

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

4

1970

„ЕЛМ НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭЛМ“
БАКЫ – БАКУ

УДК 539. 374

Ж. И. ТАИРОВА

ТОЛСТОСТЕННАЯ ТРУБА ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ И ПЕРЕМЕННОГО КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

Толстостенная труба с внутренним радиусом a и внешним радиусом b нагружена на внутренней поверхности давлением p' и крутящим моментом M' . Предполагается, что материал трубы несжимаем

$$\sum_{i=1,2,3} \varepsilon'_{ii} = 0$$

и обладает упрочнением

$$\sigma'_u = \begin{cases} 3G \varepsilon'_u & \text{при } \varepsilon'_u \leq \varepsilon'_s \\ N \varepsilon'^x_u & \text{при } \varepsilon'_u \geq \varepsilon'_s \end{cases}$$

Здесь ε'_{ij} — компоненты тензора деформаций, σ'_u — интенсивность напряжений, ε'_s — интенсивность деформаций, $\varepsilon'_s = \frac{\sigma'_s}{3G}$, σ'_s — предел теку-

чести при растяжении, G — модуль сдвига, $N = 3G \varepsilon'^{1-x}_s$, $0 \leq x \leq 1$. Штрихом обозначены все функции и параметры, соответствующие первому нагружению.

Считаем, что осевая деформация трубы равна нулю (плоская деформация).

Задача состоит в определении

- а) напряженного (деформированного) состояния трубы под действием давления $p' > 0$ и момента $M' > 0$ при первом нагружении;
- б) напряженного состояния в процессе разгрузки в случае появления вторичных пластических деформаций и в случае их отсутствия;
- в) напряженного состояния после полного удаления давления и приложения отрицательного момента $M'' < 0$;
- г) напряженного состояния, возникающего при n -ом циклическом нагружении моментом $M^{(n)}$ и давлением $p^{(n)}$.

Задача решается в рамках теории малых упруго-пластических деформаций. Нетрудно показать, что пластические деформации впервые появятся на внутреннем радиусе $r = a$. Согласно критерию, позволяющему разграничить процессы упругого, упруго-пластического и пластического деформирования, имеем следующее.

Если выполняется неравенство

$$\gamma_1(a) = \sqrt{3} \left[\left(\frac{p'}{\sigma'_s} \right)^2 \left(\frac{b^2/a^2}{b^2/a^2 - 1} \right)^2 + \left(\frac{M'(a)}{2\pi a^3 \sigma'_s} \right)^2 \right]^{1/2} \leq 1, \quad (1)$$

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. Б. Абдуллаев (главный редактор), З. И. Халилов (зам. главного редактора), Г. Н. Агаев, М. И. Алиев, Ю. А. Амензаде, Б. М. Аскеров, Н. А. Гулиев, А. И. Гусейнов, М. А. Джавадов, И. И. Ибрагимов, Л. М. Иманов, Ф. Г. Максудов, Э. И. Манафлы (ответств. секретарь), Ю. М. Сеидов (зам. главного редактора), Г. Ф. Султанов.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)».

Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

п53895

то труба деформируется чисто упруго. В свою очередь, если труба деформируется упруго, имеет место неравенство (1). (Необходимое и достаточное условие).

Если же

$$\gamma_1(b) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{b^2} \left[\left(\frac{p'}{\sigma_s} \right)^2 \cdot \left(\frac{b^2/a^2}{b^2/a^2 - 1} \right)^2 + \left(\frac{M'(a)}{2\pi a^3 \sigma_s} \right)^2 \right]^{1/2} \geq 1, \quad (2)$$

то труба деформируется чисто пластически (достаточное условие).

Очевидно, что неравенства (1) и (2) представляют собой соответственно внутренность круга Γ_A и внешность круга Γ_B в плоскости

$$p_* = \frac{p'}{\sigma_s} \cdot \frac{b^2/a^2}{b^2/a^2 - 1},$$

$$M_* = \frac{M'(a)}{2\pi a^3 \sigma_s} \quad (\text{см. рис. 1})$$

Точками круга Γ_A описывается чисто упругое деформирование, точками кольца $\Gamma_A \sim \Gamma_B$ — упруго-пластическое и вообще чисто пластические деформирования, а точками вне круга Γ_B — только чисто пластическое деформирование.

Полагаем, что труба деформируется чисто пластически. Тогда решение задачи первого нагружения сводится к решению системы:

- 1) уравнения равновесия,
- 2) определяющие уравнения,

3) формулы Коши,

4) условие несжимаемости,

5) формула представления интенсивности деформаций через компоненты тензора деформаций,

6) условие упрочнения.

При замене

$$\epsilon_{ij}' = m \sqrt{y}, \quad c' = \delta \sqrt{x},$$

где

$$m = \left(\frac{\sqrt{3} M'(a)}{2\pi a^3 \sigma_s} \right)^{1/2} \cdot \frac{\sigma_s'}{3G}; \quad \delta = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} m, \quad \frac{a^2}{r^2} = z,$$

система (1—6) сводится к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} y = z^2 (y^{1-x} + x), \\ \sqrt{x} \int_{\frac{a^2}{b^2}}^1 y^{\frac{x-1}{2}} dz = \frac{p'}{\sigma_s} \cdot \frac{2\pi a^3 \sigma_s'}{M'(a)}, \quad \frac{1}{9} \leq z \leq 1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$y \left(\frac{a^2}{b^2}, x \right) \geq \left(\frac{2\pi a^3 \sigma_s'}{2\sqrt{3} M'(a)} \right)^{2/x}. \quad (4)$$

Решение системы (3, 4) аналитически не определяется. Здесь z — переменная интегрирования; определив x и y , мы тем самым определяем ϵ_{ij}' и некоторую константу интегрирования c' . Решается сис-

тема методом последовательных приближений, за нулевые приближения x_0, y_0 принимаем значения x и y при $z = 1$

$$x_0 = \left[\frac{p'}{\sigma_s} \cdot \frac{b^2/a^2}{b^2/a^2 - 1} \cdot \frac{2\pi a^3 \sigma_s'}{M'(a)} \right]^2, \\ y_0 = z^2 (1 + x_0).$$

Условие (4) позволяет задать конкретным образом нагрузки p' и M' для того, чтобы процесс деформирования для всех r был чисто пластическим, т. е. является достаточным условием чисто пластического деформирования.

Критерий пластического нагружения

$$\dot{\sigma}_{ij}'(r, t) \geq 0$$

сводится к условию $\dot{M}'(a, t) \geq 0$. Но так как в настоящей задаче рассматривается процесс простого нагружения, то рост момента влечет рост давления, а убывание момента влечет убывание давления.

Итак, если $\dot{M}'(t) \geq 0, \dot{p}'(t) \geq 0$, то имеет место нагружение. Нарушение последних означает начало разгрузки.

Пусть в некоторый момент времени в трубе начался процесс упругой разгрузки. Тогда до появления вторичных пластических областей текущее напряженное (деформированное) состояние и остаточные напряжения (деформации) определяются соответственно по теореме об упругой разгрузке и ее следствию [1]. Если при разгрузке появляются области вторичных пластических деформаций, то остаточные напряжения (деформации) определяются по теореме о вторичных пластических деформациях [2]. Очевидно, что для ее применения необходимо решить задачу упруго-пластического нагружения некоторого фиктивного тела, а затем для нахождения $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ в выражениях $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ заменить σ_s на $\alpha_G \sigma_s$. Принимается следующая связь α_G, x и постоянных a и A [3]:

$$\alpha_G = 2^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{(q-1)^{\frac{\alpha x}{1-x}}}{A^{\frac{x}{1-x}}}.$$

Для определения текущего напряженного состояния в процессе второго нагружения в выражениях σ_y, ϵ_y , кроме того, необходимо заменить

$$p' \rightarrow p' - p'', \quad M' \rightarrow M' - M''$$

и определять $\sigma_{ij}', \epsilon_{ij}'$ из разностей

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij}' - \sigma_{ij}'', \quad \epsilon_{ij}' = \epsilon_{ij}' - \epsilon_{ij}''.$$

Напряжения, возникающие в теле при n -ом нагружении, находят-ся по формуле

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}' + \sum_{q=2}^n (-1)^{q-1} \sigma_{ij}^{(q)},$$

где $\sigma_{ij}^{(q)}$ — напряжения в фиктивном теле, возникающие под действием нагрузок

$$(-1)^q (M^{(q-1)} - M^{(q)}), \quad (-1)^q (p^{(q-1)} - p^{(q)}).$$

При q нечетных производится нагружение моментом $M^{(q)} = M'$ и давлением $p^{(q)} = p'$, при q четных — только отрицательным моментом $M^{(q)} = -M'$. Тогда для любого q -ого нагружения имеем

$$(-1)^q (M^{(q-1)} - M^{(q)}) = 2M', \quad (-1)^q (p^{(q-1)} - p^{(q)}) = p'.$$

Нахождение напряженного (деформированного) состояния при любом n -ом нагружении, таким образом, сводится к решению ниже-следующей системы уравнений:

$$y = z^2 (y^{1-x} + x), \quad z_q \leq z \leq 1$$

$$y = z^2 \left[\left(x + \frac{2}{a_q} \right)^{\frac{2(x-1)}{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3} M'(a)}{2 \pi a^3 \sigma_s} \right)^{\frac{2(x-1)}{x}} \right], \quad \frac{a^2}{b^2} \leq z \leq z_q$$

$$x = \frac{\frac{1}{z_q^2} - \frac{4}{a_q^2} \left(\frac{\sqrt{3} M'(a)}{2 \pi a^3 \sigma_s} \right)^2}{\left(\frac{2}{c_q} \right)^{2/x} \left(\frac{\sqrt{3} M'(a)}{2 \pi a^3 \sigma_s} \right)^{2/x}},$$

$$\left[\left(\frac{2}{a_q} \right)^{\frac{x-1}{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3} M'(a)}{2 \pi a^3 \sigma_s} \right)^{\frac{x-1}{x}} \cdot \int_{z_q}^1 y^{\frac{x-1}{x}} dz + z_q - \frac{a^2}{b^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{z_q^2} - \frac{4}{a_q^2} \left(\frac{\sqrt{3} M'(a)}{2 \pi a^3 \sigma_s} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{p' \sqrt{3}}{c_q \sigma_s}, \quad z_q \leq z \leq 1, \quad z_{q-1} \leq z_q \leq 1.$$

При данных $\frac{p'}{\sigma_s} = 6$, $\frac{M'(a)}{2 \pi a^3 \sigma_s} = 2$, $\frac{b}{a} = 3$, $q = (2, 15)$

для материала характер циклического деформирования которого описывается обобщенным принципом Мазинга, где $\alpha = 0,354$; $A = 1,1$ (циклически упрочняющийся материал) для произвольных x проведен счет на БЭСМ-2.

Значения границ $p^{(q)}$ упругих и пластических областей для произвольных x

$x \backslash q$	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
2	>3,000	>3,000	2,817	2,415	2,008	1,804	1,570	1,360	1,064	1,000
3	>3,000	2,786	2,319	1,904	1,600	1,468	1,203	1,060	1,000	1,000
4	>3,000	2,509	2,089	1,720	1,503	1,265	1,043	1,000	1,000	1,000
5	>3,000	2,340	1,948	1,645	1,389	1,161	1,000	1,000	1,000	1,000
6	>3,000	2,262	1,848	1,557	1,280	1,089	1,000	1,000	1,000	1,000
7	>3,000	2,180	1,753	1,460	1,249	1,055	1,000	1,000	1,000	1,000
8	2,561	2,063	1,713	1,407	1,202	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
9	2,486	2,004	1,664	1,364	1,163	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
10	2,410	1,955	1,602	1,357	1,121	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
11	2,361	1,913	1,587	1,326	1,103	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
12	2,302	1,876	1,555	1,308	1,079	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
13	2,281	1,844	1,508	1,284	1,064	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
14	2,244	1,805	1,503	1,260	1,059	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	2,211	1,709	1,481	1,203	1,009	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Остаточные	>3,000	>3,000	2,606	2,257	1,971	1,717	1,479	1,245	1,007	1,000

Численные результаты таковы

1. С ростом x (от нуля до единицы) для фиксированного q (номер нагружения) граница пластических областей убывает и, наконец, при некотором q наступает приспособляемость материала. Для малых x приспособляемость достигается при больших q , для больших x — при малых q (таблица).

2. Остаточные радиальные напряжения $\sigma_{\theta}^{(0)}/\sigma_s$ и остаточные кольцевые напряжения $\sigma_{\phi}^{(0)}/\sigma_s$, вычисленные по теореме Москвитина, качественно отличны от напряжений, вычисленных по теореме Ильюшина (рис. 2, 3). Это отличие особенно существенно.

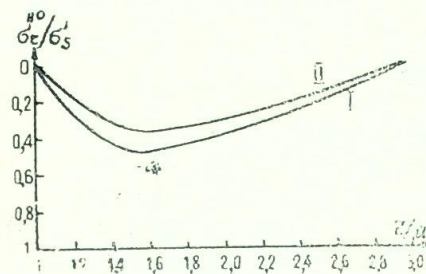


Рис. 2. Остаточные радиальные напряжения $\sigma_{\theta}^{(0)}/\sigma_s$, вычисленные по теореме Ильюшина (I) и по теореме Москвитина (II); $\chi = 0,70$.

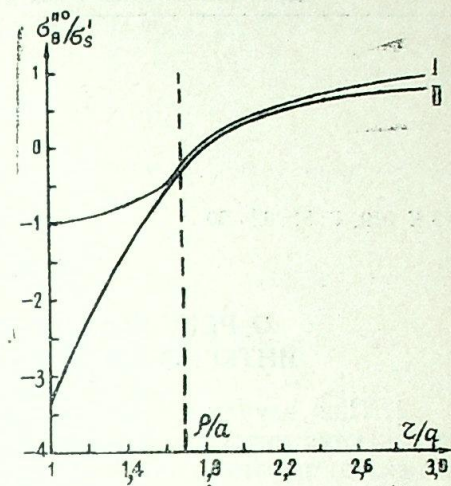


Рис. 3. Остаточные кольцевые напряжения $\sigma_{\phi}^{(0)}/\sigma_s$, вычисленные по теореме Ильюшина (I) и по теореме Москвитина (II), $\chi = 0,65$.

ЛИТЕРАТУРА

- Ильюшин А. А. Пластичность, ч. I. ГИТТЛ, М., 1948.
- Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагружениях. Изд. МГУ 1965.
- Москвитин В. В. Некоторые вопросы пластичности при переменных нагружениях. Доклад на III совещании по механическим вопросам усталости. М., 1966. Институт математики и механики.

Поступило 16. IX 1969

Ж. И. Таhiroва

Мөһкәмләмиш сыхылмајан материалдан дүзәлдиламиш
галындиварлы боруја дәјишән тәзјиг вә буручу
моментин тәсири

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда

1) илк јүкләмәдә тәзјигин $p' > 0$ вә моментин $M' > 0$ гјмәтләриндә борунун кәркинлик вә деформасија вәзијјәти;

2) јүкдән азадолма просесинин икинчи пластик деформасија јаранан һалы;

3) тәзјигин там азад олмасы вә $M'' < 0$ моментинин тәтбиг олунмасы;

4) $M^{(n)}$ моменти вә $p^{(n)}$ тәзјигинин тсиклик јүкләмә һалы өјрәнилмишдир.

Мәсәлә еластик-пластик деформасија нәзәријјәси әсасында һәлл едилмишдир. Еластик, еластик-пластик, там пластик кәркинлик һаллары үчүн зәрури вә кафи шәртләр мұәјјән едилмишдир. Бундан әлавә, јүкләмә мигдарындан вә мөһкәмләмәнин дәрәчәсиндән асылы олан ујғунлашма еффеќтини тәјјин едән нәтичәләр алынмышдыр.

УДК 519.3:51:62—50

Д. И. АРИХОВ

О РЕШЕНИИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ЭКСТРЕМАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1. При изучении многих физических, динамических процессов встречаются интегральные уравнения, ядро и свободный член которых зависят от параметра. Требуется путем выбора этого параметра найти оптимальное решение задачи.

Такого типа уравнения встречаются при изучении марковских процессов решения, в теории игр и т. д. Поэтому изучение таких типов уравнений имеет практическое и теоретическое значение. В данной работе будет изучено уравнение

$$u(t) = \max_q \left[a(q, t) + \lambda \int_0^1 \kappa(q, t, s, u(s)) ds \right] \quad (1)$$

Для этого уравнения доказывается существование, единственность и устойчивость решения. Строится монотонно сходящаяся последовательность к точному решению уравнения:

В дальнейшем предполагается выполнение следующих условий:
А. Функции $a(q, t)$ и $\kappa(q, t, s, u)$ вещественны и непрерывны соответственно в областях $D\{q \in S; 0 \leq t \leq 1\}$ и $G\{q \in S; 0 \leq t, s \leq 1; -\infty < u < \infty\}$. Здесь предполагается, что область значений поведения $q(t)$, ограниченная и замкнутая.

Б. Функция $K(q, t, s, u)$ для любой пары z_1, z_2 удовлетворяет условию

$$|K(q, t, s, z_1) - K(q, t, s, z_2)| \leq L(q, t, s) |z_1 - z_2|,$$

где

$$\sigma = \max_{0 \leq t \leq 1} \sup_q \int_0^1 L(q, t, s) ds < \infty.$$

Ясно, что из условия А вытекает, что максимум выражения $a(q, t) + \lambda \int_0^1 \kappa(q, t, s, u(s)) ds$ достигается для $q \in S$ при любых фиксированных значениях t, u, λ .

Прежде чем изучить уравнение (1), отметим, что имеет место следующая лемма.

Лемма. Пусть для функций $b_1(q, t)$, $b_2(q, t)$ и $K(q, t, s, u)$ удовлетворяется условие А. Тогда, если положим

$$T_1(x) = \max_q \left[b_1(q, t) + \lambda \int_0^1 K(q, t, s, x(s)) ds \right],$$

$$T_2(y) = \max_q \left[b_2(q, t) + \lambda \int_0^1 K(q, t, s, y(s)) ds \right], \quad (2)$$

то справедливо следующее неравенство:

$$|T_1(x) - T_2(y)| \leq \max_q \left[|b_1(q, t) - b_2(q, t)| + |\lambda| \int_0^1 |K(q, t, s, x(s)) - K(q, t, s, y(s))| ds \right].$$

Если дополнительно удовлетворяется условие Б, то это неравенство можно написать в виде:

$$|T_1(x) - T_2(y)| \leq \sup_q \left[|b_1(q, t) - b_2(q, t)| + |\lambda| \int_0^1 L(q, t, s) |x(s) - y(s)| ds \right]. \quad (3)$$

Эту лемму можно доказать аналогично лемме, доказанной в [1].

Теорема 1. При выполнении условий А, Б, если $|\lambda| < \frac{1}{\sigma}$, то существует непрерывное единственное решение уравнения (1).

Доказательство. Рассмотрим последовательные приближения:

$$u_0(t) = \max_q [a(q, t)], \quad (4)$$

$$u_{n+1}(t) = \max_q \left[a(q, t) + \lambda \int_0^1 K(q, t, s, u_n(s)) ds \right]. \quad (5)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

По индукции можно показать, что каждая функция из последовательности (4) непрерывна.

Теперь докажем сходимость последовательности (4).

Применяя лемму к двум соотношениям

$$u_{n+1}(t) = \max_q \left[a(q, t) + \lambda \int_0^1 K(q, t, s, u_n(s)) ds \right], \quad (n \geq 1)$$

$$u_n(t) = \max_q \left[a(q, t) + \lambda \int_0^1 K(q, t, s, u_{n-1}(s)) ds \right],$$

получаем

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \sup_q \left[|\lambda| \int_0^1 L(q, t, s) |u_n(s) - u_{n-1}(s)| ds \right]$$

Введем обозначения

$$d_n = \max_{0 \leq t \leq 1} |u_{n+1}(t) - u_n(t)|.$$

Тогда из последнего неравенства получим

$$d_n \leq d_{n-1} \max_{0 \leq t \leq 1} \sup_q \left[|\lambda| \int_0^1 L(q, t, s) ds \right] = d_{n-1} |\lambda| \sigma$$

Интегрируя эти соотношения, имеем

$$d_n \leq (|\lambda| \sigma)^n d_0,$$

где

$$d_0 \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \max_q |\lambda| \int_0^1 |K(q, t, s, u_0(s))| ds < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum |u_{n+1}(t) - u_n(t)|$ при $|\lambda| < \frac{1}{\sigma}$ равномерно

но сходится. Значит, последовательность $U_n(t)$ равномерно сходится к некоторой функции $u(t)$. Предельная функция $u(t)$ является решением уравнения (1). Отметим, что любую непрерывную функцию $u_0(t)$, $t \in [0, 1]$ в (46) можно брать за начальное приближение.

Наконец, докажем единственность решения. Пусть существует другое непрерывное решение $v(t)$ уравнения (1). Тогда, применяя лемму к двум уравнениям

$$\begin{aligned} u(t) &= \max_q \left[a(q, t) + \lambda \int_0^1 K(q, t, s, u(s)) ds \right] \\ v(t) &= \max_q \left[a(q, t) + \lambda \int_0^1 K(q, t, s, v(s)) ds \right], \end{aligned}$$

получим

$$|u(t) - v(t)| \leq |\lambda| \sup_q \int_0^1 L(q, t, s) |u(s) - v(s)| ds.$$

Введем обозначения

$$d = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t) - v(t)|.$$

Тогда из последнего неравенства получим

$$d \leq |\lambda| \sigma d$$

Если допустить, что $d > 0$, то отсюда вытекает $1 \leq |\lambda| \sigma$. Это невозможно в силу условия теоремы. Поэтому $u(t) \equiv v(t)$ при $t \in [0, 1]$.

Теорема доказана.

В некоторых случаях удобно построить монотонно сходящуюся последовательность точному решению уравнения. Такие последовательные приближения можно построить различными путями. Одним из них является подбор начальной функции $u_0(t)$, при которой получается монотонное приближение к решению. Имеет место теорема 2.

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1, и функция $\lambda K(q, t, s, u)$ относительно u неубывающая. Тогда, если для любой непрерывной функции $q_0(t) \in S$ начальную функцию $u_0(t)$ в последовательности (4) определяем как решение уравнения

$$u_0(t) = a(q_0, t) + \lambda \int_0^1 K(q_0, t, s, u_0(s)) ds,$$

то последовательность функций (45) равномерно и монотонно сходится к решению уравнения (1).

Доказательство. Очевидно, что при сделанных предположениях функция $u_0(t)$ непрерывна. Так как выполняются все условия теоремы 1, последовательность функции (46) равномерно сходится к решению уравнения (1). Поэтому достаточно показать монотонность последовательности (4). Сравниваем $u_1(t)$ и $u_0(t)$. Из выбора $q_0(t)$ следует

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \max_q \left[a(q, t) + \lambda \int_0^1 K(q, t, s, u_0(s)) ds \right] \geq a(q_0, t) + \\ &+ \lambda \int_0^1 K(q_0, t, s, u_0(s)) ds = u_0(t) \end{aligned}$$

при $t \in [0, 1]$.

Далее, пользуясь условием, что функция $\lambda K(q, t, s, u)$ относительно u неубывающая, по индукции можно доказать, что $u_{n+1}(t) \geq u_n(t)$ для всех n .

Теперь, используя приближения в пространстве поведений, построим другой тип монотонных приближений. Приняв за исходное

поведение непрерывную функцию $q_0 = q_0(t)$, определим $u_0(t)$ как решение уравнения

$$u_0(t) = a(q_0, t) + \lambda \int_0^1 K(q_0, t, s, u_0(s)) ds.$$

Далее определим функцию $q_1(t)$ из условия, что она максимизирует выражение $a(q, t) + \lambda \int_0^1 K(q, t, s, u_0(s)) ds$ и пусть $u_1(t)$ является решением уравнения

$$u_1(t) = a(q_1, t) + \lambda \int_0^1 K(q_1, t, s, u_1(s)) ds.$$

Продолжая этот процесс, определяем последовательность функций $\{u_n(t)\}$ и последовательность поведений.

Теорема 3. При условиях теоремы 2, если функция $a(q, t) + \lambda \int_0^1 K(q, t, s, u) ds$ относительно q строго выпуклая, то последовательность $u_n(t)$, построенная вышеуказанным образом, равномерно и монотонно сходится к решению уравнения (1).

Доказательство. Легко можно доказать, что при условиях теоремы последовательность $u_n(t)$ непрерывна при $0 \leq t \leq 1$ для всех n . Для доказательства теоремы достаточно показать монотонность последовательности $u_n(t)$.

Мы имеем

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a(q_1, t) + \lambda \int_0^1 K(q_1, t, s, u_1(s)) ds, \\ u_0(t) &= a(q_0, t) + \lambda \int_0^1 K(q_0, t, s, u_0(s)) ds \leq a(q_1, t) + \\ &+ \lambda \int_0^1 K(q_1, t, s, u_0(s)) ds \end{aligned}$$

В силу определения $q_1(t)$

Отсюда, согласно [2], имеем $u_1(t) \geq u_0(t)$ при $t \in [0, 1]$.

Далее, продолжая таким же образом, получим по индукции, что

$$u_n(t) \leq u_{n+1}(t) \text{ при } t \in [0, 1] \text{ для } n = 0, 1, 2, \dots$$

2. Теперь изучим устойчивость решения.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$v(t) = \max_q \left[b(q, t) + \lambda \int_0^1 H(q, t, s, v(s)) ds \right] \quad (1')$$

Пусть функции $a(q, t)$, $b(q, t)$, $L(q, t, s, u)$ и $H(q, t, s, v)$ такие, что оба уравнения (1) и (1') имеют по единственному непрерывному решению.

Теорема 4. Пусть выполняются все условия теоремы 1, и пусть

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \sup_q \int_0^1 |K - H|(q, t, s, v(s)) - H(q, t, s, v(s)) ds \leq \delta_1,$$

$$|a(q, t) - b(q, t)| \leq \delta_2$$

Тогда справедливо неравенство:

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |u(t) - v(t)| \leq \frac{\delta_2 + |\lambda| \delta_1}{1 - |\lambda| \sigma}.$$

Доказательство.
Применяя лемму, из (1) и (1') имеем

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| \leq \max_q \left[|a(q, t) - b(q, t)| + |\lambda| \int_0^1 |K(q, t, s, u) - \right. \\ \left. - H(q, t, s, v(s))| ds \right] \leq \max_q \left[|a(q, t) - b(q, t)| + |\lambda| \int_0^1 |K(q, t, s, u(s)) - \right. \\ \left. - K(q, t, s, v(s))| ds + |\lambda| \int_0^1 |K(q, t, s, v(s)) - H(q, t, s, v(s))| ds \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\max_{t \in I} |u(t) - v(t)| \leq \frac{\delta_2 + |\lambda| \delta_1}{1 - |\lambda| \varepsilon}$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
2. Абдуллаев Т. Г. Исследование решения нелинейного интегрального уравнения типа Фредгольма. Уч. зап. АГУ, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1963.
3. Урысон П. С. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений. Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, 1951.

Институт математики и механики

Поступило 16. IX 1969

Д. И. Арихов

Бир гејри-хэтти экстремал-интеграл тэнлијин һәлли һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1) тэнлијинин $[0, 1]$ парчасында кәсилмәз һәллиниң варлығы вә јеканәлији үчүн бир лемма вә бир теорем исбат олунмушдур. Динамик програмлашдырма үсулундан истифадә едәрәк тэнлијин һәллине јығылан ики чүр монотон јахынлашма гурулмуш вә һәллиң дајаныглығы өјрәнилмишдир.

Е. А. ЛАРИОНОВ

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{C}$ уравнение Гамильтона

$$S \frac{dx}{dt} = H(t) x, \quad -\infty < t < \infty, \quad (1)$$

где S —ограниченный вместе с обратным антиэрмитов оператор в $\mathcal{C}$, а $H(t)$ T —периодическая оператор-функция, значениями которой являются неограниченные симметричные операторы в $\mathcal{C}$. Вектор-функция $x(t)$ со значениями в $\mathcal{C}$ называется решением уравнения (1), если для любого $y \in \mathcal{C}$ функция $(x(t), y)$ локально абсолютно непрерывна и почти всюду на оси $(-\infty, \infty)$

$$\frac{d}{dt} (x(t), y) = (S^{-1} H(t) x, (t), y). \quad (2)$$

Уравнение (1) называется устойчивым, если каждое его решение ограничено при $|t| \rightarrow \infty$ и сильно устойчивым, если наряду с (1) устойчивы все уравнения, получающиеся из (1) заменой гамильтониана $H(t) = H(t + T)$ гамильтонианом $\tilde{H}(t) = \tilde{H}(t + T)$, причем близость понимается в метрике

$$\rho(\tilde{H}, H) = \int_0^T \|\tilde{H}(t) - H(t)\| dt. \quad (3)$$

В том случае, когда $\mathcal{C}$ конечномерно, М. Г. Крейн установил [1] достаточные условия сильной устойчивости уравнения (1) в терминах рода точек спектра оператора монодромии уравнения (1), а И. М. Гельфанд и В. Б. Лидский показали необходимость его условий [2].

Уравнение (1) в бесконечномерном пространстве $\mathcal{C}$ впервые рассмотрено в [3]. Определение устойчивости и сильной устойчивости в [3] отличается от определения 1. Условия, полученные в [3], в некотором смысле также отличны от условий М. Г. Крейна. Уравнение (1) часто встречается в приложениях [4] и необходимо подчеркнуть, что в прикладных вопросах желательно знать именно ограниченность самого решения $x(t)$ на оси $-\infty < t < \infty$.

Введение нового определения устойчивости, отличного от определения 1, мотивируется в [3] тем, что существуют примеры уравнений вида (1), для обобщенных решений которых даже на отрезке $[0, T]$ не выполнена оценка

$$\|x(t)\| \leq C \|x(0)\| \quad (4)$$

где постоянная C не зависит от начального условия $x(0)$. Однако при весьма общих условиях, наложенных на операторы $H(t)$, оценка (4) имеет место.

Мы получим критерий устойчивости и сильной устойчивости уравнения (1) в форме Крейна-Гельфанда-Лидского в терминах рода точек спектра оператора монодромии $X(T)$ уравнения (1).

В дальнейшем R означает, сколько всех линейных ограниченных операторов в C .

Перепишем уравнение (1) следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = i \frac{S^{-1}}{i} H(t) x, \quad -\infty < t < \infty.$$

Очевидно, что оператор $Q = \frac{S^{-1}}{i}$ самосопряжен.

Введем в C форму

$$Q(x, y) = (Qx, y).$$

Оператор Q ограничен и ограниченно обратим, а потому C распадается в ортогональную сумму Q -положительного подпространства L и Q -отрицательного подпространства F

$$C = L + F. \quad (5)$$

Рассмотрим в C новое скалярное произведение

$$(x, y)_1 = Q(x_+, y_+) - Q(x_-, y_-), \quad (6)$$

где $x_+, y_+ \in L, x_-, y_- \in F$.

Очевидно, в новой норме $\|x\|_1 = (x, x)_1^{\frac{1}{2}}$, $Q^2 = I$ и оператор Q принимает вид $J = P_+ - P_-$, где P_+ и P_- взаимно-дополнительные ортопроекторы из C на L и F соответственно. $Q \in R$ и $Q^{-1} \in R$, а потому

$$\beta \|x\| \leq \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|, \quad \text{где } \alpha, \beta = \text{const} > 0.$$

Итак, без ограничения общности можно рассматривать каноническое уравнение Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = iJH(t)x, \quad -\infty < t < \infty, \quad (7)$$

где $J = J^*$, $J^2 = I$.

Гильбертово пространство C , в котором, помимо обычного скалярного произведения (x, y) , задано индефинитное скалярное произведение $[x, y] = (Jx, y)$, называется пространством с индефинитной метрикой. Понятия J -сопряженного J -симметричного, J -самосопряженного (J -с. с.), J -изометрического и J -унитарного операторов в C по отношению к скалярному произведению $[x, y]$ вводятся обычным образом.

Теперь операторы $JH(t)$ становятся J -симметричными операторами в C . Число $\kappa = \min \{\dim P_+, \dim P_-\}$ называется рангом индефинитности C .

Положим $P_+ = \{x \in C : [x, x] \geq 0\}$, $P_- = \{x \in C : [x, x] \leq 0\}$. Линейный оператор L называется равномерно J -дефинитным, если нормы $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ и $\|x\|_1 = \{ \text{sign} [x, x] \cdot [x, x] \}^{\frac{1}{2}}$ эквивалентны на L .

J -унитарный оператор U называется устойчивым, если

$$\|U^n\| \leq C, \quad C = \text{const}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

и сильно устойчивым, если, кроме того, у него существует окрестность $\|U_1 - U\| < \epsilon$, состоящая из устойчивых J -унитарных операторов.

Р. С. Филлипс доказал [7], что устойчивость J -унитарного оператора U эквивалентна условию

$$C = L_1 + L_2, \quad (9)$$

$$L_1 \subseteq P_+, \quad L_2 \subseteq P_-, \quad UL_1 = L_1, \quad i = 1, 2, \quad [L_1, L_2] = 0.$$

В работах [8], [9] показано, что условие (9) вместе с условием

$$\sigma(U/L_1) \cap \sigma(U/L_2) = \emptyset \quad (10)$$

эквивалентны сильной устойчивости оператора U .

Определение. J -изометрический оператор V в C , отображающий плотный в C линейный оператор $D(V)$ на себя, называется устойчивым, если

$$\|V^n\| \leq C, \quad C = \text{const}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

и сильно устойчивым, если, кроме того, имеет окрестность $\|V_1 - V\| < \epsilon$ из устойчивых J -изометрических операторов в C , причем $D(V_1) = D(V)$, $\|V_1\| < \infty$.

Теорема 1. Для устойчивости J -изометрического оператора V достаточно, чтобы линейный оператор $D(V)$ распадался в прямую J -ортогональную сумму двух равномерно J -дефинитных линейных операторов $L_1 \subseteq P_+$ и $L_2 \subseteq P_-$, инвариантных относительно оператора V .

Доказательство. Если L_1 равномерно T -положительный линейный оператор, инвариантный относительно V , то для любой целой степени V^n оператора V имеем для $x \in L_1$,

$$[V^n x, V^n x] \geq \alpha (V^n x, V^n x). \quad (12)$$

С другой стороны, для всех $x \in L_1$

$$[V^n x, V^n x] = [x, x] \leq (x, x). \quad (13)$$

Из (12) и (13) получим

$$\|V^n x\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|x\|. \quad (14)$$

На подпространстве L_2 аналогично имеем

$$\|V^n x\| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}} \|x\|. \quad (15)$$

Известно [6], что замыкания $\hat{L}_1$ и $\hat{L}_2$ по норме $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ равномерно J -дефинитных линейных операторов L_1 и L_2 являются равномерно J -дефинитными подпространствами, а потому существуют ограниченные J -проекторы P_1 и P_2 из C на подпространства $\hat{L}_1$ и $\hat{L}_2$ соответственно. Для любого вектора $x \in D(V)$ имеем $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, $i = 1, 2$, и далее $\|x_i\| \leq (1 + \|P_i\|) \|x\|$, $i = 1, 2$, что вместе с (14) и (15) дает оценку

$$\|V^n\| \leq \frac{1 + \|P_1\|}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1 + \|P_2\|}{\sqrt{\beta}}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (16)$$

из которой следует устойчивость J -изометрического оператора V .

Заметим, что из (11) следует равномерная ограниченность и всех отрицательных степеней V . В самом деле, поскольку линейный оператор $D(V)$ всюду плотен в C и $VD(V) = D(V)$, то существует ограниченный [10] обратный оператор V^{-1} , а потому расширение по непрерывности оператора V с $D(V)$ на все C является устойчивым J -унитарным оператором V в C , а для него в силу соотношения $\hat{V}^* J V = J$

$$\|\hat{V}^{-n}\| = \|\hat{V}^n\|, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Теперь очевидно, что J -изометрический оператор V сильно устойчив лишь одновременно с оператором $\hat{V}$, а потому справедлива.

Теорема 2. Для сильной устойчивости J -изометрического оператора V необходимо и достаточно условия

$$\sigma(\hat{V}/\hat{L}_1) \cap \sigma(\hat{V}/\hat{L}_2) = \emptyset, \quad (17)$$

где $\hat{L}_i$ замыкание линеала L_i , $VL_i = L_i$, $i = 1, 2$.

Будем говорить, что плотно заданный в $\mathcal{C}$ линейный оператор A принадлежит классу (Y) ($A \in (Y)$), если область определения $D(A)$ оператора A разлагается в прямую J -ортогональную сумму равномерно J -дефинитных линеалов L_1 и L_2 из $\mathcal{C}$.

Если $k < \infty$, то $A \in (Y)$.

Предположим, что функция $F(t) = \tilde{H}(t) - H(t)$ локально интегрируема по Бохнеру и выполнены условия:

(А) Оператор $H(t)$ разлагается на сумму операторов $H_0(t)$ и $H_1(t)$, причем $H_0(t)$ при каждом t — положительно определенный самосопряженный оператор в $\mathcal{C}$.

(В) Область определения $D(H_0^{\frac{1}{2}})$ корня $H_0^{\frac{1}{2}}(t)$ постоянна и при любых $t, t' \in [0, T]$ и любых $x, y \in D(H_0^{\frac{1}{2}})$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left| \left(H_0^{\frac{1}{2}}(t)x, H_0^{\frac{1}{2}}(t)y \right) - \left(H_0^{\frac{1}{2}}(t')x, H_0^{\frac{1}{2}}(t')y \right) \right| \leq \\ & \leq \text{const} \cdot |t - t'| \cdot \|H_0^{\frac{1}{2}}(t)x\| \cdot \|H_0^{\frac{1}{2}}(t')y\|. \end{aligned}$$

При этих условиях для любого $x_0 \in D(H_0^{\frac{1}{2}})$ и любого $t \in (-\infty, \infty)$ существует единственное решение уравнения (1).

Легко показать, что значениями разрешающей оператор-функции $X(t)$ уравнения (1) являются J -изотермические операторы в $\mathcal{C}$.

Рассмотрим наряду с (1) невозмущенное уравнение

$$S \frac{dx}{dt} = H_0(t)x, \quad -\infty < t < \infty. \quad (18)$$

В дальнейшем предполагается, что $H_0^{\frac{1}{2}}(0) \in (Y)$.

В [5] показано, что разрешающая оператор-функция $X_0(t)$ уравнения (18) при положительно определенном T -периодическом самосопряженном $H_0(t)$ в $\mathcal{C}$ и условии (В) отображает множество $D(H_0^{\frac{1}{2}})$ на себя так, что $X_0(t)$ является J -изотермическим оператором на $D(H_0^{\frac{1}{2}})$. Оператор-функцию $X(t)$ будем искать из уравнения

$$X(t) = X_0(t) + S^{-1} \int_0^t H_1(\tau) X(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Из условия $H_0^{\frac{1}{2}}(0) \in (Y)$ вытекает, что $X_0(t), X(t) \in R$. Из (19) следует, что малому в метрике (3) возмущению гамильтониана $H(t)$ соответствует малое в норме кольца операторов в пространстве $\mathcal{C}$ изменение оператора $X(t)$. Поскольку области значений операторов

$X(T)$ и $X_0(T)$ плотны в $\mathcal{C}$, то существуют [10] ограниченные обратные J -изометрические операторы $X^{-1}(T)$ и $X_0^{-1}(T)$.

Всякое слабо непрерывное решение $x(t)$ уравнения (1) ограничено на отрезке $[0, T]$ и потому для ограниченности его на всей оси $(-\infty, \infty)$ достаточно, чтобы

$$\|X^n(T)\| \leq C, \quad C = \text{const}: n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

так как $X(t + nT) = X(t)X^n(T)$,

Пусть $X(T)$ расширение по непрерывности оператора $X(t)$ на все $\mathcal{C}$.

Из (19) и (20) следует, что уравнение (1) устойчиво (сильно устойчиво) тогда и только тогда, когда оператор монодромии $X(T)$ этого уравнения устойчивый (сильно устойчивый) J -изотермический оператор в $\mathcal{C}$.

Теперь из теорем 1 и 2 следуют утверждения.

Теорема 3. Для устойчивости уравнения (1) достаточно, чтобы линеал $D(H_0^{\frac{1}{2}})$ распадался в J -ортогональную сумму равномерно J -дефинитных линеалов $L_1 \subset P_+$ и $L_2 \subset P_-$, инвариантных относительно оператора монодромии $X(T)$ этого уравнения.

Теорема 4. Для сильной устойчивости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\sigma(\hat{X}(T)/\hat{L}_1) \cap \sigma(\hat{X}(T)/\hat{L}_2) = \emptyset.$$

Рассмотрим теперь стационарное уравнение Гамильтона

$$S \frac{dx}{dt} = Hx, \quad H = H^*, \quad -\infty < t < \infty. \quad (21)$$

J -с.с. оператор A называется J -положительным, если $[Ax, x] \geq 0$, $[0] \neq x \in D(A)$.

Очевидно, если оператор H положителен, то оператор JH J -положителен. В самом деле, пусть $(Hx, x) \geq 0$.

Тогда $[JHx, x] = (JHx, Jx) = (Hx, x) \geq 0$.

В [11] введено понятие собственной J -спектральной функции $E(\lambda)$ J -с.с. оператора A . Точка λ_0 оси $(-\infty, \infty)$ называется критической, если для любого интервала Δ , содержащего внутри себя точку λ_0 , подпространство $\mathcal{C}(\Delta) = E(\Delta)\mathcal{C}$ индефинитно. Если для любых λ_1 и λ_2 , таких, что $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} E([\lambda_1, \lambda_2]), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} E([\lambda, \lambda_2])$$

в сильной операторной топологии, то точка λ_0 называется регулярной критической точкой. Критические точки, не являющиеся регулярными, называются сингулярными. Легко видеть, что возможными критическими точками J -положительного оператора являются лишь точки 0 и ∞ .

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 5. Если гамильтониан H уравнения (21) ограничен и положителен, то уравнение (21) устойчиво тогда и только тогда, когда точка 0 оси $(-\infty, \infty)$ является регулярной критической точкой оператора JH .

Теорема 6. Если гамильтониан уравнения (21) неограничен и положителен, а точки 0 и ∞ являются регулярными критическими точками оператора JH , то уравнение (21) устойчиво.

Теорема 7. Если гамильтониан H уравнения (21) положителен и $\kappa < \infty$, то уравнение (21) устойчиво.

Доказательство достаточности условий в теоремах 5—7 основано на том, что при их выполнении оператор JH оказывается подобным самосопряженному оператору, действующему в S . Необходимость условия теоремы 5 следует из теоремы Бахана—Штейнгауза.

Выражаю искреннюю благодарность проф. М. А. Наймарку и доктору физико-математических наук М. Г. Гасимову за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Основные положения теории λ -зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Сборник памяти А. А. Андропова. М.: Изд. АН СССР, 1955.
2. Гельфанд И. М., Лидский В. Б. УМН, т. X, вып. 1 (63), 1955, 3—41.
3. Дергузов В. И. Матем. сб., т. 63 (105), № 4, 1964, 591—619.
4. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956.
5. Дергузов В. И., Якубович В. А. ДАН СССР, т. 151, № 6, 1963, 1264—1267.
6. Гинзбург Ю. П., Иохвидов И. С. УМН, 1962, 17,4 (106), 3—56.
7. Phillips R. S. Acad. Press, 1961, 366—398.
8. Фомин В. Н. Вестник ЛГУ, № 7, 1964.
9. Крейн М. Г. Введение в геометрию indefinitных J -пространств и теорию операторов в этих пространствах. Вторая Летняя матем. школа, Киев, 1965.
10. Иохвидов И. С. УМН, 1965, 20,3 (123), 175—181.
11. Крейн М. Г., Лангер Г. К. ДАН СССР, 1965, 152, 1, 39—42.

Центральный экономико-математический институт

Поступило 16. IX 1969

Л. И. Ларионов

Гильберт фазасында Гамильтон тэнликлэринин дажаныглыг нэзэрийжесинэ даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1) шәклиндә верилмиш Гамильтон тэнлији һәллини сепарабел Гильберт фазасында дажаныглыгы мәсәләсиндән бәһс едилмишдир. Бунунла барабәр, мүүјјән шәртләр дахилиндә һәлли дажаныглыг вә Крейн-Келфанд-Лидски формада гүввәтли дажаныглыг критериси верилмишдир.

И. И. МУЗАФАРОВ, У. С. САФАРОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Пусть стержень с круглым поперечным сечением радиуса r и некоторым малым начальным отклонением сжатия с постоянной силой P меньше эйлеровой. Будем изучать рост начального прогиба от времени.

В работе [1] было определено выражение для дополнительных напряжений в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_1 &= \frac{2}{A(\alpha+1)n\sigma_0^{n-1}t} p_1^{\alpha+1} - \frac{2\sigma_0}{n} \\ \Delta \sigma_2 &= \frac{2\sigma_0}{n} - \frac{2}{A(\alpha+1)n\sigma_0^{n-1}t} p_2^{\alpha+1} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_1 &= \frac{2}{B(\alpha+1)t^{\kappa\sigma_0}t} p_1^{\alpha+1} - \frac{2}{\kappa} \\ \Delta \sigma_2 &= \frac{2}{\kappa} - \frac{2}{B(\alpha+1)e^{\kappa\sigma_0}t} p_2^{\alpha+1} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

где $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2$ —дополнительные напряжения в области догрузки и разгрузки, соответственно A, B, α, n, κ —постоянные, зависящие от механических свойств материала и температуры, p_1, p_2 —деформация ползучести, t —время, σ_0 —напряжение.

Если плоскость поперечного сечения совпадает с плоскостью (x, y) , а координата z направлена по оси стержня, то уравнения равновесий будут:

$$\int_{-r}^{y_0} \sqrt{r^2 - y^2} \Delta \sigma_1 dy + \int_{y_0}^r \sqrt{r^2 - y^2} \Delta \sigma_2 dy = 0 \quad (1)$$

$$\int_{-r}^{y_0} \sqrt{r^2 - y^2} \Delta \sigma_1 y dy + \int_{y_0}^r \sqrt{r^2 - y^2} \Delta \sigma_2 y dy = M, \quad (2)$$

где y_1 —расстояние нейтральной линии от начала координат, y —расстояние любого волокна, M —момент внешних сил в рассматриваемом сечении. Очевидно, на границе раздела областей догрузки и разгрузки выполняется условие

$$\Delta \sigma_1 = \Delta \sigma_2 = 0 \quad (3)$$

Принимаем гипотезу плоских сечений, т. е.

$$p = v_0 + \kappa y. \quad (4)$$

здесь p —деформация любого волокна, p_0 —деформация оси стержня, а κ —соответствующая кривизна.

Из (3) и (4) с использованием формул (а) найдем

$$y_0 = \frac{1}{x} (\lambda - p_0), \quad (5)$$

где $\lambda = \frac{\alpha+1}{\sqrt{A(\alpha+1)\sigma_0^n t}}$

Рассмотрим два случая: 1) $\alpha = 0$
2) $\alpha = 1$

При $\alpha = 0$ из (1), (2), (4) и (5) получим следующую систему:

$$p_0^* (V \sqrt{1 - y_0^{*2}} \arcsin y_0^* - \pi) + x^* \left(-\frac{2}{3} V \sqrt{(1 - y_0^*)^3} \right) +$$

$$+ \kappa_1 (\pi - \sqrt{1 - y_0^{*2}} - \arcsin y_0^*) = 0 \quad (6)$$

$$M = x^* \left[\frac{y_0^*}{2} \sqrt{(1 - y_0^*)^3} + \frac{1}{4} (y_0^* \sqrt{1 - y_0^{*2}} + \arcsin y_0^*) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \pi \right] - p_0^* \frac{2}{3} V \sqrt{(1 - y_0^{*2})^3} + \kappa_2 \frac{2}{3} V \sqrt{(1 - y_0^*)^3}, \quad (7)$$

а при $\alpha = 1$ эта система будет

$$p_0^{*2} (\sqrt{1 - y_0^{*2}} + \arcsin y_0^* - \pi) - \frac{4}{3} x^* p_0^* \sqrt{(1 - y_0^{*2})^3} +$$

$$+ x^{*2} \left[\frac{y_0^*}{2} \sqrt{(1 - y_0^{*2})^3} + \frac{1}{4} (y_0^* \sqrt{1 - y_0^{*2}} + \arcsin y_0^*) - \frac{1}{4} \pi \right] +$$

$$+ \kappa_3 (\pi - \sqrt{1 - y_0^{*2}} + \arcsin y_0^*) = 0 \quad (8)$$

$$M^* = -\frac{2}{3} p_0^{*2} \sqrt{(1 - y_0^{*2})^3} + 2 x^* p_0^* \left[\frac{y_0^*}{2} \sqrt{(1 - y_0^{*2})^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} (y_0^* \sqrt{1 - y_0^{*2}} + \arcsin y_0^*) - \frac{1}{4} \pi \right] +$$

$$+ x^{*2} \left[\frac{2}{5} \sqrt{(1 - y_0^{*2})^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(1 - y_0^{*2})^3} \right] + \kappa_4 \frac{2}{3} \sqrt{(1 - y_0^*)^3}, \quad (9)$$

где введены следующие безразмерные величины

$$p_0^* = p_0 \frac{r^2}{(At)^{\frac{1}{n}} P}, \quad x^* = x \frac{r^3}{(At)^{\frac{1}{n}} P}, \quad M^* = M \frac{1}{Pr},$$

$$y_0^* = \frac{\lambda' - p_0^*}{x^*}, \quad \lambda' = \lambda \frac{r^2}{(At)^{\frac{1}{n}} P}$$

и обозначения

$$\kappa_1 = \frac{2\sigma_0}{\bar{A}n} \cdot \frac{r^2 t}{(At)^{\frac{1}{n}} P}, \quad \kappa_2 = \frac{2\sigma_0}{\bar{A}n} \cdot \frac{rt}{(At)^{\frac{1}{n}} P^2},$$

$$\kappa_3 = \frac{2\sigma_0}{\bar{A}n} \cdot \frac{r^4 t}{[(At)^{\frac{1}{n}} P]^2}, \quad \kappa_4 = \frac{2\sigma_0}{\bar{A}n} \cdot \frac{r^3 t}{P[(At)^{\frac{1}{n}} P]^2},$$

$$\bar{A} = \frac{2}{\sigma_0^{n-1} n A (\alpha + 1)}.$$

Если прогиб стержня представить в виде

$$w = w_0(t) \sin \pi \zeta,$$

где $\zeta = z/l$, то $M^* = -W_0$ и система (6), (7) будет иметь вид:

(10)

$$p_0^* \left[\sqrt{\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2} + \pi^3 W_0 - \pi^2 W_0 \arcsin \frac{\lambda' - p_0^*}{-\pi^2 W_0} \right] +$$

$$+ \frac{2}{3} \pi^2 W_0 \sqrt{\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2} + \kappa_1 \left[\pi^2 W_0 \arcsin \frac{\lambda' - p_0^*}{-\pi^2 W_0} - \right.$$

$$\left. - \pi^3 W_0 - \sqrt{\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2} \right] = 0 \quad (10)$$

$$W_0^4 = \frac{2}{3} \frac{p_0^*}{\pi^6} \sqrt{[\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2]^3} + \frac{W_0}{\pi^4} \left[\frac{\lambda' - p_0^*}{-2\pi^2 W_0} \sqrt{[\pi^4 W_0^2 - \right.$$

$$\left. - (\lambda' - p_0^*)^2]^3} - \frac{1}{4} \pi^4 W_0^2 \left(\frac{\lambda' - p_0^*}{\pi^2 W_0} \sqrt{\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2} + \right.$$

$$\left. + \pi^2 W_0 \arcsin \frac{\lambda' - p_0^*}{-\pi^2 W_0} \right) + \frac{1}{4} \pi^7 W_0^3 \right] + \kappa_2 \frac{2}{3} \sqrt{[\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2]^3}, \quad (11)$$

а система (8), (9) будет

$$p_0^* \left[\sqrt{\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2} - \pi^2 W_0 \arcsin \frac{\lambda' - p_0^*}{-\pi^2 W_0} + \pi^3 W_0 \right] +$$

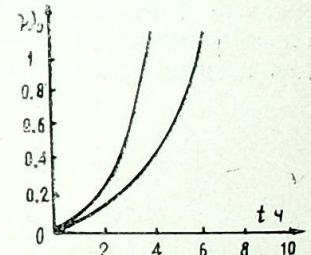
$$+ \frac{4}{3} \frac{p_0^*}{\pi^2 W_0} \sqrt{[\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2]^3} - \frac{\lambda' - p_0^*}{2\pi^2 W_0} \sqrt{[\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2]^3} -$$

$$- \frac{1}{4} \pi^4 W_0^2 \left(\frac{\lambda' - p_0^*}{\pi^2 W_0} \sqrt{\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2} + \pi^2 W_0 \arcsin \frac{\lambda' - p_0^*}{-\pi^2 W_0} \right) +$$

$$+ \frac{\pi^7 W_0^3}{4} + \kappa_3 \left[\pi^2 W_0 \arcsin \frac{\lambda' - p_0^*}{-\pi^2 W_0} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2} - \pi^3 W_0 \right] = 0 \quad (12)$$

$$W_0^4 = \frac{2}{3} p_0^{*2} \sqrt{[\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2]^3} +$$



$$+ 2\pi^2 W_0 p_0^* \frac{\lambda' - p_0^*}{2\pi^2 W_0} \sqrt{[\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2]^3} -$$

$$- \frac{\pi^4 W_0^2}{4} \left[\frac{\lambda' - p_0^*}{\pi^2 W_0} \sqrt{\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2} + \arcsin \frac{\lambda' - p_0^*}{-\pi^2 W_0} \cdot (\pi^2 W_0) \right] -$$

$$- \frac{1}{4} \pi^7 W_0^3 \left\} + \frac{2}{5} \left\{ \sqrt{[\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2]^5} - \right.$$

$$\left. - \frac{5}{3} \sqrt{[\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2]^3} \right\} - \kappa_4 \frac{2}{3} \frac{1}{\pi^6 W_0} \sqrt{[\pi^4 W_0^2 - (\lambda' - p_0^*)^2]^3} \quad (13)$$

Если использовать формулы (в), то вводя следующие безразмерные величины

$$x^* = x \frac{l^3}{P\kappa}, \quad p_0^* = p_0 \frac{r^2}{P\kappa}, \quad M^* = M \frac{1}{Pr}$$

и обозначения

$$\kappa_1 = \frac{2}{\bar{A}\kappa} \cdot \frac{r^2 t}{P\kappa}, \quad \kappa_2 = \frac{2}{\bar{A}\kappa} \cdot \frac{rt}{P^2\kappa}, \quad \kappa_3 = \frac{2}{\bar{A}\kappa} \cdot \frac{r^4 t}{(P\kappa)^2},$$

$$\kappa_4 = \frac{2}{\bar{A}\kappa} \cdot \frac{r^3 t}{P^3\kappa^2}, \quad \bar{A} = \frac{1}{Be^{\kappa_0}},$$

получим системы уравнений, аналогичные системам (10), (11), (12) и (13). Система (10), (11), (12) и (13) решена численно, методом ите-

рации для следующих значений параметров

$$r = 0,5 \text{ см}, l = 23 \text{ см}, P = 500 \text{ кг}, A = 5,62 \times 10^{-23}$$

$$W_0 = 0,01 \text{ см при } t = 0, \Delta t = 0,01$$

Результаты вычислений показаны на рисунке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Музафаров И. И. Вылущивание сжатых стержней в условиях ползучести. Труды ИММ АН Азерб. ССР, 1968. "Статические и динамические задачи теории упругости и пластичности", Баку, 1968.
2. Жуков А. М. Ползучесть металлов при переменном нагружении. Инж. сб., т. 5, № 6, 1965.

