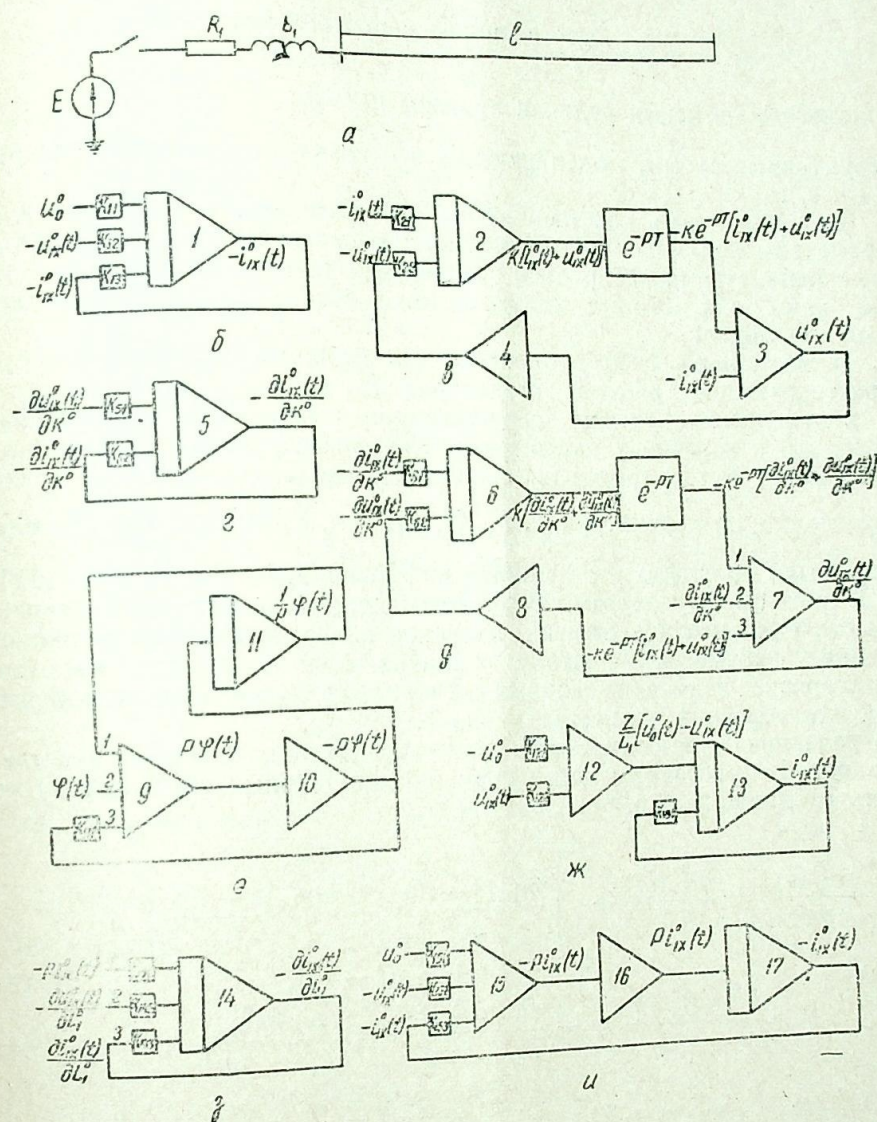


Рис. 1.

Здесь $u_0^0(t)$ — напряжение источника,
 $u_{1x}^0(t)$ — напряжение в начале линии,
 $i_{1x}^0(t)$ — ток в начале линии,
 R_1 — предвключенное сопротивление,
 L_1 — предвключенная индуктивность,
 $\kappa = e^{-\alpha T}$ — коэффициент,

где $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{L_0} + \frac{g_0}{C_0} \right)$ — коэффициент затухания, для рассматриваемого случая $\frac{r_0}{L_0} = \frac{g_0}{C_0}$;

$T = 2t_0$ — время запаздывания, причем t_0 — время пробега волны в один конец линии;
 r_0, L_0, g_0, C_0 — удельное сопротивление, индуктивность, проводимость, емкость в линии, соответственно;

$z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ — волновое сопротивление линии.

В качестве базисных величин приняты $u_0 = u_0, i_0 = \frac{u_0}{z}$

Структурные схемы, моделирующие эти уравнения, показаны на рис. 1, (б, в).

Для получения коэффициентов чувствительности напряжения по параметрам линии на АВМ совместно с моделью систем с распределенными параметрами набирались уравнения чувствительности, структурные схемы для которых являются лишь некоторым видоизменением основной модели.

В настоящей работе определялись функции чувствительности, характеризующие влияние параметров $R_1, L_1, \alpha, r_0, L_0, T, C_0, g_0, z$ на переходные процессы, происходящие в линии при подключении последней к источнику напряжения. Указанные функции чувствительности могут быть определены с помощью найденных функций чувствительности по параметрам $\kappa, T, R_1, L_1, \frac{z}{L_1}$. Уравнения чувствительности были получены в результате дифференцирования уравнений (1) и (2) по этим параметрам. Величины параметров брались в относительных единицах (за базисное значение принималось варьированное значение параметра), поэтому величина функции чувствительности характеризует изменение напряжения или тока в рассматриваемой системе при вариации параметра около 1.

Уравнения чувствительности для определения функций чувствительности по указанным параметрам в относительных единицах будут иметь следующий вид.

1. по κ

$$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial \kappa^0} = \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \kappa^0} + \kappa \left[\frac{\partial i_{1x}^0(t-T)}{\partial \kappa^0} + \frac{\partial u_{1x}^0(t-T)}{\partial \kappa^0} \right] + \kappa [i_{2x}^0(t-T) + u_{1x}^0(t-T)], \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \kappa^0} = -\frac{R_1}{L_0} \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \kappa^0} = \frac{z}{L_1} \frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial \kappa^0}; \quad (4)$$

2. по T

$$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial T^0} = \frac{\partial i_{1x}^0(t-T)}{\partial T^0} + \kappa \left[\frac{\partial i_{1x}^0(t-T)}{\partial T^0} + \frac{\partial u_{1x}^0(t-T)}{\partial T^0} - \kappa T^0 \left[\frac{d i_{1x}^0(t-T)}{dt} + \frac{d u_{1x}^0(t-T)}{dt} \right] \right], \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial T^0} = \frac{R_1}{L_1} \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \kappa^0} = \frac{z}{L_1} \frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial T^0}, \quad (6)$$

3. по R_1

$$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial R_1^0} = \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial R_1^0} + \kappa \left[\frac{\partial i_{1x}^0(t-T)}{\partial R_1^0} + \frac{\partial u_{1x}^0(t-T)}{\partial R_1^0} \right], \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial R_1^0} = -\frac{R_1}{L_1} \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial R_1^0} - \frac{R_1}{L_1} i_{1x}^0(t) - \frac{z}{L_1} \frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial R_1^0}, \quad (8)$$

4. по L_1

$$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial L_1^0} = \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial L_1^0} + \kappa \left[\frac{\partial i_{1x}^0(t-T)}{\partial L_1^0} + \frac{\partial u_{1x}^0(t-T)}{\partial L_1^0} \right], \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial L_1^0} = -\frac{d i_{1x}^0(t)}{dt} - \frac{R_1}{L_1} \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial L_1^0} - \frac{z}{L_1} \frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial L_1^0}; \quad (10)$$

5. по $\frac{z}{L_1}$

$$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial \left(\frac{z}{L_1} \right)^0} = \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \left(\frac{z}{L_1} \right)^0} + \kappa \left[\frac{\partial i_{1x}^0(t-T)}{\partial \left(\frac{z}{L_1} \right)^0} + \frac{\partial u_{1x}^0(t-T)}{\partial \left(\frac{z}{L_1} \right)^0} \right], \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \left(\frac{z}{L_1} \right)^0} = \frac{z}{L_1} [u_0^0(t) - u_{1x}^0(t)] - \frac{z}{L_2} \frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial \left(\frac{z}{L_1} \right)^0} - \frac{R_1}{L_1} \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \left(\frac{z}{L_2} \right)^0}. \quad (12)$$

Поскольку α, r_0 входят в состав параметра κ , то функции чувствительности согласно этим параметрам определяются по свойству производной от сложной функции. Действительно, так как $\kappa = e^{-\alpha T}$, то в относительных единицах (за базисное значение принимается неварьированное значение параметра) для функции чувствительности напряжения по параметру α имеем

$$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial \alpha^0} = -\alpha T \frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial \kappa^0}. \quad (13)$$

Функция чувствительности тока по параметру α будет

$$\frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \alpha^0} = -\alpha T \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \kappa^0}. \quad (14)$$

Для функции чувствительности по параметру r_0 аналогично будем иметь:

$$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial r_0^0} = 0,5 \frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial \alpha_0^0}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial r_0^0} = 0,5 \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \alpha_0^0}. \quad (16)$$

Величины L_0 и C_0 входят как в параметр κ в виде $e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{L_0} + \frac{g_0}{C_0} \right) T}$, так и в параметр z в виде $z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$. Вычислим ниже следующие

функции чувствительности.
 а) функции чувствительности напряжения и тока по параметрам L_0 и C_0 , входящим в параметр κ , в относительных единицах будут

иметь вид:

$$\left[\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial L_1^0} \right]_{\kappa} = 0,5 \frac{\partial u^0}{\partial \alpha^0}, \quad \left[\frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial L_0^0} \right]_{\kappa} = 0,5 \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \alpha_0^0}, \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial C_0^0} \right]_{\kappa} = 0,5 \frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial \alpha^0}, \quad \left[\frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial C_0^0} \right]_{\kappa} = 0,5 \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \alpha^0}. \quad (18)$$

б) функции чувствительности напряжения и тока по этим же параметрам, входящим в параметр z , в относительных единицах:

$$\left[\frac{\partial u_{4x}^0(t)}{\partial L_0^0} \right]_z = 0,5 \frac{\partial u^0}{\partial z^0}, \quad \left[\frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial L_0^0} \right]_z = 0,5 \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial z^0}, \quad (19)$$

$$\left[\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial C_0^0} \right]_z = 0,5 \frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial z^0}, \quad \left[\frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial C_0^0} \right]_z = 0,5 \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial z^0}. \quad (20)$$

Очевидно, что изменение напряжения при варьировании этими параметрами будет характеризоваться суммой функций чувствительности типов а) и б) для каждого параметра:

$$\frac{\partial u^0}{\partial L_0^0} = 0,5 \left(\frac{\partial u_0}{\partial \alpha^0} + \frac{\partial u^0}{\partial z^0} \right), \quad (21)$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial C_0^0} = -0,5 \left(\frac{\partial u^0}{\partial \alpha^0} + \frac{\partial u^0}{\partial z^0} \right). \quad (22)$$

Аналогично, полная функция чувствительности тока по указанным параметрам будет:

$$\frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial L_0^0} = 0,5 \left[\frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \alpha^0} + \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial z^0} \right], \quad (23)$$

$$\frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial C_0^0} = -0,5 \left[\frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \alpha^0} + \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial z^0} \right]. \quad (24)$$

Для оценки погрешностей моделирования уравнения (1) и (2) необходимо иметь функции чувствительности напряжения и тока по коэффициентам этих уравнений. Полная погрешность моделирования $\Delta u_{\text{мод}}$ равна сумме погрешностей, вносимых каждым коэффициентом:

$$\Delta u_{\text{мод}}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial \left(\frac{R_1}{L_1} \right)^0} \Delta \left(\frac{R_1}{L_1} \right)^0 + \frac{\partial u_0}{\partial \left(\frac{z}{L_1} \right)^0} \Delta \left(\frac{z}{L_1} \right)^0 + \frac{\partial u^0}{\partial T^0} \Delta T^0 + \frac{\partial u^0}{\partial \kappa^0} \Delta \kappa^0. \quad (25)$$

Функции чувствительности по коэффициентам уравнения связаны с коэффициентами чувствительности по параметрам, определенным выше следующим образом:

$$\frac{\partial u^0}{\partial \left(\frac{R_1}{L_1} \right)^0} = \frac{\partial u^0}{\partial R_1^0}, \quad \frac{\partial u^0}{\partial \left(\frac{z}{L_1} \right)^0} = \frac{\partial u^0}{\partial z^0}.$$

Структурные схемы для определения указанных функции чувствительности, представленные на рис. 1 (в, г, д, е, ж, з, и), используются совместно с основной структурной схемой, моделирующей исходное уравнение, в комбинации согласно табл. 1.