Институт
математики и механики

Поступило 16. IX 1969

И. И. Мүзәффәров, У. С. Сәфәров

Даирәви ен кәсијә малик сыхылмыш чубуғун
дајаныглыгы һаггында

ХУЛАСӘ

Тәдгигатда ен кәсиқ саһәси даирәви олан, сабит гүввә илә сыхылмыш чубуғун сүрүнчәклик шәраитиндә дајаныглыгы мәсәләси өјрәнилмишдир. Мәсәләнин һәлиндә јүкдән азадолма вә әләвә јүкләмә заманы сүрүнчәклик ганунларынын мүхтәлифлији нәзәрә алынмышдыр. Мәсәләнин һәлли үчүн электрон һесаблајычы машынын-дан истифадә едилмишдир.

С. А. ФЕЙЗИЕВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ И АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ПРОСТРАНСТВА $L_{p\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)$

В данной заметке устанавливается интегральное представление, аналогичное представлению О. В. Бесова [1] и В. П. Ильина [5], для функций $f(x) \in L_{p\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)$ и рассматривается вопрос аппроксимации из этого пространства финитными бесконечно дифференцируемыми функциями при помощи данного интегрального представления.

Пусть E_n n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, E_n^+ — полупространство точек $x = \begin{cases} -\infty < x_i < +\infty \\ 0 < x_n < +\infty \\ i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$ и $f(x)$

определена в E_n^+ .

Определим непрерывную положительную функцию $\varphi(x)$ в E_n^+ и в дальнейшем будем называть ее "весовой функцией".

Дополнительно предполагаем, что существует функция $\alpha(\tau)$ определенная и непрерывная на $(0, \infty)$ и такая, что неравенство $\frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x)} \leq \alpha(|h|)$ выполняется для всех $x \in E_n^+$ и $h \in (0, \infty)^n$, $|h| \leq |t|$. В дальнейшем на $\alpha(\tau)$ накладываются условия, что она неубывающая и для всех $\tau \in (0, \infty)$

$$\frac{\alpha(s\tau)}{\alpha(2\tau)} \leq M_s < +\infty$$

Обозначим через $\Delta^2(h)f(x)$ конечную разность второго порядка, т. е. $\Delta^2(h)f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$, где $h = (h_1, \dots, h_n)$, $h_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) шаг конечной разности.

Положим

$$\|f\|_{L_{p\varphi}}(E_n^+) = \left\{ \int_{E_n^+} \left| \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \right|^p dx_1, \dots, dx_n \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|f\|_{L_{p\varphi}}(E_n^+) = \text{vrai sup}_{x \in E_n^+} \left| \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \right|, \quad p = \infty.$$

При этом легко оказывается, что

$$\|x(x+h)_{L_{p\varphi}}(E_n^+) = \left\| \frac{f(x+h)}{\varphi(x)} \right\|_{L_p}(E_n^+) \leq \alpha(|h|) \|f\|_{L_{p\varphi}}(E_n^+)$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими соотношениями и предложениями:

а) обобщенное неравенство Минковского

$$\left\{ \int_{E_n^+} \left| \int_{E_n^+} f(x, y) dy \right|^p dx \right\}^{1/p} \leq \int_{E_n^+} \left\{ \int_{E_n^+} |f(x, y)|^p dx \right\}^{1/p} dy \quad (1)$$

б) неравенство Харди для

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \left(\sigma > \frac{1}{p} \right),$$

$$F(x) = \int_x^\infty f(t) dt, \left(\sigma < \frac{1}{p} \right), \quad (2)$$

при $1 \leq p \leq \infty$, $\|x^{-\sigma} F(x)\|_{L_p}(x > 0) \leq c \|x^{-\sigma+1} f(x)\|_{L_p}(x > 0)$

в) имеет место следующее очевидное неравенство

$$\|\Delta^2(h) f(x)\|_{L_{p\varphi}(E_n^+)} \leq c \alpha(2|h|) \|f\|_{L_{p\varphi}(E_n^+)}, \quad (3)$$

где c не зависит от h и f .

Лемма 1. Если $f \in L_{p\varphi}(E_n^+)$ и $D^{(2)} f \in L_{p\varphi}(E_n^+)$ справедливо неравенство

$$\|\Delta^2(h) D^s f(x)\|_{L_{p\varphi}(E_n^+)} \leq c \alpha(2|h|) \cdot |h|^2 \|D^{(s+2)} f\|_{L_{p\varphi}(E_n^+)}, \quad (4)$$

$$\text{где } D^s f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_n = s} \frac{\partial^s f}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}.$$

Для доказательства достаточно привести вторую разность к виду

$$\Delta^2(h) f(x) = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_{k'}} \cdot h_k \cdot h_{k'} dt \right\} dt_1.$$

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $s \geq 0$ произвольно целое число, $\psi(\tau)$ некоторая функция от τ , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $\psi(\tau)$ непрерывная и неубывающая функция на $(0, \infty)$,
- 2) $\psi(\tau) > 0$ при $\tau > 0$;
- 3) $\psi(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +0$,

- 4) при $\eta > 0$, $\delta > 0$ $\psi(\eta) \leq c \left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^\lambda \psi(\delta)$, $0 < \lambda \leq 1$.

Будем говорить, что $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит весовому пространству $L_{p\psi}^{(s, \psi)}(E_n^+)$, если она имеет все обобщенные производные $D^s f(x)$ в смысле С. Л. Соболева до порядка s (включительно), суммируемые с некоторым весом $\varphi(x)$ со степенью p , т. е. следующие выражения конечны

$$\|f\|_{L_{p\psi}^{(s, \psi)}(E_n^+)} = \left\{ \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left\| \frac{\Delta^2(h) D^s f(x)}{\alpha(2|h|)} \right\|_{L_{p\varphi}(E_n^+)}^p \frac{dh}{|h|^n \psi^p(|h|)} \right\}^{1/p};$$

$$1 \leq p < +\infty, \quad (5)$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_{L_{p\psi}^{(s, \psi)}(E_n^+)} = \sup_{h \in (0, \infty)^n} \psi^{-1} \left\| \frac{\Delta^2(h) D^s f}{\alpha(2|h|)} \right\|_{L_{\infty\varphi}(E_n^+)}$$

Отметим, что если в норме (5) $\psi(|h|) = |h|^\lambda$ ($0 < \lambda \leq 1$), $\varphi(x) \equiv 1$, тогда пространство $L_{p\psi}^{(s, \psi)}(E_n^+)$ совпадает с пространством L_p^l ($l = s + \lambda$) О. В. Бесова.

Очевидно, что для $x \in E_n^+$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $x + y \in E_n^+$.

Обозначим через $c(\theta, \gamma, r)$ конус с вершиной в начале координат, углом γ , радиусом r , осевым вектором θ , задаваемые уравнением

$$c(\theta, \gamma, r) = \{y: y \in E_n, y_i > 0, |y| < r, (y, \theta) \geq (y) \cos \gamma,$$

$$|\theta| = 1, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Ясно, что для каждого $x \in E_n^+$ существует конус типа $c(\theta, \gamma, \infty) = c(\theta, \gamma) = \{y: y_i > 0, y \in E_n^+, (y, \theta) > |y| \cos \gamma, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2},$

$|\theta| = 1, 0 < y_i < 2h_i, 0 < h_i < \infty, i = 1, 2, \dots, n\}$, такой что

а) $-c(\theta, \gamma) = c(-\theta, \gamma)$

б) для $y \in c(\theta, \gamma)$, $x \in E_n^+$, $x + c(\theta, \gamma) \subset E_n^+$, $a x + c(-\theta, \gamma) \subset E_n^+$.

Основное интегральное представление дается, следуя О. В. Бесову с помощью усредняющего процесса.

Пусть $\xi(z) \in C^\infty(E_1)$, $\xi(z) = 0$ для $z \leq 0$, $z \geq 1$ и $\int_0^\infty \xi(z) dz = 1$.

При $h > 0$ положим:

$$f_h(x) = \int_0^\infty \xi(z) [f(x) + (-1)^{s+1} \Delta^s(hf) f(x)] dz =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} c_s^k \cdot \frac{1}{k} \xi(z/k) + f(x + hz) dz =$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^\infty \omega_s(z/h) f(x + z) dz,$$

где $\omega_s(z) = 0$ вне $(0, s)$, $\int_0^\infty \omega_s(z) dz = 1$, $\omega_s(z) \in C^\infty$ называется усредняющим ядром s -го ранга.

Следуя О. В. Бесову и В. П. Ильину, используя обозначения $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $h = h^\sigma = (h^{\sigma_1}, \dots, h^{\sigma_n})$, аналогично одномерному случаю напомним среднюю функцию для n -мерного случая¹:

$$f_h(x) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h^{-n} \omega(z_1/h, \dots, z_n/h) f(x + z) dz_1, \dots, dz_n$$

$$f_h(x) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h^{-2n} \omega(z_1/h, \dots, z_n/h) \omega(y_1/h, \dots, y_n/h) f(x +$$

$$+ y + z) dy dz \quad (6)$$

Легко проверяется справедливость следующего равенства:

$$h^{-n} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \omega(z_1/h, \dots, z_n/h) f(x + z) dz - f(x) =$$

$$= (-1)^{s+1} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h^{-n} \xi(z) \Delta^{s+2}(z) f(x) dz \quad (7)$$

¹ Индекс σ можно опустить

Далее положим

$$\hat{f}_h(x) = \tilde{f}_h(x) - 2f_h(x) \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по „ h “, получим следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} [-\hat{f}_h(x)] &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{1}{h^n} \omega(y/h) \cdot \frac{1}{h} \omega(z/h) \right] f(x+y+z) dy dz - \\ &- 2 \frac{\partial}{\partial h} f_h(x) = 2 \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{1}{h^n} \omega(y/h) \right] dy [f_h(x+y) - \\ &- f(x+y)] + 2 \frac{\partial}{\partial h} f_h(x) - 2 \frac{\partial}{\partial h} f_h(x) = \\ &= 2(-1)^{s+1} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty -\frac{1}{h^{1+n}} \{n \cdot \omega(y/h) + h \cdot [\omega(y/h)]'_h\} \times \\ &\times \frac{1}{h} \xi(z/h) \Delta^{s+2}(z) f(x+y) dy dz = \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h^{-1-2n} \chi(y_1/h, \dots, y_n/h) \xi(z_1/h, \dots, z_n/h) \Delta^2(z) f(x+y) dy dz, \end{aligned}$$

$$\text{где } y/h = \left\{ \frac{y_1}{h}, \dots, \frac{y_n}{h} \right\}, \quad \frac{z}{h} = \left\{ \frac{z_1}{h}, \dots, \frac{z_n}{h} \right\}, \quad n \cdot \omega(y/h) + h \cdot [\omega(y/h)]'_h = \frac{1}{2} \chi(y/h)$$

Интегрируя последнее равенство от $\delta > 0$ до $H < +\infty$ и переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получим основное представление:

$$f(x) = \hat{f}_H(x) + \int_0^H \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h^{-1-2n} \chi(y/h) \xi(z/h) \Delta^{s+2}(z) f(x+y) dy dz dh, \quad (9)$$

которое получено по точкам конуса $c(\theta, \gamma) = \{y: y_1 > 0, y \in E_n, (y, \theta) > |y| \cos \gamma, |\theta| = 1, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, 0 < |h| < \infty, 0 < |y| < 4h, i=1, 2, \dots, n\}$, являющейся „телом“ представления.

При этом для дальнейшего важно, чтобы $\chi(y/h)$ была финитной неограниченно дифференцируемой функцией с носителем в $0 < y_1 < 4h$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Отметим, что средняя функция $f_h(x)$ стремится к $f(x)$ при $h \rightarrow 0$, так как

$$\begin{aligned} |f(x) - f_h(x)| &\leq ch^{-n} \int_0^h \dots \int_0^h |f(x) - f(x+z)| dz = \\ &= ch^{-n} \int_{0 < z_1 < h} \dots \int_{0 < z_n < h} |f(x) - f(x+z)| dz \end{aligned}$$

Отсюда $f_h(x) \rightarrow f(x)$ при $h \rightarrow 0$.

Известно, что локально суммируемая функция почти в каждой точке удовлетворяет этому условию. Значит в (9) интеграл и равенство понимаются в смысле L_{loc} . Пользуясь неравенством (1) легко показывается, что $f(x) \in L_{p,\psi}(E_n^+)$, т. е. $f_h(x) \rightarrow f(x)$, $\tilde{f}_h(x) \rightarrow f(x)$ также в $L_{p,\psi}(E_n^+)$ и равенство (9) верно для любой $f(x) \in L_{p,\psi}(E_n^+)$. Заметим, что преимущество интегрального представления типа

(9) заключается в том, что в построении усредненной функции и представления в точке „ x “ участвуют значения функции в точке „ $x+y$ “.

Лемма 2. Пусть $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) \in E_n^+(0, \infty)^n$, при $1 \leq p \leq \infty$

Положим

$$g_{(\delta, H)}^{(x)} = \int_0^H \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h^{-1-2n} \chi(y/h) \xi(z/h) |z|^{\frac{n}{p}+s} \psi(|z|) G(z, x+y) dy dz dh, \quad (10)$$

Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|g_{(\delta, H)}^{(x)}\|_{L_{p,\psi}^{(s,\psi)}(E_n^+)} &\leq c \int_0^1 \dots \int_0^1 |u|^s \psi_1(|u|) \left\{ \int_{u_0}^{uH} \|G(z, x)\|_{L_{p,\psi}^{dz}(E_n^+)}^{1/p} du \right\}^{1/p} \\ &\leq c \left\{ \int_0^H \|G(z, x)\|_{L_{p,\psi}^{dz}(E_n^+)}^{1/p} dz \right\}^{1/p} \leq c \|G(z, x)\|_{L_{p,\psi}(E_n^+ \times (0, \infty)^n)}. \quad (11) \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\xi_{(\delta, H)}^{(z)}$ — характеристическая функция множества (δ, H) . Перенесем дифференцирование на ядро, пользуясь оценкой (4) и неравенствами (1) и (3), оценивая выражение

$$\|\Delta^2(z) D^s g_{(\delta, H)}^{(x)}\|_{L_{p,\psi}(E_n^+)},$$

получим

$$\begin{aligned} \|\Delta^2(z) D^s g_{(\delta, H)}^{(x)}\|_{L_{p,\psi}(E_n^+)} &= \|\Delta^2(z) \left(\int_0^z + \int_z^\infty \right) \xi_{(\delta, H)}^{(h)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h^{-1-2n} \chi(y/h) \times \\ &\times \xi(\tau/h) |\tau|^{\frac{n}{p}+s} \psi(|\tau|) D^s G(\tau, x+y) dy dz dh\|_{L_{p,\psi}(E_n^+)} \leq \\ &\leq c \int_0^z \xi_{(\delta, H)}^{(h)}(h) \cdot h^{-1-2n} \cdot h^{-s} \cdot h^n \int_0^h \dots \int_0^h |\tau|^{\frac{n}{p}+s} \psi(|\tau|) \|G(\tau, x)\|_{L_{p,\psi}(E_n^+)} \times \\ &\times d\tau dh + c_1 \left(z^2 \int_z^\infty \xi_{(\delta, H)}^{(h)}(h) \cdot h^{-1-2n} \cdot h^{-s} \cdot h^n \cdot h^{-2} \int_0^h \dots \int_0^h |\tau|^{\frac{n}{p}+s} \psi(|\tau|) \|G(\tau, x)\|_{L_{p,\psi}(E_n^+)} d\tau dh \right. \\ &\left. \dots \int_0^h |\tau|^{\frac{n}{p}+s} \psi(|\tau|) \|G(\tau, x)\|_{L_{p,\psi}(E_n^+)} d\tau dh \right) \end{aligned}$$

Применяя (2), затем заменяя τ на hu и z на h и пользуясь (1), получим:

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \|\Delta^2(z) D^s g_{(\delta, H)}^{(x)}\|_{L_{p,\psi}(E_n^+)}^{1/p} \frac{dz}{|z|^n \psi^p} \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq c_1 \left\{ \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^z \xi_{(\delta, H)}^{(h)}(h) \cdot h^{-1-n} \cdot h^{-s} \int_0^h \dots \int_0^h |\tau|^{\frac{n}{p}+s} \times \right. \\ &\times \psi(|\tau|) \|G(\tau, x)\|_{L_{p,\psi}^{dz}(E_n^+)}^p \frac{dz}{|z|^n \psi^p} \left. \right\}^{1/p} + c_2 \left\{ \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^z \xi_{(\delta, H)}^{(h)}(h) \times \right. \\ &\times h^{-1-n} \cdot h^{-s} \cdot h^{-2} \int_0^h \dots \int_0^h |\tau|^{\frac{n}{p}+s} \psi(|\tau|) \|G(\tau, x)\|_{L_{p,\psi}^{dz}(E_n^+)}^p \frac{dz}{|z|^n \psi^p} \left. \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq c_3 \left\{ \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left[\xi_{(\delta, H)}^{(z)}(z) \cdot z^{-n} \cdot z^{-s} \int_0^z \dots \int_0^z |\tau|^{\frac{n}{p}+s} \psi(|\tau|) \|G(\tau, x)\|_{L_{p,\psi}(E_n^+)} \times \right. \right. \\ &\times d\tau \left. \right]^p \frac{dz}{|z|^n \psi^p} \left. \right\}^{1/p} \leq c_4 \left\{ \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left[\int_0^1 \dots \int_0^1 \xi_{(\delta, H)}^{(h)}(h) |u|^{\frac{n}{p}+s} \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \psi_1(|u|) \|G(hu, x)\|_{L_{p,\varphi}(E_n^+)} du \Bigg]^p dh \Bigg\}^{1/p} \leq \\
& \leq c_3 \int_0^1 \dots \int_0^1 |u|^{\frac{n}{p}+s} \psi_1(|u|) \left\{ \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \xi_{(\delta, H)}(h) \|G(hu, x)\|_{L_{p,\varphi}(E_n^+)}^p \times \right. \\
& \quad \times dh \Bigg\}^{1/p} du \leq c_6 \int_0^1 \dots \int_0^1 |u|^s \psi_1(|u|) \left\{ \int_0^\infty \dots \right. \\
& \quad \cdot \int_0^\infty \xi_{(\delta, H)}(z|u|) \|G(z, x)\|_{L_{p,\varphi}(E_n^+)}^p dz \Bigg\}^{1/p} du \leq \\
& \leq c \int_0^1 \dots \int_0^1 |u|^s \psi_1(|u|) \left\{ \int_{u\delta}^{uH} \|G(z, x)\|_{L_{p,\varphi}(E_n^+)}^p dz \right\}^{1/p} du \leq \\
& \leq c \left\{ \int_0^H \|G(z, x)\|_{L_{p,\varphi}(E_n^+)}^p dz \right\}^{1/p} \leq c \|G(z, x)\|_{L_{p,\varphi}(E_n^+ \times (0, \infty)^n)},
\end{aligned}$$

Очевидно, что $g_{(\delta, H)}(x)$ есть бесконечно дифференцируемая функция при $\delta > 0$, а при $\delta \rightarrow 0$ есть предел правой части (10)

Лемма 3. Для функций $f(x) \in L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)$ и

$$\begin{aligned}
& \text{при } h \rightarrow \infty \quad Q(z, x) = |z|^{-\frac{n}{p}} \psi^{-1}(|z|) \Delta^2(z) D^s f(x) \\
& \|f_h(x)\|_{L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)} = \|Q_h(z, x)\|_{L_{p,\varphi}(E_n^+ \times (0, \infty)^n)} \rightarrow 0, \\
& \|f_h(x)\|_{L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)} \rightarrow 0 \quad (12)
\end{aligned}$$

Доказательство. Действительно, функция $Q(z, x)$ аппроксимируется финитными и ограниченными функциями, так как $Q(z, x) \in L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+ \times (0, \infty)^n)$ и в качестве финитной и ограниченной функции можно взять срезающую функцию $\bar{Q}(z, x)$ функции $Q(z, x)$. Таким образом, $Q(z, x)$ аппроксимируется функцией $\bar{Q}(z, x)$, затем $\bar{Q}(z, x)$ усредняется с малым усредняющим радиусом h . Следовательно, доказывается, что

$$\|Q(z, x) - \bar{Q}(z, x)\|_{L_{p,\varphi}(E_n^+ \times (0, \infty)^n)} < \varepsilon$$

и

$$\|\bar{Q}_h(z, x)\|_{L_{p,\varphi}(E_n^+ \times (0, \infty)^n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

Аналогично обосновывается, что

$$\text{при } h \rightarrow \infty \quad \|f_h(x)\|_{L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)} \rightarrow 0$$

В силу леммы 3, переходя к пределу в основном представлении, для

$$f(x) \in L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+),$$

получим:

$$f(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h^{-1-2n} \chi(y/h) \xi(z/h) \Delta^2(z) f(x+y) dy dz \quad (13)$$

Внешний интеграл сходится в смысле $L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)$.

Заметим, что если $f(x) \in c^\infty$, то для таких функций равенства (9) и (13) имеют место всюду.

Теорема. Функции, принадлежащие пространству $L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)$ аппроксимируются бесконечно дифференцируемыми финитными функциями.

Доказательство. Для функции $f(x) \in L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)$ положим

$$f_{(\delta, H)}(x) = \int_0^H \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h^{-1-2n} \chi(y/h) \xi(z/h) \Delta^2(z) f(x+y) dy dz dh$$

и

$$\begin{aligned}
g_{(\delta, H)}(x) &= \int_0^H \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h^{-1-2n} \chi(y/h) \xi(z/h) |z|^{\frac{n}{p}+s} \times \\
&\quad \times \psi(|z|) G(z, x+y) dy dz dh,
\end{aligned}$$

где $\delta > 0$ достаточно мало, $H < \infty$ достаточно велико.

Любая функция $f(x) \in L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)$ аппроксимируется функцией $f_{(\delta, H)}(x)$ в $L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)$.

Действительно, в силу основного представления можно написать

$$\hat{f}_\delta(x) = \hat{f}_H(x) + f_{(\delta, H)}(x)$$

$$f(x) - f_{(\delta, H)}(x) = f(x) - \hat{f}_\delta(x)$$

В последнем, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, $H \rightarrow \infty$, получим:

$$\|f(x) - f_{(\delta, H)}(x)\|_{L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)} \rightarrow 0 \quad (14)$$

Функция $g_{(\delta, H)}(x)$ — бесконечно дифференцируемая и в силу основной оценки аппроксимирована с функцией

$$G(z, x) = |z|^{\frac{n}{p}+s} \psi^{-1}(|z|) \Delta^2(z) f(x) \in c^\infty$$

и финитной.

Значит $f_{(\delta, H)}(x)$, которая аппроксимирована с $g_{(\delta, H)}(x)$ финитна и принадлежит $c^\infty(\bar{E}_n^+)$.

В силу (14) $f(x) \in c^\infty(\bar{E}_n^+)$ и финитна, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесов О. В. О плотности финитных функций в $L_{p,0}^{1_1, \dots, 1_n}$ и рапространении функций. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 1967, 89, 18—30.
2. Бесов О. В. Продолжение функций из L_p^1 и W_p^1 . Труды Математического института им. Стеклова, 1967, 89, 15—17.
3. Ильин В. П. Об аппроксимации функций из пространств $\bar{W}_p^{(1)}(D)$ и $W_p^{(1)}(D)$ непрерывно дифференцируемыми функциями. ДАН СССР, т. 137, № 6, 1961, 1283—1286.
4. Слободецкий С. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к крайевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, т. 197, 1958, 14—75.
5. Ильин В. П. Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^{(1)}(G)$, „Сибирский матем. ж.“, 1967, т. VII, № 3, 573—586.
6. Ильин В. П. Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных в n -мерной области. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 66, 1962, 353—363.
7. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изв. СОАН СССР, 1962.
8. Бесов О. В. О коэрцитивности в изотропном пространстве С. Л. Соболева. Матем. сб., 1967, т. 73, (115), № 4, 585—599.
9. Бесов О. В. К теории вложения и продолжения классов дифференцируемых функций. Автореф. док. дис. М., 1966.

С. А. Фејзијев

$L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)$ синфинэ дахил олан функцијаларын интеграл
көстэрилиши вэ аппроксимасијасы һаггында

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә О. В. Бесовун вэ В. П. Илјинин ујғун нәтичәләриндән истифадә едәрәк $L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)$ синфи функцијаларынын интеграл көстэрилиши верилмишдир. Интеграл көстэрилишинин көмәји илә C^∞ фәзасындан олан функцијаларын $L_{p,\varphi}^{(s,\psi)}(E_n^+)$ фәзасында сых олмасы һаггында теорем исбат едилмишдир.

МУСЛАЕВ САМАНДАР

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ВАРИАНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ С МОНОТОННО-РЕКУРРЕНТНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

Пусть имеется управляемый объект, изменение состояния которого описывается дифференциальным уравнением

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, u, t) \\ x_{t_0} &= x_0 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где $t \in [t_0, T]$, $x(t) \in X_t$, $u(t) \in U_t$

Пусть при каждом значении $t \in [t_0, T]$ функция $x(t)$ принимает значения из U_t , а $W = \{x(t) \mid \text{некоторое множество таких функций}\}$. Предположим, что $[t_i, t_j]$ — некоторый отрезок из $[t_0, T]$. Функцию $u(t)$, определенную на $[t_i, t_j]$ и принимающую значение из U_t , назовем согласованной с W , если имеется в W функция, совпадающая с $u(t)$ на $[t_i, t_j]$. Согласованные с W функции на $[t_i, t_j]$ будем называть отрезками функций W на $[t_0, T]$.

Пусть на отрезке $[t_0, T]$ задан функционал $\Phi[x(t; t_0, T)]$, который для любого разбиения $R = \{t_0, t_1, \dots, t_N = T\}$ отрезки $[t_0, T]$ может быть представлен в виде

$$\Phi[\kappa(t; t_0, T)] = \Phi_N^R[x(t; t_{N-1}, t_N), x(t; t_{N-2}, t_{N-1}), \dots, \Phi_1^R[x(t; t_0, t_1), x(t; t_0, t_0)] \dots], \quad (2)$$

где $x(t; t_{i-1}, t_i)$ — отрезок траектории $x(t; t_0, T)$ при $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $i = 1, 2, \dots, N$, $x(t; t_0, t_0) = x_0$ — начальное значение.

В частности, в таком виде представимы аддитивные функционалы.

Пусть множества U_t , X_t ограничены и замкнуты, кроме того, пусть удовлетворяются ограничения:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad u(t) &\in \overset{v}{U}_t \\ 2. \quad x(t) &\in \overset{v}{X}_t \end{aligned} \right\} (G)$$

Определение 1. Для систем (1) и (2) все траектории $x(t)$ и управления $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющие совокупным условиям (G), будем называть допустимыми.

Определение 2. Функционал $\Phi[x(t; t_0, T)]$, имеющий вид (2), называется монотонно-рекуррентными, если $\Phi_{k+1}^R[x(t; t_k, t_{k+1}), x(t; t_{k-1}, t_k), \Phi_k^R[\dots]]$ является строго монотонным по $\Phi_k^R[x(t; t_{k-1}, t_k), x(t; t_{k-2}, t_{k-1}), \Phi_{k-1}^R[\dots]]$ для любого $k = 1, 2, \dots, N-2, N-1$.

Требуется среди всех допустимых уравнений U_i выбрать такое управление $u^*(t)$, чтобы соответствующее решение $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$ уравнения (1) удовлетворяло бы ограничению G_2 и давало бы минимум функционалу (2). Такое управление $u^*(t)$ и соответствующее ему решение $x^*(t)$, $t_0 \leq t \leq T$ будем называть оптимальным.

При фиксированных t_0 и x_0 каждому управлению $u(t)$ из U_t согласно уравнению (1) соответствует некоторая траектория $x(t)$. Следовательно, имеем множество W начальных вариантов вида $w = \{x_0, u(t)\}$, удовлетворяющих условию G_1 , которому соответствует множество X траекторий, являющихся решением уравнения (1).

Вообще говоря множество X может иметь элементы, не удовлетворяющие условию G_2 . Так как при алгоритме оптимизации такие элементы отбрасываются, будем предполагать, что множество X не содержит элементы, не удовлетворяющие условию G_2 . В зависимости от структуры функционала $\Phi[x(t); t_0, T]$ и $f(x, u, t)$, $t \in [t_0, T]$ часто невозможно аналитически решить поставленную задачу. Для устранения этих трудностей задача, сформулированная выше, заменяется приближено следующей задачей: разобьем отрезок $[t_0, T]$ на N равных частей малой длины $\Delta > 0$ и рассмотрим дискретные значения $x_k = x(t_k)$, $u_k = u(t_k)$ в момент времени $t_k = t_0 + k\Delta$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

Заменим дифференциальное уравнение (1) приближенно уравнением в конечных разностях

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, u_k, t_k) \Delta, \quad (3)$$

а функционал (2) приближенно заменим функцией

$$\Phi(x_0, x_1, \dots, x_N) = \varphi_N(x_N, x_{N-1}, \dots, \Phi_1(x_1, x_0, \dots)), \quad (4)$$

определенной на ломаной, соединяющей последовательности точек (t_0, x_0) , (t_1, x_1) , ..., (t_N, x_N) . Последовательности $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ и $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$ будем называть соответственно "траекторией" и "управлением".

Теперь задача состоит в определении последовательности дискретных значений

$$u(t_0), u(t_0 + \Delta), \dots, u(t_0 + (N-1)\Delta)$$

вектора $u(t)$, $t_0 \leq t \leq T$ и соответствующих им дискретных значений

$$x(t_0), x(t_0 + \Delta), \dots, x(t_0 + N\Delta)$$

вектора $x(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, которые удовлетворяют уравнению (3), минимизируют функцию (4) и, кроме того, в каждой точке $t = t_k$ удовлетворяют ограничениям

$$\left. \begin{aligned} 1. u_k \in \overset{\vee}{U}_{t_k} = \overset{\vee}{U}_k, \text{ для любого } t_k \in [t_0, T] \\ 2. x_k \in \overset{\vee}{X}_{t_k} = \overset{\vee}{X}_k, \text{ для любого } t_k \in [t_0, T] \end{aligned} \right\} (G_1)$$

Для наших целей принцип оптимальности удобно принять в следующем виде: если

$$x_0, x_1, \dots, x_k \text{ и } x'_0, x'_1, \dots, x'_k$$

две допустимые "траектории", $x_k = x'_k$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} \Phi_k(x_k, x_{k-1}, \Phi_{k-1}(\dots, \Phi_1(x_1, x_0, \dots))) < \\ < \Phi_k(x'_k, x'_{k-1}, \Phi_{k-1}(\dots, \Phi_1(x'_1, x'_0, \dots))), \end{aligned}$$

то при любом $i \geq k$ ($i \leq N$) никакое допустимое продолжение траектории $x'_0, x'_1, \dots, x'_i$ не может быть оптимальным на отрезке $[t_0, t_i]$.

Для описания способа оптимизации предположим, что имеется приемлемая возможность решать следующую задачу: при любом $k = 0, 1, \dots, N-1$ для любых заданных $x_k \in X_k$ и $x_{k+1} \in X_{k+1}$ можно

указать такое управление $u_k = u_k(x_k, x_{k+1})$, которое является корнем уравнения

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, u_k, t_k) \Delta \quad (5)$$

относительно неизвестного u_k .

Выберем в каждом x_k конечно подмножество $A_k = \{x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{ks_k}\}$. $k = 0, 1, \dots, N$, $s_k = 1, 2, \dots, q_k$ — число элементов множества A_k . Для любой точки $x_{ki} \in A_k$ обозначим через A_{k-1}^i множество всех $x_k \in A_k$, для которых

$$u_{k-1} = u_{k-1}(x_{k-1}, x_k) \in \overset{\vee}{U}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

Схема метода последовательного анализа вариантов применительно к полученной дискретной задаче имеет следующий вид:

1. Очевидно, что множество A_0 состоит только из одного элемента — из начального значения x_0 . Для точки $x_0 \in A_0$ из шкалы траекторий построим множество A_1 всех точек $x_{1j} \in A_1$, для которых $u_{0j} = u_{0j}(x_0, x_{1j})$ является корнем уравнения

$$x_{1j} = x_0 + f(x_0, u_{0j}, t_0) \Delta \quad (a)$$

относительно неизвестного u_{0j} . Далее, для каждого $x_{1j} \in A_1$ вычислим выражение

$$\varphi_1(x_{1j}) = \Phi_1(x_{1j}, x_0).$$

Это означает, что для каждого j вычисляем значения функционала при переходе объекта из начального состояния $x_0 \in A_0$ в состояние $x_{1j} \in A_1$ под воздействием управления, которое определяется на корень уравнения (a).

2. Для каждой точки $x_{2i} \in A_2$ на прямой $t = t_2$ в шкале траекторий найдем множество $A_1^u(x_{2i})$, которое также непусто. Далее, для каждого $i = 1, 2, \dots, s_2$ рассмотрим множество

$$B_1^u(x_{2i}) = A_0^u \cap A_1^u(x_{2i}(x_{2i}))$$

и, если оно не пусто, то найдем $x_1 = x_1(x_{2i})$, для которого достигается

$$\varphi_2(x_1(x_{2i})) = \min_{x_{1j} \in B_1^u(x_{2i})} \Phi_2[x_{2i}, x_{1j}, \varphi_1(x_{1j})]$$

Множество всех $x_{2i} \in A_2$, для которых $B_1^u(x_{2i})$ не пусто, обозначим через B_2^u . Дальнейший процесс продолжается рекуррентно.

Если за $k-1$ шагов построены $\varphi_{k-1}(x_{k-2}(x_{k-1}))$ и B_{k-1}^u , то производим k -ый шаг.

К. Для каждой точки $x_{ki} \in A_k$ на прямой $t = t_k$ в шкале траекторий найдем множество

$$B_k^u(x_{ki}) = B_{k-1}^u \cap A_{k-1}^u(x_{ki}), \quad i = 1, 2, \dots, s_k$$

и, если оно не пусто, то найдем $x_{k-1} = x_{k-1}(x_{ki})$, для которого достигается

$$\varphi_k(x_{k-1}(x_{ki})) = \min_{x_{k-1j} \in B_{k-1}^u(x_{ki})} \Phi_k[x_{ki}, x_{k-1j}, \varphi_{k-1}(x_{k-2}(x_{k-1j}))]$$

Осуществив указанную процедуру при $k = N$, найдем x_N , для которого достигается

$$\varphi_N(x_N) = \min_{x_{Nj} \in A_N(x_N)} \Phi_N[x_{Nj}, x_{N-j}, \varphi_{N-1}(x_{N-2}(x_{N-1}))]$$

После этого строим последовательность

$$x_0^*, x_1^*, \dots, x_N^*$$

рекуррентно от $N-1$ к $N-2$ и т.д. по правилу

$$x_k^* = x_k^*(x_{k+1}^*)$$

Эта последовательность будет оптимальной траекторий среди всех допустимых траекторий, проходящих через точки выбранных нами конечных подмножеств

$$A_0, A_1, \dots, A_N$$

Этой траектории соответствует последовательность управлений

$$u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*, \text{ где } u_{k-1}^* = u_{k-1}^*(x_{k-1}^*, x_k^*)$$

Увеличивая число точек в каждом из множеств A_k и число самих множеств A_k , мы получаем возможность уточнять полученное решение и приближаться к истинной оптимальной траектории.

Основной вопрос, который нас будет интересовать, — это исследование близости по функционалу между оптимальным „вариантом“ дискретного приближения и оптимальным вариантом непрерывной задачи. Основной прием, который мы будем использовать, базируется на следующей простой лемме, доказательство которой очевидно.

Лемма 1. Пусть имеем два множества $A = \{\alpha\}$ и $B = \{\beta\}$, на множестве A определена функция $F(\alpha)$, а на множестве B — функция $G(\beta)$. Если для заданного $\varepsilon > 0$ и произвольного $\alpha \in A$ существует $\beta(\alpha) \in B$, такое, что $|F(\alpha) - G[\beta(\alpha)]| < \varepsilon$, и, в свою очередь, для этого $\varepsilon > 0$ и произвольного $\beta \in B$ существует $\alpha(\beta) \in A$ такое, что $|F[\alpha(\beta)] - G(\beta)| < \varepsilon$, то будет также

$$|\inf_{\alpha \in A} F(\alpha) - \inf_{\beta \in B} G(\beta)| \leq \varepsilon \text{ и } |\sup_{\alpha \in A} F(\alpha) - \sup_{\beta \in B} G(\beta)| \leq \varepsilon.$$

Таким образом, нам для наших целей достаточно будет изучать характер взаимной аппроксимации по соответствующим функционалам множеств непрерывных вариантов и „дискретных“ вариантов.

Как увидим ниже, условия сходимости, которые мы будем обосновывать, не зависят существенно от размерности фазовой траектории и управлений. Поэтому, не нарушая общности, будем предполагать, что эти множества одномерные.

Теперь докажем следующую основную лемму:

Лемма 2. Если уравнение (5) для любых $x_k \in X_k$, $x_{k+1} \in X_{k+1}$ имеет хотя бы один корень относительно $u_k \in U_k$ и, кроме того, существуют окрестности $o(x_k)$ и $o(x_{k+1})$, что точки $x_k \in o(x_k)$ и $x_{k+1} \in o(x_{k+1})$ допустимо соединяются, а функция $f(x, u, t)$ непрерывна* по совокупности своих аргументов, то множество W^G вариантов вида $\bar{w} = \{x_0, u(t)\}$ аппроксимируется множеством $W_{\Delta, \delta}^{G_1}$ вариантов вида $\bar{w} \{x_0, u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$ и обратно, $W_{\Delta, \delta}^{G_1}$ аппроксимируется множеством W^G , где u_k для каждого $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ является корнем уравнения (5).

Доказательство. Сначала докажем, что при достаточно малом разбиении Δ и δ множество W^G аппроксимируется множеством $W_{\Delta, \delta}^{G_1}$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и каждого элемента $\bar{w} \in W^G$ существует такой элемент $\bar{w} \in W_{\Delta, \delta}^{G_1}$, что соответствующая ему траектория удовлетворяет неравенству

$$|x(t; t_{k-1}, t_k) - x(t_k)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Действительно, значения траектории $x(t; t_0, T)$ соответствующие варианту $\bar{w} = \{x_0, u(t)\}$, $\bar{w} \in W^G$ в точке $t = t_k \in [t_0, T]$ будут лежать между двумя соседними точками x_{ki} и x_{ki+1} ($x_{ki+1} - x_{ki} = \delta$) на прямой $t = t_k$ шкалы фазовой траектории.

Теперь выберем вариант $\bar{w} \{x_0, u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$, которому соот-

* Так как функция $f(x, u, t)$ определена на замкнутом множестве, то из непрерывности следует ее ограниченность.

ветствует „траектория“ $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, причем для каждого $k = 1, 2, \dots, N$

$$x_k = \begin{cases} x_{ki}, & \text{если } \alpha = |x(t_k) - x_{ki}| \\ x_{ki+1}, & \text{если } \alpha = |x_{ki+1} - x(t_k)| \\ x_{ki} \text{ или } x_{ki+1}, & \text{если } x(t_k) = \frac{1}{2}(x_{ki} + x_{ki+1}), \end{cases}$$

где $\alpha = \min(|x(t_k) - x_{ki}|, |x_{ki+1} - x(t_k)|)$, а $x(t_k)$ — значение $x(t; t_{k-1}, t_k)$ на прямой $t = t_k$, $k = 1, 2, \dots, N$. Так как по предположению любые две точки $x_k \in X_k$ и $x_{k+1} \in X_{k+1}$ допустимы по ограничениям G и уравнение (5) имеет хотя бы один корень, то в силу условия леммы и непрерывности функции $f(x, u, t)$ траектория $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, определяемая по формуле (6), является допустимой не ограничениям G_1 , так как удовлетворяется условие, приведенное в [4], т. е. для любого $k = 1, 2, \dots, N$,

$$x_k \in X_k, \quad u_{k-1} \in U_{k-1}.$$

Определение 3. „Траекторию“ $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, определенную по формуле (6), назовем аппроксимирующей для $x(t; t_0, T)$ и обозначим через $x_\alpha(t; t_0, T)$

Теперь покажем, что для любого $\varepsilon \geq 0$ можно указать такие разбиения Δ, δ , что для каждого элемента $\bar{w} = \{x_0, u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$ множества W^G существует такой вариант $\bar{w} \{x_0, u(t)\}$ множества W^G , что $|x_k - x(t; t_{k-1}, t_k)| < \varepsilon$.

В самом деле, пусть имеем некоторый вариант $\bar{w} = \{x_0, u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\} \in W_{\Delta, \delta}^{G_1}$, и соответствующую ему траекторию

$$x_{k+1} = x_k = f(x_k, u_k, t_k) \Delta; \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7)$$

Очевидно, что для любой $t_k \leq t \leq t_{k+1}$

$$x(t) = x(t_k) + \int_{t_k}^t f(x, u, t) dt \quad (8)$$

Вычитывая (8) из (7) и учитывая, что по нашим обозначениям при $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $x(t) = x(t; t_k, t_{k+1})$, получаем

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x(t; t_k, t_{k+1})| &\leq |x_k - x(t_k)| + \Delta |f(x, u_k, t_k)| + \\ &+ \left| \int_{t_k}^t f(x, u, t) dt \right| \leq \delta + |f(x, u_k, t_k)| \Delta + \\ &+ \int_{t_k}^t |f(x, u, t)| dt \end{aligned}$$

Имея в виду ограниченность функции $f(x, u, t)$ и обозначив

$$M = 2 \max |f(x, u, t)|,$$

получаем

$$|x_{k+1} - x(t; t_k, t_{k+1})| \leq \delta + M \Delta$$

Теперь, приняв

$$\varepsilon + \delta + M \Delta,$$

доказываем лемму.

Теорема. Пусть удовлетворяются все условия леммы 2, кроме того, функционал $\Phi[x(t)]$, монотонно-рекуррентный, удовлетворяет условию Липшица с постоянным $L < 1$. Тогда для любой $\varepsilon > 0$ можно указать такие разбиения Δ, δ , что

$$|\Phi[x(t; t_0, T)] - \Phi[x_\alpha(t; t_0, T)]| \leq \varepsilon,$$

и, кроме того, справедлива оценка

$$|\Phi[x(t; t_0, T)] - \Phi[x_\alpha(t; t_0, T)]| \leq \frac{2L}{1-L} (\delta + M\Delta).$$

Доказательство. Пусть $\omega = \{x_0, u(t)\}$ — некоторый допустимый вариант, а $x(t; t_0, T) \in X_t$ — соответствующая ему траектория, и пусть $x_\alpha(t; t_0, T) \in X_{\Delta, \delta}^{G_1}$, которая соответствует варианту $\tilde{\omega} = \{x_0, u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\} \in W_{\Delta, \delta}^{G_1}$, аппроксимирует траекторию $x(t; t_0, T)$. Тогда очевидно, что

$$\Phi[x(t; t_0, T)] = \Phi_N[x(t; t_{N-1}, t_N), x(t; t_{N-2}, t_{N-1}), \dots, \Phi_1[x(t; t_0, t_1), x(t; t_0, t_0)] \dots] \quad (9)$$

$$\Phi[x_\alpha(t; t_0, T)] = \Phi_N[x_N, x_{N-1}, \Phi_{N-1}[\dots, \Phi_1(x_1, x_0) \dots]] \quad (10)$$

Вычитая из (9) равенство (10), применив условие Липшица и учитывая, что по лемме 2 для любой $k = 0, 1, \dots, N-1$

$$|x_{k+1} - x(t; t_k, t_{k+1})| \leq \delta + M\Delta,$$

получаем

$$\begin{aligned} |\Phi[x(t; t_0, T)] - \Phi[x_\alpha(t; t_0, T)]| &\leq 2L(\delta + M\Delta) + L|\Phi_{N-1}[x(t; t_{N-2}, t_{N-1}), x(t; t_{N-3}, t_{N-2}), \dots, \Phi_1[x(t; t_0, t_1), x(t; t_0, t_0)] \dots] - \\ &- \Phi_{N-1}(x_{N-1}, x_{N-2}, \Phi_{N-2}[\dots, \Phi_1(x_1, x_0) \dots])| \leq 2L(\delta + M\Delta) + \\ &+ L \cdot 2L(\delta + M\Delta) + L^2 \cdot 2L(\delta + M\Delta) + \dots + L^{N-2} \cdot 2L(\delta + M\Delta) + \\ &+ L^{N-1} \cdot L(\delta + M\Delta) \leq 2L(\delta + M\Delta)(1 + L + \dots + L^{N-1}) = \\ &= 2L(\delta + M\Delta) \cdot \frac{1-L^N}{1-L} = 2L(\delta + M\Delta) \cdot \frac{1}{1-L} + 2L(\delta + M\Delta) \frac{L^N}{L-1}. \end{aligned}$$

Так как $L < 1$ и второй член стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, то справедлива оценка

$$|\Phi[x(t; t_0, T)] - \Phi[x_\alpha(t; t_0, T)]| \leq \frac{2L}{1-L} (\delta + M\Delta)$$

Приняв $\varepsilon = \frac{2L}{1-L} (\delta + M\Delta)$, получаем

$$|\Phi[x(t; t_0, T)] - \Phi[x_\alpha(t; t_0, T)]| \leq \varepsilon,$$

чем и доказана сходимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михалевич В. С. Схемы последовательного поиска и метод последовательного анализа вариантов. Труды семинара экономической кибернетики и исследования операций. КДНТП, 1965.
2. Моисеев Н. Н. Численные методы теории оптимальных управлений, использующие вариации и пространство состояний. "Кибернетика". № 3, 1966.
3. Мусаев С. Р. Выбор оптимального варианта сложного магистрального нефтепровода при помощи ЭЦВМ. "Изв. АН Азерб. ССР", № 1, 1969.
4. Раковщик Л. С. Построение допустимых уравнений. Автоматика и телемеханика, т. XXIII, № 10, 1962.

Институт кибернетики

Поступило 26. I 1970

С. Р. Мусаев

Монотон-рекуррент функционал илә ифадә олуна
систем үчүн вариантларын ардычыл тәһлил үсулу
ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә монотон-рекуррент функционалларын мütәәјјән шәртләри өдәјән экстремал гіјмәтинин (гојулмуш мәсәләнин оптимал хәллінін) тапылмасы үчүн ардычыл тәһлил үсулунун үмуми схемі верилмишдир. Гојулмуш мәсәлә үчүн ардычыл тәһлил үсулунун јығылмасы исбат олунамуш вә үсулун хәтасы гіјмәтләндирилмишдир.

Н. М. САБЗИЕВ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И КОНЕЧНОГО ТИПА В ЗАДАННОМ УГЛЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Для данного $\rho \geq 1$ обозначим через $D_1^{(\rho)}$ область $|\arg z| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$, а через $D_2^{(\rho)}$ — область $|\arg z + \pi| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$. Пусть $D^{(\rho)} = D_1^{(\rho)} + D_2^{(\rho)}$. Очевидно, что в случае $\rho = 1$ множество $D^{(1)}$ представляет собой всю вещественную ось.

Обозначим через $L_{p,q}[D^{(\rho)}]$ класс функций $f(z)$ ($z = re^{i\varphi}$) аналитических в области $D^{(\rho)}$, непрерывных на границе области $D^{(\rho)}$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{p,q} = \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right)^{q/p} d\varphi \right\}^{1/p} < \infty,$$

где $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$.

В случае $p = q = \infty$ предположим, что

$$\|f\|_{\infty, \infty} = \sup_{(\varphi)} \sup_{(r)} |f(re^{i\varphi})| < \infty.$$

Кроме того, в случае $1 \leq p \leq \infty$ и $q = \infty$ положим, что*

$$\|f\|_{p, \infty} = \sup_{-\alpha < \varphi < \alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть $L_{p,q}^{(\sigma)}[D^{(\rho)}]$ означает класс целых функций порядка ρ типа $\leq \sigma$, принадлежащих классу $L_{p,q}[D^{(\rho)}]$.

Заметим, что в случае $\rho = 1$, $q = p < \infty$ множество $L_{p,q}[D^{(\rho)}]$ и $L_{p,q}^{(\sigma)}[D^{(\rho)}]$ совпадают соответственно с известными классами функций $L_p(-\infty, \infty)$ и $W_p^{(\sigma)}$ (см. [2] стр. 38).

Рассмотрим функцию

$$H_\lambda(z) = \left\{ \frac{E_\rho(i\lambda^{-\frac{1}{\rho}} z) - E_\rho(-i\lambda^{-\frac{1}{\rho}} z)}{iz} \right\}^\lambda, \quad (1)$$

* Этот случай рассмотрен И. И. Ибрагимовым и А. А. Гамидовым [3].