Пример. Определить функции чувствительности по напряжению, погрешность моделирования, установить возможность учета потерь в

Таблица 1

п/п №	Определяемые функции чувствительности	Цель исходных уравнений		Цель уравнений чувствительности		Переменная связи между обемными цепями	Используемые передат. коэфф.
		Обозначения схем	Блок, с которого снимается переменная связь	Обозначения схем	Блок, на который подается переменная связь		
1	$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial \kappa^0}, \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \kappa^0}$	б, в	БПЗ	з, д	Усилит. № 7	$-\kappa \left[\frac{i_{1x}^0(t-\tau)}{(t-\tau)} + \frac{u_{1x}^0(t)}{(t-\tau)} \right]$	$\kappa_{11} = 1; \kappa_{12} = \kappa_{52} = 2; \kappa_{13} = \kappa_{53} = 0,4; \kappa_{21} = \kappa_{22} = \kappa_{61} = \kappa_{62} = 0,74$
2	$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial T^0}, \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial T^0}$	б, в	БПЗ	з, е, д	Усилит. № 7	$-\kappa \left[\frac{d i_{1x}^0(t-\tau)}{dt} + \frac{d u_{1x}^0(t-\tau)}{dt} \right]$	$\kappa_{11} = 1; \kappa_{12} = \kappa_{52} = 2; \kappa_{13} = \kappa_{53} = 0,4; \kappa_{21} = \kappa_{22} = \kappa_{61} = \kappa_{62} = 0,74; \kappa_{91} = 1$
3	$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial T^0}, \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial T^0}$	б, в	Усилит. № 1	з, в	Усилит. № 14	$-i_{1x}^0(t)$	$\kappa_{11} = 1; \kappa_{12} = \kappa_{112} = 2; \kappa_{13} = \kappa_{111} = \kappa_{113} = 0,4; \kappa_{21} = \kappa_{22} = \kappa_{61} = \kappa_{62} = 0,74$
4	$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial L_1^0}, \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial L_1^0}$	и, в	Усилит. № 15	з, в	Усилит. № 14	$-\frac{d i_{1x}^0(t)}{dt}$	$\kappa_{11} = \kappa_{111} = 1; \kappa_{12} = \kappa_{112} = 2; \kappa_{13} = \kappa_{113} = 0,4; \kappa_{21} = \kappa_{22} = 0,74; \kappa_{91} \approx 1$
5	$\frac{\partial u_{1x}^0(t)}{\partial \left(\frac{z}{L} \right)^0}, \frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial \left(\frac{z}{L} \right)^0}$	з, в	Усилит. № 12	з, в	Усилит. № 14	$z \left[\frac{u_0^0(t)}{L_1} - \frac{u_{1x}^0(t)}{L_1} \right]$	$\kappa_{121} = \kappa_{111} = 1; \kappa_{122} = \kappa_{112} = 2; \kappa_{131} = \kappa_{113} = 0,4; \kappa_{21} = 33 = 0,74$

линии предвключенным сопротивлением и погрешность в максимальной кратности перенапряжений в случае пренебрежения потерями при следующих параметрах (рис. 1, а):

$$\begin{aligned} r_0 &= 0,2 \frac{\text{ом}}{\text{км}}; & z &= 393 \text{ ом}; \\ l_0 &= 1,33 \cdot 10^{-3} \frac{\text{гн}}{\text{км}}; & T &= 0,002 \text{ сек}, \\ C^0 &= 0,0086 \cdot 10^{-6} \frac{\text{ф}}{\text{км}}; & l_1 &= 0,5 Tz = 0,393 \text{ гн}; \end{aligned}$$

Таблица 2

	900	600	450	300	150	75	50
$\frac{\partial u_{1x}^0}{\partial \kappa^0}$	0,2764	0,3850	0,5133	0,6366	0,8132	1,4213	1,5080
$\frac{\partial u_{1x}^0}{\partial \sigma^0}$	0,2488	0,2310	0,2310	0,1910	0,122	0,1066	0,0754
$\frac{\partial u_{1x}^0}{\partial \varphi^0}$	0,1244	0,1155	0,1155	0,0955	0,061	0,0533	0,0377
$\frac{\partial u_{1x}^0}{\partial R_1^0}$	0,1244	0,1222	0,1177	0,1022	0,066	0,040	0,0266
$\frac{\partial u_{1x}^0}{\partial \left(\frac{z_1}{l_1}\right)^0}$	0,2267	0,2646	0,2755	0,4370	0,335	0,38	0,3420
$\frac{\partial u_{1x}^0}{\partial z^0}$	0,2267	0,2646	0,2755	0,4370	0,335	0,38	0,3420
$\frac{\partial u^0}{\partial L^0}$	0,1133	0,1323	0,1377	0,2185	0,1675	0,19	0,1710
$\frac{\partial u^0}{\partial c^0}$	171	50	0,1377	0,2185	171	1,5	0,1710
$\frac{\partial u^0}{\partial \tau^0}$	0,24	0,44	0,5	0,7	0,9	2	2,1

$$g = 0,15 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{км}}; \quad R_1 = 78,6 \text{ ом};$$

$$l = 300 \text{ км};$$

$$\kappa = e^{-\alpha T} = 0,74.$$

Уравнения (1) и (2) примут вид:

$$u_{1x}^0(t) = i_{1x}^0(t) + 0,74 [i_{1x}^0(t-T) + u_{1x}^0(t-T)], \quad (26)$$

$$\frac{\partial i_{1x}^0(t)}{\partial t} = 1000 u_0^0(t) - 200 i_{1x}^0(t) - 1000 u_{1x}^0(t). \quad (27)$$

Выбираем масштабы:

$$M_t = \frac{t}{t_m} = \frac{1}{500};$$

$$M_{u_{1x}} = M_{i_{1x}} = \frac{1}{50};$$

$$M_{u_0} = \frac{u_{0 \max}}{100} = \frac{1}{100};$$

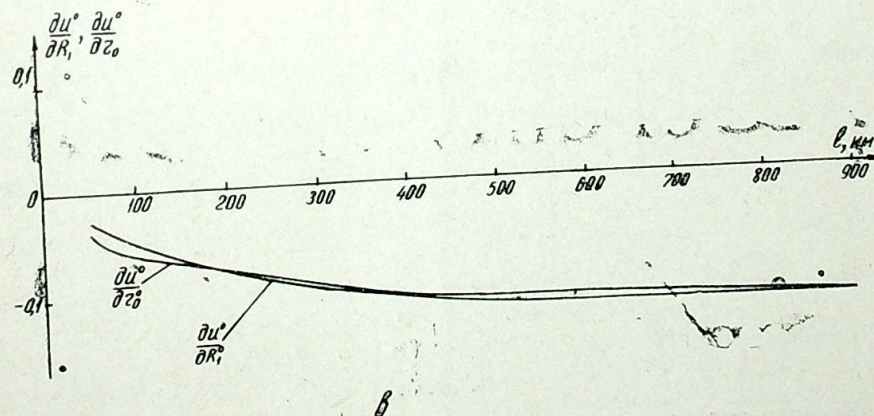
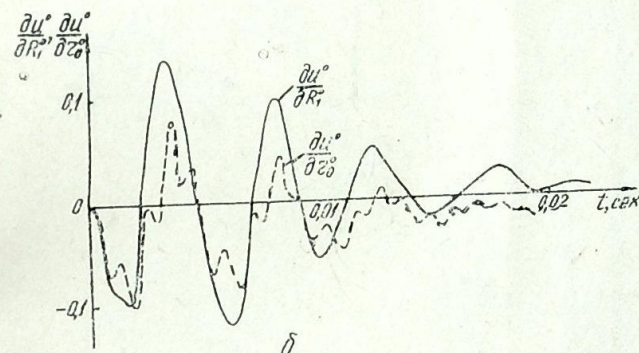
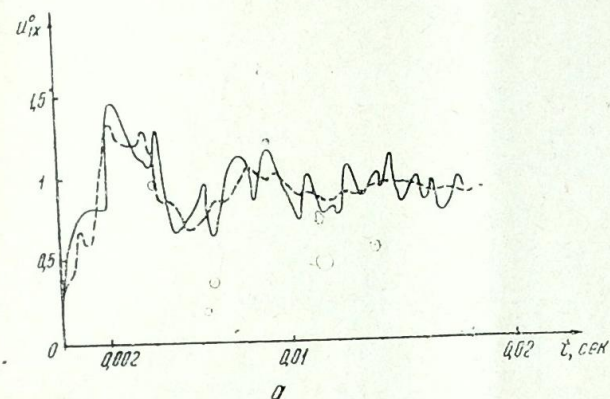


Рис. 2.

Передаточные коэффициенты получают значения:

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= 1; & \kappa_{13} &= 0,4; & \kappa_{22} &= 0,74. \\ \kappa_{12} &= 2; & \kappa_{21} &= 0,74; \end{aligned}$$

С целью проверки точности моделирования электрической системы (рис. 1, а) с вышеуказанными параметрами выбранной структурной схемы на рис. 2, а показаны кривые переходных процессов. Пунктирная кривая получена на АВМ типа МН-7, сплошная — в результате

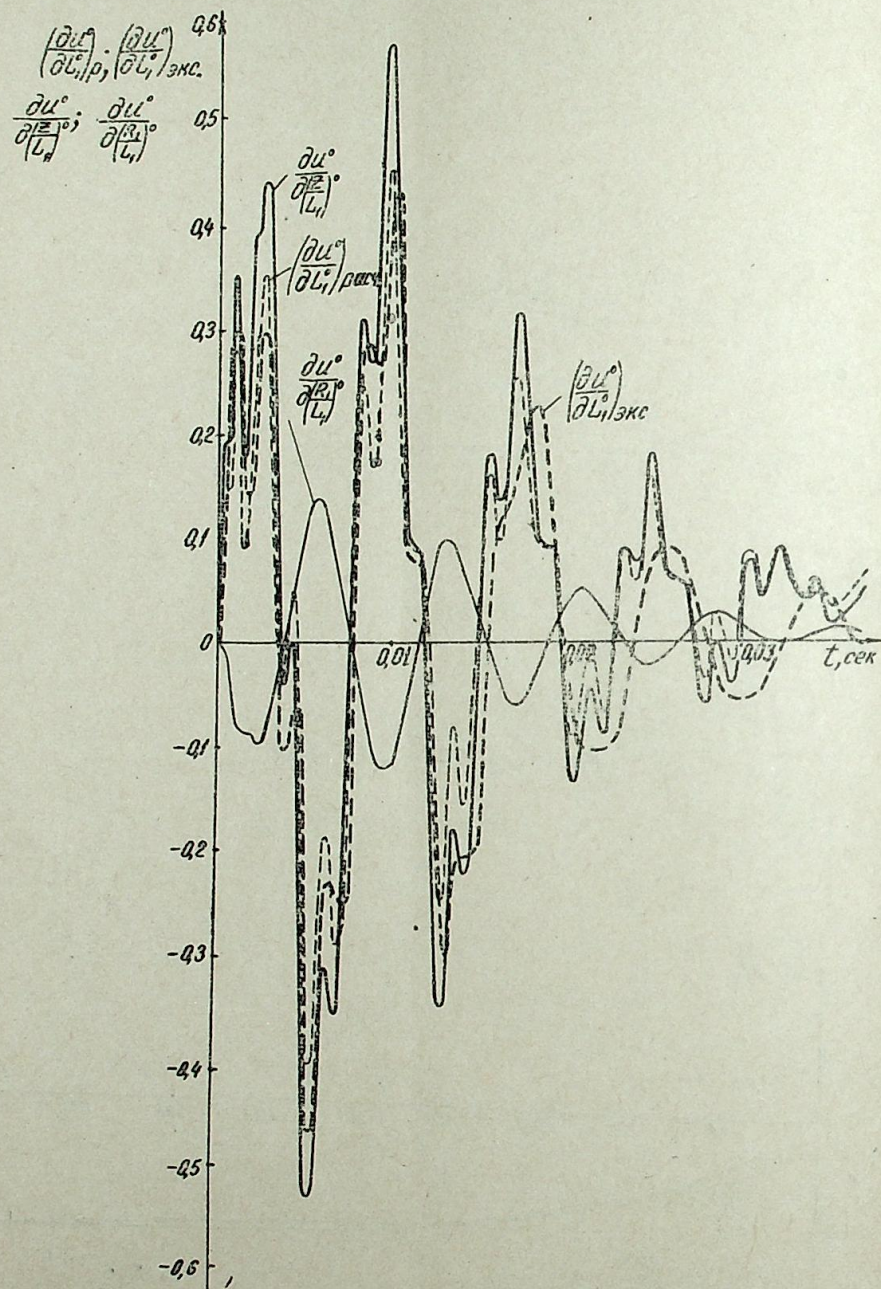


Рис. 3.

численного расчета, методом, основанным на теории импульсных систем и дискретного преобразования Лапласа при $\lambda = 30$ [2]. В табл. 2 приведены значения функций чувствительности, определенные в мо-

мент времени, соответствующий перенапряжению максимальной кратности.

Кривые рис. 2, б указывают на одинаковый характер функций чувствительности по предвключенному и удельному сопротивлениям линии и равенство их влияния на максимальную кратность перенапряжения в линии длиной $l = 300$ км. Анализ осциллограмм показал одинаковый характер этих функций чувствительности также при различных длинах линии. Зависимости $\frac{\partial u}{\partial r_0}$, $\frac{\partial u}{\partial R_1}$ от длины путем обработки осциллограмм построены на рис. 2, в. На основе изложенного подтверждается возможность учета потерь предвключенным сопротивлением.

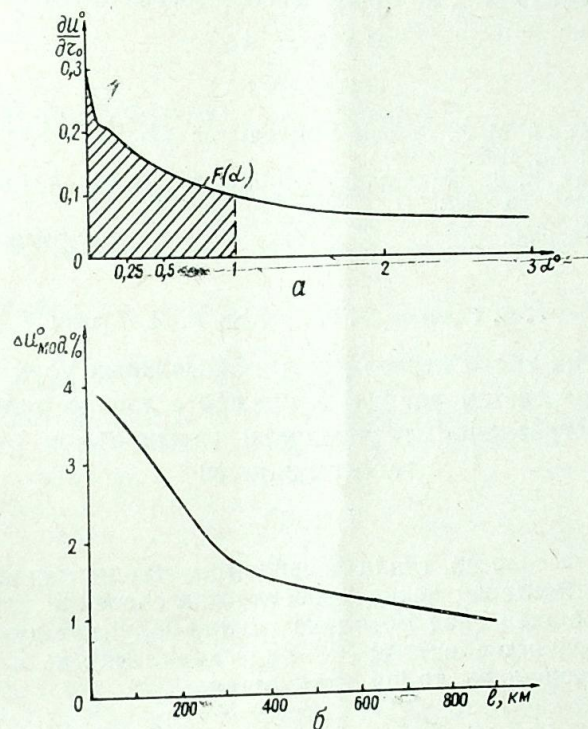


Рис. 4.

На рис. 3 представлены функции чувствительности напряжения по L_1 по коэффициентам уравнения $\frac{z}{L_1}$ и $\frac{R_1}{L_1}$, а также результирующая последних двух кривых. Как видно, результирующая хорошо совпадает с экспериментально найденной кривой $\left(\frac{\partial u}{\partial L_1}\right)_{\text{эксп}}$. Тем самым подтверждаются формулы (21), (22), (23), (24), (25), утверждающие принцип суперпозиции функций чувствительности.

На рис. 4, а показана зависимость функций чувствительности напряжения по r_0 от величины $\alpha^0 = F(\alpha^0)$. Полная погрешность напряжения при отбрасывании r_0 (т. е. при изменении α^0 от какого-то значения до нуля) определяется интегралом $\Delta u = \int_0^{\alpha_0=1} F(\alpha) d\alpha$ или за-

штрихованной площадью (рис. 4, а). Погрешность в максимальной кратности перенапряжения при пренебрежении потерями в линии для данной задачи составит 15,4%.

На рис. 4, б изображена зависимость погрешности моделирования от длины линии.

Выводы

1. Метод функций чувствительности с применением ВМНД эффективен при анализе влияния параметров на переходные процессы в системах с распределенными параметрами.
2. Для ВМНД предложен метод учета потерь в линии с распределенными параметрами предвключенным сопротивлением.
3. Предложен метод контроля точности решения рассматриваемого класса задач на ВМНД.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быховский М. Л. Основы динамической точности электрических и механических цепей. М., 1958.
2. Кадымов Я. Б. Переходные процессы в системах с распределенными параметрами. Физматгиз, 1968.

Институт энергетики
и.м. Есьмана

Поступило 26. V 1969

Ж. Б. Гадимов, З. Ж. Гулиев, С. И. Мјачин

**Фасилэсиз типли несаблајычы машинларын узун хэтли
электрик системлэринин кечид просеслэринэ онларын
параметрлэринин тә'сирлэрини тәдгиг етмәк үчүн
тәтбиг едилмәси**

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә фасилэсиз типли несаблајычы машинларда пајланмыш параметрли системлэрин кечид просеслэринэ системин параметрлэринин тә'сирини ашкар едән методика тәклиф олунмушдур.

Нәһажәт, конкрет электрик схеминдә кәркиликләк вә чәрәјана кәрә һәссаслыг функцијалары тә'јин едилмишдир.

А. Н. ГЛАДКИХ

О ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ ИТТРИЯ

Иттрий (γ) имеет две кристаллические модификации (α и β); β = модификация с решеткой ОЦК° возникает при температуре 1495°C, т. е. около точки плавления (1509°C); α = модификация имеет решетку

ГП со следующими параметрами: $a = 3,6474 \pm 7$; $5,7306 \pm 8$; $\frac{c}{a} = 1,5722$ [1]. Твердость иттрия при 20°C составляет $H = 60 - 85 \text{ кг/мм}^2$. Энергия дефекта упаковки равна примерно $\gamma = 80 \text{ эрг/см}^2$ [2].

Исследованный в данном случае металл имел чистоту 99,2 остальное (0,8 вес. %) составляли примеси: Ni, Fe, Cu, Al, Si, Ca, Ta, Dy. Деформация производилась путем сжатия, для чего применялись цилиндрические образцы диаметром 3,0 мм и высотой 4,5 мм. В технологию изготовления образцов входит разрезка материала на полосы, ковка на заготовки круглого профиля, прессование заготовок с последующим отжигом в вакууме 10^{-4} мм рт. ст. Усилие сжатия образцов измерялось специальными месдозами (с наклеенными на них датчиками сопротивления). Осадка велась при температурах от -95 до 796°C и скоростях деформации 10^{-3} , 10^{-2} и 10^{-1} сек^{-1} *.

Нагрев образцов перед осадкой производился в специальной электрической печи вертикального типа с нихромовой обмоткой на фарфоровой трубе, в среде аргона. Продолжительность нагрева образцов составляла 40—45 минут с 15—20-минутной выдержкой при установившейся температуре. Каждый опыт повторяли 2—3 раза. До и после опыта образцы измерялись с точностью до 0,01 мм. Температура в процессе опыта поддерживалась с помощью автоматического электронного регулятора ЭРМ-47.

Регулирование температуры в самой печи осуществлялось автотрансформатором РНО-250-2. Температура образца измерялась хромель-алюмелевой термопарой. Сжатие при низких температурах производилось в специальном приспособлении. Охлаждающей средой в этом случае был жидкий азот в смеси со спиртом ректификатом. Скорость пластической деформации определялась по формуле.

$$\epsilon = \frac{\ln \frac{h_0}{h}}{t},$$

* В работе принимали участие Л. Д. Соколов, В. М. Соленов, Ю. С. Кочетков.

где h_0 и h — начальная и текущая высота образца;
 t — время осадки.

Другие вопросы методики освещены ранее [7].

Благодаря тому, что торцы образцов перед испытаниями полировали и подвергали смазке, они сохраняли в процессе опытов цилиндрическую форму. Истинное напряжение при этом вычислялось из отношения

$$\sigma = \frac{P}{F},$$

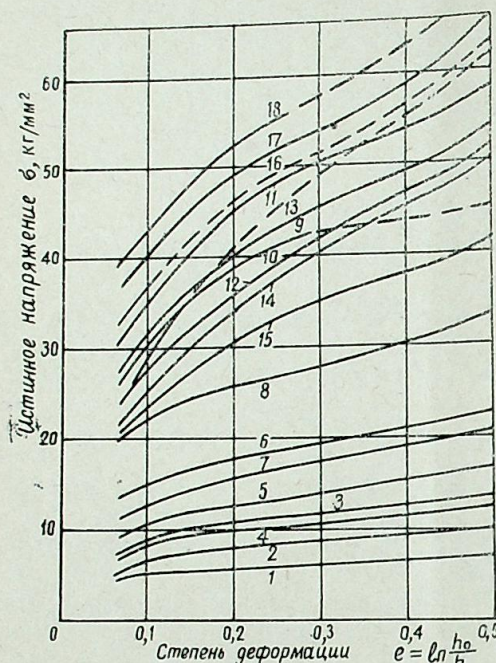


Рис. 1. Истинные напряжения иттрия в зависимости от степени деформации при различных температурах (°C) и скоростях (сек⁻¹): (1) 796, $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-3}$; (2) 796, $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-3}$; (3) 796, $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-1}$; (4) 618,0; $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-3}$; (5) 618,0; $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-2}$; (6) 618,0; $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-1}$; (7) 435,0; $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-3}$; (8) 435,0; $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-2}$; (9) 435,0; $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-1}$; (10) 261, $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-3}$; (11) 261; $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-2}$; (12) 261, $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-1}$; (13) 83; $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-3}$; (14) 83, $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-2}$; (15) 83, $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-1}$; (16) -95; $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-3}$; (17) -95, $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-2}$; (18) -95, $\dot{\epsilon} = 1.5 \cdot 10^{-1}$.

ного старения смещается в область более высоких температур, а с увеличением степени деформации он смещается в область более низких температур.

Из скоростной зависимости напряжения (рис. 2) видно, что с увеличением скорости деформации напряжения течения растут. Скоростная зависимость напряжения для средних и высоких температур

выполняется в виде прямых линий, наклон которых $n = \frac{\lg \sigma}{\lg \dot{\epsilon}}$ заметно возрастает с температурой и со степенью деформации. В этом смысле скоростные графики представлены в виде прямых и кривых линий. Характер температурно-скоростных зависимостей в общем подтверж-

где P — текущее усилие; F — площадь поперечного сечения образца. По графику истинных напряжений (рис. 1) видно, что коэффициент упрочнения $d\sigma/d\epsilon$ с понижением температуры и увеличением скорости деформации возрастает.

На рис. 2 представлены температурно-скоростные зависимости истинного напряжения иттрия при степени деформации $\epsilon = 0,2$. Получены также графики для $\epsilon = 0,1 \div 0,4$, но на рисунке они не приводятся.

В области низких температур на графиках обнаруживаются немонотонности в виде „горбов“ деформационного старения (рис. 2, а). Кроме того, явно намечается излом, разделяющий их „за- и дорекристаллизационные“ ветви. Установлено, что с увеличением степени деформации наклон на температурных графиках B_1 у „зарекристаллизационного“ участка увеличивается (рис. 3); с возрастанием скорости деформации он уменьшается. С другой стороны, наклон B_2 уменьшается с увеличением степени и скорости деформации. Из графика температурной зависимости (рис. 2) следует также, что с ростом скорости деформации „горб“ деформацион-

дается исследованиями других авторов по различным металлам и сплавам [3 ÷ 5].

При испытаниях на растяжение были приготовлены образцы длиной 40 мм, диаметром 2 мм, длиной рабочей части 10 мм^(*). Скорости деформации составляли $2 \cdot 10^{-2}$ и $2 \cdot 10^{-1}$ сек⁻¹. На рис. 4 показаны

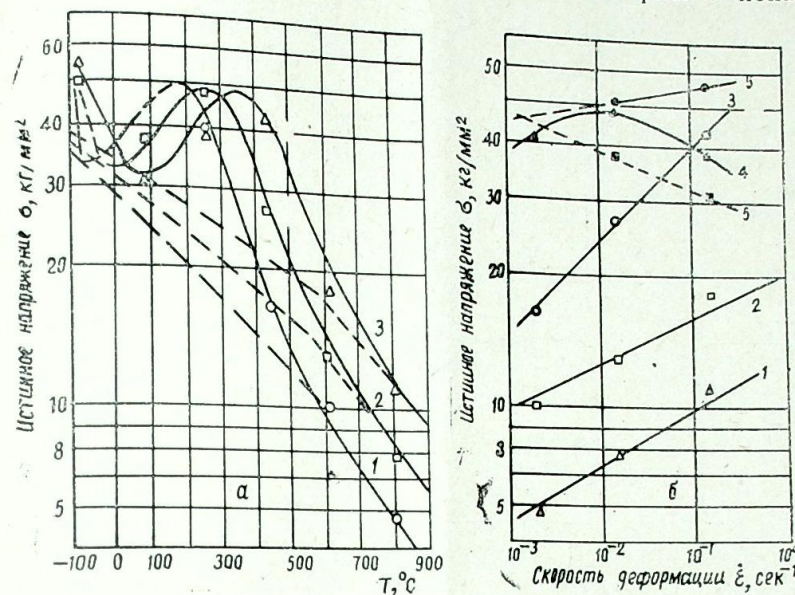


Рис. 2. Температурно-скоростная зависимость истинного напряжения иттрия при степени деформации $\epsilon = 0,2$. а — при скоростях (сек⁻¹): (1) $2 \cdot 10^{-3}$ ($B_1 = 0,00113$ и $B_2 = 0,00069 \frac{\text{кг/мм}^2}{\text{м}}$); (2) $1,5 \cdot 10^{-2}$ ($B_1 = 0,00101$ и $B_2 = 0,000616 \frac{\text{кг/мм}^2}{\text{м}}$); (3) $1,5 \cdot 10^{-1}$ ($B_1 = 0,000934$ и $B_2 = 0,00057 \frac{\text{кг/мм}^2}{\text{м}}$); б — при температурах (°C): (1) 796 ($n_1 = 0,132$); (2) 618,0 ($n_1 = 0,105$ и $n_2 = 0,026$); (3) 434,9 (4) 261, (5) 83; (6) — 95.