где

$$E_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+n\rho^{-1})}$$

есть целая функция Миттаг—Лиффлера порядка ρ типа 1. Известно, что (см. [1, 3, 5]) функция $H_\lambda(z)$ удовлетворяет следующим условиям,

$$1. \quad |H_\lambda(z)| \leq \frac{A_p}{|z|^\lambda} \quad \text{при} \quad |z| \geq 1 \quad (2)$$

где

$$A_p = \sup_{z \in D^{(p)}} |E_p(i\lambda^{-\frac{1}{\rho}} z) - E_p(-i\lambda^{-\frac{1}{\rho}} z)|;$$

$$2. \quad |H_\lambda(z)| \leq \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{-\frac{2k+1}{\rho}}}{\Gamma[1+(2k+1)\rho^{-1}]} \right\}^\lambda = B_\lambda \quad (3)$$

при $|z| \leq 1$.

Кроме того, из рассуждений, приводимых в работе [3], следует что $H_\lambda(\sigma z)$ принадлежит классу $L_{p,q}^{(\sigma)}[D^{(p)}]$ при $\lambda\rho > 1$.

Назовем величину

$$A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q} = \inf_{g \in L_{p,q}^{(\sigma)}[D^{(p)}]} \|f(re^{i\varphi}) - g(re^{i\varphi})\|_{p,q}$$

наилучшим приближением в смысле метрики пространства

$$L_{p,q}[D^{(p)}] \text{ функций } f(z) \in L_{p,q}[D^{(p)}]$$

посредством целых функций порядка ρ типа σ .

Далее, назовем величину

$$\omega(f; \delta, D^{(p)})_{p,q} = \sup_{|t| \leq \delta} \|f[(r+t)e^{i\varphi}] - f(re^{i\varphi})\|_{p,q}$$

модулем гладкости функции $f(z) \in L_{p,q}[D^{(p)}]$ в метрике пространства $L_{p,q}[D^{(p)}]$.

Кроме того, назовем величину

$$\omega_k(f; \delta, D^{(p)})_{p,q} = \sup_{|t| \leq \delta} \left\| \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} \binom{k}{v} f[(r+vt)e^{i\varphi}] \right\|_{p,q}$$

модулем гладкости k -го порядка функции $f(z)$ в смысле метрики $L_{p,q}[D^{(p)}]$.

В настоящей работе устанавливается связь в виде неравенства между величинами $A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q}$ и $\omega_k(f; \delta, D^{(p)})_{p,q}$. Кроме того, найден порядок приближения к нулю наилучшего приближения $A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q}$ в зависимости от дифференциальных свойств функции $f(z) \in L_{p,q}[D^{(p)}]$.

Подобная задача впервые рассмотрена С. Н. Бернштейном на вещественной оси в метрике пространства $C(-\infty, \infty)$, И. И. Ибрагимовым в полосе $D \left\{ \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -a < y < a \end{array} \right\}$ в метрике пространства $L_p[D]$,

М. М. Джрбашьяном и А. А. Тамадяном в области $D^{(p)}$ в метрике пространства $C(D^{(p)})$ и И. И. Ибрагимовым совместно с А. А. Гамидовым в области $D^{(p)}$ в метрике пространства $L_p[D^{(p)}]$.

Отметим, что во всех упомянутых работах рассматривается одна и та же задача С. Н. Бернштейна в метрике различных функциональных пространств. Эта же задача рассматривается нами в метрике более общего метрического пространства $L_{p,q}[D^{(p)}]$.

В решении нашей задачи мы пользуемся следующими свойствами модуля гладкости $\omega(f; \delta, D^{(p)})_{p,q}$ функции $f(z) \in L_{p,q}[D^{(p)}]$.

1. $\omega(f; \delta_1, D^{(p)})_{p,q} \leq \omega(f; \delta_2, D^{(p)})_{p,q}$ при $\delta_1 \leq \delta_2$

2. Если функция $f(z) (z=re^{i\varphi})$ со своими частными производными по r до порядка ν принадлежит классу $L_{p,q}[D^{(p)}]$, тогда

$$\omega_{k+\nu}(f; \delta, D^{(p)})_{p,q} \leq \delta^\nu \omega_k(f; \delta, D^{(p)})_{p,q}$$

3. Для любого целого $n \geq 1$

$$\omega_k(f; n\delta, D^{(p)})_{p,q} \leq n^k \omega_k(f; \delta, D^{(p)})_{p,q},$$

а если $\lambda > 0$ любое, тогда

$$4. \quad \omega_k(f; \lambda\delta, D^{(p)})_{p,q} \leq (\lambda+1)^k \omega_k(f; \delta, D^{(p)})_{p,q}.$$

Заметим, что свойство 1) очевидно, а 2) и 3) соответственно вытекают из следующих тождеств:

$$\Delta_h^\nu f = \int_0^h \dots \int_0^h \frac{\partial^\nu f[(r+t_1+\dots+t_\nu)e^{i\varphi}]}{\partial r^\nu} dt_1 \dots dt_\nu$$

и

$$\Delta_{\xi}^k f = \sum_{v_1=0}^{n-1} \dots \sum_{v_k=0}^{n-1} \Delta_{\xi}^k f(z + v_1 \xi + \dots + v_k \xi),$$

где

$$\Delta_{\xi}^k f(z) = \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} \binom{k}{v} f(z + v\xi)$$

и $\arg = \arg \xi$.

Теорема 1. Пусть $g_0(z) \in L_{p,q}^{(\sigma)}[D^{(p)}]$ есть целая функция порядка ρ типа σ , наименее уклоняющаяся от заданной функции $f(z) \in L_{p,q}[D^{(p)}]$ в смысле метрики пространства $L_{p,q}[D^{(p)}]$. Тогда

$$\omega(f; \sigma^{-\frac{1}{\rho}} D^{(p)})_{p,q} \leq 2A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q} + \omega(g_0; \sigma^{-\frac{1}{\rho}} D^{(p)})_{p,q} \quad (4)$$

Доказательство: В силу определения модуля гладкости имеем

$$\omega(f; \sigma^{-\frac{1}{\rho}} D^{(p)})_{p,q} = \sup_{|t| \leq \sigma^{-\frac{1}{\rho}}} \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f[(r+t)e^{i\varphi}] - f(re^{i\varphi})|^p dr \right)^{1/p} d\varphi \right\}^{1/q}.$$

Отсюда

$$\omega(f; \sigma^{-\frac{1}{\rho}} D^{(p)})_{p,q} = \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f[(r+t)e^{i\varphi}] - g_0[(r+t)e^{i\varphi}] + g_0[(r+t)e^{i\varphi}] - g_0(re^{i\varphi}) + g_0(re^{i\varphi}) - f(re^{i\varphi}) + f(re^{i\varphi}) - g_0(re^{i\varphi})|^p dr \right)^{1/p} d\varphi \right\}^{1/q}.$$

Применяя неравенство Минковского к интегралу по r , а потом к интегралу по φ , получим:

$$\begin{aligned} \omega(f; \sigma^{-\frac{1}{\rho}} D^{(p)})_{p,q} &\leq \|f[(r+t)e^{i\varphi}] - g_0[(r+t)e^{i\varphi}]\|_{p,q} + \\ &+ \|f(re^{i\varphi}) - g_0(re^{i\varphi})\|_{p,q} + \|g_0[(r+t)e^{i\varphi}] - g_0(re^{i\varphi})\|_{p,q} \leq \\ &\leq 2A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q} + \omega(g_0; \sigma^{-\frac{1}{\rho}} D^{(p)})_{p,q}. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (4) доказано

Займемся оценкой $A_\alpha(f; D^{(p)})_{p,q}$ посредством модуля гладкости $\omega_\kappa(f; \delta; D^{(p)})_{p,q}$. Для этой цели рассмотрим функцию $K(z)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $K(z)$ — четная целая функция из класса $L_{p,q}^{(\sigma)}[D^{(p)}]$.

2.
$$\int_{C(\varphi)} K(t) dt = a, \quad (5)$$

где $C(\varphi)$ есть прямая с уравнением $z = re^{i\varphi} \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right); -\infty < r \leq \infty \right)$.

3.
$$\int_{C(\varphi)} |t^m K(t)| |dt| < \infty \quad (6)$$

при целых $m \geq 0$.

4. Для любой функции $f(z) \in L_{p,q}[D^{(p)}]$, функция

$$g(z) = \frac{1}{a} \int_{C(\varphi)} K(\xi) f(z + \sigma^{-\frac{1}{p}} \xi) d\xi \quad (7)$$

принадлежит $L_{p,q}^{(\sigma)}[D^{(p)}]$.

Заметим, что функция $H_\lambda(z)$ определяемая равенством (1) при четном $\lambda \geq m+2$ удовлетворяет всем четырем условиям, наложенным на $K(z)$. Выполнение условий 1) — 3) и что $g(z)$ есть целая функция порядка ρ типа σ показано в работах [1, 3].

Для того чтобы показать, что функция $g(z)$, определяемая в равенстве (7), принадлежит классу $L_{p,q}[D^{(p)}]$, рассмотрим следующее равенство

$$\|g\|_{p,q} = \frac{1}{|a|} \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{C(\varphi)} H_\lambda(u) f(re^{i\varphi} + u \sigma^{-\frac{1}{p}}) du \right|^p dr \right)^{q/p} d\varphi \right\}^{1/q}.$$

Пусть $u = te^{i\varphi}$. Тогда имеем:

$$\|g\|_{p,q} \leq \frac{1}{|a|} \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |H_\lambda(te^{i\varphi})| |f[(r+t\sigma^{-\frac{1}{p}})e^{i\varphi}]| dt \right]^p dr \right)^{q/p} d\varphi \right\}^{1/q}.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Минковского, получим:

$$\begin{aligned} \|g\|_{p,q} &\leq \frac{1}{|a|} \int_1^\infty \frac{A_\rho}{t^\lambda} \|f[(r+t)e^{i\varphi}]\|_{p,q} dt + \\ &+ \frac{B_\rho}{|a|} \int_{-1}^1 \|f[(r+t)e^{i\varphi}]\|_{p,q} dt + \frac{A_\rho}{|a|} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|t|^\lambda} \|f[(r+t)e^{i\varphi}]\|_{p,q} dt = \\ &= J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Оценим интеграл J_1 :

Учитывая, что $\|f[(r+t)e^{i\varphi}]\|_{p,q} = \|f(re^{i\varphi})\|_{p,q}$, получим

$$J_1 = \frac{A_\rho}{|a|} \|f(re^{i\varphi})\|_{p,q} \int_1^\infty |t|^{-\lambda} dt.$$

Отсюда при $\lambda > 1$ имеем: $J_1 < \infty$.

Аналогично можно показать, что J_2 и J_3 также конечные. Таким образом, на основании неравенства (8)

$$\|g\|_{p,q} < \infty,$$

т. е. функция $g(z) \in L_{p,q}^{(\sigma)}[D^{(p)}]$.

Теорема 2. Если $f(z) \in L_{p,q}[D^{(p)}]$, то

$$A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q} \leq C_\rho \omega(f; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)})_{p,q},$$

где $C_\rho > 0$ постоянное, не зависит от σ .

Доказательство: В силу (5) и (7) имеем:

$$g(z) - f(z) = \frac{1}{a} \int_{C(\psi)} H_\lambda(u) [f(z + u \sigma^{-\frac{1}{p}}) - f(z)] du \quad (9)$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} &\|f(re^{i\varphi}) - g(re^{i\varphi})\|_{p,q} = \\ &= \frac{1}{|a|} \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{C(\varphi)} H_\lambda(u) [f(re^{i\varphi} + u \sigma^{-\frac{1}{p}}) - f(re^{i\varphi})] du \right|^p dr \right)^{q/p} d\varphi \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Пусть $u = te^{i\varphi}$, тогда аналогично неравенству (8) имеем:

$$A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q} \leq \frac{1}{|a|} \{J_4 + J_5 + J_6\}, \quad (10)$$

где

$$J_4 = \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_1^\infty \frac{A_\rho}{|t|^\lambda} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f[(r+t\sigma^{-\frac{1}{p}})e^{i\varphi}] - f(re^{i\varphi})|^p dr \right]^{1/p} dt \right)^q d\varphi \right\}^{1/q},$$

$$J_5 = \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_{-1}^1 B_\rho \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f[(r+t\sigma^{-\frac{1}{p}})e^{i\varphi}] - f(re^{i\varphi})|^p dr \right]^{1/p} dt \right)^q d\varphi \right\}^{1/q}$$

и

$$J_6 = \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_{-\infty}^{-1} \frac{A_\rho}{|t|^\lambda} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f[(r+t\sigma^{-\frac{1}{p}})e^{i\varphi}] - f(re^{i\varphi})|^p dr \right]^{1/p} dt \right)^q d\varphi \right\}^{1/q}.$$

Оценим интеграл J_4 . В силу обобщенного неравенства Минковского

$$J_4 \leq \int_1^\infty \frac{A_\rho}{|t|^\lambda} \omega(f; |t\sigma^{-\frac{1}{p}}|; D^{(p)})_{p,q} dt$$

В силу свойства (3) модуля гладкости имеем:

$$\begin{aligned} J_4 &\leq A_\rho \int_1^\infty \frac{(|t|+1)}{|t|^\lambda} \omega(f; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)})_{p,q} dt \leq \\ &\leq M_\rho^{(1)} \omega(f; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)})_{p,q} \quad \text{при } \lambda > 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично можно показать, что

$$J_5 \leq M_\rho^{(2)} \omega(f; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)})_{p,q} \quad (12)$$

и

$$J_6 \leq M_\rho^{(3)} \omega(f; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)})_{p,q} \quad (13)$$

Следовательно, в силу (11), (12) и (13) из неравенства (10) получим утверждение теоремы 2.

Теорема 3. Если $f(z)$ ($z=re^{i\varphi}$) вместе со своими частными производными по r до порядка ν принадлежит пространству $L_{p,q}[D^{(p)}]$, то

$$A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q} \leq C_p \sigma^{-\frac{\nu}{p}} \omega_\kappa(f_r^{(\nu)}; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)})_{p,q}, \quad (14)$$

где $C_p > 0$ постоянная, зависит от ν и p .

Доказательство: Пусть $C_{\sigma,m}(z)$ есть целая функция из класса $L_{p,q}^{(\sigma)}[D^{(p)}]$, определяемая равенством:

$$C_{\sigma,m}(z) = \frac{1}{a} \int_{C(\varphi)} H_\lambda(\xi) f(z + m \sigma^{-\frac{1}{p}} \xi) d\xi \quad (15)$$

и кроме того, пусть

$$g(z) = \sum_{m=1}^{k+\nu} (-1)^{m-1} C_{k+\nu}^m C_{\sigma,m}(z), \quad (16)$$

где a — постоянное число,

Заметим, что $g(z)$ есть также целая функция из класса $L_{p,q}^{(\sigma)}[D^{(p)}]$.

Из равенства (15) и (16) находим:

$$g(z) = \frac{1}{a} \int_{C(\varphi)} H_\lambda(\xi) \left\{ \sum_{m=1}^{k+\nu} (-1)^{m-1} C_{k+\nu}^m f(z + m \sigma^{-\frac{1}{p}} \xi) \right\} d\xi$$

Откуда в силу (5)

$$g(z) - f(z) = \frac{1}{a} \int_{C(\varphi)} H_\lambda(\xi) \left\{ \sum_{m=0}^{k+\nu} (-1)^{m-1} C_{k+\nu}^m f(z + m \sigma^{-\frac{1}{p}} \xi) \right\} d\xi.$$

Пусть $\xi = t e^{i\varphi}$. Тогда $\|f(re^{i\varphi}) - g(re^{i\varphi})\|_{p,q} =$

$$= \frac{1}{|a|} \left\{ \int_{-\infty}^a \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{C(\varphi)} H_\lambda(t e^{i\varphi}) \left\{ \sum_{m=0}^{k+\nu} (-1)^{m-1} C_{k+\nu}^m f[(r + m \sigma^{-\frac{1}{p}} t) e^{i\varphi}] dt \right\}^p dr \right)^{q/p} d\varphi \right\}^{1/q}.$$

Отсюда аналогично тому, как было доказано неравенство (8), получим

$$\begin{aligned} A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q} &\leq \\ &\leq \frac{A_p}{|a|} \int_{-\infty}^{-1} |t|^{-\lambda} \left\| \sum_{m=0}^{k+\nu} (-1)^{m-1} C_{k+\nu}^m f[(r + m \sigma^{-\frac{1}{p}} t) e^{i\varphi}] \right\|_{p,q} dt + \\ &+ \frac{B_p}{|a|} \int_{-1}^1 \left\| \sum_{m=0}^{k+\nu} (-1)^{m-1} C_{k+\nu}^m f[(r + m \sigma^{-\frac{1}{p}} t) e^{i\varphi}] \right\|_{p,q} dt + \\ &+ \frac{A_p}{|a|} \int_1^{\infty} |t|^{-\lambda} \left\| \sum_{m=0}^{k+\nu} (-1)^{m-1} C_{k+\nu}^m f[(r + m \sigma^{-\frac{1}{p}} t) e^{i\varphi}] \right\|_{p,q} dt \end{aligned}$$

В силу свойства 2) модуля гладкости

$$A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{A_p \sigma^{-\frac{\nu}{p}}}{|a|} \int_1^{\infty} |t|^{\nu-\lambda-1} \left\| \sum_{m=0}^k (-1)^{m-1} C_k^m f_r^{(\nu)}[(r + m \sigma^{-\frac{1}{p}} t) e^{i\varphi}] \right\|_{p,q} dt + \\ &+ \frac{B_p \sigma^{-\frac{\nu}{p}}}{|a|} \int_{-1}^1 |t|^{\nu-1} \left\| \sum_{m=0}^k (-1)^{m-1} C_k^m f_r^{(\nu)}[(r + m \sigma^{-\frac{1}{p}} t) e^{i\varphi}] \right\|_{p,q} dt + \\ &+ \frac{A_p \sigma^{-\frac{\nu}{p}}}{|a|} \int_{-\infty}^{-1} |t|^{\nu-\lambda-1} \left\| \sum_{m=0}^k (-1)^{m-1} C_k^m f_r^{(\nu)}[(r + m \sigma^{-\frac{1}{p}} t) e^{i\varphi}] \right\|_{p,q} dt \leq \\ &\leq C_p(\nu) \sigma^{-\frac{\nu}{p}} \left\{ \int_1^{\infty} |t|^{\nu-\lambda} \omega_\kappa(f_r^{(\nu)}; |t \sigma^{-\frac{1}{p}}|; D^{(p)})_{p,q} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 |t|^{\nu-1} \omega_\kappa(f_r^{(\nu)}; |t \sigma^{-\frac{1}{p}}|; D^{(p)})_{p,q} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{-1} |t|^{\nu-\lambda-1} \omega_\kappa(f_r^{(\nu)}; |t \sigma^{-\frac{1}{p}}|; D^{(p)})_{p,q} dt \right\}. \end{aligned}$$

В силу свойства 4) модуля гладкости имеем:

$$\begin{aligned} A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q} &\leq C_p(\nu) \sigma^{-\frac{\nu}{p}} \omega_\kappa(f_r^{(\nu)}; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)})_{p,q} \times \\ &\times \left\{ \int_1^{\infty} \frac{(|t|+1)^k}{|t|^{\lambda-\nu+1}} dt + \int_{-1}^1 |t|^\nu (|t|+1)^k dt + \int_{-\infty}^{-1} \frac{(|t|+1)^k}{|t|^{\lambda-\nu+1}} dt \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда простыми вычислениями получим:

$$A_\sigma(f; D^{(p)})_{p,q} \leq C_p(\nu) \sigma^{-\frac{\nu}{p}} \omega_\kappa(f_r^{(\nu)}; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)})_{p,q},$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джрбашян М. М., Тамадян А. М. О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области. Изв. АН СССР, серия матем. 20, 1956.
2. Ибрагимов И. И. Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Изд. АН Азерб. ССР, Баку, 1962.
3. Ибрагимов И. И., Гамидов А. А. О смешанных приближениях функций комплексного переменного в противоположащих углах посредством целых функций. ДАН СССР, 1966, № 4.
4. Келдыш М. В. О приближении голоморфных функций целыми функциями. ДАН СССР, 47, 1945.
5. Кобер. Approximation by integral functions in the complex domain, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 56, 1944, 7—31.

Азербайджанский политехнический институт

Поступило 21. XII 1967

Комплекс мұстәвинин верилмиш бұчағында сонлу тәртібли вә
сонлу дәрәчәли там функцијаларын экстремал хассәләри

ХҮЛАСӘ

$D^{(p)}$ обласынын сәрһәдди үзрә кәсилмәјән вә $D^{(p)}$ - да аналитик олуб,

$$\|f\|_{p,q} = \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right)^{q/p} d\varphi \right\}^{1/q} < \infty$$

шәртини өдәјән функцијалар синфини $L_{p,q}[D^{(p)}]$ илә ишарә едәк. Тәдгигатда $L_{p,q}[D^{(p)}]$ синфиндән олан функцијанын сонлу тәртібли вә сонлу дәрәчәли там функцијаларла ән јахшы јахынлашмасы илә онун кәсилмәзли модулу арасында әлагә јарадылмыш, ән јахшы јахынлашманын функцијанын дифференциал хассәсиндән асылы олараг сыфракетмә тәртиби мұәјјән едилмишдир.

УДК 517.512

Ф. Г. НАСИБОВ

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ПОРЯДКЕ НАИЛУЧШИХ
ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Введение. В работах [5] и [6] нами исследованы порядки наилучших полиномиальных приближений функции, имеющих дробную производную в смысле Римана—Лиувилля. Но, как оказалось, функции, имеющие производную в смысле Римана—Лиувилля (а также функции, имеющие производные в смысле Вейля—Никольского) составляют подкласс функций, представляемых в виде некоторого интегрального оператора. Поэтому было естественно исследовать порядки наилучших приближений именно таких функций. Этому вопросу посвящена работа [7], где с такой единой точки зрения рассматриваются функции и устанавливаются порядки наилучших их приближений (с помощью алгебраических многочленов, тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени) (см. также [8].)

В настоящей работе исследуются порядки наилучших приближений функций многих переменных, также представимых в виде определенных интегральных операторов типа свертки.

Наконец, отметим, что в работе [4] Н. П. Корнейчука найдено точное значение верхней грани L -норм 2π -периодических функций, модули непрерывности которых не превышают данного модуля непрерывности.

В конце настоящей работы указанный результат Н. П. Корнейчука применяется к оценке наилучшего приближения 2π -периодической функции от одного аргумента.

§ 2. Приближение посредством целых функций конечной степени. Через $W_{\sigma_1, \sigma_2}^{(p)}$ — обозначим пространство целых функций $f(z_1, z_2)$ конечной степени $\leq (\sigma_1, \sigma_2)$, для которых конечна норма ([2], стр. 38)

$$\|f\|_p^2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right\}^{1/p} < +\infty, (p \geq 1).$$

А через $L_p^{(2)}$ — пространство функций $\varphi(x, y)$, которые определены всюду на $(-\infty < x, y < +\infty)$ и $\|\varphi\|_p^{(2)} < +\infty$.

Положим:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1, \sigma_2}(x-t, y-\tau) \varphi(t, \tau) dt d\tau, \quad (1)$$

где $g_{\sigma_1, \sigma_2}(x, y) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}^{(1)}$, $\varphi(x, y) \in L_p^{(2)}$ ($1 \leq p \leq \infty$).

Очевидно имеем:

$$|F(x, y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^k \cdot |y|^m}{k! \cdot m!} \cdot \left| \frac{\partial^{k+m} g_{\sigma_1, \sigma_2}(-t; -\tau)}{\partial t^k \partial \tau^m} \right| \cdot |\varphi(t, \tau)| dt d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^k \cdot |y|^m}{k! \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_{\sigma_1, \sigma_2}^{(k, m)}(-t; -\tau)| \cdot |\varphi(t, \tau)| dt d\tau. \quad (2)$$

Используя известное неравенство между различными нормами целой функции (см. например, [2], стр. 156), нетрудно убедиться в том, что наша функция

$$g_{\sigma_1, \sigma_2}(x, y) \in L_q^{(2)} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

Поэтому, сначала применяя неравенство Гельдера, а затем С. Н. Бернштейна (см. [2], стр. 84), из (2) находим:

$$|F(x, y)| \leq \|\varphi\|_p^{(2)} \cdot \|g_{\sigma_1, \sigma_2}\|_q^{(2)} \cdot e^{\sigma_1|x| + \sigma_2|y|},$$

откуда и получается, что целая функция F имеет степень $\leq (\sigma_1, \sigma_2)$. Из обобщенного неравенства Минковского следует, что $F(x, y) \in L_p^{(2)}$.

Таким образом, $F(z, w) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}^{(p)}$.

Теорема 1. ([8]) Если функция $f(x_1, x_2)$ на $(-\infty < x_1, x_2 < +\infty)$ допускает представление

$$f(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1 - t_1; x_2 - t_2) \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (3)$$

где $\Phi \in L_1^{(2)}$, $\varphi(x_1, x_2) \in L_p^{(2)}$ ($p \geq 1$), то для наилучшего приближения $A_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)}$ -функции $f(x_1, x_2)$ с помощью целой функции конечной степени $\leq (\sigma_1, \sigma_2)$ справедливо неравенство:

$$A_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)}(f)_p \leq c(\kappa_1, \kappa_2) \cdot A_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)}(\Phi)_1 \cdot \left[\omega_{\kappa}^{(2)}\left(\varphi; \frac{1}{\sigma}, 0\right)_p + \omega_{\kappa_2}^{(2)}\left(\varphi; 0, \frac{1}{\sigma_2}\right)_p \right], \quad (4)$$

где $c(\kappa_1, \kappa_2)$ — постоянная, зависящая только от κ_1, κ_2 .

Доказательство. Пусть $g_{\sigma_1, \sigma_2}^0(t_1, t_2)$ — целая функция конечной степени $\leq (\sigma_1, \sigma_2)$ которая наименее уклоняется от Φ в метрике $L_1^{(2)}$. Положим:

$$F_{\sigma_1, \sigma_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1, \sigma_2}^0(x_1 - t_1; x_2 - t_2) \cdot \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (5)$$

Как было показано выше, функция $F_{\sigma_1, \sigma_2}(x_1, x_2) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}^{(p)}$ ($p \geq 1$). Из (3) и (5) имеем:

$$f(x_1, x_2) - F_{\sigma_1, \sigma_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1, t_2) \cdot [\Phi(x_1 - t_1; x_2 - t_2) - g_{\sigma_1, \sigma_2}^0(x_1 - t_1; x_2 - t_2)] dt_1 dt_2.$$

Отсюда, в силу обобщенного неравенства Минковского, находим:

$$A_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)}(f)_p \leq \|f - F_{\sigma_1, \sigma_2}\|_p^{(2)} \leq A_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)}(\Phi)_1 \cdot \|\varphi\|_p^{(2)}. \quad (6)$$

Теперь введем обозначения ([2], [9]):

$$g_{\sigma_1}(t_1) = \left(t_1^{-1} \cdot \sin \frac{\sigma_1 t_1}{2\kappa_1} \right)^{2\kappa_1}, \quad \gamma_{\sigma_1, \kappa_1} = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t_1) dt_1$$

$$G_{\sigma_1, \kappa_1}(t_1) = \sum_{\nu=1}^{\kappa_1} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \binom{\kappa_1}{\nu} g_{\sigma_1}\left(\frac{t_1}{\nu}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i=1, 2). \end{array} \right.$$

Наконец,

$$Q_{\sigma_1, \sigma_2}(\varphi; x_1, x_2) = \frac{1}{\gamma_{\sigma_1, \kappa_1} \cdot \gamma_{\sigma_2, \kappa_2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1 + t_1; x_2 + t_2) \cdot G_{\sigma_1, \kappa_1}(t_1) \times$$

$$\times G_{\sigma_2, \kappa_2}(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{1}{\gamma_{\sigma_1, \kappa_1} \cdot \gamma_{\sigma_2, \kappa_2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t_1) g_{\sigma_2}(t_2) \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{\kappa_1} \sum_{j=1}^{\kappa_2} (-1)^{i+j} \binom{\kappa_1}{i} \binom{\kappa_2}{j} \varphi(x_1 + it_1; x_2 + jt_2) \right] dt_1 dt_2.$$

Нетрудно понять, что $Q_{\sigma_1, \sigma_2}(\varphi; x_1, x_2) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}^{(p)}$ ($p \geq 1$).

Кроме того, имеем:

$$Q_{\sigma_1, \sigma_2}(\varphi; x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2) + \lambda_2(x_1, x_2),$$

где положено

$$\lambda_1(x_1, x_2) = \frac{1}{\gamma_{\sigma_1, \kappa_1} \cdot \gamma_{\sigma_2, \kappa_2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t_1) g_{\sigma_2}(t_2) \times$$

$$\times \left[\sum_{j=0}^{\kappa_2} (-1)^{j-1} \cdot \binom{\kappa_2}{j} \varphi(x_1; x_2 + jt_2) \right] dt_1 dt_2;$$

$$\lambda_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\gamma_{\sigma_1, \kappa_1} \gamma_{\sigma_2, \kappa_2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t_1) g_{\sigma_2}(t_2) \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{\kappa_1} \sum_{j=1}^{\kappa_2} (-1)^{i+j} \binom{\kappa_1}{i} \binom{\kappa_2}{j} \varphi(x_1 + it_1; x_2 + jt_2) - \sum_{j=1}^{\kappa_2} (-1)^{j-1} \binom{\kappa_2}{j} \varphi(x_1; x_2 + jt_2) \right] dt_1 dt_2.$$

Отсюда при $p \geq 1$

$$\|Q_{\sigma_1, \sigma_2}(\varphi; x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2)\|_p^{(2)} \leq \|\lambda_1\|_p^{(2)} + \|\lambda_2\|_p^{(2)}. \quad (7)$$

Оценим теперь $\|\lambda_1\|_p^{(2)}$ и $\|\lambda_2\|_p^{(2)}$ отдельно.

Применяя обобщенное неравенство Минковского, находим:

$$\|\lambda_1(x_1, x_2)\|_p^{(2)} \leq \frac{1}{\gamma_{\sigma_2, \kappa_2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_2}(t_2) \cdot \omega_{\kappa_2}^{(2)}(\varphi; 0, t_2)_p \cdot dt_2, \quad (8)$$

где:

$$\omega_{\kappa_2}^{(2)}(\varphi; 0, \delta)_p = \sup_{|t_2| \leq \delta} \left\| \sum_{j=0}^{\kappa_2} (-1)^j \binom{\kappa_2}{j} \varphi(x_1; x_2 + jt_2) \right\|_p^{(2)}.$$

частный модуль гладкости порядка κ_2 функции $\varphi(x_1; x_2)$. Далее, полагая

$$\alpha(x_1, x_2, t_2) = \frac{1}{\gamma_{\sigma_1, \kappa_1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t_1) \cdot \left[\sum_{i=1}^{\kappa_1} \sum_{j=1}^{\kappa_2} (-1)^{i+j} \binom{\kappa_1}{i} \binom{\kappa_2}{j} \varphi(x_1 + it_1; x_2 + jt_2) - \sum_{j=1}^{\kappa_2} (-1)^{j-1} \binom{\kappa_2}{j} \varphi(x_1; x_2 + jt_2) \right] dt_1$$

имеем:

$$\lambda_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\gamma_{\sigma_1, \kappa_2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_2}(t_2) \cdot \alpha(x_1, x_2, t_2) dt_2 \quad (10)$$

$$\|\lambda_2\|_p^{(2)} \leq \frac{1}{\gamma_{\sigma_2, \kappa_2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_2}(t_2) \|\alpha(x_1, x_2, t_2)\|_p^{(2)} dt_2. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \|\alpha(x_1; x_2, t_2)\|_p^{(2)} &\leq \frac{1}{\gamma_{\sigma_1, \kappa_1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t_1) \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\kappa_2} \sum_{i=0}^{\kappa_1} (-1)^{i+j-1} \binom{\kappa_1}{i} \binom{\kappa_2}{j} \cdot \varphi(x_1 + \right. \\ &\left. + it_1; x_2 + jt_2) \right|^p dx_1 dx_2 \Big\}^{1/p} dt_1 \leq \frac{2^{\kappa_2+1}}{\gamma_{\sigma_1, \kappa_1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t_1) \cdot \omega_{\kappa_1}^{(2)}(\varphi; t_1, 0)_p dt_1, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|\alpha(x_1, x_2, t_2)\|_p^{(2)} \leq \frac{2^{\kappa_2+1}}{\gamma_{\sigma_1, \kappa_1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t_1) \cdot \omega_{\kappa_1}^{(2)}(\varphi; t_1, 0)_p dt_1.$$

Поэтому из (11) имеем:

$$\|\lambda_2\|_p^{(2)} \leq \frac{2^{\kappa_2+1}}{\gamma_{\sigma_1, \kappa_1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t_1) \cdot \omega_{\kappa_1}^{(2)}(\varphi; t_1, 0)_p dt_1. \quad (12)$$

С другой стороны, как известно (см. [9], стр. 274)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_{\sigma_1, \kappa_1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t_1) \cdot \omega_{\kappa_1}^{(2)}(\varphi; t, 0)_p dt_1 &\leq c_{\kappa_1} \cdot \omega_{\kappa_1}^{(2)}\left(\varphi; \frac{1}{\sigma_1}, 0\right)_p; \\ \frac{1}{\gamma_{\sigma_2, \kappa_2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_2}(t_2) \cdot \omega_{\kappa_2}^{(2)}(\varphi; 0, t_2)_p dt_2 &\leq c_{\kappa_2} \cdot \omega_{\kappa_2}^{(2)}\left(\varphi; 0, \frac{1}{\sigma_2}\right)_p. \end{aligned}$$

Учитывая это в (8) и (12), а их в (7), находим:

$$\begin{aligned} \|Q_{\sigma_1, \sigma_2}(\varphi; x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2)\|_p^{(2)} &\leq c(\kappa_1, \kappa_2) \cdot \left[\omega_{\kappa_1}^{(2)}\left(\varphi; \frac{1}{\sigma_1}, 0\right)_p + \right. \\ &\left. + \omega_{\kappa_2}^{(2)}\left(\varphi; 0, \frac{1}{\sigma_2}\right)_p \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Наконец, полагая

$$W_{\sigma_1, \sigma_2}(f; x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1 - t_1; x_2 - t_2) \cdot Q_{\sigma_1, \sigma_2}(\varphi; t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (14)$$

из (3) и (14) имеем:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - W_{\sigma_1, \sigma_2}(f; x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1 - t_1; x_2 - t_2) \cdot [\varphi(t_1, t_2) - \\ &- Q_{\sigma_1, \sigma_2}(\varphi; t_1, t_2)] dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Применяя к функции $f(x_1, x_2) - W_{\sigma_1, \sigma_2}(f; x_1, x_2)$ неравенство (6), находим:

$$A_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)}(f)_p \leq A_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)}(\Phi)_1 \cdot \|\varphi(x_1, x_2) - Q_{\sigma_1, \sigma_2}(\varphi; x_1, x_2)\|_p^{(2)} \leq$$

$$\leq c(\kappa_1, \kappa_2) \cdot A_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)}(\Phi)_1 \cdot \left[\omega_{\kappa_1}^{(2)}\left(\varphi; \frac{1}{\sigma_1}, 0\right)_p + \omega_{\kappa_2}^{(2)}\left(\varphi; 0, \frac{1}{\sigma_2}\right)_p \right],$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что теорему 1 можно сформулировать в терминах нормы обобщенного пространства Лебега [3].

§ 3. Случай приближения непериодических функций. Пусть E есть топологическое произведение ограниченных множеств E_{κ} ($\kappa=1, \dots, n$) и $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — функция, определенная на E , $x_{\kappa} \in E_{\kappa}$ ($\kappa=1, n$), $p_1, p_2, \dots, p_n$ — некоторые числа не меньше единицы, $p_i \geq 1$. Обобщенным пространством Лебега $L_p^{(n)}(E)$ ($\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$) называется [3] пространство функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p^{(n)} = \left\{ \int_{E_n} \left[\int_{E_{n-1}} \left(\dots \left(\int_{E_1} |f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)|^{p_1} dx_1, \right)^{p_2/p_1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \dots \right)^{p_{n-1}/p_{n-2}} dx_{n-1} \right]^{1/p_n} dx_n \right\}^{1/p_n} < +\infty.$$

Величину

$$E_{\infty, \dots, m_1, \dots, \infty} [f; L_p^{(n)}(E)] = \inf_{(P_m)} \|f(x) - P_{m_1}(x_1; [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n])\|_p^{(n)}$$

назовем наилучшим приближением функции $f \in L_p^{(n)}(E)$ по переменному x_i ($i=1, 2, \dots, n$), посредством „многочленов“ вида:

$$P_{m_1}(x_i; [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]) = \sum_{k=0}^{m_1} a_k(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot x_i^k, \quad (15)$$

где a_k ($k=0, 1, \dots, m_1$) — непрерывные от своих аргументов функции.

В случаях $n=2, p_1=p_2=2$ и $p_1=p_2=\infty$ величины $E_{m_1, \infty}$ и E_{∞, m_1} впервые рассмотрены С. Н. Бернштейном [1], а затем другими авторами, из которых можно указать на работы М. Ф. Тимана [10].

Наконец, будем говорить, что $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ обладает свойством (а) по x_{κ} ($\kappa=1, n$), если все функции

$$a_s(x_1, \dots, x_{\kappa-1}, x_{\kappa+1}, \dots, x_n) = \int_{E_{\kappa}} t^s \cdot \varphi(x_1, \dots, x_{\kappa-1}, t, x_{\kappa+1}, \dots, x_n) dt$$

непрерывны от $x_1, \dots, x_{\kappa-1}, x_{\kappa+1}, \dots, x_n$ ($s=0, 1, \dots, m_1$).

Теорема 2. Пусть $\psi(t)$ определена на отрезке $[-1; 1]$ и принадлежит там к L_1 , $\varphi(x) \in L_p^{(n)}(E)$ и удовлетворяет условию (а) по переменному x_i ($i=1, \dots, n$) и $E \equiv E(-1 \leq x_i \leq 1; i=1, 2, \dots, n)$.

Тогда для наилучшего приближения $E_{\infty, \dots, m_1, \dots, \infty} [f; L_p^{(n)}(E)]$ функции

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_{-1}^1 \psi\left(\frac{x_i - t}{2}\right) \cdot \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt \quad (16)$$

справедливо неравенство:

$$E_{\infty, \dots, m_1, \dots, \infty} [f; L_p^{(n)}(E)] \leq 2 \cdot \|\varphi\|_p^{(n)} \cdot E_{m_1}(\psi)_1 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Доказательство. Допустим, что $\varphi(M)=0$, если $M \notin E$ и $P_{m_1}(x)$ алгебраический многочлен степени $\leq m_1$, который наименее уклоняется от $\psi(t)$ в $L_1(-1; 1)$.

Положим:

$$\begin{aligned} U_{m_1}(x_i; [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]) &= \int_{-1}^1 P_{m_1}\left(\frac{x_i - t}{2}\right) \times \\ &\times \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, что U_{m_1} — алгебраический многочлен типа (15). Из равенств (16) и (18) получаем:

$$|f(x) - U_{m_1}| \leq \int_{-2}^2 |P_{m_1} \left(\frac{t}{2} \right) - \psi \left(\frac{t}{2} \right)| \times \\ \times |\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}; x_i - t; x_{i+1}, \dots, x_n)| dt.$$

Отсюда, применяя по x_i обобщенное неравенство Минковского, имеем:

$$\|f(x) - U_{m_1}\|_{\frac{n}{p}}^{(n)} \leq 2 \cdot \|\varphi\|_{\frac{n}{p}}^{(n)} \cdot E_{m_1}(\psi)_1.$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Полагая в этой теореме:

$$\psi(x) = [a(x-c) + b \cdot |x-c| \cdot |x-c|^s], (s > -2, a$$

и b —любые вещественные числа),

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{m_1} A_k \cdot |x-c_k|^s, (-1 < c_1 < c_2 < \dots < c_{m_1} < 1; s > -1) \text{ и т.д.}$$

можно получить ряд следствий. Например, в двухмерном случае имеет место

Следствие. Если $f(x, y)$ имеет частную производную s -го порядка по x : $R_x^{(s)}(f) \equiv \varphi_1(x, y)$, частную производную r -го порядка по y : $R_y^{(r)}(f) \equiv \varphi_1(x, y)$ причем $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию (а) по x , $\varphi_1(x, y)$ —по y и $\varphi(x, y) \in L_p^{(2)}(E)$, $\varphi_1(x, y) \in L_p^{(2)}$, тогда:

1. $E_{n, \infty}[f; L_p^{(2)}(E)] \leq \tilde{M}_s \cdot n^{-s} \cdot \|\varphi\|_{\frac{n}{p}}^{(2)}, s > 0$ —любое.
2. $E_{\infty, m}[f; L_p^{(2)}(E)] \leq \tilde{M}_r \cdot m^{-r} \cdot \|\varphi_1\|_{\frac{n}{p}}^{(2)}, r > 0$ —любое.

Далее можно получить оценки через частные модули гладкости функций φ и φ_1 .

Последние оценки улучшают соответствующие результаты из моей работы [6].

§ 4. Случай приближения периодических функций. I. В целях полноты приведем еще следующий результат [8].

Теорема 3. Пусть $\Phi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ являются 2π -периодическими функциями по каждому из переменных кроме того, $\Phi(x, y) \in L_{p_1}^{(2)}$, $\varphi(x, y) \in L_{p_1}^{(2)}$ с некоторыми p, p_1 ($1 \leq p, p_1 \leq \infty$).

Тогда для наилучшего приближения $E_{m, n}^*(f)_p$ функции

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x-t; y-\tau) \cdot \varphi(t, \tau) dt d\tau \quad (19)$$

посредством тригонометрических полиномов порядка $\leq (m, n)$ справедливо неравенство:

$$E_{m, n}^*(f)_p \leq c(\kappa_1, \kappa_2) \cdot (4\pi^2)^{\frac{1-\frac{1}{p_1}}{p_1}} E_{m, n}^*(\Phi)_{p_1} \times \\ \times \left[\omega_{\kappa_1}^{(2)} \left(\varphi; \frac{1}{m}, 0 \right)_p + \omega_{\kappa_2}^{(2)} \left(\varphi; 0, \frac{1}{n} \right)_p \right], \quad (20)$$

где

$$\|\lambda\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\lambda(x, y)|^p dx dy \right)^{1/p}.$$

Для доказательства теоремы 3 строится тригонометрический полином

$$U_{m, n}(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{m, n}^0(x-t; y-\tau) \varphi(t, \tau) dt d\tau. \quad (21)$$

где $T_{m, n}^0(x, y)$ —тригонометрический полином, наименее уклоняющийся от $\Phi(x, y)$ в метрике $L_{p_1}^{(2)}$. Из (21) и (19) получается:

$$\|f(x, y) - U_{m, n}(x, y)\|_p^{(2)} \leq E_{m, n}^*(\Phi)_{p_1} \cdot \|\varphi\|_p^{(2)} \cdot (4\pi^2)^{1-\frac{1}{p_1}}.$$

Далее, повторяя все рассуждение, приведенное в книге [9] А. Ф. Тимана (стр. 288—292), нетрудно завершить доказательство теоремы.

Замечание. Теорему 3 также можно сформулировать в терминах нормы обобщенного пространства Лебега [3].

II. В конце хочу отметить, что, пользуясь упомянутой в §1 теоремой Н. П. Корнейчука [4], можно получить некоторые оценки наилучших приближений 2π -периодических функций.

Пусть $f(t)$, $K(t)$ — 2π -периодические функции, $f \in L_p$ ($p \geq 1$) $K \in L_1$,

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot K(x-t) dt. \quad (22)$$

Тогда нетрудно получить оценку (см. [7], неравенство (4)):

$$E_n^*(F)_p \leq \frac{1}{\pi} \cdot E_n^*(K)_1 \cdot \|f\|_p \left(\|f\|_p^p = \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right). \quad (23)$$

Далее, предположим что $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$, $\omega(t)$ —заданный выпуклый вверх модуль непрерывности и $\omega(f; t) \leq \omega(t)$, Совокупность функций $f(t) \in L$ с такими условиями обозначим через $\Lambda_p^0(\omega)$. Тогда из (23) получим:

$$\sup_{f \in \Lambda_p^0(\omega)} E_n^*(F)_p \leq \frac{1}{\pi} \cdot E_n^*(K)_1 \cdot \sup_{f \in \Lambda_p^0(\omega)} \|f\|_p. \quad (24)$$

Отсюда при $p=1$, пользуясь теоремой Н. П. Корнейчука [4], утверждающей, что

$$\sup_{f \in \Lambda_1^0(\omega)} \|f\|_1 = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}}{2k+1}, b_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2t) \cdot \sin(2k+1)t dt,$$

получаем следующее

$$\sup_{f \in \Lambda_1^0(\omega)} E_n^*(F)_1 \leq \frac{4}{\pi} \cdot E_n^*(K)_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}}{2k+1}. \quad (25)$$

В частности, полагая в последнем $\omega(t) = \frac{\pi}{4} t$, получаем следующую оценку:

$$\sup_{f \in \Lambda_1^0(\frac{\pi}{4} t)} E_n^*(F)_1 \leq \frac{4}{\pi} \cdot E_n^*(K)_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}. \quad (26)$$

наконец при $K(t) = K_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(st - \frac{\delta\pi}{2}\right)}{s^r}$ из (26) находим:

$$\sup_{f \in \Lambda_1^0(\frac{\pi}{4} t)} E_n^*(F; K=K_0)_1 \leq \frac{4M}{\pi \cdot n^r} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \quad (27)$$

1. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений, т. 2, 1954.
2. Ибрагимов И. И.—Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Баку, 1962.
3. Ибрагимов И. И. и Джафаров А. С. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, № 6, 1962.
4. Корнейчук Н. П. „Математические заметки“, т. 2, вып. 6, 1967 стр. 569—576.
5. Насибов Ф. Г. О порядке наилучших приближений функций, имеющих дробную производную в смысле Римана—Лиувилля. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, № 3, 1962, стр. 51—57.
6. Насибов Ф. Г. О порядке наилучших приближений функций многих переменных, имеющих дробную производную. Исследования по соврем. проблемам конструктивной теории функций. Изд. АН Азерб. ССР, Баку, 1965, стр. 73—79.
7. Насибов Ф. Г. О порядке наилучших приближений некоторых классов функций. „Изв. вузов СССР, Математика“, № 3, 1969, стр. 35—41.
8. Насибов Ф. Г. Некоторые прямые теоремы для функций многих переменных. Аннотации докладов научной конференции по итогам научно-исследовательских работ, ч. 2. Баку, АЗИНЕФТЕХИМ им. Азизбекова, 1968, стр. 51—52.
9. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.
10. Тиман М. Ф. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М., 1961.

Азинефтехим

Поступило 29. V 1969

Ф. Г. Насибов

Чохдэјишэнли функцијаларын эн јахшы јахынлашма тэртиби һаггында бэ'зи нэтичэлэр

ХУЛАСЭ

Мәгаләдә мөәјјән интеграл шәклиндә көстәрилән чохдэјишэнли функцијаларын јахынлашма тэртиби һаггында үмуми теоремләр исбат олунмушдур. Әввәлчә $W_{\sigma_1, \sigma_2}^{(p)}$ ($p \geq 1$) синфиндән олан там функцијалар васитәсилә эн јахшы јахынлашма тэртиби өјрәнилмиш вә бу барәдә ашағыдакы теорем исбат едилмишдир.

1-чи теорем. Әкәр $f(x_1, x_2)$ функцијасы $(-\infty < x_1, x_2 < +\infty)$ областында

$$f(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1 - t_1; x_2 - t_2) \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

интегралы шәклиндә көстәрилә биләрсә, бурада

$\Phi(x_1, x_2) \in L_1^{(2)}(-\infty, \infty)$, $\varphi(x, y) \in L_p^{(2)}$ ($p \geq 1$), онда $f(x_1, x_2)$ функцијасынын $L_p^{(2)}(-\infty, \infty)$ мә'нада дәрәчәси, (σ_1, σ_2) —дән бөјүк олмајан там функцијаларла эн јахшы јахынлашмасы $A_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)}(f)_p$ үчүн ашағыдакы бәрабәрсизлик доғрудур:

$$A_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)}(f)_p \leq c(\kappa_1, \kappa_2) \cdot A_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)}(\Phi)_1 \cdot \left[\omega_{\kappa_1}^{(2)}\left(\varphi; \frac{1}{\sigma_1}, 0\right)_p + \omega_{\kappa_2}^{(2)}\left(\varphi; 0, \frac{1}{\sigma_2}\right)_p \right].$$

Бундан сонра мәһдуд областда тә'јин олунмуш функцијанын „чәбри чохдәдилләрлә“ јахынлашмасына бахылмышдыр. Ахырынчы бөлмә исә дәври функцијалара һәср олунмушдур. Әввәлчә һәр бир дэјишәнә көрә 2π периодлу олан функцијалар үчүн 1-чи теоремин анализга исбат едилмиш, сонра исә бирдэјишәнли 2π периодлу функцијаларын јахынлашма тәртибинә бахылмышдыр. Мүәллифин нэтичәләри [7] Н. П. Корнейчукун L_1 фазасында исбат етдији бир теоремлә [4] әлағәләндирилмишдир.

К. Р. АЛЛАХВЕРДИЕВ, В. Б. АНТОНОВ, Р. Х. НАНИ, Э. Ю. САЛАЕВ

ИЗМЕРЕНИЕ ДИФФУЗИИ ДЫРОК В МОНОКРИСТАЛЛАХ CdIn_2S_4

Соединение CdIn_2S_4 принадлежит к обширному классу тройных широкозонных полупроводников с общей формулой $\text{A}^{\text{II}}\text{B}_2^{\text{III}}\text{C}_4^{\text{VI}}$. Эти соединения, обладающие алмазоподобной кристаллической структурой, в последние годы привлекли внимание исследователей ввиду высокой чувствительности кристаллов к различного рода излучениям. Кроме этого, они проявляют ряд других интересных свойств, делающих их перспективными материалами для различных областей полупроводниковой электроники. CdIn_2S_4 являясь одним из интересных представителей этого класса полупроводников, обладает весьма высокой фоточувствительностью в видимой и ближней инфракрасной областях спектра ($E = 2,3 \text{ эВ}$) [1], поддается легированию позволяющему в широких пределах управлять его удельным сопротивлением, и рядом других свойств. Следует отметить также, что монокристаллы этого соединения могут быть выращены весьма совершенными, обладающими высокой оптической однородностью. Существенное значение для исследования фотоэлектрических свойств имеет изучение параметров неосновных носителей тока, которые, в частности, определяют работу приборов, основанных на инжекции неосновных носителей, таких как фоторезисторы, фотодиоды и т. д. Одним из таких параметров является длина диффузионного смещения неосновных носителей тока (l_p). В настоящей работе проведены измерения длины диффузионного смещения дырок в монокристаллах n -типа с удельным сопротивлением $2,5 \cdot 10^3 \text{ ом} \cdot \text{см}$.

Соединение CdIn_2S_4 синтезировалось непосредственным сплавлением компонентов в предварительно обезгаженных вакуированных кварцевых ампулах. Монокристаллы были получены методом медленного охлаждения расплава с температурным градиентом. Проведенные рентгенографические исследования свидетельствуют о достаточном совершенстве выращенных кристаллов. Из монокристаллов вырезались образцы в виде пластинок размерами $8,0 \times 0,5 \times 3,0 \text{ мм}$, которые шлифовались и полировались алмазной пастой.

Существуют различные методы определения параметров неосновных носителей тока, которые можно разделить на стационарные—метод подвижного светового зонда, измерение ФМЭ, кинетические—метод тауметра, бегущего светового зонда и т. д. Кроме того, эти методы можно классифицировать по способу инжекции неосновных носителей—фотометоды, импульсные методы, по физическим процессам, протекающим в полупроводнике при введении неосновных носителей тока—диффузии, модуляции проводимости, дрейфа и т. д.