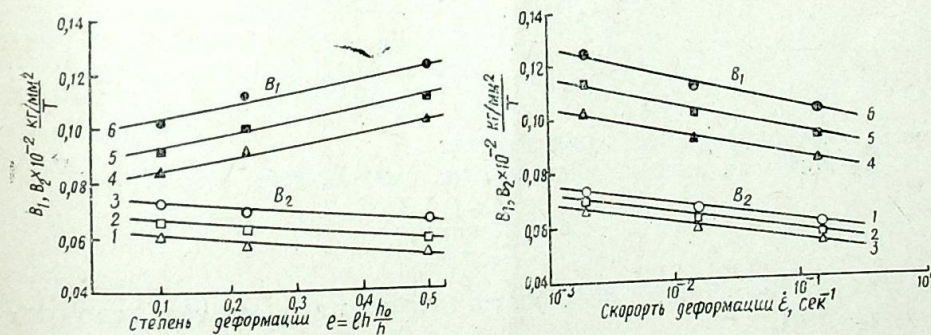


Рис. 3. Зависимость коэффициентов B_1 и B_2 . а — от скорости для иттрия при степенях деформации: (1, 4) $\dot{\epsilon} = 0,1$; (2, 5) $\dot{\epsilon} = 0,2$; (3, 6) $\dot{\epsilon} = 0,4$; б — от степени деформации при скоростях (сек⁻¹): (1, 4) $1,5 \cdot 10^{-1}$; (2, 5) $1,5 \cdot 10^{-2}$; (3, 6) $2 \cdot 10^{-3}$.

температурные зависимости механических характеристик иттрия: от носительного удлинения (δ), сужения (ψ), предела прочности (σ_b) и предела текучести (σ_s) при скорости деформации $2 \cdot 10^{-2}$ сек⁻¹, а также

* Эта часть работы проведена при участии В. А. Скуднова

предельного относительного обжатия (ϵ) при осадке при $2 \cdot 10^{-2}$ и $2 \cdot 10^{-1}$ сек $^{-1}$. Здесь же приводятся графики изменения показателя влияния напряженного состояния на предельную пластичность металла (π) [6].

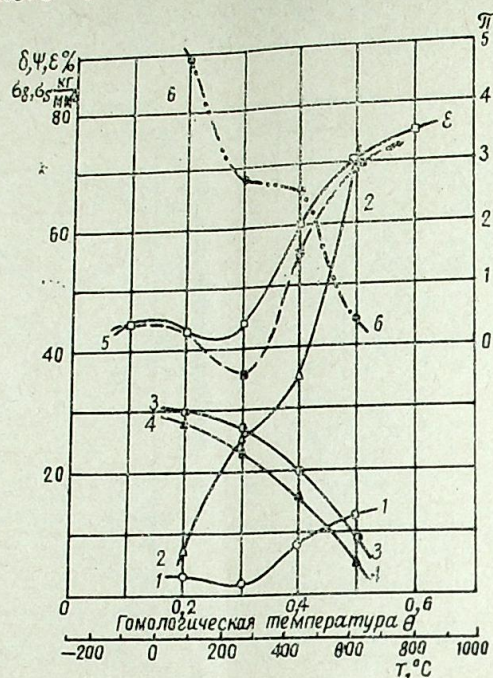


Рис 4. Температурная зависимость механических характеристик иттрия: (1)— δ ; (2)— σ_s ; (3)— σ_b ; (4)— ϵ ; (5)— π (— $2 \cdot 10^{-2}$ сек — — $2 \cdot 10^{-1}$ сек)

Указанные характеристики определяются по следующим формулам:

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100\%; \psi = \frac{F_0 - F_k}{F_0} \cdot 100\%;$$

$$\sigma_b = \frac{P_{\max}}{F_0} \text{ кг/мм}^2; \epsilon = \frac{h_0 - h}{h_0} 100\%,$$

где h_0 —начальная высота образца мм;
 h —конечная высота образца после сжатия, мм;

$$\pi = \frac{l_2 - l_1}{n_2 - n_1},$$

где $l_2 = l_n \frac{h_0}{h_1}$ —истинная деформация при сжатии в момент разрушения;

$l_1 = l_n \frac{F_0}{F_1}$ —истинная деформация при растяжении;

n_1 —критерий напряженного состояния при растяжении ($n_1 = 1$);

$n_2 = -\frac{P_{\text{ср}}}{\sigma_i}$ —критерий напряженного состояния при сжатии в момент разрушения;

$P_{\text{ср}}$ и σ_i —удельное давление и истинное сопротивление металла, соответственно;

h_0, F_0, h_1, F_1 —размеры образцов до и после деформации при сжатии (h) и растяжении (F).

Из рис. 4 следует, что с повышением температуры пластичность металла монотонно увеличивается, особенно это заметно по сужению ψ , которое уже при 600°C достигает величины 70%, что свидетельствует о возможности обработки иттрия при температуре 600°C и выше. Сравнительно высокие значения σ_b (порядка 30 кг/мм 2) при обычных условиях в этом случае монотонно снижаются до 8–9 кг/мм 2 при 600°C ; аналогично поведение и предела текучести.

На температурных графиках $\epsilon(T)$ и $\delta(T)$ в области от 0,2 до 0,4 от $T_{\text{пл}}$ ($^\circ\text{K}$) наблюдается известная немонотонность: незначительный провал пластичности при $0,3 T_{\text{пл}}$ и $\epsilon = 10^{-2}$ сек $^{-1}$ с увеличением скорости деформации на порядок смещается вправо, область температур $0,3 T_{\text{пл}}$. Это указывает на диффузионную природу аномалий, представляющих, видимо, явление типа деформационного старения.

Поведение показателя влияния напряженного состояния на пластичность (π) обратно изменению показателя ψ ; если во всем интервале температур ψ с увеличением температур возрастает, то показатель π падает, причем наблюдается некоторое изменение наклона графиков $\psi(T)$ при $(0,3 \div 0,4) T_{\text{пл}}$ $^\circ\text{K}$ соответствует зеркальному отображению хода графиков $\pi(T)$. Из этого следует, что влияние схемы напряженного состояния на пластичность (ψ) сказывается тем сильнее, чем ниже исходная пластичность металла, установленная при испытаниях на растяжение по ψ .

В общем, все пластические характеристики (δ, ψ, ϵ) с повышением температуры при пластической деформации иттрия повышаются, а прочностные (σ_b, σ_s) снижаются. Кривая относительного обжатия (ϵ) до появления первой трещины располагается выше кривых γ и ψ . Это обстоятельство может быть объяснено тем, что при испытании на сжатие мы имеем дело с более мягкой схемой напряженного состояния, чем при испытании на растяжение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Spedding F. H., Daane A. H. The rare earths, New York, 1961.
2. Laupasmaa O. U. Phus, rev, 1964, 133 NIA, с. 219.
3. Соколов Л. Д. Сопротивление металлов пластической деформации, Металлургиздат, Москва, 1963.
4. Bühler H., Wagener H. W. Bänder Bleche Rohre, 7 (1966), с. 648.
5. Bühler H., Wagener H. W. Zs. Metallkunde Bd. 58 (1967), Н. 2. с. 136.
6. Скуднов В. А., Соколов Л. Д. Изв. АН СССР, металлы, 1965, № 4.
7. Гладких А. Н., Скуднов В. А., Соколов Л. Д. Заводская лаборатория, 1968, № 2.

ГПИ им. А. А. Жданова

Поступило 29.VIII 1969

УДК 621.315.615; 2

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Л. А. МУХАРСКАЯ

ИОНИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРАНСФОРМАТОРНЫХ МАСЕЛ

Значительное повышение мощностей современных электростанций и необходимость транспортировки энергии на дальние расстояния требует создания сверхмощных трансформаторов и автотрансформаторов на сверхвысокие напряжения. При создании таких трансформаторов возникает множество новых проблем, связанных с работой изоляции в тяжелых условиях высоких градиентов и поведением трансформаторных масел, когда газовыделение в них может создать опасность для трансформаторов. В этой связи нами исследовались ионизационные характеристики трансформаторных масел отечественных нефтеперерабатывающих заводов и влияние на этот показатель различных факторов.

Изучение газостойкости масел производилось с помощью прибора, изображенного на рис. 1. Реакционная камера состоит из двух коаксиальных цилиндрических электродов, к одному из которых подводится высокое напряжение. При испытании камера наполовину заполняется исследуемым маслом, над которым остается газовая среда. Склонность масел к выделению или поглощению газа под действием электрического поля определяется по изменению уровня масла в манометрической бюретке. Определение газостойкости масел производилось по ГОСТу 13003-67, в среде водорода. Масло выдерживали при 40°C в течение 100 минут под напряжением 10 кВ. При этом снималась зависимость количества выделившегося или поглотившегося газа от времени приложения напряжения.

Исследовались трансформаторные масла различных нефтеперерабатывающих заводов, полученные из разного сырья, различными методами очистки. Результаты показали, что отдельные партии товарных трансформаторных масел одного и того же завода, полученные из одного и того же сырья по принятой технологии, по газостойкости практически не отличаются друг от друга. На рис. 2 представлены ионизационные характеристики товарных трансформаторных масел Бакинского, Львовского и Батумского нефтеперерабатывающих заводов, полученных из малосернистых нефтей кислотно-щелочным методом очистки.

Бакинским заводом в настоящее время выпускается два типа трансформаторных масел—из беспарафинистой бузовнинской нефти (ГОСТ 982-56) и масла карбамидной депарафинизации из тройной смеси

парафинистых нефтей—сураханской отборной, карацухурской и нефти "Нефтяных камней" (МРТУ 38-1-178-65). Они изготавливаются по одной и той же технологической схеме, за исключением добавочного

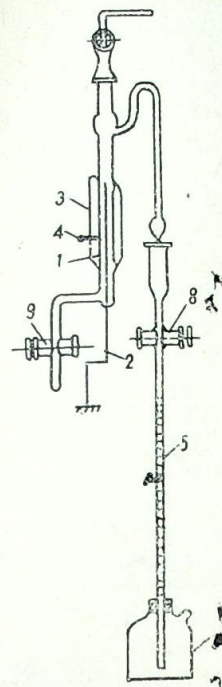


Рис. 1. 1—реакционная камера; 2—внутренний электрод; 3—рубашка реакционной камеры; 4—наружный электрод; 5—манометрическая бюретка; 6—запорный сосуд; 7, 8, 9—вакуумные краны.

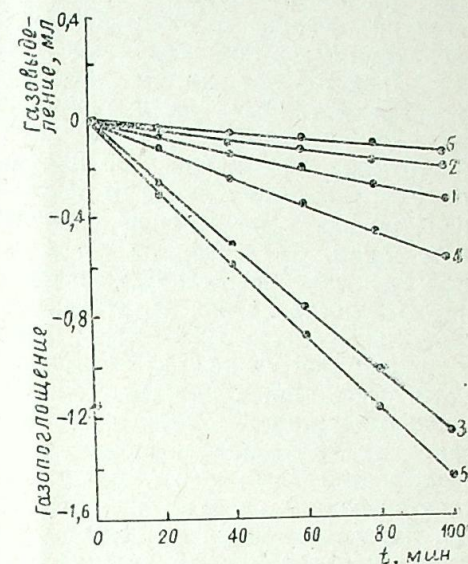


Рис. 2. Трансформаторные масла: 1—Бакинского завода из бузовнинской нефти; 2—Бакинского завода из тройной смеси парафинистых нефтей; 3—Львовского завода из анастасиевской нефти; 4—Батумского завода из смеси анастасиевской и бузовнинской нефтей; 5—Гидроочищенное, из смеси сернистых нефтей; 6—Новоуфимского завода из смеси сернистых нефтей.

блока карбамидной депарафинизации для масел из парафинистых нефтей. Эти масла характеризуются различным содержанием ароматических углеводородов и смолистых веществ, что обуславливается различием в групповом химическом составе используемого исходного сырья. Львовский завод при изготовлении трансформаторных масел перерабатывает беспарафинистую анастасиевскую нефть, отличающуюся повышенным содержанием ароматических углеводородов и смолистых веществ. Исследованные масла Батумского завода изготавливались из смеси анастасиевской и бузовнинской нефтей кислотно-щелочным методом очистки, в соответствии с чем они занимают промежуточное положение по содержанию ароматической и метано-нафтенной фракций.

Различие в групповом химическом составе исследуемых масел обуславливает наблюдающиеся различия в стойкости их к газовыделению под действием электрического поля. Наиболее газостойкими оказались масла Львовского нефтеперерабатывающего завода, характеризующиеся наибольшим содержанием ароматических углеводородов. Однако эти масла отличаются низкой термической стабильностью. Однако эти масла отличаются низкой термической стабильностью, что выражается в преждевременном появлении кислых продуктов

реакции и значительном повышении тангенса угла диэлектрических потерь при окислении их в условиях, близких к эксплуатационным. Масла Бакинского завода, характеризующиеся меньшим содержанием ароматической фракции и несколько лучшей термической стабильностью в эксплуатационных условиях, менее газостойки, однако и они поглощают газ под действием электрического поля. Исследованные батумские масла по газостойкости занимают промежуточное положение между маслами Львовского и Бакинского заводов и также поглощают газ под воздействием ионизированной газовой среды.