Учитывая, что монокристаллы CdIn_2S_4 обладают высокой чувствительностью к свету, в настоящей работе был использован фотоэлектрический метод измерения длины диффузионного смещения неосновных носителей тока. Сущность этого метода заключается в измерении пространственного распределения концентрации неравновесных носителей тока, возбуждаемых светом [2—3]. Относительной мерой концентрации n_ϕ может служить величина фотоэдс U_ϕ , которая возникает на контакте металлической иглы (коллектора) с поверхностью полупроводника относительно его неосвещенной части. Описанная методика нашла широкое распространение для определения величины длины диффузионного смещения дырок в таких материалах, как германий и кремний, в которых l_D сравнительно велико и легко образуются запирающие слои на прижимных контактах с металлическим зондом [4]. Проведенные исследования показали, однако, что указанная выше методика применима не только для германия и кремния, но и для монокристаллов CdIn_2S_4 , в которых величина l_D того же порядка. При этом нами был подобран выпрямляющий контакт поверхности кристалла с металлическим зондом. Наилучший результат дал зонд из электролитически заостренной вольфрамовой проволоки.

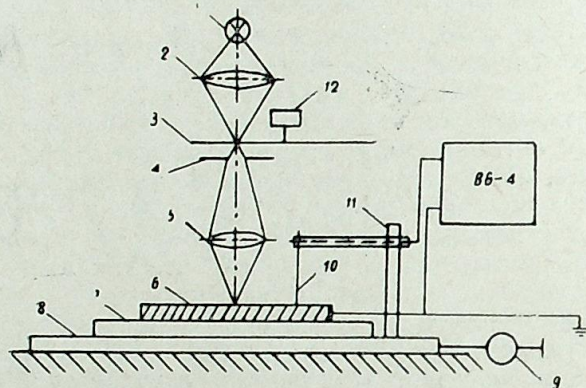


Рис. 1. 1—осветительная лампа; 2—конденсорная линза; 3—модулятор; 4—щель диафрагмы; 5—объектив «Юпитер-9»; 6—образец; 7—держатель образца; 8—подвижной стол; 9—механизм подачи и индикатор перемещения стола; 10—вольфрамовый зонд; 11—держатель зонда; 12—мотор модулятора.

Как показано в работах [5—6], одним из источников погрешностей при определении l_D фотоэлектрическим методом может явиться недостаточный учет геометрических критериев применимости одномерного либо аксиально-симметричного приближения при решении задач диффузии и рекомбинации неосновных носителей тока [6]:

$$j_p = l p \mu_p - l D_p \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = - \frac{\Delta p}{\tau_p} + \frac{1}{l} \operatorname{div} j_p + g \quad (2)$$

где j_p — плотность тока,
 l — заряд электрона,
 p — концентрация дырок,
 μ_p — подвижность дырок,
 D_p — коэффициент диффузии дырок,
 Δp — избыточная концентрация дырок,

τ_p — время жизни инжектированных носителей,
 g — скорость генерации носителей светом.

Выражения (1) и (2) написаны для случая материала n -типа проводимости.

На основании предварительных оценок и подбора геометрических размеров образца [6] в нашем случае было использовано одномерное приближение решения задач диффузии и рекомбинации неосновных носителей тока.

Решение уравнений (1) и (2) в одномерном приближении для полупроводника n -типа проводимости приводит к следующему выражению:

$$p_\phi = p_0 l e^{-r/l_D} \quad (3)$$

где:

$$p_\phi \sim U_\phi$$

Таким образом, откладывая результаты измерений на графике в виде функции $\ln U_\phi = f(r)$, где r — расстояние от светового зонда до коллектора, получим прямую, котангенс угла наклона которой пропорционален длине диффузионного смещения неосновных носителей тока.

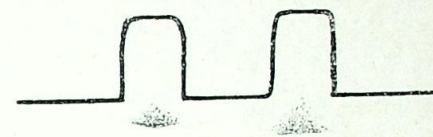


Рис. 2.

Схема установки, на которой проводились измерения длины диффузионного смещения дырок в монокристаллах n -типа CdIn_2S_4 , показана на рис. 1.

Поверхность образца освещалась пучком света в форме узкой прямоугольной полосы, перпендикулярной длине образца по всей его ширине. В качестве осветителя применялась лампа Си-6—100 с ленточным телом накала.

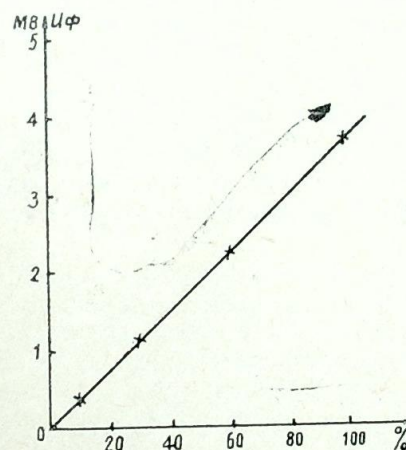


Рис. 3.

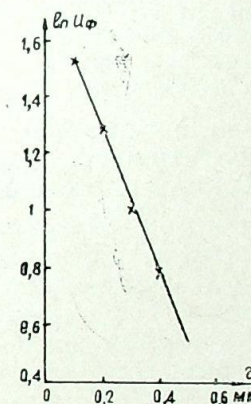


Рис. 4.

Механизм подачи стола позволял автоматически перемещать образец относительно неподвижного светового зонда на расстояния с интервалами кратными 100 μ . В качестве регистрирующего прибора для измерения U_ϕ применялся микровольтметр марки ВБ-4, а форма импульсов просматривалась на осциллографе С1-19. Свет лампы модулировался с частотой 30 гц . Частота и длительность импульсов света выбиралась с учетом того, что концентрация инжектированных носителей должна успеть достичь своего установившегося значения за время освещения и упасть до нуля в интервале между двумя импульсами. Это условие выполняется при длительности импульса света и периода затемнения, значительно превышающих время жизни неосновных носителей тока в

образце. Форма импульсов фатоэдс, наблюдаемых на экране осциллографа, показана на рис. 2.

На рис. 3 показана люксвольтовая характеристика коллекторного контакта.

Величина длины диффузионного смещения дырок в монокристаллах n -типа CdIn_2S_4 , определенная по котангенсу угла наклона зависимости $\ln U\phi(r)$ для нескольких образцов, оказалась равной 0,4 мм. График зависимости $\ln U\phi(r)$ для одного из образцов приведен на рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдулаев, Г. Б., Антонов, В. Б., Гусейнов, Д. Т., Нани Р. Х. и Салаев Э. Ю. „Физ. и техн. полупроводников“, т. 2, вып. 7, 1048—1050, 1968.
2. Loucher F. S. Phys Review, 78, 816, 1950.
3. Loucher F. S. Phys Review, 81, 475, 1951.
4. Практикум по полупроводниковым приборам под ред. К. В. Шалимовой. Высшая школа, М., 1968.
5. Рашба Е. И., Толпыго К. Б. „Укр. физ.“, т. I вып. 1, 29, 1956.
6. Глинчук К. Д., Миселюк О. Г. „Укр. физ.“, т. I, вып. 1, 54—58, 1956.
7. Рывкин С. М. Фотоэлектрические явления в полупроводниках. М., 1968.

Институт физики

Поступило 30. V 1969

К. Р. Аллаhverдиев, В. Б. Антонов, Р. Н. Нани, Е. Ж. Салаев

CdZn_2S_4 монокристалында дешиклэрин диффузијасынын өлчүлмәси

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә n типли CdZn_2S_4 монокристалында гејри-әсас јүклэрин диффузија јолунун сүрүшмәсинин тәјини вә һәмин монокристалын алынма үсулу верилмишдир. Алынмыш кристаллардан өлчүлэри $8 \times 0,5 \times 3$ мм олан нүмунэләр һазырланмышдыр. Ренткен анализи монокристалын тәкмилијини сүбут едир. CdZn_2S_4 бирләшмәсинин өзү вә монокристалы ишыға чох һәссас олдуғундан, гејри-әсас јүклэрин диффузија јолунун (l_D) сүрүшмәси фотоэлектрик үсулу илә $\ln I_{\phi}$ фото (ЕҺГ)-ин $\ln r$ -дән (зондлар арасындакы мәсафә) асылылығы әјрисиндән тәјин олунмушдур. Мүәјјән едилмишдир ки, диффузија јолунун сүрүшмәси 0,4 мм-ә бәрәбәрдир.

С. А. АБАСОВ, М. А. БАГИРОВ, Т. И. ГУСЕЙНОВ, У. А. КАБУЛОВ

ВЛИЯНИЕ ОЗОНА НА ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИСТИРОЛЬНОЙ ПЛЕНКИ

В статье изложены результаты исследования влияния озона на временную зависимость прочности полистирольной (ПС) пленки.

На процесс электрического строения полимерной изоляции наряду с другими электрофизическими факторами (электрическое поле, температура и т. д.) оказывает влияние и озон. Известно, что возникновение озона связано с электрическими разрядами в воздушных прослойках и порах полимерной изоляции и оказывает значительное влияние на изменение свойств полимера.

В связи с этим изучение влияния озона на полимерные пленки, используемые в электро-и радиотехнике, представляет определенный интерес.

В литературе имеются отдельные работы, посвященные влиянию озона на механические свойства и механизм разрушения ряда полимерных материалов и резин. Результаты этих работ в некоторой степени систематизированы в монографии [1].

Целью настоящей работы является исследование влияния озона на механические свойства полистирольной пленки.

Методика эксперимента

Объектом нашего исследования была промышленная полистирольная (ПС) пленка толщиной 20—25 м. Воздействие озона на ПС пленку производилось в специальном устройстве, которое схематически представлено на рис. 1. Чистый кислород из баллона (1) с постоянной скоростью (3 л/ч) поступает в озонатор (2), где под действием электрических разрядов происходит интенсивное образование озона. Далее поток озона через кран (3) поступает в эксикатор (4), в котором в специальной ячейке помещается ПС пленка (5). Конструкция ячейки оставалась прежней и была описана нами ранее [2,3].

Временная зависимость прочности исходной и подвергнувшихся действию озона ПС пленок в течение различного периода времени воздействие озона снималась на разрывной машине, обеспечивающей поддержание постоянства разрывного напряжения с момента нагружения до разрыва образца при одноосном растяжении [4].

Результаты эксперимента и их обсуждение

На рис. 2 показаны временные зависимости прочности в координатах $\lg \tau$ (где τ — долговечность материала, т. е. время прошедшее от момента нагружения образца до его разрыва) от механического напря-

жения σ , исходной и подвергнутой действию озона ПС пленок в течение 2 ч, 30 ч и 50 ч. Аналогичные зависимости были получены также для ПС пленок озонированных в течение 4 ч, 6 ч и 10 ч. Временные зависимости прочности во всех случаях снимали при постоянной температуре 20°C.

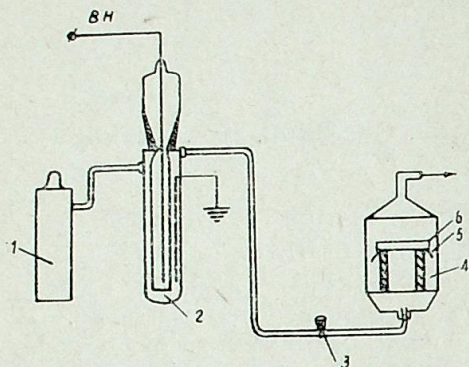


Рис. 1. Установка для воздействия озона на полимерную пленку. 1—баллон с кислородом; 2—озонатор; 3—кран; 4—эксикатор; 5—полимерная пленка; 6—стеклянная пластинка.

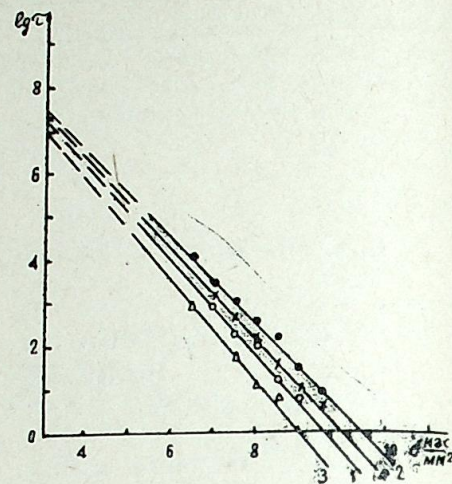


Рис. 2. Временные зависимости прочности в координатах $\lg \tau$ от σ исходной и озонированных ПС пленок в течение различного времени
1—исходная пленка; 2— $t_{\text{озон.}} = 2$ ч;
3— $t_{\text{озон.}} = 30$ ч; 4— $t_{\text{озон.}} = 50$ ч.

Каждая точка на приведенном графике (рис. 2) получена при усреднении 5—6 повторных опытов. Видно, что во всей исследованной области долговечность τ как для исходной, так и для подвергнувшихся действию озона ПС пленок экспоненциально возрастает с уменьшением разрывающего механического напряжения σ . При постоянной температуре наблюдается линейная связь между $\lg \tau$ и разрывающим напряжением σ , т. е. прочностные свойства как исходной, так и озонированных ПС пленок при $T = \text{const}$ хорошо описываются известным уравнением:

$$\tau = Ae^{-\alpha \sigma} \quad (1)$$

где коэффициенты A и α зависят от свойства исследуемого материала и температуры испытания.

Из рис. 2 нетрудно видеть, что все прямые в координатах $\lg \tau = f(\sigma)$ при экстраполяции пересекаются в одной общей точке на оси ординат. Как это видно, значения $\lg A$ не зависят от времени озонирования ($t_{\text{озон.}}$). Однако с изменением $t_{\text{озон.}}$ наклон прямых изменяется, т. е. изменяется коэффициент α . Иными словами, в зависимости от времени озонирования ($t_{\text{озон.}}$) коэффициент A не меняется, а изменяется α . Известно, что изменение коэффициента α в уравнении (1) связано с изменениями структуры полимерного материала [5].

Следовательно, изучение изменений временной зависимости прочности ПС пленки, подвергнутой действию озона, показывает, что при озонировании ПС пленки происходят структурные изменения, приводящие к изменениям ее прочностных свойств.

По данным рис. 2 построены зависимости механической прочности (при $\tau = 1$ или $\lg \tau = 0$) и логарифм долговечности при ($\sigma = 8 \text{ кгс/мм}^2$) от времени озонирования. Эти зависимости соответственно представлены на рис. 3 и 4, из которых видно, что в зависимости от $t_{\text{озон.}}$ вначале механическая прочность σ (рис. 3) и $\lg \tau$ (рис. 4) возрастает до $t_{\text{озон.}} = 2$ ч, а затем происходит уменьшение σ и $\lg \tau$ до $t_{\text{озон.}} = 30$ ч включительно,

после чего вновь наблюдается рост прочности и долговечности при $t_{\text{озон.}} = 50$ ч.

Такой ход изменения прочностных свойств озонированной ПС пленки от времени озонирования, по-видимому, можно объяснить, как уже было отмечено выше, структурными изменениями, происходящими в полимере. Начальный рост прочности или долговечности ПС пленки

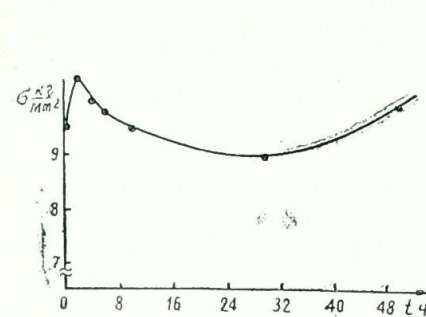


Рис. 3. Зависимость механической прочности σ (при $\lg \tau = 0$) ПС пленки от времени озонирования
 $t_{\text{исп.}} = 22^\circ \text{C}$.

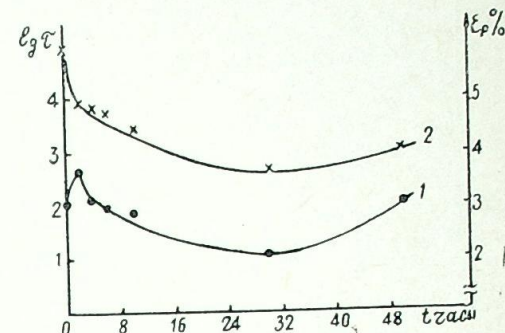


Рис. 4. Зависимость логарифма долговечности $\lg \tau$ (при $\sigma = 8 \text{ кгс/мм}^2$) и относительного удлинения $\epsilon\%$ (при $\sigma = 7 \text{ кгс/мм}^2$) ПС пленки от времени озонирования.
1—логарифм долговечности; 2—относительное удлинение. $t_{\text{исп.}} = 20^\circ \text{C}$.

при ее озонировании можно связать прежде всего с озонным сшиванием, происходящим, очевидно, через кислородные мостики, т. е. через эфирные $\text{C}-\text{O}-\text{C}$ группы. На сшивание в ПС пленке указывает еще и образование геля при ее озонировании.

Дальнейшее уменьшение прочностных свойств пленки после 2 ч озонирования, по-видимому, связано как с процессом деструкции полимерных цепей, так и с охрупчиванием пленки. Охрупчивание ПС пленки под действием озона подтверждается также уменьшением разрывного

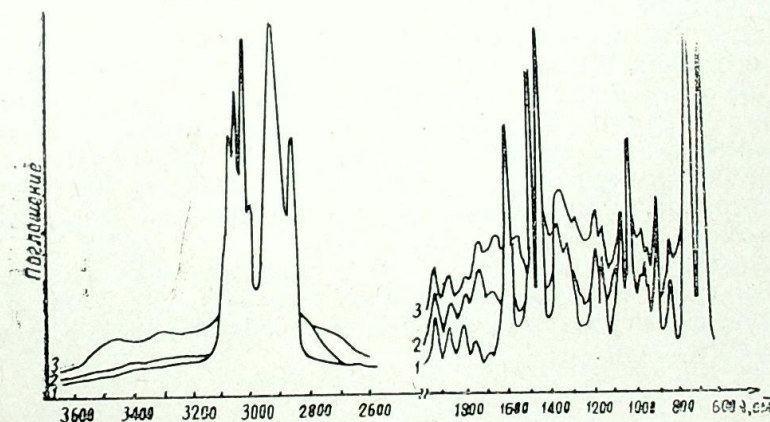


Рис. 5. Инфракрасные спектры поглощения исходной, подвергнутой действию озона и электрических разрядов в воздухе ПС пленок;
1—исходная пленка; 2—пленка, подвергнутая действию озона;
3—пленка, подвергнутая действию электрических разрядов.

относительного удлинения в зависимости от длительности озонирования под действием постоянного механического напряжения. Действительно, как видно из рис. 4, со временем озонирования относительное разрыв-

Следует отметить, что процессы сшивания и деструкции полимерных цепей, а также окислительные процессы, происходящие при озонировании ПС пленки, подтверждаются

Рис. 6 Зависимость оптической плотности аналогичных полосам поглощения, соответствующим полосам 1720 см⁻¹ (С=О группы) от времени озонирования. Старения ПС пленки в воздухе под действием

На рис. 6 приведена зависимость окисления по полосе карбонила 1720 см^{-1} ($\text{C}=\text{O}$ группы) от времени озонирования. Видно, что окисление при озонировании практически довольно быстро достигает насыщения. Образования $\text{C}=\text{O}$ групп, кроме окисления, указывает еще на то, что при озонировании ПС пленки происходит и процесс деструкции, так как эти группы образуются после деструкции полимерных цепей.

Изучение диэлектрических свойств ПС пленки [6] также показало, что при воздействии озона на ПС пленку, во-первых, происходит изменение максимума диэлектрических свойств ($\text{tg } \delta_{\text{max}}$)—дипольно-эластической потери (ДЭП) со временем озонирования, и это изменение носит примерно такой характер, как изменения прочностных свойств и, во-вторых, температура максимума ДЭП вначале, при коротком времени озонирования, резко растет, после чего сдвиг $\text{tg } \delta_{\text{max}}$ ДЭП в сторону высоких температур прекращается.

Выводы

- 60

ЛИТЕРАТУРА

- Поступило 3. VII 1969.

ХҮЛАСЭ

Мүүжнөн едилмишдир ки, озонун тэ'сиретмэ мүддэтиндэн асылы олараг ПС плјонкасынын мөһкәмлији вэ јашама мүддэти эввэлчэ артыр, сонра азалыр, даһа сонра исэ онларын јаваш артмалары мүшәһидэ олунур. Бүтүн бунлар көстәрир ки, ПС плјонкасына озонун тэ'сири заманы онда полимер зәнчирләрин тикилмәси вэ деструксијасы, һәм-чинин оксидләшмэ процесләри баш верир. Озонун тэ'сиретмэ мүддәтиндән асылы олараг ПС плјонкасынын гырылмаја ујғун узанмасынын азалмасы плјонканын көврәкләшдијини көстәрир.

М. А. ТАЛИБИ, М. М. АЛИЕВ

О РЕАКТИВНЫХ СВОЙСТВАХ И ПРИРОДЕ ЗАПОРНОГО СЛОЯ МЕДНОЗАКИСНЫХ ВЫПРЯМИТЕЛЕЙ

Механизм образования запиорного слоя и электрические свойства меднозакисных (Cu_2O) выпрямителей исследованы в [1—4].

Согласно [5], в Cu_2O -выпрямителях осуществляются условия, близкие к предположениям теории Мотта.

По [4—6], в Cu_2O -выпрямителях запиорный слой типа Шоттки.

Наличие n -слоя (наряду с p - Cu_2O) в Cu_2O -выпрямителях показано в [1]; полагается [7], что n - Cu_2O образуется между Cu и p - Cu_2O .

Слой Cu_2O в этих выпрямителях неидентичен по электрическим свойствам. Часть Cu_2O , прилегающая к Cu -подложке, насыщается атомами Cu и приобретает n -проводимость. Другая часть слоя Cu_2O насыщается атомами кислорода и приобретает p -проводимость.

Цель настоящей работы—исследование характера запиорного слоя и реактивных свойств Cu_2O -выпрямителей.

Вольтфарадовые характеристики большого количества образцов измерены на малом переменном сигнале мостовым методом на МПП-300 в диапазоне частот $\nu=1\div 200$ кГц при комнатной температуре.

Обнаружено, что емкость C при $\nu \geq 5$ кГц растет с прямым напряжением $U_{\text{пр}}$, достигает максимума при $U_{\text{макс}}$; падает до нуля при определенном напряжении $U_{\text{инв}}$ и переходит в индуктивность (рис. а).

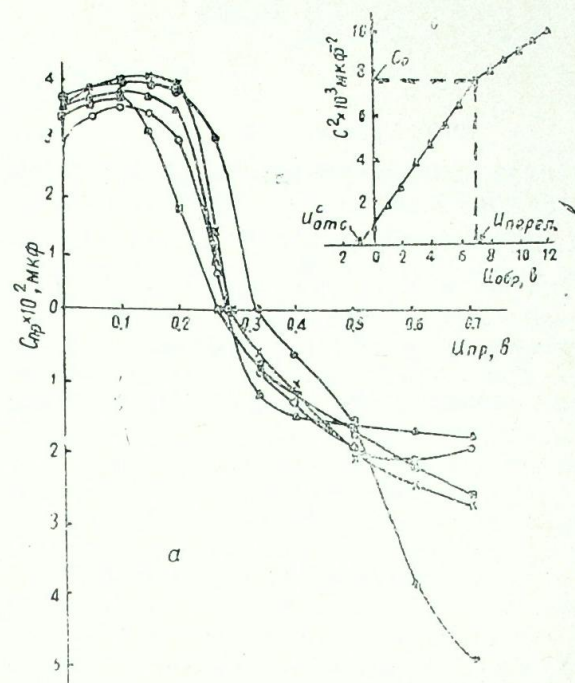
Cu_2O является широкозонным полупроводником с примесными уровнями $\Delta E = 0,65$ эв и $\Delta E = 1,15$ эв (выше верхнего края валентной зоны) [8], поэтому можно считать, что механизм индуктивной реакции в поликристаллических Cu_2O -выпрямителях, как и в Se -поликристаллических p - n -переходах [9], обусловлен действием глуболежащих примесных уровней.

Заметим, что значение $U_{\text{инв}}$ уменьшается с ростом ν , что обнаружено и в Se -выпрямителях [9].

Емкость элементов при обратных смещениях $U_{\text{обр}}$ очень слабо зависит от ν , что позволило для анализа емкостных данных при обратных смещениях пользоваться теорией [10, 11].

Кривая зависимости $C_{\text{обр}}^{-2} = f(U_{\text{обр}})$ при определенном $U_{\text{обр}}$ претерпевает излом (рис. б). Это связано с тем, что один из полупроводниковых слоев значительно тоньше по сравнению с другим, поэтому при высоких $U_{\text{обр}}$ вся его толща „заливается“ объемным зарядом. Вследствие этого при высоких $U_{\text{обр}}$ вместо p - n -перехода имеем барьер типа Шоттки.

По зависимости $C_{\text{обр}}^{-2} = f(U_{\text{обр}})$ согласно [10, 11] вычислялись и определялись концентрации ионизованных акцепторов n_A и доноров n_D в области объемного заряда, толщина тонкого слоя L , емкостное напряжение отсечки $U_{\text{отс}}^c$, напряжение полного „заливания“ тонкого слоя $U_{\text{перел}}^c$, d_0 —толщина области объемного заряда (таблица).



а—зависимость $C_{\text{пр}} = f(U_{\text{пр}})$ Cu_2O -выпрямительного элемента при частотах: 5 (○); 10 (×); 20 (▲); 100 (□); 200 (◆) кГц.

б—зависимость $C_{\text{обр}}^{-2} = f(U_{\text{обр}})$ Cu_2O -выпрямительного элемента при частоте 20 кГц.

$n_A, \text{см}^{-3}$	$n_D, \text{см}^{-3}$	Толщина тонкого слоя, мк	$U_{\text{отс}}^c, \text{в}$	$U_{\text{перел}}^c, \text{в}$	$d_0, \text{мк}$
$1,1 \cdot 10^{17}$	$1 \cdot 10^{17}$	0,25	1	7	0,14

По результатам можно заключить:

1. Cu_2O -выпрямительные элементы обладают индуктивной реакцией.
2. В Cu_2O -выпрямителях запиорный слой p - Cu_2O - n - Cu_2O является симметричным переходом ($n_D \approx n_A$).
3. При больших $U_{\text{обр}}$ n -слой включается в объемный заряд и имеем барьер типа Шоттки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лашкарев В. Е. „Изв. АН СССР“, серия физич., 5, 442, 1941.
2. Абдуллаев Г. Б. „Изв. АН СССР“, серия физич., 16, 225, 1952.
3. Андриевский А. И. и др. Доклады Львовск. политехнич. ин-та, 1, 9—12, 27—29, 34—37, 1955.

4. Кузнецов В. И. Шевелев М. И. „Изв. вузов СССР, серия физич. № 6, 145, 1961.
5. Стельбанс Л. С. Физика полупроводников. Изд. „Сов. радио“, М., 1967.
6. Хениш Г. Полупроводниковые выпрямители. Изд. ИЛ, М., 1951.
7. Пикус Г. Е. Основы теории полупроводниковых приборов. Изд. „Наука“, М., 1965.
8. Смит Р. Полупроводники. Перев. с англ. Изд. ИЛ, М., 1962.
9. Талиби М. А., Мамедов Э. Г., Алиев М. М. ФТП, 1, 1421, 1967.
10. Dolega U. Zs. Naturforsch., 18a, 653, 1963.
11. Dolega U. Zs. Physik, 167, 40, 1962.

Институт физики

Поступило 3. VII 1969

М. Э. Талиби, М. М. Алиев

Мис бир -оксидли дүзлэндиричилэрин баглајычы тэбэгэсинин
тэбиэти вэ реактив хассэлэри хаггында

ХҮЛАСӘ

Тэдгигатда мис бир-оксидли дүзлэндиричилэрин (Si_2O) вольтфарад характеристикалары тэдгиг едилмишдир.

Мүәјјән олунмушдур ки, Si_2O дүзлэндиричи элементлэри индуктив реаксияја маликдир. Бунунла бэрабэр, Si_2O дүзлэндиричилэриндә баглајычы тэбэгә— $p\text{—Si}_2\text{O—}n\text{—Si}_2\text{O}$ симметрик кечиддир ($n_D \approx n_A$).

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вэ ријазийат елмлэри серијасы, 1970, № 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 4

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, З. А. ИСКЕНДЕР-ЗАДЕ, М. Р. АХУНДОВ,
Э. А. ДЖАФАРОВА и Ш. А. АЛИХАНОВА

РЕАКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФУЗИОННЫХ КРЕМНИЕВЫХ ВЕНТИЛЬНЫХ ФОТОЭЛЕМЕНТОВ

Исследование реактивных свойств диффузионных кремниевых диодов на основе n - и p - кремния показало, что при высоких уровнях инжекции и при сильных электрических полях емкость переходит в индуктивность [1, 2]. По зависимости напряжения инверсии от частоты, от концентрации основных носителей в базе и от температуры были предложены методы измерения распределения потенциала вблизи p - n -перехода [3], концентрации основных носителей в базе и температуры p - n -перехода. Представляло интерес создание большого уровня инжекции, при котором емкость переходит в индуктивность без приложения постоянного внешнего смещения путем интенсивного освещения (фотоинжекции). С этой целью нами исследованы реактивные свойства диффузионных кремниевых фотоэлементов (ФЭ), в которых высокий уровень инжекции создавался как внешним напряжением (темновые характеристики), так и освещением ФЭ интенсивным светом.

Методика измерений. Исследованные ФЭ были изготовлены на основе p - Si диффузией сурьмы; площадь ФЭ составляла $\sim 1 \text{ см}^2$. Реактивные свойства ФЭ были изучены на мосте полных проводимостей; схема измерения реактивных свойств ФЭ такая же, как в работе [4], с той лишь разницей, что в схему последовательно с амперметром для изменения величины внешней нагрузки подключался дополнительный магазин сопротивлений R_n .

Для освещения ФЭ использовали лампу накаливания мощностью 170 вт. Фокусированный свет падал перпендикулярно на полупрозрачную поверхность ФЭ. Освещенность поверхности ФЭ изменялась посредством сетчатых фильтров в пределах от $2,4 \cdot 10^4$ до $1,4 \cdot 10^5 \text{ лк}$. При больших интенсивностях света, во избежание нагрева ФЭ использовался водяной фильтр (толщиной $\sim 2 \text{ см}$), отсекающий всю инфракрасную часть спектра лампы, начиная с $\lambda \sim 1,2 \text{ мкм}$ [5]. Последнее обстоятельство позволило использовать для генерации носителей почти все фотоны, падающие на ФЭ, кроме отраженных. Температура ФЭ при интенсивном освещении поддерживалась постоянной с точностью $\pm 2^\circ\text{C}$.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Исследование зависимости барьерной емкости ФЭ от приложенного напряжения позволило установить, что в p - n -переходе ионизованные примеси распределены по линейному закону $[C_{\text{бар}} \sim (U_{\text{обр}} + U_D)^{-1/\gamma}]$, где $\gamma = 2,8 \div 3,0$. Градиент концентрации примесей в интервале обратных напряжений $U_{\text{обр}} = 0 \div 30 \text{ в}$ порядка $(7 \div 9) 10^{20} \text{ см}^{-3}$. Ширина слоя объ-

емного заряда w , определенная из измерений барьерной емкости, для исследованных ФЭ $w \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ (при $U_{обр} = 0$) и изменяется до $2 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ (при $U_{обр} = 30 \text{ в}$). Исследование $C_{бар}(U_{обр})$ позволяет также определить значение диффузионной разности потенциалов U_d , которая равна 0,6 в при комнатной температуре T_k и линейно уменьшается с повышением ее.

Исследование реактивных свойств ФЭ в прямом направлении при T_k и в темноте показало, что емкость при всех исследованных частотах весьма слабо возрастает с приложенным напряжением вплоть до $U_{пр} = 0,4 \text{ в}$ (рис. 1), что объясняется влиянием барьерной емкости и

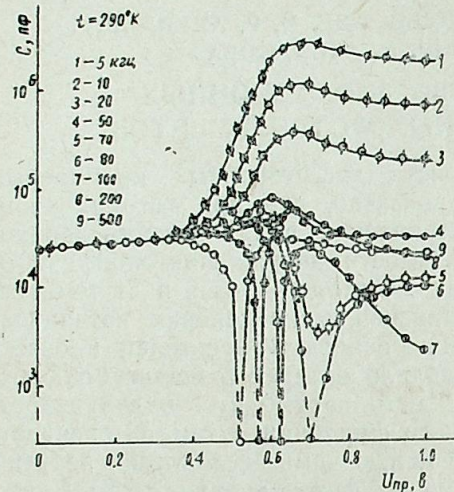


Рис. 1. Зависимость емкости и индуктивности ФЭ от прямого напряжения при различных частотах и в темноте

уменьшением величины емкости (при низких частотах) и индуктивности (при высоких частотах), что, по-видимому, связано с влиянием последовательного сопротивления ФЭ. Отметим также, что в отличие от обычных диффузионных диодов, созданных на основе как n -, так и p -Si, в ФЭ максимальное значение емкости ($C_{\max}^+$) и индуктивности ($C_{\max}^-$) с увеличением температуры возрастают.

При освещении ФЭ поглощение, вызывающее фотоионизацию, приводит к образованию фотопар электрон-дырка. Генерируемые носители диффундируют к p - n -переходу, где происходит разделение пар и переброс неосновных носителей в противоположные от перехода стороны. Если внешняя цепь ФЭ разомкнута, то происходит накопление фотоэлектронов в n - и фотодырок в p -областях, которые обуславливают собой дополнительную емкость. Поэтому при освещении ФЭ должна увеличиваться его полная емкость, что и наблюдается в эксперименте.

На рис. 2а показана зависимость емкости ФЭ (C_0) от освещенности (A) при различных частотах малого переменного сигнала. Видно, что с увеличением интенсивности света при сравнительно низких частотах емкость p - n -перехода возрастает линейно. С увеличением частоты от 30 до 100 кГц эта линейность нарушается, а при $f = 60 \text{ кГц}$ емкость при малой освещенности, несколько увеличиваясь, остается неизменной. В интервале частот 100-600 кГц емкость, начиная с $A = 4 \cdot 10^{-4} \text{ лк}$, почти линейно уменьшается с освещением. На рис

2б показана частотная зависимость емкости ФЭ при различных освещенностях. Из рис. 2б видно, что при малой интенсивности освещения ($A = 0,17 A_0$) емкость ФЭ (C^F) при всех частотах несколько больше начальной емкости в темноте (C_0^T) и почти не зависит от частоты, как и сама емкость C_0^T . А с увеличением интенсивности света картина

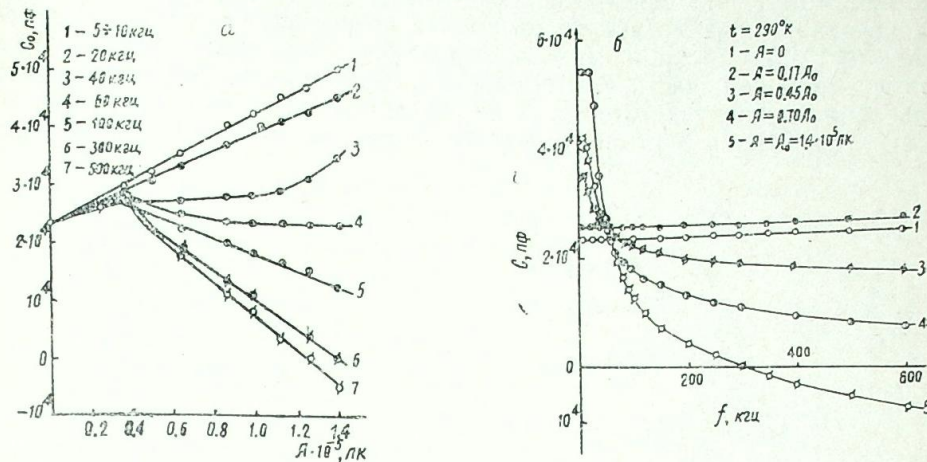


Рис. 2. а—изменение емкости ФЭ с освещением при различных частотах; б—изменение емкости ФЭ с частотой при различных освещенностях.

резко изменяется: до частоты $f \leq 60 \text{ кГц}$ емкость, оставаясь больше C_0^T , возрастает с увеличением интенсивности освещения и убывает с ростом частоты переменного сигнала; при $f \approx 60-70 \text{ кГц}$ $C = C_0^T$, т. е. реактивное сопротивление освещенного ФЭ не изменяется, а при $f > 70 \text{ кГц}$ емкость ФЭ уменьшается как с увеличением частоты, так и с увеличением освещенности, т. е. $C^F < C_0^T$. При максимальной интенсивности света и $f = 250-300 \text{ кГц}$, $C^F = 0$, т. е. у освещенного ФЭ реактивное сопротивление равно нулю и остается чисто активное сопротивление. А когда $f > 300 \text{ кГц}$ емкость ФЭ при освещении переходит в индуктивность без приложения внешнего напряжения (кривая № 5 на рис. 2б). Такое поведение C^F с уровнем освещения ФЭ аналогично изменению емкости диодов с прямым смещением [6-8]: при малых уровнях инжекции (малые интенсивности освещения или небольшие прямые напряжения) увеличение емкости связано с возрастанием числа неравновесных носителей и обусловлено накоплением заряда подвижных носителей. При больших же уровнях инжекции накопленный заряд вызывает уменьшение проводимости базовой области, что обуславливает собой индуктивный эффект, существующий одновременно с емкостным эффектом, вызывая сначала уменьшение емкости, а затем с возрастанием уровня инжекции проявляясь более ярко, что обуславливает уменьшение емкости до нуля и переход ее в индуктивность.

Зависимость емкости ФЭ от приложенного напряжения при максимальной освещенности (A_0) и различных частотах представлена на рис. 3. Прямое смещение $U_{пр}$ до $U_{xx} = 600 \text{ мВ}$ на ФЭ получалось за счет освещения и постепенного изменения внешней нагрузки, а после напряжения $U = 600 \text{ мВ}$ смещение подавалось от внешней батареи. Непрерывный ход кривых $C(U)$ (рис. 3) показывает, что фотонапряжение (U_F) и внешнее прямое смещение ($U_{пр}$) складываются аддитивно, так как освещение смещает p - n -переход в прямом направлении,

нин, что дает нам право разместить их ($U = U_{\phi} + U_{\text{пр}}$) на одной оси. В отличие от темновой характеристики $C(U)$ (рис. 1), при освещении ФЭ величина емкости больше и при низких частотах (кривые 1—5) нет четкой экспоненциальной зависимости $C(U)$.

Переход емкости в индуктивность происходит уже при $f \geq 70$ кГц. По-видимому, это связано с тем, что при освещении ФЭ время жизни неравновесных носителей несколько возрастает [9]. Поэтому условие $\omega \tau \approx 1$ (при котором емкость переходит в индуктивность) соответствует меньшей частоте. Кроме того, под освещением напряжение инверсии на всех частотах, где наблюдается инверсия знака реактивности, смещается в сторону малого значения прямого напряжения.

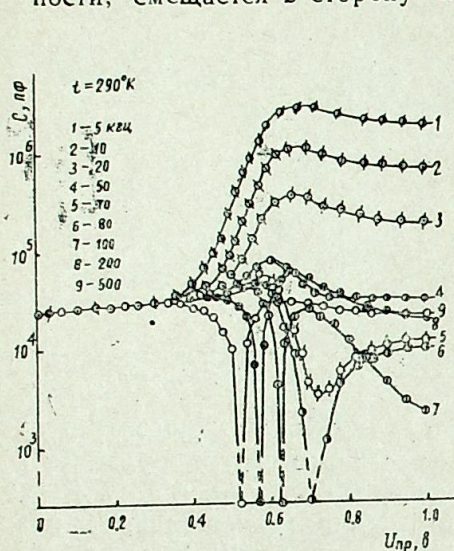


Рис. 3. Зависимость емкости ФЭ от приложенного напряжения при максимальной освещенности и различных частотах.

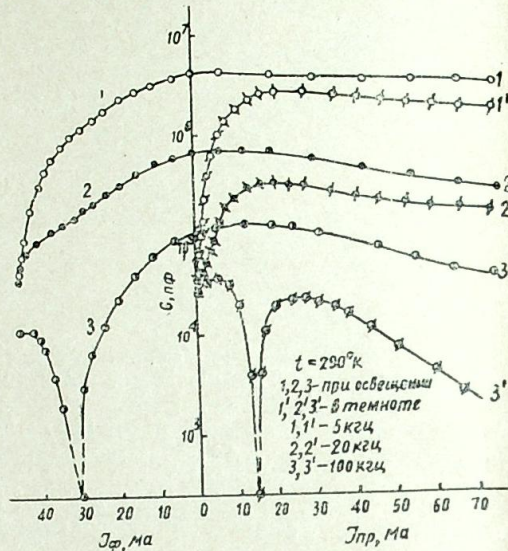


Рис. 4. Зависимость емкости освещенного (кривые 1, 2, 3) и неосвещенного (кривые 1', 2', 3') ФЭ от тока при комнатной температуре и трех частотах.

Уменьшение величины $U_{\text{инв}}$ при освещении можно объяснить как влиянием уменьшения последовательного сопротивления ФЭ, так и тем, что фотоинжекция носителей осуществляется легче, чем инжекция, вызванная внешним напряжением. Другими словами, путем фотоинжекции одно и то же количество носителей преодолевает барьер при сравнительно меньшем значении напряжения. В пользу этого говорят также наблюдаемые большие значения емкости при освещении при одном и том же значении прямого смещения на ФЭ. Например, сравним два значения емкости: при $U_{\text{пр}} = 0,4$ в и $f = 5$ кГц $C^{\phi} = 3,3 \cdot 10^5$ пФ; $C^T = 4 \cdot 10^4$ пФ.

При освещении ФЭ максимальным световым потоком ($A_0 = 1,4 \cdot 10^5$ лк) установившиеся значения фототока J_{ϕ} и фотоздс U_{ϕ} при выключенном внешнем нагрузочном сопротивлении равны соответственно 45 мА и 310 мВ при T_K и 38 мА и 260 мВ при 370°К. Используемый мост не позволял измерять $C(U)$ в интервале U_{ϕ} от 0 до 310 мВ (при T_K), так как точно режим короткого замыкания мы не могли осуществить. Вообще говоря, режим короткого замыкания ФЭ на практике никогда не осуществляется, так как всегда имеется сопротивление объема n - и p -областей, которое служит нагрузкой. В нашем случае, дополнительной нагрузкой при короткозамкнутой внешней цепи является также сопротивление балансного плеча изме-

рительного моста. Поэтому при освещении ФЭ часть фотоносителей накапливается вблизи p - n -перехода и создает разность потенциалов а другая часть переходит во внешнюю цепь, обуславливая ток в обратном направлении. На рис. 3 пунктирной линией соединены значения емкости ФЭ в темноте при $U_{\text{пр}} = 0$ (которое не зависит от частоты см. рис. 1) и при минимальной величине $U_{\phi} = 310$ мВ.

Представляет интерес установить характер зависимости емкости ФЭ от тока. На рис. 4 приведена зависимость емкости освещенного ФЭ ($A = 1,4 \cdot 10^5$ лк) от тока, проходящего через него, при T_K и трех частотах (кривые 1, 2, 3). Для наглядности там же показана зависимость $C(J_{\text{пр}})$ в темноте (кривые 1', 2', 3'). Как видно, с уменьшением тока J_{ϕ} (J_{ϕ} , имеющий направление обратного тока ФЭ, откладывается на левой стороне оси токов) через внешнюю нагрузку емкость освещенного ФЭ при низких частотах увеличивается ($f = 5 \div 20$ кГц), а для сравнительно высоких частот ($f \geq 100$ кГц) емкость, уменьшаясь до нуля, и при определенном значении фототока ($J_{\text{инв}}^{\phi}$) переходит в индуктивность. Увеличение емкости (при низких частотах) и переход ее в индуктивность с уменьшением J_{ϕ} (при высоких частотах) объясняется следующим образом. Как известно, при освещении ток во внешней цепи ФЭ связан с разностью потенциалов на нем следующим уравнением [10]:

$$J_{\phi} = \frac{U_{\phi}}{R_n} = J_0 \left[\exp \frac{q(U - J_{\phi} R_n)}{\beta k T} - 1 \right] - J_L \quad (1)$$

здесь J_{ϕ} — ток через внешнюю нагрузку R_n , а U_{ϕ} — падение напряжения на нем (соответственно и на ФЭ). Первое слагаемое в (1) представляет собой ток через p - n -переход, смещенный в прямом направлении, J_0 и β — параметры, характерные для p - n -перехода, а R_n — последовательное сопротивление ФЭ. Из уравнения (1) видно, что при замыкании ФЭ нагрузочным сопротивлением R_n фототок J_L , генерируемый p - n -переходом, разветвляется на две части:

$$J_L = J_{\phi} + J_{\text{пр}} \quad (2)$$

Одна часть тока, которую мы и регистрируем, проходит через внешнее сопротивление (J_{ϕ}) и соответствует обратному току ФЭ, а другая часть — через p - n -переход ($J_{\text{пр}}$). Так как при данной освещенности $J_L = \text{const}$ и не зависит от R_n , то с возрастанием R_n ток J_{ϕ} уменьшается и, следовательно, $J_{\text{пр}}$ возрастает. Поэтому при низких частотах с уменьшением J_{ϕ} емкость ФЭ возрастает, а при сравнительно высоких частотах переходит в индуктивность подобно прямосмещенному диоду [8].

Исследовались температурные и частотные зависимости напряжения инверсии при освещении и в темноте, а также зависимость $U_{\text{инв}}$ от освещения. Как в темноте, так и при освещении напряжение инверсии исследованных ФЭ линейно зависит от температуры p - n -перехода с температурным коэффициентом, лежащим в интервале $\alpha \approx 2,2 \div 2,7$ мВ/град (в темноте) и $\alpha \approx 2,3 \div 3,4$ мВ/град (при освещении); причем с увеличением частоты малого переменного сигнала чувствительность $U_{\text{инв}}$ к температуре повышается. Кроме того, наблюдается частотная зависимость $U_{\text{инв}}$, что объясняется линейным распределением примеси в области p - n -перехода [3]. Эмпирическая формула, связывающая $U_{\text{инв}}$ с частотой, дается в следующем виде: $U_{\text{инв}} = U^* - b \ln f$, где коэффициент b в темноте изменяется от 50 до 70 мВ в интервале 290—370°К. Под освещением же во-первых, зависимость $U_{\text{инв}}(f)$ состоит из двух прямолинейных участков, во-вторых, значение коэффициента b повышается. На первом участке ($f = 60 \div 150$ кГц) $b_1 = 190 \div 230$ мВ, а на втором — $b_2 = 120 \div 190$ мВ ($f = 150 \div 600$ кГц) в том же температурном интервале.

Исследование напряжения инверсии от освещенности ФЭ показывает, что $U_{\text{инв}}$ почти линейно уменьшается с увеличением интенсивности света. Кроме того, с повышением частоты малого переменного сигнала светочувствительность напряжения инверсии возрастает.

Выводы

1. Исследована барьерная емкость вентильных ФЭ на основе p -Si в интервале напряжений $U_{\text{обр}} = 0 \div 30$ в, температуры $273 \div 370^\circ\text{K}$ и частоты $5 \div 600$ кГц малого переменного сигнала. Показано, что характер зависимости емкости от напряжения определяется линейным распределением электроактивной примеси в переходной области с градиентом концентрации $a = (7 \div 9) \cdot 10^{20} \text{ см}^{-4}$.

2. Емкость ФЭ при $U_{\text{инв}}$ в прямом направлении и в темноте при частотах переменного сигнала, удовлетворяющих условию $\omega\tau \gg 1$, переходит в индуктивность. Переход емкости в индуктивность объясняется эффектом модуляции проводимости базы ФЭ.

3. Показано, что емкость ФЭ под освещением и при условии $\omega\tau \gg 1$ переходит в индуктивность без внешнего напряжения.

4. Переход емкости в индуктивность при освещении и без внешнего смещения непосредственно подтверждает инжекционный механизм возникновения индуктивности.

5. Установлено, что напряжение инверсии почти линейно уменьшается с увеличением интенсивности света.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abdullayev G. B. et al. Solid-State Electronics, v 11, № 2, 233, 1968.
2. Abdullayev G. B. et al. Phys Letters, v 24A, № 12, 5, 1967.
3. Абдуллаев Г. Б. и др. "ДАН Азерб. ССР", т. 24, № 3, стр. 11, 1968.
4. Джафарова Э. А. Канд. дис. Баку, 1967.
5. Тучкевич Б. М. и Челноков В. Е. ЖТФ, т. 28, вып. 10, стр. 2115, 1958.
6. Wang C. C. Proc. JRE, v 50, № 8, 1838, 1962.
7. Ferle T. E., Hayes O. E. JRE Trans. ED-7, № 8, 330, 1969.
8. Абдуллаев Г. Б. и др. "Радиотехника и электроника", т. 10, № 4, 7, 6 1965.
9. Abdullayev G. B. et al. Phys. Stat. Solidi, v. 21, 423, 1967.
10. Субашиев В. К. и Соминский М. С. "Полупроводники в науке и технике", т. II, стр. 115. 1957.

Институт физики

Поступило 3. VII 1969

Н. Б. Абдуллаев, З. Э. Искандерзаде, М. Р. Ахундов,
Е. Э. Чофарова, Ш. Э. Элиханова

Диффузија јолу илэ алынмыш силисиум фотоэлементлэринин реактив хассэлэри

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә диффузија јолу илэ алынмыш силисиум фотоэлементлэринин һәм дүз, һәм дә әкс истигамәтдә реактив хассэлэри верилмишдир. Өлчүләр гаранлыгда вә фотоэлементи ишыгландыран заман апарылмышдыр. Тутумун әкс кәркинликдән асылылығына әсасән мүәјјән едилмишдир ки, p — n кечид областында ашгар ионларынын пайланмасы хәтти характер дашыјыр. Бунунла бәрәбәр, фотоинжексия заманы фотоэлементин тутуму $\omega\tau \gg 1$ шәрти дахилиндә (ω —кичик гижмәтли дәјишән кәркинлијин даирәви тезлији, τ —таразлыгда олмајан јүкдашыјычыларын јашама мүддәтидир) харичи кәркинлик олмадан белә индуктивлијә кечир. Тутумун индуктивлијә кечмәси һадисәси фотоинжексия нәтичәсиндә фотоэлементин база областы мүгавимәтинин дәјишмәси илэ изаһ олунур. Реактивлијин тутум характериндән индуктивлијә кечиди кәркинлијин тезликдән, температурдан вә ишыгланмадан асылылығы өјрәнилмишдир.

М. А. БАГИРОВ, В. П. НИКОЛАЕВ, В. П. МАЛИН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В НЕФТЕНОСНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ДВИЖУЩЕМСЯ ОЧАГЕ ГОРЕНИЯ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЙ РАСХОДА ВОЗДУХА, НАГНЕТАЕМОГО В ПЛАСТ

В настоящее время термические методы являются одним из радикальных путей извлечения остаточной нефти из истощенных месторождений и интенсификации нефтедобычи. Вытеснение остаточной нефти из пласта осуществляется в основном путем создания в нем движущегося очага горения [1].

Важным показателем процесса с внутривластовым движущимся очагом горения является расход окислителя (воздуха), нагнетаемого в инжекционную скважину. Установлено [2], что для устойчивого продвижения очага горения к эксплуатационным скважинам необходимо линейно увеличивать расход воздуха в зависимости от радиального положения очага горения в пласте. Однако при проведении процесса с внутривластовым движущимся очагом горения в промысловых условиях не всегда удается плавно регулировать расход воздуха, нагнетаемого в инжекционную скважину. В некоторых случаях при проведении процесса возможны скачкообразные изменения в расходе нагнетаемого в пласт воздуха и даже его кратковременные отключения.

В связи с вышесказанным представляет интерес решение задачи о распределении температурного поля в нефтеносном пласте, создаваемого движущимся очагом (фронтом) горения, когда расход воздуха, нагнетаемого в пласт для поддержания и продвижения очага горения, меняется скачкообразно от одного постоянного значения к другому. Математически такая задача формулируется следующим образом (физические допущения, введенные в формулировку задачи, те же, что и в работах [2,3]).

Пусть в нефтеносном пласте от забоя инжекционной скважины диаметром $2r_0$ распространяется в радиальном направлении цилиндрический фронт горения с конечной высотой, равной мощности пласта $2l$. При постоянном весовом расходе Q_{r1} воздуха, нагнетаемого в инжекционную скважину, фронт горения движется со скоростью, обратно пропорциональной его радиальному расстоянию от оси скважины [3]:

$$v_{\phi L} = \frac{B_{\perp}}{r}, \quad (1)$$

где $B_{\perp} = \frac{yR_n Q_{r1}}{4\pi l z_n \rho_n} = \text{const}$, y —весовое содержание кислорода в наг-

нетаемом окислителе (воздухе), R_n —весовое отношение нефть/кислород в реакции горения, z_n —количество топлива (нефти), сгорающего в единице объема нефтеносной породы, ρ_n —плотность породы.

Предположим, что через некоторое время t , от начала процесса расход воздуха, нагнетаемого в инъекционную скважину, увеличивается (или уменьшается) до значения $Q_{г2}$. Необходимо найти результирующее распределение температуры в пласте.

При решении поставленной задачи будем исходить из условия аддитивности тепловых потоков: общий тепловой поток складывается из суммы теплового потока, создаваемого фронтом горения, движущимся со скоростью $v_{\phi_1} = \frac{B'}{r}$ (где r изменяется от 0 до r_1) и действующим до момента времени t_1 , и теплового потока, создаваемого фронтом горения, движущимся со скоростью $v_{\phi_2} = \frac{B_2}{r}$ (где r изменяется от r_1 до r) и действующим от момента времени t_1 до t .

Учитывая сказанное, можно сделать вывод, что искомая температура в пласте будет складываться из температур $\vartheta(t_1)$ и $\vartheta(t-t_1)$, т. е.

$$\vartheta(t) = \vartheta(t_1) + \vartheta(t-t_1), \quad (2)$$

где $\vartheta(t_1)$ —температура, создаваемая фронтом горения, распространяющимся от 0 до r_1 , $\vartheta(t-t_1)$ —температура создаваемая фронтам горения, распространяющимся от r_1 до r .

Распределение температуры в пласте $\vartheta(t_1)$ при движущемся со скоростью v_{ϕ_1} цилиндрическом фронте горения имеет вид [3]:

$$\vartheta(t_1) = \frac{A_1}{4a} \int_0^{t_1} \exp\left(-\frac{r_1^2 + r_0^2 + 2B_1 t'}{4a(t_1 - t')}\right) I_0\left(\frac{r_1 \sqrt{r_0^2 + 2B_1 t'}}{2a(t_1 - t')}\right) \times \\ \times \left(\operatorname{erf} \frac{l+z}{2\sqrt{a(t_1 - t')}} + \operatorname{erf} \frac{l-z}{2\sqrt{a(t_1 - t')}}\right) \frac{dt'}{t_1 - t'} \quad (4)$$

где $a = \frac{\lambda_n}{c_n \rho_n}$ —температуропроводность нефтеносной породы, λ_n и c_n —теплопроводность и теплоемкость породы соответственно, $I_0(\kappa)$ —Бесселева функция первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента, $\operatorname{erf} \kappa = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\kappa} \exp(-x^2) dx$ —вероятностный интеграл.

Коэффициент A , связанный с тепловой мощностью q_{ϕ} , выделяемой на единице поверхности фронта горения (или же с тепловой мощностью q , приходящейся на единицу высоты фронта горения), можно согласно [2] представить в виде:

$$\frac{A}{4a} = \frac{B}{2a} \frac{\gamma_0 z_n}{2c_n} = \frac{1}{8\pi} \frac{q}{\lambda_n}, \quad (5)$$

где γ_0 —теплотворная способность топлива (нефти).

В соответствии с выражением (1) для скорости распространения фронта горения при постоянном весовом расходе нагнетаемого в пласт воздуха положение фронта горения в пласте от забоя инъекционной скважины к моменту времени t определяется как:

$$r = \sqrt{r_1^2 + 2B_2(t-t_1)} = \sqrt{r_0^2 + 2B_1 t_1 + 2B_2(t-t_1)} \quad (6)$$

Тогда распределение температуры $\vartheta(t-t_1)$, соответствующее фронту горения, движущемуся со скоростью v_{ϕ_2} , находится как решение дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial \vartheta(t-t_1)}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta(t-t_1)}{\partial r} \right) + a \frac{\partial^2 \vartheta(t-t_1)}{\partial z^2} + \\ + \frac{A_2}{\sqrt{r_0^2 + 2B_1 t_1 + 2B_2(t-t_1)}} \times \delta(r - \sqrt{r_0^2 + 2B_1 t_1 + 2B_2(t-t_1)}) \quad (7)$$

при $|z| \leq l$,

где $\delta(\kappa)$ —дельта-функция Дирака.

Решая уравнение (7) по методу, приведенному в работах [2,3], получим:

$$\vartheta(t-t_1) = \frac{A_2}{4a} \int_{t_1}^t \exp\left(-\frac{r^2 + r_0^2 + 2B_1 t_1 + 2B_2(t'-t_1)}{4a(t-t')}\right) \times \\ \times I_0\left(\frac{r \sqrt{r_0^2 + 2B_1 t_1 + 2B_2(t'-t_1)}}{2a(t-t')}\right) \times \left(\operatorname{erf} \frac{l+z}{2\sqrt{a(t-t')}} + \right. \\ \left. + \operatorname{erf} \frac{l-z}{2\sqrt{a(t-t')}}\right) \frac{dt'}{t-t'}.$$

Произведя в последнем выражении замену переменных:

$$t-t' = u$$

и соответственно изменив пределы интегрирования, найдем:

$$\vartheta(t-t_1) = \frac{A_2}{4a} \exp\left(\frac{B_2}{2a}\right) \int_0^{t-t_1} \exp\left(-\frac{r^2 + r_0^2 + 2B_1 t_1 + 2B_2 t - 2B_2 t_1}{4au}\right) \times \\ \times I_0\left(\frac{r \sqrt{r_0^2 + 2B_1 t_1 + 2B_2 t - 2B_2 t_1}}{2au}\right) \left(\operatorname{erf} \frac{l+z}{2\sqrt{au}} + \right. \\ \left. + \operatorname{erf} \frac{l-z}{2\sqrt{au}}\right) \frac{du}{u} \quad (8)$$

Вводя безразмерные параметры:

$$\vartheta^* = \frac{\lambda_n}{q} \vartheta, \quad \beta = \frac{B}{2a}, \quad R = \frac{r}{r_0}, \quad \rho_0 = \frac{r_0}{l}, \quad \varepsilon = \frac{z}{l}, \quad \tau = \frac{4at}{l^2}, \quad x = \frac{4au}{l^2},$$

запишем решение (8) в виде:

$$\vartheta^*(\tau - \tau_1) = \frac{\exp \beta_2}{8\pi} \int_0^{\tau - \tau_1} \exp\left(-\frac{\rho_0^2(1+R^2) + \beta_1 \tau_1 + \beta_2(\tau - \tau_1)}{x}\right) \times \\ \times I_0\left(\frac{2R\rho_0}{x} \sqrt{\rho_0^2 - \beta_2 x + \beta_1 \tau_1 + \beta_2(\tau - \tau_1)}\right) \left(\operatorname{erf} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{x}} + \right. \\ \left. + \operatorname{erf} \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{x}}\right) \frac{dx}{x},$$

причем в соответствии с соотношением (5) можно выразить ϑ как

$$\vartheta = \beta \vartheta^* \frac{4\pi \gamma_0 z_n}{c_n}. \quad (9)$$

Отметим, что, используя выражение (9), легко рассчитать искомое распределение температуры в нефтеносном пласте ϑ , если иметь вместо введенной нами безразмерной температуры ϑ^* , произведение $\beta \vartheta^*$, так как множитель $\frac{4\pi \gamma_0 z_n}{c_n}$ является для каждого конкретного месторождения величиной постоянной. Поэтому в дальнейшем, имея

в виду упрощения производимых расчетов, условимся подразумевать под безразмерной температурой указанное произведение.

Таким образом, искомая температура $\vartheta(t)$, выраженная в безразмерных параметрах, имеет вид:

$$\begin{aligned} \vartheta^*(\tau) &= \vartheta^*(\tau_1) + \vartheta^*(\tau - \tau_1) = \\ &= \frac{\beta_1 \exp \beta_1}{8\pi} \int_0^{\tau_1} \exp\left(-\frac{\rho_0^2(1+R^2) + \beta_1 \tau_1}{x}\right) I_0\left(\frac{2R\rho_0}{x} \sqrt{\rho_0^2 - \beta_1 x + \beta_1 \tau_1}\right) \times \\ &\quad \times \left(\operatorname{erf} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{x}} + \operatorname{erf} \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{x}}\right) \frac{dx}{x} + \\ &+ \frac{\beta_1 \exp \beta_1}{8\pi} \int_0^{\tau-\tau_1} \exp\left(-\frac{\rho_0^2(1+R^2) + \beta_1 \tau_1 + \beta_2(\tau - \tau_1)}{x}\right) I_0\left(\frac{2R\rho_0}{x} \sqrt{\rho_0^2 - \beta_2 x + \beta_1 \tau_1 + \beta_2(\tau - \tau_1)}\right) \times \\ &\quad \times \left(\operatorname{erf} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{x}} + \operatorname{erf} \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{x}}\right) \frac{dx}{x}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если от начала ведения процесса с внутрипластовым движущимся очагом горения расход воздуха, нагнетаемого в инъекционную скважину, принимал n значений, то, обобщая выражение (10), для нахождения распределения температуры в пласте к моменту времени t_n получим следующий ряд:

$$\begin{aligned} \vartheta^*(\tau_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \exp \beta_i^*}{8\pi} \int_0^{\tau_i - \sum_{k=1}^{i-1} \tau_k} \exp\left(-\frac{\rho_0^2(1+R^2) + \sum_{k=1}^i \beta_k \left(\tau_k - \sum_{s=1}^{k-1} \tau_s\right)}{x}\right) \times \\ &\quad \times I_0\left(\frac{2R\rho_0}{x} \sqrt{\rho_0^2 - \beta_i x + \sum_{k=1}^i \beta_k \left(\tau_k - \sum_{s=1}^{k-1} \tau_s\right)}\right) \times \\ &\quad \times \left(\operatorname{erf} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{x}} + \operatorname{erf} \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{x}}\right) \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь безразмерное расстояние R можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} R &= \frac{r}{r_0} = \frac{r_\phi + r'}{r_0} = \frac{r_\phi}{r_0} \left(1 + \frac{r'}{r_\phi}\right) = \frac{r_\phi}{r_0} (1 + \alpha) = \\ &= \frac{1}{r_0} \sqrt{r_0^2 + 2 \sum_{i=1}^n B_i \left(t_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_k\right)} (1 + \alpha) = \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{\rho_0^2} \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\tau_i - \sum_{k=1}^{i-1} \tau_k\right)} (1 + \alpha), \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{r'}{r_\phi}$, r' — расстояние от точки пласта, в которой определяется температура, до фронта горения.

Отметим, что полученное общее решение поставленной задачи (10) представляет собой ряд, каждый член которого, обуславливает вклад в результирующую температуру при соответствующем постоянном значении расхода нагнетаемого в пласт воздуха или, что то

же самое, при соответствующей скорости распространения фронта горения. Первый интеграл был протабулирован нами в широком диапазоне значений входящих в него параметров [3]. Следующие интегралы (члены ряда) отличаются от первого только усложненными аргументами подинтегральной функции, ввиду чего их табулирование не вызывает принципиальных трудностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багиров М. А., Вечхайзер Г. В., Джуварлы Ч. М. Электротермические способы увеличения нефтеотдачи пластов, Азербайджан, 1962.
2. Багиров М. А., Николаев Б. П., Малин В. П., Изв. АН Азерб. ССР — серия физ. техн. и матем. наук., 1967, № 3—4.
3. Багиров М. А. Изв. АН Азерб. ССР, — серия физ.-техн. и матем. наук, 1966, № 6.

Институт физики

М. А. Багиров, Б. П. Николаев, В. П. Малин

Наванын мигдарыны нээрэ алмагла, һэрэкэт едэн жанма мэркэзинэ малик олан нефт лајында температурун пајланмасы

ХҮЛАСӘ

Нефт лајына верилән вә сычрајышлы дәјишмә јарада билән наванын мигдарыны нээрэ алмагла, һэрэкэт едэн цилиндрик жанма мэркэзинэ малик олан нефт лајында температурун пајланмасы мәсәләси һәлл едилмишдир. Мәсәләнин һәлли хусуси сыра шәклиндә верилмишдир ки, һәмин сыранын һәр бир үзви интеграл ифадәләрдән ибарәтдир. Биринчи интеграл она дахил олан параметрләрин гијмәтләринин кениш диапазонунда чәдвәл шәклиндә көстәрилмишдир. Дикәр интеграллар (сыранын үзвләри) биринчидән анчаг интегралалты аргументләрин бир гәдәр мүрәккәб олмасы илә фәргләнир. Она көрә дә һәмин интегралларын һесапланмасы хусуси чәтинлик тәләб етмир.

С. А. АЛИЕВ, Т. Г. ГАДЖИЕВ, Э. М. АЛИЕВ и М. И. АЛИЕВ

О МЕХАНИЗМЕ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В HgTe

Изучению механизма рассеяния электронов в HgTe посвящено много работ [1—7]. Однако они охватывают не очень широкий интервал концентраций, в большинстве из них не учтено влияние непараболичности зоны проводимости на кинетические эффекты, а в тех, где это учитывалось, не принималось во внимание изменение зонных параметров от температуры, не производился учет неупругого характера рассеяния. Поэтому выводы этих работ о механизме рассеяния разноречивы и имеют в основном качественный характер. В работах [8,9] при помощи измерения кинетических коэффициентов нами было показано, что в HgTe при температурах 100—200° К рассеяние электронов частично носит неупругий характер [8]. Кроме того, было показано, что закон дисперсии в HgTe соответствует теории Кейна и температурная зависимость эффективной массы, независимо от степени заполнения зоны проводимости, имеет отрицательный ход, который, по-видимому, связан с температурной зависимостью зонных параметров. [9] Поэтому нами была поставлена задача исследовать механизм рассеяния в HgTe в широком температурном и концентрационном интервале с учетом изменения непараболичности зоны проводимости от температуры и неупругого характера рассеяния.

Для этого на восьми образцах с концентрацией от $2 \cdot 10^{17} \div 5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ было проведено комплексное исследование кинетических коэффициентов в интервале температур $77 \div 300^\circ \text{К}$. Основные результаты измерений приведены в таблице.

С целью получения сведений о механизме рассеяния электронов в HgTe анализируются экспериментальные данные о концентрационной и температурной зависимости термоэдс— α_0 и магнетотермоэдс в сильном магнитном поле— $\Delta\alpha_\infty$, которая вычислялась при помощи формулы

$$\Delta\alpha_\infty = \frac{1 + \left(\frac{L_{\text{экс}}}{L_{\text{теор}}} \cdot \frac{uH}{c} \right)^2}{\left(\frac{L_{\text{экс}}}{L_{\text{теор}}} \cdot \frac{uH}{c} \right)^2} \cdot \Delta\alpha, \quad (1)$$

справедливой в случае неупругого рассеяния [10]. Здесь $L_{\text{экс}}$ и $L_{\text{теор}}$ —экспериментальное и теоретическое значения числа Лоренца в соотношении Видемана—Франца.

В случае нестандартной зоны α_0 и $\Delta\alpha_\infty$ зависят как от эффективного значения параметра механизма рассеяния $r_{\text{эф}}$ $\left[\tau = \tau_0 (\kappa^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\epsilon}{d\kappa} \right]$,

№ образца

Т °К	Величина	1	2	3	4	5	6	7	8
90°К	$n \cdot 10^{-18}, \text{см}^{-3}$	0,07	0,19	0,44	0,49	0,9	0,89	1,1	4,8
	$R_\infty, \text{см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$	19 200	3 400	7 700	5 300	24 000	8 400	7 300	12 900
	$\alpha_\infty, \text{мкВ}/\text{град}$	—	45	39	46,6	36	39,5	34,8	27
	$\alpha_0, \text{мкВ}/\text{град}$	53	55	45,1	43,35	33	36,5	29,3	21
200 °К	$\mu^*, \frac{m^*}{m_0}$	2,8	5,6	9,2	9,4	13,5	13,8	15,0	26,6
	$\mu^*, \frac{m^*}{m_0}$	—	—	0,028	0,035	0,036	0,038	0,0413	0,071
	$n \cdot 10^{-18}, \text{см}^{-3}$	0,2	0,31	0,48	0,63	0,9	0,91	1,1	4,8
	$R_\infty, \text{см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$	22800	5900	9000	8200	19200	9200	6900	10000
300 °К	$\alpha_\infty, \text{мкВ}/\text{град}$	—	130,7	95,7	96,7	78	81,9	74,4	45
	$\alpha_0, \text{мкВ}/\text{град}$	151	129	91,4	92,9	70	71,7	60,4	34
	$\mu^*, \frac{m^*}{m_0}$	2,5	3,5	4,5	5,3	6,6	6,7	7,2	12,3
	$\mu^*, \frac{m^*}{m_0}$	—	—	0,0285	0,0347	0,036	0,037	0,04	0,063
300 °К	$n \cdot 10^{-18}, \text{см}^{-3}$	0,34	0,44	0,65	0,66	0,9	0,93	1,16	4,8
	$R_\infty, \text{см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$	9000	8000	9600	7800	16000	10000	6400	7800
	$\alpha_\infty, \text{мкВ}/\text{град}$	170	163	119,9	127,5	115	109	96	59
	$\alpha_0, \text{мкВ}/\text{град}$	152	135	103,9	109	97	94,6	80	48
300 °К	$\mu^*, \frac{m^*}{m_0}$	2,3	3,0	3,9	3,9	4,7	4,8	5,4	11,0
	$\mu^*, \frac{m^*}{m_0}$	0,028	0,029	0,03	0,032	0,034	0,0344	0,038	0,055

так и от параметра непараболичности зоны проводимости γ , определяемого выражением:

$$\gamma = \frac{n}{m^*} \frac{dm^*}{dn} \quad (2)$$

При достаточно сильном вырождении эти коэффициенты выражаются формулами:

$$\alpha_0 = - \frac{\pi^{1/2} \kappa_0^2 m^* T}{3e \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 (3n)^{1/2}} \{2r + 3 - 6\gamma\} \quad (3)$$

и

$$\Delta\alpha_\infty = \frac{\pi^{1/2} \kappa_0^2 m^* T}{3e \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 (3n)^{1/2}} \{6\gamma - 2r\} \quad (4)$$

Пользуясь формулой (2) и соотношением Кейна для концентрационной зависимости эффективной массы (5)

$$\frac{\frac{m^*}{m_0}}{1 - \frac{m^*}{m_0}} = \frac{m_0^*}{m_0} \sqrt{\frac{1 + 2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \kappa^2}{\varepsilon_g} \cdot \frac{m_0 - m_0^*}{m_0 m_0^*}} \quad (5)$$

для γ получено выражение

$$\gamma = \frac{An^{1/2}}{3(a + An^{1/2})[1 + \sqrt{a + An^{1/2}}]}, \quad (6)$$

где

$$A = \frac{2(3\pi^2)^{1/2} \left(\frac{h}{2\pi}\right) m_0^*}{\varepsilon_g m_0^2} \text{ и } a = \left(\frac{m_0^*}{m_0}\right)^2$$

По вычисленным значениям $\frac{m_0^*}{m_0}$ и ε_0 при температурах 300°, 200° и 90°K определена концентрационная зависимость $\gamma(n)$.

Максимальное отличие γ_{300K} и γ_{90K} составляет около 10%. На рис. 1 представлена зависимость $\gamma(n)$ при 90°K. Таким образом, зная m^* , T , n и γ согласно (3) и (4), были вычислены теоретические значения α_0 и $\Delta\alpha_\infty$ при определенных значениях r . На рис. 2а и 2б представлены теоретические кривые концентрационной зависимости $\alpha_0(n)$

$\Delta\alpha_\infty(n)$ при 90°K для механизмов рассеяния: акустического $r = -\frac{1}{2}$,

пьезоакустического и оптического $r = \frac{1}{2}$ и резерфордовского $r = \frac{3}{2}$

Из рис 1 и 2 видно, что экспериментальные значения α_0 и $\Delta\alpha_\infty$ во всем исследованном диапазоне концентраций хорошо укладываются на кривую $r = +\frac{1}{2}$.

Из рис 2б видно, что для $r = +\frac{1}{2}$ теоретическое значение $\Delta\alpha_\infty(n)$ при $n = 3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ меняет знак. В работе [11] было указано на такое поведение $\Delta\alpha_\infty(n)$ для HgSe. Однако ввиду того, что в HgSe невозможно было получить $n < 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, смены знака экспериментально не наблюдалось. В кристаллах смена знака HgTe была наблюдаема и экспериментально. Подобные расчеты теоретических

значений α_0 и $\Delta\alpha_\infty$ сделаны и при 200 и 300°K. При этих температурах экспериментальные значения α_0 и $\Delta\alpha_\infty$ также укладываются на теоретическую кривую с $r = +\frac{1}{2}$ (рис. 3а и 3б). Согласно теории

$r = +\frac{1}{2}$ при низких температурах соответствуют рассеянию на пье-зоакустических колебаниях решетки, а при высоких—рассеянию на оптических фононах. Однако необходимо отметить, что эти результаты получены при упругом характере механизма рассеяния.

Влияние неупругого характера рассеяния, обусловленного взаимодействием электронов с оптическими фононами, на кинетические коэффициенты рассмотрено в работе [10]. В этой работе приводятся формулы для α_0 и $\Delta\alpha_\infty$ с учетом неупругого столкновения носителей оптическими фононами. В конкретном случае кейновского спектра энергии формулы для α и $\Delta\alpha_\infty$ можно представить в следующем виде:*

$$\alpha_0 = \frac{\kappa_0}{e} \frac{4\pi^2}{3} \cdot \frac{\beta y}{1-y^2} \left[\frac{L_{\text{экс}}}{L_{\text{теор}}} \left(r - \frac{1}{2} + y^2 \right) + 1 \right], \quad (7)$$

и

$$\Delta\alpha_\infty = \frac{\kappa_0}{e} \frac{4\pi^2}{3} \frac{\beta y}{1+y^2} \left[\frac{L_{\text{экс}}}{L_{\text{теор}}} \left(r - \frac{1}{2} + y^2 \right) - \frac{1}{2} \right], \quad (8)$$

где

$$y = \frac{m_0^*}{m^*}; \quad \beta = \frac{\kappa_0 T}{\varepsilon_g}$$

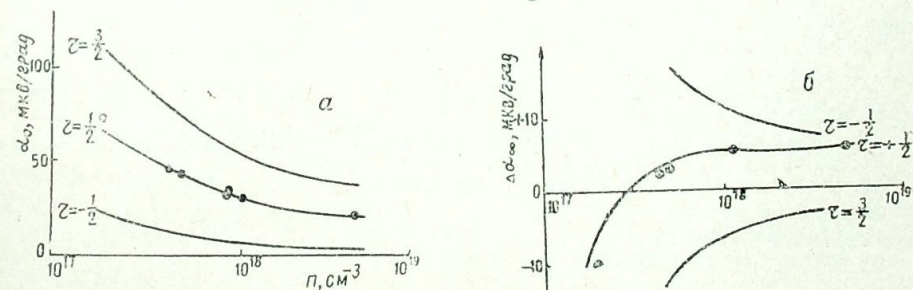


Рис. 2. Теоретические кривые концентрационной зависимости термоэда (а) и магнетотермоэда (б) при различных механизмах рассеяния. Кружками обозначены экспериментальные значения при $T = 90^\circ \text{K}$.

В нашем случае вместо ε_g необходимо брать ε_0 [12], таким образом, пользуясь данными о $L_{\text{экс}}$, истинное значение $r_{\text{ис}}$ было вычислено по формуле:

$$r_{\text{эф}} = r_{\text{ис}} - \left(\frac{L_{\text{теор}} - L_{\text{экс}}}{L_{\text{теор}}} \right) \left(r_{\text{ис}} - \frac{1}{2} + y^2 \right). \quad (9)$$

Отсюда для $r_{\text{ис}}$ при 90°K и 200°K получаем интервал значений $0,5 \leq r \leq 0,65$.

* Авторы выражают благодарность Л. Л. Коренблиту за предоставление формул (7) (8) до их публикации.

Отсюда видно, что ввиду малого значения отношения $\frac{L_{\text{экс}}}{L_{\text{теор}}} = 0,8$ [8] (в отличие от HgSe) в HgTe $r_{\text{ис}}$ также мало отличается от HgSe, т.е. в отличие от HgSe в HgTe степень неупругости $\frac{L_{\text{экс}}}{L_{\text{теор}}}$ меньше.

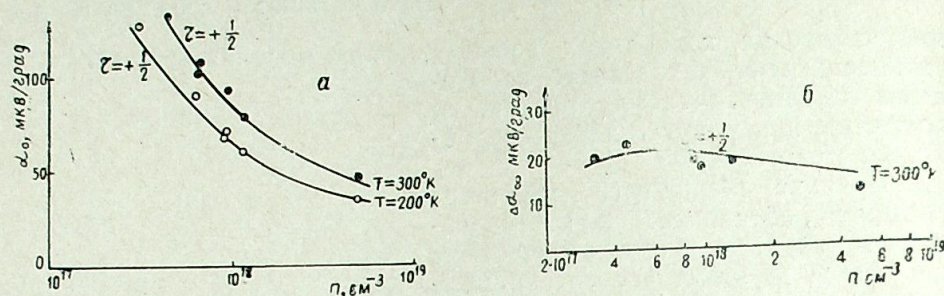


Рис. 3. Теоретические кривые и экспериментальные данные о концентрационной зависимости α_0 и $\Delta\alpha_{\infty}$ для $r = +\frac{1}{2}$

Исходя из этих данных трудно на данном этапе однозначно заключить о физической природе механизма рассеяния электронов. Однако можно полагать, что в теллуриде ртути в рассеянии электронов основную роль играют оптические фононы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rodot M., Rodot H. „C. r. Acad. sci.“ 250, 1447, 1960.
2. Rodot M. „Ann. p. phys.“, 5, 1083, 1960.
3. Попович Г. „Rev. phys. Acad. RPR“, 8, 269, 1963.
4. Чубова Л. Л., Гавалешко М. П., Еременко В. В. УФЖ, 10, 630 1965.
5. Wagini H. „Phys. stat. sol.“ 15 457, 1966.
6. Verie et Descamps E., „Phys. stat. sol.“, 9, 797, 1965.
7. Петжовски Р., Поровски С. Сб. „Физические свойства полупроводников АШВ и АШ ВІ“, стр. 43 и 59. Изд. АН Азерб. ССР, Баку, 1967.
8. Муждаба В. В., Огородников В. К., Алиев С. А., Шалыт С. С. ФТТ, 11 545, 1969.
9. Алиев С. А., Гаджиев Т. Г., Алиев Э. М. Алиев М. И. Изв. АН Азерб. ССР, № 6, 1969.
10. Коренблит, Л. Л., Шерстобитов В. Е. ФТП. 2, 688, 1968.
11. Шалыт С. С., Алиев С. А. ФТТ 6, 1979, 1964.
12. Groves S. H. and Paul W. „Phys. Rev. Letters“, 11, 194, 1963.

Институт физики
Азербайджанский
политехнический институт

Поступило 23. IX. 1969

С. А. Әлијев, Т. Һ. Һачыјев, Е. М. Әлијев, М. И. Әлијев

Чивә-теллур бирләшмәсиндә электронларын сәпилмә механизмләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда термо $Eh\Gamma - \alpha_0$ вә магнитотерм $-\Delta\alpha_{\infty}HgTe$ -да кениш температур вә консентрасија интервалында өлчүлмүшдүр. Алынған нәтичәләрин әсасында кечиричи золағын гејри-параболиклијин температурдан асылы олараг дәјишмәсини вә сәпилмәнин гејри-эластик характер дашымысыны нәзәрә алмаг шәрти илә сәпилмә механизми мүүјән олунмушдүр. Ајдылашдырылмышдыр ки, электронлар әсасән гәфәсин оптик рәгсләриндән сәпилир.

Н. А. АЛИЕВ, Ф. Г. МАГЕРРАМОВА, Б. А. АХМЕДОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕРМООБРАБОТКИ НА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СТАЛИ МАРКИ 36Г2С

В работе [1] была исследована теплопроводность легированной стали марки 36Г2С. Сопоставление средних значений коэффициента теплопроводности исследованных плавок стали с литературными данными [2] показало, что он примерно на 25% меньше, чем у чистого железа.

Уменьшение коэффициента теплопроводности исследуемой стали объяснялось наличием в ее составе марганца.

Из литературы известно, что наилучшими физико-механическими свойствами легированная, к примеру марганцовистая сталь, обладает после соответствующей термообработки [3]. Относительно влияния термической обработки на теплопроводность исследуемой марки стали нет почти никаких данных [4]. Поэтому исследование влияния различного вида термообработки на теплопроводность легированных сталей представляет как теоретический, так и практический интерес.

В настоящей работе исследовалось влияние термообработки на теплопроводность 2 партий стали марки 36Г2С, отличающихся содержанием марганца. Состав сталей приведен в табл. 1

Объектами исследования были выбраны трубы, прокатанные из указанной стали на Азербайджанском трубопрокатном заводе и подвергнутые различным видам термообработки. Температура нагрева исследуемых труб под закалку была 900°C, а температура отпуска — 600°C.

Для исследования теплопроводности из труб вырезались полосы, из которых затем изготавливались образцы.

Измерение теплопроводности производилось в стационарном тепловом поле в вакууме, при комнатной температуре. Средние значения коэффициента теплопроводности приведены в табл. 2.

Как видно из табл. 2, с увеличением процентного содержания марганца в составе исследуемой стали наблюдается уменьшение теплопроводности как в исходном состоянии, так и после термообработки. Минимальное значение коэффициента теплопроводности для обеих партий соответствует из прокатанных, нормализованных и отожженных труб. Это объясняется тем, что при медленном охлаждении марганцовистой стали в ней происходит выпадение карбидов, располагающихся между зернами аустенита, что, по-видимому, приводит к уменьшению теплопроводности.

После закалки исследуемых труб водой для обеих партий достигается максимальное значение теплопроводности. В работе [5] показано, что при закалке в воде на резьбовой части труб образуются микро-

трещины, а также значительная деформация, в результате чего при бурении происходит разрушение труб.

Для устранения этих дефектов в качестве охлаждающей среды при закалке труб, нагретых ТВЧ, применялся сжатый воздух с определенным давлением ($P=2$ атм до температуры 150°C), подаваемый

Таблица 1

Марка стали	№ плавки	Химический состав в процентах						
		C	Mn	Cr	Ni	Si	S	P
36Г2С	4283	0,27	1,50	0,04	0,08	0,45	0,026	0,034
	1606	0,40	1,93	0,03	0,06	0,40	0,020	0,024

через спрейер. Несмотря на то, что при закалке сжатым воздухом значение коэффициента теплопроводности исследуемых образцов примерно на 7—10% меньше, чем после закалки водой, при такой скорости охлаждения указанные дефекты не наблюдаются [6, 7].

Таблица 2

№ п/п.	Вид термообработки	Теплопроводность, кал/см·град·сек	
		I партия	II партия
1.	Прокатанный	0,117	0,102
2.	Нормализованный	0,126	0,107
3.	Отоженный	0,118	0,102
4.	Закалка в воде без отп.	0,149	0,144
5.	Закалка в воде с отпуском.	0,127	0,114
6.	Закалка обдувкой без отп.	0,139	0,134
7.	Закалка обдувкой с отп.	0,125	0,109

Известно, что закалка приводит сталь в неравновесное состояние. Для приведения стали из такого состояния в более равновесное необходимо закаленную сталь подвергать соответствующему отпуску. При такой обработке наблюдается уменьшение значения коэффициента теплопроводности. Это объясняется тем, что при отпуске происходит укрупнение зерен [8], что является причиной уменьшения коэффициента теплопроводности исследуемой марки стали.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Н. А., Магеррамова Ф. Г., Ахмедов Б. А., Мусазаде М. М. „Изв. АН Азерб. ССР“, сер. ФТМН, 1968, № 5.
2. Aarås Sigurds, Olwey B. F., Dimpuy U. R. Journal Appl. Phys. 1965, 36, № 4.
3. Аронович М. С. и Лахтин Ю. М. Основы металловедения и термической обработки. Металлургиздат, 1952.
4. Лившиц Б. Г. Физические свойства металлов и сплавов. Машгиз, 1956.
5. Усейнов И. А., Ахмедов Б. А. „За технический прогресс“, 1967, № 4.
6. Петраш Л. В. Закалочные среды. М., Машгиз, 1959.
7. Ланкин П. А. „Металловедение и термическая обработка металлов“. № 4, 1967.
8. Алиев Н. А., Магеррамова Ф. Г., Ахмедов Б. А. „АН Азерб. ССР“, 1970, № 8.

Институт физики

Поступило 23. IX 1969.

Н. Э. Алиев, Ф. Г. Магеррамова, Б. А. Ахмедов
36Г2С маркалы поладын истиликкечирмәсинә
термик ишләмәнин тәсиринин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Тәркибиндә мұхтәлиф мигдарда марганс олан 36Г2С маркалы поладдан һазырланмыш боруларын истиликвермә габилијјәтини өјрәнмәк вә табландырма температуруну мүүјјән етмәк мәгсәдилә онларын истиликкечирмәси тәјин едилмишдир. Истиликкечирмә әмсалынын максимум гијмәти су илә табландырылмыш боруларә тәвафүг едир. Лакин су илә табландырма заманы боруларын јив ачылмыш учларында микрочатлар вә деформасија јарандығындан, һәммин дефектләри арадан галдырмаг мәгсәдилә табландырма просесиндә сыхылмыш һавадан истифадә олунмушдур. Бу һалда истиликкечирмә әмсалынын гијмәти су илә табландырма һалына нисбәтән 7—10% кичик алыныр.

Мүүјјән едилмишдир ки, табландырылмыш нүмунәләрин истиликкечирмә әмсалы табәксилтмә просесиндә азалыр. Бу да табәксилтмә просесиндә поладын зәррәләринин бөјүмәси илә изаһ олунур.

З. А. ДЖАФАРОВ, С. А. АЛИЕВ, М. И. АЛИЕВ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В СИЛЬНОЛЕГИРОВАННЫХ КРИСТАЛЛАХ InAs, GaSb и InSb

В работе [1] исследована теплопроводность монокристаллического образца InSb с концентрацией электронов $7 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Авторы [1], сопоставляя свои результаты с результатами [2], в которой также исследована теплопроводность InSb ($n=10^{17} \text{ см}^{-3}$), приходят к выводу, что в InSb при низких температурах, когда основную роль в рассеянии фононов играют дефекты, теплопроводность решетки κ_r до $n=10^{17} \text{ см}^{-3}$ не зависит от количества электроактивных примесей.

Исходя из этого заключения и экспериментального факта, что в кристаллах InSb и InAs [1, 3] в интервале температур 30–100°K $\kappa_r(T)$ имеет вид $\kappa_r \sim T^{-2}$, в работе [1] указывается на то обстоятельство, что при таких концентрациях, возможно, и в InAs κ_r не будет зависеть от количества примеси.

Поэтому в данной работе была поставлена задача экспериментально проследить за ролью примесей в рассеянии фононов в кристаллах InAs, InSb и GaSb в широком концентрационном и температурном интервале.

С этой целью на 6 монокристаллических образцах n -InAs, на 5 крупноблочных образцах p -GaSb, легированных до 1 ат% Те и Ge соответственно, и на одном монокристаллическом образце n -InSb, легированном до 0,1 ат% Se, была исследована теплопроводность.

В результате легирования концентрация электроактивных примесей доходила в InAs до $6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, в InSb—до $1 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, а в GaSb—до $1,5 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$.

На рис. 1, а представлена температурная зависимость общей теплопроводности для исследованных образцов InAs. Теплопроводность образца № 1 совпадает с данными работы [3]. Из рис. 1, а видно, что с понижением температуры проявляется четкая концентрационная зависимость $\kappa_{\text{общ}}$.

Для выяснения физического смысла этого экспериментального факта необходимо электронную κ_e и решеточную κ_r составляющие теплопроводности рассматривать в отдельности. В InAs κ_e при температурах жидкого азота составляет ничтожную долю от общей и поэтому магнитное поле напряженностью до 21 кэ не влияло на $\kappa_{\text{общ}}$. При температуре 300°K для сильнолегированных образцов κ_e достига-

*Согласно теории Каллавея [4], при низких температурах $\kappa_r(T)$ в химически чистых и изотопически однородных кристаллах должна подчиняться закону $\kappa_r \sim T^{-2}$, а значительное рассеяние на точечных дефектах приводит к $\kappa_r \sim T^{-3/2}$.

ла 25%. Однако ввиду малого значения подвижности электронов невозможно было в доступных нам магнитных полях определить κ_e . Поэтому κ_e была оценена согласно соотношению Видемана—Франца $\kappa_e = L\sigma T$ (в приближении упругого характера рассеяния). На рис. 1, б представлена температурная зависимость κ_r , из которой видно, что

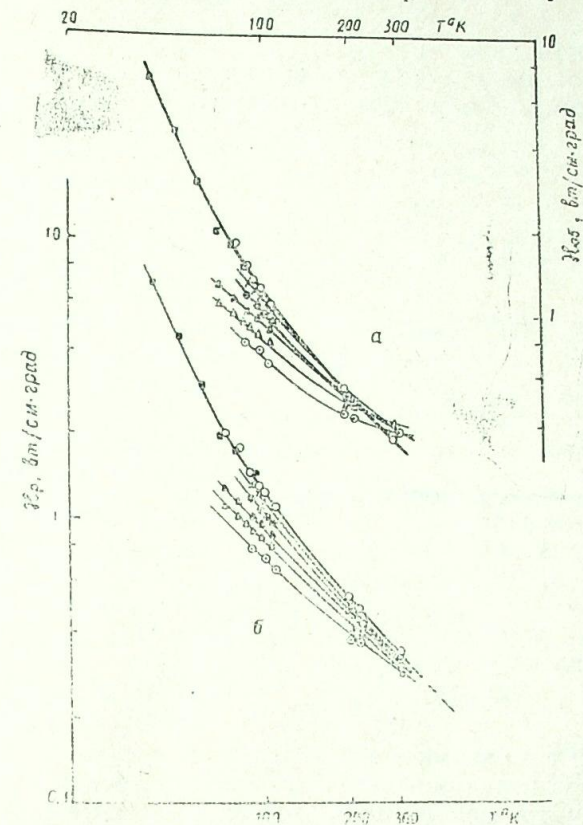


Рис. 1. Температурная зависимость теплопроводности InAs:

а — общая теплопроводность $\kappa_{\text{общ}}$; б — решеточная теплопроводность κ_r .

при низких температурах с ростом концентрации в InAs κ_r уменьшается, причем в законе $\kappa_r \sim T^{-x}$ заметно убывает значение x . На рис. 2 и 3 при температурах 90, 200 и 300°K представлены концентрационные зависимости $\kappa_r(n)$ для InAs и GaSb, соответственно. Из рис. 2 видно, что κ_r в InAs до $n=10^{18} \text{ см}^{-3}$ постоянна, а при $n>10^{18} \text{ см}^{-3}$ начинает убывать, причем с понижением температуры уменьшение κ_r становится более резким. В случае GaSb с ростом концентрации p от 10^{17} см^{-3} до 10^{20} см^{-3} κ_r убывает монотонно (рис. 3). Измерения при 90°K на образце InSb с $n=1 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ показали, что κ_r по сравнению с чистыми кристаллами, исследованными в работах [1, 2] также уменьшается (примерно на 25%).

Приведенные здесь экспериментальные данные (уменьшение x и κ_r от n) качественно указывают на роль примесей в рассеянии фононов.

Количественное сопоставление экспериментальных результатов с теорией сравнительно затруднено, особенно $\kappa_r(T)$. Однако более надежные расчеты можно произвести по определению теплового сопро-

тивления W_i , обусловленного рассеянием фононов на точечных дефектах в зависимости от количества примесей. При $T < 0$, согласно теории Клеменса [5], W_i выражается следующей формулой:

$$W_i = \frac{\pi^2}{0,9} \frac{c(1-c)(M_2 - M_1)^2 T}{hNV^2 M^{-2}} \quad (1)$$

где $\bar{V}$ — скорость звука;
 N — число атомов в единичном объеме;
 M_1, M_2 — массы атомов двух различных изотопов.

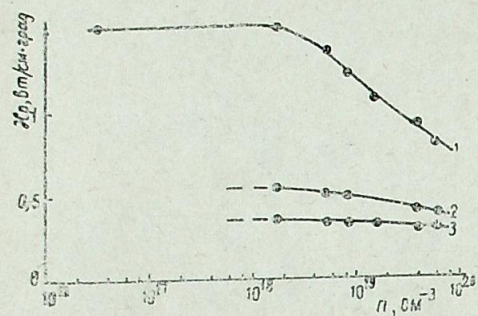


Рис. 2. Концентрационная зависимость W_i для InAs.

где

$$\lambda_0 = \frac{4\pi^2 K_0 M}{h^2 N \gamma^2}$$

$$\lambda_i^0 = \frac{1}{4\pi^3 q^4} \frac{N}{c(1-c)} \left(\frac{\bar{M}}{\Delta M} \right)^2$$

K, γ — постоянные Больцмана и Грюнайзена;
 q — предельное значение волнового числа.

Хотя рассматриваемые здесь теории пригодны в случае рассеяния на изотопах, однако они могут быть применены и в случае других типов точечных дефектов.

		I n As					GaSb					InSb
<i>c</i>		0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001	0,01	0,005	0,001	0,9005	0,0001	0,001
90°K	<i>W</i> _{экс}	0,58	0,34	0 24	0,18	0,10	0,23	0,20	0,17	0,14	0,11	0,25
	<i>W</i> _i Клеменс	0,75	0,37	0,7	0,04	0,007	0,63	0,32	0,06	0,03	0,006	0,11
	<i>W</i> _i Займан	41,00	20,50	4,10	2,05	0,41	34,00	17,00	3,44	1,70	0,34	0,60
	<i>W</i> _i Берман	4,30	3,20	1,36	0,90	0,42	8,15	5,70	2,50	1,60	0,82	—
300°K	<i>W</i> _{экс}	0,47	0,35	0,26	0,17	0,08	0,53	0,44	0,36	0,28	0,21	—
	<i>W</i> _i	0,81	0,4	0,08	0,04	0,01	0,55	0,27	0,06	0,03	0,005	—

При введении в кристалл небольшого количества примесей с различными атомными весами можно полагать, что возникшее дополнительное тепловое сопротивление в основном создается локальными флуктуациями плотности. Поэтому сравнение наших экспериментальных результатов с вышеприведенными теориями можно считать обоснованным.

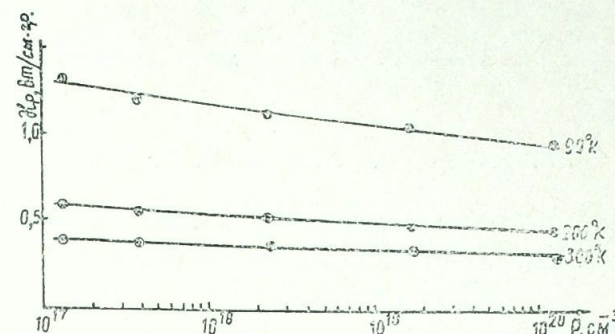


Рис. 3. Концентрационная зависимость W_i для CaSb.

В таблице приведены результаты расчетов и экспериментальных данных ($W_{\text{экс}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_L} - \frac{1}{\alpha_H}$) теплового сопротивления при 90°K, из которых видно, что экспериментальные данные при малых значениях c ($c \approx 0,0001$) сравнительно лучше согласуются с теорией Займана, а при больших — с теорией Клеменса и Бермана.

Такое сравнение впервые было сделано Токсеном [9] для раствора Ge—Si. Он также заметил, что при малых c экспериментальные результаты хорошо соответствуют теории Займана, а при больших значениях — теории Клеменса.

Экспериментальные данные о W_i при 300°K сравнивались с теорией Клеменса, развитой для высоких температур, согласно которой:

$$W_i = \frac{\pi^2 \theta c(1-c)}{3h^2 v^2 N} \frac{(M_2 - M_1)^2}{M^2} \quad (2)$$

Из этой формулы видно, что W_i при высоких температурах от T не зависит.

Исследование теплопроводности GaSb до 500°K показало, что значение $W_{\text{экс}}$ в интервале 300—500°K постоянно и равно примерно $0,70 \frac{\text{см} \cdot \text{град}}{\text{вт}}$. Этот результат может явиться качественным подтверждением того, что дополнительное сопротивление обусловлено рассеянием фононов на примесях.

Сравнение экспериментальных результатов с теорией показало, что хорошее согласие наблюдается лишь при значении $c \approx 0,01$.

Таким образом, полученные экспериментальные результаты дают основание полагать, что при температурах жидкого азота в монокристаллических образцах InAs и InSb рассеяние фононов на примесях до концентрации электронов 10^{18} см^{-3} действительно не играет заметной роли, а при $n > 10^{18} \text{ см}^{-3}$ становится существенным. В случае GaSb вклад рассеяния фононов на примесях сказывается во всем исследованном интервале концентраций.

Из полученных результатов следует и тот факт, что при высоких температурах ($T > 300^\circ\text{K}$) даже в сильнолегированных образцах InAs и GaSb преобладающим механизмом рассеяния фононов являются трехфононные процессы перебора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шалыт С. С. и Тамарин П. В. ФТТ 9, 2327, 1964.
2. Frederikse H. P., Mielszarek E. V. Phys. Rev., 115, 888, 1959.
3. Шалыт С. С. ФТТ 4, 1915, 1962.
4. Callaway J. Phys. Rev., 113, 1046, 1959.
5. Klemens P. G. Proc. Roy. Soc., London, A208, 108, 1951.
6. Ziman J. M. Canad. Journ. Phys., 34, 1256, 1956.
7. Berman R., Nettley P. F., Sheard F. W., Spencer A. N., Stevenson R. H., Ziman J. M. Proc. Roy. Soc., London, A253, 403, 1959.
8. Драбл Дж., Голдсмит Г. Теплопроводность полупроводников. М., 1963.
9. Тохен А. М. Phys. Rev., 110, 585, 1958.

Институт физики

Поступило 23. IX 1969

З. А. Чәфәров, С. А. Әлијев, М. И. Әлијев

Јүксәк лекирә олунмуш InAs, GaSb вә InSb кристалларынын истиликкечирмәси

ХУЛАСӘ

Тәдгигатларда кениш консентрасијавә температур интервалында InAs, GaSb вә InSb кристалларында истиликкечирмә өјрәнилмишдир. Мүәјјән олунмушдур ки, InAs вә InSb кристалларында гәфәсин истиликкечирмәси електроактив ашгарларын консентрасијасы $n=10^{18} \text{ см}^{-3}$ оладәк сабит галыр вә n -ин сонракы артмасы илә χ_p азалмаға башлајыр. GaSb кристалларында исә истиликкечирмә ($p=10^{17}-10^{20} \text{ см}^{-3}$) монотон азалыр.

Мүәјјәнләшдирилмишдир ки, маје азот температурунда исә һәтта јүксәк лекирә олунмуш кристалларда белә үчфононлу просес үстүнлүк тәшкил едир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри серијасы, 1970, № 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 4

Р. Н. ИСКЕНДЕРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОЭДС МОНОКРИСТАЛЛОВ MnO

Вопрос применимости зонных представлений к окислам переходных металлов в настоящее время является предметом обсуждений. Предполагается, что вследствие узости исходных зон и сильной электрон-фононной связи носители тока в окислах переходных металлов образуют поляроны малого радиуса. Движение носителей сопровождается поляризацией решетки, с повышением температуры, подвижность их растет, а не уменьшается, как в обычных полупроводниках. Однако достоверные экспериментальные данные, позволяющие установить механизм движения носителей тока в окислах, до сих пор отсутствуют. Поэтому в свете вышесказанного исследования кинетических параметров MnO — наиболее типичного представителя 3d-окислов, представляет большой интерес.

Электрические свойства чистой закиси марганца MnO и $Li_xMn_{1-x}O$ впервые исследованы Хайксом и Джонстоном [1]. Ими показано, что MnO обладает дырочной проводимостью и максимальной энергией активации электропроводности среди окислов NiO , CoO и MnO . Зависимость электропроводности от температуры и от концентрации примесей авторами объяснена термически активированной подвижностью дырок.

Холловская подвижность носителей в кристаллах $Li_xMn_{1-x}O$ исследована Нагелсом и Денауэром [2]. Показано, что в области 20 — 500°C основным типом носителей являются дырки с подвижностью $5,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$. Подвижность дырок в области 150 — 250°C слабо растет с температурой и при более высоких температурах остается постоянной. Энергия активации, определенная из наклона кривой зависимости электропроводности от температуры, составляет 0,34 эв, и эта энергия авторами отнесена к энергии освобождения дырок из комплекса $Li^+ - Mn^{3+}$.

В более поздней работе [3] показано, что проводимость $Li_xMn_{1-x}O$ является дырочной и энергия акцепторного уровня равна 0,64 эв. Расчеты, проведенные авторами, дали очень высокое значение плотности состояния и эффективности массы. По мнению авторов, это соответствует тому, что дырки движутся в узкой зоне. Ширина запрещенной зоны, определенная из наклона электропроводности для MnO равна $E_d = 2,6 \text{ эв}$.

Однако из оптических [4] и фотоэлектрических [5] измерений ширина запрещенной зоны оценена величиной не меньше 4 эв.

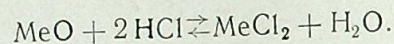
В отличие от других окислов переходных металлов, MnO может

обладать как дырочной, так и электронной проводимостью, в зависимости от преобладания вакансий Мп или междоузельных атомов Мп.

Во всех указанных работах исследованные кристаллы были либо поликристаллическими, либо несовершенными монокристаллами.

Для определения степени компенсации и примесных уровней, а также для получения определенных сведений о механизме проводимости в МпО нами исследованы температурная зависимость электропроводности и термоэдс в чистых монокристаллах МпО.

Монокристаллы были выращены методом химического переноса в малом зазоре при помощи реакций типа:



Удельное сопротивление монокристаллов МпО при $T = 300^\circ\text{K}$ лежало в пределах $10^{10} - 10^{11}$ ом·см, что показывает значительно меньшую концентрацию дефектов в решетке по сравнению с кристаллами, выращенными другими методами.

Электропроводность и термоэдс были измерены в температурном интервале $350 - 830^\circ\text{K}$, на постоянном токе, компенсационным методом. В качестве нуль-прибора использовали электромметр типа В2-5 со входным сопротивлением 10^{13} ом.

Температурная область исследования со стороны высоких температур ограничивалась тем, что МпО очень чувствителен к окружающим газам, которые при высоких температурах, даже при остаточном давлении 10^{-6} мм Нг, приводит к резкому уменьшению сопротивления образца. Исследование температурной зависимости электропроводности показало, что с увеличением температуры электропроводность растет с энергией активации 0,63 эв для МпО—I и 0,59 эв для МпО—2, что совпадает с данными работы [3].

Из кривой температурной зависимости термоэдс (рисунок) видно, что с повышением температуры термоэдс растет, проходит через максимум и с дальнейшим увеличением температуры падает. Положительный знак термоэдс указывает на то, что в области исследования преимущественным типом носителей являются дырки.

Однако появление максимума в кривой термоэдс свидетельствует об участии двух типов носителей в проводимости — дырок в валентной зоне и электронов по акцепторным уровням [6—7]. Следовательно, в монокристаллах МпО имеется преобладающее количество дефектов акцепторов и компенсирующие их дефекты-доноры.

Из температурной зависимости термоэдс можно определить энергию примесных центров и степень компенсации.