Представляет интерес изучение ионизационных характеристик трансформаторных масел, полученных из сернистых нефтей (туймазинской, мухановской, бавлинской и др.) методами гидрирования и экстракции. Применение принципиально различных методов очистки обуславливает получение из одного и того же исходного сырья масел, заметно различающихся по групповому химическому составу и, соответственно, по склонности к термическому старению и газовыделению под действием электрического поля.

Сущность метода гидрирования заключается в воздействии водорода при высоких температуре и давлении в присутствии специальных катализаторов на нежелательные компоненты исходного сырья. При этом высокомолекулярные углеводороды распадаются с образованием низкомолекулярных, сероводорода и других соединений. Проведенные ранее исследования показали, что опытные партии гидроочищенных трансформаторных масел, выпущенные Новокуйбышевским нефтеперерабатывающим заводом по технологии, разработанной во ВНИИ НП [1], характеризуются относительно высоким содержанием ароматических углеводородов и смолистых веществ и относительно низкой термической стабильностью в эксплуатационных условиях [2]. Ионизационные характеристики этих масел, приведенные на рис. 2, свидетельствуют об их высокой газостойкости, обусловленной благоприятным, с точки зрения газостойкости, соотношением в исследуемых маслах метано-нафтенной и ароматической фракций.

На рис. 2 представлены также результаты изучения газостойкости трансформаторных масел Новоуфимского нефтеперерабатывающего завода, полученных из тех же сернистых нефтей методом селективной очистки. В качестве растворителя был применен фенол; сущность этого метода очистки сводится к избирательной экстракции растворителем нежелательных компонентов, без изменения химической структуры исходного сырья [3]. Масла фенольной очистки, так же как и гидроочищенные, проходят дополнительно глубокую селективную депарафинизацию и контактную доочистку сорбентом. Для повышения стабильности в масла фенольной очистки вводится антиокислительная присадка „топанол“. Эти масла характеризуются наименьшим содержанием ароматических углеводородов и смолистых веществ и относительно высокой антиокислительной стабильностью в эксплуатационных условиях. Масла Новоуфимского завода относятся к наименее газостойким из всех исследованных, однако и они поглощают газ в принятых условиях воздействия электрического поля.

Непосредственная связь газостойкости масел с их групповым углеводородным составом позволяет, зная относительное содержание в них ароматических углеводородов, предопределить поведение масел в условиях воздействия электрического поля. Товарные трансформаторные масла основных отечественных нефтеперерабатывающих заводов можно отнести к газостойким, так как при определении газостойкости по принятой методике они поглощают газ. В таблице приведены данные по газостойкости масел с различным процентным содержанием углерода в ароматических кольцах усредненной молекулы. На рис. 3 представлена построенная на основании этих данных

Газостойкость трансформаторных масел различных нефтеперерабатывающих заводов

Масло	Поглотимость газа за 100 минут, мл	Показатель преломления n_D^{20}	Содержание углерода в автоматических кольцах, %
Бакинского завода из беспарафинистой бузовинской нефти	0,33	1,485	12,6
Бакинского завода из тройной смеси парафинистых нефтей	0,2	1,181	10,3
Батумского завода из смеси анастасиевской и бузовинской нефтей сернокислотной очистки (вып. 1967 г.)	0,58	1,490	14,0
Львовского завода из анастасиевской нефти	1,28	1,501	21,2
Гидроочищенное из смеси сернистых нефтей	1,45	1,505	23,0
Исследовательский образец из балаханской масляной нефти глубокой сернокислотной очистки	0,0	1,477	8,5

зависимость количества поглотившегося в течение принятого времени испытания газа от содержания углерода в ароматических кольцах масла. Аналогичский характер имеют зависимости газостойкости ма-

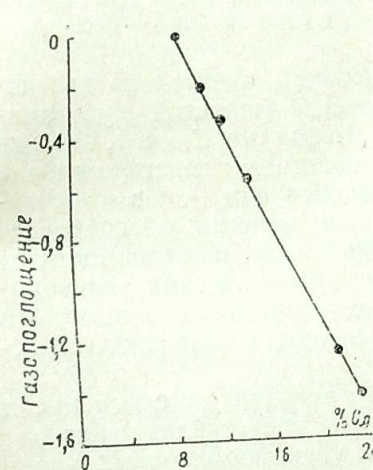


Рис. 3.

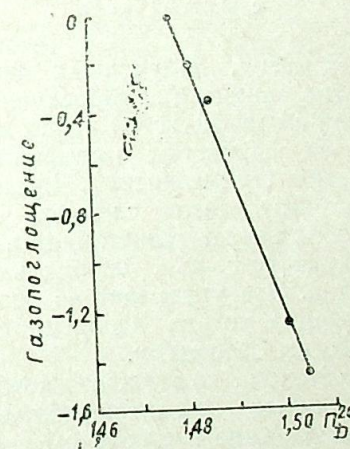


Рис. 4.

сел от показателей, непосредственно связанных с их групповым химическим составом, — коэффициента преломления, анилиновой точки, плотности и др. Зависимость поглотившегося под действием электрического поля газа от показателя преломления, характерная для отечественных трансформаторных масел, показана на рис. 4. Аналогичные зависимости были получены и другими авторами [4].

Значительный интерес представляет изучение ионизационных характеристик трансформаторных масел, полученных очисткой в движущемся слое адсорбента [5]. Адсорбционный метод очистки, селективно

удаляя из дистиллятов нежелательные компоненты, позволяет радикально улучшить качество трансформаторных масел, так как обеспечивает их оптимальный химический состав с точки зрения термических свойств и других показателей, характеризующих качество масел. На рис. 5 приведены ионизационные характеристики трансформатор-

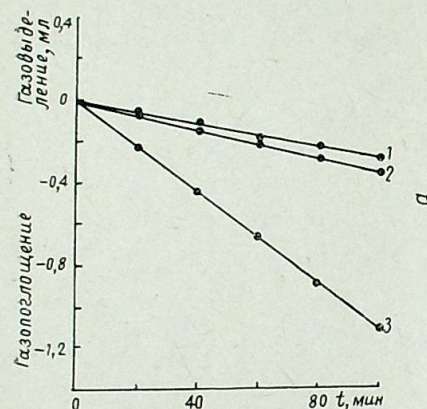


Рис. 5. Масла адсорбционной очистки: 1—из беспарафинистой бузовнинской нефти; 2—из нефти месторождения „Нефтяные Камни“; 3—из смеси сернистых нефтей.

ных масел, полученных методом адсорбционной очистки из дистиллятов бакинских малосернистых нефтей—беспарафинистой бузовнинской и парафинистой нефти месторождения „Нефтяные Камни“, а также смеси сернистых парафинистых нефтей восточных месторождений страны (туймазинской, мухановской, бавлинской и др.). Из полученных результатов следует, что адсорбционная очистка обеспечивает необходимую газостойкость масел, оставляя в них, в зависимости от исходного сырья, оптимальное содержание ароматических углеводородов. Это указывает на необходимость быстрее промышленного освоения метода адсорбционной очистки основными маслоизготавливающими заводами.

Исходя из того, что потребители обычно используют смеси масел различных нефтеперерабатывающих заводов, представляет интерес исследование влияния смешения различных трансформаторных масел на их ионизационные характеристики. На рис. 6 представлены результаты изучения газостойкости масел Львовского и Бакинского заводов и их смесей в различных процентных соотношениях. Из полученных зависимостей следует применимость закона аддитивности к показателю газостойкости трансформаторных масел. Это обуславливается соответствующим перераспределением ароматических углеводородов при смешении масел и находится в соответствии с подчинением правилу аддитивности физико-химических показателей масел, связанных с их групповым углеводородным составом. Отсюда, зная газостойкость отдельных составляющих масел, можно, с достаточной для практики масел, в зависимости от соотношения компонентов,

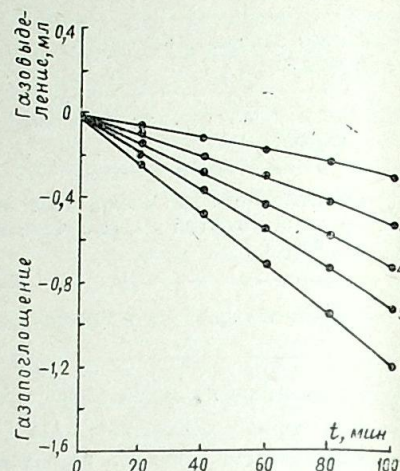


Рис. 6. 1—Масло Львовского завода из анастасиевской нефти; 2—Бакинского завода из бузовнинской нефти; 3—смесь масел Львовского и Бакинского заводов в соотношении 30 : 70%; 4—то же в соотношении 50 : 50%; 5—то же в соотношении 70 : 30%.

Выводы

1. Товарные трансформаторные масла основных отечественных нефтеперерабатывающих заводов можно отнести к газостойким, поглощающим газ под действием электрического поля. Отдельные партии трансформаторных масел одного и того же сырья по принятой технологии, практически не различаются по газостойкости, поэтому этот показатель можно считать типовым для данного сорта масла.

2. Газостойкость трансформаторных масел непосредственно зависит от содержания в них ароматических углеводородов и может быть заданных с групповым углеводородным составом масел.

3. Изучение влияния смешения различных трансформаторных масел на стойкость к газовой выделению под действием электрического поля показывает, что газостойкость смесей масел подчиняется закону аддитивности. Зная ионизационные характеристики составляющих масел, можно определять показатель газостойкости их смесей, в зависимости от соотношения компонентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Д. Л., Алфимова Е. А., Агафонов А. В., Рысаков М. В., Осипов Л. Н., Рогов С. П., Эминов Е. А. Получение трансформаторного масла гидролизом дистиллятов из сернистых нефтей. Сб. „Улучшение качества трансформаторных масел“. Гостехиздат, М., 1962.
2. Джуварлы Ч. М., Мухарская Л. А., Гольдштейн Д. Л., Осипов Л. Н. „Электротехника“, 1965, № 12.
3. Вознесенская Е. В., Жердева Л. Г., Эминов Е. А., Грязнов Б. В., Шахсуварова Г. В. Получение трансформаторного масла из сернистых нефтей методом очистки селективными растворителями и пути улучшения его качества. Сб. „Улучшение качества трансформаторных масел“. Гостехиздат, М., 1962.
4. Липштейн Р. А., Шахнович М. И. Трансформаторное масло. Изд-во „Энергия“, М., 1968.
5. Джуварлы Ч. М., Михайлов И. А., Ливенсон С. З., Мухарская Л. А. Пути улучшения качества трансформаторных масел, Изд-во АН Азерб. ССР, 1967.

Институт энергетики
им. И. Г. Есманова

Поступило 17. X 1969

Ч. М. Чуварлы, Л. А. Мухарская

Трансформатор јағларынын ионизасија характеристикалары

ХУЛАСЭ

Мәғаләдә трансформатор јағларынын ионизасија характеристикалары вә бу характеристикалара тәсир едән мұхтәлиф амилләрин тәсирини мұәјјән етмәк үчүн апарылан тәдғигат ишләринин нәтичәси верилмишдир. Јағларын ионизасија характеристикалары онлара јүксәк градијентли електрик сәһәси илә тәсир етдикдә ајрылан вә ја удулан газларын мигдары илә тәјин олунур. Мүәјјәнләширилмишдир ки, нефтајырма заводларында һасил едилән трансформатор јағлары газдавамлы олуб, јүксәк кәркинликли електрик сәһәсинин тәсир алтында газлары удма габилијјәтинә маликдир. Јағларын газдавамлығынын онларын карбоһидрат груплары илә биләваситә әлағәдар олмасы ашкар едилиб, ароматик даирәләрдә карбонун фаизлә мигдарындан, кар едилиб, ароматик даирәләрдә карбонун фаизлә мигдарындан, ишығысындырма әмсалындан вә јағын группу илә әлағәдар олан диқар физики-кимјәви кәстәричиләрдән асылылыг графикләри гурулмушдур. Мұхтәлиф трансформатор јағларыны гатдыгда електрик сәһәсинин тәсир алтында онларын газ ифраз етмәјә мејл кәстәрмәләри мұәјјән едилмишдир.

Б. А. ЛИСТЕНГАРТЕН, Т. А. ЗАИРОВА, Г. Б. АЛИЗАДЕ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ ТИРИСТОРНЫЙ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ— ДВИГАТЕЛЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Вопрос разработки и исследования методов управления двигателем постоянного тока приобретает все большее значение [1, 2, 3, 5]. Хотя принцип импульсного регулирования в цепи якоря двигателей давно известен, однако только создание мощных тиристоров позволяет по-новому решать вопросы регулирования скорости двигателей постоянного тока. Особенность широтно-импульсного преобразователя заключается в том, что он преобразует постоянное напряжение в последовательность импульсов напряжения постоянной амплитуды и полярности, но разной продолжительности. На рис. 1, а представлена одна из схем широтно-импульсного управления двигателем постоянного тока. В момент t_1 (рис. 1, б) включается рабочий тиристор T_1 и ток двигателя возрастает до момента t_2 , после чего тиристор T_1 выключается с помощью гасящего контура K . При этом ток нагрузки замыкается через шунтирующий диод D и значение его падает.