Согласно теории компенсированных полупроводников, при низких температурах $N_v \ll N_d \exp[E_{a/кТ}]$ концентрация дырок выражается как:

$$P = N_v \left[\frac{N_a - N_d}{N_d} \right] \exp[-E_{a/кТ}], \quad (1)$$

где N_v — эффективная плотность состояний; N_a и N_d — соответственно концентрация акцепторных и донорных центров; E_a — энергия акцепторного центра.

С другой стороны, концентрация дырок связана с термоэдс следующим соотношением:

$$P = N_v \exp\left(-\frac{e\alpha}{\kappa} + A\right), \quad (2)$$

где A — кинетический член
Из (1) и (2) имеем

$$\frac{E_a}{\kappa T} = \frac{e\alpha}{\kappa} + \ln \frac{N_a - N_d}{N_d} - A \quad (3)$$

На рис. 3 приведена зависимость $e\alpha/\kappa$ от температуры в области выше температуры максимума термоэдс.

Из наклона получаем величину энергии акцепторного уровня E_a , которая равна $\sim 0,68$ эв. Экстраполируя кривую к $n \rightarrow \infty$, из уравнения (3) получаем суммарную величину степени компенсации и кинетического члена:

$$\ln \frac{N_d}{N_a} = \frac{e\alpha}{\kappa} - A.$$

Экстраполированная величина $\frac{e\alpha}{\kappa} = -1,5$. Принимая, что кинетический член лежит в пределах $0 - 2,5$, для степени компенсации получаем $\frac{N_d}{N_a} = (22 - 3)\%$ соответственно, т. е. степень компенсации велика. Этим и объясняется высокая температура максимума термоэдс.

Концентрацию носителей тока-дырок можно вычислить из величины термоэдс при различных предположениях о величине эффективной массы плотности состояний. Предположим, что эффективная масса носителей тока лежит в пределах $(1 - 10) m_0$. Согласно зонной теории, плотность состояния определяется по формуле:

$$N_v = \frac{2(2\pi m^* \kappa T)^{3/2}}{h^3}$$

Вычисленные величины плотности состояния, концентрации носителей тока по формуле

$$P = N_v \exp\left(-\frac{e\alpha}{\kappa} + A\right)$$

и величины подвижности из данных электропроводности приведены в таблице, из которой видно, что подвижность носителей тока уменьшается с ростом температуры, однако абсолютные величины подвижности сильно зависят от исходных предположений о величине эффективной массы. Полученные абсолютные величины подвижности занижены, поскольку нами не учтен вклад в термоэдс электронов,двигающихся по примесным центрам.

$T^\circ\text{K}$	N_v	m^*/m	P (см $^{-3}$)	см 2 /в·сек
500	$5,6 \cdot 10^{19}$	1	$2,8 \cdot 10^{13}$	0,1
830	$1,2 \cdot 10^{20}$	1	$3,7 \cdot 10^{16}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$
500	$1,75 \cdot 10^{21}$	10	$9 \cdot 10^{14}$	$3 \cdot 10^{-3}$
830	$3,7 \cdot 10^{21}$	10	$1,2 \cdot 10^{18}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$

Полученные абсолютные величины подвижности занижены, поскольку нами не учтен вклад в термоэдс электронов,двигающихся по примесным центрам.

Если применить формулы теории полярона малого радиуса к расчету концентрации носителей тока из величины термоэдс, то получаем также подвижность, уменьшающуюся с ростом температуры.

Вычисленная подвижность согласно формулам теории полярона малого радиуса равна $9 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$ при 500°K и $6,1 \cdot 10^{-5}$ при 800°K , т. е. также падает с увеличением температуры и, следовательно, механизм проводимости в MnO скорее всего можно интерпретировать с позиции зонной теории.

Таким образом, несмотря на то, что исходное предположение теории полярона малого радиуса в некоторой степени подтверждается (сильная электрон-фононная связь [4], узость зоны Mn^{2+}), по-видимому, этого недостаточно для образования полярона малого радиуса.

В заключение выражаю свою благодарность Я. М. Ксендзову за постоянный интерес и ценные указания при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайкс Р., Джонстон У. Диэлектрическая спектроскопия. М., 1960.
2. Nagels P. N., Denayer M. Solid State Commun. 5, 193, 1967.
3. Ali M., Fridman M., Denayer M., Nagels P. Phys. St. Sol. 28, 193, 1968.
4. Искендеров Р. Н., Дабкин И. А., Емельянова Л. Т., Ксендзов Я. М. ФТТ, 10, 2573, 1968.
5. Дабкин И. А., Емельянова Л. Т., Искендеров Р. Н., Ксендзов Я. М. ФТТ, 10, 3082, 1968.
6. Ксендзов Я. М., Авдеенко Б. К., Макаров В. В. ФТТ, 9, 1058, 1967.
7. Bosman A. J. Crevesoeur C. Phys. Rev. 144, 763, 1966.

Институт физики

Поступило 21.X 1969

Р. Н. Искэндэров

MnO монокристаллынын электрик кечиричилијинин вә термо $\text{Eh}\Gamma$ -нин тәдгиги

$350 - 830^\circ\text{K}$ температур интервалында кимјәви көчүрмә реаксиялары васитәсилә алынмыш MnO монокристаллынын электриккечирмәси вә термо $\text{Eh}\Gamma$ өјрәнилмишдир.

Мүәјјән едилмишдир ки, MnO кристалында компенсација тәртиби јүксәк вә ашгар сәвијјәсинин енерјиси $0,63 \text{ эв}$ -дир. Кечиричилик зона нәзәријјәси илә изаһ олуна биләр.

ОБ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ В СИСТЕМЕ АНТИМОНИД ГАЛЛИЯ — ГЕРМАНИЙ

Существенная возможность расширения области применения широко известных полупроводниковых соединений типа $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$ связана с созданием твердых растворов на их основе с целью изменения их основных физических параметров с изменением состава.

Среди твердых растворов на основе $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$ наибольший интерес должны были бы представлять растворы типа $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}} - \text{A}^{\text{IV}}$. Однако, согласно литературным данным, растворимость A^{IV} в соединениях $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$ весьма ограничена. В то же время пределы этой растворимости нельзя считать твердо установленными.

В частности, принимая во внимание сходство кристаллических структур, близость параметров решетки и одинаковый тип химической связи, можно ожидать заметную растворимость германия в антимониде галлия.

В литературе [1, 2] встречается лишь ссылка на частное сообщение Мак Колдина об ограниченной растворимости ($\sim 2 \text{ ат}\%$) германия в GaSb . Более подробные исследования [3, 4] относятся лишь к растворимости антимонида галлия в германии. В связи с этим целью настоящей работы явилось исследование растворимости германия в антимониде галлия.

Предварительный анализ системы CaSbGe можно провести на основании сведений о бинарных системах $\text{Ga} - \text{Rb}$, $\text{Ga} - \text{Ge}$ и $\text{Ge} - \text{Sb}$ [12].

Система $\text{Ga} - \text{Sb}$ была изучена посредством термического, микроскопического и рентгеновского анализов [5, 6]. Диаграмма состояния этой системы эвтектического типа (эвтектика имеет состав $89 \text{ ат}\%$ Sb и температуру плавления $630,5^\circ\text{C}$), в которой имеется одно соединение — антимонид галлия, плавящееся конгруэнтно при 706°C . Соединение GaSb имеет структуру типа цинковой обманки с параметром решетки $a = 6,105 \pm 0,006 \text{ \AA}$ [7].

Диаграмма состояния системы GaGe была установлена методом термического анализа [8]. Эвтектическая точка совпадает с точкой плавления чистого галлия. Установлено [9], что при 600°C растворимость галлия в германии порядка $2,1 \text{ ат}\%$, причем галлий несколько расширяет решетку германия.

Диаграмма состояния системы $\text{Ge} - \text{Sb}$ также эвтектического типа изучалась в работах [10, 11] методом термического, металлографического и рентгеновского анализов. Рентгенографическим анализом показано, что растворимость Ge при 540°C составляет $\sim 2,5 \text{ ат}\%$, а растворимость Sb равна $\sim 2,4 \text{ ат}\%$.

Если применить формулы теории полярона малого радиуса к расчету концентрации носителей тока из величины термоэдс, то получаем также подвижность, уменьшающуюся с ростом температуры.

Вычисленная подвижность согласно формулам теории полярона малого радиуса равна $9 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$ при 500°K и $6,1 \cdot 10^{-5}$ при 800°K , т. е. также падает с увеличением температуры и, следовательно, механизм проводимости в MnO скорее всего можно интерпретировать с позиции зонной теории.

Таким образом, несмотря на то, что исходное предположение теории полярона малого радиуса в некоторой степени подтверждается (сильная электрон-фононная связь [4], узость зоны Mn^{2+}), по-видимому, этого недостаточно для образования полярона малого радиуса.

В заключение выражаю свою благодарность Я. М. Ксендзову за постоянный интерес и ценные указания при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайкс Р., Джонстон У. Диэлектрическая спектроскопия. М., 1960.
2. Nagels P. N., Denayer M. Solid State Commun. 5, 193, 1967.
3. Ali M., Fridman M., Denayer M., Nagels P. Phys. St. Sol. 28, 193, 1968.
4. Искендеров Р. Н., Дабкин И. А., Емельянова Л. Т., Ксендзов Я. М. ФТТ, 10, 2573, 1968.
5. Дабкин И. А., Емельянова Л. Т., Искендеров Р. Н., Ксендзов Я. М. ФТТ, 10, 3082, 1968.
6. Ксендзов Я. М., Авдеенко Б. К., Макаров В. В. ФТТ, 9, 1058, 1967.
7. Bosman A. J. Crevesoeur C. Phys. Rev. 144, 763, 1966.

Институт физики

Поступило 21.X 1969

Р. Н. Искэндэров

MnO монокристаллынын электрик кечиричилијинин вә термо $\text{Eh}\Gamma$ -нин тәдгиги

$350 - 830^\circ\text{K}$ температур интервалында кимјәви көчүрмә реаксиялары васитәсилә алынмыш MnO монокристаллынын электриккечирмәси вә термо $\text{Eh}\Gamma$ өјрәнилмишдир.

Мүәјјән едилмишдир ки, MnO кристалында компенсасија тәртиби јүксәк вә ашгар сәвијјәсинин енерјиси $0,63 \text{ эв}$ -дир. Кечиричилик зона нәзәријјәси илә изаһ олуна биләр.

А. Ф. ЕРЕМИНА, З. Д. НУРИЕВА, К. П. МАМЕДОВ,
М. Г. ШАХТАХТИНСКИЙ

ОБ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ В СИСТЕМЕ АНТИМОНИД ГАЛЛИЯ — ГЕРМАНИЙ

Существенная возможность расширения области применения широко известных полупроводниковых соединений типа $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$ связана с созданием твердых растворов на их основе с целью изменения их основных физических параметров с изменением состава.

Среди твердых растворов на основе $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$ наибольший интерес должны были бы представлять растворы типа $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}} - \text{A}^{\text{IV}}$. Однако, согласно литературным данным, растворимость A^{IV} в соединениях $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$ весьма ограничена. В то же время пределы этой растворимости нельзя считать твердо установленными.

В частности, принимая во внимание сходство кристаллических структур, близость параметров решетки и одинаковый тип химической связи, можно ожидать заметную растворимость германия в антимониде галлия.

В литературе [1, 2] встречается лишь ссылка на частное сообщение Мак Колдина об ограниченной растворимости ($\sim 2 \text{ ат}\%$) германия в GaSb . Более подробные исследования [3, 4] относятся лишь к растворимости антимонида галлия в германии. В связи с этим целью настоящей работы явилось исследование растворимости германия в антимониде галлия.

Предварительный анализ системы CaSbGe можно провести на основании сведений о бинарных системах $\text{Ga} - \text{Rb}$, $\text{Ga} - \text{Ge}$ и $\text{Ge} - \text{Sb}$ [12]

Система $\text{Ga} - \text{Sb}$ была изучена посредством термического, микроскопического и рентгеновского анализов [5, 6]. Диаграмма состояния этой системы эвтектического типа (эвтектика имеет состав $89 \text{ ат}\%$ Sb и температуру плавления $630,5^\circ\text{C}$), в которой имеется одно соединение — антимонид галлия, плавящееся конгруэнтно при 706°C . Соединение GaSb имеет структуру типа цинковой обманки с параметром решетки $a = 6,105 \pm 0,006 \text{ \AA}$ [7].

Диаграмма состояния системы GaGe была установлена методом термического анализа [8]. Эвтектическая точка совпадает с точкой плавления чистого галлия. Установлено [9], что при 600°C растворимость галлия в германии порядка $2,1 \text{ ат}\%$, причем галлий несколько расширяет решетку германия.

Диаграмма состояния системы $\text{Ge} - \text{Sb}$ также эвтектического типа изучалась в работах [10, 11] методом термического, металлографического и рентгеновского анализов. Рентгенографическим анализом показано, что растворимость Ge при 540°C составляет $\sim 2,5 \text{ ат}\%$, а растворимость Sb равна $\sim 2,4 \text{ ат}\%$.

Таким образом, судя по приведенным в [12] диаграммам состояния, нельзя ожидать значительной растворимости германия в GaSb. Однако, благодаря наличию указанных выше благоприятных условий для образования твердых растворов в системе GaSb—Ge, можно ожидать увеличение области растворимости. К такому же выводу пришли авторы работы [3], наблюдавшие увеличение растворимости галлия в германии в присутствии эквивалентных количеств сурьмы. Еще большее увеличение растворимости, как будет показано ниже, наблюдается со стороны антимонида галлия.

При проведении экспериментов для приготовления сплавов использовались германий с сопротивлением 30 ом·см и антимонид галлия, очищенный бестигельной зонной плавкой. Сплавы приготавливались в эвакуированных кварцевых ампулах в печи при температуре 1000°C, выдерживались при этой температуре в течение двух часов, а затем быстро охлаждались до комнатной температуры, после чего подвергались десятикратному зонному выравниванию.

Исследование системы проводили методами микроструктурного и рентгеноструктурного анализов, а также измерением микротвердости.

Рентгеновский анализ образцов производился на основе дебаграмм, полученных в камере РКУ диаметром 114,6 мм на рентгеновской установке УРС-60 на $\text{CuK}\alpha$ -излучении. Кроме того, были сняты дифрактограммы всех образцов на дифрактометре УРС-50 на $\text{CuK}\alpha$ -излучении.

Образцы для съемки готовили в виде столбиков из порошка, полученных продавливанием сквозь стеклянные капилляры диаметром 0,3 мм, отверстия которых смачивались цапон-лаком. Монолитные образцы в форме шлифов или в виде спрессованного порошка, в мешочках, изготовленных из кальки, применялись для съемки дифрактограмм.

Расстояние между линиями рентгенограмм были промерены на компараторе с точностью до 0,005 мм. Интенсивность линий оценивалась визуально по десятибалльной шкале.

Штрихдиаграмма (рис. 1) иллюстрирует фазовый состав некоторых сплавов системы GaSb—Ge.

На основе анализа дебаграмм установлено, что растворимость германия в GaSb ограничена и равна ~10 ат%, образующийся твердый раствор имеет при этом параметр решетки $a = 6,051 \pm 0001 \text{ \AA}$. Изменение параметра решетки в области твердых растворов подчиняется правилу Вагарда.

Измерения микротвердости проводились на полированных образцах на приборе ПМТ-3 методом вдавливания алмазной пирамиды при нагрузке 50 Г. Хрупкость образцов не позволила вести исследования при больших нагрузках. При определении микротвердости брались только неразрушенные отпечатки.

Микротвердость образцов определялась по формуле, общепринятой при вдавливании квадратной пирамиды:

$$H = \frac{1,84P}{a^2 d^2}$$

где P — нагрузка на пирамиду; d — диагональ отпечатка; $a = 000031$.

Приведенные в таблице значения микротвердости являются средними значениями из 10 — 15 измерений.

Результаты измерения показывают, что в области составов до 10 ат% Ge образцы однофазны (микротвердость меняется с составом линейно), а с увеличением содержания германия сплавы становятся двухфазными (микротвердость остается практически постоянной до значения для сплава, содержащего 90 ат% Ge).

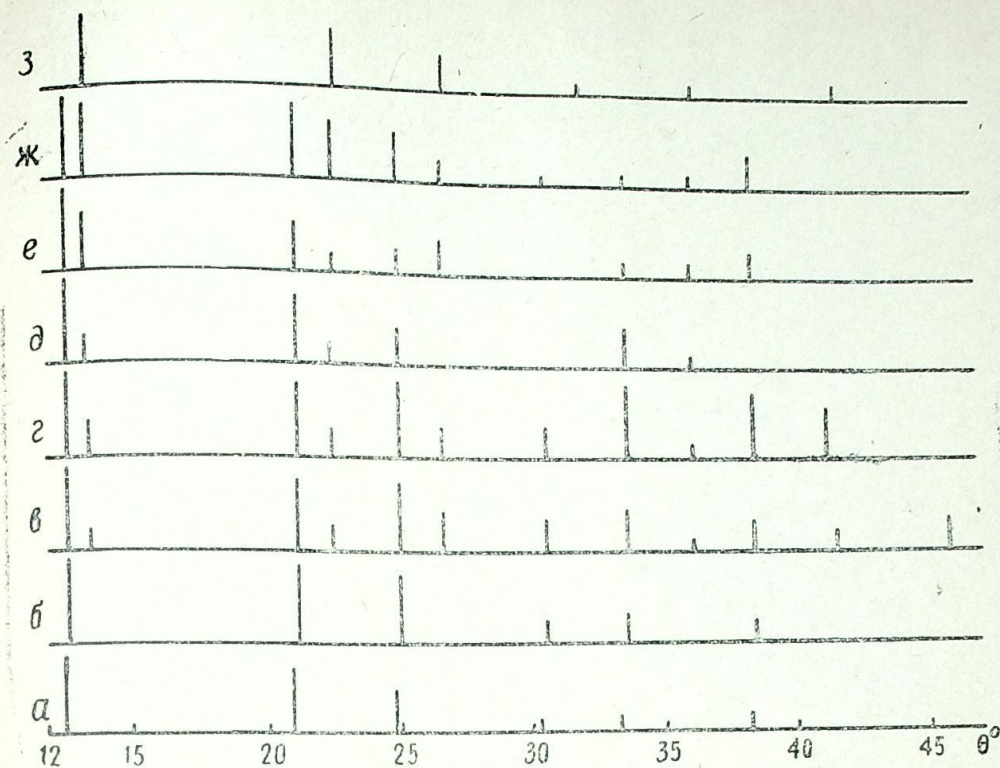


Рис. 1. Штрихдиаграмма некоторых сплавов системы GaSb—Ge:

- а—GaSb;
- б—10 ат% Ge;
- в—20 ат% Ge;
- г—30 ат% Ge;
- д—50 ат% Ge;
- е—70 ат% Ge;
- ж—90 ат% Ge;
- з—Ge.

Исследование микроструктуры сплавов по квазибинарному разрезу GaSb—Ge проводилось на микроскопе МИМ-8М. Все образцы полировались, а затем травились травителем состава $\text{HNO}_3 : \text{HF} (9:1)$. Надо также отметить, что при проведении зонного выравнивания сплавов, содержащих до 10 ат% Ge, возможно получение монокристаллов, что хорошо выявляется при травлении селективным травителем СРУ-А.

Результаты измерения микротвердости для некоторых составов системы GaSb—Ge

Состав	GaSb	0,5 ат% Ge	1,0 ат% Ge	3,0 ат% Ge	5,0 ат% Ge	10,0 ат% Ge
Микротвердость (кг/мм ²)	420	431	440	462	480	547
Состав	20 ат% Ge	30 ат% Ge	50 ат% Ge	70 ат% Ge	90 ат% Ge	Ge
Микротвердость (кг/мм ²)	543	549	560	552	942	992

Микроструктура этих твердых растворов приведена на рис. 2. (а, б, в, г.); на микрошлифах, приготовленных из сплавов с содер-

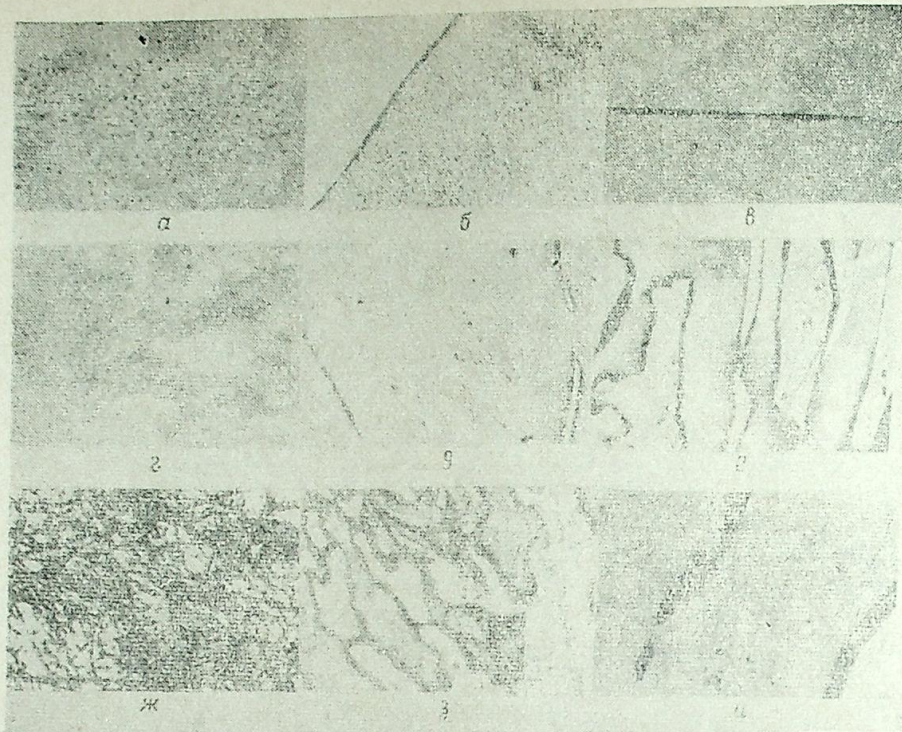


Рис. 2. Микроструктура сплавов системы GaSb—Ge;

а—0,5 ат% Ge;
б—1,0 ат% Ge;
в—5 ат% Ge;
г—11 ат% Ge;
д—12 ат% Ge;
е—80 ат% Ge;
ж—50 ат% Ge;
з—70 ат% Ge;
и—90 ат% Ge.

($\times 200$)

жанием германия более 10 ат%, наблюдается выделение второй фазы (рис 2, д, е, ж, з, и).

Таким образом, растворимость Ge в GaSb составляет 10 ат%.

Выводы

1. Методами рентгеноструктурного и микроструктурного анализов, а также измерением микротвердости исследован квазибинарный разрез GaSb—Ge и установлено, что растворимость германия в GaSb ограничена ~ 10 ат%.

2. Определен параметр решетки α -твердого раствора германия на основе антимонида галлия $a = 6,051 \pm 0,001$ Å.

3. Показано, что изменение параметра решетки твердого раствора до 10 ат% Ge следует закону Вегарда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Угай Я. А. Введение в химию полупроводников. М., „Высшая школа“, стр. 311, 1965.
2. Duwez P., Willens R. H. and Klement W. J. Appl. Phys. 31, 8, 150, 1960.
3. Глазов В. М., Петров Д. А., Чижевская С. Н. „Изв. АН СССР“ ОТН, „Металлургия и топливо“ № 4, 153, 1959.
4. MacCaldin J. O., I. Appl. Phys. 32, 1, 65, 1961.
5. Greenfield J. C., Smitc R. L. Trans AILME, 203, 351, 1955.
6. Koster W., Thoma B. Z Metallkunde, 16, 291, 1955.

7. Goldschmidt V. W. Skifter Akad., Oslo, 8, 35, 1936.
8. Klemm W., Hohmann F. Z. anorg. chem., 256, 244, 1948.
9. Greiner F. S. J. Metals, 4, 1044, 1952.
10. Ruttewit K., Masing G. Z. Metallkunde, 32, 52, 1940.
11. Stohr H., Klemm W. Z. anorg. chem., 244, 205, 1940.
12. Hahsen M. Anderko K. Constitution of Binary Alloys. Mac Graw—Hill Book Company, INC. New—York, Toronto, London, v. 2 pp. 821, 802, 789, 1958.

Институт физики

Поступило 21. X 1969

Т. А. АЛИЕВ И Ф. М. ГАШИМЗАДЕ

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ ТИПА $n\text{-JnSb}$

Вычислена вероятность рассеяния электронов на акустических фононах оптических фононах и ионизированных примесных атомах. При вычислении матричного элемента рассеяния учтена конкретная симметрия волновых функций электрона со спином, а также влияние экранировки носителями тока при рассеянии на оптических фононах.

В работе [1] была предпринята попытка учесть влияние непараболичности энергетического спектра электронов на матричные элементы взаимодействия электрона с фононами и ионизированными примесями в полупроводниках с зоной, описываемой законом дисперсии Кейна:

$$E(\kappa) = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_0} - \frac{E_g}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{E_g^2 + \delta \kappa^2 P^2}, \quad (1)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π ,

$$\delta = 4 \frac{1 + \frac{2\Delta}{3E_d}}{1 + \frac{\Delta}{E_d}} \quad (2)$$

Δ — константа, характеризующая спин-орбитальное расщепление валентных зон, E_d — ширина запрещенной зоны полупроводника, m_0 — масса свободного электрона, P — матричный элемент, связывающий валентную зону с зоной проводимости, одинаковый для всех полупроводников рассматриваемого типа.

Однако формула (1) является приближенной даже в рамках модели, предполагающей сферически-симметричную зону проводимости и следует пользоваться более правильной формулой [2]:

$$E'(E' + E_d)(E' + E_d + \Delta) = P^2 \kappa^2 \left(E' + E_d + \frac{2}{3} \Delta \right),$$

$$E' = E - \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_0}. \quad (3)$$

В данной работе мы вычислили вероятность рассеяния электронов на акустических и оптических фононах, а также на ионизированных примесях, используя в качестве блоховских амплитуд:

$$u_{\kappa \uparrow} = a \left[(iS + \vec{\alpha} \cdot \vec{R}) \uparrow + \vec{\beta} \cdot \vec{R} \downarrow \right],$$

$$u_{\kappa \downarrow} = a \left[(iS + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{R}) \downarrow - \vec{\beta}^* \cdot \vec{R} \uparrow \right] \quad (4)$$

где $R_x \equiv X$, $R_y \equiv Y$, $R_z \equiv Z$ — функции, преобразующиеся как координаты под действием группы операций симметрии куба. S — сферически-симметричная функция, стрелки указывают направление j_z компоненты полного момента.

$$\vec{\alpha} = c \cdot \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} + ib \left[\vec{i}_z \cdot \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} \right],$$

$$\vec{\beta} = -b \left[\vec{i}_y \cdot \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} \right] + ib \left[\vec{i}_x \cdot \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} \right],$$

$$a = (1 + 2b^2 + c^2)^{-1/2},$$

$$b = \frac{P_{\kappa}}{3} \left(\frac{1}{E' + E_d} - \frac{1}{E' + E_d + \Delta} \right),$$

$$c = \frac{P_{\kappa}}{3} \left(\frac{1}{E' + E_d} + \frac{1}{E' + E_d + \Delta} \right), \quad (5)$$

$\vec{i}_x$, $\vec{i}_y$ и $\vec{i}_z$ — единичные векторы в направлениях осей x , y и z . Собственные значения, соответствующие (4), определяются из (3) при условии: $E = 0$ для $\kappa = 0$.

1. Рассмотрим сперва рассеяние на акустических фононах. В приближении, эквивалентном модели недеформируемых ионов, матричный элемент взаимодействия электронов с фононами имеет вид [3. 1]:

$$I_{\vec{q}, j_z, j_z}^{ak} = -i \delta(\vec{\kappa}' - \vec{\kappa} + \vec{q}) \left\{ \frac{\hbar^2}{m_0} \int_{\Omega} (\vec{q} \cdot \nabla u_{\kappa, j_z}) (\vec{e}_{ak} \cdot \nabla u_{\kappa', j_z}) d\tau_0 \right\}, \quad (6)$$

где $\vec{e}_{ak}$ — вектор поляризации для акустических фононов, $\hbar \vec{q}$ — импульс фонона, интегрирование ведется по объему элементарной ячейки Ω .

Подстановка (4) в (6) приводит к следующим выражениям для матричных элементов перехода между состояниями с одинаково и противоположно направленными j_z :

$$I_{\vec{q}, j_z, j_z}^{ak} = i (\vec{q} \cdot \vec{e}_{ak}) \left\{ A \cdot a^2 + C \left[a^2 (2b^2 + c^2) \left(1 + \frac{\vec{\kappa} \cdot \vec{q}}{\kappa^2} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - ib(b - 2c) a^2 \frac{[\vec{\kappa} \vec{q}]_z}{\kappa^2} \right] + D \left[a^2 (b^2 + c^2) \frac{\vec{\kappa} \cdot \vec{q}}{\kappa^2} + \right.$$

$$\left. + 2a^2 b^2 + ia^2 \left(bc \frac{[\vec{\kappa} \vec{q}]_z}{\kappa^2} - b(b + c) q_z \vec{e}_{ak} \cdot \left[\frac{\vec{\kappa}}{\kappa^2} \vec{q} \right] \right) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{a^2}{\kappa^2} (B - C - 2D) \sum_i e_{i, ak} q_i [a_i(\kappa) \alpha_i(\vec{\kappa} + \vec{q}) + \beta_i(\kappa) \beta_i^*(\vec{\kappa} + \vec{q})];$$

$$i = x, y, z \quad (7)$$

$$I_{\vec{q}, j_z, -j_z}^{ak} = ia^2 b \left\{ \frac{(\vec{e}_{ak} \vec{q})}{\kappa^2} [C(b - 2c) - 2Dc] \left([\vec{\kappa} \vec{q}]_x + i [\vec{\kappa} \vec{q}]_y \right) + \right.$$

$$+ D (\vec{e}_{ak} \cdot [\vec{\kappa} \vec{q}]) (b + c) (q_x + iq_y) \left. \right\} + \frac{a^2}{\kappa^2} (B - C - 2D) \sum_i (\alpha_i(\kappa) \beta_i(\kappa + q) - \alpha(\kappa + q) \beta_i(\kappa)) (e_{i, ak} \cdot q_i)$$

где

$$A = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 d\tau_0; B = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 d\tau_0; C = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 d\tau_0; D = \int_{\Omega} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} d\tau. \quad (8)$$

Мы воспользовались системой обозначений, принятой в [1].
Если полагать, что валентная зона образована из функций p -типа, то можно найти следующие соотношения между коэффициентами B , C и D :

$$B = 3C = 3D \quad (9)$$

Наконец, константы A и B нетрудно связать с константами деформационных потенциалов зоны проводимости— Σ_c и валентной зоны— Σ_v , аналогично тому как сделано в [4]. При этом для времени релаксации τ находим следующее выражение:

$$\frac{1}{\tau_{ак}} = \frac{m^* \kappa \cdot \kappa_0 T \Sigma_c^2}{\pi v_0^2 N M h^3} \left\{ \left[1 + \left(1 - \frac{\Sigma_v}{\Sigma_c} \right) (a^2 - 1) \right]^2 - 4 \left(\frac{\Sigma_v}{\Sigma_c} \right) (b^2 + c^2) a^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \left(\frac{\Sigma_v}{\Sigma_c} \right)^2 \cdot a^4 [-24(3b^2 + 2c^2)(4b^2 + c^2) + 18(3b^2 + 2c^2)^2 + \right. \\ \left. + 20(b^2 - c^2)(2b^2 + c^2) + 4(c^2 - b^2)^2] + \right. \\ \left. + \frac{6}{25} \left(\frac{\Sigma_v}{\Sigma_c} \right)^2 a^4 b^2 [(b + c)^2 + (b - 4c)^2] \right\}. \quad (10)$$

Формула (10) получена в обычном приближении $\kappa_0 T \gg h \omega_q$, кроме того, положили $v_e \approx v_t$, чтобы не загромождать запись формулы. Происхождение каждого из поправочных членов было указано еще в [4]. Так, например, первый член в квадратных скобках появляется из-за поправки к деформационному потенциалу благодаря взаимодействию валентной зоны с зоной проводимости. Последний член в фигурных скобках получается благодаря рассеянию с изменением j_z (так называемое, „переворачивание спина“) на поперечных фононах, а предпоследний—такое же рассеяние на продольных фононах. Полученное выражение по виду сильно отличается от выражения, найденного в [1].

2. Рассеяние на оптических колебаниях решетки. Вероятность рассеяния для дальнегодействующего потенциала, вычисленная на функциях (4), имеет вид:

$$w(q) = \frac{(2\pi)^3 z^2 e^4}{N M a^6 \omega q^2} \left\{ \left[1 - 2(1 - a^2) \left(\frac{q}{2\kappa} \right)^2 \right]^2 + \right. \\ \left. + 4a^4 b^2 (b - 2c)^2 \left(\frac{q}{2\kappa} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{q}{2\kappa} \right)^2 \right] \right\}, \quad (11)$$

где второй член обязан рассеянию с переворачиванием j_z . Здесь не учтена экранировка фононного поля свободными носителями. Учет экранировки приводит к добавочному множителю [4, 5]:

$$W_{экр}(q) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{qz_0} \right)^2 \right]^2} W(q), \quad (12)$$

где z_0 —радиус экранировки.

Для времени релаксации находим следующее выражение:

$$\frac{1}{\tau_{опт}} = \frac{1}{\tau_0} \left\{ 1 + \frac{\xi}{1 + \xi} - 2\xi \ln \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) + 4[a^4 b^2 (b - 2c)^2 - \right. \\ \left. - (1 - a^2)] \times \left[\frac{1}{2} - 3\xi + \frac{\xi}{1 + \xi} + 3\xi^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \right] + \right. \\ \left. + 4[(1 - a^2)^2 - a^4 b^2 (b - 2c)^2] \left[\frac{1}{3} - 2\xi + 4\xi^2 + \frac{\xi}{1 + \xi} - \right. \right. \\ \left. \left. - 4\xi^3 \ln \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \right] \right\}. \quad (13)$$

Здесь $\xi = \left(\frac{1}{2\kappa r_0} \right)^2$, кроме того, мы не детализировали вид τ_0 —времени релаксации для рассеяния на оптических фононах при высоких температурах, без учета экранировки и непараболичности зоны проводимости. Следует отметить, что формула (13) без учета экранировки совпадает с выражением (3, 39) из работы [1] в пределе $\Delta \gg E_A$.

3. Рассеяние на кулоновском потенциале.

Расчет производится по известным формулам [1, 3] и приводит к выражению:

$$\frac{1}{\tau_{ион}} = \frac{2\pi e^4 m^* N_1}{\epsilon_0 (h\kappa)^3} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{1 + \xi} - 2\xi \ln \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) [4a^4 b^2 (b - 2c)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 4(1 - a^2)] - 4[a^4 b^2 (b - 2c)^2 - (1 - a^2)^2] \left[\frac{1}{2} - 3\xi + \frac{\xi}{1 + \xi} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 3\xi^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \right] + \ln \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) - \frac{1}{1 + \xi} \right\}, \quad (14)$$

где ϵ_0 —статическая диэлектрическая постоянная, N_1 —концентрация ионов примеси, m^* —эффективная масса электронов, зависящая от энергии. Выражение (14) в общем отличается от соответствующего выражения для времени релаксации электронов при рассеянии на ионах примеси, полученного в [1].

Выражениями (10), (13) и (14) необходимо пользоваться при вычислении подвижности в полупроводниках типа n — InSb вместо обычно используемых выражений (см. например, [6]). В работе [6] приведено также выражение для радиуса экранировки r_0 . В практически важном случае $\xi \rightarrow 0$ в последней формуле поправка в фигурных скобках из-за непараболичности оказывается существенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коренблит Л. Л. и Шерстобитов В. Е. ФТП, 2, 675, 1968.
2. Кане Е. J. Phys. Chem. Sol. 1, 243, 1957.
3. Ансельм А. И. Введение в теорию полупроводников. М.—Л., 1962.
4. Равич Ю. И. и Морговский Л. Я, ФТП, 3, 1528, 1969.
5. Дж. Займан. Принципы теории твердого тела. М., 1966.
6. Аскеров, Б. М. Гашимаде Ф. М. В сб. „Физические свойства полупроводников $A^{III}B^V$ и $A^{III}B^VI$ (Материалы всесоюзной конференции по физическим свойствам полупроводников $A^{III}B^V$ и $A^{III}B^VI$), стр. 154, Баку, 1967.

Поступило 28. IV 1970

Институт физики

n -JnSb типли жарымкечиричиләрдә электронларын сәпилмәси нәзәријјәсинә даир

ХУЛАСӘ

Электронларын ионлашмыш ашгар атомларындан. акустик вә оптик фононлардан сәпилмәси ентималы һесаблинмышдыр. Сәпилмәнин матриса элементини һесабладьгда, электронларын сәпинини нәзәрә алмагла конкрет симметрияја малик олан далға функцијасы кәтүрүлмүш, һәмчинин оптик фононлардан сәпилдикдә экранлашманын тәсирини нәзәрә алынмышдыр.

Б. М. АСКЕРОВ

КИНЕТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ТЕЛЛУРИСТОМ ВИСМУТЕ

Решетка теллуристого висмута (Bi_2Te_3) принадлежит к классу симметрии тригональной системы с инверсионно-поворотной осью третьего порядка (C_3). В этом кристалле была обнаружена большая анизотропия электропроводности, эффекта Холла, продольного и поперечного магнетосопротивления [1—5]. Для объяснения анизотропии кинетических свойств Bi_2Te_3 принимают шестиэллипсоидальную модель энергетического спектра носителей тока, предложенную Дребблем и Вольфом [6]. Согласно этой модели, точки экстремумов энергии наводятся на плоскостях симметрии, проходящих через ось третьего порядка. Изоэнергетическая поверхность вблизи каждой из этих точек представляет собой эллипсоиды, две главных оси которого лежат в плоскости симметрии. Если ось z направить вдоль оси третьего порядка, а плоскость xz совместить с одной из трех плоскостей симметрии, то ось y' рассматриваемого эллипсоида будет параллельна оси y , а остальные две главные оси эллипсоида x' и z' будут лежать в плоскости xz и повернуты вокруг оси y на угол θ . Однако следует отметить, что центры эллипсоидов находятся не на одинаковой высоте. Три эллипсоида от остальных трех получаются путем инверсии.

На основе этой модели Дреббл и Вольф [1,6] вычислили гальваномагнитные коэффициенты. При этом они предположили, что рассеяние носителей тока изотропно и описывается скалярным временем релаксации, зависящим только от энергии в виде степенной функции.

Анизотропия рассеяния носителей тока в Bi_2Te_3 была рассмотрена Самойловичем и Клиггером [7]. Ими были вычислены компоненты тензора времени релаксации и показано, что в случае рассеяния на акустических фононах анизотропия незначительна. Поэтому при комнатной температуре и выше рассеяние носителей тока можно считать изотропным.

В настоящей работе приведены результаты вычисления гальвано- и термомагнитных коэффициентов на основе шестиэллипсоидальной модели [6] в приближении скалярного времени релаксации $\tau(\varepsilon) = \tau_0$.

$\left(\frac{\varepsilon}{k_0 T}\right)^{r-1/2}$, причем параметр рассеяния r принимает значения: $r=0$ (рассеяния на акустических фононах), $r=1$ (рассеяния на оптических фононах), $r=2$ (рассеяния на оптических фононах), $r=2$ (рассеяния на ионах примеси).

Влияние учета анизотропии рассеяния коротко обсудим в конце работы.

Следуя методу работы [8], после суммирования вкладов всех эллипсоидов в ток

$$j_i = \sigma_{ik} E_k + \beta_{ik}^k \nabla_k T \quad (1)$$

для тензоров проводимости σ_{ik} и β_{ik} в слабом магнитном поле получим выражение

$$\sigma_{ik} = \begin{vmatrix} \lambda_{01} + \lambda_1 H_x^2 + \lambda_2 H_y^2 + \lambda_3 H_z^2 + \lambda_4 H_x H_z & \lambda_7 H_z + (\lambda_1 - \lambda_2) H_x H_y - \lambda_4 H_y H_z \\ -\lambda_2 H_z + (\lambda_1 - \lambda_2) H_x H_y - \lambda_4 H_y H_z & \lambda_{01} + \lambda_2 H_x^2 + \lambda_1 H_y^2 + \lambda_3 H_z^2 - \lambda_4 H_x H_z \\ \lambda_8 H_y + \lambda_9 (H_y^2 - H_z^2) + \lambda_{10} H_x H_z & -\lambda_8 H_x + 2\lambda_9 H_x H_z + \lambda_{10} H_y H_z \\ -\lambda_8 H_y + \lambda_9 (H_y^2 - H_z^2) + \lambda_{10} H_x H_z & \\ \lambda_8 H_x + 2\lambda_9 H_x H_y + \lambda_{10} H_y H_z & \\ \lambda_{03} + \lambda_5 (H_x^2 + H_y^2) + \lambda_6 H_z^2 & \end{vmatrix} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{01} &= 3a_1 (c_1^2 + \gamma_2 s_1^2 + \gamma_1) \\ \lambda_{03} &= 6a_1 (s_1^2 + \gamma_2 c_1^2) \\ \lambda_1 &= \frac{3}{4} a_2 \gamma_1 \left[\frac{3s_1^2 c_1^2}{\gamma_2} (1 - \gamma_2)^2 + \frac{c_1^2}{\gamma_1} (1 - \gamma_1)^2 + \frac{s_1^2}{\gamma_3} (1 - \gamma_3)^2 \right] \\ \lambda_2 &= \frac{3}{4} a_2 \gamma_1 \left[\frac{s_1^2 c_1^2}{\gamma_2} (1 - \gamma_2)^2 + \frac{3c_1^2}{\gamma_1} (1 - \gamma_1)^2 + \frac{3s_1^2}{\gamma_3} (1 - \gamma_3)^2 + 8 \right] \\ \lambda_3 &= 3a_2 \gamma_1 \left(\gamma_2 s_1^4 + \frac{c_1^4}{\gamma_2} + s_1^2 \gamma_1 + c_1^2 \gamma_3 + 2s_1^2 c_1^2 \right) \\ \lambda_4 &= 3a_2 \gamma_1 s_1 c_1 \left[c_1^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} \right) + s_1^2 (\gamma_2 - 1) + (\gamma_3 - \gamma_1) \right] \\ \lambda_5 &= 3a_2 \gamma_1 \left(\gamma_2 c_1^4 + \frac{s_1^4}{\gamma_2} + \frac{c_1^2}{\gamma_3} + \frac{s_1^2}{\gamma_1} + 2c_1^2 s_1^2 \right) \\ \lambda_6 &= 6a_2 s_1^2 c_1^2 \gamma_3 (1 - \gamma_2)^2 \\ \lambda_7 &= 6a_3 (c_1^2 + \gamma_2 s_1^2) \\ \lambda_8 &= 3a_3 (s_1^2 + \gamma_2 c_1^2 + \gamma_3) \\ \lambda_9 &= \frac{3}{2} a_2 \gamma_1 s_1 c_1 \left[c_1^2 (\gamma_2 - 1) + s_1^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} \right) + \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_3} \right) \right] \\ \lambda_{10} &= -6a_2 \frac{1}{\gamma_3} [\gamma_2 + s_1^2 c_1^2 (1 - \gamma_2)^2] \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\gamma_1 = \frac{m_1}{m_2}, \quad \gamma_2 = \frac{m_1}{m_3}, \quad \gamma_3 = \frac{m_3}{m_2}; \quad s_1 = \sin \theta, \quad c_1 = \cos \theta. \quad (4)$$

—параметры энергетической зоны, m_i —компоненты эффективной массы. Видно, что $s_1^2 + c_1^2 = 1$ и $\gamma_1 = \gamma_2 \gamma_3$.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{ne^2 \tau_0}{6m_1} \frac{F_{r+1}}{F_{3/2}}; \quad a_2 = -\frac{ne^4 \tau_0^3}{6m_1^2 m_3 c^2} \frac{F_{3r}}{F_{3/2}} \\ a_3 &= -\frac{ne^3 \tau_0^2}{6m_1 m_2 c} \frac{F_{2r+1/2}}{F_{3/2}} \end{aligned} \quad (5)$$

где c —скорость света,

$$n = \frac{2(2\kappa_0 T)^{3/2} (m_1 m_2 m_3)^{1/2}}{\pi^2 \hbar^3} F_{3/2} \quad (6)$$

—концентрация носителей тока, а

$$F_r = \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial x} \right) x^r dx \quad (7)$$

интегралы Ферми, f_0 —равновесная функция распределения Ферми. Тензор β_{ik} также имеет вид (2), однако для получения из (2)

компонента тензора β_{ik} константы a_1, a_2, a_3 следует заменить величинами b_1, b_2, b_3 соответственно.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\kappa_0}{e} \frac{ne^2 \tau_0}{6m_1} \frac{1}{F_{3/2}} (F_{r+2} - \eta F_{r+1}) \\ b_2 &= -\frac{\kappa_0}{e} \frac{ne^4 \tau_0^3}{6m_1^2 m_3 c^2} \frac{1}{F_{3/2}} (F_{3r+1} - \eta F_{3r}) \\ b_3 &= -\frac{\kappa_0}{e} \frac{ne^3 \tau_0^2}{6m_1 m_2 c} \frac{1}{F_{3/2}} (F_{2r+1/2} - \eta F_{2r+1/2}) \end{aligned} \quad (8)$$

$\eta = \frac{\eta}{\kappa_0 T}$ —приведенный химический потенциал.

Теперь, используя явный вид тензоров σ_{ik} и β_{ik} , мы можем найти выражения конкретных кинетических коэффициентов, измеряемых на опыте.

Кристаллы теллуристого висмута характеризуются двумя коэффициентами электропроводности: электропроводность вдоль тригональной оси $\sigma_{||}$ и перпендикулярной этой оси $\sigma_{\perp}$.

$$\sigma_{||} = e n u_{||}; \quad \sigma_{\perp} = e n u_{\perp}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} u_{||} &= \frac{c \tau_0}{m_1} (s_1^2 + \gamma_2 c_1^2) \frac{F_{r+1}}{F_{3/2}} \\ u_{\perp} &= \frac{e \tau_0}{2m_1} (c_1^2 + \gamma_2 s_1^2 + \gamma_1) \frac{F_{r+1}}{F_{3/2}} \end{aligned} \quad (10)$$

—соответствующие подвижности.

Эффект Холла также характеризуется двумя коэффициентами. Магнитное поле направлено по оси C_3 , а ток находится на плоскости, перпендикулярной C_3

$$R_{13} = K_{\perp} R_0; \quad K_{\perp} = \frac{4\gamma_1 (c_1^2 + \gamma_2 s_1^2)}{(c_1^2 + \gamma_2 s_1^2 + \gamma_1)^2} \quad (11)$$

Ток направлен по тригональной оси C_3 , а магнитное поле перпендикулярно C_3 .

$$R_{31} = K_{||} R_0; \quad K_{||} = \frac{\gamma_1 (s_1^2 + \gamma_2 c_1^2 + \gamma_3^{-1})}{(c_1^2 + \gamma_2 s_1^2 + \gamma_1) (s_1^2 + \gamma_2 c_1^2)}, \quad (12)$$

где $R = -\frac{1}{nes} M_1(\eta)$ —изотропный коэффициент Холла,

$$M_1(\eta) = F_{3/2} F_{2r+1/2} (F_{r+1})^{-2} \quad (13)$$

Продольное магнетосопротивление различно по оси C_3 и на плоскости, перпендикулярной C_3 .

Магнитное поле и ток направлены по оси C_3

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{||} = S_{||} \left(\frac{u_{||} H}{c} \right)^2 M_2(\eta); \quad S_{||} = \frac{\gamma_1 s_1^2 c_1^2 (1 - \gamma_2)^2}{(s_1^2 + \gamma_2 c_1^2)^3} \quad (14)$$

Магнитное поле и ток параллельны и находятся на плоскости, перпендикулярной оси C_3

$$\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)_{\perp} = S_{\perp} \left(\frac{u_{\perp} H}{c}\right)^2 M_2(\eta);$$

$$S_{\perp} = -\frac{\gamma_1 \gamma_2 \left[\frac{3c_1^2 s_1^2}{\gamma_2} (1 - \gamma_2)^2 + \frac{c_1^2}{\gamma_1} (1 - \gamma_1)^2 + \frac{s_1^2}{\gamma_3} (1 + \gamma_3)^2 \right]}{(c_1^2 + \gamma_2 s_1^2 + \gamma_1)^3}, \quad (15)$$

где

$$M_2(\eta) = (F_{3/2})^2 (F_{r+1})^{-3} F_{3r} \quad (16)$$

Поперечное магнетосопротивление. Здесь рассмотрим три случая:

1) Магнитное поле направлено по оси C_3 , ток перпендикулярен C_3 .

2) Ток течет по оси C_3 , магнитное поле перпендикулярно C_3 .

3) Магнитное поле и ток перпендикулярны друг другу и находятся на плоскости, перпендикулярной оси C_3 .

Во всех этих случаях поперечное магнетосопротивление имеет вид

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) = \left(\frac{u_{\perp} H}{c}\right)^2 (K_2 M_3 - K_1^2 M_1^2) \quad (17)$$

Значения K_1 и K_2 различны для разных случаев и даны в таблице

Направление H и J	K_1	K_2
$H \parallel C_3$ $J \perp C_3$	K_1	$\frac{4\gamma_1 \gamma_1 (\gamma_1 s_1^4 + \gamma_2^{-1} c_1^4 + \gamma_1 s_1^2 + \gamma_3 c_1^2 + 2s c_1^2)}{(c_1^2 + \gamma_1 s_1^2 + \gamma_1)}$
$H \perp C_3$ $J \parallel C_3$	$\left[\frac{2(s_1^2 + \gamma_1 c_1^2)}{(c_1^2 + \gamma_1 s_1^2 + \gamma_1)} \right]^{1/2} K_{11}$	$\frac{2\gamma_1 \gamma_1 (\gamma_1 c_1^4 + \gamma_2^{-1} s_1^4 + \gamma_3^{-1} c_1^2 + \gamma_1^{-1} s_1^2 + 2s_1^2 c_1^2)}{(c_1^2 + \gamma_1 s_1^2 + \gamma_1)^2 (s_1^2 + \gamma_1 c_1^2)}$
$H \perp C_3$ $J \perp C_3$ $H \perp J$	$\left[\frac{2(s_1^2 + \gamma_1 c_1^2)}{(c_1^2 + \gamma_1 s_1^2 + \gamma_1)} \right]^{1/2} K_{11}$	$\frac{\gamma_1 \gamma_1 \left[\frac{c_1^2 s_1^2}{\gamma_1} (1 - \gamma_1)^2 + 3c_1^2 (1 - \gamma_1^{-1})^2 + 3s_1^2 \gamma_3^{-1} (1 - \gamma_3)^2 + 8 \right]}{(c_1^2 + \gamma_1 s_1^2 + \gamma_1)^3}$

Термомагнитные явление. Используя явный вид тензоров σ_{ik} и β_{ik} , можно вычислить термомагнитные коэффициенты. Термоэдс при отсутствии магнитного поля $\alpha(0)$ изотропна и выражается известной формулой для стандартной параболической зоны. Следует отметить, что ни анизотропия эффективной массы, ни анизотропия времени релаксации не приводит к анизотропии термоэдс. Анизотропия термоэдс появляется лишь при одновременном учете двух анизотропных механизмов рассеяния носителей тока [7].

Эффект Нернста-Эттингсгаузена так же, как и эффект Холла, характеризуется двумя коэффициентами.