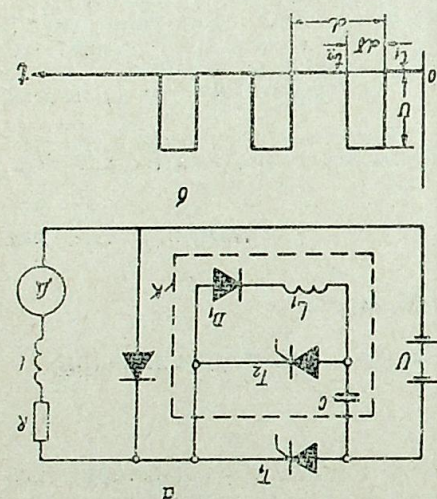


Рис. 1.

Таким образом, электропривод с широтно-импульсным преобразователем представляет собой импульсную систему, импульсный элемент которой формирует импульсы прямоугольной формы с переменной скважностью, воздействующие на непрерывную часть системы—двигатель постоянного тока.

Уравнения равновесия напряжений для якорной цепи и равновесия моментов имеют вид:

$$u = i + \frac{di}{d\tau} + \omega, \quad (1)$$

$$i = \frac{1}{\delta} \frac{d\omega}{d\tau} + m,$$

где $i = \frac{I}{I_k}$, I_k —ток короткого замыкания;

$\tau = \frac{t}{T_s}$, T_s —электромагнитная постоянная времени цепи;

$\delta = \frac{T_s}{T_m}$, T_m —электрохимическая постоянная времени;

$m = \frac{M_n}{M_k}$, M_k —момент при токе короткого замыкания;

$u = \frac{U}{U_{ном}}$, $U_{ном}$ —номинальное напряжение источника;

$\omega = \frac{n}{n_0}$, n_0 —скорость холостого хода.

Эти уравнения в операторной форме выглядят несколько иначе:

$$u(p) = i(p) + pi(p) + \omega(p), \quad (2)$$

$$i(p) = \frac{1}{\delta} p \omega(p) + m(p).$$

Решая (2) относительно $\omega(p)$ и $i(p)$, получим

$$\omega(p) = u(p) \frac{\delta}{p^2 + p + \delta} - m(p) \frac{(1+p)\delta}{p^2 + p + \delta}, \quad (3)$$

$$i(p) = u(p) \frac{p}{p^2 + p + \delta} + m(p) \frac{\delta}{p^2 + p + \delta}.$$

Передаточные функции представим в виде:

$$F_1(p) = \frac{\omega(p)}{u(p)} = \frac{\delta}{p^2 + p + \delta},$$

$$F_2(p) = \frac{\omega(p)}{m(p)} = \frac{\delta(1+p)}{p^2 + p + \delta}, \quad (4)$$

$$F_3(p) = \frac{i(p)}{u(p)} = \frac{p}{p^2 + p + \delta}.$$

Тогда система (3) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega(p) &= u(p) F_1(p) - m(p) F_2(p), \\ i(p) &= u(p) F_3(p) + m(p) F_1(p). \end{aligned} \quad (5)$$

Для частного, но практически почти всегда имеющего место случая электрохимическая постоянная значительно больше электромагнитной:

$$T_m > 4 T_s.$$

При таком соотношении характеристическое уравнение цепи имеет разные вещественные корни β_1 и β_2 . На выходе формирующего элемента образуется последовательность прямоугольных импульсов, модулированная внешним воздействием. В системе с широтно-импульсным преобразователем ширина импульса Δt является величиной переменной и изменяется по определенно заданному закону.

Рассмотрим задачу для случая, когда параметр импульсного элемента γ остается постоянным. Функция, определяющая прямоугольный импульс высотой u , может быть записана в виде [4].

$$S_a(t) = \begin{cases} u \cdot 1(t) & \text{при } 0 \leq t \leq a\gamma, \\ u[1(t) - 1(t - a\gamma)] & \text{при } a\gamma \leq t; \end{cases} \quad (6)$$

$S_a(t)$ — функция, определяющая форму импульса.

При исследовании импульсной системы будем пользоваться дискретным преобразованием Лапласа. Вводим новый параметр преобразования $q = pT$, где T — период коммутации. Для рассматриваемой задачи $T = \alpha$. Величина α задается устройством управления широтно-импульсным преобразователем, где $F(q)$ — передаточные функции непрерывной части двигателя. Производя замену параметра p на q/α , представим уравнение (4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_1(q) &= \frac{\delta\alpha}{q^2 + \alpha q + \alpha^2\delta} = \frac{\delta\alpha}{(q - q_1)(q - q_2)}, \\ F_2(q) &= -\frac{\delta\alpha(\alpha + q)}{q^2 + \alpha q + \alpha^2\delta} = -\frac{\delta\alpha(\alpha + q)}{(q - q_1)(q - q_2)}, \\ F_3(q) &= \frac{q\alpha}{q^2 + \alpha q + \alpha^2\delta} = \frac{q\alpha}{(q - q_1)(q - q_2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая формулы (7), (8) и применяя дискретное преобразование Лапласа к уравнению (5), найдем изображение скорости и тока для разомкнутой системы:

$$\begin{aligned} \omega^*(q, \varepsilon) &= \frac{ue^q}{e^q - 1} D \left[\frac{1 - e^{-q\gamma}}{q} F_1(q) \right] - D[m(q)F_2(q)], \\ i^*(q, \varepsilon) &= \frac{ue^q}{e^q - 1} D \left[\frac{1 - e^{-q\gamma}}{q} F_3(q) \right] + D[m(q)F_1(q)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} D \left[\frac{1 - e^{-q\gamma}}{q} F_1(q) \right] &= D[K_1(q)] = K_1^*(q, \varepsilon), \\ D \left[\frac{1 - e^{-q\gamma}}{q} F_3(q) \right] &= D[K_2(q)] = K_2^*(q, \varepsilon), \\ D[m(q)F_2(q)] &= D[K_3(q)] = K_3^*(q, \varepsilon), \\ D[m(q)F_1(q)] &= D[K_4(q)] = K_4^*(q, \varepsilon). \end{aligned} \quad (10)$$

В общем случае передаточные функции $F(q)$ можно представить в виде

$$F(q) = \frac{P(q)}{Q(q)}.$$

В случае, если $F(q)$ не имеет ни кратных, ни нулевых полюсов, передаточные функции разомкнутой импульсной системы $K^*(q, \varepsilon)$ при воздействии последовательности прямоугольных импульсов соответственно равны [4]:

$$K^*(q, \varepsilon) = C_{00} + \sum_{v=1}^l C_{v0} \frac{e^q - e^{qv(1-\gamma)}}{e^q - e^{qv}} e^{qv\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \gamma; \quad (11)$$

$$K^*(q, \varepsilon) = \sum_{v=1}^l C_{v0} \frac{e^q (e^{qv\gamma} - 1)}{e^q - e^{qv}} e^{qv(\varepsilon - \gamma)}, \quad \gamma \geq \varepsilon \geq 1,$$

$$\text{где } C_{00} = \frac{P(0)}{Q(0)}, \quad C_{v0} = \frac{P(q_v)}{Q'(q_v) q_v},$$

Передаточные функции $K_1(q)$, $K_2(q)$ имеют два полюса:

$$q_1 = \beta_1 \alpha; \quad q_2 = \beta_2 \alpha.$$

$$\begin{aligned} K_1^*(q, \varepsilon) &= 1 + \frac{e^{\beta_1 \alpha \varepsilon} \delta}{(\beta_1 - \beta_2) \beta_1} \frac{(e^q - e^{\beta_1 \alpha (1-\gamma)})}{e^q - e^{\beta_1 \alpha}} + \\ &+ \frac{e^{\beta_2 \alpha \varepsilon} \delta}{(\beta_2 - \beta_1) \beta_2} \frac{(e^q - e^{\beta_2 \alpha (1-\gamma)})}{e^q - e^{\beta_2 \alpha}}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \gamma \end{aligned}$$

$$K_1^*(q, \varepsilon) = \frac{\delta e^{\beta_1 \alpha (\varepsilon - \gamma)}}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2)} \frac{e^q (e^{\beta_1 \alpha \gamma} - 1)}{e^q - e^{\beta_1 \alpha}} + \frac{\delta}{\beta_2 (\beta_2 - \beta_1)} \frac{e^q (e^{\beta_2 \alpha \gamma} - 1)}{(e^q - e^{\beta_2 \alpha})}, \quad \gamma \leq \varepsilon \leq 1 \quad (12)$$

$$\text{Передаточная функция } K_3(q) = \frac{1}{\alpha} K_3 \left(\frac{q}{\alpha} \right) \text{ или}$$

$$K_3(q) = \frac{m \sigma \delta (d + q)}{q(q^2 + \alpha q + \alpha^2 \delta)}. \quad (13)$$

Для определения $K_3^*(q, \varepsilon)$ разложим $K_3(q)$ на простейшие дроби с помощью метода неопределенных коэффициентов и, применяя D -преобразование, получим

$$\begin{aligned} K_3^*(q) &= m \left\{ \frac{e^q}{e^q - 1} + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left[\beta_2 (1 + \beta_1) \frac{e^q e^{\beta_1 \alpha \varepsilon}}{e^q - e^{\beta_1 \alpha}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \beta_1 (1 + \beta_2) \frac{e^q e^{\beta_2 \alpha \varepsilon}}{e^q - e^{\beta_2 \alpha}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив (13) и (14) в уравнение (9), получим окончательное выражение изображения скорости:

$$\begin{aligned} \omega^*(q, \varepsilon) &= \frac{ue^q}{e^q - 1} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left[\beta_2 e^{\beta_1 \alpha \varepsilon} \frac{e^q - e^{\beta_1 \alpha (1-\gamma)}}{e^q - e^{\beta_1 \alpha}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \beta_1 e^{\beta_2 \alpha \varepsilon} \frac{e^q - e^{\beta_2 \alpha (1-\gamma)}}{e^q - e^{\beta_2 \alpha}} \right] \right\} - m \left\{ \frac{e^q}{e^q - 1} + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left[\beta_2 (1 + \beta_1) \frac{e^q}{e^q - e^{\beta_1 \alpha}} e^{\beta_1 \alpha \varepsilon} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \beta_1 (1 + \beta_2) \frac{e^q}{e^q - e^{\beta_2 \alpha}} e^{\beta_2 \alpha \varepsilon} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (15)$$

при $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$

$$\omega^*(q, \varepsilon) = \frac{ue^q}{e^q - 1} \left\{ \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left[\beta_2 \frac{e^q (e^{\beta_1 \alpha \gamma} - 1)}{e^q - e^{\beta_1 \alpha}} e^{\beta_1 \alpha (\varepsilon - \gamma)} - \beta_1 \frac{e^q (e^{\beta_2 \alpha \gamma} - 1)}{e^q - e^{\beta_2 \alpha}} e^{\beta_2 \alpha (\varepsilon - \gamma)} \right] - \right.$$

$$-m \left\{ \frac{e^q}{e^q - 1} + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left[\beta_2 (1 + \beta_1) \frac{e^q}{e^q - e^{\beta_1 \alpha}} e^{\beta_1 \alpha \varepsilon} - \beta_1 (1 + \beta_2) \frac{e^q}{e^q - e^{\beta_2 \alpha}} e^{\beta_2 \alpha \varepsilon} \right] \right\}.$$

Для определения оригинала по полученному изображению можно воспользоваться обратным дискретным преобразованием Лапласа:

$$\omega[n, \varepsilon] = D^{-1}[\omega^*(q, \varepsilon)].$$

Применив формулы обращения, получим выражения, определяющие закон изменения угловой скорости $\omega[n, \varepsilon]$ для моментов времени, лежащих внутри импульса,

$$\omega[n, \varepsilon] = u \left\{ 1 + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left[\beta_2 e^{\beta_1 \alpha \varepsilon} \frac{(1 - e^{\beta_1 \alpha (n+1)}) - (1 - e^{\beta_1 \alpha n}) e^{\beta_1 \alpha (1-\gamma)}}{1 - e^{\beta_1 \alpha}} - \beta_1 e^{\beta_2 \alpha \varepsilon} \frac{(1 - e^{\beta_2 \alpha (n+1)}) - (1 - e^{\beta_2 \alpha n}) e^{\beta_2 \alpha (1-\gamma)}}{1 - e^{\beta_2 \alpha}} \right] - m \left\{ 1 + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} [\beta_2 (1 + \beta_1) e^{\beta_1 \alpha (n+\varepsilon)} - \beta_1 (1 + \beta_2) e^{\beta_2 \alpha (n+\varepsilon)}] \right\} \right\}; \quad (16)$$