Магнитное поле направлено по оси C_3 , а градиент температуры перпендикулярен к этой оси

$$Q_{13} = \frac{\kappa_0}{e} \frac{u_{\perp}}{c} K_{\perp} L_0(\eta_0) \quad (18)$$

Градиент температуры направлен по оси C_3 , а магнитное поле перпендикулярно к этой оси

$$Q_{31} = \frac{\kappa_0}{e} \frac{u_{\parallel}}{c} K_{\parallel} L_0(\eta), \quad (19)$$

где $K_{\perp}$ и $K_{\parallel}$ даются формулами (11) и (12), а

$$L_0(\eta) = \frac{F_{3/2}}{(F_{r+1})^3} (F_{r+1} F_{2r+3/2} - F_{r+2} F_{2r+1/2}) \quad (20)$$

Изменение термоэдс в продольном магнитном поле различно вдоль тригональной оси C_3

$$(\Delta\alpha)_{\parallel} = \frac{\kappa_0}{e} \left(\frac{u_{\parallel} H}{c}\right)^2 S_{\parallel} L_2(\eta),$$

и на плоскости, перпендикулярной C_3

$$(\Delta\alpha)_{\perp} = \frac{\kappa_0}{e} \left(\frac{u_{\perp} H}{c}\right)^2 S_{\perp} L_2(\eta), \quad (22)$$

где

$$L_2(\eta) = F_{3/2}^2 (F_{r+1})^{-4} (F_{3r+1} F_{r+1} - F_{r+2} F_{3r}) \quad (23)$$

Изменение термоэдс в поперечном магнитном поле. Здесь также можно рассмотреть три случая, указанные в таблице. Только теперь вместо j надо поставить ΔT . Во всех этих трех случаях $(\Delta\alpha)$ имеет вид

$$(\Delta\alpha) = \frac{\kappa_0}{e} \left(\frac{u_{\perp} H}{c}\right)^2 (K_2 L_2 - K_1^2 L_1^2). \quad (24)$$

Значения K_1 и K_2 приведены в таблице, L_2 дается формулой (23), а

$$L_1^2 = (F_{3/2})^2 (F_{r+1})^{-5} (F_{2r+3/2} F_{2r+1/2} F_{r+1} - F_{2r+1/2}^2 F_{r+2}). \quad (25)$$

С помощью приведенных формул, путем измерения некоторых кинетических эффектов можно определить параметры энергетической зоны теллуристого висмута γ_1 и $c = \cos \theta$.

Теория гальваномагнитных эффектов в теллуристом висмуте с учетом анизотропии рассеяния носителей тока была развита И. Я. Коренблитом [9]. В его работе предполагалось, что компоненты тензора времени релаксации можно представить в виде произведения некоторой изотропной функции от энергии $\varphi(\epsilon)$, на анизотропный множитель τ_{0ij} , не зависящий от энергии

$$\tau_{ij} = \tau_{0ij} \varphi(\epsilon)$$

Такой вид, в частности, имеют компоненты τ_{ij} при рассеянии на фоновых [7, 9]. Было показано, что если тензор времени релаксации имеет только диагональные компоненты, то в соответствии с [10] в тензор проводимости компоненты τ_{ii} входят только в виде комбинаций $\tau_{ii} m_i^{-1}$. Таким образом, все выражения кинетических коэффициентов, приведенные в настоящей работе, остаются в силе, если в них параметры γ_i заменять на $\gamma_i = \frac{m_1 \tau_{022}}{m_2 \tau_{011}}$, $\gamma_2 = \frac{m_1 \tau_{033}}{m_3 \tau_{011}}$, $\gamma_3 = \frac{m_3 \tau_{022}}{m_2 \tau_{033}}$. В силу этого параметры γ_i найденные из эксперимента с помощью приведенных выше формул могут зависеть от температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Drabble J. R. Proc. Phys., 72, 380, 1958.
2. Конопов П. П. ЖТФ, 26, 1400, 1956.
3. Drabble J. R. Groves R. O. Wolfe R. Proc. Phys. Soc., 71, 430, 1958.
4. Mansfield, R. Williams, W. Proc. Phys. Soc., 72, 733, 1958.
5. Golbsmid, H. Y. Proc. Phys. Soc., 71, 633, 1958.

6. Drabble, J. R. Wolfe R. Proc. Phys. Soc., B69, 1101, 1956.
7. Самойлович, А. Г. Клиггер М. И. ФТТ, сбор. ст. 2, 141, 1959.
8. Аскеров Б. М. „Изв. АН Азерб. ССР“, сер. физ.-тех. и матем. наук, № 2, 1964; № 4, 1964.
9. Коренблит И. Я. ФТТ 2, 3083, (1960).
10. Herring, C. Vogt E. Phys. Rev., 101, 944, 1960.

АГУ им. С. М. Кирова

Поступило 23. III 1970

Б. М. Эскеров

Теллурлу бисмут кристалларында кинетик эффектләр

ХҮЛАСӘ

Ишдә Bi_2Te_3 кристалларында алты еллипсоидли модел эсасында галвано-вә термомагнит эсаллар һесапланмышдыр. Һесаблама изотроп релаксация мүддәти яхынлашмасында эиф магнит сәһәсиндә апарылмышдыр.

АЗЕРБАЙҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмләри сериясы, 1970, № 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 4

М. Б. БАБАЕВ

СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА ЗАТМЕННО-ДВОЙНОЙ ЗВЕЗДЫ AW Peg

Введение

В последнее время проводятся интенсивные теоретические исследования по теории эволюции тесных двойных звезд [1, 2]. Рассматриваются системы с разными массами компонентов, различными расстояниями между компонентами и различными спектральными классами. Предполагается, что происходит значительный перенос массы из одного компонента к другому, при котором бывший главный компонент, первоначально более массивная звезда, превращается в менее массивного субгиганта или гиганта, а отношение масс компонентов меняется [1]; детали этого процесса зависят еще от начальных условий, в частности от степени химической неоднородности главного компонента [2].

Настоящая статья посвящена изучению некоторых особенностей спектра затменно-переменной звезды AW Peg типа Алголя.

Изменение блеска затменно-двойной AW Peg (HD 207956) было открыто Плутом в 1928 г. [3]. Блеск системы меняется от $7^m,4$ до $9^m,0$. Главный компонент имеет спектральный тип A2V, а спутник — 5IV. Кривая блеска AW Peg исследовалась разными авторами [4, 5, 6].

В 1961 г. Хилтнер и Макнамара проводили спектральные и фотометрические наблюдения этой звезды [7]. По фотометрическим наблюдениям, проведенным с узкополосным фильтром, компоненты этой системы были классифицированы как звезды класса A3—5 на главной последовательности или чуть выше ее, и FIV для главного компонента и спутника соответственно. С помощью спектральных наблюдений (дисперсия 10Å/мм в голубом участке и 20Å/мм в красном участке) были получены лучевые скорости. Кривая лучевой скорости звезды A оказывается аномальной. Аномальность лучевой скорости звезды A может быть обусловлена влиянием газового кольца, окружающего эту звезду, что доказывается появлением эмиссии в H_α и характером изменения профиля линии K CaII. Было найдено, что массы компонентов составляют $M_A = 2,0\odot$ и $M_F = 0,32\odot$.

Инструмент и методика наблюдения

Спектральные наблюдения затменной переменной AW Peg проводились в основном летом 1967 г. и 1968 г. в Шемахинской астрофизической обсерватории АН Азербайджанской ССР на 35-сантиметровом менисковом телескопе системы Максудова с 35-градусной объективной призмой. Обратная дисперсия была 116 Å/мм около H_γ . Спектры расширялись ручной клавишей от 0,3 до 0,8 мм. Были использованы фотопластинки ORWO WP-1, ZU-1 и ZU-2. Экспозиция менялась от 5 до 40 мин. На одной пластинке получались 1 или 2 спектрограммы. Всего получено 97 спектрограмм в разных фазах.

В качестве звезды сравнения была выбрана звезда BD + 22° 4474 (7^m, 76) спектрального класса A3. Спектры исследуемой звезды и звезды сравнения всегда получались на одной пластинке одновременно. При этом возможная ошибка и из-за ослабления света в земной атмосфере из-за влияния фотометрической ошибки поля телескопа находится в пределах ошибки измерений.

Калибровочная шкала была получена в астрофизической лаборатории Шемахинской обсерватории на спектрографе ИСП-51 с нейтральным ступенчатым ослабителем. Калибровочная шкала, спектр исследуемой звезды и звезды сравнения проявлялись одновременно в метолгидрохиноновом проявителе в течение 5 мин. Для каждого дня наблюдения получена отдельная калибровочная шкала. Использована средняя характеристическая кривая в области спектра $\lambda\lambda$ 4600—3790 Å.

Все спектрограммы были обработаны на саморегистрирующем микрофотометре с электронным автоматическим самописцем, установленном в отделе физики звезд и туманностей Шемахинской обсерватории АН Азербайджанской ССР. Запись проводилась с увеличением в 40 раз при ширине щели от 0,4 до 0,6 мм (чему соответствует 2—4 Å в области H_γ на оригинале). Высота щели всегда была меньше ширины спектров.

Непрерывный спектр был проведен нами по графическому методу Миннаерта, разработанному для металлических линий. Непрерывный спектр, определенный этим методом, всегда проходит выше, чем непрерывный спектр, полученный при проведении его по серединам отбросов за счет зерна эмульсии. Для определения истинного положения непрерывного спектра нами были использованы водородные H_γ , H_β , H_δ и др.

Определение относительного градиента

Для изучения распределения энергии в непрерывном спектре в области $\lambda\lambda$ 4600—3790 Å нами было выбрано 11 точек (табл. 1).

Таблица 1

λ (mμ)	$1/\lambda$	λ (mμ)	$1/\lambda$
0,4600	2,17	0,4030	2,48
0,4500	2,22	0,3970	2,52
0,4430	2,26	0,3910	2,56
0,4310	2,32	0,3850	2,60
0,4230	2,36	0,3790	2,64
0,4130	2,42		

Спектрофотометрические градиенты AW Peg были определены графическим методом и уточнены способом наименьших квадратов.

Значения относительных спектрофотометрических градиентов для различных фаз приведены в табл. 2, где в первом столбце приводится дата наблюдения, во втором—номера спектрограмм, в третьем—фаза наблюдений в долях периода системы, в четвертом—значение относительного градиента $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$, (т. е. разность градиентов исследуемой звезды и звезды сравнения).

Из табл. 2 видно, что значения градиент AW Peg заметно меняются с фазой изменения блеска системы. Значение спектрофотомет-

Таблица 2

Дата	SpN	фаза	$\Delta\varphi$	φ	T_c
1	2	3	4	5	6
17/18.8 1968 г.	1047	0,0003	+1,42	$2,79 \pm 0,18$	5260
	1047	0,0046	+1,30	$2,67 \pm 0,18$	5400
19.9 1968 г.	1368	0,0183	+1,25	$2,62 \pm 0,15$	5590
	1373	0,0302	+0,56	$1,93 \pm 0,13$	7500
10.5 1967 г.	444	0,0707	+0,40	$1,77 \pm 0,16$	8250
11.6 1967 г.	534	0,1743	+0,23	$1,60 \pm 0,12$	9853
30.7 1968 г.	1198	0,2297	+0,19	$1,56 \pm 0,10$	9571
	1201	0,2337	+0,12	$1,49 \pm 0,08$	9929
4.9 1967 г.	712	0,2593	+0,09	$1,46 \pm 0,1$	9841
	713	0,2611	+0,15	$1,52 \pm 0,2$	9287
	714	0,2636	+0,15	$1,52 \pm 0,1$	9287
31.7 1968 г.	1212 (1)	0,3292	+0,05	$1,42 \pm 0,3$	10500
	1212 (2)	0,3312	+0,08	$1,45 \pm 0,2$	10250
	1213	0,3327	—0,04	$1,33 \pm 0,05$	11300
	1215	0,3334	—0,04	$1,33 \pm 0,06$	11300
	1217 (1)	0,3349	—0,04	$1,33 \pm 0,07$	11300
	1217 (2)	0,3361	—0,04	$1,33 \pm 0,08$	11300
28.7 1968 г.	1174	0,4420	—0,06	$1,31 \pm 0,02$	11500
	1176	0,4813	—0,04	$1,33 \pm 0,02$	11300
	1177	0,4982	—0,00	$1,36 \pm 0,02$	11000
23.8 1968 г.	1270	0,5022	—0,01	$1,32 \pm 0,07$	11400
	1271	0,5033	—0,00	$1,35 \pm 0,07$	11100
29.9 1967 г.	719	0,5124	—0,09	$1,28 \pm 0,03$	11800
	720	0,5136	—0,08	$1,29 \pm 0,03$	11700
	721	0,5221	—0,05	$1,32 \pm 0,03$	11400
28.7 1968 г.	1178	0,5229	0,00	$1,37 \pm 0,04$	10910
26.9 1968 г.	1421	0,6787	+0,01	$1,38 \pm 0,05$	10850
16.5 1967 г.	473	0,7223	—0,02	$1,35 \pm 0,02$	11100
	474	0,7259	—0,02	$1,35 \pm 0,02$	1100
26.7 1968 г.	1142	0,8542	+0,02	$1,39 \pm 0,03$	10750
	1148	0,7609	+0,02	$1,39 \pm 0,03$	10750
1.9 1967 г.	690	0,8884	+0,02	$1,39 \pm 0,03$	10750
	691	0,8901	+0,02	$1,39 \pm 0,04$	10750
27.7 1968 г.	1159	0,9408	+0,32	$1,69 \pm 0,04$	7830
	1161	0,9429	+0,40	$1,77 \pm 0,05$	8250
	1164	0,9468	+0,61	$1,98 \pm 0,04$	7294

рического градиента достигает наибольшей величины в первичном минимуме и наименьшей—во вторичном минимуме.

После того как определены относительные спектрофотометрические градиенты, был найден дифференциальный градиент системы, т. е. разность градиентов спутника (φ_i) и главной звезды (φ_b). При этом исключаются всевозможные ошибки при определении градиентов звезд-исключаются всевозможные ошибки при определении градиентов звезд-компонентов [8] (т. е. поглощение света в земной атмосфере и межзвездной среде), а также ошибки нуля пункта. Для этого необходимо найти $\Delta\varphi_{ab}$ —разность градиентов звезды сравнения „a“ и главной звезды в момент максимума и $\Delta\varphi_{at}$ —разность градиентов слабой звезды

сравнения „d“ и спутника в момент минимума и $\Delta\varphi_{ad}$ — разность градиентов звезд сравнения „a“ и „d“. Отсюда, зная $\Delta\varphi_{ab}$, $\Delta\varphi_{df}$ и $\Delta\varphi_{ad}$, легко можно найти величину $\Delta\varphi_{fb}$:

$$\Delta\varphi_{fb} = \Delta\varphi_{ab} - \Delta\varphi_{df} + \Delta\varphi_{ad}$$

В нашем случае в качестве звезды сравнения была взята одна звезда для минимума и максимума, поэтому $\Delta\varphi_{da} = 0$ и $\Delta\varphi_{fb} = \Delta\varphi_{ab} - \Delta\varphi_{df}$. Из табл. 2 видно, что

$$\Delta\varphi_{ab} = +0,05 \pm 0,01; \quad \Delta\varphi_{df} = -1,32 \pm 0,05;$$

причем средняя квадратичная ошибка определена по формуле $\sigma_{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2}{n}}$. Отсюда для дифференциального градиента AW Peg получим:

$$\Delta\varphi_{fb} = 1,37.$$

Абсолютные спектрофотометрические градиенты и температура

Для определения абсолютного градиента затменно-двойной системы AW Peg нами был определен абсолютный градиент звезды сравнения BD + 22°4474 с привязкой к опорной звезде α Peg. Значение абсолютного градиента α Peg в области непрерывного спектра $\lambda\lambda 4600 - 3700 \text{ \AA}$ ($\varphi = 1,91$) было взято из работы [9].

Для определения абсолютного градиента звезды сравнения BD + 22°4474 с привязкой к звезде α Peg. наблюдения этой звезды проводились также на 35-сантиметровом телескопе при одинаковых зенитных расстояниях. Значение абсолютного градиента звезды BD + 22°4474 оказалось равным (по 4 спектрограммам) $\varphi = 1,37 \pm 0,06$. Зная относительный спектрофотометрический градиент AW Peg и абсолютный градиент звезды сравнения, можно найти абсолютный градиент для первой. Абсолютные градиенты AW Peg для разных фаз приведены в пятом столбце табл. 2, где рядом со значением градиента приведена среднеквадратная ошибка каждого определения.

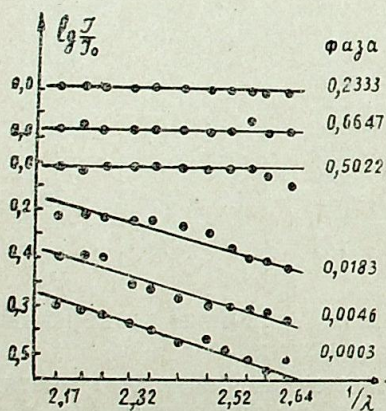


Рис. 1.

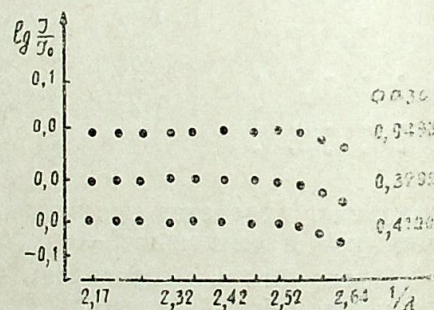


Рис. 2.

После того, как были найдены абсолютные значения градиентов с использованием таблицы абсолютных градиентов Иенсена [10], мы нашли при $\lambda 4000 \text{ \AA}$ спектрофотометрическую температуру AW Peg

Значения спектрофотометрической температуры AW Peg для разных фаз даны в последнем столбце табл. 2.

Для иллюстраций изменения относительного распределения энергии с фазой затмения (т. е. с переходом от центра диска к краю главного компонента) нами было построено относительное распределение энергии в спектре AW Peg, полученное при разных фазах. На рис. 1 дано относительное распределение энергии в спектре AW Peg, найденное по спектрограммам, полученных в главном и вторичном минимумах и распределения энергии в спектре AW Peg. сильно меняется с фазой затмения. А вне минимума вид распределения энергии показан на рис. 2, из которого видно, что в точке $1/\lambda = 2,52$ распределение энергии ($\lg \frac{J_{ис.}}{J_{зв. ср.}}$) имеет излом. Причиной этого может быть более силь-

ное поглощение коротковолнового излучения главной звезды протяженной оболочкой, окружающей эту звезду. Изменение относительного распределения энергии в спектре затменно-двойной системы AW Peg может быть объяснено влиянием двух факторов, а именно: зависимостью коэффициента потемнения к краю диска главной звезды от длины волны и влиянием изменения соотношения излучения главной звезды и излучения спутника с фазой затмения.

Учет избирательного поглощения света в межзвездной среде

На абсолютные градиенты звезд в некоторой степени может влиять поглощение света в межзвездной среде. Хотя ввиду неоднородности межзвездной среды поправки за поглощение света не очень надежны, все же такие исправления дают качественное представление о данном эффекте и указывает на величину возможной ошибки в значениях абсолютных градиентов.

Для учета избирательного поглощения мы воспользовались формулой из работы [11]:

$$\delta\varphi_{\lambda} = 0,921 \frac{\frac{K_{\lambda_2}}{K_v} - \frac{K_{\lambda_1}}{K_v}}{\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}} A_v$$

где $K_{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda^{\alpha}}$ — коэффициент избирательного поглощения, A_v — полное визуальное поглощение, λ_1 и λ_2 — начальная и конечная длина волны области определения спектрофотометрического градиента. Для нахождения поправки $\delta\varphi_{\lambda}$ — изменения истинного значения градиента звезды из-за влияния межзвездного поглощения мы воспользовались значением K_{λ} для данной длины волны из работы [12], а значения A_v нашли из формулы [13]:

$$A_v(r; b) = \frac{0,28}{r \cdot \sin b} \left(1 - e^{-\frac{r \cdot \sin b}{100}} \right)$$

где r — расстояние до звезды в парсеках, а b — галактическая широта звезды. Для определения абсолютной звездной величины M_v для звезды AW Peg мы использовали формулу Р. Петри [14]:

$$M_v = 1,69 - 13,25 \cdot 10^{-0,095 W_V},$$

где W_T —значение эквивалентной ширины водородной линии H_T . При этом эквивалентная ширина линии H_T найдена по спектрограммам, полученным во вторичном минимуме системы AW Peg. Значение эквивалентной ширины этой линии получилось равным $W_T=14,1\text{Å}$. Отсюда получим, что $M_V=1^m,1$ (для главного компонента системы AW Peg). После того, как найдено значение M_V и m_V мы, используя таблицу Паренаго [13], нашли истинное расстояние для AW Peg. Отсюда, зная r и b , можем определить величину $A_V(r; b)$, а затем и $\delta\varphi_\lambda$. Значение $\delta\varphi_\lambda$ для AW Peg. приведено в табл. 3, где в первом столбце дано название звезды (индексом А указанная главная звезда, а индексом В—ее спутник) во втором—спектральный класс и класс светимости обоих компонентов, найденных нами по интенсивности водородных линий, в третьем—наблюдаемые значения градиента φ' и его среднеквадратные ошибки, в четвертом—значение поправки за поглощение света в межзвездном пространстве, в пятом—значение градиента φ , исправленное за поглощение света в межзвездной среде, в шестом столбце—спектрофотометрическая температура и в последнем столбце—абсолютные визуальные величины, найденные по формуле Петри [14].

Т а б л и ц а 3

Название звезды	S_p , мкк	φ'	$\delta\varphi$	φ	T_c	M_V
AW Peg. A	AOV	$1,35 \pm 0,07$	0,44	0,91	15450°	$+1^m,1$
AW Peg. B	F5IV	$2,69 \pm 0,15$	0,44	0,25	6450°	$+2^m,7$

сом В—ее спутник) во втором—спектральный класс и класс светимости обоих компонентов, найденных нами по интенсивности водородных линий, в третьем—наблюдаемые значения градиента φ' и его среднеквадратные ошибки, в четвертом—значение поправки за поглощение света в межзвездном пространстве, в пятом—значение градиента φ , исправленное за поглощение света в межзвездной среде, в шестом столбце—спектрофотометрическая температура и в последнем столбце—абсолютные визуальные величины, найденные по формуле Петри [14].

Заключение

Спектрофотометрические исследования непрерывного спектра AW Peg показывают, что значения спектрофотометрических градиента и температуры этой системы заметно меняются с фазой блеска. В первичном и вторичном минимумах системы происходят кратковременные полные затмения. Это позволяет определить спектрофотометрические градиенты и температуру, абсолютные визуальные величины, эквивалентные ширины линий поглощения и параметры атмосферы обоих компонентов данной системы. По спектрограммам, полученным в первичном и вторичном минимумах, главный и вторичный компоненты системы AW Peg имеют спектральные классы AOV и F5IV, соответственно. Обнаружено, что главный компонент этой системы имеет протяженную оболочку.

В заключение приношу глубокую благодарность С. М. Азимову за ценные советы и критические замечания, сделанные при выполнении этой работы, а также С. П. Новрузовой за помощь при обработке полученного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kippenhahn R.; Weigert A. Naturwissenschaften. 55, № 6, 1968.
2. Plavec M. Astrophys and Space Sci. 1, № 2, 1968.
3. Plaut L. Beobachtungs—Zirkular der ast. Nachrichten. 12, 89, 1930.
4. Jacchia L. Beobachtungs—Zirkular der ast. Nachrichten. 13, 55, 1931.
5. Rugermer H. Beobachtungs—Zirkular der ast. Nachrichten. 14, 74, 1932.
6. Лукацкая И. В. Переменные звезды. 9, 57, 1952.
7. Hilton W. B. and Mcspatara D. H. Ap. J. 134, 3, 1961.
8. Азимов С. А. Сообщения ШАО АН Азерб. ССР, вып. 2, 1966.

9. Barbier D. and Chalonge D. Ann. Ap. 5, 4, 1941; 10, 195, 1947.
10. Курс астрофизики и звездной астрономии, 1 т. Под ред. А. А. Михайлова. ГТИ, М., 1951.
11. Цой Дяй О. АЖ. 1956, 33 № 4.
12. Мельников О. А. Труды ГАО, т. LXI; LXIV, 1950.
13. Паренаго П. П. Курс звездной астрономии. М. 1954.
14. Курс астрофизики и звездной астрономии. т. II, Под ред. А. А. Михайлова, ГТИ. М.—Л., 1962.

Шемахинская астрофизическая
обсерватория

Поступило 7. VIII 1969

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Т. А. НУРМАМЕДОВ

ПОВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ИЗОЛЯЦИИ В УСЛОВИЯХ СОЛОНЧАКОВЫХ ЗАГРЯЗНЕНИЙ

Исследования по вопросам эксплуатации высоковольтных изоляторов при отложении на них загрязнений повышенной проводимости были начаты в Азгавэнерго еще в довоенное время. В 1939 г. в электросети им. К. Маркса (ныне Ленинская электросеть) был сооружен первый опытный стенд, на котором изучалось поведение изоляторов, находившихся под напряжением 50 кВ. В это же время в опытно-промышленную эксплуатацию начали внедряться конструкции, специально разработанные для загрязняемых районов. В 1937 г. на Путинской ЛЭП 110 кВ взамен изоляторов П-4,5 были установлены гирлянды из 7 элементов типа ПР-4,5, что позволило удлинить сроки чистки изоляции в среднем от одного месяца (при изоляторах П-4,5) до 2,5—3 месяцев. В последующем на этом и других загрязняемых участках в сети 110 кВ устанавливались гирлянды из 8 (иногда 9) изоляторов ПР-3,5, НС-2, П-4,5 и ПМ-4,5.

Аппаратная изоляция была также заменена специальными конструкциями с более развитой поверхностью либо усилена дополнительными элементами от различных электроизоляционных изделий.

Усиление изоляции, а также общее повышение надежности энергоснабжения путем внедрения АПВ и резервирования питания позволило сократить количество чисток изоляторов линий до 1—3 раз в год.

Опыт, накопленный энергосистемой в неблагоприятных условиях эксплуатации, подтвердил, что наиболее эффективной мерой борьбы с перекрытиями на ЛЭП является усиление изоляции до уровня, обеспечивающего ее достаточную электрическую прочность при рабочем напряжении и при максимальной загрязненности в засушливое время года. В случае невозможности усиления изоляции до требуемого уровня или, когда загрязненность возрастает сверх обычных пределов в силу особо неблагоприятно сложившихся условий, необходимо своевременно очищать поверхность изоляторов отложений.

На Апшероне, в особенности при ослабленной изоляции, иногда наблюдались случаи перекрытий и вскоре после чистки—во время густых туманов, после сильных ветров и т. д. Таким образом, применением чистки трудно полностью исключить возможность аварий. Кроме того, при современном развитии сетей чистка изоляции может производиться лишь в ограниченном объеме и потому носит вспомогательный характер. С увеличением номинального напряжения ЛЭП на чистку изоляции резко возрастают не только абсолютные, но и удельные затраты труда и времени (рис. 1), а так как возможности для

отключения магистральных линий на длительный срок ограничены, то ее применение для ЛЭП с напряжением свыше 110 кВ сильно затрудняется.

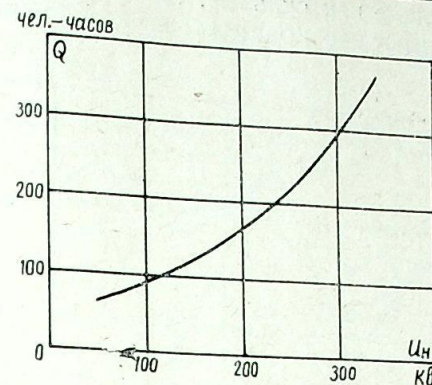


Рис. 1. Рост трудовых затрат на чистку изоляции 10 км ЛЭП в зависимости от класса напряжения по материалам Азгавэнерго.

Как в эксплуатации—при необходимости усиления изоляции, так, в особенности, при проектировании ЛЭП и подстанций, подверженных загрязнению, решение вопроса о требуемом количестве и типе изоляторов наталкивается на значительные трудности, поскольку в настоящее время еще отсутствуют простые и достаточно надежные критерии для их выбора. Достижению этой цели недостаточно удовлетворяют одни лишь сведения по засоленности почв, хотя в качественном отношении при наличии в солончаковой почве более 0,1% водорастворимых солей, а также эрозии, отсутствии растительного покрова, засушливости, частых ветрах и т. п. безусловно следует ожидать, что отложения на изоляторах будут иметь высокую проводимость и плотность.

В тех случаях, когда возможно определить характеристики загрязнения, например, путем исследования загрязняемых в естественных условиях гирлянд, снятых с действующих ЛЭП или стендов, выбор изоляции значительно облегчается. Весьма важно, что в полевых условиях Азербайджана, хотя и в небольших пределах, имеют место изменения плотности загрязнения σ (рис. 2), но тем не менее не наблюдается монотонного возрастания загрязненности свыше определенного предела, как это имеет место в некоторых районах.

На некоторых участках Апшерона эпизодически складываются особо неблагоприятные условия, когда загрязненность на короткий промежуток времени может превзойти обычный уровень. Один из таких случаев наблюдался при исследованиях 1966—1968 гг. близ Локбатана, когда произошли перекрытия опытных изоляторов при увлажнении туманом, причем солесодержание слоя отложений оказалось свыше 30% при плотности 1,5 мг/см².

Из изложенного следует, что основными предпосылками для правильного выбора изоляции являются изучение процесса накопления загрязнений и определение разрядных характеристик загрязненных изоляторов, а также учет климатических особенностей местности [1, 2].

При оценке сравнительной опасности загрязнений в различных районах, а также при разработке расчетных методов [1] выбора изоляции ЛЭП возникают затруднения, связанные с тем, что степень опасности загрязнения однозначно не определяется какой-либо одной характеристикой. Трудность совместного учета плотности и солесодержания

держания загрязнений дополнительно усложняется значительной изменчивостью его химического состава, в котором могут превалировать соединения, образующие как сильные, так и слабые электролиты. Эти обстоятельства вызывают необходимость введения понятия об обобщен-

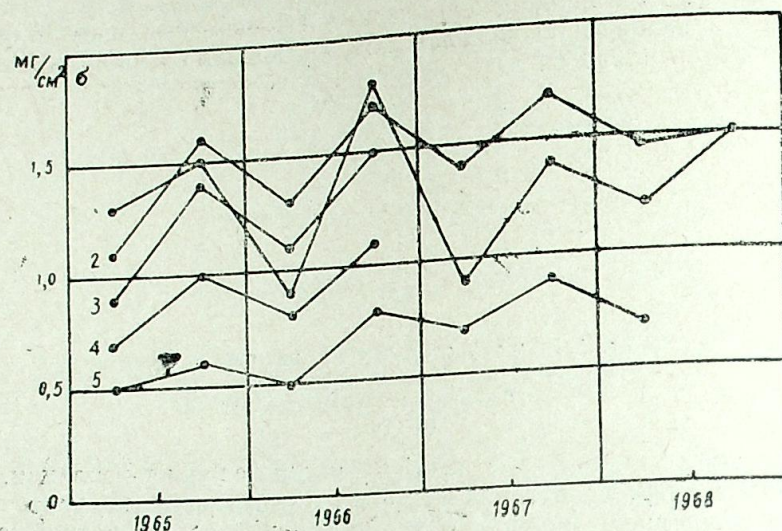


Рис. 2. Изменение поверхностной плотности загрязнения изоляции в различных районах Азербайджанской ССР в 1965 гг.

1—стенд п/ст 85; 2—Баку—Пута; 3—Мингечаур—Кировабад; 4—Кировабад—Актафа; 5—Хурдалан—Али-Байрамлы.

1, 2 и 5—средняя плотность загрязнения по всей поверхности; 3, 4—средняя плотность загрязнения нижней поверхности

ном параметре загрязнения, соответственно учитывающего его количественную и качественную стороны. Использование для этой цели удельной поверхностной проводимости при насыщении слоя влагой представляет неудобство в том отношении, что ее определение возможно при большом числе тщательно поставленных экспериментов.

Поскольку влагопоглощаемость солончаковых загрязнений изменяется в очень небольших пределах, а средняя плотность отложений и удельная проводимость растворов малой концентрации достаточно полно характеризуют количественные и качественные свойства загрязняющего вещества и определяются доступными средствами, то последние две характеристики могут быть использованы для численной оценки параметра загрязнения.

Степень снижения разрядного напряжения гирлянд определяется проводящими свойствами пленки электролита, образующегося на поверхности изоляторов при увлажнении [1]. Это позволяет вместо суммарного количества водорастворимых солей рассматривать некоторое количество монохлорида, например, NaCl, при замене которым всех водорастворимых солей загрязнения можно было бы получить такую же проводимость раствора. Эта величина, названная эквивалентным солесодержанием μ определяется по проводимости 5%-ного раствора водной вытяжки загрязнения γ (таблица).

Эквивалентное солесодержание, как и суммарное, выражается процентно-весовым отношением к общему количеству загрязнения. Выбор в качестве эквивалента соли NaCl обусловлен тем, что она составляет основную часть хорошо растворимых компонентов солончаковых загрязнений, присутствием которых определяются проводящие свойства слоя отложений изоляторов.

Иногда степень опасности загрязнений характеризуется величиной поверхностной плотности водорастворимых солей

$$\sigma_{pc} = \sigma \frac{\mu}{100}, \quad (1)$$

где μ —суммарное солесодержание загрязнения.

Зависимость эквивалентного солесодержания от удельной проводимости 5%-ного раствора загрязнения

γ $10^{-3} \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{см}}$	μ %	γ $10^{-3} \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{см}}$	μ %	γ $10^{-3} \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{см}}$	μ %
0,1	0,10	2,0	2,1	10	11
0,2	0,21	2,5	2,6	12	14
0,3	0,31	3,0	3,3	15	17
0,4	0,41	3,5	3,7	17	20
0,5	0,52	4,0	4,3	20	24
0,6	0,62	4,5	4,8	25	30
0,7	0,73	5,0	5,4	30	37
0,8	0,83	6,0	6,5	35	44
0,9	0,94	7,0	7,6	40	52
1,0	1,04	8,0	8,9	45	59
1,5	1,55	9,0	10,0	50	67

С учетом вышеизложенного поверхностную плотность соли также следовало бы характеризовать через эквивалентное солесодержание

$$\sigma_{ec} = \sigma \frac{\mu}{100}. \quad (2)$$

Однако этот способ, наглядно иллюстрируя количественное соотношение солей, приходящихся на единицу поверхности изоляторов, тем не менее затрудняет сравнение разрядных градиентов, а следовательно, и степени опасности загрязнения.

Обобщенный параметр загрязнения должен определяться выражением, обратно пропорциональным разрядному напряжению загрязненной изоляции. Для его определения может служить формула [1].

$$z = \left(\sigma \sqrt[3]{\mu^2} \right)^{\frac{n}{n+1}}, \quad (3)$$

где σ —средняя плотность загрязнения, мг/см²,

$n = 0,6 \div 0,7$ —показатель статической вольтамперной характеристики дуги.

Ввиду того, что требуемые уровни изоляции зависят от различных причин, в том числе от класса напряжения и ответственности линий, то применяемая классификация загрязняемых районов по необходимой длине пути утечки не может быть признана достаточно строгой. Для районирования областей с солончаковым загрязнением более приемлема классификация, основанная на использовании характеристик загрязнения в соответствии с величиной снижения разрядного напряжения изоляторов, т. е. по параметру z .

Оценки степени снижения разрядного напряжения изоляторов тапелочного типа можно производить по следующей формуле [1].

$$U_p = \frac{r}{z} (0,125 K_{\phi})^{\frac{n}{n+1}} L^{\frac{1}{n+1}}, \quad (4)$$

где r —коэффициент, учитывающий неравномерность загрязнения изоляторов,

K_{ϕ} — коэффициент формы изоляторов,

L — длина пути утечки, см.

Из (3) и (4) следует, что в той области изменения характеристик загрязнения, которая имеет место на линиях электропередачи, расположенных на территории республики, разрядное напряжение изоляторов может изменяться в очень широких пределах. Например, при крайних значениях интенсивности загрязнений, имеющих место в некоторых районах (рис. 2), разрядные напряжения изоляторов могут отличаться более чем в два раза.

При выборе или усилении изоляции возникают затруднения уже при увеличении длины гирлянды сверх расчетной на несколько десятков процентов. Это приводит к тому, что при ошибках в оценке величины загрязнения изоляции или степени снижения ее разрядного напряжения возможно значительное ухудшение эксплуатационной надежности линий электропередачи. К таким же последствиям может приводить увеличение загрязненности атмосферы, происходящее с течением времени в результате хозяйственной деятельности и освоения новых районов (распыление удобрений и ядохимикатов с помощью авиации, орошение, приводящее к засолению почв, и т. д.). Поэтому при выборе изоляции ответственных линий электропередачи в некоторых случаях целесообразно предусматривать возможность последующего усиления изоляции.

Из (4) следует, что наиболее крутое снижение кривой разрядного напряжения гирлянд линейных изоляторов будет иметь место уже в области малых интенсивностей загрязнения. В результате, при сравнительно небольшом увеличении фактической загрязненности, по сравнению с расчетной, уровень изоляции линий электропередачи, рассчитанный на слабые загрязнения, снижается в значительно большей степени, чем такой же уровень в районах с более интенсивным загрязнением и, соответственно, более усиленной изоляцией. Это обстоятельство должно быть учтено при анализе опыта эксплуатации и, в особенности, при выборе изоляции линий со слабым загрязнением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джуварлы Ч. М., Нурмамедов Т. А. К выбору изоляции ЛЭП по характеристикам загрязнения, "Изв. АН Узб. ССР," серия физ.-техн. и матем. наук №5, 1969.

2. Нурмамедов Т. А. Влияние некоторых метеорологических величин на аварийность линий электропередачи при загрязнении изоляции. Материалы по обмену опытом эксплуатации и исследованию энергетических установок в системе "Азглав-энерго". Баку, 1969.

Институт энергетики

Поступило 14. X 1969

Ч. М. Чуварлы, Т. А. Нурмамедов

Шоранлыг чирклэнмэлэринин хэтт изолјаторларына тэ'сири

ХҮЛАСЭ

Мэ'галэдэ шоранлыг чирклэнмэлэринин топланмасынын иглим хүсусијјэтлэринин хэтт изолјаторларынын бошлама кэркинлијинэ тэ'сириндэн бэһс едилмишдир.

Мүэјјэн олунмушдур ки, республикамызын эразисиндэ јерлэшмиш EBX-лэрин изолјасијасынын чирклэнмэси нэтичэсиндэ онларын бошала кэркинлијинин сэрхэд гијмэтлэри бир-бириндэн ики дэфэдэн чох фэрглэнэ билэр.

Бошала кэркинлијинин чирклэнмэдэн асылылыгы тэгрибэн експоненциал эјри үзрэ олур. Буна көрэ дэ чирклэнмэ кичик интенсивлијэ малик аралыгда дэјишдикдэ хэтт изолјаторларынын бошала кэркинлији даһа чох азалыр. Нэтичэдэ, чирклэнмэ һесабат гијмэтиндэн бир аз чохалдыгда кичик чирклэнмэлэрлэ һесабланмыш EBX-ин бошала кэркинлији, бөјүк чирклэнмэлэрлэ һесабланмыш вэ буна көрэ дэ изолјасијасы јүксэк олан EBX-ин бошала кэркинлијиндэн чох азалыр. Бу амиллэр EBX-ин изолјасијасыны сечдикдэ вэ истехсалатда баш вермиш гезалары анализ етдикдэ нэзэрэ алынмалдыр.

А. А. АЛИЗАДЕ, Д. А. КУЛИЕВ

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОЛНИИ В ГОРНЫХ И НИЗМЕННЫХ УСЛОВИЯХ

На протяжении ряда последних лет лабораторией грозовых процессов и грозозащиты АзНИИ энергетики им. И. Г. Есьмана проводятся систематические исследования грозовой деятельности на территории Азербайджана, механизма и параметров молнии в низменных и горных районах.

На основании фактического материала подробно охарактеризовано распределение грозовой деятельности по районам республики и приведено картографирование территории Азербайджана по важнейшим, с точки зрения грозозащиты, показателям: числу гроз и грозодней, повторяемости гроз в разрезе суток, продолжительности гроз в часах и, что самое главное, грозопоражаемость 1 км^2 земной поверхности за 1 грозо час [1, 2, 3].

Для иллюстрации на рис. 1 приводятся кривые, которые показывают изменения этих показателей в течение 1960—1968 гг. в характерной горной местности Пиркули (высота над ур. м. 1510 м), где ежегодно работает наша научная экспедиция.

Результаты полевых исследований позволили выявить ряд специфических особенностей протекания грозовых процессов в условиях высокогорья [4]. Например, было замечено, что грозовые облака имеют ячеистую структуру, поэтому молниевые разряды появляются сериями, т. е. из каждой ячейки происходит по 10—20 разрядов с интервалом в среднем около одной минуты; паузы между последовательно проявляющими электрическую активность ячейками, как правило, длятся по 10÷15 минут.

Обычно грозовые облака в условиях горной местности состоят из 2÷3 ячеек, но бывает и больше.

Далее было установлено, что наряду с общим генеральным направлением перемещения грозы в условиях горной местности грозовые облака перемещаются по микротрассам, зависящим от орографии конкретной горной местности.

На основании обширной осциллографической информации и данных оптического метода исследования разработана более подробная пространственно-временная характеристика разрядов молнии, возникающих в условиях высокогорья. На рис. 2 приводятся кривые, показывающие вероятность возникновения молний с различной длительностью (а), различным числом импульсов (б) и интервалом между импульсами (в).

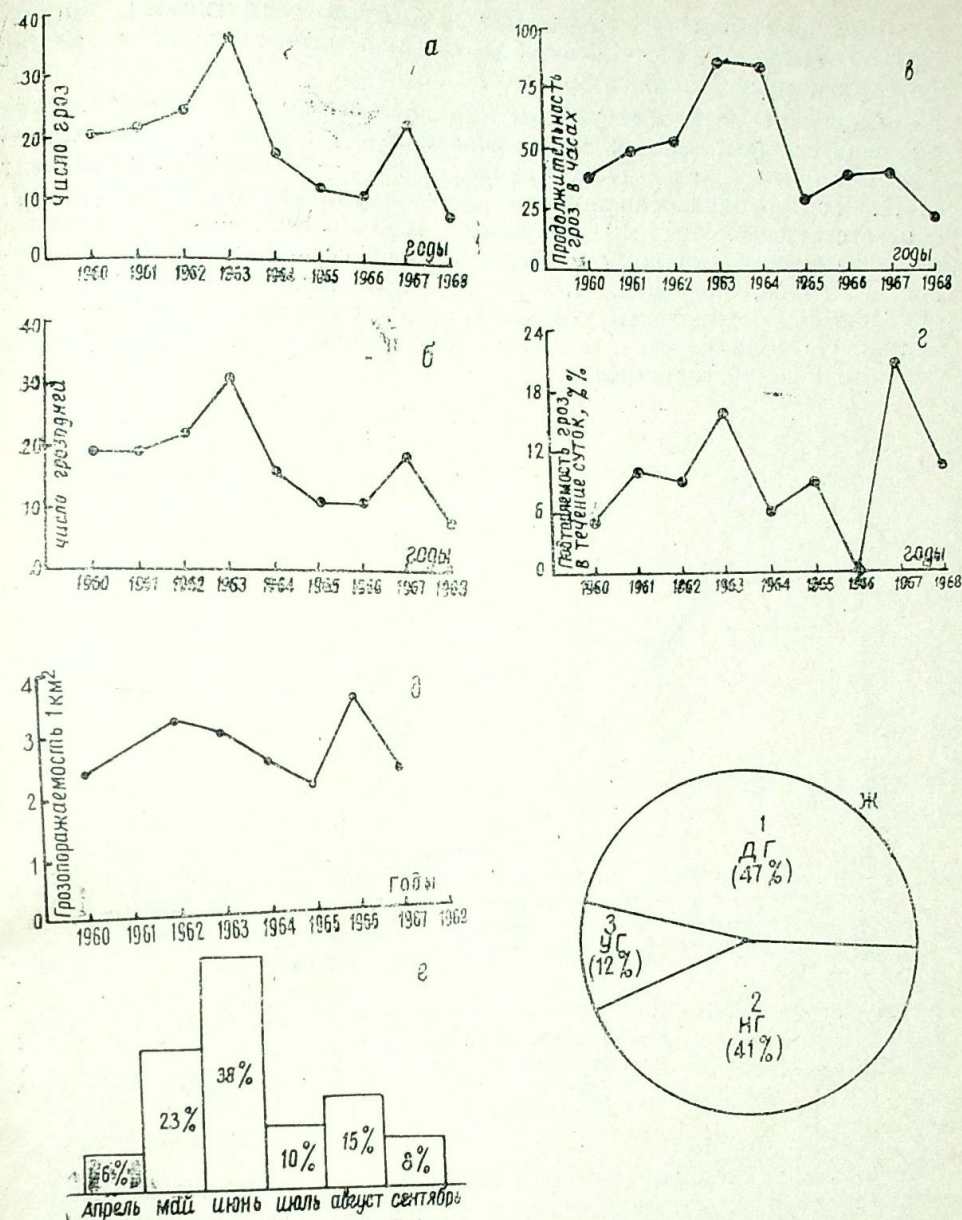


Рис. 1. Изменение интенсивности грозовой деятельности в горной местности Пиркули (Н-1510 м над ур. м.) за 1960—1968 гг..

а—число гроз; б—число грозодней; в—повторяемость гроз в разрезе суток; г—продолжительность гроз в часах; д—грозопоражаемость 1 км^2 за год; е—по месяцам грозового сезона; ж—по частям суток (1—дневные грозы с 09 до 21 часа; 2—ночные грозы с 21 до 03 часа; 3—утренние грозы с 03 до 09 часов).

По данным 340 молний, длительность разрядного процесса меняется от случая к случаю в пределах 0,06—1,5 сек. Средняя длительность одной молнии в горных условиях составляет ~0,4 сек.

Из зафиксированных нами 340 молний 20% были одноимпульсными, а остальные 80%—многоимпульсными. Число импульсов у многоимпульсных молний колеблется в пределах 2—25; среднее количество импульсов в одной молнии составляет ~5.

Интервал времени между друг за другом следующими импульсами составляет 0,001 — 0,3 сек, а средний интервал времени между чередующимися импульсами — около 25 мсек.

Соотношение между ударом молний в землю и в облаках, судя по данным, полученным на высокогорной станции Пиркули (всего 4549 молний: из них — 1724 в землю и 2825 — в облаках), составляет 1:1,7. Расшифровка осциллограмм волн индуктированных напряжений, соответствующих первым импульсам 1055 молний, и осциллограмм, соответствующих полному разрядному процессу 340 молний, ударивших в землю, показала, что из 4316 импульсов тока молнии 2780 (64%) имели отрицательную полярность, 794 импульса (18,8%) — положительную полярность, а остальные 742 импульса (17,2%) по характеру были колебательными.

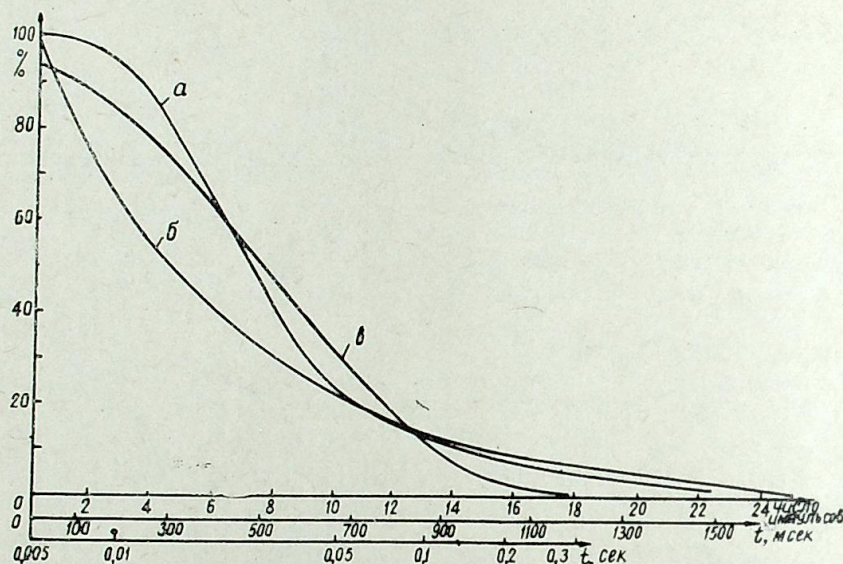


Рис. 2. Вероятность возникновения молний:

- а — с различной длительностью;
- б — с различным числом импульсов;
- в — с различным интервалом времени между импульсами.

На рис. 3 приведена кривая, показывающая величину и частоту возникновения индуктированного напряжения при ударах молний в радиусе от 0,4 до 10 км, в условиях горной местности Азербайджана, на горизонтальной антенне длиной 100 м и высотой подвеса 16 м. В подавляющем большинстве случаев (~99,8%) величина индуктированного напряжения не превышает 30 кВ. При более близких ударах ($R = 0,1 \div 0,4$ км — четыре случая) могут индуктироваться напряжения порядка 200 кВ и более.

Оценка показывает, что в высокогорных условиях Азербайджана ($H > 1400$ м) у 65% молний (из общего количества 1101 молний) амплитуда тока меньше 5 кА; у 35% колеблется в пределах 5 — 40 кА. Токи молнии свыше 40 кА — явление редкое и составляет около 0,1%. Среднее значение амплитуды тока — приблизительно 10 кА.

Для приблизительной оценки крутизны тока молнии, проявляющейся в горных условиях, длительность фронта импульса, индуктированного на антенне напряжения, принималась равной длине фронта тока молнии.

Анализ показывает, что в 90% молний (из общего числа 809 молний) крутизна тока не превышает 5 кА/мксек; у 9,8% молний колеблется в пределах 5 — 20 кА/мксек. Только у 0,2% молний величина крутизны тока превышает 20 кА/мксек. Среднее значение крутизны тока молнии составляет примерно 4 кА/мксек.

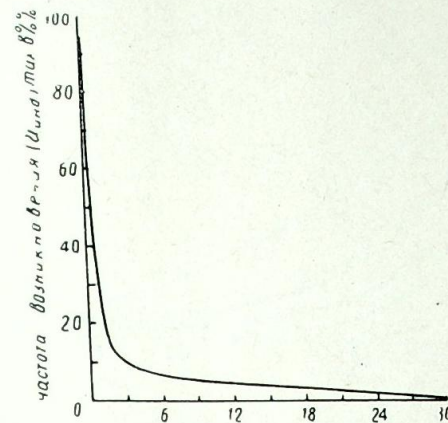


Рис. 3. Вероятность возникновения индуктированного напряжения на горизонтальной антенне ($l = 100$ м и $h = 16$ м) при ударах молнии в землю на расстояниях от 0,4 до 10 км.

Анализ показывает, что в условиях горной местности длина фронта волны тока колеблется в пределах 0,4 — 27 мксек. При этом средняя длина фронта составляет порядка 3 ÷ 4 мксек.

Вот вкратце основные результаты наших полевых исследований молний в условиях высокогорья.

Значительный материал получен нами при совместном измерении крутизны и амплитуды тока прямых ударов молний на линиях электропередачи Азглавэнерго. Здесь анализируются данные 329 ПУМ, зафиксированных в течение 1964 — 1968 гг. на шести контрольных участках ЛЭП общей протяженностью 271 км, расположенных на равнинной ($H < 400$ м), предгорной ($400 < H < 900$ м) и горной ($900 < H < 1400$) местностях. Таким образом, данные охватывают 877 км лет и относятся к ЛЭП 110, 220 и 330 кВ на металлических одноцепных опорах типа „портал“, „рюмка“, „крымский“, защищенных одним и двумя тросами.

На рис. 4, 5, 6 показаны вероятности распределения молний по амплитуде, крутизне и длине фронта волны тока по данным всех замеров, а также распределения этих параметров отдельно по высотам: $H < 400$ м, $400 < H < 900$ м, $900 < H < 1400$ м и $H > 1400$ м.

Для сравнительной оценки на этих рисунках приведены распределения крутизны и амплитудных значений токов молний, рекомендуемых РУ. (Длина фронта молнии находилась как частное от деления амплитуды тока на его крутизну).

Примерно у 95% молний амплитуда тока находится в пределах 100 кА, у 5% — больше 100 кА; максимальная амплитуда тока составляет 166 кА, среднее значение — 40 кА.