для моментов времени, лежащих вне импульса,

$$\omega[n, \varepsilon] = \frac{u}{\beta_1 - \beta_2} \left[\beta_2 e^{\beta_1 \alpha (\varepsilon - \gamma)} \frac{(e^{\beta_1 \alpha \gamma} - 1)(1 - e^{\beta_1 \alpha (n+1)})}{1 - e^{\beta_1 \alpha}} - \beta_1 e^{\beta_2 \alpha (\varepsilon - \gamma)} \frac{(e^{\beta_2 \alpha \gamma} - 1)(1 - e^{\beta_2 \alpha (n+1)})}{1 - e^{\beta_2 \alpha}} \right] - m \left\{ 1 + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} [\beta_2 (1 + \beta_1) e^{\beta_1 \alpha (n+\varepsilon)} - \beta_1 (1 + \beta_2) e^{\beta_2 \alpha (n+\varepsilon)}] \right\}.$$

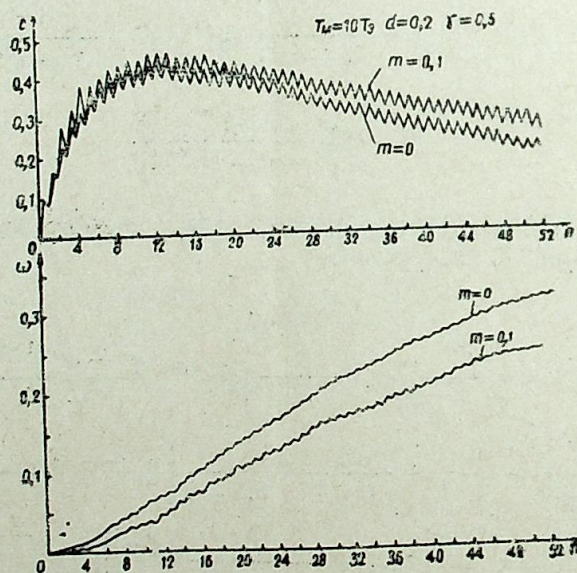


Рис. 2.

Аналогично был определен закон изменения тока нагрузки. В окончательном виде выражения для тока $i[n, \varepsilon]$ имеют вид:

при $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$

$$i[n, \varepsilon] = \frac{u}{\beta_1 - \beta_2} \left[e^{\beta_1 \alpha \varepsilon} \frac{(1 - e^{\beta_1 \alpha (n+1)}) - e^{\beta_1 \alpha (1-\gamma)} (1 - e^{\beta_1 \alpha n})}{1 - e^{\beta_1 \alpha}} - e^{\beta_2 \alpha \varepsilon} \frac{(1 - e^{\beta_2 \alpha (n+1)}) - e^{\beta_2 \alpha (1-\gamma)} (1 - e^{\beta_2 \alpha n})}{1 - e^{\beta_2 \alpha}} \right] + m \left\{ 1 + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} [\beta_2 e^{\beta_1 \alpha (n+\varepsilon)} - \beta_1 e^{\beta_2 \alpha (n+\varepsilon)}] \right\};$$

при $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$

$$i[n, \varepsilon] = \frac{u}{\beta_1 - \beta_2} \left[e^{\beta_1 \alpha (\varepsilon - \gamma)} \frac{(e^{\beta_1 \alpha \gamma} - 1)(1 - e^{\beta_1 \alpha (n+1)})}{1 - e^{\beta_1 \alpha}} - e^{\beta_2 \alpha (\varepsilon - \gamma)} \frac{(e^{\beta_2 \alpha \gamma} - 1)(1 - e^{\beta_2 \alpha (n+1)})}{1 - e^{\beta_2 \alpha}} \right] + m \left\{ 1 + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} [\beta_2 e^{\beta_1 \alpha (n+\varepsilon)} - \beta_1 e^{\beta_2 \alpha (n+\varepsilon)}] \right\}. \quad (17)$$

По уравнениям (16) и (17) был построен переходный процесс в системе для случая пуска при холостом ходе и при $m = 0,1$. Полученные кривые представлены на рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайцберг М. И., Шикуть Э. В. Импульсные методы регулирования цепей постоянного тока с помощью тиристоров. Изд-во "Энергия", М., 1969.
2. Hurysh J., Stiecha J. Elektrotechnicky obzor, 1968, № 3.
3. Глазенок Т. А. Изв. вузов, Приборостроение, 1968, № 7.
4. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
5. Эфендизаде А. А., Заирова Т. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1967, № 2.

Институт энергетики
им. Есманя

Поступило 22. XI 1969

Б. А. Листенгартен, Т. А. Заирова, К. Б. Элизадэ

Енинэ импулсу тиристор чевирчиси сабит чэрэјан
мүһәррији системиндә импулс системлери нәзәријәсинин
кечид просесләрин тәдгигиндә тәтбиги

ХҮЛАСӘ

Енинэ импулсу чевирчили elektrik интегралы импулс элементи дүзбучагшәкилли импулс әмәлә кәтирән системдән ибарәтдир. Бу дүзбучагшәкилли импулс сабит чэрэјан мүһәррији системинин фәсиләсиз һиссәсиндә тәсир кәстәрир.

Импулс системинин тәдгиги заманы Лапласын дискрет чевирмәсиндән истифадә едиләчәкдир. Алынмыш тәсвирә әсасән орижиналын тәјини үчүн исә Лапласын әкс дискрет чевирмәсиндән истифадә олуна биләр.

Сабит чэрэјан мүһәрријинин јүклү вә јүксүз ишләмә заманы ишә бурахылмасы үчүн системдән кечид просеси әриләри гурулмушдур.

Я. Б. КАДЫМОВ, Т. И. АГАЛАРОВ, Ф. А. МАМЕДОВ

К АНАЛИЗУ ПРОЦЕССА ПУСКА НЕСИММЕТРИЧНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Процесс пуска в ход является неотъемлемым элементом рабочего цикла электропривода. Для учета влияния процесса пуска на режим работы электропривода необходимо знать его длительность и характер протекания. Для определения длительности переходного процесса необходимо решить уравнение движения:

$$I \frac{dv}{dt} = M - M_{cm} \quad (1)$$

относительно времени применительно не симметричных машинам.

Для момента вращения в симметричных машинах разработаны относительно удобные формулы. Например, для асинхронного двигателя полная и упрощенная формулы Клесса, которые при подстановке в уравнение движения (1) дают возможность относительно простого интегрировать. Однако для момента вращения несимметричных машин таких удобных формул нет.

Как было ранее установлено [1], для M в случае несимметричной машины можно записать следующее:

$$M = U^2 r_{rd} \frac{a(1-v^2) - b(1-v^2)(1-v) - cv}{[d(1-v^2) + l]^2 + [m(1-v^2) + n]^2} \quad (2)$$

где $a = (R_{sq} + \kappa X_{sd})^2 + (\kappa R_{sd} - X_{sq})^2 + 2\kappa(R_{kq}X_{sd} - R_{rd}X_{sq})$,

$$b = R_{sq}^2 + \kappa^2 X_{sd}^2 + \kappa^2 R_{sd}^2 + X_{sq}^2,$$

$$c = R_{rq}^2 + \kappa^2 R_{rd}^2,$$

$$d = R_{sd}R_{sq} - X_{sd}X_{sq},$$

$$e = R_{rd}R_{pq} + R_{rq}R_{pq} + R_{rd}R_{sq},$$

$$m = X_{sd}R_{sq} + X_{sq}R_{sd},$$

$$n = X_{sq}R_{rd} + X_{sd}R_{rq};$$

$R_{sq}, R_{sd}, R_{rq}, R_{rd}, X_{sq}, X_{sd}$ — параметры r -образных схем замещения несимметричной машины. Например, в случае ОКД они выражаются через активные и индуктивные сопротивления по продольной и поперечной оси машины:

$$R_{sd} = r_{sd}, \quad R_{rd} = r_{rd}c, \quad X_{sq} = x_d + x_{rd}c, \quad R_{sq} + r_{sq}c_k, \quad R_{rq} = r_{rq}cc_k,$$

$$X_{sq} = x_{sq}c_k + x_{rq}cc_k - x_k,$$

$$c = 1 + \frac{x_{sd}}{x_{md}}, \quad c_k = 1 - \frac{x_k}{x_{mq}c},$$

$$t = I \int_{v_{квн}}^{v_{квн}} \frac{dv}{M - M_{cm}} \quad (3)$$

В общем случае $M_{cm} = \text{const}$. Если M подставить из выражения (2), то найти время разгона аналитически невозможно. Рассматривая механические характеристики различных по мощности ОКД, построенные по формуле (2), приведенные на рис. 1, можно увидеть, что в области разгона они достаточно близки к линейным кривым.

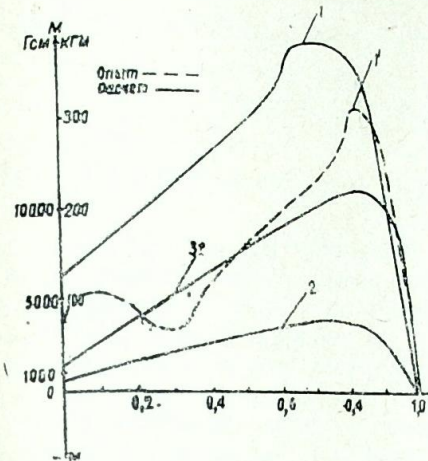


Рис. 2. Рабочие кривые конденсаторных двигателей: 2—однофазный электродвигатель; 2—ОКД, $P_n = 45 \text{ кВт}$; 3—ОКД, полученный из трехфазного АОЛ 12/4; 1—однофазный электродвигатель при $U_n = 600 \text{ В}$, $C = 470 \text{ мкФ}$.

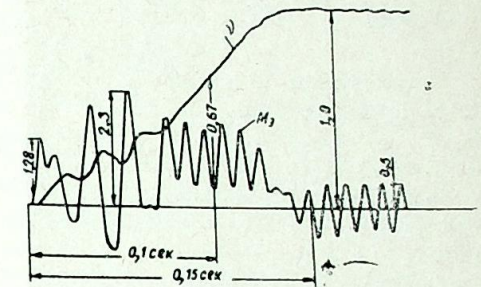


Рис. 2.

Известно, что любая функция $f(x)$, имеющая производные всех порядков, может быть разложена в ряд Тейлора по степеням x . Имея это в виду, произведем разложение в ряд Тейлора функции (2) около точки $v = 0$:

$$f(0) = U^2 r_{rd} \frac{a - b}{(d + e)^2 + (m + n)^2},$$

$$f'(0) = U^2 r_{rd} \frac{(b - c)[(d + e)^2 + (m + n)^2]}{[(d + e)^2 + (m + n)^2]^2} = U^2 r_{rd} \frac{b - c}{(d + e)^2 + (m + n)^2}.$$

Итак, на начальном участке кривую разгона несимметричной машины можно заменить прямой

$$M = U^2 r_{rd} \frac{a - b + (b - c)v}{(d + e)^2 + (m + n)^2} \quad (4)$$

Причем учтем, что

$$M_n + U^2 r_{rd} \frac{a - b}{(d + e)^2 + (m + n)^2} \quad (5)$$

На примере однофазного конденсаторного электродвигателя покажем насколько точно формула (4) отображает его механическую характеристику в области разгона. Параметры однофазного электродвигателя взяты на основе отчета ЦКТБЭ (Харьков). Параметры, переведенные в относительные единицы и вычисленные на основе их коэффициенты сле-

дующие:
 $r_{sd} = r_{sq} = 0,0465$, $x_{sd} = x_{sq} = 0,082$, $r_{rd} = r_{rq} = 0,0923$,
 $x_{rd} = x_{rq} = 0,0525$, $x_{md} = x_{mq} = 0,93$, $x_k = 0,86$,
 $a = 0,981$, $b = 0,754$, $c = 0,0108$, $d = 0,117$,
 $e = 0,004$, $m = 0,037$, $n = 0,0837$, $l = 30 \text{ рад}$,
 $M_{\text{бэд}} = 270 \text{ кгМ}$.

Ниже в таблице показаны значения M , вычисленные по двум формулам.

v	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
M по (2)	0,36	0,478	0,6	0,725	0,856	0,885	1,09	1,21	1,17
M по (4)	0,36	0,477	0,594	0,711	0,828	0,945	1,062	1,18	1,295

Как видно из таблицы, значения M по упрощенной формуле 4 достаточно хорошо совпадают со значениями его по основной формуле до $v = 0,8$. Имея в виду критическую скорость однофазного электробура $v_k = 0,77$, можем сказать, что выражение (4), приблизительно, до максимального момента отображает механическую характеристику. Если же критическая скорость однофазного двигателя еще выше, к чему стремятся в практике эксплуатации однофазных конденсаторных двигателей, то прямолинейная аппроксимация захватывает еще большую часть механической характеристики.