У 94,5% молний крутизна тока находится в пределах 50 кА/мксек, у 5,5% — больше 50 кА/мксек. Максимальная крутизна тока составляет 83 кА/мксек, а средняя величина крутизны — 20 кА/мксек.

У 24% молний, поразивших ЛЭП, длина фронта меньше 1 мксек; у 59% — заключена в пределах 1 — 3,5 мксек. Число молний с длиной

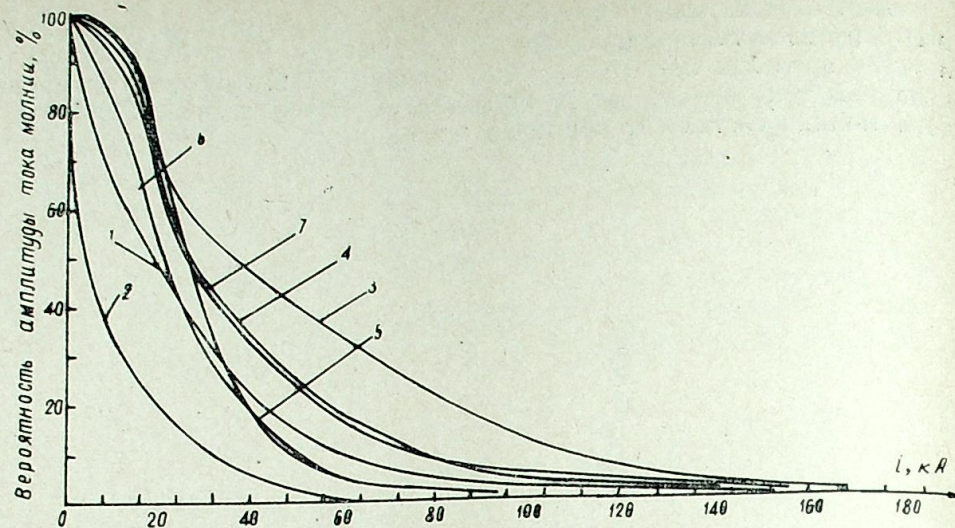


Рис. 4. Вероятность возникновения молний с различной амплитудой тока.

- 1—для равнинных районов (по РУ);
- 2—для горных районов (по РУ);
- 3—равнинная местность ($H < 400$ м);
- 4—предгорная местность ($400 < H < 900$ м);
- 5—горная местность ($900 < H < 1400$ м);
- 6—высокогорная местность ($H > 1400$ м);
- 7—по данным всех измерений (334 случая).

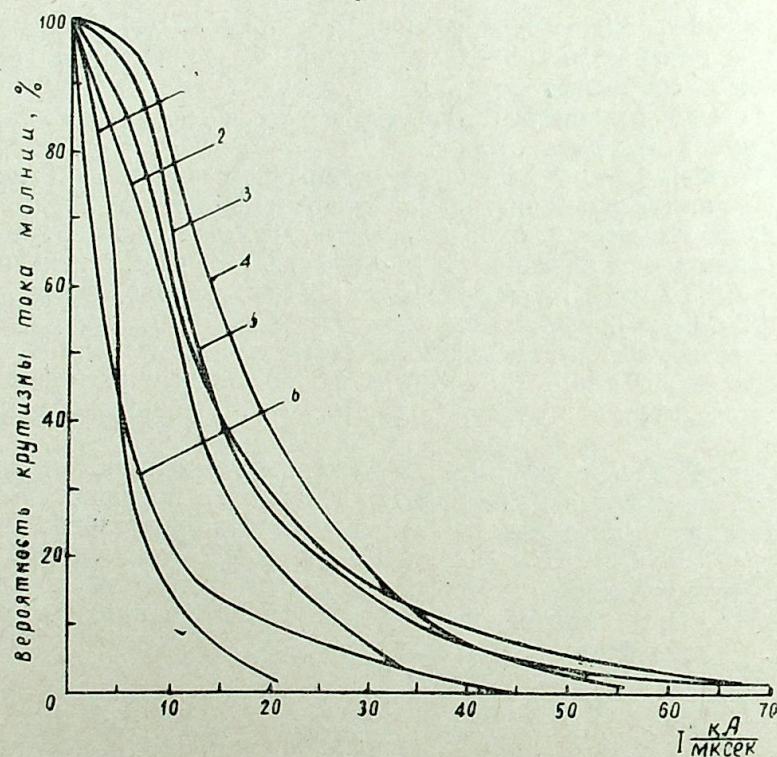


Рис. 5. Вероятность возникновения молний с различной крутизной тока:

- 1—равнинная местность;
- 2—предгорная местность;
- 3—горная местность;
- 4—высокогорная местность;
- 5—по данным всех измерений;
- 6—по данным ЭНИН (185 регистраций 1939—1940 гг.)

фронта более 3,5 мксек составляет 17%. Средняя длина фронта тока молнии — 2 мксек.

Особый интерес, с точки зрения грозозащиты, представляет исследование вопроса о наличии или отсутствии статистической связи между амплитудой и крутизной на фронте волны тока молнии. В наших исследованиях обнаруживается, что амплитуда и крутизна тока молнии статистически зависят друг от друга и коррелируют через фронт порядка 2 мксек.

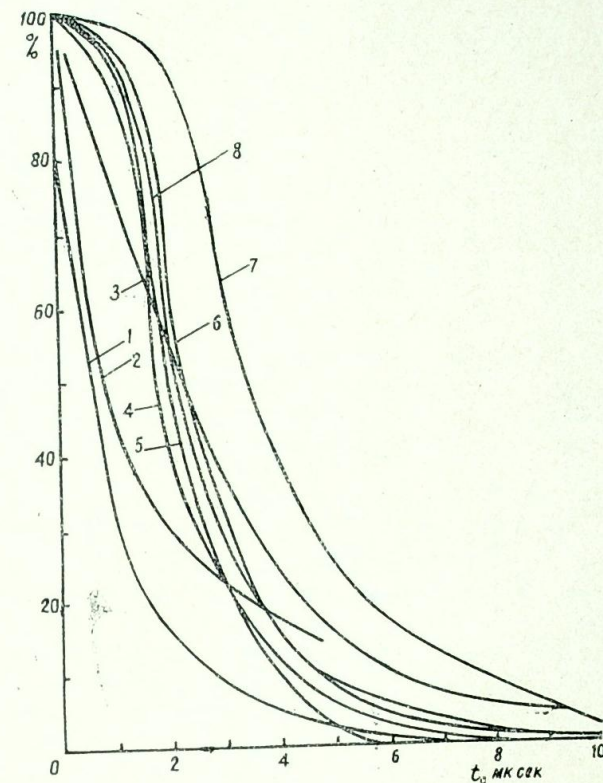


Рис. 6. Вероятность возникновения молний с различной длиной фронта волны тока:

- 1—по данным В. С. Комелькова [6];
- 2—по данным Мак-Кана [7];
- 3—по данным Мак-Икрона [8];
- 4—равнинная местность;
- 5—предгорная местность;
- 6—горная местность;
- 7—высокогорная местность;
- 8—по данным всех измерений.

На рис. 7 приведен график зависимости крутизны тока от амплитуды тока молнии (по данным 310 прямых ударов молнии), из которого видно, что с увеличением амплитуды тока молнии растет и крутизна тока. Расчет показывает, что величина коэффициента корреляции между этими важнейшими расчетными параметрами молнии составляет +0,64. На наличие достаточно тесной и реальной связи между крутизной и амплитудой тока молнии указывают и данные табл. 1, где амплитуды токов молнии разбиты на 8 групп с интервалом в 20 кА и для каждой группы показаны средние значения амплитуды и крутизны тока.

Следует сказать также о том, что амплитуда и крутизна тока молнии заметно уменьшаются с увеличением величины сопротивления заземления пораженных опор.

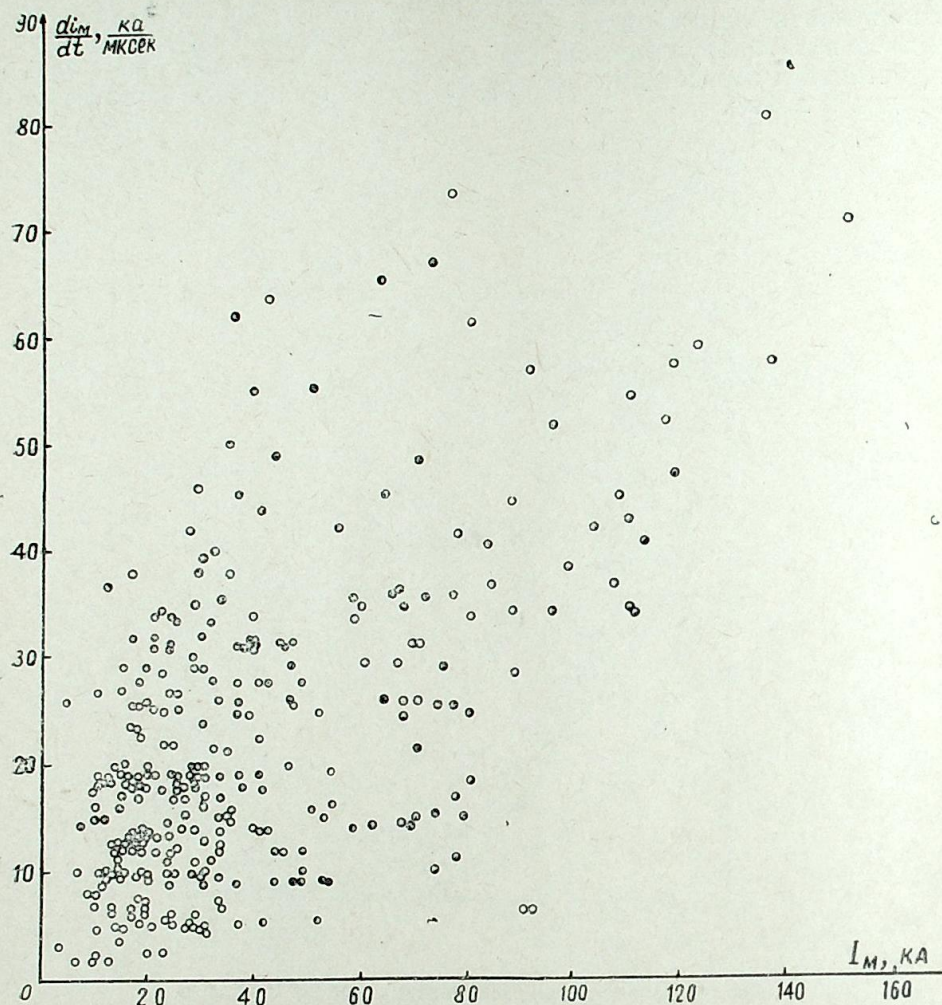


Рис. 7. Статистическая связь между амплитудой и крутизной на фронте волны тока молнии.

Исследование прямых ударов молнии на ЛЭП, кроме сказанного, позволяет судить о характере распределения грозовых поражений вдоль линий электропередачи.

На рис. 8 приводятся картины фактического распределения зафиксированных молний по шести контрольным участкам ЛЭП 110, 220 и 330 кВ, из которых видно, что на всех участках грозовые поражения распределяются крайне неравномерно. Наряду с большим количеством опор (пролетов), которые за исследуемый отрезок времени ни разу не поражались, имеются пораженные по два раза, а на двух участках имеются опоры, поражаемые по три и даже четыре раза.

Проведенные исследования позволяют также провести сравнительную оценку параметров молнии в низменных и горных условиях. Максимальные, минимальные и средние значения этих параметров для горной и равнинной местностей сведены в табл. 2.

Наши исследования наряду с подробной энергетической, геометрической и пространственно-временной характеристикой молнии позволяют сделать ряд важных выводов, необходимых при расчетах оптимальных и эффективных мер грозозащиты различных народнохозяйственных объектов, в том числе горных энергосистем.

Таблица 1

N группы	Диапазон амплитуды тока молнии кА	Количество молний в группе	Средние значения амплитуды и крутизны тока в группе	
			Амплитуда тока, кА	Крутизна тока, кА/мксек
1	до 20	90	13	15
2	20—40	115	29	19
3	40—60	40	50	25
4	60—80	31	74	32
5	80—100	16	93	39
6	100—120	11	113	43
7	120—140	4	132	61
8	140 и выше	3	153	64

1. Между амплитудой и крутизной тока молнии существует статистическая связь с коэффициентом корреляции порядка $+0,64$.
2. Вероятность появления молний с амплитудой тока свыше 100 кА в условиях Азербайджана велика по сравнению с величиной, рекомендуемой РУ.
3. Крутизна тока молнии довольно часто превышает величину 50 кА/мксек, принятую действующими РУ как максимальную.
4. Амплитуда и крутизна тока молнии уменьшаются с повышением местности, в то время как длина фронта волны тока практически остается неизменной.
5. Амплитуда и крутизна тока молнии уменьшаются с увеличением сопротивления заземления пораженной опоры.
6. Распределение грозовых поражений вдоль ЛЭМ происходит весьма неравномерно.

Таблица 2

Параметры молнии	Горная местность			Равнина		
	минимум	максим.	средн.	минимум	максим.	средн.
Амплитуда тока, кА	1	40	10	5	166	40
Крутизна тока, кА/мксек	0,5	28	4	2	83	20
Длина фронта, мксек	0,4	27	3,5	0,2	15,3	2

ЛИТЕРАТУРА

1. Ализаде А. А., Кулиев Д. А. К исследованию некоторых вопросов грозовых процессов. Баку, Труды энергетического института, т. XVI, 1964.
2. Ализаде, А. А., Кулиев Д. А. Сравнительная оценка параметров молнии в горных и низменных условиях. Фрунзе, Тезисы докладов и сообщений, IV Научно-технического и координационного совещания по высокогорным электропередам от 24—26 сентября 1968.
3. Ализаде А. А., Кулиев Д. А. Результаты исследования молнии осциллографическим методом. Баку, "Изв. АН Азерб. ССР", серия физ.-матем. и техн. наук, № 2, 1965.

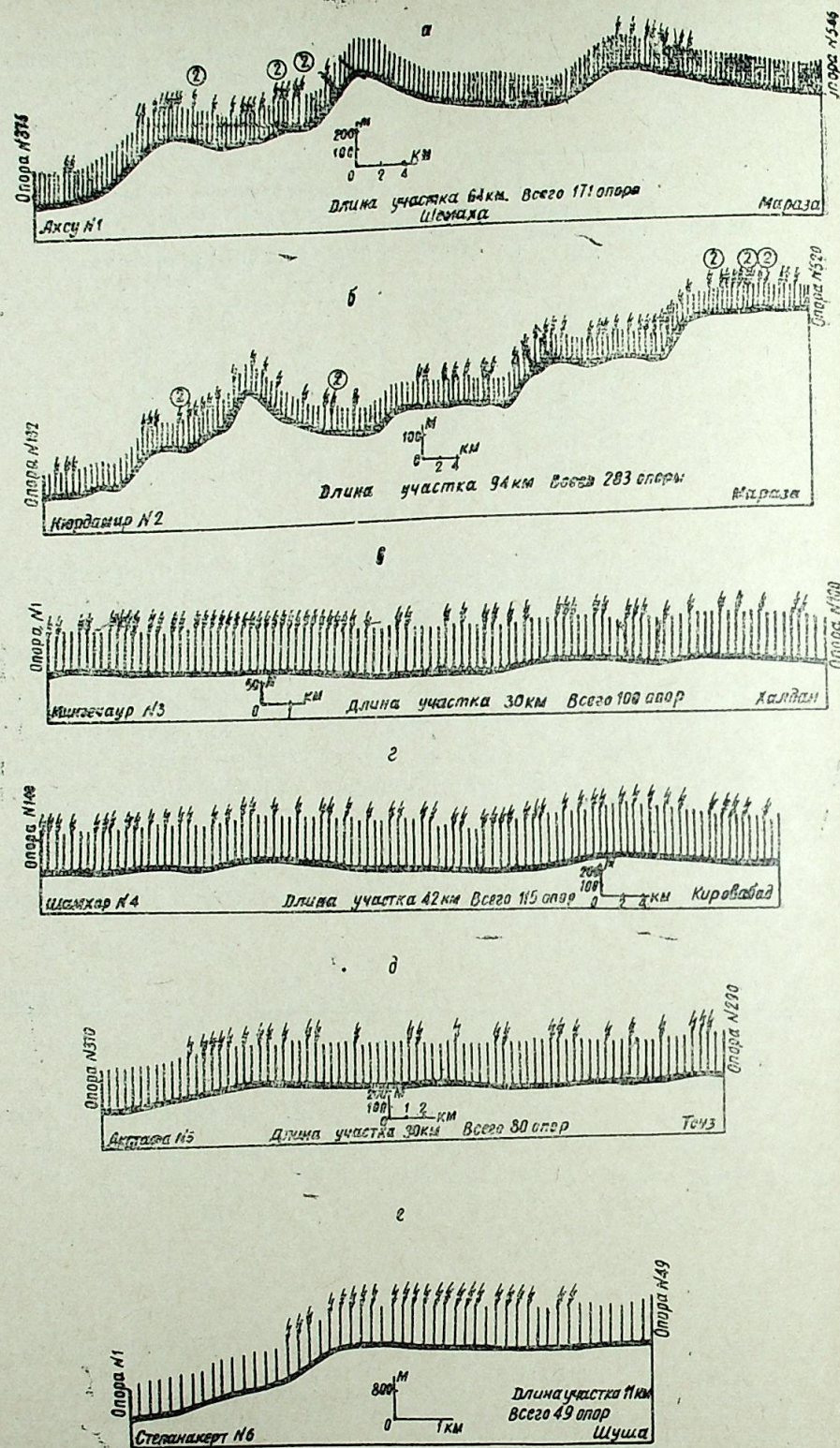


Рис. 8. Распределение прямых ударов молний вдоль шести контрольных участков линий электропередачи 110, 220 и 330 кВ.

4. Ализаде А. А., Кулиев Д. А. Исследование некоторых вопросов грозных явлений в полевой лаборатории, Баку, Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, № 2, 1962.
5. Стекольников И. С. Физика молнии и грозозащиты. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1943.
6. Комельков В. С. ЖТФ, 12, 273, 1942.
7. Mc Cann G. D. Trans. Am. Inst. Electr. Eng., 63, 1157, 1944.
8. Mc Eachron K. B. Journ. Frankl. Inst., 227, 149, 1939.

Институт энергетики

Поступило 17. VII 1969

С. А. НИКИТИН

К ВОПРОСУ ОБ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОГО ГАЗА В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

В данной работе рассматривается нелинейная задача об изотермическом движении вязкого газа в круглой трубе конечной длины. Течение газа предполагается ламинарным и осесимметричным. Задача решается на основе системы нелинейных дифференциальных уравнений типа уравнений пограничного слоя. Все величины, характеризующие течение газа, выражаются в виде функций от давления, которое в данной постановке зависит только от продольной координаты z . Для давления получается обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, которое для одного из примеров проинтегрировано численно на ЭВМ „Мир“. Полученное распределение давления и поля скоростей вдоль трубы сравнивается с решением этой же задачи, данным в работе [1] в линейной постановке. Рассмотрены различные случаи распределения скоростей в начальном сечении трубы.

1. Направим ось z цилиндрической системы координат вдоль оси трубы, поместив начало координат во входном сечении. Будем считать, что радиус трубы r_0 значительно меньше ее длины l . Течение газа считаем осесимметричным, установившимся и ламинарным. В такой постановке задача сводится к решению уравнений „тонкого слоя“ для трубы [2]

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (1, 1)$$

$$A \frac{\partial p}{\partial z} + B \rho \left(V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r}, \quad (1, 2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r V_z) = 0, \quad (1, 3)$$

$$p = \rho, \quad (1, 4)$$

где r, z, p, ρ, V_r, V_z — безразмерные переменные, которые связаны с размерными величинами $r', z', p', \rho', V_r', V_z'$ по формулам $r' = r_0 \cdot r, z' = l \cdot z, p' = P \cdot p,$

$$\rho' = \frac{P}{RT} \cdot \rho, \quad V_r' = U \frac{r_0}{l} \cdot V_r, \quad V_z' = U \cdot V_z. \quad (1, 5)$$

При этом

$$A = \frac{Re \cdot \varepsilon}{M^2}, \quad B = Re \cdot \varepsilon, \quad Re = \frac{U r_0}{\nu}, \quad \varepsilon = \frac{r_0}{l},$$

$$M^2 = \frac{U^2}{RT}, \quad \nu = \frac{\mu RT}{P}, \quad P = p'(z = 0). \quad (1, 6)$$

Величины p, ρ, V_r, V_z должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$V_r = 0, \quad V_z = 0 \quad \text{при } r = 1; \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0, \quad V_r \text{ — ограниченная функция при } r = 0; \quad (1, 7)$$

$$p = \rho = 1, \quad V_z = f(r) \quad \text{при } z = 0.$$

Предполагается, что известен массовый секундный расход газа Q . 2. Из уравнений (1, 1) и (1, 4) следует, что

$$p = \rho = \varphi(z). \quad (2, 1)$$

Будем искать $V_z(r, z)$ в следующем виде:

$$V_z = F_0(z) + r F_1(z) + r^2 F_2(z) + r^3 F_3(z). \quad (2, 2)$$

Из граничных условий (1, 7) следует, что

$$F_1 = 0, \quad F_0 + F_2 + F_3 = 0. \quad (2, 3)$$

Потребуем, чтобы уравнение (1, 2) при задании V_z в виде (2, 2) выполнялось точно, когда $r = 1$. Это дает

$$4 F_2 + 9 F_3 = A \varphi'. \quad (2, 4)$$

Для получения третьего уравнения проинтегрируем уравнение неразрывности (1, 3) по r от 0 до 1. Это дает, согласно граничным условиям, уравнение постоянства безразмерного расхода газа через поперечное сечение трубы

$$\int_0^1 r \varphi V_z dr = c. \quad (2, 5)$$

После подстановки (2, 2) в (2, 5) получим

$$10 F_0 + 5 F_2 + 4 F_3 = \frac{20 c}{\varphi}. \quad (2, 6)$$

Для упрощения дальнейших вычислений выберем масштаб U так, чтобы $20 c = 1$. Тогда U будет равно удельной средней скорости течения газа в начальном сечении трубы.

Решая систему линейных уравнений (2, 3), (2, 4), (2, 6), получим

$$V_z = \frac{1}{21} \left[\left(\frac{5}{\varphi} + A \varphi' \right) - r^2 \left(\frac{9}{\varphi} + 6 A \varphi' \right) + r^3 \left(\frac{4}{\varphi} + 5 A \varphi' \right) \right]. \quad (2, 7)$$

V_r легко находится из уравнения неразрывности (1, 3)

$$V_r = -\frac{A}{21} \left(\varphi'' + \frac{\varphi'^2}{\varphi} \right) (0,5 r - 1,5 r^3 + r^4). \quad (2, 8)$$

Ввиду приближенного задания V_z и V_r уравнение (1, 2) удовлетворим интегрально. Для получения интегрального соотношения, аналога соотношения Кармана в теории пограничного слоя, умножим (1, 2) на $r dr$, (1, 3) на $V_z B dr$, сложим их и проинтегрируем по r от 0 до 1, получим

$$B \frac{d}{dz} \left[\varphi \int_0^1 r V_z^2 dr \right] = -\frac{A}{2} \frac{d\varphi}{dz} + \left[\frac{\partial V_z}{\partial r} \right]_{r=1}, \quad (2, 9)$$

После подстановки (2, 2) в (2, 9) и несложных преобразований получим для безразмерного давления $\varphi(z)$ обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varphi'' = \frac{-\frac{3}{56} A^2 B \varphi^2 \varphi'^3 + \left(\frac{45}{14} B - \frac{2205}{14} A \varphi^2 \right) \varphi' - 126 \varphi}{AB \left(\frac{27}{70} + \frac{6}{56} A \varphi \varphi' \right) \varphi^2} \quad (2, 10)$$

Будем интегрировать (2, 10) при следующих начальных условиях:

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = \frac{\kappa}{A} \quad (2, 11)$$

Задание $\varphi'(0)$ согласно (2, 7) равносильно заданию начального профиля скоростей, форма которого определяется параметром κ .

Заметим, что

$$U = \frac{10 RT Q}{\pi r_0^2 P}, \quad A = \frac{\pi P^2 r_0^4}{10 RT \mu l Q}, \quad B = \frac{10 Q}{\pi \mu l} \quad (2, 12)$$

3. Для интегрирования (2, 10) на ЭВМ сводим его к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме. Эта система уравнений была проинтегрирована на ЭВМ „Мир“ методом Кутты-Мерсона с автоматическим выбором шага интегрирования. Стандартная программа при этом была несколько видоизменена так, чтобы результат интегрирования выдавался с шагом $h = 0,025$. Пример подсчитывался для течения воздуха при следующих параметрах:

$$r_0 = 0,5 \text{ мм}, \quad l = 10 \text{ м}, \quad P = 303974,16 \text{ Н/м}^2 = 3 \text{ атм},$$

$$T = 273,16^\circ \text{ К} = 0^\circ \text{ С}, \quad \mu = 0,1709 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2,$$

$$R = 288 \text{ Дж/кг} \cdot \text{град}, \quad Q = 0,000075 \text{ кг/с}.$$

При этих значениях $U = 247,16 \text{ м/с}$, $A = 1,799$, $B = 1,3969$. Начальные профили скоростей (рис. 1) были взяты при $\kappa = -1, -0,6, -0,2 +$

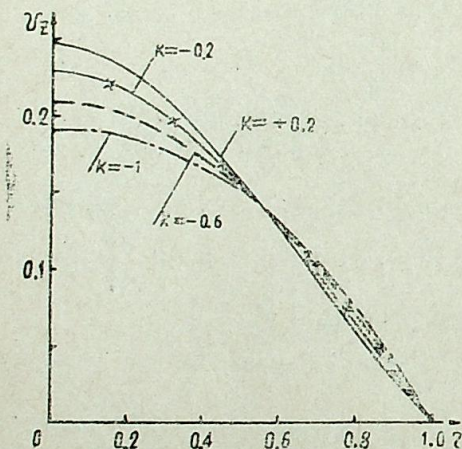


Рис. 1.

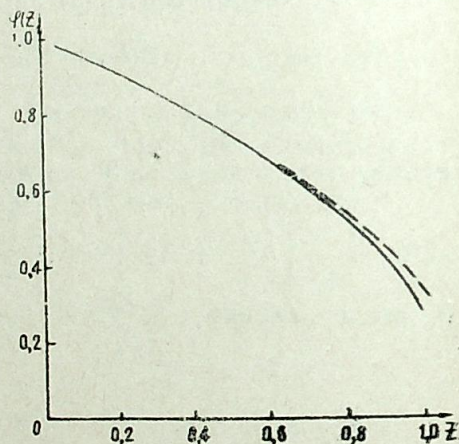


Рис. 2.

$+0,2$, что соответствует значению $\varphi'(0) = -0,555, -0,333, -0,111 +$

$+0,111$. Все четыре графика для давления легли практически на одну кривую, начиная с $z = 0,025$ (на рис. 2 эта кривая показана сплошной линией). Различия между результатами интегрирования наблюдались только в третьей значащей цифре при точности интегрирования, равной 10^{-5} . Отдельный просчет начального участка показал.

что перестройка профиля скоростей V_z происходит очень быстро. Начиная с $z = 0,025$ профили имеют вид, показанный на рис. 3.

На рис. 2 пунктирной линией показан график для давления подсчитанный по формулам работы [1]. Два графика, показанные на рис. 2, имеют небольшое расхождение при $z < 0,025$ и в конце трубы, начиная с $z = 0,5$. В конце трубы при $z = 1$ это расхождение достигает 6% от начального (для данного примера).

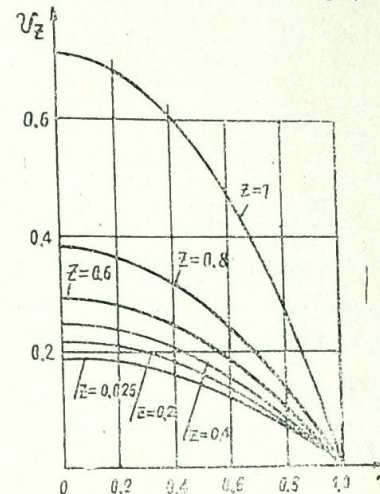


Рис. 3.

Сравнение профилей V_z показывает, что профили, подсчитанные по формуле (2, 7) для $z > 0,025$, весьма близки к параболическим.

Заметим, что начиная с $z = 0,025$. V_r — положительная величина, принимающая нулевые значения на оси и стенках трубы, достигающая наибольшего значения примерно при $r = 0,4$. От незначительной величины V_r при $z = 0,025$ к концу трубы достигает в данном примере величины порядка $0,1 V_z$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахвердиев К. С., Никитин А. К. Об изотермическом движении вязкого газа в длинной круглой трубе. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 5, 1967, стр. 39—45.
2. Быркин А. П., Межиров И. И. С расчета течения вязкого газа в канале. „МИГ“, № 6, 1967.

Ростовский
государственный университет

Поступило 2. X 1969.

С. А. Никитин

Даирэви боруда өзлү изотермик газын һәрәкәтинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә узун боруда өзлү изотермик газын һәрәкәти гејри-хәтти диференсиал тәнлик илә ифадә едилмишдир.

Газын һәрәкәти симметрик гәрарлашмыш вә ламинар гебул едилмишдир.

Сүр'әтин тәгриби профили верилмәклә мәсәләнин һәлли гејри-хәтти, ади икинчи тәртиб диференсиал тәнлијин һәллине кәтирилмишдир.

Алынмыш диференсиал тәнлијә әсасән һесабат апарылмыш вә газын һәрәкәтини характеризә едән бүтүн параметрләр тапылмышдыр.

С. М. ГАДИЕВ, М. В. ЛУРЬЕ, А. М. МИРЗАБАБАЕВА

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СВАЯХ БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ ПРИ ЗАБИВКЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ УДАРНЫМИ МЕХАНИЗМАМИ

Возникновение колебаний в сваях при их заглублении изучалось в работах [1—5]. Исследования проводились с целью оценки доли энергии удара, непосредственно расходуемой на заглублении свай; выявления остаточных деформаций и несущей способности свай; оптимизации процессов забивочных работ. В этих работах рассматривались продольные колебания свай, несущие основную энергию удара.

В лаборатории „Вибровоздействия“ МИНХ и ГП разработан высокочастотный виброударник для забивки длинных свай, в частности свай, заглубляемых в морское дно. При забивке свай и в первую очередь свай большой длины такими виброударниками, обладающими высокой импульсивностью, необходимо учитывать явление, связанное с динамической неустойчивостью прямолинейной формы оси свай, а также возникновение интенсивных поперечных колебаний, поглощающих значительную долю энергии удара. Это явление, впервые изученное советскими учеными [7—9], препятствует нормальному процессу забивки, делая его в ряде случаев практически невозможным и может вызвать даже разрушение свай.

В теории упругости хорошо известно явление статической неустойчивости, заключающееся в том, что стержень, подверженный воздействию продольной сжимающей силы P_0 сохраняет свою прямолинейную форму оси до тех пор, пока сжимающая сила меньше некоторого критического значения P_c .

При $P_0 < P_c$ прямолинейная форма стержня устойчива по отношению к произвольному малому возмущению. Напротив, при $P_0 \geq P_c$ прямолинейная форма находится в состоянии неустойчивого равновесия. Достаточно уже малого воздействия для того, чтобы равновесие нарушилось и произошел изгиб. Для закрепленного стержня эта сила $P_c = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$, где E —упругая постоянная, J —наименьший из

статических моментов инерции сечения стержня, l —длина стержня.

Пусть теперь тот же стержень подвержен воздействию периодически меняющейся предельной нагрузки [7]. В этом случае потеря устойчивости стержнем может произойти еще задолго до того, как амплитуда колебаний достигнет своего критического значения P_c . Это обстоятельство, связанное с вибрационностью нагрузки, является проявлением динамической неустойчивости и его необходимо учиты-

вать особенно при больших частотах воздействия, а также при заглублении свай большой длины. Потеря динамической устойчивости если и не приведет к разрушению свай, во всяком случае будет способствовать возникновению сильных поперечных колебаний задолго до того, как значение нагрузки станет критическим,

Пусть забивка свай (рис. 1) производится ударным механизмом,



Рис. 1. Забивка свай под действием переменного-продольной силы P .

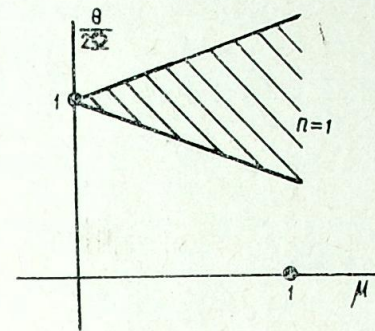


Рис. 2. Зависимость зоны интенсивного возбуждения поперечных колебаний от коэффициента пульсации.

совершающим N ударов в секунду, при весе ударника G кг и конечной скорости удара V_0 м/сек. Можно принять, что свая подвержена периодической нагрузке, которую можно записать в виде:

$$P(t) = \frac{G V_0 N}{g} + \frac{G V_0 N}{g} \cos \omega t; \quad \omega = 2\pi N$$

Здесь g —ускорение силы тяжести. В этом случае полный импульс, передаваемый ударным механизмом свае за один период, сохраняется:

$$\frac{G V_0}{g} = \int_0^{1/N} P(t) dt$$

Для рассмотрения характера возникающих в свае колебаний под воздействием такой периодической силы используем уравнения поперечных колебаний призматического бруса:

$$E \cdot J \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + P_0 (1 + \cos \omega t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma E}{g} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $E \cdot J$ —жесткость свай на изгиб, γ —удельный вес материала свай, F —площадь сечения свай, $P_0 = \frac{G V_0 N}{g}$. Технология забивочных работ диктует краевые условия опорного закрепления для этого

уравнения; при $x = 0$ и $x = l$ должно быть:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0; \quad u'_{xx}(0, t) = u'_{xx}(l, t) = 0. \quad (2)$$

Это дифференциальное уравнение четвертого порядка с периодическими по времени коэффициентами определяет те условия, при

которых движение свай становится неустойчивым, прогибы сильно возрастают, теоретически до бесконечности (так как уравнение линейное), а практически возбуждаются интенсивные поперечные колебания.

Решения уравнения (1) при условиях (2) ищутся в виде [7]:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (3)$$

где X — функция только от x , а T — функция только от t . Подстановка этого выражения в уравнение (1) дает:

$$\frac{1}{X} \left[\frac{d^4 X}{dx^4} + \frac{P_0}{JE} (1 + \cos \omega t) \frac{d^2 X}{dx^2} \right] + \frac{\gamma F}{gEJ} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = 0 \quad (4)$$

Так как X и ее производные зависят только от x , а T со своими производными — только от времени t , то последнее уравнение распадается на два:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \left[\frac{d^4 X}{dx^4} + \frac{P_0}{JE} (1 + \cos \omega t) \frac{d^2 X}{dx^2} \right] &= \alpha + \beta (1 + \cos \omega t) \frac{P_0}{JE} \\ \frac{\gamma F}{gEJ} \frac{d^2 T}{dt^2} &= -\alpha - \beta (1 + \cos \omega t) \frac{P_0}{JE} \end{aligned} \quad (5)$$

Учет граничных условий (2) приводит к решению первого уравнения в следующем виде:

$$X_n = D_n \sin \frac{\pi n x}{l} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

а для величин α_n и β_n получаются соотношения:

$$\alpha_n = \frac{\pi^4 n^4}{l^4}; \quad \beta_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

После этого второе уравнение системы (5) приобретает вид:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{\pi^4 n^4 gEJ}{\gamma F l^4} \left[1 - \frac{P_0 l^2}{n^2 \pi^2 EJ} (1 + \cos \omega t) \right] T = 0 \quad (6)$$

Введем общепринятое обозначение $P_s = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}$ для статической критической силы n -го тона, $\Omega^2 = \frac{EJg}{\gamma F} \cdot \frac{\pi^4 n^4}{l^4} \left(1 - \frac{P_0}{P_s} \right)$ — для квадрата

частоты n -го тона собственных колебаний стержня, нагруженного постоянной составляющей продольной силы. $\mu = P_0/(P_s - P_0)$ — коэффициент пульсации n -го тона. Тогда уравнение (6) можно записать так:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \Omega^2 (1 + \mu \cos \omega t) T = 0 \quad (7)$$

Уравнение (7) — хорошо известное уравнение Матье [6], неограниченно возрастающие решения которого в связи с приложениями изучались Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [8], И. И. Гольденблатом [9] и др. Общая теория этих уравнений показывает, что существует целый ряд областей интенсивного возбуждения поперечных колебаний при малых коэффициентах пульсации, лежащих вблизи частот:

$$\omega = \frac{2\Omega}{\pi n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

или количество ударов в секунду, близких к величинам:

$$N = \frac{\Omega}{\pi^2 n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

В соответствии с числом n различается ряд областей неустойчивости. Для практики наиболее важно избежать первой зоны неустойчивости, получаемой при $n = 1$. Весьма важен следующий факт: при увеличении коэффициента пульсации зона интенсивного возбуждения поперечных колебаний значительно расширяется. При заданном коэффициенте пульсации μ использование имеющихся математических исследований уравнения Матье дает границы опасной зоны ($n = 1$) неустойчивости формулой:

$$2\Omega \sqrt{1 - \mu/2} \leq \omega \leq 2\Omega \sqrt{1 + \mu/2} \quad (9)$$

Этот основной вывод указывает, что для каждого коэффициента пульсации μ возрастание частоты забивки может привести к потере устойчивости. Подставляя в (9) формулу (8), имеем:

$$\frac{\pi}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{2\gamma F} \left(2 - \frac{3P_0}{P_s} \right)} \leq N \leq \frac{\pi}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{2\gamma F} \left(2 - \frac{P_0}{P_s} \right)} \quad (10)$$

На (рис. 2) заштрихована область интенсивного возбуждения поперечных колебаний. По оси абсцисс отложены коэффициенты пульсации μ , по оси ординат — отношения частоты вибрации к удвоенной частоте собственных поперечных колебаний под действием постоянной составляющей периодической силы: формула (9) позволяет для каждого заданного μ найти зону «опасных частот». Формула (10) после подстановки $P_s = \frac{\pi^2 EJ}{l^4}$ и $P_0 = G V_0 N/g$ дает:

$$\frac{\pi^2 EJg}{l^4 \gamma F} - \frac{3GV_0 N}{2\gamma F l^2} \leq N^2 \leq \frac{\pi^2 EJg}{l^4 \gamma F} - \frac{GV_0 N}{2\gamma F l^2} \quad (11)$$

Решая систему квадратных относительно N неравенств, находим:

$$M_2 \leq N l^2 \leq M_1$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{\frac{G^2 V_0^2 + \pi^2 EJg}{16 \gamma^2 F^2} - \frac{3GV_0}{4\gamma F}}; \\ M_2 &= \sqrt{\frac{9G^2 V_0^2 + \pi^2 EJg}{16 \gamma^2 F^2} - \frac{3GV_0}{4\gamma F}}; \end{aligned}$$

Элементарный анализ формул (10—11) показывает, что во избежание возбуждения сильных поперечных колебаний (энергия таких колебаний в основном диссипируется в тепло), а также для сохранения прямолинейности свай необходимо либо уменьшить длины свай (что исключено по смыслу проблемы), либо уменьшить частоту забивки или силу удара (что невыгодно), либо, наконец, уменьшить зону, в которой возбуждаются поперечные колебания, путем размещения ударника как можно ближе к основанию свай. Именно это простое инженерное решение в случае ударных механизмов, обладающих большой импульсивностью, и представляется нам наиболее разумным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горюнов Б. Ф. Напряжения, возникающие в железобетонных сваях во время забивки. М.—Л.: изд. «Морской транспорт», 1951.
2. Голубков В. Н. Несущая способность свайных оснований. М. Машстройиздат, 1950.
3. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. ИЛ, 1955.
4. Луга А. А. Свайные работы. М., Трансжелдориздат, 1947.
5. Глушков Г. И. Стастика и динамика сооружений, заглубленных в грунт. М., Стройиздат, 1967.
6. Стретт М. Д. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков—Киев, ОНТИ, НКТП, 1935.

7. Беляев Н. М. Сборник трудов по теории упругости и пластичности. М. Гостехиздат, 1957.

8. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических продольных сил. Сб. трудов Н. М. Крымова, Киев, изд-во АН УССР, 1961.

9. Гольденблатт И. И. Динамическая устойчивость сооружений. М., Стройиздат, 1947.

МИНХ и ГП
и.м. И. М. Губкина

Поступило 10. III 1970

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛЭР АКАДЕМИЯСЫНЫН ХƏБƏРЛƏРİ
Физика-техника və рижизјат елмлери серијасы, 1970, № 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 4

ДЕПОНИРОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 621. 3. 016. 2+36. 001. 2+622. 24. 053+622. 233. 4/7

АННОТАЦИЯ

к статье „Теоретическое исследование мощности, затрачиваемой на холостое вращение колонны бурильных труб при бурении наклонных скважин“*

Я. Б. КАДЫМОВ, Р. Р. БАБАЕВ

Определение момента трения между стенками скважин и колонной бурильных труб при бурении наклонных скважин в стадии проектирования и составления технологии бурения представляет большой практический и теоретический интерес.

Величину вышеуказанного момента можно установить расчетным путем, пользуясь величиной мощности, затрачиваемой на холостое вращение колонны труб ($P_{х.в.}$).

Наряду с количественной оценкой этой величины при проектировании и составлении технологии бурения большой интерес представляет и качественная оценка $P_{х.в.}$.

В работе рассматривается теоретическое определение мощности $P_{х.в.}$ при бурении наклонных скважин.

Расчетное определение $P_{х.в.}$ осуществляется на основе следующих допущений:

- 1) колонна есть гибкая тяжелая нить;
- 2) бурильный инструмент по всей длине прилегает к стенке скважины;
- 3) профиль скважины состоит из прямой и дуг окружностей в одной плоскости по заданному азимуту.

Расчетное значение $P_{х.в.}$ получено в следующем выражении:

$$P = \frac{nr}{975} \left\{ fq \left(1 - \frac{\gamma_{ч.р.}}{\gamma_{тр.}} \right) \left[\left| \left(\frac{l_1}{2} \cos \frac{3\alpha_1}{4} + l_2 \cos \alpha_1 + l_3 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + l_4 \cos \alpha_2 + l_5 \cos \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \right) \left(-\frac{\alpha_1}{57,3} \right) + l_1 \sin \frac{\alpha_1}{2} + |l_5 \sin \alpha_1| + \left| \left(\frac{l_3}{2} \cos \frac{\alpha_1 + 3\alpha_2}{4} + l_4 \cos \alpha_2 + l_5 \cos \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \right) \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{57,3} \right) + l_3 \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + |l_4 \sin \alpha_2| + \left| \frac{l_5}{2} \cos \frac{\alpha_2 + 3\alpha_3}{4} \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{57,3} \right) + l_5 \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \right| \right] + A \right\} + P_{х.в. \text{ верт.}}$$

Азербайджанский политехнический институт

Поступило 27. II 1970

*. Статья полностью депонирована в ВИНТИ (Москва, А-19, Балтийская ул. 14, отдел справочной информации ВИНТИ).

МҮНДЭРИЧАТ

Ж. И. Таирова. Мөһкэмлэнмиш сыхылмајан материалдан дүзэлдм- миш галындиварлы боруја дэјишэн тэзјиг вэ буучу моментин тэсири	3
Д. И. Арихов. Бир гејри-хэтти экстремал-интеграл тэнлијин хэлли хаг- гында	8
Ј. И. Ларионов. Гилберт фазасында һамилтон тэнликлэринин дајаныг- дыг нэзэријэсинэ даир	13
И. И. Мүзэффэров, У. С. Сэфэров. Даирэви ен кэсијэ малик сы- хылмыш чубуғун дајаныглыгы хаггында	19
С. А. Фејзијев. $L_{p, \varphi}^{(s, \varphi)}(E_n^+)$ синфинэ дахил олан функцијаларын интег- рал кестэрилиши вэ аппроксимаси асы хаггында	23
С. Р. Мусајев. Монотон-рекуррент функционал илэ ифадэ олунаи систем үчүн вариантларын ардычыл тәһлил үсулу	31
Н. М. Сәбзијев. Комплекс мүстәвинин верилмиш бучагында сонду тәртиби вэ сонду дәрәчәли там функцијаларын экстремал хассәләри	37
Ф. Һ. Нәсибов. Чохдәишәнли функцијаларын эн јахшы јахындашма тәртиби хаггында бәзи нәтичәләр	45
К. Р. Аллаһвердијев, В. Б. Антонов, Р. Һ. Нани, Е. Ј. Сала- јев. $CdZn_2S_4$ монокристалында дешиклэрин диффузијасынын өлчүлмәси	53
С. А. Абасов, М. А. Бағыров, Т. И. Һүсәјнов, У. Ә. Кабулов. Полистирол плонкасынын мөһкәмлик хассәләринэ озонун тәсири	57
М. Ә. Талиби, М. М. Әлијев. Мис бир-оксидли дүзләндиричиләрин бағлајычы тәбәғәсинин тәбиәти вэ реактив хассәләри хаггында	62
Һ. Б. Абдуллајев, З. Ә. Искәндәрзадә, М. Р. Ахундов, Е. Ә. Чәфэрова, Ш. Ә. Әлиханова. Диффузија јолу илэ алынмыш силициум фотоэлементлэринин реактив хассәләри	65
М. А. Бағыров, В. П. Николајев, В. П. Малин. Һаванын мигда- рыны нэзәр алмагла, һәрәкәт едән јанма мәркәзинэ малик олан нефт лајында температурун пайланмасы	71
С. А. Әлијев, Т. Һ. Һачыјев, Е. М. Әлијев, М. И. Әлијев. Чивә- теллур бирләшмәсиндә электронларын сәпилмә механизмлэри хаггында	76
Н. Ә. Әлијев, Ф. Г. Мәһәррәмова, Б. А. Әһмәдов. 36Г2С мар- калы поладыи истиликкечирмәсинэ термик ишләмәнин тәсириинин тәдгиги	81
З. А. Чәфэров, С. А. Әлијев, М. И. Әлијев. Јүксәк лекирә олуи- муш $JnAs$, $CaSb$ вэ $JnSb$ кристалларыиын истиликкечирмәси	84
Р. Н. Искәндәров. MnO монокристалыиын електрик кечирчилијинин вэ термо EhT -нин тәдгиги	89
А. Ф. Јеремина, З. Д. Нуријева, К. П. Мәммәдов, М. Г. Шаһ- тахтински. Галлиум—керманиумун антимионид системиндә бәрк мәнсулларын олмасына даир	93
Т. А. Әлијев, Ф. М. Һашымзадә. $n-JnSb$ типли јарымкечиричи- ләрдә электронларын сәпилмәси нэзэријэсинэ даир	98
Б. М. Әскәров. Теллурлу висмут кристалларында кинетик эффектләр	103
М. Б. Бабајев. Арасыкәсилмәз спектрин спектрофотометрик тәдгиги	109
Ч. М. Чуварлы, Т. А. Нурмәммәдов. Шорандыг чиркләнмәләринин хәтт изолјаторларына тәсири	116
А. А. Әлизадә, Д. А. Гулијев. Дағ вэ дүзән шәраитиндә илдырым параметрлэринин мүгајисәли гијмәтләндирилмәси	122
С. А. Никитин. Даирәви боруа өзлү изотермик газын һәрәкәтинэ даир	132
С. М. Һадыјев, М. В. Лурје, А. М. Мирзабабајева. Узунлуғу бөјүк олан дирәкләр эрбә вуруларкән енинэ өлчүлэрин дәјишмәси	136

Сифариш кәзләјән мәгаләләр.

Ј. Б. Гәдимов, Р. Р. Бабајев. Маили гујуларын газылмасы шәраи- тиндә газыма боруларынын бош фырланмасына сәрф едилән күүчүн нэзәри тәдгиги	141
---	-----

СОДЕРЖАНИЕ

Ж. И. Таирова. Толстостенная труба из упрочняющегося несжимаемого материала под действием пульсирующегося давления и переменного крутя- щего момента	3
Д. И. Арихов. О решении одного нелинейного интегро-экстремального уравнения	8
Е. А. Ларионов. К теории устойчивости гамильтоновых уравнений в гильбертовом пространстве	13
И. И. Музафаров, У. С. Сафаров. Устойчивость сжатого круглого стержня при ползучести	19
С. А. Фейзи́ев. О представлении и аппроксимации функций прост- ранства $L_{p, \varphi}^{s, \varphi}(E_n^+)$	23
Мусаев Самандар. Метод последовательного анализа вариантов для систем с монотонно-рекуррентными функционалами	31
Н. М. Сабзиев. Экстремальные свойства целых функций конечного порядка и конечного типа в заданном угле комплексной плоскости	37
Ф. Г. Нәсибов. Некоторые результаты о порядке наилучших прибли- жений функций многих переменных	45
К. Р. Аллахвердиев, В. Б. Антонов, Р. Х. Нани, Э. Ю. Сала- ев. Измерение диффузии дырок в монокристаллах $CdIn_2S_4$	53
С. А. Абасов, М. А. Багиров, Т. И. Гусейнов, У. А. Кабулов. Влияние озона на прочностные свойства полистирольной пленки	57
М. А. Талиби, М. М. Алиев. О реактивных свойствах и природе за- порного слоя меднозакисных выпрямителей	62
Г. Б. Абдуллаев, З. А. Искендер-заде, М. Р. Ахундов, Э. А. Джафарова и Ш. А. Алиханова. Реактивные свойства диффузионных кремниевых вентильных фотоэлементов	65
М. А. Багиров, В. П. Николаев, В. П. Малин. Распределение температуры в нефтеносном пласте при движущемся очаге горения с учетом изменений расхода воздуха, нагнетаемого в пласт	71
С. А. Алиев, Т. Г. Гаджиев, Э. М. Алиев и М. И. Алиев. О ме- ханизме рассеяния электронов в $HgTe$	76
Н. А. Алиев, Ф. Г. Маггеррамов, Б. А. Ахмедов. Исследование влияния термообработки на теплопроводность стали марки 36 Г2С	81
З. А. Джафаров, С. А. Алиев, М. И. Алиев. Теплопроводность в сильнолегированных кристаллах $JnAs$, $GaSb$ и $JnSb$	84
Р. Н. Искендеров. Исследование электропроводности и термоэдс мо- нокристаллов MnO	89
А. Ф. Еремина, З. Д. Нуриева, К. П. Мамедов, М. Г. Шахта- тинский. Об области существования твердых растворов в системе антимо- нидгаллия—германий	93
Т. А. Алиев и Ф. М. Гашимзаде. К теории рассеяния электронов в полупроводниках типа $n-JnSb$	98
Б. М. Аскеров. Кинетические эффекты в теллуристом висмуте	103
М. Б. Бабаев. Спектрофотометрическое исследование непрерывного спектра затменно-двойной звезды AW Peg	109
Ч. М. Джуварлы, Т. А. Нурмамедов. Поведение линейной изоля- ции в условиях солончаковых загрязнений	116
А. А. Ализаде, Д. А. Кулиев. Сравнительная оценка параметров молний в горных и низменных условиях	122
С. А. Никитин. К вопросу об изотермическом течении вязкого газа в круглой трубе	132
С. М. Гадиев, М. В. Лурье, А. М. Мирзабабаева. Поперечные колебания в сваях большой длины при забивке высокочастотными ударными механизмами	136

Депонированные статьи

Я. Б. Кадымов, Р. Р. Бабаев. К статье „Теоретическое исследование мощности, затрачиваемой на холостое вращение колонны бурильных труб при бурении наклонных скважин“.	141
---	-----

Сдано в набор 5/X 1970 г. Подписано к печати 9/III 1971 г. Формат бумаги
70×108¹/₁₆. Бум. лист. 4,63. Печ. лист. 12,67. Уч-изд. лист. 11. ФГ 11568.
Заказ 340. Тираж 670 Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Государственный комитет Совета Министров
Азербайджанской ССР по печати. Баку, ул. Ази Асланова, 80.