Допустим, что $M_{\text{см}} = \text{const}$. Если статический момент изменяется, то надо знать характер этой зависимости от скорости v . Подставим в (3) значение M из (4) и произведем интегрирование. Учтем, что машина запускается из неподвижного состояния, т. е. $v_1 = 0$, тогда

$$t = I \int_0^v \frac{dv}{U^2 r_{rd} \frac{a-b+(b-c)v}{(d+e)^2 + (m+n)^2} - M_{\text{см}}} =$$

$$= I \frac{(d+e)^2 + (m+n)^2}{U^2 r_{rd} (b-c)} \ln \frac{U^2 r_{rd} [a-b+(b-c)v] - M_{\text{см}}}{U^2 r_{rd} (a-b) - M_{\text{см}}} -$$

$$- \frac{M_{\text{см}} [(d+e)^2 + (m+n)^2]}{M_{\text{см}} [(d+e) + (m+n)^2]} \quad (6)$$

С учетом (5) выражение (6) запишется в виде

$$t = \frac{I(a-b)}{M_n(b-c)} \ln \frac{M - M_{\text{ст}}}{M_n - M_{\text{см}}} \quad (7)$$

Из (7) следует, что в значительной степени время пуска определяется отношением $\frac{I}{M_n}$. Если влияние момента инерции на процесс пуска не требует особых пояснений, то значение M_n в ОКД определяется предвключенной емкостью. Как показывают осциллограммы, приведенные на рис. 2, значение пускового ударного и установившегося моментов в зависимости от емкости не приводит к росту соответствующих моментов. Поэтому для ОКД нельзя говорить о прямой зависимости пропорциональности времени пуска от емкости. Для ОКД

существуют определенная емкость, когда достигаются минимальное время при пуске и соответственно потери.

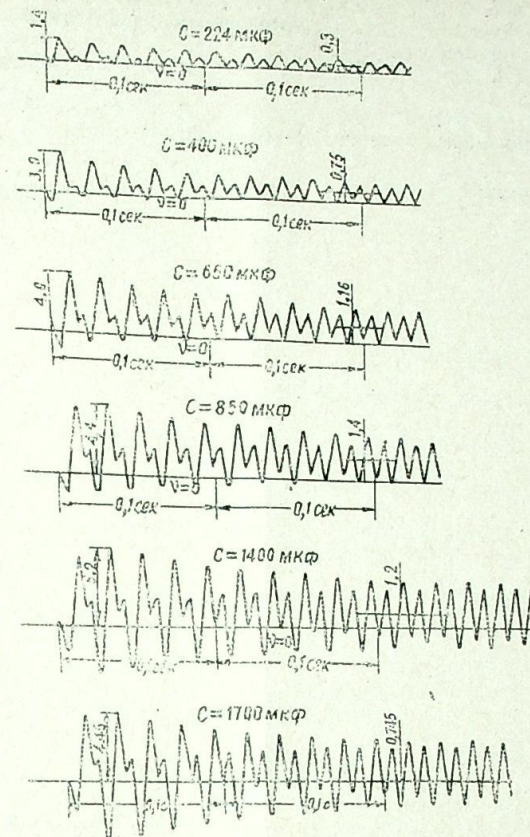


Рис. 3.

Рассмотрим пуск вхолостую, т. е. случай когда $M_{\text{см}} = 0$. Из выражения (6) следует, что

$$t = \frac{I(a-b)}{M_n(b-c)} \ln \frac{a-b+(b-c)v}{a-b} \quad (8)$$

При пуске вхолостую ОКД, приблизительно, $v = 1$. Время пуска однофазного электробура, рассчитанное по формуле (8), $t = 37,2 \text{ рад} = 0,119 \text{ сек}$. Время пуска с учетом электромагнитных переходных процессов, как видно из рис. 3, полученное решением полных дифференциальных уравнений ОКД на цифровой вычислительной машине «Урал», составляет $t = 47 \text{ рад} = 0,15 \text{ сек}$.

Выводы

1. Для приближенного определения времени разгона однофазного электропривода можно рекомендовать формулы (6) и (8), которые при известных параметрах позволяют достаточно просто определить его. Для точных расчетов с учетом электромагнитных переходных процессов необходимы вычислительные машины.
2. Время разгона в основном определяется пусковым моментом ОКД. Для расчета минимального времени пуска при конкретных заданных параметрах ОКД можно дифференцировать выражение (5) по емкости, находя оптимальное значение пусковой емкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадымов Я. Б., Агаларов Т. И. „За технических прогресс“, 1968, № 11.
2. Сыромятников И. А. Режимы работы асинхронных и синхронных электродвигателей. Госэнергоиздат, 1963.
3. Андреев В. П., Сабинин Ю. А. Основы электропривода. Госэнергоиздат, 1963.
4. Копылов И. П., Мамедов Ф. А., Беспалов В. Я. Математическое моделирование асинхронных машин. Изд-во „Энергия“, 1969.

Институт энергетики
и м. И. Г. Есьмана

Поступило 5. II 1970

МҮНДЭРИЧАТ

- А. Д. Искандеров. Параболик тип тэнликлэр үчүн бир сэрхэд мәсәлэсинин сонлу фэрглэр үсүлү илэ һәлли 3
- Ј. А. Ларионов. Сэрхәддә симметрик биртәртибли системләрин биргиј-мәтли һәлли һаггында 8
- Ә. М. Нәсәнов. Газлы нефтин бирөлчүлү мәсәлэләринин һәлли үчүн үмүмиләшмиш алгоритм 12
- С. Ј. Јагубов. Гејри-хәтти икинчи тәртиб һиперболик тэнликләри үчүн Коши мәсәләси, 2 16
- Н. А. Бучајев. Фурје әмсалларынын бәзи хәссәләри 22
- А. М. Абасов. Бирөлчүлү гејри-идеал үчүнчү истилик-контактлы сэрхэд мәсәләси һаггында 28
- К. Ә. Чәфәрли, Н. М. Нәшымов. Дирихли сыралары үчүн бир јеканәлик теоремә һаггында 36
- Н. Б. Абдуллаев, З. Ә. Искәнрзәдә, М. Р. Ахундов, В. Н. Качурин, Ф. И. Плијев, Е. Ә. Чәфәрова, Ш. Ә. Әлиханова. Јарымкечиричи диодларда актив вә реактив кечиричилијин кәржинликдән асылылығыны автоматик јазмаг үчүн чинәз 42
- М. И. Шаһтахтинскаја, Ч. С. Томтијев, А. А. Мусәјев, М. Г. Шаһтахтински. Сегрегасија едән вә әридикдә бухарланан системләрин монокристалларынын көјәрдиlmәси һаггында 48
- Н. Х. Әждәров, В. И. Таһиров, Б. С. Әлијева, С. И. Таиров, М. Н. Шаһтахтински. Керманнум-силлисиум бәрк мәһлулларында термик аксепторлар 53
- А. А. Әбдүррәһманов, М. Н. Јолчијев, Л. М. Иманов. $(\text{CH}_3)_2\text{CHON}$ молекулу транс-формасынын микродалғадакы спектри 58
- Т. Н. Дилбазов, Ә. Х. Хәлилов. Мис ашгарлы бәзи NaCl фосфорларында Z -рәнкләнмә мәркәзләринин тәдгиги 63
- А. М. Пашајев. Јарымкечиричиләрин јүрүклүјүнүн ифрат јүксәк тәзликләрдә өлчүlmәси 67
- А. К. Абасзәдә, Т. А. Ағәјев, Ә. М. Кәримов. Октеп-1 вә тсиклоһексен сыхлығынын температурдан вә тәзјигдән асылылығынын експериментал үсулла тәдгиги 70
- П. Р. Амнуел, О. Х. Нүсәјнов. Аккресија заманы магнит саһәси тәрәфиндән тутулма 74
- Ә. Ә. Нүсәјнзәдә. Волф-Раје улдузларынын ики мүмкүн олан тәкамүл јолу 83
- Т. К. Исмајылов. Кенераторун Ф. И. Ә.-нин, лампанын тор электро-дундакы истилик иткиләрилә мәһдудлашмасыны нәзәрә алмагла, јүксәк тәзликли рәгс үчгәтлашдырычысынын оптимал режиминин тәдгиги мәсәләсинә даир 87
- Н. Ә. Әлијев, Р. А. Акопјан, Ф. Г. Мәһәррәмова, Б. А. Әһмәдов. 36Г2С маркалы поладын термик емалы 93
- К. С. Нәгвердијев. Истиликдәјишмәни нәзәрә алмагла өзлү газын мүстәви диффузорларда автомодел ахыны 98
- Ј. Б. Гәдимов, З. Ј. Гулијев, С. И. Мјачин. Фасиләсиз типли һесаблајычы машинларын узун хәтли elektrik системләринин кечид просесләринә онларын параметрләринин тәсирләрини тәдгиги етмәк үчүн тәтбиг едилмәси 104
- А. Н. Гладких. Иттриумун давамлылығы вә еластиклији 115
- Ч. М. Чуварлы, Л. Мухарскаја. Трансформатор јағларынын ионизасија характеристикалары 120
- Б. А. Листенгартен, Т. А. Заирова, К. Б. Әлизәдә. Енинә импульслу тиристор чевиричиси сабит чәрәјан мүһәррији системиндә импульс системләри нәзәријјәсинин кечид просесләрин тәдгигинә тәтбиги 126
- Ј. Б. Гәдимов, Т. И. Агаларов, Ф. А. Мәмәдов. Гејри-симметрик асинхрон мүһәрријин ишә дүшмәси просесинин анализинә даир 132

СОДЕРЖАНИЕ

А. Д. Искендеров. Разностные методы решения одной краевой задачи для уравнения параболического типа	3
Е. А. Ларионов. Об однозначной разрешимости некоторых симметричных на границе систем первого порядка	8
А. М. Гасанов. Обобщенный алгоритм для решения одномерных задач фильтрации газированной нефти	12
С. Я. Якубов. Задача Коши для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка	16
Н. А. Бучаев. Некоторые свойства коэффициентов Фурье	22
А. М. Абасов. О третьей одноименной неидеальной теплоконтактно-краевой задаче	28
Г. А. Джафарли, Г. М. Гашимов. Об одной теореме единственности для рядов Дирихле	36
Г. Б. Абдуллаев, З. А. Искендер-заде, М. Р. Ахундов, В. Н. Качурин, Ф. И. Плиев, З. А. Джафаров, Ш. А. Алиханова. Прибор для автоматической непрерывной записи составляющих полной проводимости полупроводниковых диодов в зависимости от напряжения смещения	42
М. И. Шахтактинская, Д. С. Томтиев, А. А. Мусаев, М. Г. Шахтактинский. О выращивании монокристаллов систем со значительной сегрегацией компонентов, испаряющихся при плавлении	48
Г. Х. Аждаров, В. И. Тагиров, Б. С. Алиева, С. И. Таиров, М. Г. Шахтактинский. Термические акцепторы в сплавах германия с кремнием	53
А. А. Абдурахманов, М. Н. Елчиев, Л. М. Иманов. Микроволновой спектр транс-формы молекулы $(CH_3)_2CHOH$	58
Т. Г. Дильбазов, А. Х. Халилов. Исследование Z-центров окраски в некоторых NaCl-фосфорах с примесями меди	63
А. М. Пашаев. Измерение холловской подвижности носителей тока в полупроводниках на сверхвысоких частотах	67
А. К. Абас-заде , Т. А. Апаев, А. М. Керимов. Экспериментальное исследование плотности октена-1 и циклогексена в зависимости от температуры и давления	70
П. Р. Амнуэль, О. Х. Гусейнов. Магнитный захват при аккреции. I	74
А. А. Гусейн-заде. Два возможных пути эволюции звезд Вольф-Райе	83
Т. К. Исмаилов. К вопросу исследования оптимального режима утронителя высокочастотных колебаний при учете ограничения роста к.п.д. генератора тепловыми потерями на сеточном электроде лампы	87
Н. А. Алиев, Р. А. Аюбян, Ф. Г. Магеррамова, Б. А. Ахмедов. Термическая обработка стали 36Г2С	93
К. С. Ахвердиев. Об одном автомодельном решении задачи о теплообмене вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре	98
Я. Б. Кадымов, З. Я. Кулиев, С. И. Мячин. Применение ВМНД для исследования влияния параметров электрической системы, включающей длинную линию, на переходный процесс в ней	104
А. Н. Гладких. О прочности и пластичности иттрия	115
Ч. М. Джуварлы, Л. А. Мухарская. Ионизационные характеристики трансформаторных масел	120
Б. А. Листенгартен, Т. А. Заирова, Г. Б. Ализаде. Применение теории импульсных систем к исследованию переходных процессов в системе тиристорный широтно-импульсный преобразователь—двигатель постоянного тока	126
Я. Б. Кадымов, Т. И. Агаларов, Ф. А. Мамедов. К анализу процесса пуска несимметричного асинхронного двигателя	132

Сдано в набор 25/IX 1970 г. Подписано к печати 22/II 1971 г. Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бум. лист. 4,25. Печ. лист. 11,65. Уч.-изд. лист. 11,2. ФГ 11546. Заказ 448. Тираж 670. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Государственного комитета Совета Министров Азербайджанской ССР по печати. Баку, Ази Асланова, 80.